

# **ALTIMETRIA SATELITAL**

## **MODELOS LOCALES DE GEOIDE**

**Y**

## **NIVELACION GPS**

**Raúl A. Márquez**

**Departamento de Ingeniería en Agrimensura  
Facultad de Ingeniería  
UNSJ**

----- Raúl Márquez, e-mail: [ingramarquez@gmail.com](mailto:ingramarquez@gmail.com) -----

## Indice:

Introducción	pg 3
1.- Determinación del geoides	pg. 4
El método gravimétrico	pg . 4
El método astro-geodésico	pg. 5
2.- Alturas Ortométricas	pg. 6
3.- Los Métodos de Interpolación Superficial	pg. 9
El Método de los Promedios Ponderados	pg. 10
El Método Multicuádrico	pg. 10
El Método de Regresión	pg. 14
4.- Validación de los Métodos de Interpolación Superficial	pg. 19
Validación del Método de los Promedios Ponderados	pg. 22
Validación del Método Multicuádrico	pg. 29
Validación del Método de Regresión	pg. 33
5.- Nivelación GPS	pg. 61
Anexo: Las aplicaciones MATLAB.	pg. 72
Bibliografía	pg.89

## Introducción:

Los métodos clásicos para determinar alturas sobre el nivel medio del mar de puntos sobre la superficie terrestre, son la nivelación geométrica con precisión de unos pocos centímetros o mejor, la nivelación trigonométrica con precisión de algunos decímetros y la nivelación barométrica con precisión más allá del metro.

La geodesia satelital (Sistema GPS) permite, midiendo en modo diferencial estático, obtener alturas elipsoidales muy precisas y mediante técnicas de interpolación superficial, puede estimarse las ondulaciones del geoide. Se logra así convertir alturas elipsoidales en alturas sobre el nivel medio del mar.

Si sobre un área determinada se cuenta con una red de puntos de control bien distribuidos y que tengan coordenadas geodésicas latitud, longitud y altura elipsoidal referidas al sistema global WGS'84 como así también cotas ortométricas, es posible entonces determinar en cada uno de ellos la ondulación del geoide y asignarles un par de coordenadas planas en una determinada proyección cartográfica. Es posible ahora generar un modelo matemático local de ondulaciones del geoide para el área en cuestión e interpolar el valor de la ondulación en todo punto si se conocen las coordenadas planas del punto en cuestión.

La superabundancia de observaciones (vectores GPS y desniveles geométricos) entre los puntos de control, permite efectuar el correspondiente ajuste mínimos cuadrados y el control de calidad de ambas redes, GPS y altimétrica, y estimar la influencia de los errores de los observables propagados a los parámetros ajustados en ambas redes.

Es posible generar ahora un modelo matemático local de ondulaciones a partir de una muestra de puntos de control denominada la muestra generadora, y estimar ondulaciones en cualquier punto del área con sólo conocer su posición planimétrica. Para determinar el error de interpolación, basta seleccionar otra muestra, la muestra interpolada, y estimar las ondulaciones en cada uno de sus puntos mediante el modelo generado. La esperanza matemática de la media muestral de las diferencias entre las ondulaciones estimadas y las ondulaciones efectivas; es decir, las obtenidas a partir de las correspondientes alturas elipsoidales y ortométricas, debe ser igual a cero. La media muestral representa la componente sistemática del error de interpolación mientras que la desviación estándar de las diferencias, es la componente estocástica o aleatoria. El error total de la interpolación es la resultante de ambas. Una prueba de hipótesis y significación indica si debe aceptarse o rechazarse que el valor esperado de las diferencias sea igual a cero. Se dispone pues, de todos los elementos necesarios para estimar el error propagado a la altura sobre el nivel medio del mar, mediante el procedimiento de la conversión.

Se proponen tres caminos para generar modelos matemáticos locales de ondulaciones del geoide, el método de los promedios ponderados, el método multicuádrico y el método de regresión. La validación de los métodos se hizo con datos de la red geodésica de la Dirección de Geodesia y Catastro de la provincia de San Juan, Argentina, que cubre un área de 150000 hectáreas aproximadamente y tiene 112 puntos que cuentan a su vez, con las coordenadas antes mencionadas. El procesamiento numérico de los datos se efectuó con aplicaciones MATLAB desarrolladas a tal efecto.

Se presenta también un método alternativo para convertir alturas elipsoidales en alturas sobre el nivel medio del mar, prescindiendo de los modelos locales del geoide.

Este método utiliza la expresión de la nivelación trigonométrica clásica debidamente modificada, donde el ángulo de altura y la distancia reducida al plano del horizonte se obtienen directamente del vector GPS observado y procesado.

## 1.- Determinación del geode.

La relación existente entre la altura elipsoidal  $h$ , la cota ortométrica  $H$  y la ondulación del geode  $N$ , puede expresarse por:

$$h = H + N \quad (1.1)$$

Según muestra la figura (1.1):

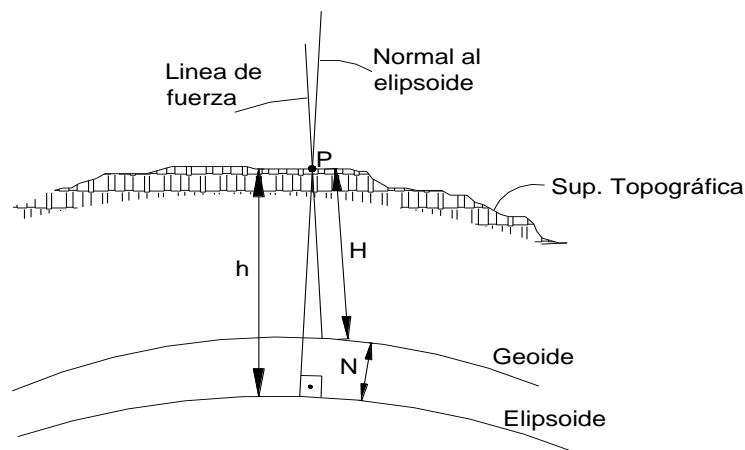


Figura (1.1). Relación entre  $h$ ,  $H$  y  $N$

Entre los métodos clásicos para obtener la ondulación del geode, pueden citarse:

- i) el método gravimétrico
- ii) el método astro-geodésico

**El método gravimétrico:** Puede usarse una multitud de datos para la determinación gravimétrica del geode, tales como modelos geopotenciales globales, anomalías gravimétricas y modelos digitales del terreno. La combinación óptima de tales datos conduce a soluciones con la mejor resolución de las longitudes de onda, necesaria para la representación precisa de las ondulaciones del geode como:

$$N = N_{MG} + N_{\Delta g} + N_h \quad (2.1)$$

donde  $N_{MG}$  es el efecto del modelo geopotencial que representa la característica de la longitud de onda geoidal en distancias del orden de los 100 kilómetros variando muy suavemente en el orden del metro. Puede calcularse a partir de una serie de coeficientes de las armónicas esféricas, determinados a partir de una solución terrestre-satelital combinada. El término  $N_{\Delta g}$  depende de las anomalías de la gravedad,

representando características regionales del geode con longitudes de onda típicas entre los 20 y los 100 kilómetros, variando con una longitud del orden del decímetro y puede calcularse usando el modelo geopotencial como una solución de referencia, respecto de la cual se reducen las anomalías de la gravedad. Asimismo, el modelo geopotencial puede usarse para calcular el efecto de las zonas exteriores y aplicando la fórmula de Stokes, el área para la cual se requieren las anomalías gravitatorias puede reducirse a una pequeña región alrededor del punto que se desea evaluar. El término  $N_h$  representa las características de la longitud de onda por debajo de los 20 kilómetros producida por la topografía, como una contribución del modelo digital del terreno. Este término varía rápidamente con una magnitud del orden del centímetro. El término  $N_h$  es necesario para evaluar los efectos de la gravedad y correcciones topográficas.

**El método astro-geodésico:** Las ondulaciones del geode se obtienen a partir de observaciones astronómicas de latitud y longitud en estaciones con posiciones geodésicas conocidas. En primer lugar se determinan las componentes principales de la deflexión de la vertical:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (3.1)$$

$$\eta = \Lambda - \lambda \quad (4.1)$$

donde  $\Phi$  y  $\Lambda$  indican las coordenadas astronómicas medias mientras que  $\varphi$  y  $\lambda$  son las coordenadas geodésicas. La deflexión de la vertical en una dirección de acimut  $\alpha$ , está dada por:

$$\theta_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \quad (5.1)$$

En la dirección de un perfil de acimut  $\alpha$ , la ondulación del geode puede determinarse por la relación:

$$dN = -\theta_\alpha dS \quad (6.1)$$

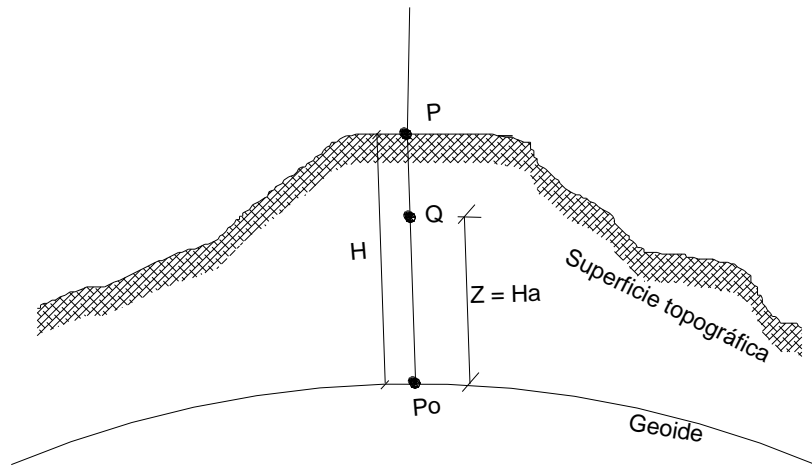
a partir de la cual:

$$N_2 = N_1 + dN \quad (7.1)$$

donde  $dS$  es la distancia desde un punto de ondulación conocida  $N_1$  hasta otro punto de ondulación desconocida  $N_2$ . En perfiles de direcciones norte-sur:  $\theta_\alpha = \xi$  y  $dS = \rho d\varphi$ , y mientras que para perfiles este-oeste:  $\theta_\alpha = \eta$  y  $dS = \nu \cos \varphi d\lambda$  donde  $\rho$  y  $\nu$  son los radios de curvatura principales del elipsoide en el meridiano y en el primer vertical respectivamente.

Existen algunas desventajas asociadas con el método astro-geodésico, tales como los problemas de propagación de los errores y la limitación de la distancia  $dS$ . Combinaciones de técnicas gravimétricas y astro-geodésicas, son también posibles para determinar el geode por el denominado método astro-gravimétrico.

## 2.- Alturas Ortométricas.



Sea  $P_0$  la intersección del geoide con la línea de fuerza por  $P$ , según la figura (2.2):

Figura (2.2): Altura Ortométrica.

Sea  $C$  el número geopotencial de  $P$ , es decir:

$$C = \int_0^H dW = -(W - W_0) = W_0 - W \quad (8.2)$$

donde  $W_0$  es el valor del geopotencial gravitatorio en  $P_0$  y  $W$  es el valor del geopotencial gravitatorio en  $P$ .

Sea  $H$  la altura ortométrica de  $P$ ; es decir, la longitud de la línea de fuerza entre  $P_0$  y  $P$ . Se plantea la integral a lo largo de la línea de fuerza entre  $P_0$  y  $P$ , siendo esto posible puesto que el resultado es independiente del camino. Se tiene entonces:

$$C = \int_0^H g dH \quad (9.2)$$

Esta ecuación contiene a  $H$  en forma implícita, siendo posible explicitar la altura ortométrica  $H$ . Se tiene:

$$dC = -dW = g dH \Rightarrow dH = -\frac{dW}{g} = \frac{dC}{g} \quad (10.2)$$

Se tiene entonces:

$$H = - \int_{w_0}^w \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g} \quad (11.2)$$

como antes, la integral es a lo largo de la línea de fuerza.

La fórmula explícita (11.2) tiene poco significado práctico. Resulta mas conveniente en una fórmula que a primera vista parece trivial:

$$C = \int_0^H g dH = H \left( \frac{1}{H} \right) \int_0^H g dH \quad (12.2)$$

tal que:

$$C = \bar{g} H \quad (13.2)$$

donde:

$$\bar{g} = \left( \frac{1}{H} \right) \int_0^H g dH \quad (14.2)$$

Según el teorema del valor medio del cálculo integral, resulta que  $\bar{g}$  es el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de fuerza entre el geoide, punto  $P_0$ , y la superficie terrestre, punto P.

De la (13.2), se tiene:

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (15.2)$$

que permite calcular H conociendo la gravedad media  $\bar{g}$  a lo largo de la línea de fuerza entre  $P_0$  y P y el número geopotencial C en P.

Para calcular H, se necesita el valor de la gravedad media  $\bar{g}$ . La ecuación (14.2) puede escribirse:

$$\bar{g} = \left( \frac{1}{H} \right) \int_0^H g(z) dz \quad (16.2)$$

donde  $g(z)$  es la gravedad real en un punto variable Q que tiene altura z respecto del geoide, figura (2.2). Considerando lineal la variación de g respecto de z, puede escribirse (Heiskanen y Moritz, 1967):

$$g(z) = g + 0.0848(H - z) \quad (17.2)$$

donde g es la gravedad medida en el punto P. Reemplazando la (17.2) en la (16.2):

$$\bar{g} = \left( \frac{1}{H} \right) \int_0^H [g + 0.0848(H-z)] dz \quad (18.2)$$

Integrando respecto de z, se tiene:

$$\bar{g} = g + 0.0424H \quad (19.2)$$

donde g se expresa en gals y H en kilómetros. Reemplazando la (19.2) en la (15.2):

$$H = \frac{C}{g + 0.0424 H} \quad (20.2)$$

donde C está dado en ugp (unidad geopotencial = 1 kgal-metro), g en gals y H en kilómetros.

De la (20.2):  $0.0424 H^2 + g H - C = 0$ , entonces:

$$H = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 0.1696C}}{0.0848} \quad (21.2)$$

Desechando la solución negativa en (21.2), se obtiene la cota ortométrica H en kilómetros.

Conocida entonces la altura ortométrica de un punto A de la superficie terrestre, puede determinarse la diferencia de nivel ortométrico respecto de otro punto B, por medio de la expresión:

$$\Delta H_{AB} = \Delta n_{AB} + CO_{AB} \quad (22.2)$$

donde:

$\Delta H_{AB}$  : desnivel ortométrico entre A y B.

$\Delta n_{AB}$  : desnivel geométrico entre A y B.

$CO_{AB}$  : Corrección ortométrica.

La corrección ortométrica (Heiskanen y Moritz, 1967) es:

$$CO_{AB} = \sum_A^B \frac{(g - \gamma_0)}{\gamma_0} \delta_n + \frac{(\bar{g}_A - \gamma_0)}{\gamma_0} H_A - \frac{(\bar{g}_B - \gamma_0)}{\gamma_0} H_B \quad (23.2)$$

donde g es la gravedad medida en las estaciones de la línea de nivelación,  $\gamma_0$  es la gravedad normal en el elipsoide de referencia,  $\delta_n$  son los desniveles geométricos y  $\bar{g}_A$  y  $\bar{g}_B$  son las gravedades medias a lo largo de las líneas de fuerza de A y B.  $H_A$  y  $H_B$  se estiman con las mediciones de nivelación geométrica. La gravedad normal  $\gamma_0$  se obtiene con la fórmula de Somigliana:



$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (24.2)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente del elipsoide de referencia,  $\gamma_a$  y  $\gamma_b$  la gravedad normal en el ecuador y en el polo respectivamente y  $\varphi$  es la latitud geodésica del punto en cuestión.

### 3.- Los Métodos de Interpolación Superficial.

Puesto que no es común disponer tanto de observaciones de gravedad como de observaciones astronómicas y dado el tiempo y el esfuerzo requeridos para obtenerlas, los métodos gravimétricos y astro-geodésico resultan de difícil aplicación en ingeniería. Las alturas elipsoidales determinadas con mediciones GPS y las alturas sobre el nivel medio del mar con nivelación geométrica, resultan mucho más accesibles para estimar las ondulaciones del geoide en un área preestablecida.

Para determinados trabajos de ingeniería y cartografía donde no se requiere gran precisión, puede omitirse la corrección ortométrica habida cuenta que resulta poco significativa en grandes distancias (más de 100 km) y en terrenos que no presentan grandes diferencias altimétricas.

Sea entonces un área no demasiado extensa (algunos miles de hectáreas) que cuenta con un conjunto de puntos uniformemente distribuidos. Dichos puntos son los vértices de una red GPS y a su vez, vértices también de una red altimétrica medida con nivelación geométrica y ambas debidamente ajustadas por el principio de los mínimos cuadrados. Cada punto cuenta entonces con coordenadas geodésicas latitud, longitud y altura elipsoidal ( $\varphi, \lambda, h$ ) referidas al elipsoide global WGS'84 y también alturas sobre el nivel medio del mar, que resultan una buena aproximación a las alturas ortométricas H.

Las coordenadas geodésicas  $\varphi$  y  $\lambda$  pueden transformarse a coordenadas planas x, y de alguna proyección cartográfica (Gauss Krüger, por ejemplo), previo haber efectuado el correspondiente cambio de datum con parámetros conocidos o determinados. Así, cada uno de los puntos de la red tiene coordenadas x, y, h y H o bien x, y, z donde  $z = N = h - H$ , representa la separación geoide-elipsoide; es decir la ondulación del geoide.

A partir de esta información es posible generar un modelo matemático:

$$z = f(x, y) \quad (25.3)$$

que aproxima lo suficiente al geoide en el área de trabajo, como para estimar la ondulación en cualquier punto P con solo conocerse sus coordenadas planas x, y. Efectuando una observación GPS en modo diferencial con estación de control en un punto de la red y remota en un punto P del área de trabajo, se determinan sus coordenadas geodésicas y se obtienen luego sus coordenadas planas. El modelo local del geoide, ecuación (25.3), provee la ondulación estimada en P y con la (1.1) de calcula la altura sobre el nivel medio del mar ( $H = h - N$ ).

La estadística a su vez, ofrece herramientas eficientes para estudiar los errores de las ondulaciones estimadas por el modelo y su propagación a las alturas sobre el nivel medio del mar.

**El Método de los Promedios Ponderados:** Consiste en obtener la ondulación del geode en un punto determinado apoyándose en puntos vecinos y asignando pesos, según algún criterio, a sus respectivas ondulaciones.

Sea P el punto incógnita con k vértices de la red en un entorno del mismo, entonces la ondulación estimada en P es:

$$N_P = \frac{\sum_{i=1}^k P_i N_i}{\sum_{i=1}^k P_i} \quad (26.3)$$

Si denotamos por  $d_i$ ,  $i = 1, k$  a las respectivas distancias desde P hasta los k vértices en el entorno de P, se pueden definir los pesos como las inversas de los cuadrados de las distancias; es decir:

$$P_i = \frac{1}{d_i^2} \quad i = 1, k; \quad d_i = \sqrt{(X_i - X_P)^2 + (Y_i - Y_P)^2} \quad (27.3)$$

y de la (26.3), se obtiene:

$$N_P = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{N_i}{d_i^2}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i^2}} \quad (28.3)$$

Este modelo se conoce como I.D.S. (Inverse Distance Square) o Inversas de las Distancias al Cuadrado.

**El Método Multicuádrico:** Según el análisis multicuádrico, los conos y los hiperboloides se seleccionan como superficies aproximantes o interpoladoras. Cada superficie, caracterizada por la ecuación:

$$z = c_j q(x_j, y_j, x, y) \quad (29.3)$$

Está asociada con algún punto j de la superficie geopotencial a modelar, tiene pendiente  $c_j$  y el elemento  $q(x_j, y_j, x, y)$  se denomina la función cuádrlica básica del punto j. El modelo se genera con las m cuádrlicas, correspondientes a los m vértices de la red y tiene la forma:

$$z = \sum_{j=1}^m c_j q(x_j, y_j, x, y) \quad (30.3)$$

Teniendo en cuenta que z representa la ondulación del geode en este caso, la ecuación (30.3) aproxima al geode en el área de trabajo mediante una suma de

superficies cuádricas y se denomina entonces, superficie multicuádrica. La mayoría de los estudios del análisis multicuádrico, han considerado a la cuádrica básica  $q$ , como un hiperboloide:

$$q(x_j, y_j, x, y) = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} - \frac{1}{2} + B \quad (31.3)$$

Para  $B = 0$ , el hiperboloide se transforma en un cono cuádrico circular cuyo radio de la base es igual a su altura y el vértice yace en el punto  $j$   $(x_j, y_j)$  del plano  $x$ - $y$ . Para determinar la superficie multicuádrica, se dispone de las coordenadas  $(x_j, y_j, z_j)$  de  $m$  puntos. Al conjunto de los  $m$  puntos con sus coordenadas se le denomina a muestra generadora, y se le denota por  $MG$ . Los coeficientes incógnitas  $c_j$   $j = 1, m$ , pueden determinarse bajo la condición de que la ecuación (30.3) se satisfaga en todos los puntos de la muestra generadora. Puede entonces plantearse un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $m$  incógnitas  $c_j$ :

$$z_i = \sum_{j=1}^m c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i) \quad i = 1, m \quad (32.3)$$

donde  $z_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $z = [z_i]$   $i = 1, m$ ,  $c_j$  es la  $j$ -ésima componente del vector de incógnitas  $c = [c_j]$   $j = 1, m$  y  $q(x_j, y_j, x_i, y_i)$  son los elementos  $q_{ij}$  de la matriz  $Q = [q_{ij}]$   $i = 1, m; j = 1, m$ .

El sistema de ecuaciones (32.3) en forma matricial es:

$$Qc = z \quad (33.3)$$

del cual:

$$c = Q^{-1} z \quad (34.3)$$

Entonces el método multicuádrico garantiza que el modelo se satisface exactamente en los  $m$  puntos de la muestra generadora  $MG$ .

Significado geométrico de la ecuación multicuádrica: la geometría de la ecuación multicuádrica puede ser más claramente ilustrada usando un cono como cuádrica básica. La ecuación:

$$z = \sum_{j=1}^m c_j \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} \quad (35.3)$$

Hace posible determinar la elevación  $z$  de un punto a partir de sus coordenadas planas  $x$ ,  $y$  como una combinación lineal de conos construidos en todos los puntos de la muestra generadora. Considérese la geometría de la relación para el caso  $m = 2$ , figura (3.3):

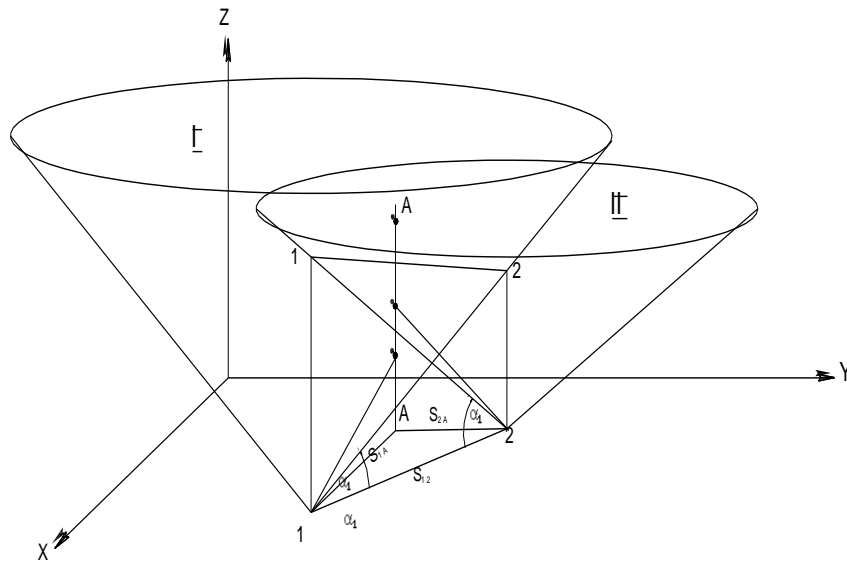


figura (3.3): geometría de la superficie multicuádrica

Luego de sustituir las coordenadas de los puntos 1 y 2 en la ecuación (35.3), se obtienen dos ecuaciones para determinar las incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Punto 1: } & c_1 \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} + c_2 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = z_1 \\ \text{Punto 2: } & c_1 \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + c_2 \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2} = z_2 \end{aligned} \quad (36.3)$$

o bien:

$$\begin{aligned} 0c_1 + s_{12}c_2 &= z_1 \\ s_{12}c_1 + 0c_2 &= z_2 \end{aligned} \quad (37.3)$$

donde  $s_{12}$  es la distancia entre las proyecciones sobre el plano x-y de los puntos 1 y 2, entonces la forma matricial de la (37.3) es:

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (38.3)$$

donde:

$$c_1 = \frac{z_2}{s_{12}} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{z_1}{s_{12}} \quad (39.3)$$

Se sigue que el coeficiente  $c_1$  es la tangente del ángulo  $\alpha_1$  formado por la generatriz del cono I con su proyección sobre el plano x-y, y el coeficiente  $c_2$  es la tangente del ángulo  $\alpha_2$  formado por la generatriz del cono II con su proyección sobre el plano x-y.

El punto 1( $x_1, y_1, z_1$ ) pertenece a la superficie del cono II y el punto 2( $x_2, y_2, z_2$ ) pertenece a la superficie del cono I. Introduzcamos la notación  $c_1 = \text{tg } \alpha_1$  y  $c_2 = \text{tg } \alpha_2$ . Determinemos ahora la altura  $z_A$  de un punto arbitrario A cuyas coordenadas planas son  $x_A, y_A$ , sobre la superficie caracterizada por la ecuación (35.3) y  $m = 2$ .

$$z_A = c_1 \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2} + c_2 \sqrt{(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2} \quad (40.3)$$

o bien:

$$z_A = \text{tg } \alpha_1 s_{1A} + \text{tg } \alpha_2 s_{1A} \quad (41.3)$$

Se sigue de la (41.3) que los términos primero y segundo del segundo miembro, son las alturas sobre el plano x-y de los puntos de intersección de las superficies de los conos I y II respectivamente, con la línea vertical que pasa por el punto A. Así entonces, la altura  $z_A$  del punto A, se obtiene como la suma de las alturas  $z$  de aquellos puntos de los conos cuyas proyecciones sobre el plano x-y es el punto de coordenadas  $x_A, y_A$ .

Extendiendo lo anterior a  $m > 2$ , se arriba a las siguientes conclusiones:

1.- La altura de un punto de la muestra generadora calculada con la superficie multicuádrica, se obtiene como la suma de las alturas de los puntos de los conos construidos con el resto de los puntos de la muestra, excepto para el punto dado. Esto se sigue del hecho de que el coeficiente  $c$  asociado con la cuádrica de dicho punto no aparece en las ecuaciones (36.3).

2.- El eje vertical de simetría de cada cono es perpendicular al plano x-y y lo intercepta en el punto  $(x_j, y_j)$   $j = 1, m$ .

3.- Los coeficientes  $c_j$  son las tangentes de los ángulos que forman las generatrices de los conos con el plano x-y.

4.- De la solución del sistema de las ecuaciones lineales (33.3) se obtienen aquellos valores  $c_j$  para los cuales las alturas dadas  $z_i$  de cualquier punto de la muestra generadora en la superficie multicuádrica, es igual a la suma algebraica de todos los valores básicos  $z_j^i = c_j q(x_j, y_j, x, y)$  los cuales son las alturas  $z$  de los puntos de intersección de la superficie multicuádrica  $z = c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i)$  con la vertical que pasa por el punto  $i(x_i, y_i, z_i)$ :

$$z_i = \sum_{j=1}^m z_j^i \quad (42.3)$$

donde:

$$z_j^i = c_j q(x_j, y_j, x_i, y_i) \quad (43.3)$$

5.- Un signo negativo en el coeficiente  $c_j$  (o un valor negativo de  $z_j^i$ ), significa que el punto de intersección yace en el manto inferior del cono.

6.- La altura  $z_A$  de cualquier punto a determinar sobre la superficie multicuádrica, se obtiene como la suma de todos los correspondientes  $z_j^A$  de los puntos de cada cuádrica básica con la vertical por A.

Si el punto A pertenece al segmento 1-2, fig.(3.3), es fácil demostrar que la interpolación multicuádrica coincide con la interpolación lineal (hágalo!!!).

**El Método de Regresión:** Se adopta como superficie de interpolación aquella generada por la expresión polinómica bivariada en X, Y, de grado k:

$$Z = f(X, Y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} X^i Y^j \quad (44.3)$$

donde Z representa la ondulación del geoide y X, Y son las coordenadas planas en alguna proyección cartográfica (por ejemplo Gauss- Krüger).

Los  $a_{ij}$  son coeficientes a determinar por mínimos cuadrados; es decir, debe cumplirse que:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [Z_i - f(X_i, Y_i)]^2 = \text{mínimo} \quad (45.3)$$

donde n es el número de puntos de la muestra generada (MG);  $Z_i$  es la ondulación efectiva y  $f(X_i, Y_i)$  es la ondulación estimada por el modelo (44.3).

Cada punto de la muestra generadora produce una "ecuación de observación" (recordar que la ondulación efectiva proviene de las observaciones):

$$a_{00} + a_{01} Y_i + a_{02} Y_i^2 + \dots + a_{0k} Y_i^k + a_{10} X_i + a_{11} X_i Y_i + a_{12} X_i Y_i^2 + \dots + a_{ik} X_i Y_i^k + \dots \\ \dots + a_{k0} X_i^k + a_{k1} X_i^k Y_i + a_{k2} X_i^k Y_i^2 + \dots + a_{kk} X_i^k Y_i^k = Z_i + v_i, \quad i = 1, n \quad (46.3)$$

donde las coordenadas  $X_i, Y_i$  son datos y los coeficientes  $a_{ij}$  son las incógnitas.

Para n puntos ( $n > k$ ) la (46.3) representa un sistema de ecuaciones lineales.

Así, por ejemplo si  $k = 2$ , se tiene la (47.3), siguiente:

$$f(X, Y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=0}^2 a_{i0} X^i + a_{i1} X^i Y + a_{i2} X^i Y^2 = a_{00} + a_{01} Y + a_{02} Y^2 + \\ + a_{10} X + a_{11} XY + a_{12} XY^2 + a_{20} X^2 + a_{21} X^2 Y + a_{22} X^2 Y^2$$

La expresión matricial del sistema lineal (46.3), es:

$$A X = L + V \quad (48.3)$$

donde A es la matriz de coeficientes determinada por las coordenadas planas X, Y; X es el vector de las incógnitas que contiene a los coeficientes  $a_{ij}$ , L es el vector de los términos independientes cuyas componentes son las ondulaciones efectivas

(observadas) en cada punto de la muestra generadora (MG) y, finalmente, V es el vector de los residuos o correcciones a las observaciones.

Siguiendo el ejemplo de  $k = 2$  ( $k$  es el grado del polinomio), se tiene la (49.3), siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & Y_1 & Y_1^2 & X_1 & X_1 Y_1 & X_1 Y_1^2 & X_1^2 & X_1^2 Y_1 & X_1^2 Y_1^2 \\ 1 & Y_2 & Y_2^2 & X_2 & X_2 Y_2 & X_2 Y_2^2 & X_2^2 & X_2^2 Y_2 & X_2^2 Y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_n & Y_n^2 & X_n & X_n Y_n & X_n Y_n^2 & X_n^2 & X_n^2 Y_n & X_n^2 Y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

El principio de los mínimos cuadrados  $V^T V = \text{mínimo}$ , conduce al sistema de las ecuaciones normales:

$$(A^T A) X = A^T L \quad (50.3)$$

La matriz A tiene n filas y  $(k + 1)^2$  columnas, siendo su orden  $n \times (k + 1)^2$  donde  $k = 2$  es el grado del polinomio bivariado (44.3). Así, por ejemplo, si la muestra generadora (MG) tiene  $n = 20$  puntos, el geoide puede modelarse con una función polinómica de grado  $k = 3$  pues, en este caso, la matriz A es de orden  $20 \times 16$  y se tienen 20 ecuaciones para resolver 16 incógnitas. La (50.3) puede resolverse por inversión matricial y se tiene:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (51.3)$$

Si denotamos por N a la matriz normal ( $N = A^T A$ ), entonces:

$$X = N^{-1} A^T L \quad (52.3)$$

La matriz normal inversa puede hallarse por la expresión:

$$N^{-1} = E D^{-1} E^T \quad (54.3)$$

donde D es la matriz diagonal de los valores propios de N, mientras que las columnas de E son los vectores propios correspondientes normalizados. Las coordenadas X, Y de los puntos de la muestra generadora (MG) suelen ser coordenadas planas en el sistema de proyección conforme Gauss-Krüger que para la faja 2, por ejemplo, son del orden de los seis millones en X y de los dos millones en Y. Los valores de Z (ondulación del geoide) son números de dos dígitos (típicamente 25. m en el Valle de Tulum). En consecuencia la matriz A requiere de un escalado adecuado para que la matriz normal

N no resulte mal condicionada. El mal condicionamiento de la matriz N produce soluciones inaceptables en la resolución del sistema de las ecuaciones normales (50.3). El número de condición de la matriz N está dado por la expresión:

$$\text{cond}(N) = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{max.}}}{\lambda_{\text{mín.}}}} \quad (55.3)$$

donde  $\lambda_{\text{max.}}$  y  $\lambda_{\text{mín.}}$  Son los valores propios máximo y mínimo respectivamente, de la matriz normal N. Puesto que el determinante de N está dado por:

$$\det(N) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \quad (56.3)$$

donde  $m = (k + 1)^2$ . Un valor de  $\lambda_{\text{mínimo}}$  muy cercano cero ( $\lambda_{\text{mín.}} \approx 0$ ), daría como resultado un valor del determinante de N próximo a cero ( $\det(N) \approx 0$ ), distorsionando la solución del sistema normal. Los valores propios cercanos a cero deben ser removidos de la matriz D conjuntamente con los vectores propios correspondientes normalizados en la matriz E. Así, la (54.3) es ahora la pseudoinversa de Moore-Penrose que provee la solución óptima del sistema normal.

El escalado consiste en hallar un factor de escala tal que divida las coordenadas planas X, Y hasta lograr un número de condición adecuado y un valor suficientemente grande para el determinante de N. Con esto se logra una solución aceptable para el sistema de las ecuaciones normales.

Conocidas las coordenadas  $X_p, Y_p$  de un punto P, la ondulación estimada por el modelo es  $\hat{Z}_p$ , dada por:

$$\hat{Z}_p = A_p X \quad (57.3)$$

donde

$$A_p = \begin{bmatrix} Y_p & Y_p^2 & \dots & Y_p^k & X_p & X_p Y_p & X_p Y_p^2 & \dots & X_p Y_p^k & \dots & X_p^k & X_p^k Y_p & \dots & X_p^k Y_p^k \end{bmatrix}$$

y

$$X = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0k} & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{k0} & a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}^T$$

El error estándar de  $\hat{Z}_p$  es:

$$\sigma_{\hat{Z}_p} = \sqrt{A_p \Sigma_X A_p^T} \quad (58.3)$$

donde  $\Sigma_X$  es la matriz varianza-covarianza del vector solución X. Que está dada por:

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 (E D^{-1} E^T) \quad (59.3)$$



Se puede obtener entonces, intervalos de confianza para el valor estimado  $\hat{Z}_p$  de la ondulación del geode a un nivel de confianza  $1 - \alpha$  dado, donde  $\alpha$  es el nivel de significación adoptado (generalmente  $\alpha = 0.05$ ).

$$\text{Intervalo de confianza: } \hat{Z}_p \pm Z_c \hat{\sigma}_{ZP} \quad (60.3)$$

donde  $Z_c$  es el valor crítico de tabla de la distribución normal o gaussiana y depende del nivel de significación adoptado. Si, por ejemplo,  $\alpha = 0.05$ , el nivel de confianza es  $1 - \alpha = 0.95$  y  $Z_c = 1.96$ .

El error estándar de las diferencias es:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T V}{n - (k + 1)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{\nu}} \quad (61.3)$$

donde  $\nu = n - (k + 1)^2$  es la redundancia.

Los límites inferior y superior del intervalo de confianza son:

$$\begin{aligned} L_I &= \hat{Z}_p - Z_c \hat{\sigma}_{ZP} \\ L_I &= \hat{Z}_p + Z_c \hat{\sigma}_{ZP} \end{aligned} \quad (62.3)$$

Antes de estimar las ondulaciones del geode, sus errores estándar y sus intervalos de confianza, es necesario tomar decisiones sobre la utilidad del modelo generado. Esto se logra mediante un test estadístico basado en la distribución F de Fisher-Snedecor.

Se comparan las cantidades:

$$SQE = \sum_{j=1}^n (\hat{Z} - \bar{Z})^2 \quad (63.3)$$

$$SQR = \sum_{j=1}^n (Z - \hat{Z})^2 \quad (64.3)$$

donde  $\hat{Z}$  es el valor estimado por la regresión (el modelo),  $Z$  es el valor efectivo observado de la ondulación ( $Z = h - H$ ) y  $\bar{Z}$  es el valor medio:

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j}{n} \quad (65.3)$$

mientras que  $SQE$  es la variación explicada por la regresión y  $SQR$  es la variación no-explicada (randómica o aleatoria) por la regresión.

La variación total es:

$$SQT = SQE + SQR \quad (66.3)$$

Dividiendo ambos miembros de (66.3) por SQT:

$$1 = \frac{SQE}{SQT} + \frac{SQR}{SQT} \quad (67.3)$$

El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} \quad (68.3)$$

y representa el porcentaje de la variación explicada por la regresión respecto de la variación total. Si  $R^2 = 0$  entonces  $SQE = 0$ , toda la variación es randómica y la regresión no explica variación alguna. El modelo, en ese caso, no tiene utilidad. Si  $R^2 = 1$ , entonces  $SQE = SQT$  y toda la variación es explicada por la regresión. El coeficiente de determinación es tal que:

$$0 \leq R^2 \leq 1 \quad (69.3)$$

Se define el estadístico muestral:

$$F = \frac{\frac{SQE}{(k+1)^2 - 1}}{\frac{SQR}{n - (k+1)^2 + 1}} \quad (70.3)$$

donde  $(k+1)^2$  es la cantidad de parámetros o coeficientes a determinar en el método de regresión. El estadístico F tiene distribución F (de Fisher) con  $u_1 = (k+1)^2 - 1$  y  $u_2 = n - [(k+1)^2 + 1]$  grados de libertad (en el numerador y denominador respectivamente), siendo el valor crítico para el nivel de significación  $\alpha$  seleccionado,  $F_{v_1, v_2}^\alpha$

Si se cumple que:

$$F > F_{v_1, v_2}^\alpha \quad (71.3)$$

el modelo tiene utilidad puesto que la variación randómica es menor que la variación explicada por la regresión. La figura (4.3) ilustra el concepto:

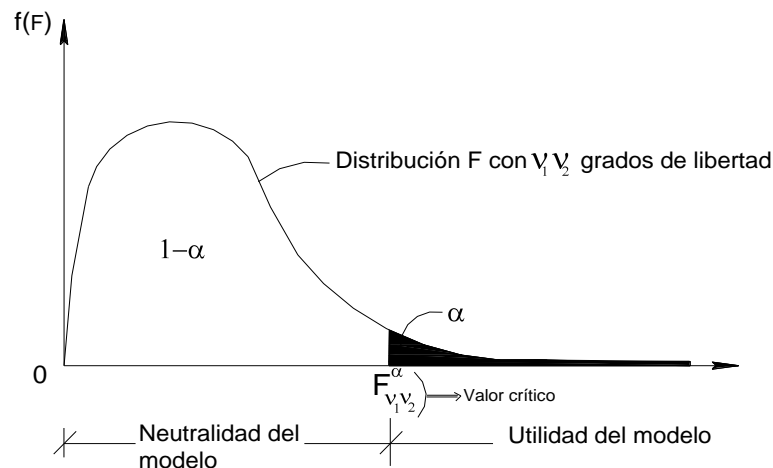


figura (4.3)

#### 4.- Validación de los Métodos de Interpolación Superficial:

Para validar los métodos de interpolación superficial propuestos, se presentan a continuación los resultados del procesamiento de los datos correspondientes al Valle de Tulum, provincia de San Juan, Argentina.

Se cuenta con un conjunto de 112 puntos distribuidos en un área de unas 150000 hectáreas aproximadamente. Dichos puntos son los vértices de la red geodésica de la Dirección de Geodesia y Catastro de la provincia de San Juan y tienen coordenadas geodésicas latitud, longitud y altura elipsoidal, referidas al sistema geodésico global absoluto WGS'84 y también al sistema geodésico Campo Inchauspe 69 (CAI'69). Poseen también coordenadas planas en la proyección conforme Gauss- Krüger , faja 2, meridiano central -69°.

La red GPS se midió con receptores de doble frecuencia y se vinculó a cuatro puntos de la Red POSGAR'94. Se efectuó un ajuste mínimos cuadrados vinculado, estimándose un error estándar de  $\pm 0.015$  m para las alturas elipsoidales ajustadas.

La red altimétrica, cuyos vértices son los mismos que los de la red GPS, se midió por medio de nivelación geométrica con un error estándar por desnivel igual a:

$$\sigma_H = \frac{10 \text{ mm}}{\sqrt{km}} \sqrt{L(km)} \quad (72.4)$$

y se ajustó por mínimos cuadrados vinculada a un punto fijo (Nodal 70 de la línea de nivelación del IGM, San Juan – Chepes), estimándose un error estándar en las cotas ajustadas (alturas sobre el nivel medio del mar) igual a  $\pm 0.025$  m.

Así entonces, cada vértice de la red catastral tiene coordenadas geodésicas WGS'84, coordenadas geodésicas CAI'69, coordenadas planas Gauss- Krüger en la faja 2 mapeadas desde Campo Inchauspe'69 y alturas sobre el nivel medio del mar.

Con toda esta información, se procedió a calcular la ondulación del geode en cada punto mediante la expresión:

$$N = h - H \quad (73.4)$$

De entre los 112 vértices de la red catastral, se seleccionó una muestra de 30 puntos (MG) uniformemente distribuidos sobre el área para generar superficies de interpolación que permitirán estimar el valor de la ondulación del geoide en los 45 puntos de la muestra interpolada (MI). De la comparación con las ondulaciones efectivas, (73.4), surgen las diferencias que se someterán a las pruebas estadísticas correspondientes a fin de validar los modelos propuestos. En la figura (5.4), se ven las muestras generadora MG identificada con el símbolo "\*" y la muestra interpolada MI identificada con "o":

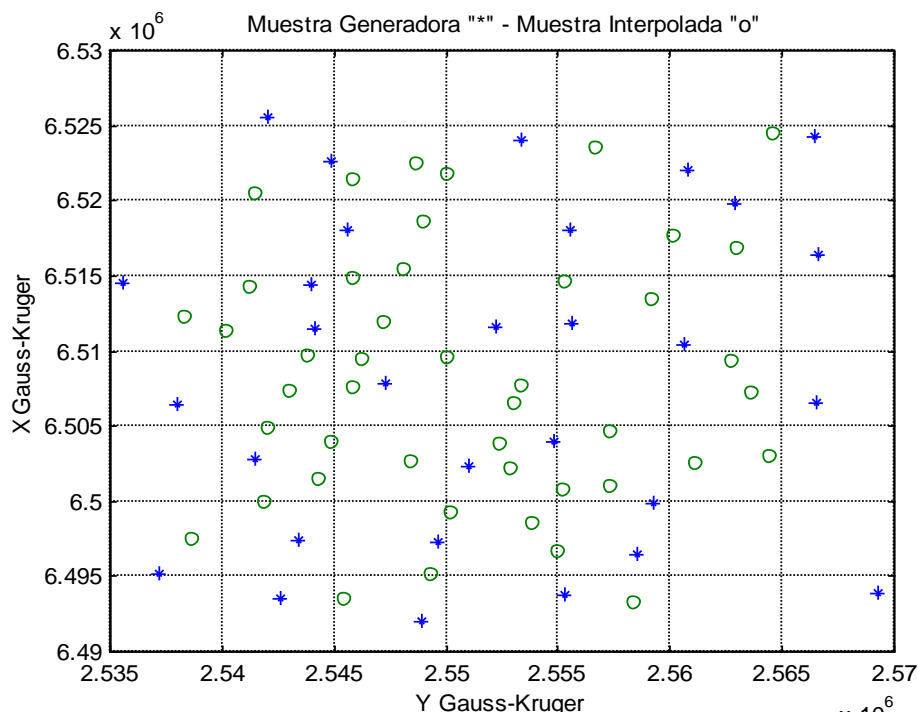


figura (5.4)

La siguiente tabla pertenece a la muestra generadora MG:

tabla (1.4)

Punto	N (m)	X (m)	Y (m)
1	25.966	2542047.72	6525485.01
3	25.603	2566405.66	6524254.55
18	24.665	2569247.47	6493863.3
14	25.484	2537168.32	6495199.73
27	25.016	2552242.69	6511557.08
4	25.886	2535558.06	6514550.25
21	25.302	2562921.73	6519814.16
22	24.691	2559229.75	6499836.16

12	25.217	2541495.96	6502759.94
16	24.596	2548914.23	6492037.16
5	25.442	2545597.47	6518054.35
7	25.404	2566581.66	6516413.98
11	25.149	2566538.57	6506582.28
26	24.617	2558519.84	6496403.7
20	25.02	2543404.62	6497340.99
24	25.348	2544097.04	6511423.03
2	25.432	2553384.5	6524020.42
25	24.996	2560622.8	6510421.05
13	24.781	2554816.81	6503937.78
9	25.536	2537979.37	6506427.31
8	25.407	2544000.15	6514433.24
30	25.305	2560824.11	6522038.08
17	24.522	2555263.66	6493717.92
23	24.964	2542591.3	6493571.3
15	24.704	2549610.32	6497289.66
29	25.684	2544889.5	6522574.11
6	25.123	2555559.53	6518052.68
19	25	2555638.27	6511765.54
28	24.8	2551010.27	6502281.54
10	25.046	2547258.7	6507830.14

La siguiente tabla se corresponde con la muestra interpolada MI:

tabla (2.4)

<b>Punto</b>	<b>N (m)</b>	<b>X (m)</b>	<b>Y (m)</b>
1	25.673	2541448.6	6520486.5
2	25.574	2545856.7	6521461
3	25.497	2548682.2	6522445.6
4	25.458	2550037.7	6521823.3
5	25.37	2556649.9	6523590.1
6	25.514	2564564.4	6524453.8
7	25.291	2548990.4	6518650.5
8	25.209	2560151.6	6517632.9
9	25.263	2562957.7	6516829.9
10	25.538	2541224.4	6514238.9
11	25.349	2545863.1	6514817.1
12	25.279	2548074.3	6515458.9
13	25.067	2555291.6	6514685.8
14	25.074	2559151.8	6513480.2
15	25.096	2562734.6	6509308
16	25.644	2538342.7	6512257.3
17	25.544	2540135.3	6511299
18	25.238	2547244.1	6511975.6

19	25.231	2546271.5	6509524.6
20	25.016	2550016	6509549.6
21	25.325	2543004.8	6507409.8
22	24.896	2553322.4	6507740.9
23	24.998	2563625.4	6507214.3
24	25.344	2542072.5	6504928.5
25	25.188	2545805.4	6507538.4
26	24.988	2552995.1	6506573.2
27	25.195	2544821.6	6503937.2
28	24.798	2552345.2	6503871
29	24.807	2557283.8	6504719.7
30	24.802	2561097.5	6502587.2
31	24.917	2564397.7	6502997.1
32	25.064	2544289.8	6501464.8
33	24.87	2548381.4	6502679.3
34	24.74	2552866.2	6502225.6
35	25.163	2541901.1	6500008.6
36	24.732	2550212.5	6499302.5
37	24.679	2553805.9	6498612.1
38	24.702	2555181.6	6500842.2
39	24.701	2557283.4	6500972.1
40	25.347	2538617.7	6497518.2
41	24.786	2545455.9	6493481.9
42	24.668	2549294.1	6495178.3
43	24.617	2554961.2	6496734.3
44	24.462	2558326.5	6493317.6
45	25.334	2543806.2	6509698.2

**Validación del Método de los Promedios Ponderados:** Se desarrolló la aplicación MATLAB, RADIAL\_PRU, para llevar a cabo la validación del método. Cada punto de la muestra interpolada MI, es el centro de un círculo con un radio de búsqueda deseado que contiene un cierto número de puntos de la muestra generadora. Con los puntos de MG contenidos en el círculo, se calcula la ondulación del punto en cuestión de la muestra interpolada por medio del algoritmo de los promedios ponderados, así siguiendo hasta agotar la muestra interpolada. Se calculan las diferencias entre las ondulaciones interpoladas y las ondulaciones efectivas y se realiza la estadística de tales diferencias. Se muestran a continuación algunos de los resultados obtenidos para los radios de búsqueda 10 km, 20, km y 30 km. y las correspondientes conclusiones.

Radio de búsqueda igual a 10 km:

Gráfica de dispersión de las diferencias:

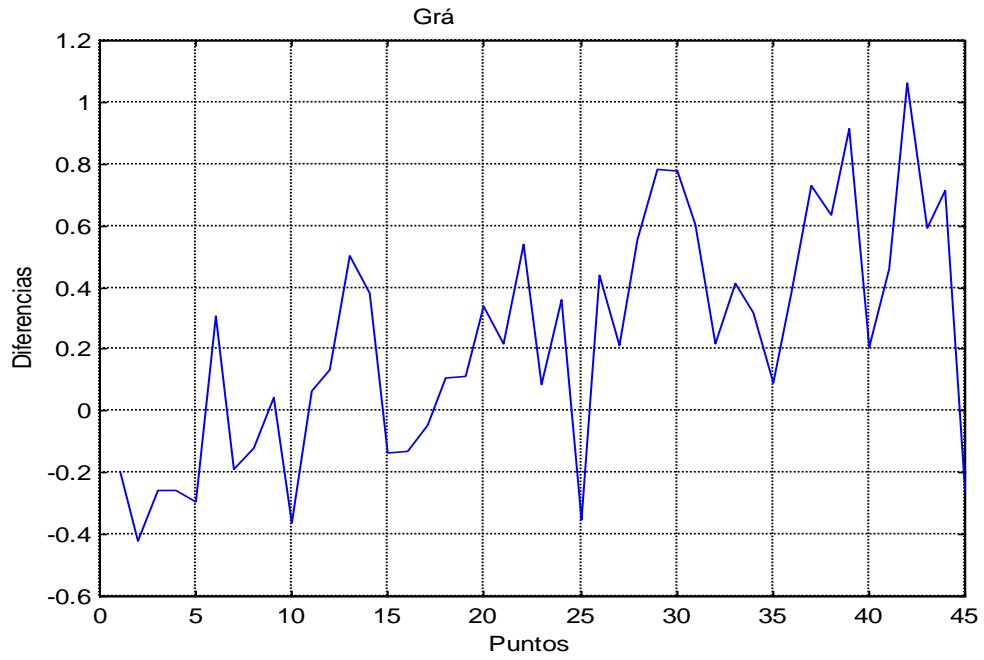


figura (6.4)

Gráfica de distribución de las diferencias (histograma):

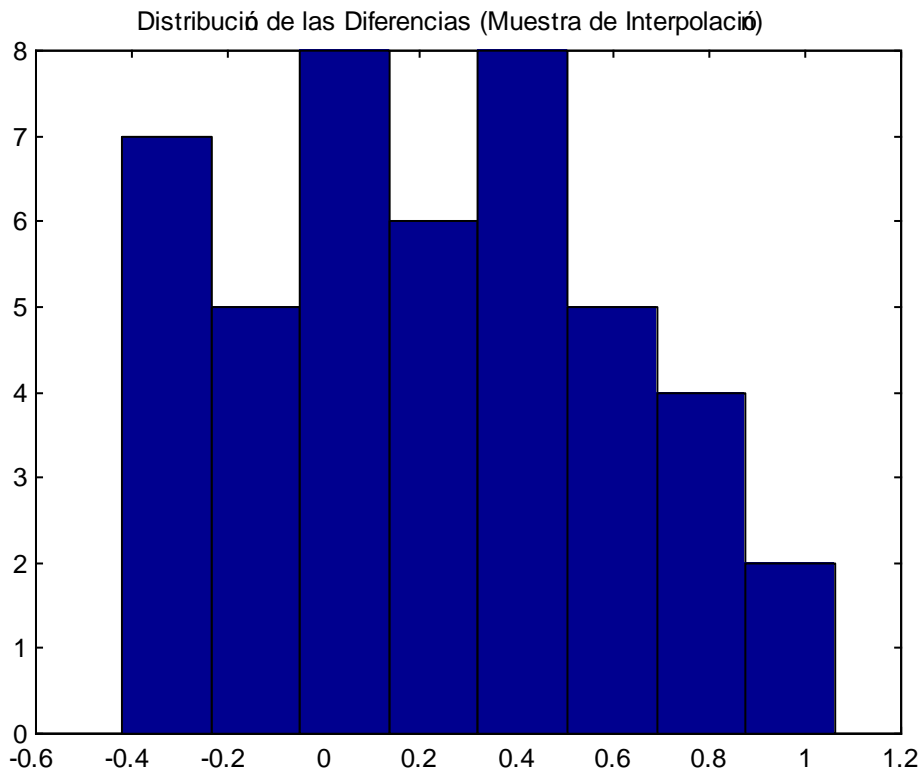


figura (7.4)

Estadística de las diferencias:

media:  $\bar{x} = 0.228m$

desviación estándar:  $s = 0.377m$

dif. max. :  $x_{\max.} = 1.061m$

dif. min. :  $x_{\min.} = -0.420m$

Error total:  $ET = 0.440m$

Vamos a someter ahora a la media muestral de las diferencias  $\bar{x} = 0.228m$  a la prueba de hipótesis y significación correspondiente, para verificar la utilidad del método. Llamando  $\mu$  a la diferencia poblacional, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula ( $H_0$ ):  $\mu = 0$

Hipótesis alternativa ( $H_1$ ):  $\mu \neq 0$

El estadístico de prueba es:



$$z = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n} = \frac{0.228}{0.377} \sqrt{45} = 4.057$$

El valor crítico de tabla para el nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , es:  $z_c = 1.96$ . Puesto que  $z > z_c$ , se rechaza la hipótesis nula al 95% de confianza y la media muestral difiere significativamente de la media poblacional. Con un radio de búsqueda igual a 10 km, el método no es confiable, puesto que la cantidad de puntos dentro del círculo seguramente resulta insuficiente. Vamos a repetir el ensayo con un radio de búsqueda mayor:

Radio de búsqueda igual a 20 km:

Gráfica de dispersión de las diferencias:

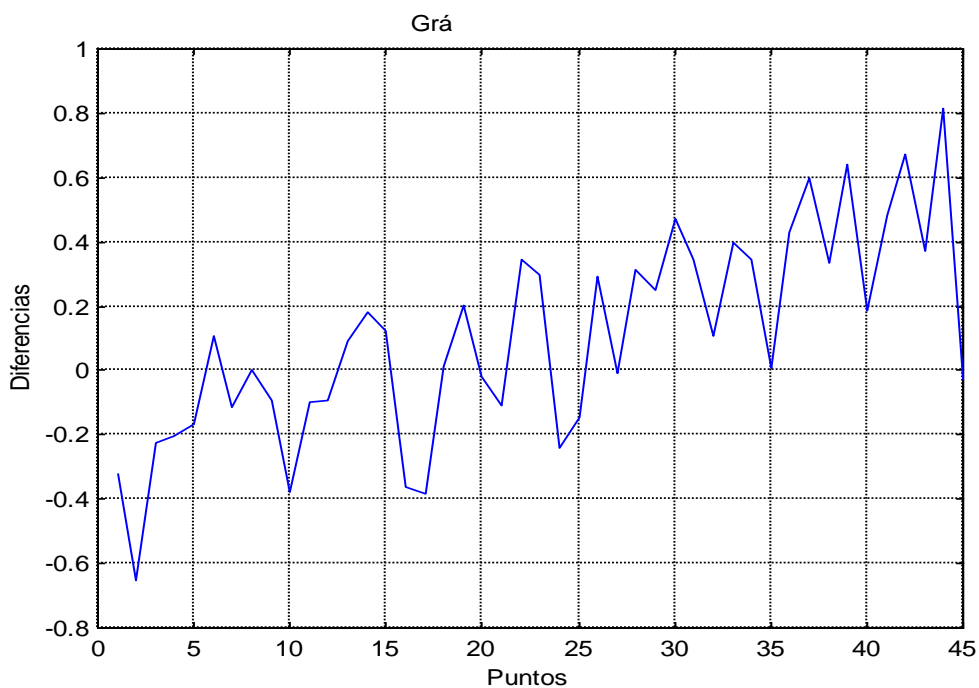


figura (8.4)

Gráfica de distribución de las diferencias (histograma):

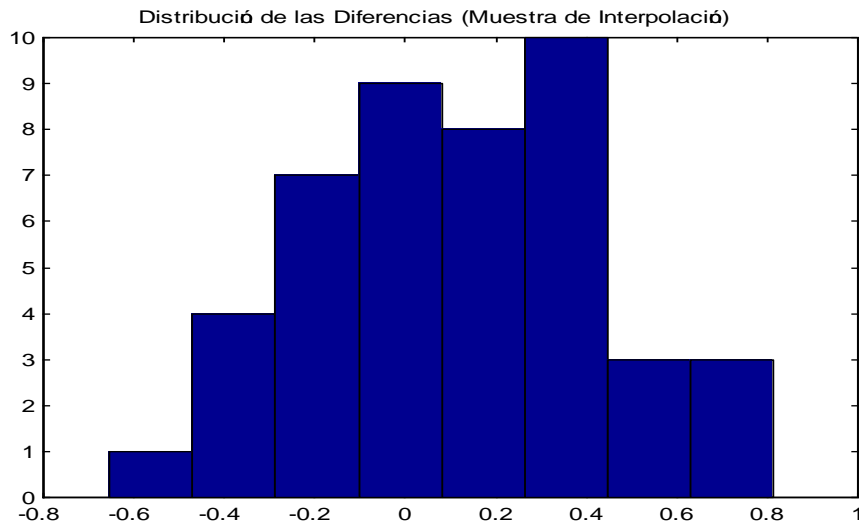


figura (9.4)

Estadística de las diferencias:

media:  $\bar{x} = 0.107m$   
 desviación estándar:  $s = 0.319m$   
 dif. max. :  $x_{\max.} = 0.815m$   
 dif. min. :  $x_{\min.} = -0.654m$   
 Error total:  $ET = 0.336m$

Vamos a someter ahora a la media muestral de las diferencias  $\bar{x} = 0.107m$  a la prueba de hipótesis y significación correspondiente, para verificar la utilidad del método. Llamando  $\mu$  a la diferencia poblacional, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula ( $H_0$ ):  $\mu = 0$   
 Hipótesis alternativa ( $H_1$ ):  $\mu \neq 0$

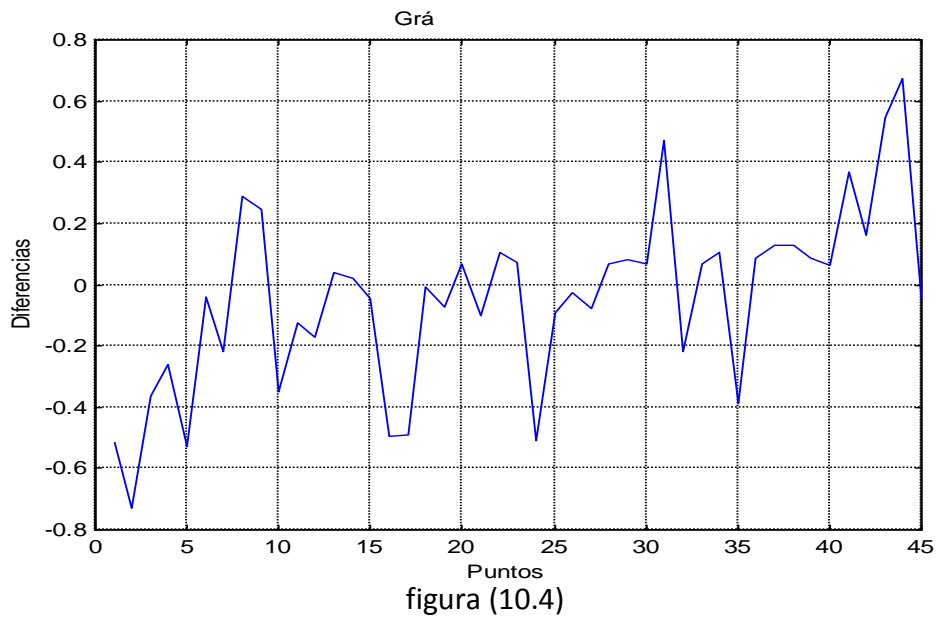
El estadístico de prueba es:

$$z = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n} = \frac{0.107}{0.319} \sqrt{45} = 2.250$$

El valor crítico de tabla para el nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , es:  $z_c = 1.96$ . Puesto que  $z > z_c$ , se rechaza la hipótesis nula al 95% de confianza y la media muestral difiere significativamente de la media poblacional. Con un radio de búsqueda igual a 20 km, el método no es confiable, puesto que la cantidad de puntos dentro del círculo seguramente resulta insuficiente. Vamos a repetir el ensayo con un radio de búsqueda mayor:

Radio de búsqueda igual a 30 km:

Gráfica de dispersión de las diferencias:



Gráfica de distribución de las diferencias (histograma):

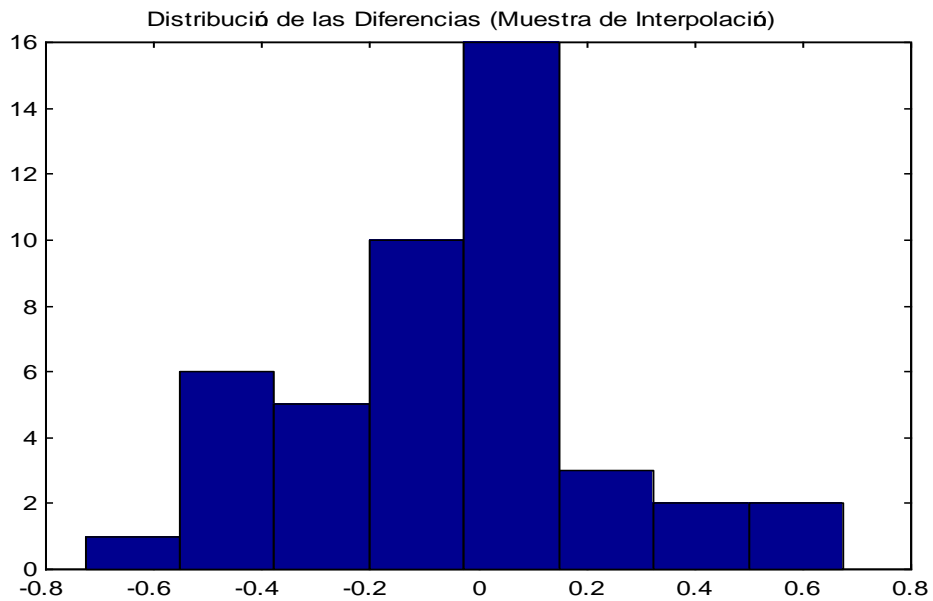


figura (11.4)

Estadística de las diferencias:

media:  $\bar{x} = -0.042m$

desviación estándar:  $s = 0.293m$

dif. max. :  $x_{\max.} = 0.674 m$   
 dif. min. :  $x_{\min.} = -0.728 m$   
 Error total:  $ET = 0.296m$

Vamos a someter ahora a la media muestral de las diferencias  $\bar{x} = -0.042m$  a la prueba de hipótesis y significación correspondiente, para verificar la utilidad del método. Llamando  $\mu$  a la diferencia poblacional, planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula ( $H_0$ ):  $\mu = 0$   
 Hipótesis alternativa ( $H_1$ ):  $\mu \neq 0$

El estadístico de prueba es:

$$z = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n} = \frac{-0.042}{0.293} \sqrt{45} = -0.962$$

El valor crítico de tabla para el nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , es:  $z_c = 1.96$ . Puesto que  $|z| < z_c$ , se acepta (o al menos no se rechaza) la hipótesis nula al 95% de confianza y la media muestral no difiere significativamente de la media poblacional. Con un radio de búsqueda igual a 30 km, el método es confiable, puesto que la cantidad de puntos dentro del círculo seguramente resulta suficiente.

Las diferencias obtenidas con un radio de búsqueda igual a 30 km, se muestran en la tabla siguiente:

tabla (3.4)

punto	dif: x(m)	punto	dif: x(m)	punto	dif: x(m)
1	-0.512	16	-0.497	31	0.474
2	-0.728	17	-0.490	32	-0.216
3	-0.365	18	-0.005	33	0.070
4	-0.261	19	-0.073	34	0.104
5	-0.527	20	0.067	35	-0.386
6	-0.038	21	-0.099	36	0.085
7	-0.219	22	0.106	37	0.129
8	0.291	23	0.072	38	0.129
9	0.247	24	-0.510	39	0.088
10	-0.351	25	-0.089	40	0.063
11	-0.125	26	-0.028	41	0.367
12	-0.170	27	-0.078	42	0.160
13	0.039	28	0.070	43	0.547
14	0.021	29	0.082	44	0.674
15	-0.046	30	0.066	45	-0.047

El ensayo  $\chi^2$  para la bondad del ajuste: deseamos saber si el histograma de las diferencias se ajusta a una distribución normal o gaussiana. El número de intervalos de clase esta dado por la formula empírica:

$$n^{\circ} \text{ int.} = 1 + 3.3 \log n = 1 + 3.3 \log 45 = 6 \quad (74.4)$$

El rango es:

$$\text{rango} = \text{dif. max.} - \text{dif. min.} = 0.674 - (-0.728) = 1.402$$

El ancho de un intervalo de clase es:

$$\text{ancho int. clase} = \frac{\text{rango}}{n^{\circ} \text{ int.}} = \frac{1.402}{6} = 0.2337$$

tabla (4.4)

int. de clase	int. normalizados	frecuencia esperada	frecuencia observada
-0.7285, -0.4948	-2.3430, -1.5454	2.349	6
-0.4948, -0.2611	-1.5454, -0.7478	7.416	4
-0.2611, -0.0274	-0.7478, 0.0498	13.198	12
-0.0274, 0.2063	0.0498, 0.8474	12.708	17
0.2063, 0.4400	0.8474, 1.6450	6.624	3
0.4400, 0.6737	1.6450, 2.4427	1.944	3

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^6 \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{(2.349 - 6)^2}{6} + \frac{(7.416 - 4)^2}{4} + \frac{(13.198 - 12)^2}{12} + \frac{(12.708 - 17)^2}{3} + \frac{(6.624 - 3)^2}{3} + \frac{(1.944 - 3)^2}{3} = 11.09$$

El valor crítico de tabla es:  $\chi^2_{44,0.95} = 61.5$ . Puesto que  $\chi^2 < \chi^2_{44,0.95}$ , se acepta (o al menos no se rechaza) que la variable estocástica x (diferencia) distribuye normal con media -0.042 m y varianza 0.0858 m<sup>2</sup> al 95% de confianza.

Se concluye que los mejores resultados se obtendrán con radios de búsqueda lo suficientemente grandes, como para que el círculo contenga la mayor cantidad posible de puntos de la muestra generadora.

**Validación del método multicuádrico:** Se adoptó el hiperboloide (31.3) como la cuádrlica básica y el valor de la constante B, se definió por:

$$B = (X_{\max} - X_{\min})(Y_{\max} - Y_{\min}) \quad (75.4)$$

donde  $X_{\max}$ ,  $X_{\min}$ ,  $Y_{\max}$ ,  $Y_{\min}$  son las coordenadas de los vértices extremos del área de trabajo. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales (33.3), se usa la expresión:

$$c = ED^{-1}E^T z = Q^{-1} z \quad (76.4)$$

donde:

$$Q^{-1} = ED^{-1}E^T \quad (77.4)$$

La (77.4) es la inversa de la matriz Q, la cual es simétrica. La matriz D es diagonal y sus elementos diagonales son los valores propios de la matriz Q. Las columnas de la matriz E, son los vectores propios correspondientes, normalizados. Cuando la muestra

generadora tiene 20 puntos o más, algunos valores propios resultan cercanos a cero. Puesto que el determinante de Q es igual al producto de sus valores propios, la solución del sistema (33.3) se desestabiliza, distorsionando los resultados de las ondulaciones interpoladas. Para evitar este inconveniente, es necesario remover los valores propios cuasi nulos de la diagonal de D y, a su vez, remover los vectores propios correspondientes de las columnas de E. Una buena medida de la condición de la matriz está dada por su número de condición, definido por:

$$cond(Q) = \sqrt{\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}} \quad (78.4)$$

Resulta obvio que se prefieren los números de condición bajos.

Para validar el método multicuádrico, se desarrolló la aplicación MATLAB, MTQ\_RM. El procesamiento numérico se llevó a cabo con muestras generadoras de 5, 10, 15, 20 y 25 puntos, extraídos de la tabla (1.3).

Para la muestra de tamaño 5, se seleccionaron los puntos: 1, 3, 14, 18 y 27.

Para la muestra de tamaño 10, se seleccionaron los puntos: 1, 3, 14, 18, 27, 4, 21, 22, 12 y 16.

Para la muestra de tamaño 15, se seleccionaron los puntos: 1, 3, 14, 18, 27, 4, 21, 22, 12, 16, 5, 7, 11, 26 y 20.

Para la muestra de tamaño 20, se seleccionaron los puntos: 1, 3, 14, 18, 27, 4, 21, 22, 12, 16, 5, 7, 11, 26, 20, 24, 2, 25, 13 y 9.

Para la muestra de tamaño 25, se seleccionaron los puntos: 1, 3, 14, 18, 27, 4, 21, 22, 12, 16, 5, 7, 11, 26, 20, 24, 2, 25, 13, 9, 8, 30, 17, 23 y 15.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

tabla (5.4)

MG	$ \lambda_{\min} $	$ \lambda_{\max} $	cond(Q)	media (m)	d. est. (m)	z	$z_c(0.95)$ $z_c(0.99)$	$H_0$ <sub>95, 99</sub>	E.T. (m)
5	1572.4	204630	11.41	-0.085	0.110	-5.2	1.96, 2.58	R, R	<b>0.139</b>
10	15.98	409370	160.05	-0.040	0.062	-4.3	1.96, 2.58	R, R	<b>0.074</b>
15	0.43	603830	1185.0	-0.026	0.054	-3.2	1.96, 2.58	R, R	<b>0.060</b>
20 t=0	0.11	790240	2680.30	-0.009	0.044	-1.4	1.96, 2.58	A, A	<b>0.045</b>
20 t=1	1.50	790240	725.83	-0.012	0.037	-2.1	1.96, 2.58	R, A	<b>0.040</b>
25 t=0	0.0074	985140	11538.1	-0.010	0.053	-1.3	1.96, 2.58	A, A	<b>0.054</b>
25 t=0.5	0.74	985140	1153.8	-0.014	0.037	-2.5	1.96, 2.58	R, A	<b>0.040</b>

La tabla (5.4) indica que los mejores resultados se obtuvieron con una muestra generadora de 25 puntos y eliminando los valores propios menores que 0.5. El error total de interpolación para las ondulaciones del geoide es:  $ET = 0.040$  m. Si el error estimado para las alturas elipsoidales es  $\sigma_h = 0.015$ m, el error estándar de la altura sobre el nivel medio del mar, es:

$$\sigma_H = \sqrt{ET^2 + \sigma_h^2} = \sqrt{0.040^2 + 0.015^2} = 0.043m$$

Las siguientes gráficas, corresponden al ensayo hecho con muestra generadora de 25 puntos y  $t = 0.5$ .

Gráfica de dispersión de las diferencias:

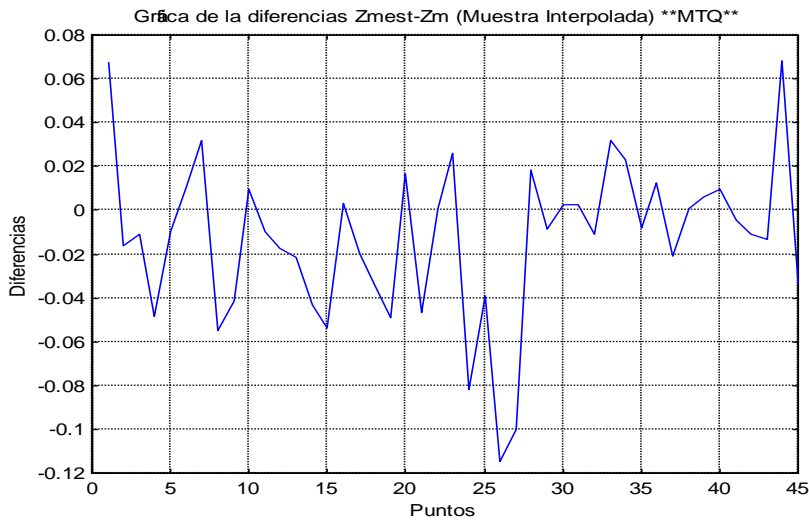


figura (12.4)

Modelo 3-D local del geode en el área de trabajo:

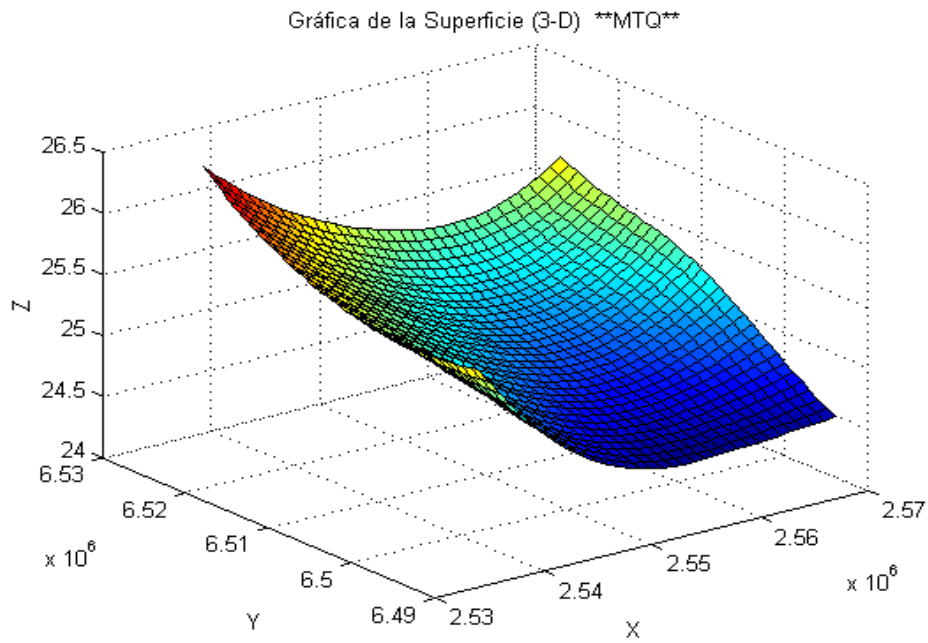


figura (13.4)

Curvas de isovalores de las ondulaciones con equidistancia 0.05 m

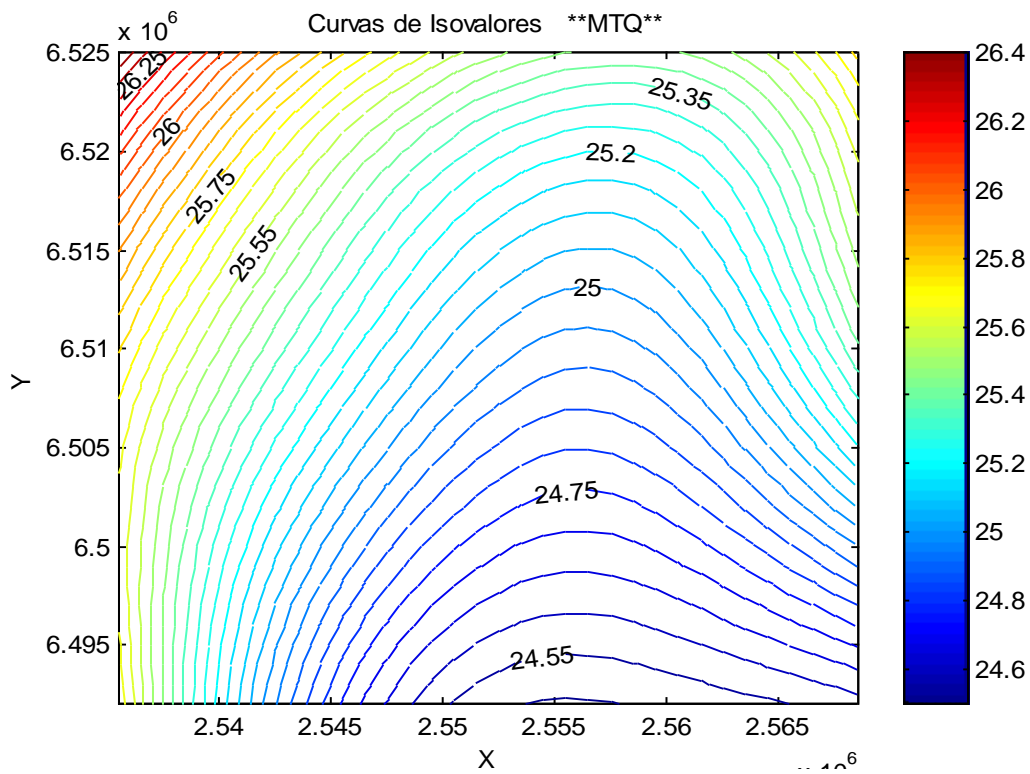


figura (14.4)



## Histograma de las diferencias

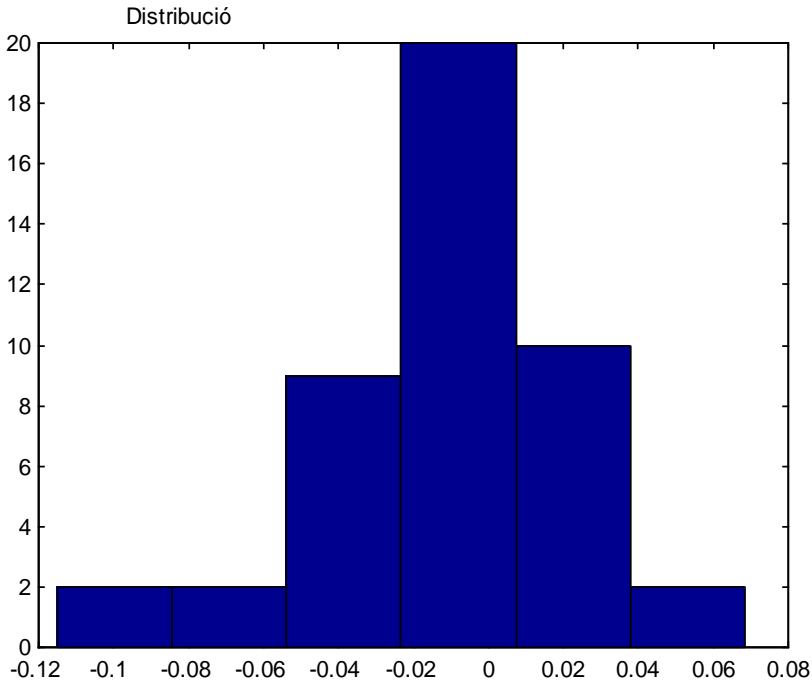


figura (15.4)

**Validación del método de regresión:** Se desarrolló la aplicación MATLAB, REGRAF\_PLT siguiendo el algoritmo presentado en la sección 3. A continuación se muestran las salidas de la computadora, procesando con muestras generadoras de tamaños 10, 20 y 30 puntos.

**Muestra generadora de 10 puntos:**

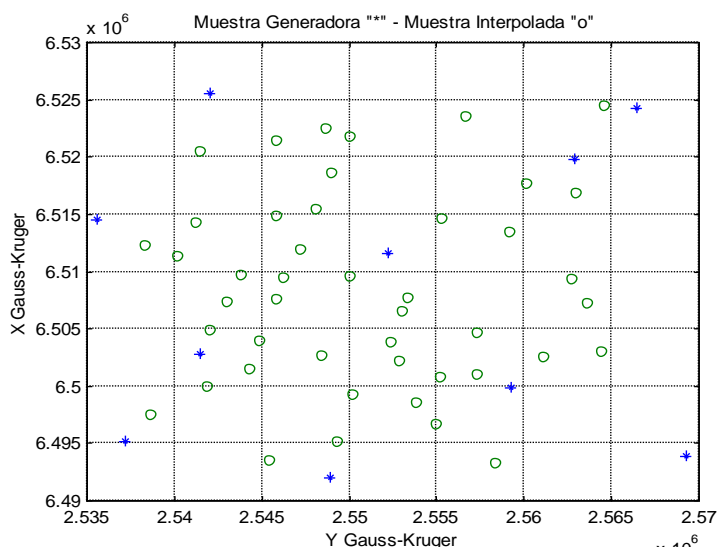


figura (16.4)

Programa REGRAF\_PLT: Genera una Superficie de Interpolación basada en la teoría de la Regresión Múltiple a partir de n puntos de control definidos por sus coordenadas planialtimétricas X,Y,Z.

-Raúl A. Márquez-

\*\* Factor de Reducción de Coord.Planas y Grado \*\*

\*\* FR = 10000

\*\* Grado= 2

\*\* AUTOVALORES \*\*

4.9351e-001  
2.9732e-001  
2.0059e+000  
6.8062e+000  
9.3211e+000  
1.8721e+001  
4.8622e+001  
6.3744e+001  
1.6290e+002

\*\* Matriz Normal: determinante, número de condición y rango \*\*

DET = 1.7649e+008  
con = 2.3407e+001  
ran = 9

\*\* TOLERANCIA= 0

\*\* Regresores Aij del Modelo \*\*

Nest=Aoo+Ao1Y+Ao2Y^2+...+AonY^n+A1oX+A11XY+A12XY^2+...+A1nXY^n+  
A2oX^2+A21X^2Y+A22X^2Y^2+...+A2nX^2Y^n+.....+  
.....+AnoX^n+An1X^nY+An2X^nY^2+...+AnnX^nY^n

24.97057008795240  
0.24485676653614  
-0.03654622984773  
-0.15615142994659  
0.02764065925832  
-0.07541848637902  
0.15595422445357  
0.02882156370325

0.05816496825373

**\*\* Muestra Generadora: Estadística de los Residuos \*\***

**\*\* media = 0.00000**

**\*\* desv. estándar = 0.01750**

Los Residuos Normalizados

-0.5671

-0.0955

0.1467

0.3353

1.6069

0.8164

-0.0153

-0.9731

-1.9600

0.7056

**\*\* AUTOVALORES \*\***

4.9351e-001

2.9732e-001

2.0059e+000

6.8062e+000

9.3211e+000

1.8721e+001

4.8622e+001

6.3744e+001

1.6290e+002

**\*\* Matriz Normal: determinante, número de condición y rango \*\***

DET = 1.7649e+008

con = 2.3407e+001

ran = 9

**\*\* TOLERANCIA= 0**

**\*\* Regresores Aij del Modelo \*\***

Nest=Aoo+Ao1Y+Ao2Y^2+...+AonY^n+A1oX+A11XY+A12XY^2+...+A1nXY^n+

$$A_2oX^2+A_21X^2Y+A_22X^2Y^2+\dots+A_2nX^2Y^n+\dots+\dots+\dots+A_noX^n+A_n1X^nY+A_n2X^nY^2+\dots+A_nnX^nY^n$$

24.97057008795240  
 0.24485676653614  
 -0.03654622984773  
 -0.15615142994659  
 0.02764065925832  
 -0.07541848637902  
 0.15595422445357  
 0.02882156370325  
 0.05816496825373

**\*\* Muestra Generadora: Estadística de los Residuos \*\***

**\*\* media = 0.00000**  
**\*\* desv. estándar = 0.01750**

Los Residuos Normalizados

-0.5671  
 -0.0955  
 0.1467  
 0.3353  
 1.6069  
 0.8164  
 -0.0153  
 -0.9731  
 -1.9600  
 0.7056

**\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°1 \*\***

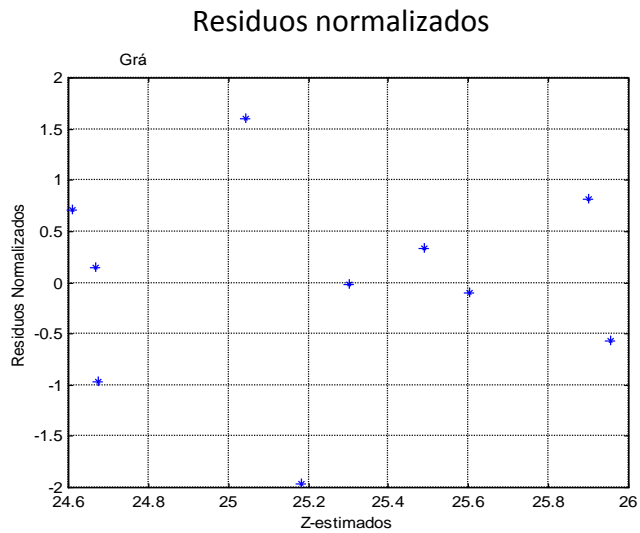


figura (17.4)

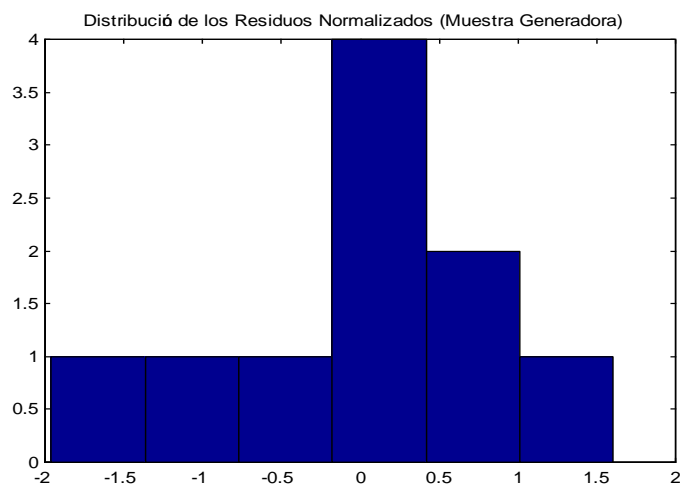


figura (18.4)

\*\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº2 \*\*

\*\* La Variación No-Explicada es = 0.0027565

\*\* La Variación Explicada es = 2.2341839

\*\* La Variación Total es = 2.2369404

\*\* El Coeficiente de Determinación es = 0.9987677

\*\* El Coeficiente de Correlación es = 0.9993837

\*\* ANOVA-TEST \*\*

\*\* El valor de F es = 101.32

\*\* Grados de Libertad \*\*

nu1 = 8

nu2 = 1

\*\* Valor de Tabla = 239

\*\* Se Acepta  $H_0$ : El Modelo No Tiene Utilidad \*\*

ERRORES ESTANDAR DE LOS REGRESORES:  $SA_{ij}$

0.0496  
0.0499  
0.0490  
0.0574  
0.0160  
0.0378  
0.0479  
0.0337  
0.0378

LOS ESTADISTICOS "t" PARA LOS REGRESORES:  $t_i = A_{ij}/SA_{ij}$

503.24  
4.91  
-0.75  
-2.72  
1.72  
-1.99  
3.26  
0.86  
1.54

Grados de Libertad

nu = 1.00

ERRORES ESTANDAR DE LOS REGRESORES:  $SA_{ij}$

0.0496  
0.0499  
0.0490  
0.0574  
0.0160  
0.0378  
0.0479  
0.0337  
0.0378

Grados de Libertad

$nu = 1.00$

**\*\* Muestra Interpolada \*\***

**\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico nº3 \*\***

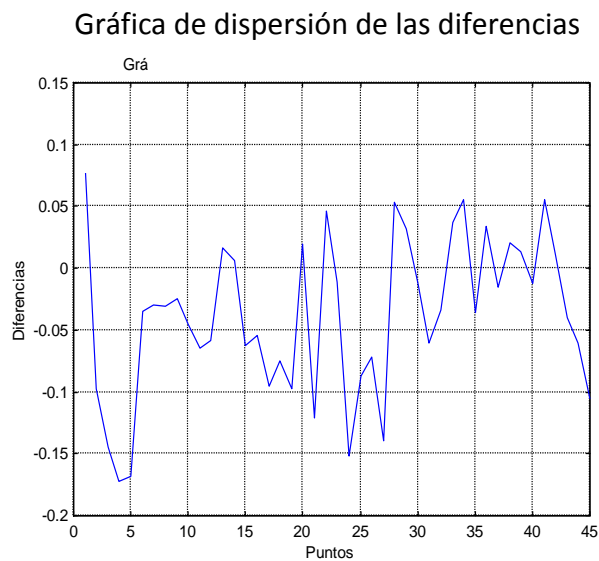


figura (19.4)

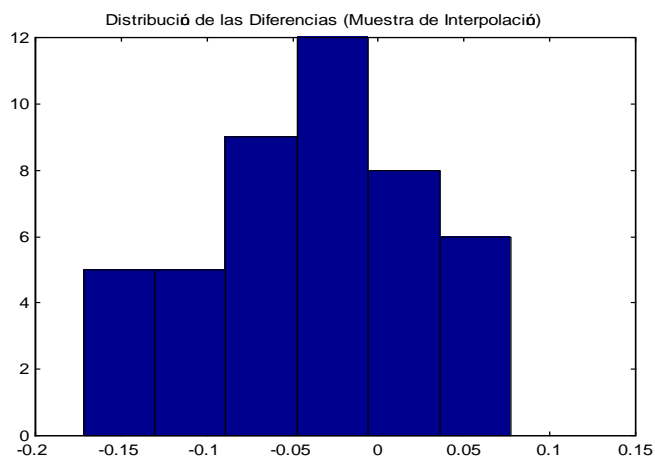


figura (20.4)

**\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico nº4 \*\***

**\*\* Ingrese  $Z_{\text{crítico}}$  (valor de tabla) \*\***

**\*\*  $Z_{\text{crítico}} = 1.96$**

N_est	Dif.	Error	Li	Ls	Int.conf
25.7504	0.0774	0.1261	25.6243	25.8765	0.2522
25.4771	-0.0969	0.1954	25.2818	25.6725	0.3907
25.3528	-0.1442	0.2672	25.0857	25.6200	0.5343
25.2860	-0.1720	0.2703	25.0158	25.5563	0.5405
25.2020	-0.1680	0.3325	24.8695	25.5345	0.6650
25.4790	-0.0350	0.1580	25.3209	25.6370	0.3161
25.2612	-0.0298	0.1940	25.0672	25.4552	0.3880
25.1785	-0.0305	0.1472	25.0313	25.3257	0.2943
25.2384	-0.0246	0.1635	25.0748	25.4019	0.3271
25.4933	-0.0447	0.1342	25.3591	25.6275	0.2684
25.2847	-0.0643	0.1490	25.1358	25.4337	0.2979
25.2205	-0.0585	0.1558	25.0648	25.3763	0.3115
25.0831	0.0161	0.1351	24.9480	25.2182	0.2702
25.0804	0.0064	0.1405	24.9400	25.2209	0.2809
25.0335	-0.0625	0.2131	24.8204	25.2465	0.4261
25.5896	-0.0544	0.1391	25.4505	25.7288	0.2783
25.4491	-0.0949	0.1398	25.3093	25.5889	0.2796
25.1633	-0.0747	0.1432	25.0201	25.3064	0.2864
25.1339	-0.0971	0.1410	24.9929	25.2750	0.2821
25.0360	0.0200	0.1401	24.8959	25.1760	0.2801
25.2042	-0.1208	0.1371	25.0671	25.3413	0.2742
24.9426	0.0466	0.1417	24.8009	25.0844	0.2835
24.9867	-0.0113	0.2320	24.7547	25.2187	0.4640
25.1918	-0.1522	0.1334	25.0584	25.3251	0.2668
25.1014	-0.0866	0.1392	24.9622	25.2406	0.2784
24.9161	-0.0719	0.1443	24.7718	25.0604	0.2886
25.0560	-0.1390	0.1327	24.9233	25.1887	0.2653
24.8513	0.0533	0.1459	24.7053	24.9972	0.2919
24.8391	0.0321	0.1532	24.6859	24.9924	0.3064
24.7889	-0.0131	0.1705	24.6184	24.9594	0.3410
24.8569	-0.0601	0.2201	24.6368	25.0769	0.4401
25.0301	-0.0339	0.1268	24.9034	25.1569	0.2535
24.9074	0.0374	0.1392	24.7683	25.0466	0.2783
24.7953	0.0553	0.1445	24.6508	24.9398	0.2890
25.1275	-0.0355	0.1215	25.0060	25.2490	0.2430
24.7659	0.0339	0.1353	24.6306	24.9012	0.2707
24.6634	-0.0156	0.1349	24.5285	24.7983	0.2698
24.7224	0.0204	0.1419	24.5804	24.8643	0.2838
24.7147	0.0137	0.1438	24.5709	24.8585	0.2875
25.3350	-0.0120	0.1265	25.2085	25.4616	0.2531
24.8417	0.0557	0.1281	24.7136	24.9698	0.2563
24.6794	0.0114	0.1292	24.5501	24.8086	0.2585
24.5768	-0.0402	0.1302	24.4466	24.7071	0.2605
24.4014	-0.0606	0.1443	24.2570	24.5457	0.2887
25.2281	-0.1059	0.1399	25.0882	25.3680	0.2798



**\*\* Error Promedio de Predicción \*\***

0.1582

**\*\* Estadística de las diferencias muestrales \*\***

**\*\* Media = -0.03847**

**\*\* Desviación Estandar = 0.06407**

**\*\* Error total de interpolacion \*\***

Et = 0.0747

**\*\* Gráficas Tridimensionales de Ondulaciones \*\***

**\*\* paso= 1000**

**\*\* Haga click en figura nº...para ver gráfico nº5 \*\***

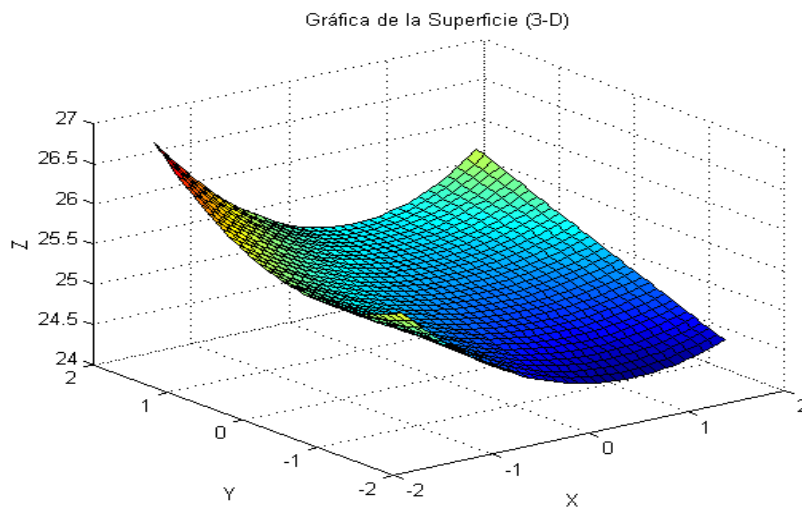


figura (21.4)

**\*\* Azimut = 1200**

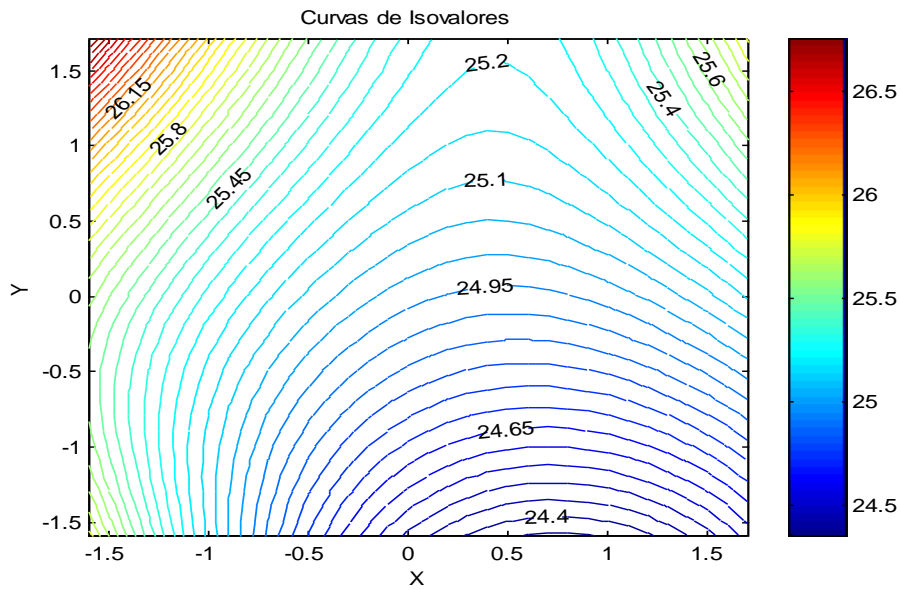
**\*\* Elevac = 10**

**\*\* Curvas de Isovalores\*\***

**\*\* Cota Máxima = 27**

**\*\* Cota Mínima = 24**

**\*\* Equidistancia = 0.05**



Please wait a moment... figura (22.4)

Carefully select contours for labeling.

When done, press RETURN while the Graph window is the active window.

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°6 \*\*

\*\*\*\* Terminé.....!!! \*\*\*\*

Muestra generadora de 20 puntos:

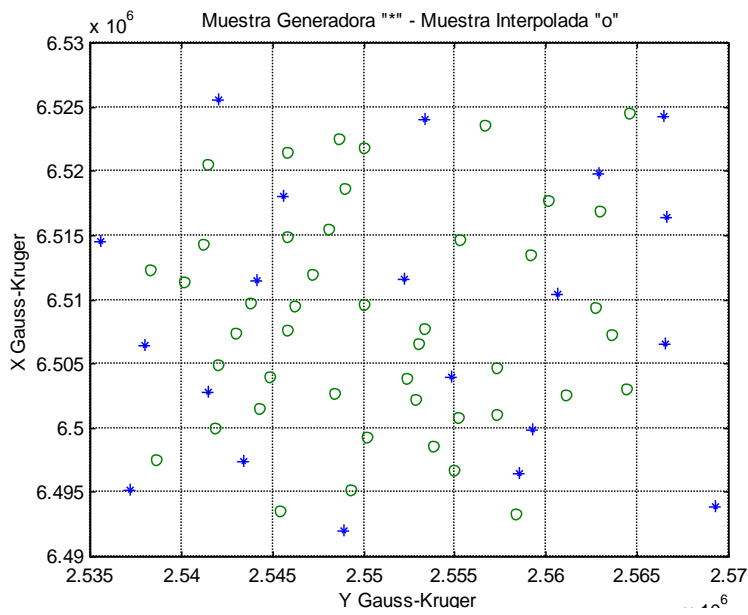


figura (23.4)

Programa REGRAF\_PLT: Genera una Superficie de Interpolación basada en la teoría de la Regresión Múltiple a partir de n puntos de control definidos por sus coordenadas planialtimétricas X,Y,Z.

-Raúl A. Márquez-

\*\* Factor de Reducción de Coord.Planas y Grado \*\*

\*\* FR = 10000

\*\* Grado= 2

\*\* AUTOVALORES \*\*

6.6657e+000  
5.4327e+000  
1.7834e+000  
1.5720e+001  
1.8666e+001  
2.3869e+001  
6.0230e+001  
6.7528e+001  
1.6826e+002

\*\* Matriz Normal: determinante, número de condición y rango \*\*

DET = 3.0955e+011  
con = 9.7132e+000  
ran = 9

\*\* TOLERANCIA= 0

\*\* Regresores Aij del Modelo \*\*

Nest=Aoo+Ao1Y+Ao2Y^2+...+AonY^n+A1oX+A11XY+A12XY^2+...+A1nXY^n+  
A2oX^2+A21X^2Y+A22X^2Y^2+...+A2nX^2Y^n+.....+  
.....+AnoX^n+An1X^nY+An2X^nY^2+...+AnnX^nY^n

24.95719348179404  
0.29244804620814  
0.01309820002201  
-0.13548882738342  
0.02899916012690  
-0.04871356220025  
0.20079171543865  
-0.00155930544773  
0.00503218323967

**\*\* Muestra Generadora: Estadística de los Residuos \*\***

**\*\* media = 0.00000**

**\*\* desv. estándar = 0.03555**

Los Residuos Normalizados

-0.4685  
-0.9042  
0.7132  
-0.2932  
0.9149  
1.3502  
1.6269  
-0.4528  
-0.0640  
1.3586  
0.0327  
-0.0050  
-1.2676  
-1.8086  
-0.0641  
-1.6962  
-0.2646  
1.2905  
0.5063  
-0.5047

**\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°1 \*\***

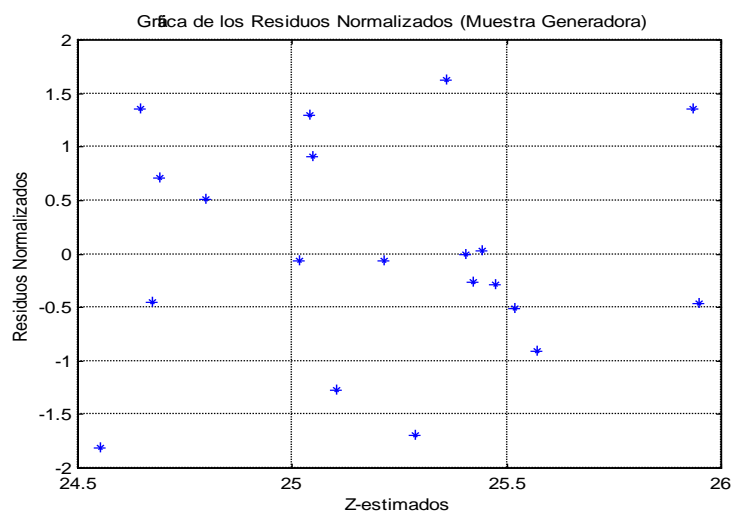


figura (24.4)

## Histograma de los residuos normalizados

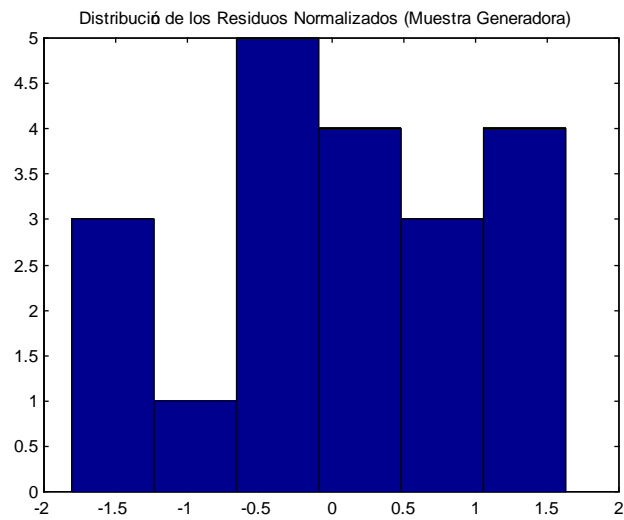


figura (25.4)

\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº2 \*\*

\*\* La Variación No-Explicada es = 0.0240115

\*\* La Variación Explicada es = 3.1108074

\*\* La Variación Total es = 3.1348190

\*\* El Coeficiente de Determinación es = 0.9923404

\*\* El Coeficiente de Correlación es = 0.9961628

\*\* ANOVA-TEST \*\*

\*\* El valor de F e s= 178.14

\*\* Grados de Libertad \*\*

nu1 = 8

nu2 = 11

\*\* Valor de Tabla = 2.95

\*\* Se Rechaza H0: El Modelo Tiene Utilidad \*\*

ERRORES ESTANDAR DE LOS REGRESORES: SAij

0.0258

0.0166

0.0178

0.0154

0.0098

0.0112

0.0185  
0.0120  
0.0134

LOS ESTADISTICOS "t" PARA LOS REGRESORES:  $t_i = A_{ij}/S_{Aij}$

967.49  
17.66  
0.73  
-8.82  
2.95  
-4.34  
10.87  
-0.13  
0.37

Grados de Libertad

nu = 11.00

\*\* Muestra Interpolada \*\*

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico nº3 \*\*

### Gráfica de dispersión de las diferencias

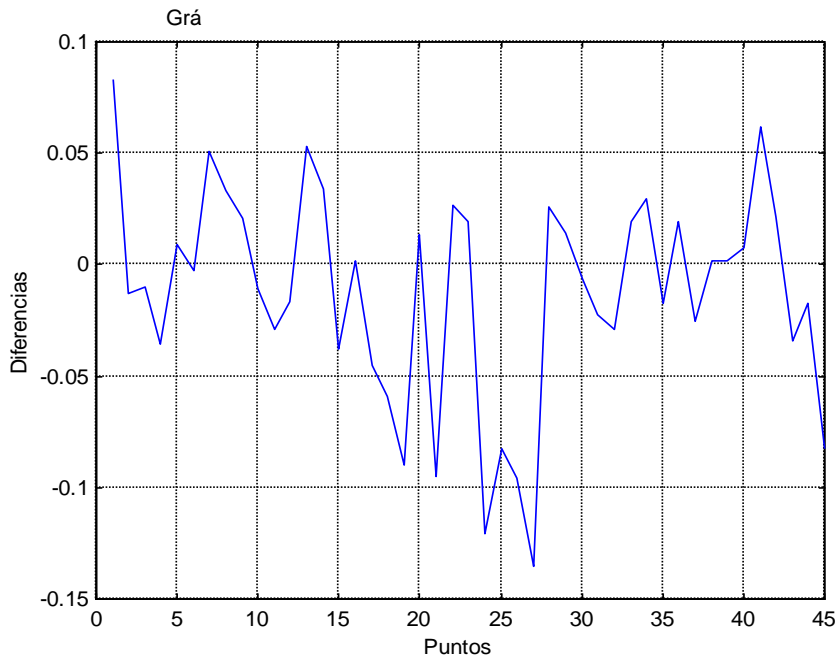


figura (26.4)

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico nº3 \*\*

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico nº4 \*\*

### Histograma de las diferencias

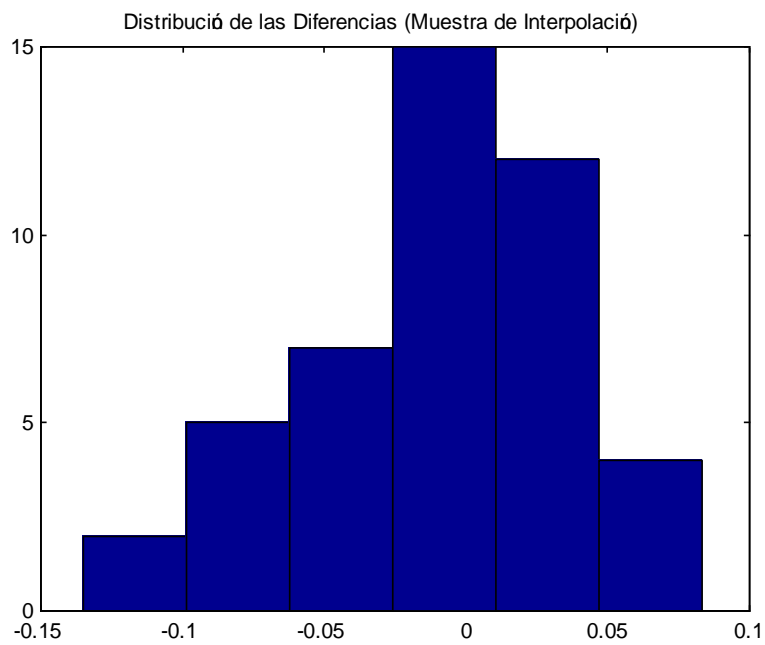


figura (27.4)

\* Ingrese Z\_crítico (valor de tabla) \*\*

\*\* Z\_crítico = 1.96

N_est	Dif.	Error	Li	Ls	Int.conf
25.7561	0.0831	0.1060	25.6502	25.8621	0.2119
25.5611	-0.0129	0.1035	25.4576	25.6645	0.2069
25.4871	-0.0099	0.1095	25.3776	25.5966	0.2190
25.4226	-0.0354	0.1094	25.3132	25.5320	0.2189
25.3794	0.0094	0.1189	25.2606	25.4983	0.2378
25.5116	-0.0024	0.1156	25.3960	25.6272	0.2312
25.3421	0.0511	0.1025	25.2396	25.4446	0.2049
25.2420	0.0330	0.0997	25.1423	25.3417	0.1994
25.2842	0.0212	0.0997	25.1845	25.3838	0.1994
25.5276	-0.0104	0.1005	25.4271	25.6281	0.2010
25.3196	-0.0294	0.1006	25.2190	25.4202	0.2011
25.2624	-0.0166	0.1015	25.1609	25.3639	0.2030
25.1199	0.0529	0.1019	25.0180	25.2218	0.2037
25.1082	0.0342	0.1003	25.0080	25.2085	0.2006
25.0585	-0.0375	0.1026	24.9559	25.1610	0.2052
25.6459	0.0019	0.1055	25.5403	25.7514	0.2111
25.4986	-0.0454	0.1021	25.3965	25.6006	0.2042
25.1789	-0.0591	0.1023	25.0765	25.2812	0.2046
25.1413	-0.0897	0.1022	25.0391	25.2435	0.2044
25.0292	0.0132	0.1043	24.9249	25.1335	0.2085
25.2301	-0.0949	0.1004	25.1296	25.3305	0.2009
24.9229	0.0269	0.1044	24.8185	25.0273	0.2088
25.0173	0.0193	0.1040	24.9133	25.1213	0.2080
25.2230	-0.1210	0.0999	25.1232	25.3229	0.1997
25.1051	-0.0829	0.1018	25.0034	25.2069	0.2035
24.8923	-0.0957	0.1042	24.7880	24.9965	0.2085
25.0599	-0.1351	0.0999	24.9600	25.1599	0.1999
24.8240	0.0260	0.1032	24.7208	24.9272	0.2064
24.8215	0.0145	0.1015	24.7200	24.9230	0.2030
24.7957	-0.0063	0.0996	24.6961	24.8953	0.1992
24.8946	-0.0224	0.1037	24.7908	24.9983	0.2074
25.0349	-0.0291	0.0988	24.9360	25.1337	0.1976
24.8896	0.0196	0.1015	24.7881	24.9911	0.2030
24.7698	0.0298	0.1023	24.6675	24.8721	0.2046
25.1460	-0.0170	0.0989	25.0471	25.2449	0.1978
24.7514	0.0194	0.1013	24.6501	24.8527	0.2026
24.6537	-0.0253	0.1019	24.5518	24.7556	0.2038
24.7040	0.0020	0.1012	24.6028	24.8052	0.2024
24.7025	0.0015	0.1003	24.6022	24.8028	0.2005
25.3546	0.0076	0.1072	25.2474	25.4618	0.2143



24.8478	0.0618	0.1080	24.7398	24.9557	0.2159
24.6894	0.0214	0.1056	24.5838	24.7950	0.2112
24.5829	-0.0341	0.1040	24.4789	24.6869	0.2080
24.4450	-0.0170	0.1144	24.3306	24.5593	0.2287
25.2512	-0.0828	0.1008	25.1504	25.3520	0.2016

\*\* Error Promedio de Predicción \*\*

0.1035

\*\* Estadística de las diferencias muestrales \*\*

\*\* Media = -0.01251

\*\* Desviación Estandar = 0.04828

\*\* Error total de interpolacion \*\*

Et = 0.0499

\*\* Gráficas Tridimensionales de Ondulaciones \*\*

\*\* paso= 1000

\*\* Haga click en figura nº...para ver gráfico nº5 \*\*

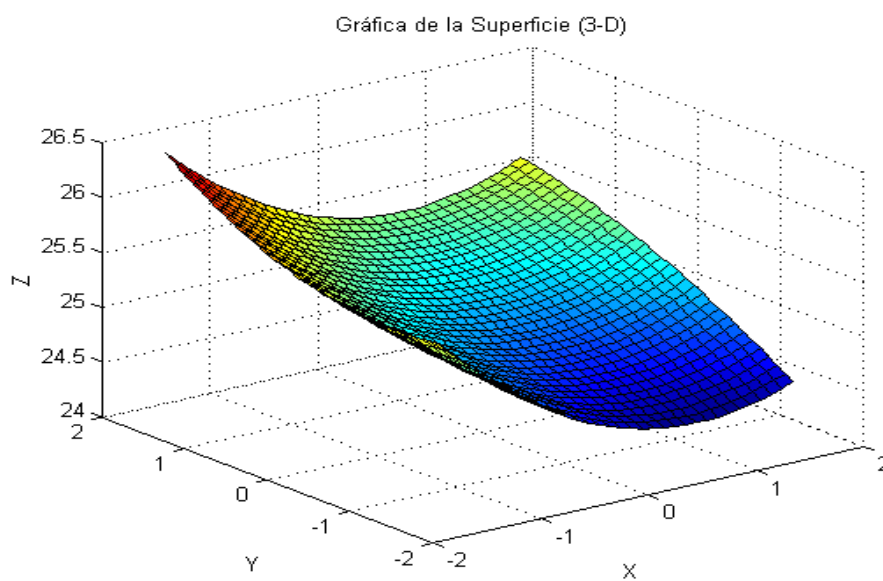
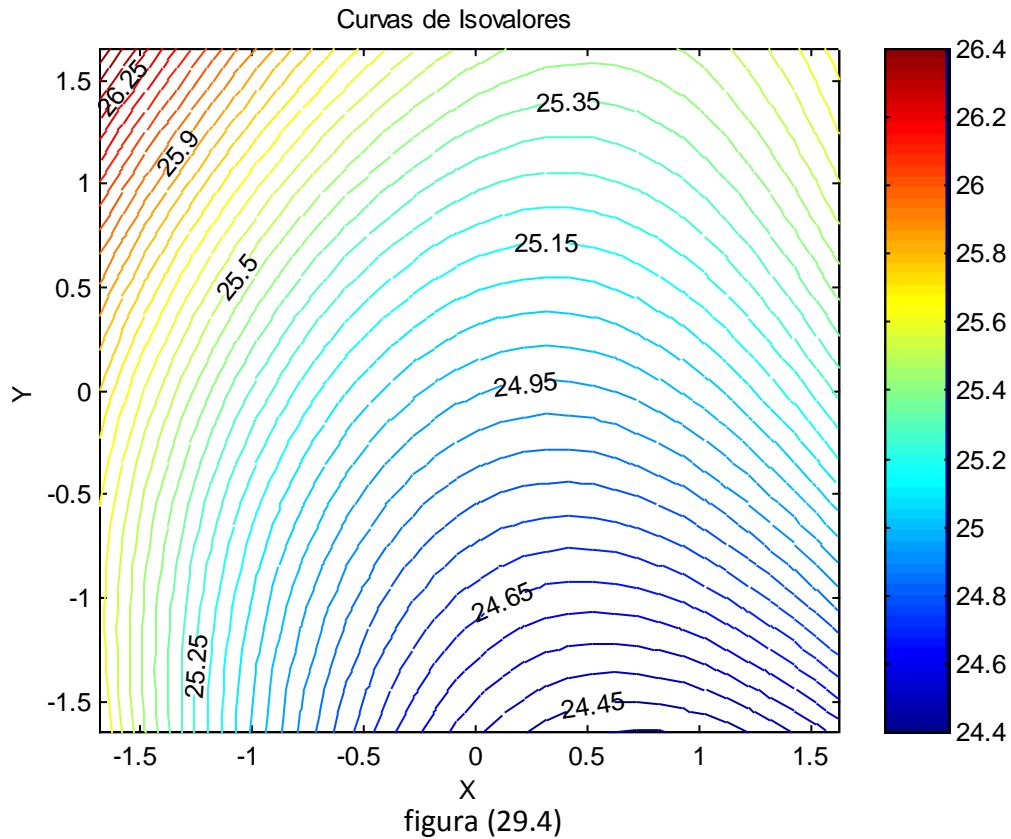


figura (28.4)



\*\* Curvas de Isovalores\*\*

\*\* Cota Máxima = 27

\*\* Cota Mínima = 24

\*\* Equidistancia = 0.05

Please wait a moment...

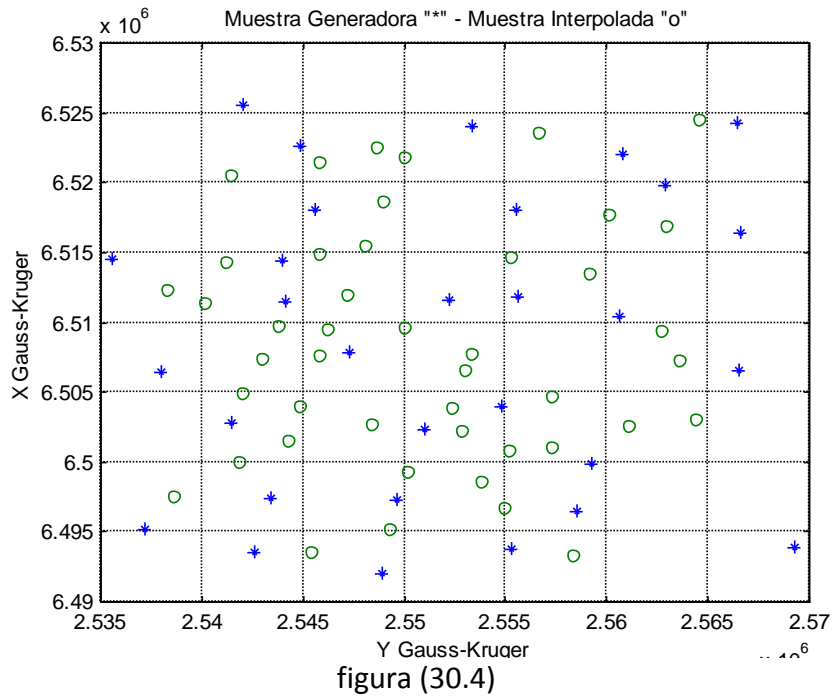
Carefully select contours for labeling.

When done, press RETURN while the Graph window is the active window.

\*\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº6 \*\*

\*\*\*\* Terminé.....!!! \*\*\*\*

Muestra de 30 puntos:



Programa REGRAF\_PLT: Genera una Superficie de Interpolación basada en la teoría de la Regresión Múltiple a partir de n puntos de control definidos por sus coordenadas planialtimétricas X,Y,Z.

-Raúl A. Márquez-

**\*\* Factor de Reducción de Coord.Planas y Grado \*\***

**\*\* FR = 10000**

**\*\* Grado= 3**

**\*\* AUTOVALORES \*\***

- 9.2747e-001
- 6.8902e-001
- 2.3560e-001
- 2.4611e+000
- 4.4222e+000
- 6.5465e+000
- 8.3255e+000
- 1.1513e+001
- 1.9493e+001
- 2.1476e+001
- 3.9763e+001

4.8346e+001  
1.4615e+002  
2.7646e+002  
4.1612e+002  
9.2423e+002

\*\* Matriz Normal: determinante, número de condición y rango \*\*

DET = 1.2858e+019  
Con = 6.2633e+001  
ran = 16

\*\* TOLERANCIA= 0

\*\* Regresores Aij del Modelo \*\*

Nest=Aoo+Ao1Y+Ao2Y^2+...+AonY^n+A1oX+A11XY+A12XY^2+...+A1nXY^n+  
A2oX^2+A21X^2Y+A22X^2Y^2+...+A2nX^2Y^n+.....+  
.....+AnoX^n+An1X^nY+An2X^nY^2+...+AnnX^nY^n

24.93964817976523  
0.25619157753171  
0.02687074113585  
0.01684535918395  
-0.22018453788050  
-0.03780743055129  
-0.01579131456723  
-0.00171537475593  
0.22246315547319  
-0.00485036961322  
-0.00725985133431  
-0.00390470767177  
0.03258701865575  
0.02625958345922  
-0.01146720927504  
0.00582532563758

\*\* Muestra Generadora: Estadística de los Residuos \*\*

\*\* media = 0.00000  
\*\* desv. estándar = 0.01384

## Los Residuos Normalizados

-0.1486  
-0.0363  
0.0272  
0.0215  
-0.3156  
0.1027  
-0.1940  
0.8899  
1.0072  
-0.2669  
1.3301  
0.1603  
0.1038  
-1.0019  
-1.6826  
-2.8016  
-0.8907  
-0.5852  
0.3711  
0.1052  
0.1236  
0.1116  
0.1667  
0.4775  
0.9066  
0.0767  
2.2669  
-1.9987  
0.3219  
1.3517

\*\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº1 \*\*

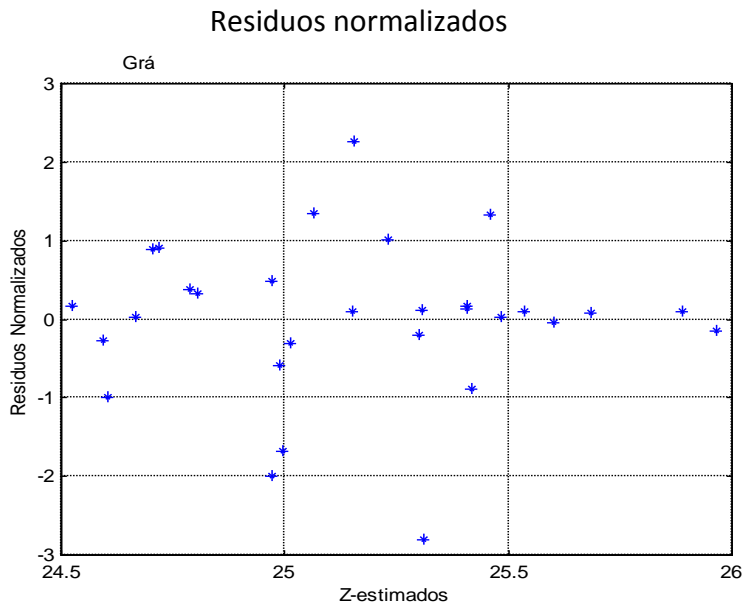


figura (31.4)

\*\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº1 \*\*

\*\* Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº2 \*\*

### Histograma de los residuos

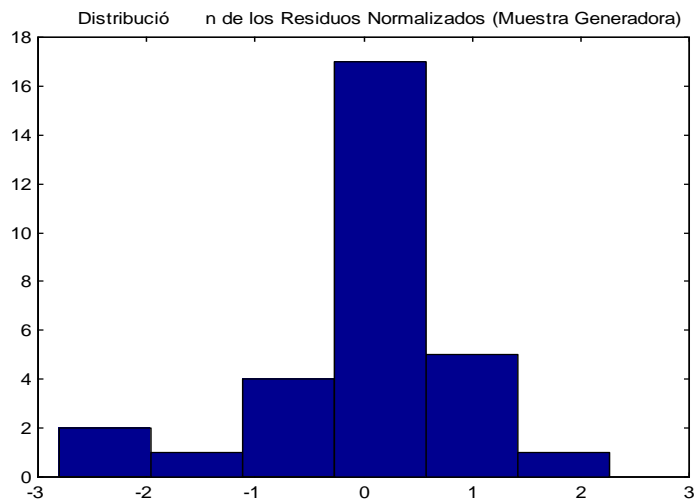


figura (32.4)

\*\* La Variación No-Explicada es = 0.0055512

\*\* La Variación Explicada es = 4.3537643

\*\* La Variación Total es = 4.3593155

\*\* El Coeficiente de Determinación es = 0.9987266

\*\* El Coeficiente de Correlación es = 0.9993631

\*\* ANOVA-TEST \*\*

\*\* El valor de F = 732.01

\*\* Grados de Libertad \*\*

nu1 = 15

nu2 = 14

\*\* Valor de Tabla = 2.46

\*\* Se Rechaza H0: El Modelo Tiene Utilidad \*\*

ERRORES ESTANDAR DE LOS REGRESORES: SAij

0.0082

0.0144

0.0065

0.0075

0.0169

0.0303

0.0138

0.0188

0.0075

0.0139

0.0075

0.0084

0.0098

0.0180

0.0091

0.0118

LOS ESTADISTICOS "t" PARA LOS REGRESORES:  $t_i = A_{ij}/SA_{ij}$

3034.56

17.78

4.10

2.24

-13.06

-1.25

-1.15

-0.09

29.81

-0.35

-0.97

-0.46

3.32

1.46

-1.26

0.49

Grados de Libertad

$\nu = 14.00$

\*\* Muestra Interpolada \*\*

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°3 \*\*

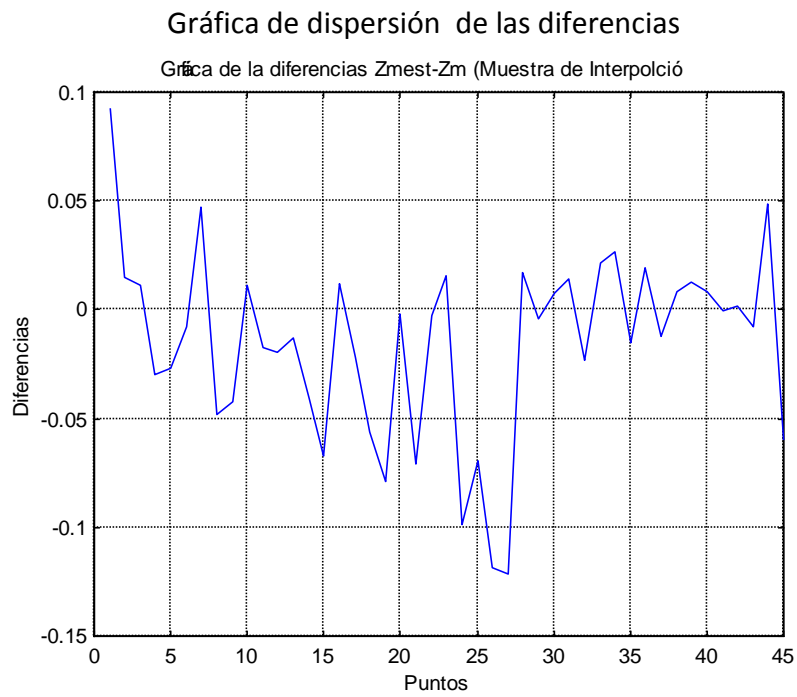


figura (33.4)

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°4 \*\*



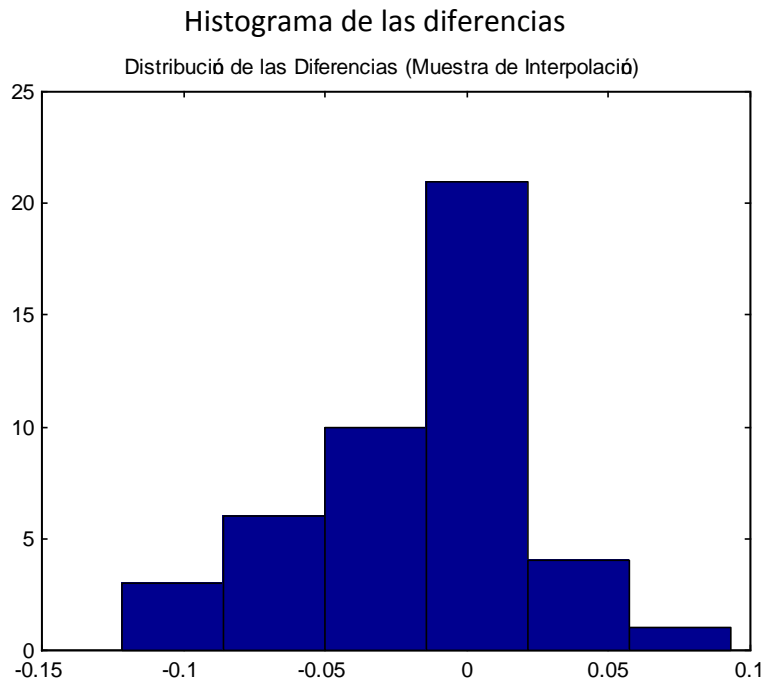


figura (34.4)

\*\* Ingrese  $Z_{\text{crítico}}$  (valor de tabla) \*\*

\*\*  $Z_{\text{crítico}} = 1.96$

N_est	Dif.	Error	Li	Ls	Int.conf
25.7660	0.0930	0.0492	25.7169	25.8152	0.0983
25.5886	0.0146	0.0467	25.5419	25.6353	0.0933
25.5085	0.0115	0.0516	25.4569	25.5600	0.1032
25.4284	-0.0296	0.0483	25.3800	25.4767	0.0967
25.3429	-0.0271	0.0532	25.2897	25.3961	0.1064
25.5063	-0.0077	0.0566	25.4497	25.5629	0.1132
25.3384	0.0474	0.0440	25.2945	25.3824	0.0879
25.1612	-0.0478	0.0456	25.1155	25.2068	0.0913
25.2211	-0.0419	0.0455	25.1756	25.2665	0.0909
25.5494	0.0114	0.0454	25.5040	25.5948	0.0908
25.3320	-0.0170	0.0445	25.2875	25.3765	0.0890
25.2592	-0.0198	0.0437	25.2156	25.3029	0.0873
25.0542	-0.0128	0.0453	25.0089	25.0995	0.0905
25.0334	-0.0406	0.0463	24.9872	25.0797	0.0925
25.0287	-0.0673	0.0449	24.9838	25.0735	0.0898
25.6560	0.0120	0.0451	25.6109	25.7012	0.0902
25.5222	-0.0218	0.0437	25.4785	25.5659	0.0874
25.1819	-0.0561	0.0434	25.1384	25.2253	0.0869
25.1522	-0.0788	0.0435	25.1087	25.1956	0.0869
25.0141	-0.0019	0.0424	24.9717	25.0565	0.0847

25.2544	-0.0706	0.0438	25.2106	25.2982	0.0876
24.8931	-0.0029	0.0426	24.8505	24.9357	0.0851
25.0137	0.0157	0.0462	24.9675	25.0599	0.0924
25.2451	-0.0989	0.0447	25.2004	25.2898	0.0894
25.1188	-0.0692	0.0439	25.0750	25.1627	0.0878
24.8694	-0.1186	0.0427	24.8268	24.9121	0.0853
25.0733	-0.1217	0.0456	25.0277	25.1189	0.0912
24.8151	0.0171	0.0433	24.7718	24.8584	0.0866
24.8032	-0.0038	0.0460	24.7572	24.8492	0.0920
24.8095	0.0075	0.0484	24.7611	24.8579	0.0968
24.9313	0.0143	0.0510	24.8802	24.9823	0.1021
25.0409	-0.0231	0.0463	24.9946	25.0872	0.0925
24.8916	0.0216	0.0450	24.8466	24.9366	0.0899
24.7669	0.0269	0.0438	24.7231	24.8107	0.0876
25.1478	-0.0152	0.0453	25.1025	25.1931	0.0906
24.7510	0.0190	0.0441	24.7069	24.7951	0.0882
24.6665	-0.0125	0.0435	24.6230	24.7100	0.0870
24.7106	0.0086	0.0450	24.6656	24.7556	0.0899
24.7140	0.0130	0.0466	24.6675	24.7606	0.0932
25.3551	0.0081	0.0481	25.3070	25.4032	0.0962
24.7855	-0.0005	0.0474	24.7381	24.8329	0.0948
24.6699	0.0019	0.0433	24.6266	24.7131	0.0865
24.6089	-0.0081	0.0434	24.5656	24.6523	0.0867
24.5103	0.0483	0.0604	24.4499	24.5707	0.1208
25.2741	-0.0599	0.0437	25.2304	25.3178	0.0874

\*\* Error Promedio de Predicción \*\*

0.0461

\*\* Estadística de las diferencias muestrales \*\*

\*\* Media = -0.01518

\*\* Desviación Estandar = 0.04310

\*\* Error total de interpolacion \*\*

Et = 0.0457

\*\* Gráficas Tridimensionales de Ondulaciones \*\*

\*\* paso= 1000

\*\* Haga click en figura nº...para ver gráfico nº5 \*\*

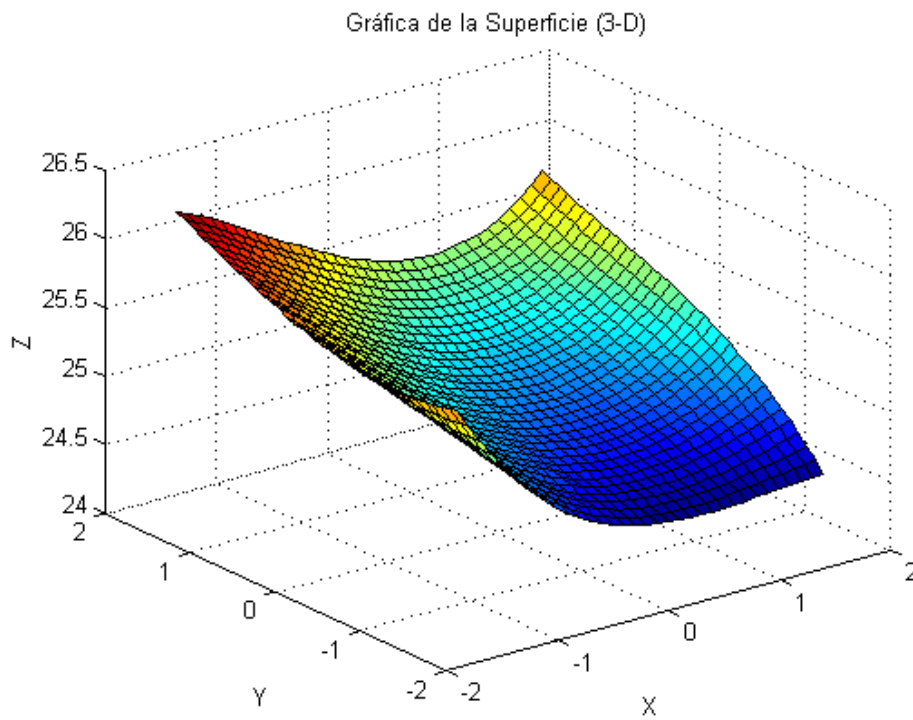


figura (35.4)

\*\* Azimut = 1200

\*\* Elevac .:= 10

\*\* Curvas de Isovalores\*\*

\*\* Cota Máxima = 27

\*\* Cota Mínima = 24

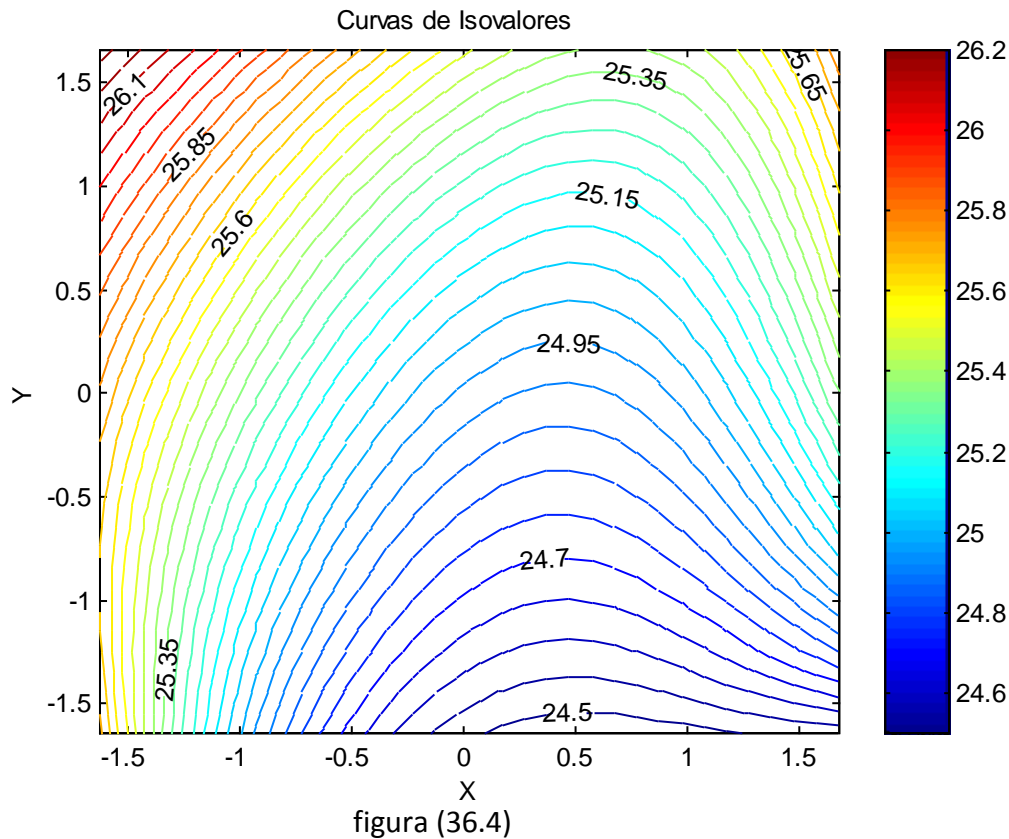
\*\* Equidistancia = 0.05

Please wait a moment...

Carefully select contours for labeling.

When done, press RETURN while the Graph window is the active window.

\*\* Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°6 \*\*



\*\*\*\* Terminé.....!!! \*\*\*\*

### **Conclusión:**

Para obtener conclusiones finales sobre la eficiencia de los tres interpoladores IDS, REG y MTQ, se procedió a interpolar ondulaciones y cotas con muestras generadoras de tamaños 5, 10, 15, 20, 25 y 30. Se seleccionó un radio de búsqueda de 60 km para IDS a fin de que la muestra generadora contuviera la totalidad de sus puntos en cada caso.

#### Interpolación de ondulaciones:

	5	10	15	20	25	30
IDS	0.18	0.15	0.12	0.11	0.11	0.11
REG	0.25	0.17	0.04	0.05	0.04	0.04
MTQ	0.13	0.05	0.04	0.05	0.04	0.04

En las celdas de la tabla aparece el error de interpolación de la ondulación del geoides, ET, expresado en metros. El error de la altura sobre el nivel medio del mar (cota) es el error de interpolación de la ondulación puesto que  $H = h - N$

Los resultados obtenidos con MTQ\_RM para una muestra generadora de 25 y 30 puntos y tolerancia  $t = 0.5$ , son semejantes a los obtenidos con REGRAF\_PLT para una muestra generadora de 25 y 30 puntos. Aparentemente el tamaño ideal de la muestra

generadora para un área de unas 150000 hectáreas, parece estar comprendido entre 25 y 30 puntos.

Interpolación de cotas:

	5	10	15	20	25	30
IDS	26.2	19.6	12.9	10.7	10.3	10.0
REG	25.3	16.8	8.1	8.1	11.3	8.5
MTQ	19.8	23.8	9.3	5.0	6.8	5.1

De la comparación de ambas tablas se concluye inmediatamente la conveniencia de interpolar ondulaciones para obtener cotas con precisión de unos pocos centímetros, en lugar de interpolar cotas directamente.

## 5.- Nivelación GPS.

Los métodos tradicionales para determinar las alturas sobre el nivel medio del mar son la nivelación geométrica con precisión de unos pocos centímetros o mejor, la nivelación trigonométrica, con precisión de algunos decímetros y la nivelación barométrica, con precisión de un metro o mayor. La geodesia satelital ofrece una alternativa interesante para la solución de este problema. Solo basta disponer de un punto de apoyo con coordenadas geodésicas  $\phi$ ,  $\lambda$  y  $h$  referidas al sistema geodésico geocéntrico absoluto WGS'84 y su correspondiente altura sobre el nivel medio del mar,  $H$ . Una determinación GPS en modo diferencial estático, permite hallar la altura sobre el nivel medio del mar de la estación remota, sin conocer la ondulación del geode, con precisiones compatibles con las de la nivelación trigonométrica.

Fundamentos del método: Sean dos estaciones 1 y 2, control y remota respectivamente, entre las que se efectúa una sesión GPS en modo diferencial estático. Se conocen las coordenadas geodésicas  $\phi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $h_1$  de la estación control y su altura sobre el nivel medio del mar  $H_1$ . Se desea determinar la altura sobre el nivel medio del mar  $H_2$  de la estación remota. La figura (37.5) describe la situación:

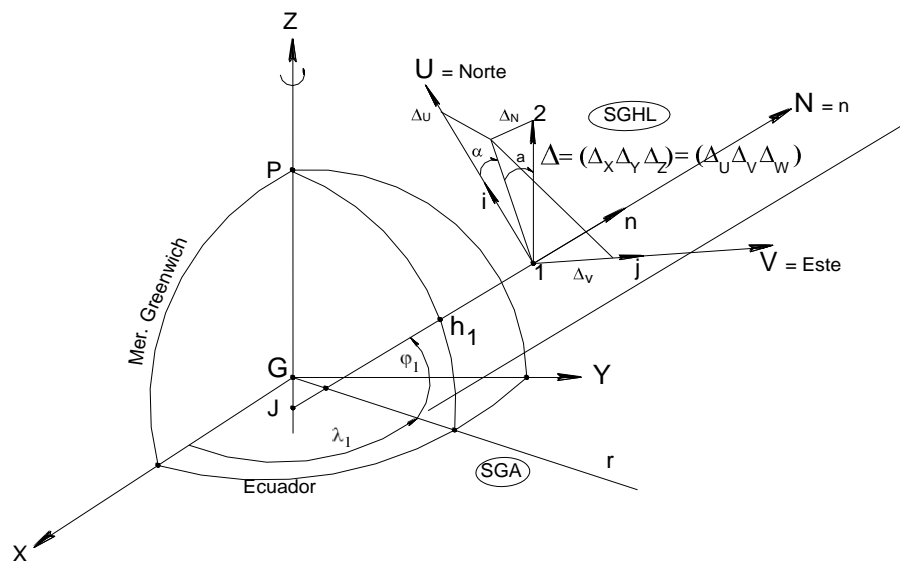


figura (37.5)

Los vectores  $\mathbf{X}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)^T$  y  $\mathbf{X}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)^T$  localizan a las estaciones de control y remota respectivamente, en el sistema WGS'84 donde:

$$\begin{aligned} X_1 &= (N_1 + h_1) \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 \\ Y_1 &= (N_1 + h_1) \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\lambda_1 \\ Z_1 &= (N_1(1 - e^2) + h_1) \operatorname{sen}\varphi_1 \end{aligned} \quad (79.5)$$

y

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_1}}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= (N_2 + h_2) \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 \\ Y_2 &= (N_2 + h_2) \cos\varphi_2 \operatorname{sen}\lambda_2 \\ Z_2 &= (N_2(1 - e^2) + h_2) \operatorname{sen}\varphi_2 \end{aligned} \quad (80.5)$$

y

$$N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_2}}$$

donde:

$a$  es el semieje mayor del elipsoide de referencia:  $a = 6378137$  m

$e^2$  es la primera excentricidad del elipsoide de referencia:  $e^2 = 0.00669438$

Sea  $\mathbf{n}$  el versor normal a una superficie diferenciable en todos sus puntos. En nuestro caso, figura (37.5), el versor  $\mathbf{n}$  es normal al elipsoide de referencia y coincide con el versor  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k} \equiv \mathbf{n}$ ) de la terna ortonormal  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  que genera al Sistema Geodésico Horizontal Local centrado en la estación control 1. Derivando el producto escalar  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ :

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})' = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{n}' \quad (81.5)$$

Derivando entonces el versor  $\mathbf{k} = (\cos\varphi \cos\lambda, \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\varphi)^T$  normal al elipsoide de referencia respecto de  $\varphi$  y de  $\lambda$ , se obtienen vectores ortogonales al versor  $\mathbf{k}$  en las direcciones del crecimiento de  $\varphi$  y de  $\lambda$  respectivamente., según la (81.5).

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = (-\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda, \cos\varphi)^T \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} \right\| = 1 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \mathbf{i} \quad (82.5)$$

luego  $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \mathbf{i}$  es el vector que genera al primer eje coordenado del Sistema Geodésico Horizontal Local (SGHL), centrado en la estación control 1. Derivando  $\mathbf{k}$  respecto de  $\lambda$ :

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = (-\cos\varphi \operatorname{sen}\lambda, \cos\varphi \cos\lambda, 0)^T \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} \right\| = \cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = \mathbf{j} \quad (83.5)$$

luego  $\frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = \mathbf{j}$  es el versor que genera al segundo eje coordenado del Sistema Geodésico Horizontal Local (SGHL), centrado en la estación control 1.

El tercer eje coordenado del Sistema Geodésico Horizontal Local (SGHL) centrado en la estación control 1, está generado por el versor  $\mathbf{k} = (\cos\varphi \cos\lambda, \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\varphi)^T$

El versor  $\delta$  que genera la dirección 1-2, es:

$$\delta = \frac{1}{\|D\|} (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1) = (\delta_x, \delta_y, \delta_z) \quad (84.5)$$

donde:

$$\|D\| = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (85.5)$$

Las proyecciones del versor  $\delta$  sobre los versores base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta \cdot \mathbf{i} &= -\delta_x \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\lambda_1 - \delta_y \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\lambda_1 + \delta_z \cos\varphi_1 = P \\ \delta \cdot \mathbf{j} &= -\delta_x \operatorname{sen}\lambda_1 - \delta_y \cos\lambda_1 = Q \\ \delta \cdot \mathbf{k} &= -\delta_x \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 - \delta_y \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\lambda_1 + \delta_z \operatorname{sen}\varphi_1 = R \end{aligned} \quad (86.5)$$

El acimut geodésico  $\alpha_{1-2}$  es:

$$\alpha_{1-2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right) \quad (87.5)$$

El ángulo de altura  $\alpha_{1-2}$  es

$$\alpha_{1-2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right) \quad (88.5)$$

Si en la fórmula de la nivelación trigonométrica clásica, eliminamos el coeficiente de refracción  $k$ , reemplazamos el ángulo de altura  $\alpha_{1-2}$  leído con el teodolito por la expresión (88.5) y la distancia inclinada  $D$  por la expresión (85.5), se tiene la altura sobre el nivel del mar  $H_2$  de la estación remota 2:

$$H_2 = H_1 + \|D\| \operatorname{sen}\alpha_{1-2} + \left(\frac{1}{2R}\right) (\|D\| \cos\alpha_{1-2})^2 \quad (90.5)$$

donde  $R = 6371000$  m es el radio terrestre medio.

Ejemplo: Sean dos puntos de la red SiCAT de la Dirección de Geodesia y Catastro de la provincia de San Juan:

Punto 1 (control)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -31^\circ 31' 51.56476'' \\ \lambda_1 &= -68^\circ 35' 50.10110'' \\ h_1 &= 707.190 \text{ m} \\ H_1 &= 681.546 \text{ m} \end{aligned}$$

Punto 2 (remota)

$$\varphi_2 = -31^{\circ} 30' 06.30942''$$

$$\lambda_2 = -68^{\circ} 29' 41.78636''$$

$$h_2 = 644.126 \text{ m}$$

$$H_2 = 618.847 \text{ m}$$

Vamos a calcular la altura sobre el nivel medio del mar de la estación remota 2,  $H_2$ , por el método nivelación satelital y la compararemos con el valor  $H_2$ , (618.847 m), que fue obtenido mediante nivelación geométrica.

De los datos, obtenemos:

Vector  $X_1$ :

$$X_1 = 1985916.735 \text{ m}$$

$$Y_1 = -5066746.462 \text{ m}$$

$$Z_1 = -3316586.158 \text{ m}$$

Vector  $D$ :

$$X_2 - X_1 = 9645.799 \text{ m}$$

$$Y_2 - Y_1 = 2027.397 \text{ m}$$

$$Z_2 - Z_1 = 2796.880 \text{ m}$$

$$\|D\| = 10245.697 \text{ m}$$

Vector  $X_2$ :

$$X_2 = 1995562.534 \text{ m}$$

$$Y_2 = -5064719.065 \text{ m}$$

$$Z_2 = -3313789.278$$

Versor  $\delta$ :

$$\delta_x = 0.941449$$

$$\delta_y = 0.197878$$

$$\delta_z = 0.272981$$

Proyecciones de  $\delta$  sobre los ejes de SGHL:

$$P = \delta \cdot i = 0.315996$$

$$Q = \delta \cdot j = 0.948735$$

$$R = \delta \cdot k = -0.006958$$

Angulo de altura:

$$a_{1-2} = -0^{\circ} 23' 55.2''$$

Altura sobre el nivel medio del mar de la estación remota 2:

$$H_2 = 618.495 \text{ m}$$



Comparación:

$H_2(\text{nivelacion geometrica}) = 618.847 \text{ m}$

$H_2(\text{nivelacion GPS}) = 618.495 \text{ m}$

Diferencia = 0.352 m

**Validación del método:** Para ello se seleccionaron los 80 puntos de la red SiCAT que se muestran en la siguiente tabla:

tabla (6.5)

Punto	Latitud_S (WGS'84)			Longitud_W (WGS'84)			Alt. Elips.	Alt. S.N.M.M
1	31	49	14.62478	68	22	15.33125	583.465	559.599
2	31	49	41.45636	68	19	51.31304	581.184	557.41
3	31	49	56.85995	68	18	13.96099	579.849	556.127
4	31	47	9.18889	68	21	46.65967	586.2	562.155
5	31	47	32.73386	68	19	20.9282	584.254	560.288
6	31	47	49.66546	68	17	45.41439	583.749	559.783
7	31	44	42.99519	68	21	12.37173	590.176	565.925
8	31	45	39.10334	68	18	52.98347	588.519	564.365
9	31	45	50.15617	68	17	20.68775	587.267	563.114
10	31	43	2.88485	68	20	47.45558	593.071	568.681
11	31	43	50.58519	68	16	47.76478	590.778	566.378
12	31	41	43.53841	68	16	14.02608	593.203	568.538
13	31	36	48.02811	68	19	20.32699	601.904	576.987
14	31	34	51.1962	68	17	59.97814	606.309	581.16
15	31	34	31.26902	68	19	50.60489	608.215	583.217
16	31	33	33.06913	68	18	0.39402	608.013	582.77
17	31	33	23.27641	68	19	46.94844	607.412	582.316
18	31	32	47.74306	68	21	45.17476	613.544	588.548
19	31	31	8.69959	68	22	41.59833	615.465	590.391
20	31	30	56.4404	68	19	43.67122	612.941	587.718
21	31	30	42.71007	68	18	1.6485	610.661	585.296
22	31	29	31.99835	68	18	0.72754	612.684	587.28
23	31	29	17.17952	68	20	18.14031	615.649	590.386
24	31	27	42.34574	68	20	20.16974	615.979	590.677
25	31	27	41.38564	68	18	20.89081	613.746	588.324
26	31	25	17.48487	68	18	9.28795	613.836	588.233
27	31	25	11.39136	68	19	19.03757	614.927	589.413
28	31	26	30.54707	68	21	40.10901	621.193	595.888
29	31	28	53.69372	68	22	4.61474	617.138	591.929
30	31	28	40.89014	68	24	58.66628	624.187	599.064
31	31	25	40.92142	68	24	18.49675	622.929	597.572
32	31	25	27.50599	68	26	22.21654	626.27	600.838
33	31	27	32.16737	68	26	46.61253	629.976	604.677
34	31	30	30.24757	68	25	8.14026	622.096	597.029

35	31	32	4.96352	68	24	54.41253	618.235	593.235
36	31	32	12.33473	68	27	3.08483	621.055	596.039
37	31	28	22.54728	68	29	7.6325	638.104	612.813
38	31	26	19.37996	68	29	19.97737	639.195	613.698
39	31	24	58.86713	68	30	56.87563	662.99	637.252
40	31	24	41.63217	68	33	31.66949	740.039	714.073
41	31	25	38.75076	68	32	43.48994	688.541	662.725
42	31	27	24.00006	68	33	53.60316	683.597	657.924
43	31	26	39.37633	68	28	28.53244	634.117	608.559
<b>44</b>	<b>31</b>	<b>33</b>	<b>17.86419</b>	<b>68</b>	<b>28</b>	<b>27.11897</b>	<b>630.447</b>	<b>605.431</b>
45	31	34	14.10773	68	30	11.37137	638.131	613.085
46	31	34	16.05368	68	26	21.41387	620.495	595.599
47	31	35	0.88679	68	36	3.05855	700.93	675.394
48	31	36	33.80872	68	36	5.87258	683.345	657.871
49	31	35	56.48111	68	29	16.46345	621.893	596.986
50	31	36	21.83577	68	26	57.73363	615.366	590.588
51	31	35	53.45698	68	23	50.56739	612.451	587.644
52	31	37	1.98091	68	21	25.43473	605.034	580.232
53	31	37	13.67393	68	27	48.07646	612.145	587.345
54	31	37	1.17532	68	29	29.407	617.309	592.439
55	31	36	59.51766	68	33	49.13201	659.256	634.039
56	31	38	25.97559	68	36	15.83518	660.157	634.691
57	31	38	50.51725	68	28	17.79689	606.019	581.287
58	31	39	12.34818	68	26	1.28721	604.694	580.015
59	31	38	31.6472	68	22	35.69736	605.71	581.019
60	31	39	30.69978	68	36	55.10335	653.976	628.417
61	31	39	55.19731	68	32	35.85833	620.047	595.027
62	31	39	55.95965	68	28	40.28609	604.398	579.694
63	31	40	13.11232	68	25	17.06209	602.214	577.597
64	31	40	23.21369	68	23	1.90251	599.779	575.162
65	31	41	5.50221	68	36	32.29447	651.911	626.427
66	31	41	57.69258	68	33	6.14245	617.13	592.166
67	31	41	4.55656	68	28	51.90786	600.428	575.76
68	31	41	50.98888	68	25	4.96857	597.377	575.855
69	31	42	3.43857	68	23	8.58339	595.502	571.04
70	31	42	0.20021	68	31	17.35184	604.336	579.55
71	31	42	46.59662	68	29	5.76744	595.104	570.508
72	31	43	14.94115	68	26	55.40136	595.554	571.049
73	31	43	58.60215	68	23	30.93762	591.559	567.211
74	31	37	15.18919	68	26	37.64946	611.346	586.606
75	31	37	55.12477	68	23	49.79611	607.203	582.502
76	31	36	19.27299	68	25	23.98632	612.923	588.142
77	31	34	54.01747	68	26	33.6026	619.145	594.157
78	31	37	59.7112	68	25	9.52249	607.797	583.095
79	31	40	17.58104	68	24	19.31468	602.041	576.887
80	31	37	41.19277	68	32	2.92706	634.413	609.349

Desde el punto **44**, muy próximo al baricentro de la zona de trabajo, se calcularon las alturas sobre el nivel medio del mar ( $H_{NGPS}$ ) con el método Nivelación GPS en los restantes 79 puntos. Dichas alturas se compararon con las alturas sobre el nivel medio del mar ( $H_{NG}$ ), obtenidas del ajuste de la red altimétrica de nivelación geométrica. Las diferencias se dividieron en clases, en función de las distancias desde el punto 44 a los restantes puntos. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Clase 1: 0-5000 m: tamaño de la muestra:  $n = 4$

Pto.	Distancia(m)	$H_{NG}$ (m)	$H_{NGPS}$ (m)	Dif.(m)
36	2998	596.039	596.039	0.000
45	3250	613.085	613.116	0.031
46	3769	595.599	595.481	-0.118
77	4211	594.157	594.129	-0.028

Hipótesis nula,  $H_0$ :  $\mu = 0$

Hipótesis alternativa,  $H_1$ :  $\mu \neq 0$  ( $\mu$  es la media poblacional).

La media muestral es:  $\bar{X} = -0.029$  m

La desviación estándar muestral es:  $s = 0.064$  m

El estadístico de prueba es:  $t = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n} = -0.906$

El valor crítico es:  $t_{3, 0.975} = 3.18$  (tabla "t" de Student).

Puesto que  $\text{abs}(t) < t_{3, 0.975}$ , se acepta al 95% de confianza (o al menos no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ , y la media muestral no difiere significativamente de la media poblacional o esperada ( $\mu = 0$ ).

El error total es:

$$ET = \sqrt{\bar{X}^2 + s^2} = 0.070 \text{ m}$$

donde  $\bar{X}$  es la componente sistemática y  $s$  es la componente aleatoria o randómica. Esto significa que dentro de los 5000 m, se puede esperar un error del orden de los 0.07 m en la altura sobre el nivel medio del mar obtenida con el método de nivelación GPS.

Clase 2: 5000-10000 m: tamaño de la muestra:  $n = 12$

Pto.	Distancia(m)	$H_{NG}$ (m)	$H_{NGPS}$ (m)	Dif.(m)
19	9945	590.391	590.463	0.072
34	7363	597.029	597.081	0.052
35	6043	593.235	593.224	-0.011
37	9158	612.813	613.073	0.260
49	5056	596.986	596.873	-0.113
50	6137	590.568	590.345	-0.223
51	8726	587.644	587.441	-0.203
53	7336	587.345	587.119	-0.226
54	7072	592.439	592.285	-0.154
74	7859	586.606	586.322	-0.284

76	7385	558.142	587.906	-0.236
80	9907	609.349	609.391	0.042

Hipótesis nula,  $H_0: \mu = 0$

Hipótesis alternativa,  $H_1: \mu \neq 0$  ( $\mu$  es la media poblacional).

La media muestral es:  $\bar{X} = -0.085\text{m}$

La desviación estándar muestral es:  $s = 0.166\text{ m}$

El estadístico de prueba es:  $t = \frac{\bar{X}}{s} \sqrt{n} = -1.770$

El valor crítico es:  $t_{11, 0.975} = 2.20$  (tabla "t" de Student).

Puesto que  $\text{abs}(t) < t_{11, 0.975}$ , se acepta al 95% de confianza (o al menos no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ , y la media muestral no difiere significativamente de la media poblacional o esperada ( $\mu = 0$ ).

El error total es:

$$ET = \sqrt{\bar{X}^2 + s^2} = 0.186\text{ m}$$

donde  $\bar{X}$  es la componente sistemática y  $s$  es la componente aleatoria o randómica. Esto significa que entre de los 5000 m y 10000 m, se puede esperar un error del orden de los 0.186 m en la altura sobre el nivel medio del mar obtenida con el método de nivelación GPS.

Clase 3: 10000-15000 m: tamaño de la muestra:  $n = 26$

Pto.	Distancia(m)	$H_{NG}(m)$	$H_{NGPS}(m)$	Dif.(m)
15	13808	583.217	583.235	0.018
17	13720	582.316	582.433	0.117
18	10642	588.548	588.550	0.002
20	14480	587.718	587.959	0.241
23	14880	590.386	590.656	0.270
29	12964	591.929	592.130	0.201
30	10150	599.064	599.164	0.100
32	14852	600.838	601.217	0.379
33	10973	604.677	604.941	0.264
38	12965	613.698	614.149	0.451
42	13893	657.924	658.577	0.650
43	12274	608.559	609.073	0.514
47	12435	675.394	675.941	0.547
48	13518	657.871	658.352	0.481
52	13087	580.232	580.034	-0.198
55	10895	634.039	634.246	0.207
57	10249	581.287	580.984	-0.303
58	11575	580.015	579.659	-0.356
59	13388	581.019	580.694	-0.325
61	13884	595.027	595.012	-0.015
62	12267	579.694	579.354	-0.034
63	13736	577.597	577.173	-0.424
67	14389	575.760	575.374	-0.386

75	11242	582.502	582.184	-0.318
78	10124	583.095	582.772	-0.323
79	14484	576.887	577.003	0.116

Hipótesis nula,  $H_0$ :  $\mu = 0$

Hipótesis alternativa,  $H_1$ :  $\mu \neq 0$  ( $\mu$  es la media poblacional).

La media muestral es:  $\bar{X} = 0.072m$

La desviación estándar muestral es:  $s = 0.325 m$

El estadístico de prueba es:  $t = \frac{\bar{X}}{s} \sqrt{n} = 1.130$

El valor crítico es:  $t_{25, 0.975} = 2.06$  (tabla "t" de Student).

Puesto que  $\text{abs}(t) < t_{25, 0.975}$ , se acepta al 95% de confianza (o al menos no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ , y la media muestral no difiere significativamente de la media poblacional o esperada ( $\mu = 0$ ).

El error total es:

$$ET = \sqrt{\bar{X}^2 + s^2} = 0.333m$$

donde  $\bar{X}$  es la componente sistemática y  $s$  es la componente aleatoria o randómica. Esto significa que entre de los 10000 m y 15000 m, se puede esperar un error del orden de los 0.333 m en la altura sobre el nivel medio del mar obtenida con el método de nivelación GPS.

Clase 4: 15000-20000 m: tamaño de la muestra:  $n = 22$

Pto.	Distancia(m)	$H_{NG}(m)$	$H_{NGPS}(m)$	Dif.(m)
13	15804	576.987	576.922	-0.065
14	16787	581.160	581.346	0.186
16	16536	582.770	583.051	0.281
21	17179	585.296	585.695	0.051
22	17931	587.280	587.713	0.433
24	16490	590.647	590.976	0.299
25	19061	588.324	588.761	0.437
28	16516	595.888	596.171	0.283
31	15529	597.572	597.885	0.313
39	15869	637.252	637.934	0.682
40	17816	714.073	714.990	0.917
41	15670	662.725	663.497	0.772
56	15580	634.691	635.155	0.464
60	17640	628.417	628.971	0.554
64	15656	575.162	574.746	-0.416
65	19261	626.427	626.889	0.462
66	17619	592.166	592.077	-0.089
68	16679	572.855	572.321	-0.534
69	18236	571.040	570.452	-0.588
70	16702	579.550	579.276	-0.274

71	17547	570.508	570.032	-0.476
72	18549	571.049	570.477	-0.572

Hipótesis nula,  $H_0: \mu = 0$

Hipótesis alternativa,  $H_1: \mu \neq 0$  ( $\mu$  es la media poblacional).

La media muestral es:  $\bar{X} = 0.142m$

La desviación estándar muestral es:  $s = 0.458 m$

El estadístico de prueba es:  $t = \frac{\bar{X}}{s} \sqrt{n} = 1.453$

El valor crítico es:  $t_{21, 0.975} = 2.08$  (tabla "t" de Student).

Puesto que  $\text{abs}(t) < t_{21, 0.975}$ , se acepta al 95% de confianza (o al menos no se rechaza) la hipótesis nula  $H_0$ , y la media muestral no difiere significativamente de la media poblacional o esperada ( $\mu = 0$ ).

El error total es:

$$ET = \sqrt{\bar{X}^2 + s^2} = 0.479m$$

donde  $\bar{X}$  es la componente sistemática y  $s$  es la componente aleatoria o randómica. Esto significa que entre de los 15000 m y 20000 m, se puede esperar un error del orden de los 0.479 m en la altura sobre el nivel medio del mar obtenida con el método de nivelación GPS.

Clase 5: >20000 m: tamaño de la muestra: n = 15

Pto.	Distancia(m)	H <sub>NG</sub> (m)	H <sub>NGPS</sub> (m)	Dif.(m)
1	31054	559.599	558.307	-1.292
2	33202	557.410	556.034	-1.376
3	34750	556.127	554.709	-1.418
4	27694	562.155	561.085	-1.070
5	30006	560.288	559.150	-1.138
6	31730	559.783	558.656	-1.127
7	24011	565.925	565.104	-0.821
8	27387	564.365	563.452	-0.913
9	29072	563.114	562.212	-0.902
10	21172	568.681	568.024	-0.657
11	26822	566.378	565.759	-0.619
12	24817	568.538	568.216	-0.322
26	22019	588.233	588.833	0.600
27	20827	589.413	589.911	0.498
73	21223	567.211	566.483	-0.728

Hipótesis nula,  $H_0: \mu = 0$

Hipótesis alternativa,  $H_1: \mu \neq 0$  ( $\mu$  es la media poblacional).

La media muestral es:  $\bar{X} = -0.752m$

La desviación estándar muestral es:  $s = 0.608 \text{ m}$

El estadístico de prueba es:  $t = \frac{\bar{x}}{s} \sqrt{n} = -4.794$

El valor crítico es:  $t_{14, 0.975} = 2.14$  (tabla "t" de Student).

Puesto que  $\text{abs}(t) > t_{14, 0.975}$ , se rechaza al 95% de confianza la hipótesis nula  $H_0$ , y la media muestral difiere significativamente de la media poblacional o esperada ( $\mu = 0$ ).

El error total es:

$$ET = \sqrt{\bar{X}^2 + s^2} = 0.967m$$

donde  $\bar{X}$  es la componente sistemática y  $s$  es la componente aleatoria o randómica. Esto significa que más allá de los 20000 m, se puede esperar un error del orden de los 0.967 m en la altura sobre el nivel medio del mar obtenida con el método de nivelación GPS, con fuerte error sistemático (-0.752 m). El método no es recomendable para distancias mayores que 20000 m.

La tabla siguiente es una síntesis de los resultados obtenidos:

Distancia (m)	0-5000	5000-10000	10000-15000	15000-20000	> 20000
Error Total(m)	0.070	0.186	0.333	0.479	0.967
Hip. Nula: $H_0$	A	A	A	A	R

**ANEXO:** Las aplicaciones MATLAB.

**RADIAL\_PRU:** Basado en el método de los promedios ponderados. Los datos se introducen por medio de las matrices C para la muestra generadora MG y Cm para la muestra interpolada MI. Las matrices C y Cm se graban en planilla EXCEL y se transfieren a MATLAB.

```
home
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Programa RADIAL_PRU: Interpolador Superficial basado en el método de los
Promedios')
disp(' Ponderados. Los pesos son las inversas de las potencias de las distancias.-')
disp(' ')
disp(' -Raúl A. Márquez-')
clear
pause
% Carga de datos.
load C.mat
load Cm.mat
n=length(C(:,1));
m=length(Cm(:,1));
for j=1:n
    X(j)=C(j,2);
    Y(j)=C(j,3);
end
for j=1:m
    U(j)=Cm(j,2);
    V(j)=Cm(j,3);
end
plot(X,Y,'*',U,V,'O'), title(' Muestra Generadora "*" - Muestra Interpolada "o"')
xlabel('Y Gauss-Kruger'),...
ylabel('X Gauss-Kruger'),grid
clear n
clear m
clear X
clear Y
clear U
clear V
clear i
clear j
pause
disp(' ')
% Vectores X,Y,Z.(Coordenadas de los puntos de control).
X=C(:,2)/1000;
Y=C(:,3)/1000;
Z=C(:,1);
```



```

n=length(X);
Xm=Cm(:,2)/1000;
Ym=Cm(:,3)/1000;
Zm=Cm(:,1);
m=length(Xm);
disp(' ')
disp(' ')
RB=input(' Radio de Búsqueda (km) = ');
pot=input(' Potencia= ');
disp(' ')
for i=1:m
    k=0;
    S=0;
    SP=0;
    for j=1:n
        D=sqrt((Xm(i)-X(j))^2+(Ym(i)-Y(j))^2);
        if D<RB
            k=k+1;
            P(k)=1/(D^pot);
            S=S+P(k)*Z(k);
            SP=SP+P(k);
        end
    end
    if SP==0
        disp(' Radio de búsqueda insuficiente')
        pause
    end
    Zest(i)=S/SP;
end
disp(' Z_estimados y Diferencias (Muestra Interpolada)')
disp(' ')
pause
Zdif=Zest'-Zm;
[Zest' Zdif]
pause
% Estadística de las diferencias muestrales (Zdif=Zest-Z).
MZdif=mean(Zdif);
DSZdif=std(Zdif);
Max=max(Zdif);
Min=min(Zdif);
ET=sqrt(MZdif^2+DSZdif^2);
disp(' Estadística de las diferencias muestrales')
disp(' ')
fprintf(' Media           = %8.5f\n', MZdif)
fprintf(' Desviación Estandar = %8.5f\n', DSZdif)
fprintf(' Máximo           = %8.5f\n', Max)
fprintf(' Mínimo           = %8.5f\n', Min)

```

```

fprintf(' Error Total      = %8.5f\n', ET)

disp('      ')
pause
x=1:length(Xm);
y=Zdif;
plot(x,y),grid
title(' Gráfica de dispersión')
xlabel('Puntos'),ylabel(' Diferencias')
disp(' Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°1')
disp('      ')
disp('      ')
pause
hist(Zdif,8)
title(' Distribución de las Diferencias (Muestra de Interpolación) ')
disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°4 **')
pause
disp(' ')
disp(' ')

disp(' Terminé.....!!!')

```

**MTQ\_RM:** Basado en el método multicuádrico. Los datos se introducen por medio de las matrices C para la muestra generadora MG y Cm para la muestra interpolada MI. Las matrices C y Cm se graban en planilla EXCEL y se transfieren a MATLAB.

```

home
disp('      ')
disp('      ')
disp('Programa MTQ_RM: Genera una Superficie de Interpolación basada en la suma
de super-')
disp('ficies cuádricas,a partir de n puntos de control definidos por sus coordenadas')
disp('planialtimétricas X,Y,Z. ')
disp('      -Raúl A. Márquez-')
clear
pause
format long
% Carga de datos.
load C.mat
% Vectores X,Y,Z.(Coordenadas de los puntos de control).
X=C(:,2);
Y=C(:,3);
Z=C(:,1);
n=length(X);
% Cálculo de B.
%B=0;

```

```

%for k=1:n
% for l=k:n
% B=B+((X(k)-X(l))^2+(Y(k)-Y(l))^2);
% end
%end
%B=(2*B)/(n*(n-1));
B=(max(X)-min(X))*(max(Y)-min(Y));
% Matriz Q(simétrica).
for k=1:n
    for l=k:n
        Q(k,l)=sqrt((X(k)-X(l))^2+(Y(k)-Y(l))^2+B);
        Q(l,k)=Q(k,l);
    end
end
% Resolución del Sistema de Ecuaciones Normales por Diagonalización.
[V,D]=eig(Q);
disp(' ')
disp('AUTOVALORES')
disp(' ')
format short e
YY=diag(D)
format
disp(' ')
tol=input('TOLERANCIA ')
disp(' ')
m=length(Q(1,:));
l=0;
for k=1:m
    if abs(D(k,k)) < tol
        l=l+1;
        NC(l)=k;
    end
end
if l~=0
    NFC=NC(1);
    for k=1:length(NC)
        D(NFC,:)=[];
        D(:,NFC)=[];
        V(:,NFC)=[];
    end
    c=V*inv(D)*V'*Z;
else
    c=V*inv(D)*V'*Z;
end
cx=c;
%Qinv=V*inv(D)*V';
%c=Qinv*Z;

```

```

%c=inv(Q)*Z;
disp(' ')
disp(' ')
disp('Superficie MTQ (multicuádrica)')
disp(' ')
disp(' ')
% Muestra Interpolada. Carga de datos.
load Cm.mat
Xm=Cm(:,2);
Ym=Cm(:,3);
Zm=Cm(:,1);
m=length(Xm);
% Cálculo de Zmest.
for k=1:m
    Cte=0;
    for l=1:n
        Cte=Cte+c(l)*sqrt((Xm(k)-X(l))^2+(Ym(k)-Y(l))^2+B);
    end
    Zmest(k)=Cte;
end
disp('Z-estimados y Diferencias (Muestra Interpolada)')
disp(' ')
pause
Zmdif=Zmest'-Zm;
[Zmest' Zmdif]
% Estadística de las diferencias muestrales (Zmdif=Zmest-Zm).
MZmdif=mean(Zmdif);
DSZmdif=std(Zmdif);
disp('Estadística de las diferencias muestrales')
disp(' ')
fprintf('Media = %8.5f\n', MZmdif)
fprintf('Desviación Estandar = %8.5f\n', DSZmdif)
disp(' ')
pause
xm=1:length(Xm);
ym=Zmdif;
plot(xm,ym),grid
title('Gráfica de la diferencias Zmest-Zm (Muestra Interpolada) **MTQ**')
xlabel('Puntos'),ylabel('Diferencias')
disp('Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°1')
disp(' ')
disp(' ')
pause
Xl=min(X);
XS=max(X);
Yl=min(Y);
YS=max(Y);

```

```

disp(' ')
paso=input('paso ');
disp(' ')
disp(' ')
x=Xl:paso:XS;
y=Yl:paso:YS;
[xg,yg]=meshgrid(x,y);
P=0;
for k=1:n
    P=P+c(k)*sqrt((xg-X(k)).^2+(yg-Y(k)).^2+B);
end
z=P;
surf(xg,yg,z)
title('Gráfica de la Superficie (3-D) **MTQ**')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
disp('Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°2')
disp(' ')
disp(' ')
pause
AZ=0;
while AZ<1000
    AZ=input(' AZIMUT ');
    EL=input(' ELEVAC. ');
    disp(' ')
    mesh(z,[AZ,EL]);
end
c_min=input('Ingrese cota mínima ');
c_max=input('Ingrese cota máxima ');
eq_dist=input('Ingrese equidistancia ');
disp(' ')
v=c_min:eq_dist:c_max;
[c,h]=contour(x,y,z,v);
clabel(c,h,'manual'),colorbar
title('Curvas de Isovalores **MTQ**')
xlabel('X'),ylabel('Y')
disp('Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°3')
pause
disp(' ')
disp(' ')

hist(Zmdif,6)
title(' Distribución de las Diferencias (Muestra de Interpolación) ')
disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°4 **')
pause
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Terminé.....!!!')

```

**REGRAF\_PLT:** Basado en el método de regresión. Los datos se introducen por medio de las matrices C para la muestra generadora MG y Cm para la muestra interpolada MI. Las matrices C y Cm se graban en planilla EXCEL y se transfieren a MATLAB.

```

home
disp(' ')
disp(' ')
disp(' Programa REGRAF_PLT: Genera una Superficie de Interpolación basada en la
teoría de')
disp(' la Regresión Múltiple a partir de n puntos de control definidos por sus
coordenadas')
disp(' planialtimétricas X,Y,Z.')
disp(' -Raúl A. Márquez-')
clear
pause
format long
% Carga de datos.
load C.mat
load Cm.mat
n=length(C(:,1));
m=length(Cm(:,1));
for j=1:n
    X(j)=C(j,2);
    Y(j)=C(j,3);
end
for j=1:m
    U(j)=Cm(j,2);
    V(j)=Cm(j,3);
end
plot(X,Y,'*',U,V,'O'), title(' Muestra Generadora "*" - Muestra Interpolada "o"')
xlabel('Y Gauss-Kruger'),...
ylabel('X Gauss-Kruger'),grid
clear n
clear m
clear X
clear Y
clear U
clear V
clear i
clear j
pause
disp(' ')
disp('** Factor de Reducción de Coord.Planas y Grado **')
disp(' ')
FR=input('** FR = ');
C(:,2)=C(:,2)/FR;
C(:,3)=C(:,3)/FR;

```

```

% Vectores X,Y,Z.(Coordenadas de los puntos de control).
X=C(:,2)-mean(C(:,2));
Y=C(:,3)-mean(C(:,3));
Z=C(:,1);
n=length(X);
disp(' ')
kg= input( '** Grado= ');
disp(' ')
% Matriz de coeficientes A
for i=1:n
    j=0;
    for k=0:kg
        for l=0:kg
            j=j+1;
            A(i,j)=(X(i)^k)*(Y(i)^l);
        end
    end
end
Q=A'*A;
% Resolución del Sistema de Ecuaciones Normales por Diagonalización.
[V,D]=eig(Q);
disp(' ')
disp('** AUTOVALORES **')
pause
disp(' ')
format short e
YY=abs(diag(D))
con=sqrt(max(YY)/min(YY));
DET=1;
for i=1:j
    DET=DET*YY(i);
end
ran=rank(Q);
disp('** Matriz Normal: determinante, número de condición y rango **')
pause
DET,con,ran
format
disp(' ')
tol=input('** TOLERANCIA= ');
disp(' ')
m=length(Q(1,:));
l=0;
for k=1:m
    if abs(D(k,k)) < tol
        l=l+1;
        NC(l)=k;
    end
end

```

```

end
if l~=0
    NFC=NC(1);
    for k=1:length(NC)
        D(NFC,:)=[];
        D(:,NFC)=[];
        V(:,NFC)=[];
    end
    cx=V*inv(D)*V'*A'*Z;
else
    cx=V*inv(D)*V'*A'*Z;
end
disp('** Regresores Aij del Modelo **')
disp(' ')
disp('Nest=Aoo+Ao1Y+Ao2Y^2+...+AonY^n+A1oX+A11XY+A12XY^2+...+A1nXY^n+')
disp('A2oX^2+A21X^2Y+A22X^2Y^2+...+A2nX^2Y^n+.....+')
disp('.....+AnoX^n+An1X^nY+An2X^nY^2+...+AnnX^nY^n')
disp(' ')
pause
format long
cx
%Cálculo de los residuos: Zdif=A*cx-z.
disp('** Muestra Generadora: Estadística de los Residuos **')
disp(' ')
Zdif=A*cx-Z;
mmg=mean(Zdif);
stdmg=std(Zdif);
fprintf('** media      = %8.5f\n',mmg)
fprintf('** desv. estándar = %8.5f\n',stdmg)
disp(' ')
%Varición No-Explicada:SQRR; Variacion Total:SQTT; Variación Explicada:SQEE.
SQRR=dot(Zdif,Zdif);
vx=Z-mean(Z);
SQTT=dot(vx,vx);
SQEE=SQTT-SQRR;
CD=SQEE/SQTT;
CC=sqrt(CD);
disp(' ')
disp(' Los Residuos Normalizados')
disp(' ')
format
pause
xm=A*cx;
ym=Zdif/stdmg
plot(xm,ym,'*')
title(' Gráfica de los Residuos Normalizados (Muestra Generadora) ')
xlabel(' Z-estimados '),ylabel('Residuos Normalizados'),grid

```



```

disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°1 **')
disp(' ')
disp(' ')
pause
hist(ym,6)
title(' Distribución de los Residuos Normalizados (Muestra Generadora) ')
disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°2 **')
pause
fprintf('** La Variación No-Explicada es= %10.7f\n', SQRR)
fprintf('** La Variación Explicada es= %10.7f\n', SQEE)
fprintf('** La Variación Total es= %10.7f\n', SQT)
disp(' ')
fprintf('** El Coeficiente de Determinación es= %8.7f\n',CD)
fprintf('** El Coeficiente de Correlación es= %8.7f\n',CC)
disp(' ')
pause
%ANOVA-TEST
disp('** ANOVA-TEST **')
disp(' ')
S1=SQEE/((kg+1)^2-1);
S2=SQRR/(length(X)-(kg+1)^2);
F=S1/S2;
fprintf('** El valor de F es= %10.2f\n', F)
disp(' ')
disp(' ** Grados de Libertad **')
disp(' ')
nu1=(kg+1)^2-1
nu2=n-((kg+1)^2)
Ft=input('** Valor de Tabla= ');
disp(' ')
if F>Ft
disp('** Se Rechaza H0: El Modelo Tiene Utilidad **')
else
disp('** Se Acepta H0: El Modelo No Tiene Utilidad **')
end
disp(' ')
disp(' ERRORES ESTANDAR DE LOS REGRESORES: SAij')
disp(' ')
VEC=diag(V*inv(D)*V');
SB=sqrt((SQRR/(n-(kg+1)^2))*VEC);
SB
disp(' ')
disp(' ')
pause
disp(' LOS ESTADISTICOS "t" PARA LOS REGRESORES: ti=Aij/SAij ')
format bank
t=cx./SB

```

```

disp(' ')
disp(' Grados de Libertad')
nu=n-(kg+1)^2
pause
disp(' ')
disp(' ')
disp('** Muestra Interpolada **')
disp(' ')
% Muestra Interpolada. Carga de datos.
Cm(:,2)=Cm(:,2)/FR;
Cm(:,3)=Cm(:,3)/FR;
Xm=Cm(:,2)-mean(C(:,2));
Ym=Cm(:,3)-mean(C(:,3));
Zm=Cm(:,1);
m=length(Xm);
% Cálculo de Zmest.
for i=1:m
    j=0;
    for k=0:kg
        for l=0:kg
            j=j+1;
            Am(i,j)=(Xm(i)^k)*(Ym(i)^l);
        end
    end
end
Zmest=Am*cx;
pause
Zmdif=Zmest-Zm;
% Estadística de las diferencias muestrales (Zmdif=Zmest-Zm).
MZmdif=mean(Zmdif);
DSZmdif=std(Zmdif);
xm=1:length(Xm);
ym=Zmdif;
plot(xm,ym),grid
title(' Gráfica de la diferencias Zmest-Zm (Muestra de Interpolción) ')
xlabel(' Puntos '),ylabel('Diferencias')
disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°3 **')
disp(' ')
disp(' ')
pause
hist(Zmdif,6)
title(' Distribución de las Diferencias (Muestra de Interpolación) ')
disp('** Haga click en Figure N°... para ver gráfico n°4 **')
pause

disp('** Ingrese Z_crítico (valor de tabla) **')
disp(' ')

```

```

tt=input('** Z_crítico = ');
disp(' ')
for i=1:m
    error(i)=Am(i,:)*V*inv(D)*V'*Am(i,:);
    error(i)=tt*sqrt(S2)*sqrt(1+error(i));
    LS(i)=Zmest(i)+error(i);
    LI(i)=Zmest(i)-error(i);
    Dif(i)=LS(i)-LI(i);
end
format
disp(' ')
disp(' N_est   Dif.   Error   Li   Ls   Int.conf')
pause
[Zmest Zmdif error' LI' LS' Dif']
disp(' ')
disp('** Error Promedio de Predicción **')
mean(error)
disp(' ')
pause
disp('** Estadística de las diferencias muestrales **')
disp(' ')
fprintf('** Media           = %8.5f\n', MZmdif)
fprintf('** Desviación Estandar = %8.5f\n', DSZmdif)
disp(' ')
pause
disp('** Error total de interpolacion **')
Et=sqrt(MZmdif^2+DSZmdif^2)
disp(' ')
disp('** Gráficas Tridimensionales de Ondulaciones **')
disp(' ')
pause
XI=min(X);
XS=max(X);
YI=min(Y);
YS=max(Y);
disp(' ')
paso=input('** paso= ');
paso=paso/FR;
disp(' ')
disp(' ')
x=XI:paso:XS;
y=YI:paso:YS;
[xg,yg]=meshgrid(x,y);
P=0;
z=0;
j=0;
for k=0:kg

```

```

P=0;
for l=0:kg
    j=j+1;
    P=P+cx(j)*(xg.^k).*yg.^l;
end
z=z+P;
end
surf(xg,yg,z)
title('Gráfica de la Superficie (3-D)')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
disp('** Haga click en figura nº...para ver gráfico nº5 **')
disp(' ')
disp(' ')
pause
AZ=0;
while AZ<1000
    AZ=input('** Azimut = ');
    EL=input('** Elevac.= ');
    disp(' ')
    mesh(z,[AZ,EL]);
end
disp(' ')
disp('** Curvas de Isovalores** ')
disp(' ')
pause
c_max=input('** Cota Máxima = ');
c_min=input('** Cota Mínima = ');
eq_dist=input('** Equidistancia= ');
disp(' ')
v=c_min:eq_dist:c_max;
[c,h]=contour(x,y,z,v);
clabel(c,h,'manual'),colorbar
title('Curvas de Isovalores ')
xlabel('X'),ylabel('Y')
disp('** Haga click en Figure Nº... para ver gráfico nº6 **')
pause
disp(' ')
disp(' ')
disp('**** Terminé.....!!! ****')

```

**NIV\_GPS:** Basado en el método de nivelación GPS. Los datos se introducen por medio de la matriz FLH, que se graba en EXCEL y se transfiere a MATLAB.

```

clear
home
disp(' PROGRAMA NIV_GPS:Calcula azimut,ángulo de altura,distancias,componentes')
disp(' y cota de la estacion remota,a partir de un vector DGPS')
disp('                                     Raul A.Marquez.-')
load FLH.mat;
disp(' ')
a=6378137;
F=298.257222101;
disp(' ')
disp(' Ingrese Altura Geoidal Promedio')
disp(' ')
hg=input(' N= ');
disp(' ')
disp(' Ingrese Control y Remota')
disp(' ')
c=input(' Control= ');
r=input(' Remota = ');
cp=c;
for k=1:2
if k==2
    c=r;
    r=cp;
    fprintf('Control= %4.0f\n',c)
    fprintf('Remota = %4.0f\n',r)
    disp(' ')
end
disp(' ')
f=1/F;
e2=2*f-f^2;
FIC=-((FLH(c,1)+FLH(c,2)/60+FLH(c,3)/3600)*pi/180.;
LAC=-((FLH(c,4)+FLH(c,5)/60+FLH(c,6)/3600)*pi/180.;
HC=FLH(c,7);
hc=FLH(c,7);
FIR=-((FLH(r,1)+FLH(r,2)/60+FLH(r,3)/3600)*pi/180.;
LAR=-((FLH(r,4)+FLH(r,5)/60+FLH(r,6)/3600)*pi/180.;
HR=FLH(r,7);
hr=FLH(r,7);
NC=a/sqrt(1-e2*sin(FIC)^2);
NR=a/sqrt(1-e2*sin(FIR)^2);
XC=(NC+HC)*cos(FIC)*cos(LAC);
YC=(NC+HC)*cos(FIC)*sin(LAC);
ZC=(NC*(1-e2)+HC)*sin(FIC);
XR=(NR+HR)*cos(FIR)*cos(LAR);

```

```

YR=(NR+HR)*cos(FIR)*sin(LAR);
ZR=(NR*(1-e2)+HR)*sin(FIR);
DX=XR-XC;
DY=YR-YC;
DZ=ZR-ZC;
DIST3D=sqrt(DX^2+DY^2+DZ^2);
Y=-DX*sin(LAC)+DY*cos(LAC);
V=Y;
X=-DX*sin(FIC)*cos(LAC)-DY*sin(FIC)*sin(LAC)+DZ*cos(FIC);
U=X;
DIST2D=sqrt(U^2+V^2);
AZIMCR=(atan(Y/X)+pi-(pi/2)*sign(Y)-(pi/2)*sign(Y/X))*180/pi;
Y=DX*cos(FIC)*cos(LAC)+DY*cos(FIC)*sin(LAC)+DZ*sin(FIC);
W=Y;
X=DIST2D;
ANGALT=(atan(Y/X))*180/pi;
if k==1
    DZZ=(pi/2)-atan(Y/X);
end
if k==2
    DZP=(pi/2)-atan(Y/X);
end
S1=sign(AZIMCR);
S2=sign(ANGALT);
X=fix(abs(AZIMCR));
Y=fix((abs(AZIMCR)-X)*60);
Z=((abs(AZIMCR)-X)*60-Y)*60;
disp(' ')
disp(' AZIMUT: CONTROL-REMOTA')
disp(' ')
fprintf(' GRD= %4.0f\n',S1*X)
fprintf(' MIN= %4.0f\n',S1*Y)
fprintf(' SEG= %7.3f\n',S1*Z)
disp(' ')
disp('Ingrese cota ortometrica control')
HC=input(' HC= ');
if k==1
    HCC=HC;
end
disp(' ')
s=sqrt(U^2+V^2);
FIM=(FIC+FIR)/2;
N=a/sqrt(1-e2*sin(FIM)^2);
M=a*(1-e2)/(sqrt(1-e2*sin(FIM)^2))^3;
AZIMCR=AZIMCR*pi/180;
R=cos(AZIMCR)^2/M+sin(AZIMCR)^2/N;
R=(1/R)+hg;

```

```

S=sqrt((s^2-(hr-hc)^2)/((1+(hc-hg)/R)*(1+(hr-hg)/R)));
S0=2*R*asin(S/(2*R));
LAM=(LAC+LAR)/2;
DMC=(abs(LAM)-69*pi/180)*sqrt(M*N)*cos(FIM);
m=DMC^2/(2*R^2);
S=(1+m)*S;
disp(' ')
fprintf(' Dist.Carta= %15.3f\n',S)
disp(' ')
pause
X=fix(abs(ANGALT));
Y=fix((abs(ANGALT)-X)*60);
Z=((abs(ANGALT)-X)*60-Y)*60;
disp(' ANG.ALTA.: CONTROL REMOTA')
disp(' ')
fprintf(' GRD= %4.0f\n',S2*X)
fprintf(' MIN= %4.0f\n',S2*Y)
fprintf(' SEG= %7.3f\n',S2*Z)
disp(' ')
pause
disp(' COMPONENTES')
disp(' ')
fprintf(' DELTAX= %12.4f\n',DX)
fprintf(' DELTAY= %12.4f\n',DY)
fprintf(' DELTAZ= %12.4f\n',DZ)
disp(' ')
fprintf(' U= %12.4f\n',U)
fprintf(' V= %12.4f\n',V)
fprintf(' W= %12.4f\n',W)
pause
disp(' ')
fprintf(' DIST-3D= %15.4f\n',DIST3D)
disp(' ')
fprintf(' DIST-2D= %15.4f\n',DIST2D)
disp(' ')
R=sqrt(N*M);
h=W+DIST2D^2/(2*R);
disp(' ')
fprintf(' DESNIVEL= %10.3f\n',h)
disp(' ')
HR=HC+h;
disp(' COTA REMOTA')
disp(' ')
fprintf(' HR= %12.3f\n',HR)
disp(' ')
disp(' ')
end

```

```
DSN=S0*tan((DZP-DZZ)/2);  
disp(' ')  
fprintf('Desnivel Recíproco= %10.3f\n',DSN)  
HR=HCC+DSN;  
fprintf('Cota Remota = %10.3f\n',HR)  
disp(' ')  
disp('!!!Terminé!!!')
```



## **Bibliografía:**

Algani, Dafer A. (1994). "Geoid Modelling in Saudi Arabia"  
ITC Journal 1994-2

Etter, Delores M. (1998). "Solución de problemas de ingeniería con MATLAB"  
Segunda Edición. Department of Electrical and Computer Engineering.  
University of Colorado, Boulder. Prentice-Hall.

Heiskanen Weiko A., Moritz Helmut (1967). "Physical Geodesy"  
W.H. Freeman and Company-San Francisco and London

Márquez, Raúl A.: "Conversión de Alturas Elipsoidales en Alturas Sobre el Nivel Medio del Mar mediante Técnicas de Interpolación Superficial"  
Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas. Geoacta. Volumen 31- 2006

Márquez, Raúl A. : "Nivelación Satelital"  
Agrimensura Hoy-Revista del Consejo Nacional de Escuelas de Agrimensura-CONEA  
Volumen 1-2008

Márquez, Raúl A. : "Nivelación Satelital y Algoritmos de Interpolación Superficial"  
Publicaciones Científico-Técnicas- Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales-  
UNSJ- Año 10 N° 1 2006

Shresta, Ramesh, Nazir, Azman, Dewitt Bon and Smith Scott (1993). "Surface Interpolation Techniques to Convert Ellipsoidal Heights to Elevations"  
Surveying and Land Information Systems.  
Vol. 53, N°3, 1993, pp133-144.

Shul'min M. V. and Mitel'man Ye. Ya. (1974). "The Method of Approximating a Topographic Surface"  
Geodesy, Mapping and Photogrametry.  
Vol. 16, N°1, 1974