



Proyecciones conformes óptimas en polinomios armónicos en términos de coordenadas Gauss-Schreiber

Orihuela, S⁽¹⁾

(1) Dto. de Agrimensura y Cartografía, Fac. de Ing. y Cs. Hídricas, Univ. Nac. del Litoral. Ayudante de cátedra.
E-mail: sorihuela@unl.edu.ar

RESUMEN

La proyección de Gauss-Schreiber genera un tipo de coordenadas isométricas rectangulares que permiten representar en forma continua un sector terrestre de extensión NS incluyendo los polos. Cuando las mismas son aplicadas en polinomios armónicos, posibilitan el mapeo óptimo de regiones que son inviables para otras variables habitualmente utilizadas, como por ejemplo de Mercator o estereográficas. En este trabajo se presenta en forma detallada el desarrollo del polinomio en coordenadas Gauss-Schreiber y un algoritmo para la optimización de la proyección según la tesis de Chebyshev-Gravé. El resultado es práctico y permite reemplazar el uso de coordenadas polares estereográficas.

PALABRAS CLAVE: Polinomios armónicos; tesis de Chebyshev; Gauss-Schreiber; optimización; proyecciones conformes.

INTRODUCCIÓN

Los polinomios son la solución más frecuente a los problemas de optimización de proyecciones cartográficas. Un polinomio armónico conforme es una función analítica de variables complejas isométricas. Si una región que interesa representar incluye regiones polares y cercanas al ecuador este mapeo sólo es posible hacerlo a través de coordenadas tipo Mercator transversa siendo imposible en variables de Mercator o estereográficas. Esto es propio el continente americano y es especialmente de interés en el caso argentino donde la nueva normativa exige representar en forma continua el sector continental americano y antártico.

Las fórmulas de la proyección Mercator transversa, tanto exactas como en series, son complejas para ser utilizadas como variables intermedias y dificultan tanto el proceso de optimización como el uso práctico en polinomios. Gauss-Schreiber es otra proyección de tipo cilíndrica transversa cuyo desarrollo de fórmulas es muy sencillo. La diferencia de Gauss-Schreiber respecto de Gauss-Krüger, es que la alteración de escala no es constante en el meridiano de la proyección, pero comparten en forma aproximada el dominio posible de representación.

Resolviendo singularidades en los polos la proyección de Gauss-Schreiber puede abarcar una extensión NS $[-\pi/2, \pi/2]$ y EW $(-\pi, \pi]$, exceptuando el caso en que la coordenada *Este* isométrica tiende a infinito. Gauss-Schreiber, a diferencia de la proyección estereográfica, no requiere de la rotación de una esfera conforme para adecuar su origen a una región determinada, es suficiente con modificar el valor de longitud λ_0 .

La principal ventaja de los polinomios armónicos sobre los sistemas de proyecciones



tradicionales en fajas, es que pueden representar una región con continuidad topológica de

Tabla 1.- Nomenclatura

ϕ	Latitud geodésica.
λ	Longitud geodésica.
χ	Latitud conforme, ver Tabla A3.
q	Latitud isométrica.
a	Semieje mayor del elipsoide de revolución.
f	Aplastamiento primero del elipsoide.
n	Aplastamiento tercero del elipsoide, cuando se indique.
e	Excentricidad primera del elipsoide.
$E_{a,f}$	Elipsoide terrestre de revolución con semieje mayor a y aplastamiento f .
R_N	Radio normal principal sobre el elipsoide.
r	Radio de paralelo sobre el elipsoide.
σ	Alteración de escala local sobre una proyección conforme.
gd	Función de Gudermann.
lam	Función de Lambert o anti-gudermanniana.
$\arg(x + iy)$	Argumento o fase de un número complejo, similar a $\text{atan } 2(y, x)$.
i, j, k, n, N	Número entero.
i	Número imaginario, $i^2 = -1$.

forma óptima. Por óptimo nos referimos a la minimización de un cierto valor de energía, o distorsión, sobre un determinado territorio de interés. Chebyshev (1856) propuso que la variación de la escala es mínima cuando el valor $\ln \sigma$ es constante sobre el contorno de la región, es decir cuando una curva de igual alteración de escala coincide con la figura del territorio. Esta proposición fue demostrada por Gravé (1896a) quien la relacionó con el problema de Dirichlet. Debemos resolver entonces la ecuación de Laplace sobre un dominio Ω , tal que $\nabla^2 \ln \mu = 0$ sujeto a $\ln(\mu/r)|_{\partial\Omega} = \text{const}$; pero no es μ , la función que buscamos sino una función $y + ix = f(q + i\lambda)$, también armónica, tal que $\mu = |\partial_\lambda f|$. En la Tabla 1 se explica parte de la simbología utilizada. Todos los mapas armónicos tienen la propiedad de hacer mínima cierta medida de distorsión en una región, Grafarend (2005) generalizó este concepto en las proyecciones cartográficas, utilizando coordenadas isométricas de tipo Mercator y no isométricas.

Este trabajo es una adecuación del trabajo "Optimal conformal map projections..." (Orihuela, 2015) donde fue publicado el desarrollo de las fórmulas y las notas sobre optimización de proyecciones cartográficas. En las siguientes secciones se expone la formulación explícita de la proyección conforme mediante polinomios armónicos y un algoritmo que permite encontrar los coeficientes óptimos según la proposición de Chebyshev. Se resolvió, a modo de ejemplo, el mapa bicontinental de la República Argentina.

POLINOMIOS ARMÓNICOS EN COORDENADAS GAUSS-SCHREIBER

Las coordenadas Gauss-Schreiber surgen de la continuación analítica, desde P a X , de la función de Gudermann respecto a las variables q y λ . Denotaremos estas coordenadas

Tabla 2.- Coordenadas Gauss-Schreiber

$$\text{gd } q = \text{lam}^{-1} q = \int_0^q \text{sech } q \, dq = 2 \arctan(e^q) - \pi/2,$$

$$\text{lam } \chi = \text{gd}^{-1} \chi = \int_0^\chi \sec \chi \, d\chi = \ln \tan(\pi/4 + \chi/2),$$

$$\xi + i\eta = \text{gd}(q + i(\lambda - \lambda_0)), \quad \eta + i\xi = \text{lam}(\lambda - \lambda_0 + iq).$$

Separando parte imaginaria y parte real:

$$\xi = \arctan(\sec(\lambda - \lambda_0) \sinh q) = \arctan(\sec(\lambda - \lambda_0) \tan \chi),$$

$$\eta = \text{arctanh}(\sin(\lambda - \lambda_0) \text{sech } q) = \text{arctanh}(\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \chi),$$

redefinimos ξ y η para todo el dominio de χ como:

$$\xi = \begin{cases} \arg(\cos(\lambda - \lambda_0) + i \tan \chi) & \text{si } |\chi| \neq \pi/2, \\ \chi & \text{si } |\chi| = \pi/2. \end{cases}$$

$$\eta = \text{arctanh}(\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \chi).$$

como ξ y η , relacionando ξ con *Norte* y η con *Este* en el plano cartesiano. Adaptando la fórmula transcrita por Schreiber (1866, p.12):

$$\xi + i\eta = \text{gd}(q + i(\lambda - \lambda_0)).$$

La separación de parte real y parte imaginaria se detalla en la Tabla 2. Ahora consideramos un dominio rectangular acotado Ψ sobre el plano ξ, η y una función de mapeo definida en Ψ :

$$y + ix = f(v + iu),$$

donde

$$v = \alpha(\xi - \xi_0), \quad u = \alpha\eta,$$

siendo α un factor de normalización de tal modo que $\{\alpha \in \mathbb{P}, [|\alpha(\xi - \xi_0)| < 1, |\alpha\eta| < 1]_{\Psi}\}$. La función f es armónica y conforme, con excepción de dos puntos singulares donde $|\phi| = |\chi| = |\xi| = \pi/2$. Desde el punto de vista práctico, estas singularidades son evitables y no impiden la representación completa del dominio Ψ .

Luego, f puede ser expresada en series de potencias como un polinomio armónico:

$$y + ix = \sum_{n=1}^N (a_n + ib_n)(v + iu)^n.$$

Separando las partes real e imaginaria, los valores x e y están determinados por las expresiones bien conocidas:

Caso asimétrico respecto de λ_0 :

$$y = \sum_{n=1}^N (a_n P_n - b_n Q_n), \quad x = \sum_{n=1}^N (a_n Q_n + b_n P_n). \quad (1)$$

Caso simétrico respecto de λ_0 :

$$y = \sum_{n=1}^N a_n P_n, \quad x = \sum_{n=1}^N a_n Q_n. \quad (2)$$

El desarrollo de estas fórmulas se encuentra en Kaltsikis (1989), Bugayevsky y Snyder (1995) y Pedzich (2005) entre otros. Kaltsikis (1989, p. 22) da crédito a Morozow por la importante fórmula recursiva para encontrar los valores P_n y Q_n :

$$P_{n+1} = vP_n - uQ_n, \quad Q_{n+1} = uP_n + vQ_n,$$

siendo $P_0 = 1, Q_0 = 0, P_1 = v, Q_1 = u$.

Completamos esta sección con la formulación explícita de la proyección cartográfica en función de los polinomios armónicos.

Transformación directa

$$N = N_0 + k_0 \cdot a \cdot y, \quad E = E_0 + k_0 \cdot a \cdot x, \quad (3)$$

donde N_0 y E_0 son el "Falso Norte" y "Falso Este" respectivamente, a el semieje mayor del elipsoide de revolución y k_0 el factor de compensación de escala; usualmente $k_0 = 1$. Los valores y, x se calculan con (1) o (2).

Convergencia de meridianos

El ángulo de convergencia, en sentido contrario a las agujas del reloj, se calcula como

$$\tan \gamma = \frac{\partial_\lambda y}{\partial_\lambda x}. \quad (4)$$

El desarrollo de las derivadas $\partial_\lambda y$ y $\partial_\lambda x$ se encuentra en la Tabla 3.

Factor de alteración de escala

$$m = k_0 \cdot \sigma, \quad (5)$$

donde:

$$\sigma = \mu/r|_{1,f}, \quad \mu = \sqrt{(\partial_{\lambda}x)^2 + (\partial_{\lambda}y)^2}, \quad r = R_N|_{1,f} \cos\phi. \quad (6)$$

Tabla 3.- Expansión de las derivadas de los polinomios y , x respecto de λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - b_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} \right), & \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} + b_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \right), \\ \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P_n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_n}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, & \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} &= \frac{\partial Q_n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q_n}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial P_n}{\partial \xi} &= \frac{\partial Q_n}{\partial \eta} = \alpha n P_{n-1}, & \frac{\partial Q_n}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_n}{\partial \eta} = \alpha n Q_{n-1}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} &= \frac{\tan \chi \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0)}{\tan^2 \chi + \cos^2(\lambda - \lambda_0)}, & \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} &= \frac{\cos \chi \cos(\lambda - \lambda_0)}{1 - (\cos \chi \operatorname{sen}(\lambda - \lambda_0))^2}. \end{aligned}$$

La notación del radio de curvatura normal $R_N|_{1,f}$ indica que está evaluado con un valor de $a = 1$, esto es necesario al introducir el término a en las expresiones N y E en (3).

Transformación inversa

Por Newton-Raphson, las variables ξ, η pueden ser calculadas iterando en forma conjunta:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \frac{(y - y_k)(\partial_{\eta}x)_k - (x - x_k)(\partial_{\eta}y)_k}{(\partial_{\xi}y)_k \cdot (\partial_{\eta}x)_k - (\partial_{\eta}y)_k \cdot (\partial_{\xi}x)_k}, \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{(x - x_k)(\partial_{\xi}y)_k - (y - y_k)(\partial_{\xi}x)_k}{(\partial_{\xi}y)_k \cdot (\partial_{\eta}x)_k - (\partial_{\eta}y)_k \cdot (\partial_{\xi}x)_k}. \quad (7)$$

La deducción de esta fórmula puede verse, por ejemplo, en Ipbüker y Bildirici (2002). Para obtener una exactitud micrométrica en forma rápida se requieren de buenos valores de ξ, η en la iteración inicial, ya que la convergencia en la reversión de coordenadas por Newton-Raphson suele ser pobre. Pero, conociendo la función directa se puede construir un polinomio armónico tal que

$$\hat{v} + i\hat{u} = \sum_{n=1}^N (a'_n + ib'_n)(y + ix)^n, \quad (8)$$

luego, los primeros valores de ξ, η en (7) son:

$$\xi|_0 = \hat{v}/\alpha + \xi_0, \quad \eta|_0 = \hat{u}/\alpha.$$

Los detalles para calcular los coeficientes de (8) están dados en la Tabla A2 y la conversión de coordenadas ξ, η a χ, λ en la Tabla 4.

NOTAS SOBRE EL PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA CARTOGRAFÍA

La construcción de proyecciones óptimas es el problema fundamental de la Cartografía (Gravé, 1896). Según la tesis de Chebyshev-Gravé, dada una región cerrada y simplemente conexa Ω , la variación de la distorsión dentro de Ω generada por una representación conforme, es mínima cuando la medida de alteración de escala $\ln \sigma$ es constante sobre su

Tabla 4.- Expansión de las derivadas de los polinomios y, x respecto de λ

Teniendo en cuenta lo expuesto en la Tabla 2,

$$\operatorname{Im}(\xi + i\eta) = q + i(\lambda - \lambda_0), \quad \operatorname{gd}(\eta + i\xi) = \lambda - \lambda_0 + iq.$$

Separando parte imaginaria y parte real,

$$\tanh q = \operatorname{sen} \xi \operatorname{sech} \eta, \quad \operatorname{sen} \chi = \operatorname{sen} \xi \operatorname{sech} \eta,$$

$$\tan(\lambda - \lambda_0) = \operatorname{sec} \xi \operatorname{senh} \eta, \quad \chi = \arcsen(\operatorname{sen} \xi \operatorname{sech} \eta).$$

$$\lambda - \lambda_0 = \begin{cases} \arg(\cos \xi + i \operatorname{senh} \eta) & \text{si } |\xi| \neq \pi/2, \\ (\operatorname{sgn} \eta)\pi/2 & \text{si } |\xi| = \pi/2 \wedge \eta \neq 0, \\ 0 & \text{si } |\xi| = \pi/2 \wedge \eta = 0. \end{cases}$$

contorno, $\partial\Omega$. Decimos que la función de mapeo que cumple con la proposición de Chebyshev es óptima en el sentido que minimiza la variación de energía, dada por la medida local $\ln \sigma$ dentro de Ω . La solución a esta proposición es una función armónica en variables isométricas que resuelve el problema de Dirichlet y que dentro de Ω tiene las siguientes propiedades remarcables:

- El promedio de la medida de distorsión $(\ln \sigma)^2$ es mínimo (Weber, 1867).
- El promedio del valor de curvatura de las líneas geodésicas proyectadas es mínimo (Eisenlohr, 1870).
- El promedio del gradiente de la medida de distorsión $\vec{\nabla} \ln \sigma$ es mínimo (Darboux, 1911).
- El coeficiente entre el supremo e ínfimo de la medida de distorsión $\ln \sigma_2 / \ln \sigma_1$ es mínimo (Milnor, 1969).

El primer caso se cumple únicamente para un determinado valor constante de distorsión sobre el contorno y está relacionada con el principio de energía mínima de las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace. Grafarend (2005) hace un estudio extensivo de esta propiedad en los mapas armónicos. En los otros tres casos, el valor constante de distorsión sobre el contorno es arbitrario, pero están basados también en propiedades bien conocidas de las funciones armónicas que resuelven un BVP. Tomemos el tercer caso, si imaginamos a la función $\ln \sigma(\xi, \eta)$ como una superficie, la misma es la cúpula cóncava de menor curvatura posible que está debajo de Ω , esto está vinculado con el problema de *superficie*



mínima. Se pueden hacer muchos comentarios interesantes acerca de la proposición de Chebyshev, para una aproximación formal de sus cualidades matemáticas nos referimos a Bermejo y Otero (2005) donde además se aborda problema de la optimización.

Al hacer mínimo cierto valor local de distorsión aplicado en una región dada, entonces este valor será constante sobre su contorno. Aunque lo inverso no siempre se cumple. La tesis de Chebyshev asegura que la variación de escala es mínima pero no que el promedio de la distorsión sea un mínimo en Ω. Retornemos al ejemplo de la superficie lnσ(ξ,η), si variamos su posición en altura a lo largo de un eje z imaginario, se sigue cumpliendo la condición de que el valor de distorsión se mantiene constante en ∂Ω, siendo ahora z|∂Ω = lnσ|∂Ω + ln k_0. Una posición en altura determinada hará que en promedio los valores de z sobre la cúpula sea mínimo. El problema entonces se reduce a encontrar el valor k_0 que hace cumplir esa condición. Como veremos luego en la próxima sección, encontrar el valor óptimo de k_0 es muy simple.

Muchos autores directamente minimizan la distorsión de escala en el interior de Ω, utilizando diferentes medidas, asumiendo correctamente que en consecuencia σ será aproximadamente constante sobre el contorno y la variación de escala mínima. Reilly (1973), por ejemplo, aplicó el siguiente criterio para optimizar la representación de Nueva Zelanda,

$$\frac{1}{A} \int_{\Omega} (\sigma - 1)^2 dA = \min_{\Omega}$$

el cual es equivalente al criterio seguido por Weber (1867)

$$\frac{1}{A} \int_{\Omega} (\ln \sigma)^2 dA = \min_{\Omega}$$

El primero utiliza la medida de distorsión σ - 1 propuesta por Airy, el segundo la medida lnσ que llamaremos de Chebyshev. La medidas con escala lineal y logarítmica se distinguen esencialmente en la contribución o peso que tiene la alteración de escala calculada sobre un determinado sector infinitesimal. La medida de Airy otorga mayor peso a las distorsiones más grandes que la medida de Chebyshev. La distorsión es la proporción entre dos valores infinitesimales de distancia y por lo tanto es más adecuada la escala logarítmica que además conduce a la tesis de variación mínima de Chebyshev. Aunque el resultado de la optimización cambia en forma significativa sólo en regiones grandes.

LA CONSTRUCCIÓN DEL POLINOMIO PARA LA PROYECCIÓN ÓPTIMA

Las técnicas más frecuentes en la búsqueda polinomios para proyecciones óptimas son dos: minimizar cierta norma de energía dentro de Ω y aproximar una función para que el valor de alteración de escala se constante sobre el contorno ∂Ω. Como aplicación del primer criterio a casos prácticos, podríamos citar los trabajos de Reilly (1973), Frankich (1982) y Tutic (2009). La tesis de Chebyshev puede ser abordada aproximando el contorno con polígonos regulares Snyder (1984). En casos de contornos complejos, mediante



mínimos cuadrados (Gonzalez-López, 1995), método de asignación inversa (Nestorov, 1997) y calculando en forma indirecta los coeficientes, a través de la convergencia de meridianos, teniendo en cuenta las condiciones de integración de la ecuación de Laplace. (Pedzich, 2005) hace una descripción del último método y da crédito por su desarrollo a Bugayevsky, cuyo trabajo es reseñado en Vakhrameyeva et al. (1986) y Bugayevsky y Snyder (1995). Esta técnica fue deducida también en forma independiente por Frankich (1982) quien resolvió un caso práctico para Canadá.

Aplicaremos la tesis de Chebyshev para resolver nuestro problema. No es trivial representar la convergencia de meridianos en términos de coordenadas Gauss-Schreiber, por lo que buscaremos los coeficientes del polinomio armónico mediante mínimos cuadrados. Deberíamos agregar como restricciones a nuestro problema que la convergencia de meridianos en el origen sea 0 para preservar la orientación NS y que el promedio de las distorsiones sea un mínimo, tal como hace Gonzalez-López (1995). Sin embargo, esto no es necesario ya que los coeficientes de un polinomio armónico son fácilmente corregibles a través de una rotación y un cambio de escala:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \hat{k}_0 \begin{pmatrix} \cos \hat{\gamma}_0 & -\text{sen } \hat{\gamma}_0 \\ \text{sen } \hat{\gamma}_0 & \cos \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{b}_n \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde \hat{k}_0 es un valor que optimiza la alteración de escala en Ω y $\hat{\gamma}_0$ es la convergencia de meridianos en el centro de la proyección.

Una de las condiciones que se deben cumplir al aproximar cierta función a un contorno $\partial\Omega$ es que la región Ω debe ser simplemente conexa, algo que no siempre ocurre en los casos prácticos. Además, al optimizar un polinomio armónico en regiones fuertemente cóncavas las curvas de alteración de escala dejan de ser suaves cerca del contorno, irrumpiendo dentro de Ω . Este efecto es fácilmente visible con polinomios de grado alto. Abordamos estos dos problemas, con una solución obvia pero efectiva, creando la envolvente convexa $\partial\Omega_k$ de Ω que será nuestro contorno de referencia para crear la proyección de Chebyshev-Gravé. Tomando como ejemplo Nueva Zelanda, se ilustra en la Fig. 1 la separación de regiones. Al ser una solución aproximada, el término *proyección de bajo error* es más apropiado que *proyección óptima*, pero en la práctica pueden ser considerados como sinónimos.

En resumen, se propone el siguiente algoritmo para crear la proyección conforme mediante polinomios armónicos en términos de ξ, η :

1. Transformar la región de interés Ω en coordenadas ξ, η en un elipsoide $E_{1,f}$.
2. Delimitar la región rectangular Ψ que envuelva Ω .
3. Crear la envolvente convexa $\partial\Omega_k$.
4. Hacer la muestra regular de puntos en $\partial\Omega_k$, Ω y Ψ .
5. Calcular los coeficientes del polinomio tal que $\ln \sigma|_{\partial\Omega_k} = 0$.

6. Actualizar los coeficientes con los valores \hat{k}_0 y $\hat{\gamma}_0$ calculados.
7. Calcular los coeficientes del polinomio inverso con la muestra de puntos en Ψ .

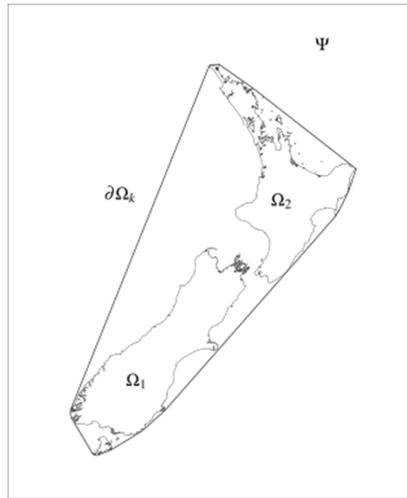


Figura 1.- Separación de regiones para el estudio, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$

Cálculo de los coeficientes

Retornamos al polinomio

$$\hat{y} = \sum_{n=1}^N (\hat{a}_n P_n - \hat{b}_n Q_n), \quad \hat{x} = \sum_{n=1}^N (\hat{a}_n Q_n + \hat{b}_n P_n) \quad (10)$$

La función anterior da una medida de alteración de escala, imponemos la condición $\sigma = 1$ sobre el contorno, es decir

$$\ln \sigma \Big|_{\partial \Omega_k} = \left[\ln \frac{\mu}{r} \right]_{\partial \Omega_k} = 0.$$

De acuerdo a la expresión (6) podemos omitir la raíz en μ y r y plantear

$$\ln \mu^2 \Big|_{\partial \Omega_k} - \ln r^2 \Big|_{\partial \Omega_k} = 0,$$

que nos permite enunciar la ecuación que se debe cumplir sobre el contorno, a través de la cual resolveremos el problema no lineal por mínimos cuadrados:

$$f = \mu^2 - r^2 = 0. \quad (11)$$

No es necesario que σ esté en función de ξ, η ya que conocemos también ϕ, λ de cada punto, pero para completar el conjunto de fórmulas que dependen de las coordenadas Gauss-Schreiber $\sigma(\xi, \eta)$, está desarrollado en la Tabla A4.

Buscaremos los coeficientes \hat{a}_n y \hat{b}_n de (10), μ es calculado como (6) y teniendo en cuenta lo expresado en la Tabla A1, la función (11) puede ser linealizada como

$$f_j \approx \left[\mu^2|_0 - r^2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} \cdot \Delta \hat{a}_n + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} \cdot \Delta \hat{b}_n \right) \right]_j \approx 0,$$

donde j indica un punto determinado sobre $\partial\Omega_k$. Reordenando el sistema, separando términos independientes en el vector \mathbf{u} y coeficientes de las incógnitas en $\mathbf{J}\Delta\mathbf{x}$ llegamos a la forma matricial

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{u}, \quad (12)$$

donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana. El vector $\Delta\mathbf{x}$ se calcula en forma iterativa como

$$\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^+ \mathbf{J}^T \mathbf{u},$$

donde $()^+$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose. El contenido de los vectores y la matriz se detalla en la Tabla A1. Se puede tomar $\hat{a}_n = \hat{b}_n = 1$ para comenzar la iteración.

Cálculo del valor óptimo de \hat{k}_0

Tenemos ahora la función preliminar (10) que da un cierta función de escala σ , de acuerdo a lo ya mencionado, debemos buscar un valor escalar constante tal que $\hat{k}_0\sigma$ tenga un valor óptimo en Ω . En un mapa conforme, dada una muestra finita de puntos sobre la superficie, se pueden considerar dos objetivos para minimizar la distorsión:

- El promedio de la alteración de escala es mínimo (Weber, 1867).
- El valor máximo de alteración de escala es mínimo (Tissot, 1879).

Si la función cumple con la tesis de Chebyshev-Gravé en $\partial\Omega$, estos criterios deben coincidir. No es nuestro caso ya que aplicamos la proposición de Chebyshev sobre $\partial\Omega_k$ y además, todo polinomio armónico de grado finito es una solución aproximada al problema de valores de contorno. Por lo tanto, \hat{k}_0 debe compensar la distorsión producida en el mapa y se pueden considerar los dos criterios al mismo tiempo casos calculando \hat{k}_0 como la media geométrica de los factores de escala óptimos de cada criterio, k_w y k_T .

Para el primer caso, el valor óptimo (ver Orihuela, 2010) está dada por:

$$\frac{1}{A} \int_{\Omega} \ln^2(k_w \sigma) dA = \min,$$

siendo k_w un valor constante,

$$k_w = \exp\left(\frac{-1}{A} \sum_{\Omega} \ln \sigma_i \Delta A_i\right), \quad (13)$$

donde $A = \sum_{\Omega} \Delta A_i$ y ΔA_i es el peso o contribución del elemento i sobre Ω . Este peso está relacionado con la superficie infinitesimal asignada a cada punto que se puede calcular en forma casi exacta como está descrito en Tutic (2009, p. 58). En una muestra de puntos regular y relativamente densa, requerimos sólo un valor aproximado ΔA_i que puede ser la inversa del producto de la distorsión de escala en cada eje, por ejemplo, en la proyección *plate carrée*, $\Delta A_i = 1 \times \cos \phi_i$. Por analogía a la proyección de Mercator en la esfera, podemos calcular en forma aproximada la medida de distorsión local en la proyección Gauss-Schreiber como función de η , de tal modo que

$$\Delta A_i = \text{sech}^2 \eta_i.$$

El criterio de Tissot puede expresarse como

$$\max_{\Omega} \ln^2(k_T \sigma) = \min.$$

Al compensar los coeficientes de distorsión extremos, el factor de escala k_T está en función del máximo y el mínimo valor de σ . Siendo

$$\sigma_2 = \max_{\Omega} \sigma, \quad \sigma_1 = \min_{\Omega} \sigma,$$

por lo tanto

$$k_T^2 = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (14)$$

De un modo empírico, el valor del factor de escala óptimo es la media geométrica ponderada de k_T y k_w :

$$\hat{k}_0 = (k_T k_w^2)^{1/3}. \quad (15)$$

Actualización de coeficientes

Resta calcular la corrección de la orientación mediante el valor de la convergencia de meridianos evaluada en el origen de coordenadas, según la fórmula (4)

$$\tan \hat{\gamma}_0 = \frac{\partial_{\lambda} \hat{y}}{\partial_{\lambda} \hat{x}} \Big|_0.$$

Los coeficientes finales del polinomio se actualizan según lo mencionado en (9)

$$a_n = \hat{k}_0 (\cos \hat{\gamma}_0 \hat{a}_n - \text{sen } \hat{\gamma}_0 \hat{b}_n), \quad b_n = \hat{k}_0 (\text{sen } \hat{\gamma}_0 \hat{a}_n + \cos \hat{\gamma}_0 \hat{b}_n)$$

CASO DE ESTUDIO

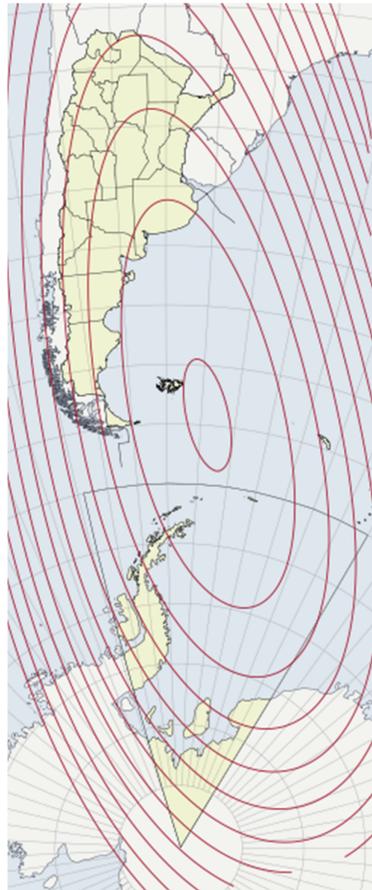


Figura 2.- Sectores continental y antártico de la Argentina en un polinomio de grado 4. Curvas de distorsión cada 5 en escala lineal.

Para el mapa de Argentina bicontinental, se utilizaron los valores $\lambda_0 = -60^\circ$, $\xi_0 = -40^\circ$, $\alpha = 0.7$ y un dominio Ψ donde $-0.952 < \xi - \xi_0 < 0.398$ y $-0.322 < \eta < 0.453$. Se consideró el elipsoide de revolución GRS80 para resolver los casos. La cuantificación de la distorsión sobre Ω se toma con referencia a la unidad, mediante la siguiente función definida de un modo informal:

$$k_{sc} m = \begin{cases} m - 1 & \text{si } m \geq 1, \\ 1/m - 1 & \text{si } m < 1. \end{cases}$$

Los valores máximo y promedio están dados por

$$\kappa_2|_{\Omega} = \max_{\Omega} ksc m,$$

Tabla 5.- Coeficientes del polinomio armónico de grado 4, Argentina bicontinental

gr.	Pol. directo		Pol. inverso	
	$a_n \times 10^6$	$b_n \times 10^6$	$a'_n \times 10^6$	$b'_n \times 10^6$
1	1409525	0	709485	-8
2	27489	13181	-9502	-5088
3	57742	-75303	-13893	20567
4	-16465	-6813	5034	4710

$$\bar{\kappa}|_{\Omega} = \frac{1}{A} \sum_{\Omega} ksc m_i \Delta A_i,$$

donde ΔA_i y A son los mismos de (13) y m es el factor de escala definido en (5) con $k_0 = 1$. Se toman las unidades partes por mil (ppt) para medir la distorsión.

En la tabla 5 están dados los coeficientes para un polinomio de grado 4 que corresponde al mapa de la Fig. 2, con valores de distorsión $\kappa_2|_{\Omega} = 25$ y $\bar{\kappa}|_{\Omega} = 6$. Los coeficientes se publican únicamente para propósitos de prueba e ilustrar resultados.

Los resultados cambian en forma significativa al variar λ_0 , ξ_0 , los criterios para calcular \hat{k}_0 y el grado del polinomio (N). Cualquier adecuación de los parámetros de una proyección cartográfica requiere de objetivos precisos en términos de restricciones y calidad buscada y no hay una forma singular de resolver esta cuestión.

CONCLUSIONES

Los polinomios en términos de coordenadas Gauss-Schreiber son una herramienta efectiva para representar regiones con extensión NS en forma óptima. Fue presentado el desarrollo explícito de las fórmulas involucradas para el mapeo conforme directo e inverso y un algoritmo para optimizar la proyección según la tesis de Chebyshev-Gravé. Para resolver el problema de la optimización es suficiente con imponer la condición $\sigma = 1$ sobre la envolvente convexa de la región de interés Ω . La compensación de la alteración de escala puede ser resuelta combinando los criterios de Tissot y Weber y actualizando los coeficientes de polinomio sin introducir restricciones adicionales en el problema.

Como fue remarcado, las variables isométricas Gauss-Schreiber permiten representar regiones donde es inviable la utilización de coordenadas Mercator o estereográficas. Además, su uso en polinomios puede ser sistematizado para representar zonas cercanas a los polos pudiendo reemplazar a la proyección estereográfica. Es intención de este trabajo mostrar que es posible resolver la mayoría de los casos de optimización utilizando únicamente coordenadas rectangulares de Mercator o de Gauss-Schreiber, reduciendo la



complejidad de las fórmulas necesarias para la implementación de los polinomios conformes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bermejo, M. y Otero, J. (2005). "Minimum conformal mapping distortion according to Chebyshev's principle a case study over peninsular Spain". *Journal of Geodesy* Vol. 79, No 1–3, pp. 124–134.

Bugayevsky, L. M. y Snyder, J. P. (1995). *Map projections A reference manual*, Taylor & Francis. Londres.

Chebyshev, P. L. (1856). "Sur la construction des cartes géographiques", en A. Markoff y N. Sonin eds., *Oeuvres de P. L. Tchebychef 1899*, l'Academie Imperiale des Sciences de St. Pétersbourg, Vol. 1, pp. 233–236, 239–247. San Petersburgo.

Darboux, G. (1911). "Sur la construction des cartes géographiques", *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Vol. 35, pp. 23–28.

Eisenlohr, F. (1870). "Ueber flächenabbildung", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Vol. 72, No. 2, pp. 143–151.

Frankich, K. (1982). "Optimization of geographic map projections for Canadian territory", Tesis doc., Simon Fraser Univ.

González-López, S. (1995). "Conformal map projections by least squares adjustment with conditions between parameters", *17th International Cartographic Conference, Barcelona, 3–9 septiembre*, pp. 776–780. ICA.

González-López, S. (1997). "Map projections optimization using real coded genetic algorithms", *18th International Cartographic Conference, Stockolmo, 23–27 junio*. ICA

Grafarend, E. W. (2005). "Harmonic maps", *Journal of Geodesy* Vol. 78, No.10, pp. 594–615.

Gravé, D. A. (1896a). "De la meilleure représentation d'une contrée donnée", *Association Francaise pour l'avancement des sciences, Compte rendu de la 25e session, Vol. 2*, pp. 106–115.

Gravé, D. A. (1896b). "Sur la construction des cartes géographiques", *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués* Vol. 2, pp. 317–361.

Ipbüker, C. y Bildirici, I. Ö. (2002). "A general algorithm for the inverse transformation of map projections using jacobian matrices", *Third International Conference on Mathematical*



& *Computational Applications, Konya, Turquía, 4–6 septiembre*, pp. 175–184.

Kaltsikis, C. J. (1989). "Numerical treatment of conformal map projections", *Cartographic Journal*, Vol. 26, No. 1, pp. 22–23.

Milnor, J. (1969). "A problem in cartography", *American Mathematical Monthly* Vol. 76, No. 10, pp. 1101–1112.

Nestorov, I. G. (1997). "Camprel: A new adaptive conformal cartographic projection", *Cartography & Geographic Information Systems*, Vol. 24, No. 4 pp. 221–227.

Orihuela, S. (2010). "La proyección de Chebyshev-Grave, una aproximación empírica", [artículo no publicado]. <http://www.academia.edu/5487493/>

Orihuela, S. (2015). "Optimal conformal map projections in harmonic polynomials in terms of Gauss-Schreiber coordinates", *Survey Review*.
<http://dx.doi.org/10.1179/1752270615Y.0000000042>

Pedzich, P. (2005). "Conformal projection with minimal distortions", *22th International Cartographic Conference, La Coruña, 9-16 julio*.

Reilly, W. I. (1973). "A conformal mapping projection with minimum scale error", parte 1, *Survey Review*, Vol. 22, No. 168, pp. 57–71.

Schreiber, O. (1866). *Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung*, Hahn'sche Hofbuchhandlung, Hannover.

Snyder, J. P. (1984). "Minimum-error map projections bounded by polygons", *The Cartographic Journal* 21(2), pp. 112–120.

Tissot, N. A. (1879). "Sur la représentation des surfaces et les projections des cartes", *Nouvelles Annales Mathématiques* Vol. 18, pp. 337–356.

Tutic, D. (2009). "Optimal conformal polynomial projections for Croatia according to the Airy/Jordan criterion", *Cartography and Geoinformation* 8(11) pp. 48–67.

Vakhrameyeva, L. A., Bugayevsky, L. M. y Kazakova, Z. L. (1986). *Matematicheskaya Kartografiya Mathematical Cartography*, Nedra. Moscú.

Weber, H. (1867). "Ueber ein princip der abbildung der theile einer krummen oberfläche auf einer ebene", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* Vol. 67, No. 3 pp. 229–247.



2° ENCUENTRO NACIONAL DE INVESTIGADORES DE AGRIMENSURA

2 y 3 de junio de 2016. Santa Fe, Argentina



APÉNDICE

Tabla A1.- Ensamblado del sistema matricial para resolver el problema de contorno

Comenzando con

$$f_j \approx \left[\mu^2 \Big|_0 - r^2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} \cdot \Delta \hat{a}_n + \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} \cdot \Delta \hat{b}_n \right) \right]_j \approx 0,$$

siendo

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^N \left(\hat{a}_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - \hat{b}_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} \right) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N \left(\hat{a}_n \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} + \hat{b}_n \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} \right) \right)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{a}_n} = \frac{\partial(\mu^2)}{\partial \hat{a}_n}, \quad \frac{\partial f}{\partial \hat{b}_n} = \frac{\partial(\mu^2)}{\partial \hat{b}_n},$$

$$\frac{\partial(\mu^2)}{\partial \hat{a}_n} = 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} + 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial(\mu^2)}{\partial \hat{b}_n} = 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda} - 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda}.$$

Las derivadas se expanden en la Tabla 3. Finalmente, el sistema de matrices resulta:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta \hat{a}_1 \\ \Delta \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \Delta \hat{a}_N \\ \Delta \hat{b}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{b}_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{b}_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{b}_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{b}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{b}_1} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{a}_N} & \frac{\partial f_j}{\partial \hat{b}_N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [r^2 - \mu^2]_0 \Big|_1 \\ \vdots \\ [r^2 - \mu^2]_0 \Big|_j \end{pmatrix},$$

donde r es evaluado en un elipsoide con $a = 1$ y $\mu^2 \Big|_0$ indica que μ es evaluado con valores \hat{a}_n, \hat{b}_n de la iteración previa, lo mismo que \mathbf{J} .

Tabla A2.- Ensamblado del sistema matricial para calcular los coeficientes de la reversión de coordenadas

Siendo

$$\hat{v} + i\hat{u} = \sum_{n=1}^N (a'_n + ib'_n)(y + ix)^n,$$

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^N (a'_n P'_n - b'_n Q'_n) = v(y, x), \quad \hat{u} = \sum_{n=1}^N (a'_n Q'_n + b'_n P'_n) = u(y, x),$$

donde

$$P'_{n+1} = yP'_n - xQ'_n, \quad Q'_{n+1} = xP'_n + yQ'_n.$$

Se debe cumplir que

$$f \approx v(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a'_n} v(y, x) \Delta a'_n + \frac{\partial}{\partial b'_n} v(y, x) \Delta b'_n \right) - \hat{v} = 0,$$

$$g \approx u(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial a'_n} u(y, x) \Delta a'_n + \frac{\partial}{\partial b'_n} u(y, x) \Delta b'_n \right) - \hat{u} = 0,$$

siendo

$$\frac{\partial f}{\partial a'_n} = P'_n, \quad \frac{\partial f}{\partial b'_n} = -Q'_n, \quad \frac{\partial g}{\partial a'_n} = Q'_n, \quad \frac{\partial g}{\partial b'_n} = P'_n,$$

La primera proposición es expresada como

$$f \approx v(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N (P'_n \Delta a'_n - Q'_n \Delta b'_n) - \hat{v} = 0,$$

$$g \approx u(y, x)|_0 + \sum_{n=1}^N (Q'_n \Delta a'_n + P'_n \Delta b'_n) - \hat{u} = 0.$$

Finalmente, el sistema $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^+ \mathbf{J}^T \mathbf{u}$ se ensambla como sigue,

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta a'_1 \\ \Delta b'_1 \\ \vdots \\ \Delta a'_N \\ \Delta b'_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} P'_{1|1} & -Q'_{1|1} & \cdots & P'_{N|1} & -Q'_{N|1} \\ Q'_{1|1} & P'_{1|1} & \cdots & Q'_{N|1} & P'_{N|1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P'_{1|j} & -Q'_{1|j} & \cdots & P'_{N|j} & -Q'_{N|j} \\ Q'_{1|j} & P'_{1|j} & \cdots & Q'_{N|j} & P'_{N|j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [\hat{v} - v(y, x)|_0]_1 \\ [\hat{u} - u(y, x)|_0]_1 \\ \vdots \\ [\hat{v} - v(y, x)|_0]_j \\ [\hat{u} - u(y, x)|_0]_j \end{pmatrix}.$$



Tabla A3.- Latitud conforme χ

$$\chi = \phi + \sum_{j=1}^{j=6} g_j \operatorname{sen}(2j\phi),$$

$$g_1 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{82}{45}n^4 + \frac{32}{45}n^5 + \frac{4642}{4725}n^6,$$

$$g_2 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 + \frac{904}{315}n^5 - \frac{1522}{945}n^6,$$

$$g_3 = -\frac{26}{15}n^3 + \frac{34}{21}n^4 + \frac{8}{5}n^5 - \frac{12686}{2835}n^6,$$

$$g_4 = \frac{1237}{630}n^4 - \frac{12}{5}n^5 - \frac{24832}{14175}n^6,$$

$$g_5 = -\frac{734}{315}n^5 + \frac{109598}{31185}n^6,$$

$$g_6 = \frac{444337}{155925}n^6.$$

$$\phi = \chi + \sum_{j=1}^{j=6} g'_j \operatorname{sen}(2j\chi),$$

$$g'_1 = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6,$$

$$g'_2 = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5 + \frac{2323}{945}n^6,$$

$$g'_3 = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5 + \frac{73814}{2835}n^6,$$

$$g'_4 = \frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5 - \frac{399572}{14175}n^6,$$

$$g'_5 = \frac{4174}{315}n^5 - \frac{144838}{6237}n^6,$$

$$g'_6 = \frac{601676}{22275}n^6.$$

El término n es el aplastamiento tercero del elipsoide de revolución:

$$n = \frac{f}{2-f}.$$

Tabla A4.- σ en términos de ξ, η .

$$\sigma = \frac{\mu}{r}, \quad \mu = \sqrt{(\partial_{\lambda} x)^2 + (\partial_{\lambda} y)^2},$$

las derivadas parciales se calculan como en la Tabla 3 reemplazando

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{s \cdot t \sqrt{(1-s^2)(1+t^2)}}{1+s^2 t^2},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{(1-s^2)(1+t^2)}}{1+s^2 t^2},$$

$$s = \operatorname{sen} \xi \operatorname{sech} \eta, \quad t = \operatorname{sec} \xi \operatorname{senh} \eta.$$

El término r debe ser reemplazado por

$$r|_{1,f} = \sqrt{1-s^2} \left(1 + \sum_{j=1}^{j=6} R_j s^{2j} \right),$$

$$R_1 = -2n - 4n^2 - 6n^3 - 8n^4 - 10n^5 - 12n^6,$$

$$R_2 = \frac{26}{3} n^2 + \frac{136}{3} n^3 + \frac{452}{3} n^4 + \frac{1192}{3} n^5 + \frac{2702}{3} n^6,$$

$$R_3 = -\frac{244}{5} n^3 - \frac{19768}{45} n^4 - \frac{34828}{15} n^5 - \frac{416608}{45} n^6,$$

$$R_4 = \frac{99122}{315} n^4 + \frac{431216}{105} n^5 + \frac{9494152}{315} n^6,$$

$$R_5 = -\frac{138916}{63} n^5 - \frac{539479016}{14175} n^6,$$

$$R_6 = \frac{849515764}{51975} n^6,$$

$$\text{donde } n = \frac{f}{2-f}.$$