# TRATADO DEL AGRIMENSOR

SEGUNDO TOMO

## TOPOGRAFÍA

REPÚBLICA ARGENTINA

# TRATADO

DE

# AGRIMENSURA

## TEÓRICO PRÁCTICO Y LEGAL

SEGÚN PROGRAMAS Y TEXTOS OFICIALES

POR


CARLOS DE CHAPEAUROUGE

INGENIERO





BUENOS AIRES

JUAN SCHÜRER-STOLLE, EDITOR

248 - CALLE BOLIVAR - 260

1899

Imprenta y Encuadernación de Juan Schürer-Stolle, Bolívar 260, Bs. As.

# TOPOGRAFÍA

## I.– Levantamiento de planos ó ejecución de las mensuras

### 1.—TRAZADO Y MEDICIÓN DE LÍNEAS

Son tan numerosos los diferentes modos de ejecutar una mensura que casi puede decirse que cada mensura requiere uno especial; así es que al tratar esta cuestión, no pueden darse reglas generales, si no consejos que puedan ayudar á la buena ejecución del trabajo.

En la parte material de la mensura, esto es, en la medición de las distancias y ángulos, todas se asemejan y lo que se aconseja para una, puede ser aplicable á otras.

Vamos, pues, á pasar vista por el proceder de una mensura, haciéndole algunas observaciones para que pueda servir de punto de comparación.

Si la línea que va á medirse ha sido ya amojonada, lo más exacto es mandar colocar una bandera en el punto extremo de esa línea y, dirigiendo sobre ella la visual del instrumento, hacer colocar otras banderas en la línea, es decir, de tal modo que mirándolas por el anteojo se vean tan completamente sobrepuestas como si no hubiese más que una.

Este proceder es muy sencillo cuando se trata de una línea que no exceda de una legua en terreno llano ó más, si la colocación de la última bandera permite que se vea con el anteojo desde el extremo de la línea; pero si por una razón ó por otra no se alcanzára á ver, entonces hay que llevar el instrumento á un punto medio de la línea, en una altura si es posible, desde donde puedan verse las dos banderas extremas. Para hallar este punto, si no está ya marcado por un mojón, se coloca el instrumento donde se supone que debe pasar aquélla, se dirige el anteojo sobre una de las banderas teniendo cuidado de que el nonius marque 0°, luego que está bien asegurado en esa posición se hace describir al limbo superior y anteojo una semicircunferencia, de modo que mida 180°; si entonces la visual cae justamente sobre la 2.ª bandera, el punto central del instrumento se hallará en la línea y ya no quedará más que colocar otras banderas para tener ésta bien trazada; pero si esta condición no se ha obtenido, entonces se muda el instrumento hacia un lado ú otro hasta satisfacerla exactamente. Para saber hacia que lado debe moverse el instrumento cuando no se halla en la línea de las dos banderas extremas, el modo más sencillo consiste en hacer la figura, ó sea, trazar sobre el papel el ángulo que forman las dos líneas en el punto del instrumento y entonces se verá la dirección que toma la bisectriz, en esa dirección debe correr el instrumento.

Fig. 1.ª

La figura adjunta dá una idea del proceder, siendo A y B, las dos banderas que deben unirse, C la primera posición del instrumento, C D la bisectriz sobre la cual debe hallarse el punto buscado y D el verdadero punto de la línea donde, colocado el instrumento, se verá que dirigida la visual sobre uno de los puntos A y haciendo girar en seguida el limbo superior de 180° la bandera del punto B coincidirá con el centro del retículo.

Si este proceder no fuera aplicable, ya por la excesiva distancia entre los puntos A y B, ya por la llanura del terreno, montes, etc., ó cualquier otra causa, se establecerá una línea arbitraria, trazada en la dirección que se supone debe hallarse el punto B. Esta línea se mide con toda precaución, dejando señales (estacas) á distancias convenientes y relacionando á ella, por medio de ordenadas, cualquier mojón ú otro accidente que se encuentre á su proximidad.

Llegado así frente al punto B, esto es, hasta que éste se encuentre á escuadra sobre la línea medida, se mide la ordenada b B, la que, con la distancia medida A B, constituyen un triángulo rectángulo A b B, en el cual se calculará el ángulo en A por la fórmula

tang. $A = \frac{b\ B}{A\ b}$ y la distancia A B por; $A\ B = \frac{A\ b}{\cos A}$

Conocido el ángulo b A B, sólo resta calcular para cada una de las señales dejadas en el terreno, las ordenadas proporcionales, para trasladar dichas señales á la línea definitiva á fin de poderla trazar, medir y amojonar en la forma que convenga.

Los métodos que preceden para trazar una línea entre dos puntos distantes entre sí, no son los únicos, pueden emplearse otros procedimientos, que las circunstancias indicarán al hombre práctico; pero cualquiera que sea la marcha seguida, habrá siempre que hacer dos operaciones, la del reconocimiento ó estudio y la del trazado definitivo.

Establecidas ya las banderas en la línea que debe medirse y colocado el instrumento en el punto de partida, después de asegurarse de la perfecta coincidencia del cero de la graduación horizontal, se fija la visual en el enfilamiento de la línea y se asegura, con los tornillos correspondientes, la estabilidad del instrumento en esa posición. Entonces como el cero quedará á la izquierda. se medirán los ángulos necesarios, siguiendo en ello la marcha de las agujas de un reloj.

En este punto, que se llama *punto de partida* ó de *arranque* puede procederse á las siguientes observaciones:

1.° Las observaciones que se juzgue conveniente para calcular el azimut de la línea trazada, deducir su rumbo y la variación magnética de la brújula. Generalmente conviene repetir estas observaciones, empleando diferentes métodos, los que al mismo tiempo servirán para determinar la latitud. Por demás es hacer presente que si se tratára de fijar la posición geográfica del punto de arranque, sería ésta tarea de no hacerla por la simple observación de un día, y reclamaría, por lo tanto, una instalación de varios días.

2.° Se avalizan todos los puntos visibles y fijos como casas, cerros, mojones, etc., esto es, se mide el ángulo que cada uno de ellos forma con la línea trazada y que se va á medir; conviene asimismo deducir el azimut de estos avalizamientos.

Ejemplo de avalizamiento en el punto C:

Colocado en C y fijado el cero en B sobre la línea B C

Sauce del Puesto de Juan 72° 37'

Chimenea rancho de Pedro 89° 13'

Línea C D 103° 14' 27"

Cerro del Sol 137° 28'

Bandera mojón P 234° 18'

Médano del Río 302° 17'

Punto B (verificación) 359° 59' 47".

Una vez hechas todas estas operaciones, si no hay otras particulares del caso, se procede á la medición de la línea, lo que puede efectuarse del modo siguiente:

Disponiendo de la cadena ó cinta de 20 metros (puede ser también de 50) y de 10 clavos ó fichas.

1.° Se dan los diez clavos á la persona que arrastra la cinta, debiendo tomar el agrimensor la punta de atrás; el de adelante estira bien la cinta y clava un clavo, sigue caminando hasta que la punta de atrás llegue á la ficha, entonces el agrimensor cuidará de que la cinta esté bien estirada en la línea antes de clavar la segunda ficha.

2.° El orden precedente se sigue hasta que el de adelante, habiendo clavado sus 10 fichas, se encuentre con la cinta estirada en línea y sin tener con que señalar.

3.° En este estado el agrimensor le manda los clavos y cuenta, *una muda* que apunta, así como hará con las sucesivas, en esta forma:

1.° = 200 ó 500 (según el largo de la cinta)
2.° = 400 » 1000
3.° = 600 » 1500
4.° = 800 » 2000

4.° Si en el intervalo de una muda se encuentra un objeto que deba anotarse, cuenta el agrimensor las fichas que tiene en mano y la distancia desde la última ficha que levantó al objeto y apunta frente á la muda anterior, las fichas y la distancia.

*Ejemplo:*

Línea A B, desde el esquinero ... de Don.... al rumbo....
Se midió:

1 = 200
2 =
3 + 4 + 12 un mojón = 692 m.
4, puse un mojón = 800
5 + 0 + 15 m. á la derecha 50 m. un rancho = 1015 m.
6 = Crucé un camino
7 + 3c + 15 llegué al esquinero; (7 × 200) + 75 = 1475 m. línea A B.

Con el fin de nunca dejar un extremo de la cinta ó cadena sin una ficha clavada en tierra, algunos prácticos emplean 11 fichas. En este caso se clava la primera en el punto de partida, se devuelven las diez fichas que tiene en la mano el de atrás cuando el de adelante ha clavado la última de las que llevaba en la mano, y para anotar los detalles se descuenta siempre un clavo ó más bien sólo se toman en cuenta los que se tienen en la mano, prescindiendo del que está clavado.

Tal es el orden más sencillo á seguirse para el manejo de la cadena ó cinta de acero, sin embargo, hay que observar que si el terreno es un poco quebrado ó se cruza un zanjón, debe siempre tratarse de estirar la cadena horizontalmente, pero si el terreno fuera demasiado quebrado, debe procederse por nivelación, como en países de montañas, operación de la cual se tratará más adelante.

Terminada la medición detallada de la primera línea se procede al trazado de la segunda, ya colocando banderas en los esquineros ó mojones principales que deben ser respetados, ya trazándola bajo determinado ángulo si se trata de su reciente establecimiento.

En todo caso se colocará el instrumento en la vertical del punto extremo de la línea medida ó vértice del polígono y después de nivelado y puesto en cero se fijará en su posición tomando como base de las mediciones angulares el enfilamiento de la línea recién medida, efectuándose dicha medida, como ya se ha dicho, de izquierda á derecha siguiendo la graduación del limbo inferior.

La medición de los ángulos formados en los vértices por las líneas del perímetro, así como todos aquellos que requieren mucha exactitud, deberán ser repetidos para tener el término medio de varias lecturas.

Para obtener en la medición de los ángulos del polígono, los ángulos internos es necesario, siempre que algo de interés primordial no se oponga á ello, efectuar la medición del perímetro de derecha á izquierda, del punto de arranque 0 hacia el punto 1, en 1 se mide el ángulo $\widehat{0\,1\,2}$ y la línea 1 á 2; luego el ángulo $\widehat{1\,2\,3}$, etc.

Fig. 2.ª

Esta manera metódica de proceder á la mensura general del perímetro y á la particular de los ángulos evitará muchos errores y muchos dolores de cabeza con las dudas que más tarde se suscitan al poner en limpio los apuntes de la cartera tomados en un trabajo hecho desordenadamente; la claridad de los apuntes de la cartera es de la mayor importancia, la hoja de apuntes debe ser metódicamente hecha y exclusivamente destinada á ellos, cualquier observación se hará en otras hojas de la cartera (ver hojas de cartera adjuntas, Tabla A.)

Cuando el terreno es muy quebrado, ó más bien cuando una línea corta una ó más alturas, el proceder más exacto para conocer la distancia horizontal de un extremo al otro del obstáculo es el de triangulación.

Supongamos que se deba medir la distancia horizontal entre A y M separados por un médano ó un cerro, por ejemplo.

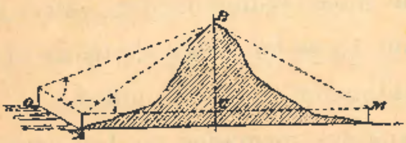


Fig. 3.ª

En el punto A, medimos una base A O y los ángulos O A B y B A C, el primero formado por el plano que pasa por el punto B, vértice señalado en la altura y el del punto O; el segundo formado por la visual al punto B y el horizonte, ángulo de altura.

Trasladándose en seguida al punto O, se mide el ángulo B O A de donde resulta formado un triángulo A B O en el cual se conocen, dos ángulos y el lado adyacente, de donde deducimos:

$$\text{ángulo } A\,B\,O = 180 - (A\,O\,B + O\,A\,B)$$

$$\text{y } A\,B = \frac{\text{Sen } B\,O\,A \times A\,O}{\text{Sen. } O\,B\,A}$$

Conocido así el lado A B, se resolverá el otro triángulo recto A C B formado por la visual A B, la vertical bajada de B y el plano horizontal hasta el pie de la vertical. Así, pues, en este triángulo conocemos la hypotenusa A B, el ángulo B A C y naturalmente el recto B C A, luego hallaremos:

$$A\,C = A\,B \times \cos B\,A\,C \qquad \log. \; A\,B =$$

$$+ \log. \cos B\,A\,C = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\log. \; A = \underline{\qquad\qquad}$$

Repitiendo la misma operación desde el punto M, se hallará M C, y sumándola con A C, se tendrá la distancia buscada.

Si ahora en vez de una sola altura fueran estas muchas, se procedería de un modo análogo al del primer punto B, por triangulización — resultando del cálculo de los lados la distancia buscada.

instrumento que préviamente deba nivelarse, el problema se simplifica, pues de hecho la lectura dá los ángulos horizontales O A C, A O C, siendo C el pie de la vertical del punto B, con lo que se tendrá:

$$A\,C = \frac{A\,O \times \text{Sen}\ A\,O\,C}{\text{Sen}\ O\,C\,A}$$

Observándose el ángulo vertical A B C se calcularía la altura B C. El teodolito puede, pues, dar los dos ángulos simultáneamente.

Ahora si el obstáculo no ofrece demasiada dificultad en ser transitado, puede seguirse la medición con la cinta reducida á menor longitud según la pendiente del terreno.

Así, colocado un jalón en A se estira la cinta hacia B, manteniendo uno de los extremos contra el jalón y haciéndolo correr verticalmente por éste hasta que la cinta se encuentre estirada horizontalmente.

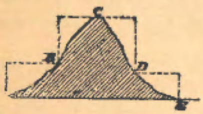


Fig. 4.ª

Trasladando sucesivamente el jalón en los puntos B C D..... y procediendo de la misma manera que desde A á fin de que la cinta se mantenga horizontal, fácil es concebir que se habrá hallado la distancia horizontal A E.

### Trazado de líneas largas

Si la línea que se va á medir es nueva ó más bien si recién se va á trazar, lo primero que hay que hacer, es calcular su azimut en el punto de arranque, luego, por uno ú otro de los antecedentes que han servido á determinar la dirección de la línea, se establece ésta fijando en ella 3 ó 4 jalones los que se procurarán colocar lo más lejos posible; en terreno despejado la última bandera llega á colocarse á no menos de 2 á 3.000 metros.

Para esta última operación, el mejor modo de proceder es mandar colocar la primera bandera tan lejos como lo permita la topografía del terreno y alcance á ver el hombre que la coloque las señas que se le hacen, pudiendo éste ver las señas con un anteojo; la segunda bandera se coloca entre la primera y el instrumento y la tercera más cerca aún ó en el mismo punto donde se hallaba el instrumento.

Para prolongar la línea así establecida, tres modos se presentan.

El primero, muy exacto, consiste en colocar el instrumento donde se mandó poner la 1.ª bandera, sea la más distante de la 1.ª estación, fijar el anteojo sobre la bandera del punto de partida, hacer describir al limbo azimutal una semicircunferencia (180°) y repetir la colocación de las nuevas banderas como en el caso anterior.

El segundo, consiste en continuar la línea más allá de la 1.ª bandera, sea la más lejana hasta el punto ó límite pasando el cual, no se podría ver la 2.ª bandera y la del punto de partida; hallado ese punto, se coloca el instrumento bien en la línea de la 2.ª y 3.ª banderas, y se procede como en el caso anterior, haciendo describir al limbo azimutal los 180°.

El tercer método, consiste en prolongar la línea colocando nuevas banderas en la línea de la 1.ª y 2.ª y seguir este orden, hasta la distancia de 4 ó 5 kilómetros; al fin de esta distancia, que no creemos prudente exceder sin temor de variar en algo la dirección de la línea, se coloca el instrumento, se verifica el azimut y no habiendo diferencia, se colocan las banderas en la prolongación de la línea, en la forma ya indicada.

Si resultara diferencia en la rectificación del azimut de la línea ya medida, habrá que tenerlo en cuenta como pasamos á demostrarlo: sea A B la línea trazada con las banderas 1.ª y 2.ª al rumbo S. 45°0′ ó azimut 225°, llegando al punto C, se observa que el azimut es de 44°45′ ó sea rumbo N 44°45′E.; esto indica que desde el punto B, la línea se ha inclinado al S. de 15′, luego la verdadera línea debería llegar al punto D y no al C, de donde resulta un triángulo rectángulo en D, cuya hypotenusa es la distancia medida B C y el ángulo en B igual á 15′; su resolución es sencilla y por ella se conocerá: la cantidad C D que debe medirse sobre el terreno antes de prolongar la línea, y la distancia B C que será la B D rectificado.

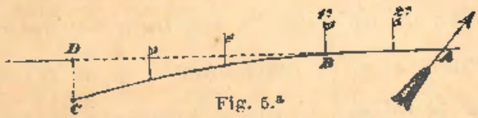


Fig. 5.ª

El empleo del rumbo magnético aquí mencionado, debe ser considerado sólo como un auxiliar que permite hacer notar una desviación en la línea trazada. Los ángulos materiales, son seguramente los principales elementos para cerrar y calcular el polígono; pero el rumbo magnético empleado con discreción y con las precauciones correspondientes, es un gran recurso en muchos casos.

En la colocación de las banderas, hay que tener presente que, al subir una loma, las banderas deben ir cerca, á fin de nunca ver el pie de la que se coloca, con la cabeza de la ya colocada; en la bajada, por lo contrario, las banderas pueden colocarse á largas distancias, pero siempre con el cuidado de no caer en el defecto anterior; en campo raso deben siempre colocarse lejos, mirando las precedentes con anteojos jemelos.

## II. — Levantamiento de planos

Ya se ha dicho que según los casos, son los procedimientos que se emplean; por lo tanto, vamos á pasar vista por algunos de ellos:

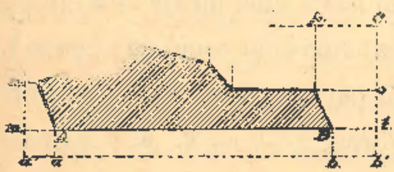


Fig. 6.ª

1.º Sea el caso de una quinta cerrada, ó un terreno cualquiera, al interior del cual, no se puede ó no conviene penetrar.

Emplearemos siempre el sistema de coordenadas, y para esto, de los puntos A y B, mediremos una distancia igual en dos pequeñas perpendiculares, para de este modo trazar una paralela á A B que será a b, se mide la línea a' b' de modo de poder levantar en sus extremos dos perpendiculares b' c, a' b, sobre las cuales se medirán distancias iguales, si se quiere, ó desiguales, si así lo exige la topografía del terreno; y finalmente, se ligarán los extremos d y c.

Al medir todas esas líneas se levantarán ordenadas á todos los puntos del terreno, cuyo plano se quiera levantar, como lo demuestra la figura adjunta.

Después se calcula la superficie del polígono medido, de la cual, deduciendo la superficie de los trapecios de las ordenadas, se obtiene la superficie del terreno cercado.

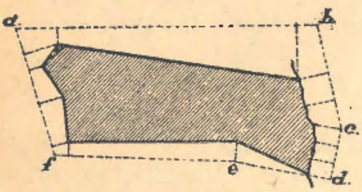


Fig. 7.ª

El croquis (fig. 2) representa otro ejemplo en el cual las abcisas forman entre sí ángulos desiguales; el resultado es el mismo que en el caso anterior, pero cuando puede emplearse el de abcisas y ordenadas á ángulos rectos, debe preferirse por su comodidad en los cálculos y su exactitud, advirtiéndose de paso, que cuando haya que medir dos líneas iguales para formar un paralelógramo como en el caso I, es muy conveniente medirlas por separado, antes de ligarlas, es decir, que debe medirse: 1.º b' e, 2.º a' d y finalmente, d e. 2.º Si el caso es levantar el plano del presente polígono, de uno de sus vértices ú otro punto cualquiera, se traza una línea recta, A M indefinida, se colocan banderas en cada vértice B C D......, luego se principia á medir desde A hácia M.; al llegar

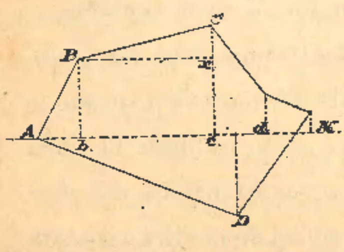



Fig. 8.ª

al punto (b) se levanta la perpendicular B b, que se mide también; al punto c se levanta otra perpendicular hasta C, y se mide también; la misma operación se repetirá al enfrentar cada vértice del polígono, y con estos datos podrá calcularse los lados, la superficie y construir el plano.

Efectivamente, para la línea AB se ha formado un triángulo rectángulo, donde se conocen los dos catetos A b y b B y será fácil hallar el ángulo B A b y la hypotenusa A B.

Luego para la B C, restando entre sí las dos ordenadas B b y C c, se obtendrá C x, formando así otro triángulo recto C x B en las mismas condiciones que el anterior; para conocer ahora el ángulo A B C se tendrá A B C = A B b + 90° + C B x.

Siguiéndose siempre este mismo orden se calcularán todos los datos necesarios.

Para el cálculo de la superficie, fácil es ver que se ha dividido el polígono general en figuras regulares donde todos los elementos son conocidos.

En cualquier caso al agrimensor incumbe adoptar el proceder que crea más conveniente aplicar al caso que se le presenta.

### Levantamiento por la poligonal ó rodeo

Tratándose de un terreno de mayor extensión y cuyo deslinde puede recorrerse, el sistema más rápido y comúnmente aceptado es, medir por las líneas que lo limitan. Para esto conviene partir de uno de los vértices del polígono adoptado por punto de partida ó arranque y medir cada uno de los costados, así como los ángulos internos formados por dos costados ó líneas consecutivas.

Siempre que sea posible es preferible hacer este recorrido de izquierda á derecha, esto es, en el sentido inverso á la marcha de las agujas de un reloj, á fin de poder medir directamente los ángulos siguiendo la graduación del limbo del teodolito ó cualquier otro círculo graduado.

Efectuando así el recorrido de todas las líneas ó costados que forman el polígono hasta regresar al punto de partida se habrán obtenido todos los elementos necesarios, ya para construir el plano, ya para calcular la superficie. Los detalles de este procedimiento, que en sí constituye la base de todas las mensuras, serán expuestos en el capítulo *Poligonometría*, ó cálculo analítico.

### Por triangulación

A veces la topografía del terreno á medir no se presta á la medición directa por los deslindes, especialmente en regiones montañosas; en este caso es necesario fijar de antemano los puntos ó vértices por los cuales debe pasar el deslinde, y luego de medida una base en la parte más llana y que más se preste á la operación, formar una red de triángulos más ó menos grandes á fin de ligar entre sí todos los vértices del polígono á relevar. Procediendo de esta manera, debe tenerse presente que de cada estación deben dirigirse visuales á todos los objetos interiores á fin de relevar el detalle y accidentes del terreno. La formación de esos triángulos y sus cálculos respectivos serán detallados en el capítulo correspondiente, siendo de advertir que la disposición del trabajo en general, varía en cada caso y depende del buen criterio y experiencia del agrimensor.

### Levantamiento con Estadía y brújula

Hay casos en que ninguno de los procedimientos que quedan expuestos, puede ser aplicable, ya por la naturaleza del terreno, ya por cualquier otra causa,—entonces puede procederse á la operación munidos de una buena brújula prismática y de un anteojo *estadía* verificado y que permita apreciar las distancias con exactitud, (véase Estadía).

Uno de los casos más indicados para la aplicación de este procedimiento, es el del levantamiento de una isla en cuyo piso blando el pie del teodolito se entierra fácilmente y donde no se puede estirar la cinta por lo boscoso y pajoso de la margen de los arroyos ó ríos. Entonces, conviene hacer el relevamiento de los arroyos, etc., por el centro de ellos sirviéndose de los elementos ya indicados. Para proceder á la operación basta colocar en el punto de partida adoptado una regla ó mira en la cual se ha medido una base conveniente (de 2 á 4 metros). Sea A el punto de partida, en él se coloca la mira y luego trasladándose en bote al punto B, el más lejano y desde el cual

Fig. 9.ª

puede verse la mira, se coloca en él la brújula y el anteojo cada uno sobre su pie correspondiente y á la par uno del otro; entonces se observa el azimut de la línea A B y se mide el ángulo micrométrico formado por los extremos de la base mira, con lo que se calculará la distancia A B. Hecha la observación, se hace trasladar la mira en el punto B y se coloca nuevamente el observador en el punto C cuidando siempre de elegir convenientemente dicho punto, tanto para ver el punto B como para preparar la nueva estación D.


Fig. 10.

Siguiendo este proceder hasta regresar al punto de partida, que á su vez será el de la última estación de observación, se habrá obtenido una poligonal perfectamente cerrada y con todos los elementos para efectuar los cálculos correspondientes. Con buenos instrumentos y alguna práctica puede obtenerse un resultado con una diferencia de 5 por mil.

## III.—Relevamiento de ríos y arroyos

El sistema empleado en esta operación es siempre el de absicas y ordenadas; las absicas que son las que forman la base de la operación se trazan de dos modos:

1.º Formando entre sí ángulos rectos.

2.º Formando entre sí cualquier ángulo más adecuado á las sinuosidades del río y á la topografía del lugar.

Para el primer caso se traza una línea perpendicularmente, si se puede, á un costado del polígono que se recorre, se mide en esta línea, una distancia cualquiera determinada por las vueltas del río, llegado á su extremo se levanta una perpendicular hasta dar con el río ó con un punto apropiado para de ahí seguir la operación en el mismo orden.

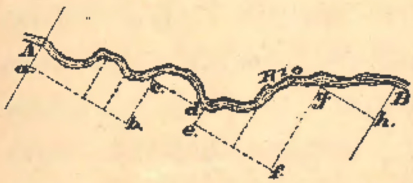



Fig. 11.

Supongamos el caso en que haya que relevar el curso de un río desde A hasta B.

Siendo A C un costado del campo medido, buscaremos un punto (a) desde el cual pueda tirarse la línea a b; luego desde este punto trazaremos una perpendicular á A C y empezaremos á medir; á las distancias más apropiadas (cada 20 metros, por ejemplo) levantaremos ordenadas para medir hasta el río, la distancia que exista entre éste y nuestra línea, luego llegando al punto b, que empieza á apartarse demasiado del río, trazaremos la línea b c, perpendicular á a b y por ella mediremos hasta encontrar el río en c, levantando, bien entendido, las ordenadas sobre b c para conocer las sinuosidades del río.

De este punto C trazaremos otra perpendicular c d sobre b c y seguiremos siempre en este mismo orden, hasta llegar al punto B.

Este sistema, á veces de muy fácil aplicación, y otras muy difícil por el curso del río que obliga á hacer muchísimas escalas, ó por otras razones, presenta una inmensa ventaja en la práctica, permitiendo conocer inmediatamente por medio de una simple suma, el frente ó la distancia AB y facilitando considerablemente el cálculo de la superficie ó de cualquiera otra operación, siempre que el ángulo en A, sea recto.

El segundo sistema, es muchas veces de una aplicación más fácil y pronta, pero presenta el inconveniente de tener que calcular cualquier distancia que se quiera conocer, así como las coordenadas de todas las líneas para el cálculo de la superficie.

Consiste en trazar las absicas siguiendo tan paralelamente como sea posible las grandes vueltas del río, y sobre cada una de esas líneas levantar las pequeñas ordenadas que relacionan dicho curso con esas líneas.

Fig. 12.

Sea relevar el curso del río de A hasta B. Partiendo del punto A, trazaremos una línea Aa formando un ángulo φ con el costado A C, mediremos una distancia hasta encontrar el río, de ahí buscando la dirección general de éste y sin apartarnos demasiado de él, trazaremos otra línea ab, con un ángulo A ab y mediremos una distancia hasta encontrarnos en un punto desde donde comprendemos que el río cambia de dirección; entonces trazaremos la línea bc con un ángulo abc—y siguiendo este mismo orden llegaremos al punto B; hay que advertir que siempre se deben levantar las pequeñas ordenadas sobre las líneas A a, a b, etc.

Es fácil comprender que por este sistema todos los cálculos serán mucho más complicados, y mucho más numerosos los motivos de errores, pues que en tantos ángulos, es muy fácil perder algunos minutos y que para hallar cualquier distancia de A á C, por ejemplo, habrá que reducir la línea quebrada A a, a b, b c, á una línea recta y luego calcular la perpendicular de C sobre A C.

Cuando en grandes operaciones, integración de varios títulos por ejemplo, hay que relevar una gran extensión de río, el sistema más propio es el del primer caso; pues, trazando una gran línea que serviría siempre de línea de comparación, podríase rectificar las pequeñas absisas de relevamiento; pero si el caso fuera dado de tener que usar el segundo sistema, el modo más conveniente sería el siguiente:

Se traza en la cartera la figura del terreno general, marcando principalmente el costado A C, desde el cual se empieza el relevamiento; luego se traza una perpendicular A M, en el punto A de partida para la operación de relevar el río; enseguida se señalan las absisas conforme se van midiendo A a, a b, b c... y finalmente, al fin de cada absisa, se calculan sus coordenadas, con relación á la línea perpendicular ya trazada en la cartera.

De este modo, con algo más de trabajo, se habrán reducido las distancias medidas á la perpendicular sobre

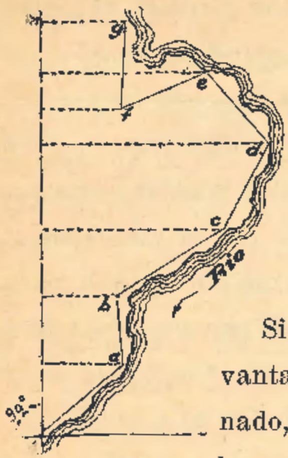



Fig. 13.

uno de los costados del terreno; lo que facilitará cualquier cálculo posterior, sea de integración del frente de un título, sea para el cálculo de superficie calculando á parte la área comprendida entre la línea A a. b. c... g y el río.

Si la operación consistiese sólo en levantar el plano de un terreno ya amojonado, creemos que lo más acertado sería hacer uso del segundo sistema, pues las distancias principales, siendo conocidas, no habrá que hacer cálculos para hallar inmediatamente ciertas distancias, y el trabajo se hará con más brevedad.

---

Se comprenderá fácilmente, que el procedimiento á seguirse para el relevamiento del curso de un río ó arroyo, varía en cada caso, según las condiciones del terreno, por el que se debe transitar; todo lo que puede recomendarse, es que: cualquiera que sea el sistema de coordenadas que se emplee, deberá siempre tenerse presente, que la exactitud de la representación del curso que se levanta y de la superficie comprendida entre dicho río y la absisa, dependerá de la proximidad de las ordenadas; asimismo, para facilitar los cálculos ulteriores de superficies, conviene procurar tanto como sea posible, de que las ordenadas sean equidistantes, por ejemplo, cada 10, 20, 50, 100 metros.

Cuando no es posible acercarse al río, ya por los bañados, ya por los montes, puede procederse de la siguiente manera:

Fig. 14.

Se establecen las absisas A B, B C, C D... por el terreno alto y transitable; en la costa del río se colocan banderas de diferentes colores en puntos importantes, como ser, codos bruscos, cambios de dirección, etc, etc.; esto es, procediendo con discernimiento y sin perder de vista el fin que se busca.

Luego de cada vértice A, B... y de puntos intermediarios, a, b, c... se dirigen visuales á las banderas, formándose así una serie de triángulos A 1 a, A 2 B.... en los cuales se conoce la base A a y los ángulos en A y en a... con cuyos elementos, fácil es calcular las líneas A 1, A 2, B 3, etc... y luego la proyección de éstas, con lo que queda reducido el relevamiento al sistema de coordinadas rectangulares sobre cada absisa.

De la misma manera que se ha procedido en este caso, pueden presentarse en la práctica infinidad de casos en que sólo el buen criterio del operante, indicará la manera de proceder, aprovechando las condiciones locales y sus conocimientos técnicos.

Como resumen de lo que precede, el croquis adjunto, representa un caso práctico ofrecido en una mensura y división ejecutada en Santa Fe con frente al Río Salado. Se trataba de dividir el terreno deslindado por las líneas A S R H y el río, en 4 lotes de superficie igual, por líneas paralelas entre sí.

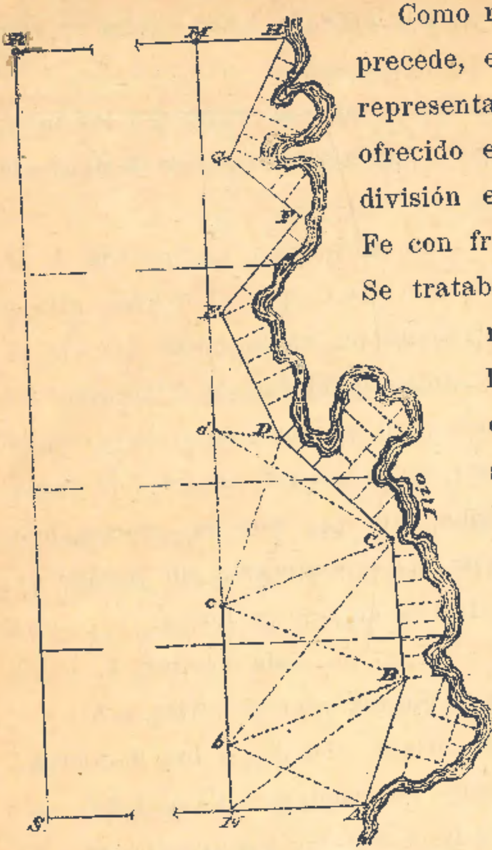



Fig. 15.

El relevamiento del curso del río se hizo por una poligonal A B, C D E F C, H, empezando desde A, sobre cada absisa fueron levantadas gran número de ordenadas, como lo indica el croquis, y en cada vértice B C D..... G se dejó una estaca y una bandera.

Terminado el relevamiento, hasta el esquinero mojón H y construído un plano demostrativo del relevamiento hecho, se midió sobre la línea H R, la distancia H M, y á su final se levantó la perpendicular M N, procurando hacerla pasar á una distancia prudencial del vértice E que era el más entrante.

El objeto de esta línea, era rectificar la poligonal del relevamiento y aislar la parte de figura regular de la irregular; asimismo servía esta línea para verificar el paralelismo de las líneas S A y R H, así como comprobar toda la mensura.

Al medirse esa línea, se relevaron todas las banderas dejadas en los vértices B. C. D... ya levantando perpendiculares hasta ellos, ya formando triángulos como N b A, N b B, D c C, d c C, B c N......

La resolución de esos triángulos y la proyección de sus costados, líneas N b, b c, c d... sirvieron de comprobación á la medida parcial de las absisas A B, B C, etc. y aún á poder salvar con toda certeza las pequeñas diferencias ó errores que aquéllas habían sufrido en su medición.

Preparado de esta manera el relevamiento total, el cálculo se hizo fácilmente y el amojonamiento de los lotes con toda exactitud; pues, cada línea, podía ser comprobada en su extensión y dirección, sabiéndose que debía pasar á tal distancia del punto c, por ejemplo, y del vértice B.

### IV. — Cálculo gráfico superficial

Terminada la medición de los lados y ángulos del perímetro hay que proceder al cálculo de la superficie. Este se hace habitualmente por los medios analíticos, pero también puede hacerse gráficamente según la importancia del trabajo.

El cálculo gráfico se funda en la descomposición, del espacio encerrado por el perímetro, en figuras geométricas regulares cuyas dimensiones se aprecian por medio del compás y la escala.

Se requiere, pues, un plano construido con suma prolijidad y nitidez, á una escala conveniente para poder apreciar las unidades de cada línea.

Fig. 16.

El presente polígono construido con todo esmero se ha dividido en varias figuras regulares descompuestas á su vez en triángulos; si se aprecia luego á la escala, el largo de las líneas que en cada triángulo representan la base y la altura, bastará efectuar las operaciones metódicamente y la suma de todos esos productos dará la superficie buscada.

Así para el triángulo A se tiene $S = \frac{33.00 \times 15.70}{2}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| » | » | B | » | $S = \frac{1}{2}\ (33 \times 15.50)$ |
| » | » | C | » | $S = \frac{1}{2}\ (21 \times 10)$ |
| » el trapecio | | H | » | $S = \frac{1}{2}\ (14.45 + 15.90) \times 10$ |
| » el triángulo | | G | » | $S = \frac{1}{2}\ (41.30 \times 12.00)$ |

Como se desprende de lo que precede, para que todas las figuras de descomposición sean regulares, sólo se requiere un poco de reflexión para aprovechar los elementos del polígono y disminuir en lo posible el número de figuras.

El caso más común de cálculo gráfico, empleado muchas veces como un control de otras operaciones, es en el aprecio de las superficies extrapoligonales.

Estas resultan toda vez que se tenga como límite un río, un camino, una línea curva ó sinuosa etc; límite que para ser relevado ha necesitado el empleo de obcisas y ordenadas.

En efecto el polígono cerrado y que se calcula analíticamente y aún gráficamente, es el que comprende las abcisas, de suerte que para la superficie total hay que adicionar á la superficie del polígono, la que se encuentra comprendida entre las abcisas y el límite sinuoso.

Fig. 17.

El relevamiento de un río, se habrá hecho levantando sobre la abcisa A B y la B C, las ordenadas a á b b', c c' B B', d d' e e' c c' etc. etc., que resultaran separadas entre sí de la cantidad: A a, a b, – : . c B . . . . B d . . e c.

Cada dos ordenadas forman así un trapecio fácil de calcular ó un triángulo como sucede en aquellos puntos donde las abcisas llegan hasta el río ; así se tiene para: figura $1 = \frac{1}{2} (A\,a \times a\,\grave{a})$, figura $2 = \frac{1}{2} (a\,\grave{a} + b\,b') \times a\,b$ y así sucesivamente para todas las ordenadas medidas ; hasta ahí no hay nada de cálculo gráfico pues que los elementos de cálculo son los tomados en el terreno ó sea en el relevamiento, pero en la figura B B' d d' por ejemplo donde las ordenadas medidas B B' y d d' no son paralelas, habrá que descomponerla en el trapezio B m d d' y el triángulo B B' m cuya base A m y altura h deberán ser apreciadas con el compás y la escala.

Así pues en toda operación de relevamiento de plano en el que figura un río ó una línea sinuosa como límite, entrará algo de cálculo gráfico.

Cuando las ordenadas son equidistantes y algo numerosas, como suele suceder en grandes relevamientos, puede aplicarse al cálculculo de la superficie que ellas encierran, la fórmula de Simpsón.

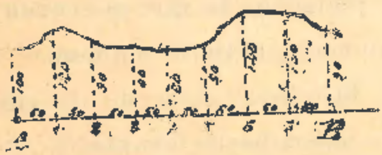



Fig. 18.

Para aplicar esta fórmula dos son las principales condiciones :

1°. que la distancia A B sea dividido en un *número par* de espacio.

2.° que las ordenadas sean equidistantes.

Se deduce de lo que precede la gran conveniencia que hay en levantar las ordenadas á distancias iguales, lo que no impide levantar otras especiales en determinados puntos si así lo reclama un accidente particular del terreno.

Ahora pues, llamando cero (0) la ordenada del punto de partida y numerando las siguientes con la numeración seguida desde el 1 se aplicará la fórmula que dice: « la « suma de las dos ordenadas extremas más 4 veces la « suma de las ordenadas de número impar, más dos veces « la de ordenadas de número par, el todo multiplicado « por la tercera parte de la distancia constante d que se- « para las ordenadas » siendo n el número par de espacios d

$$S = \frac{d}{3}\left( y_0 + y_n + 4\left( y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{n-1} \right) + 2\left( y_2 + y_4 + y_6 + y_{n-2} \right)\right.$$

aplicando esta fórmula al ejemplo precedente se tendrá

$$S = \frac{50}{3}\left[ \left( 100 + 90 + 4\left(120 + 90 + 90 + 100\right) + 2\left(90 + 80 + 140\right) \right]\right.;$$

$$S = \frac{50}{3}\left[ 190 + \left( 4 \times 400 \right) + \left( 2 \times 310 \right) \right] = 40166 \text{ mts. cuadrados}$$

Así pues si sucediera que la abcisa tiene un número impar de ordenadas, sea A C, se tomará de ella un número par (A B con 8 espacios) y á estos se les aplica la fórmula de Simpsón; á su producto se le adicionará la superficie del trapezio B C calculado por las espresiones generales.

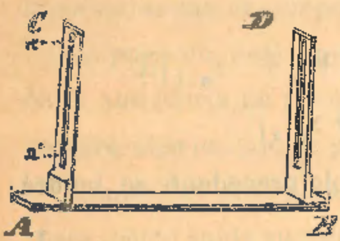
Por este sistema el cálculo será más rápido.

## II.—Instrumentos

### PARTES PRINCIPALES

*Alidada* — Es un aparato especial, destinado á dirigir la vista ó tirar la visual á los puntos de observación sobre el terreno.

La forma de la alidada varía según la clase del instrumento pero por lo general consiste en una regla A B de metal á los estremos de la cual se levantan perpendicularmente otras dos, llamadas Pínulas A C y B D.




En cada pínula, hay una abertura muy estrecha *a a'* y un agujero cónico *c*, pero contrapuestas y en el medio de cada una un hilo ó cerda bien tirante y perpendicular á la regla.

Mirando por los agujeros á las aberturas se hacen coincidir los dos hilos con el objeto ó jalón cuya dirección quiere tomarse.

En los extremos de la regla horizontal pueden aplicarse dos nonios á fin de que colocando la alidada sobre un plano horizontal limitado por un círculo graduado ó limbo, se puedan medir los ángulos.

Para cerciorarse de que el plano vertical que pasa por las aberturas, es bien perpendicular á la regla horizontal se fija una visual á un punto fijo mirando desde una de las pínulas, luego se hace describir á la alidada una media circunferencia y se vuelve á fijar el mismo punto mirando desde la otra pínula, si los dos hilos y el punto coinciden es prueba de que la alidada está buena.

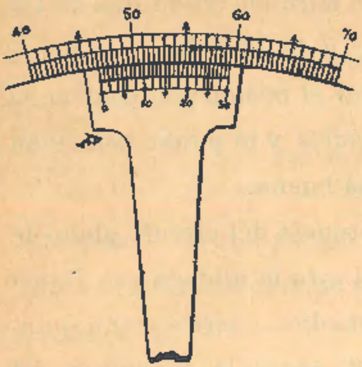
*Limbo* — El borde ó circunferencia del círculo plano de los instrumentos sobre el cual gira la alidada, se llama Limbo y se divide en 360°, en medios, cuartos y aún quintos de grados ó sea 30', 15' ó 12' según la magnitud del instrumento.

*Nonio* — Se llama así á los estremos de la regla de la alidada ó á una pequeña regla, parte de un arco concéntrico con el limbo, que se aplica sobre ese y sirve para apreciar la graduación del ángulo y las fracciones de minutos ó segundos según sean las divisiones del limbo.

La teoría del nonio está basada en que, si se toma, para éste un número de las partes del limbo, 59 partes p. e. y se divide ese espacio en 60 partes,haciendo 59$=$n la relación existente entre una y otra división será : para cada parte del nonio $1=\frac{n+1}{n}$ de las del limbo; y por consiguiente la fracción, ó lo que falta á una parte del nonio para igualar una del limbo será $\frac{1}{n+1}$.

Claro es que partiendo de la línea de fé F, las 2.ª, 3ª, 4.ª etc. partes del nonio estarán $\frac{n+1}{2}$ $\frac{n+1}{3}$ $\frac{n+1}{4}$ mas elevadas que sus correspondientes partes del limbo.

De esta manera, en cualquier posición que se encuentren los dos arcos, si la línea de fé no coincide exactamente con un número de grados ó partes de grado, según sea




la división del limbo, se puede averiguar la fracción que falta siendo que la línea del nonio coincide con otra del limbo; el número correspondiente á aquella será el numerador.

Siendo el caso ya citado tenemos $\frac{n+1}{n} = \frac{60}{59}$ y la fracción será $\frac{1^\circ}{n+1} = \frac{60}{60'} = 1'$

Si estuviere dividido el limbo en medios grados ó cuartos y el nonio abrazare 29 de las primeras ó 14 de las segundas se tendría :

para las primeras $\frac{1}{n+1} = \frac{30}{30'} = 1'$ (B)

» » segundas $\frac{1}{n+1} = \frac{15}{15} = 1'$

Si en el limbo se divide cada grado en 12 partes, cada parte será de 5' y la fracción será :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{59+1} = \frac{5'}{60} = \frac{300}{60} = 5''$$

Supongamos que la línea de fé marque entre 44° y 45° —y que la división 15 del nonio sea la que coincide exactamente con una división del limbo, el ángulo será 44° 15 (según división del caso B que es el mas general.)

Sea ahora que la línea de fé marque 41° 30' y que la división 8 del nonio, sea la única que coincide exactamente, el ángulo será 41° 30' + la fracción $8 \times \frac{30}{30} = 8'$ luego la lectura será 41° 38'.

## Instrumentos de Reflexión

*Teoría*—Es un principio demostrado en física de que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Siendo AB un rayo de luz que choca la superficie de un espejo MM', éste se reflejará en una dirección BC formando el ángulo de reflexión CBM' igual al de incidencia ABM, ó considerando la normal NB, NBA = NBC; de modo que el rayo incidente AB, el reflejado BC y la perpendicular NB están en el mismo plano normal á la superficie del espejo.


En este principio se fundan los instrumentos de reflexión y de él se deducen las dos teorías siguientes:

1.° Si un rayo de luz cae ó choca en un espejo y su reflexión encuentra otro segundo espejo en que reflejarse por segunda vez; el ángulo formado por el rayo incidente y el reflejado será doble del que forman los espejos entre sí.


Sean MM' y PQ los dos espejos; IO el rayo incidente y OA el reflejado, cuya dirección supondremos perpendicular al espejo SQ y que por consiguiente coincidirá con el segundo de reflexión. Las normales de los dos espejos serán reciprocamente RO y OA; luego en los triángulos semejantes P.O.D y P.A.O., rectos el primero en O y el segundo en A, tenemos, llamando:

$$P.O.A = \frac{1}{2} a, \quad OPA = p, ODP = a$$

$$\text{en } P.O.D., \; d = 90 - p$$

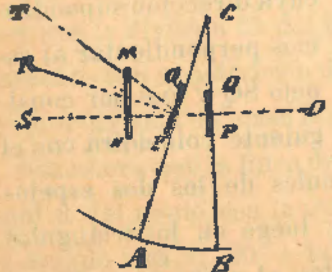
$$\text{y en } OAP, \; \frac{a}{2} = 90^{\circ} - p \text{ luego } d = p$$

Esto es: que el ángulo formado por los rayos de incidencia y reflexión es duplo del formado por los espejos.

De lo que precede se deduce que fácilmente podrá medirse el ángulo formado por dos objetos valiéndose de un aparato compuesto de dos espejos, fijo el uno y movible el otro, y que permita apreciar el ángulo que forman entre sí dichos espejos.

2.° Supongamos dos espejos paralelos MN y OP; en S un punto de la visual OS y en O el ojó del observador. Si el espejo MN tiene la mitad sin azogue, se verá el objeto S y por reflexión del espejo PQ el mismo punto que se confundirá en el espejo MN.

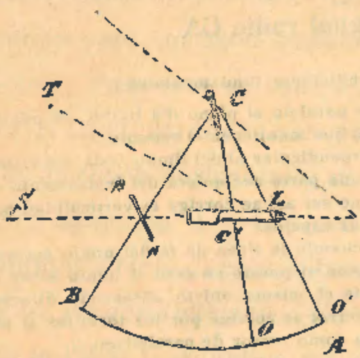
Si ahora el espejo QP toma una inclinación QP' reflejará en S el rayo que recibe de T y siendo RO' la normal á QP, es evidente que SO'R = RO'T, pero el ángulo SOR = P'OP, pues que ambos miden el movimiento operado por el espejo QP; luego si en AB existe un arco graduado cuyo zezo esté en B—la lectura del arco AB será la mitad del ángulo TO'S formado por los rayos de los dos objetos reflejados T y S.




Es con esta teoría que se ha construído el sextante, la escuadra óptica y demás instrumentos de reflexión.

**Sextante**—A pesar de que este instrumento tiene su principal aplicación en la marina, su teoría debe conocerse porque es idéntica á la del sextante de bolsillo, cuyo uso es sumamente útil al agrimensor para reconocimientos y operaciones de mediana extension.

El sextante se compone de una armazón liviana y representando un segmento de círculo, cuyo arco mide generalmente 60 grados (con los cuales según la teoría pueden apreciarse ángulos de 120°).




Del centro C parte una regla movible CO cuyo ex tremo O, señala el zezo del limbo colocado en el arco AB. En el otro extremo C existe un espejo colocado en sentido vertical al plano del instrumento y perfectamente en la dirección de C.O.

Sobre el brazo CB existe otro espejo MN, con sólo la mitad inferior azogada, y colocado exactamente paralelo á la línea central de la regla CO'. En un punto L del otro brazo fijo AC, se encuentra colocado el anteojo (ó una alidada) por el cual se dirije la visual LS que pasa por el espejo MN.

Según la teoría y por la posición paralela de los dos espejos, el observador L verá sólo el mismo objeto S mientras el nonio esté en 0°; pero cuando el espejo en C se mueva para fijar el punto T que se reflejará en S, el nonio habrá recorrido el arco OO' que medirá la mitad del ángulo TC'S.

(Dada la pequeñéz del instrumento comparativamente á la distancia de los objetos observados, se considera el espejo C como si estuviera en C').

Para evitar de duplicar el ángulo OO' la graduación del sextante es mitad más chica que la normal correspondiente á un arco OO' de igual radio CA.

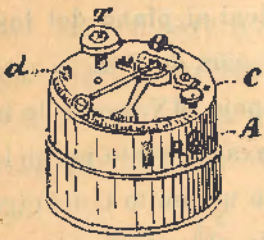
El sextante debe responder á tres condiciones fundamentales:

1.° Que el eje óptico del anteojo sea paralelo al plano del limbo; lo que se obtiene por medio de los tornillos que mantienen el retículo.

2.° Que el plano de los espejos sea perpendicular al del limbo; esta condición quedará satisfecha siempre que una parte cualquiera del instrumento se vea reflejada en línea recta. De no ser así se corrige la verticalidad por los tornillos colocados al pie de los espejos.

3.° Que los espejos estén paralelos cuando la línea de fe del nonio marque cero; queda satisfecha esa condición si puesto en cero el nonio sobre el limbo se ve coincidir exactamevte el mismo objeto observado directamente y el mismo reflejado. Ese error se corrige por los tornillos al pie de los espejos ó se tiene en cuenta como «error de paralelismo».

**Sextante de bolsillo**—En un pequeño sextante colocado en una caja cilíndrica que lleva en su parte superior el limbo y su nonius—los espejos se hallan, pues, al interior de la caja.




En A se halla el anteojo que puede eliminarse para servirse del agujerito (a) practicado en la planchita de metal que puede correrse á voluntad. En O se halla el centro del brazo g.o. al que se comunica el movimiento por medio del tornillo T.

Para medir un ángulo se fija uno de los objetos por el ocular (a) que se halla frente al espejo medio azogado, luego con el tornillo de coincidencia T, se hace girar el 2.° espejo ó sea el brazo q. o. hasta hacer coincidir con el objeto visto directamente, el 2.° objeto que determina el ángulo á medirse. Para que el ángulo sea bien tomado los dos objetos deben confundirse exactamente sobre el 1.° espejo.

*Correcciones del sestante.*—La condición esencial que se requiere para un buen sestante es el paralelismo de los espejos. Para esto, se coloca la línea de fé del nonio en la división 0° del limbo, se pone primero el instrumento en la posición horizontal y se dirije después una visual, por el agujerito A y la línea divisoria del 1.° espejo, á cualquier objeto el cual debe cortarse en la misma visual con su imajen reflejada. En el caso contrario se destornilla la llave C se aplica en *d* y, mirando de nuevo el objeto se dá vuelta la llave hasta que se obtenga la indicada coincidencia. Después se pone el instrumento en la posición vertical y tirando una visual al mismo ú otro objeto, debe éste también coincidir con su imagen, y de lo contrario con la misma llave C se hará girar el espejo grande hasta verificar la coincidencia.

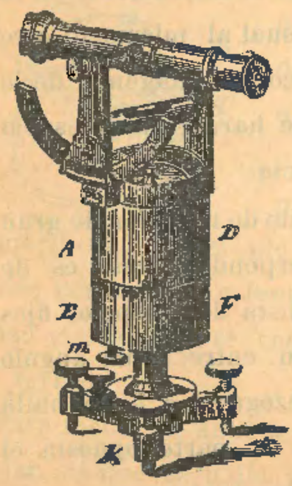
**Escuadra óbtica.**—Este instrumento de reflexión de gran utilidad para trazar pequeñas perpendiculares, es de construcción muy sencilla; solo consta de 2 espejos fijos y colocados de modo que formen entre sí un ángulo de 45°. Frente al espejo medio azogado *a b*, se halla de un lado la abertura *p. q.*, en la parte opuesta el ocular *d* y frente al espejo *m. n.* otra abertura *r. s.*

Para levantar una perpendicular, se fija por el ocular d y por la parte no azogada de *a. b.* un punto de la línea,


luego por la abertura *r. s.* se hará reflejar otro punto de la perpendicular hasta que este venga á coincidir justo con el primer punto observado.


En *h* se halla en pequeño tornillo el que una vez destornillado permite separar ó abrir el instrumento dentro del cual se halla una llave C con la que puede hacerse cualquier pequeña corrección que necesitase el espejo *m. n.* por medio del tornillo *g.* cuya cabeza sale en *f.*

Pantómetro—Este instrumento muy útil para el agrimensor por la exactitud que puede presentar, y la facilidad de transporte se compone de dos cilindros A. D. y E. F. de 4 á 6 pulgadas de diámetro y colocados uno bajo el otro.




El inferior F. F. tiene unido una base K que se coloca sobre el pié con un tornillo «l» para asegurarlo. Este mismo tiene á su parte superior un limbo de platina graduado.

El cilindro superior tiene una brújula en el plan superior y en el borde inferior dos nonios; por medio del tornillo de coincidencia m. se le comunica un movimiento de rotación.

Lleva á más un anteojo, un nivel y sobre un costado un semicírculo graduado para medir ángulos verticales.

Teodolito — Se compone de un círculo horizontal y otro vertical, para poder á la vez medir en uno y otro sentido.

El círculo horizontal está sobre una plancha á la que se imprime un movimiento veloz ó lento, aflojando para el primer caso un tornillo que sujeta su pie, y dando rotación, para el segundo un tornillo sin fin. Iguales movimientos tiene el semicírculo ó círculo vertical por medio de la mano y tornillo de coincidencia, y una segunda plancha horizontal, sobre puesta á la primera del limbo; la cual lleva dos nonios en dos espacios vacios, extremos del diámetro.

De esta manera se tienen ángulos horizontales muy precisos tomando el término medio de los minutos y segundos que dan estos nonios.

Sobre esta plancha segunda hay uno ó dos niveles de aire para poner el limbo horizontal; lo que se consigue moviendo de dos en dos y opuestamente cuatro tornillos que hay entre dos planchas sujetas al pie; los hay también con tres tornillos, en este caso la primer nivelación de la plancha se hace poniendo el nivel paralelo con dos tornillos y luego haciéndole describir un ángulo de 90° se nivela con el tercer tornillo.

El círculo vertical tiene graduada una de sus caras, con sus nonios correspondientes; y en algunos teodolitos la otra lleva marcadas las diferencias entre las hipotenusas y bases de los triángulos rectángulos, ó lo que debe rebajarse de cada distancia inclinada para deducir la respectiva horizontal. Sobre este semicírculo y su diámetro está el anteojo, que lleva sujeto un nivel de aire, para usar con ventaja el teodolito en nivelación. Suele llevar también el instrumento bajo el limbo horizontal, otro anteojo de prueba, que sirve para rectificar la posición del anterior, observando su coincidencia con un objeto lejano.

Antes de funcionar con el teodolito se verificarán las correcciones ó rectificaciones siguientes:

### RECTIFICACIÓN DEL TEODOLITO

1.° *Horizontalidad del círculo azimutal*—Para ello: fijo el círculo ó plancha inferior horizontalmente, y puesto el anteojo en dirección de dos de los cuatro tornillos verticales entre las planchas paralelas del pie, se hace que la ampolla del nivel permanezca en el centro, girando después el limbo superior de 180°, si en esta posición el nivel superior permanece horizontal lo estará también el plano del limbo; de no ser así se corregirá el error, mitad por los tornillos verticales y la otra por el de coincidencia.

2.° *Horizontalidad del eje de rotación del anteojo*—La nivelación del eje se efectúa por medio de un nivel móvi que se coloca alternativamente sobre los muñones en sus dos posiciones opuestas.

Antes de ocuparse de la horizontalidad del eje de rotación hay que nivelar perfectamente el círculo azimutal.

3.° *Error de colimación*—Se dirije una visual por el punto de intersección de los hilos del retículo, hacia un punto bien determinado y situado lo más lejos posible; se lee con todo cuidado la graduación correspondiente del limbo azimutal y se la hace girar de 180° dirigiendo enseguida una nueva visual al mismo punto. Entonces si al mover el anteojo en sentido vertical, el punto de intersección de los hilos del retículo no cubre al punto antes elegido, es que hay un error de colimación, el cual es precisamente igual á la mitad de la distancia horizontal que separa el punto observado de la intersección de los hilos; por consiguiente para anular el error de colimación se debe mover el retículo por medio de los tornillos que lo fijan al tubo del ocular, de una cantidad igual á la mitad de la distancia horizontal antedicha.

4.° *Hilos del retículo*—Para verificar si un hilo está bien vertical, se nivela bien el instrumento y se dirige una visual á un punto muy pequeño de modo que el hilo del retículo lo cubra completamente, después ajustando bien el limbo azimutal se hace girar el anteojo al rededor de su eje de rotación, si el hilo cubre siempre al punto, quiere decir que está vertical, en caso contrario se mueve el marco del retículo hasta que la coincidencia sea perfecta. Como los dos hilos son perpendiculares entre sí, basta verificar la verticalidad de uno para obtener la horizontalidad del otro.

5.º *Coincidencia del nonio vertical;* ó notar si hechas las anteriores correcciones, permanece la línea de fe de este nonio en cero grados. Si no fuera así, se tendrá en cuenta el error.

6.º *Paralelaje del anteojo*—Para observar con el anteojo del teodolito, la imagen debe permanecer fija y neta entre los hilos del retículo. Para conseguirlo hay que mover el ocular, hasta que los hilos se vean con nitidez y el objetivo hasta ver el punto lejano observado. Si al hacer un pequeño movimiento con el ojo á derecha é izquierda ó de arriba abajo, la figura vista oscila entre los hilos, hay que volver á mover el ocular y el objetivo por mitad hasta conseguir la estabilidad deseada.

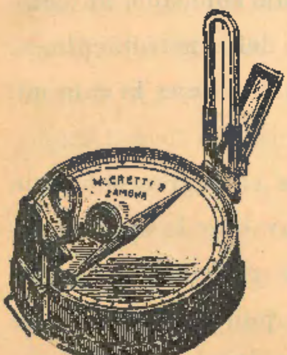
Para usar el teodolito, hechas todas las anteriores correcciones, y puesto uno de los nonios ó su línea de fe en 0°, se dirije una visual al objeto A; se fija el limbo inferior, y haciendo girar el superior en el sentido de su graduación se dirije otra visual al punto B, tomando nota del número de grados, minutos y segundos que indique el limbo y su nonio.

Para mayor exactitud en la medida de los ángulos, conviene repetir estos, esto es, sin soltar los tornillos del limbo, se vuelve la visual al punto A y se principia de nuevo la operación, con lo que se obtiene en la lectura un ángulo duplo de la primera lectura; repitiendo así dos ó más veces la misma operación se tiene finalmente un diano magnético y haciéndolo girar dirigiendo una visual á cualquier punto, restará solo leer el ángulo que indique nuevamente la punta azulada de la aguja.

El fácil manejo de este instrumento y la prontitud con que por su intermedio pueden hacerse relevamientos de muchos puntos, le hacen recomendable especialmente para reconocimientos en que no se requiere una rigurosa exactitud.

**Compás Prismático.**—Es una brújula de mayor exactitud que la común, debido á algunas mejoras introducidas en su construcción.—Su más importante mejora consiste en una *prisma* menisco que lleva en una de las pínulas y sirve para ver aumentada la graduaciòn al propio tiempo que para dirigir la visual.

Para hacer uso de este instrumento se coloca sobre su pié bien horizontal y, mirando por el ocular inmediato al prisma se dirije la visual al punto de observación, pudiéndose leer al mismo tiempo el ángulo cuya graduación aparece en el prisma coincidiendo con el hilo de la alidada y el objeto observado.



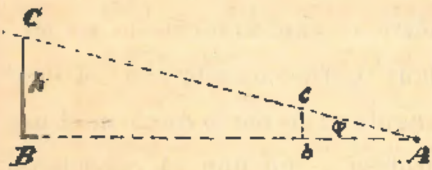
Hay también en la pínula opuesta al prisma, un espejo de vidrio negro que puede tomar diferentes inclinaciones, con objeto de tomar un azimut del sol ó dirigir una visual á un objeto muy elevado.—En cualquier caso se gradúa la inclinación del espejo hasta que la imágen aparezca en la horizontal, viéndose por el prisma.

Es un precioso instrumento, fácil de transporte, susceptible de dar un trabajo bastante exacto por la compensación de sus errores y recomendable en todos los reconocimientos.

## Medida sin Cadena

### LA ESTADÍA — ANTEOJO MICROMÉTRICO

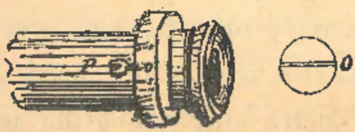
Varios son los anteojos adecuados para la medida de distancias, basados todos en la medición del pequeño ángulo formado en el ocular del anteojo por las dos visuales tiradas á los dos estremos de un objeto de dimensión conocida. Siendo CB = h una cantidad conocida y medido en ángulo a se tiene



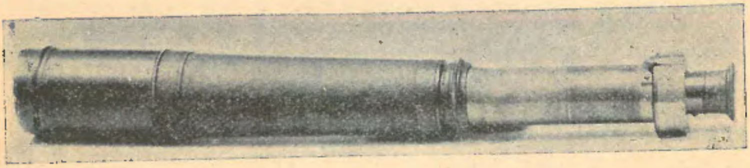

$$1 : \text{tang. } a :: x : h \qquad x = \frac{1}{\text{tang. } a} h$$

siendo $\frac{1}{\text{tang. } a}$ un coeficiente variable. Este principio es aplicable á los anteojos que tienen un micrómetro para medir el ángulo diastimométrico CAB = a y para el uso de los cuales se emplea una mira, con una distancia ó altura CB siempre constante.

Hay Estadías que solo tienen un tambor MN en el cual están grabadas ya las distancias.




Colocándolo de modo que su *cero* corresponda al índice P. los dos hilos ó cerdas colocadas interiormente se tocan, pero conforme se hace girar el tambor los hilos se apartan hasta que el observador los haga coincidir con cada uno de los estremos de la mira. En este estado solo resta leer la distancia que señala el índice sobre el tambor.

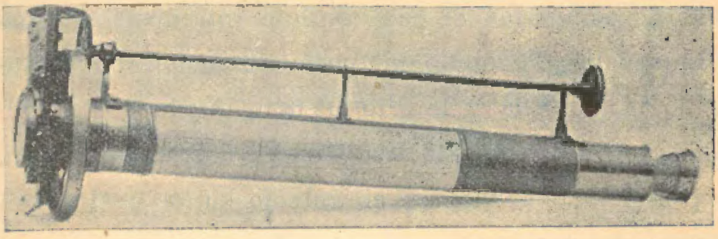


Como se comprende, el grabado de las distancias sobre el tambor responde á la adopción de una altura $BC = h$, ya fijada de antemano y que también va indicada sobre el tambor.

Otros anteojos micrométricos van munidos de un mecanismo micrométrico muy perfeccionado con el cual se mide en cada caso el ángulo $a$; de modo que con el uso de tablas calculadas exprofeso y que dán el coeficiente $\frac{1}{\text{tang. } a}$ la operación se reduce: á medir el angulo $a$ formado por los estremos de la mira de altura $h$ ya conocida, leer en el tambor el valor de dicho ángulo $a$; buscar el coeficiente correspondiente á $\frac{1}{\text{tang. } a}$ y con él multiplicar la altura de mira, $D = \frac{1}{\text{tang. } a}\, h$.

**El Micrómetro Lugeol**—Es recomendable por su exactitud y sencillez.—Consiste en un anteojo de larga vista, cuyo objetivo está dividido en dos partes iguales que pueden moverse una contra otra por medio de

una cremallera. Cuando los dos discos ó semi-objetivos están en perfecta coincidencia, se vé una sola imágen y el nonio indica *cero*.



Para obtener una distancia, y por lo tanto medir el ángulo micrométrico—se dirije el anteojo, con el nonio en cero, sobre la mira ú otro objeto de altura conocida y por medio de la cremallera se hace mover uno de los discos hasta hacer coincidir la parte superior de la mira con la inferior.

Se lee el ángulo en el gran círculo graduado que rodea el objetivo, y tomando en la tabla (adjunta al final) el coeficiente correspondiente al ángulo leído, se multiplica por él la altura de la mira ú otro objeto observado de altura conocida.

**Aplicación al Teodolito**—Pueden aplicarse al teodolito común dos hilos horizontales que á la distancia de n metros coincidan con los extremos de una mira de h metros. Supongamos á $200^m$ los hilos coincidirán con los extremos de una mira de $2^m$ entonces si á una distancia x los mismos hilos abarcan sobre la mira una altura $h = 0^m80$ puede obtenerse la distancia L del instrumento á la mira.

$$200 : 2 : L : 0^m80; \; L = \frac{200 \times 0.80}{2} = 800^m$$

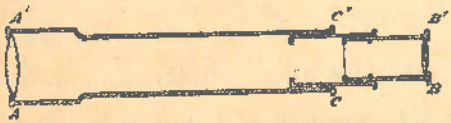
Antes de operar conviene rectificar la distancia exacta á la cual los hilos abrazan la altura h de la mira.

De todas maneras este proceder no conviene más que para apreciar pequeñas distancias—(200 á 400).

**Taquímetro ó Taqueómetro** — Es en su principio un Teodolito común en el cual se han introducido ciertas modificaciones de detalle que permiten poder obtener: el ángulo, la distancia y la diferencia de nivel ó altitud, sin emplear otro instrumento auxiliar que una *mira* ó *estadía*. Su principal elemento es el anteojo en el cual por el agregado de una lente, se ha obtenido mantener constante el ángulo diastimométrico formado por los hilos del retículo y mediante lo cual puede apreciarse muy exactamente una distancia.

El uso y detalles de este instrumento se halla expuesto en el capítulo titulado «La Taquimetría».

**Anteojos** — El anteojo astronómico, el más sencillo, se compone de tres partes principales adoptadas á otros tantos tubos que penetran uno dentro del otro—el primer tubo lleva en su estremidad un lente convergente AA' que por ser la que se dirige hacia el objeto observado se llama «El objetivo».




El tercer tubo lleva en su estremidad otro lente convergente BB', que se llama «El ocular» por ser inmediato á él que se aplica el ojo para ver.

El tubo intermediario lleva un pequeño disco ó corona sobre el cual se han aplicado dos hilos muy finos, figurando dos diametros perpendiculares entre si.

Esta pieza se llama «El retículo» y su posición puede hacerse variar por medio de los tornillos CC'.

Por el punto de intersección de los dos hilos debe pasar el eje óbtico ó línea de colimación del anteojo, que naturalmente debe coincidir con el punto céntrico de los dos lentes, ocular y objetivo.

Siendo el *retículo* una de las piezas de más importancia del anteojo del teodolito, puede decirse; *la indispensable para operar con él;* se han adoptado varias disposiciones para la colocación de los hilos (hilos muy finos de araña) según el objeto á que se destina.


La disposición N.º 1 y la N.º 2 se usa en muchos teodolitos aunque es la de menos precisión, el centro puede no estar bien determinado.

La N.º 3 es la más general en los teodolitos de mayor precisión y es la más usual.

La N.º 4 es la de mayor comodidad para el trabajo en el campo, pues que hallándose muy próximos los dos hilos verticales la bandera deberá verse entre los dos.

La N.º 5 parece ser la más conveniente y cómoda para las observaciones de sol, para el cálculo del azimunt ó alturas correspondientes porque para el angulo horizontal se observa que los dos hilos verticales cortan iguales discos del sol.

Los retículos de hilos se sustituyen ventajosamente por otros de vidrio muy delgado sobre los cuales se han trazado las líneas que representan los hilos, tienen la ventaja de ser inalterables mientras que los hilos suelen cortarse por un cambio brusco de temperatura; pero presentan también el inconveniente de ensuciarse con el polvo y aún enturbiarse por algún vapor en momentos de mucho calor.

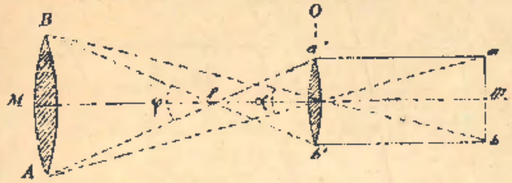
El retículo 4, bien establecido solo puede representarse sobre el vidrio.

Para poner á la vista el anteojo, se principia por hacer adelantar el tubo intermediario hasta ver con nitidez el objeto que se debe observar, luego se hace adelantar el tubo del ocular hasta percibir con toda claridad los hilos del retículo, operación que una vez hecha exigirá seguramente rectificar el tiro del tubo intermediario para poder ver con igual nitidez el objeto observado y el retículo.

Para asegurarse de que los hilos estan bien en el medio ó centro del anteojo, se fija un punto y luego invirtiendo el anteojo (esto es haciéndolo describir un ángulo de 180° sin sacarlo de los anillos en los cuales descansa) se vuelve á fijar el mismo punto; si el cruzamiento de los hilos del retículo no coincide con el punto observado en la primer posición del anteojo, hay que corregir en esa postura, solo la mitad de la diferencia haciendo adelantar uno de los tornillos C y retirando el opuesto C'—Esta operación se repetirá varias veces, hasta conseguir el fin deseado.

De la misma manera se verificará la posición del hilo vertical.

## TEORÍA DEL ANTEOJO




a' b' = el objetivo,
a b = retículo, sea los dos hilos paralelos
A B = porción de una mira interceptada por los hilos

| | | |
|---|---|---|
| F = distancia focal anterior O F | a = a b | F punto analítico |
| d = „ „ om | A = A B | ang. A F B = ángulo diastimométrico |
| D = „ O M | ang. A O B = aob = r | |

de los triángulos semejantes A O B y a 0 b a : d : : A : D

$$\frac{a}{d} = \frac{A}{D} = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r \qquad d = \frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r}{a}$$

de las leyes de óptica se tiene:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d} \qquad d = \frac{D F}{D - F}$$

$$2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r = \frac{a (D - F)}{D F}$$

lo que indica que la porción de mira comprendida por los hilos del retículo varía en función de D.

Si se adopta el centro F en vez del O se tiene con el triángulo A F B:

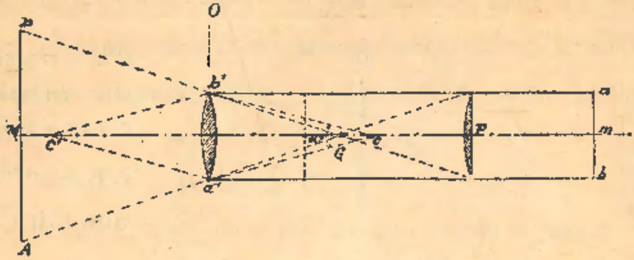
$$\frac{A}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} r \times F M = \text{tang. } \frac{1}{2} r (D F), \quad 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r = \frac{A}{(D - F)}$$

pero $A = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r D$ y $\text{tang. } \frac{1}{2} r = \frac{a (D - F)}{2 D F}$ luego

$$2 \text{ tang. } \frac{1}{2} r = \frac{A}{(D - F)} \frac{D a (D - F)}{D F (D - F)} = \frac{a}{F}$$

cantidad constante con cualquier distancia D.

Colocando una lente plano convexa P cuyo foco G esté situado entre el centro c del anteojo y el objetivo, $c = \frac{F}{2}$




de manera que los rayos A C y B C concurran por reflexión al centro G, los puntos C' y G serán los focos conjugados del objetivo O y anotando que

$a = a\,b$ distancia de los hilos, $e = O\,P =$ distancia entre lentes O y P.

$p = O\,C =$ distancia del objetivo al centro del anteojo

$F = P\,G$ distancia focal de la lente P y $A\,C\,B = m$

se tiene por la ecuación fundamnetal de óptica

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{O\,G} - \frac{1}{O\,C} = \frac{1}{e - f} - \frac{1}{p}$$

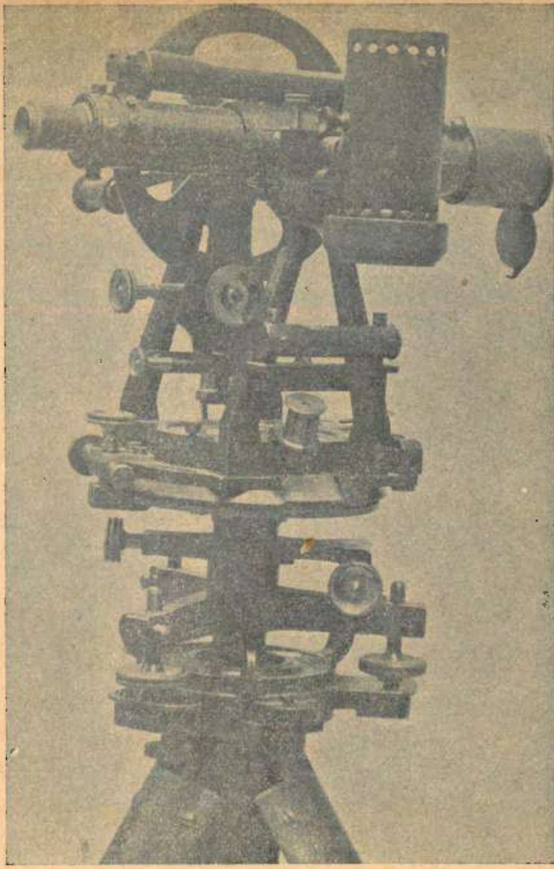
$$f = e - \frac{Fp}{F + p}; \text{ y } 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\,m = \frac{(e - f)\,a}{f\,p}$$

De estas expresiones se deduce que por la interposición de la lente P, el ángulo diastimométrico m y el punto analítico G sean constantes.

También se deducen las dos siguientes ecuaciones:

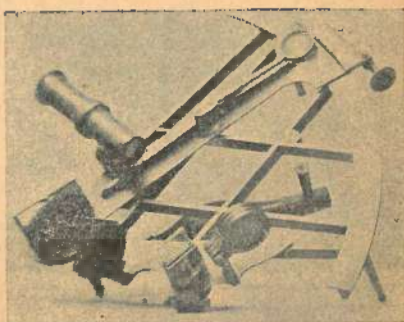
$$p = \frac{F\,(e - f)}{F - (e - f)} \qquad \text{y } 2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\,m = \frac{a\left[F - (e - f)\right]}{Ff}$$

que demuestran que modificando la distancia $e = O\,P$ varía el ángulo m y el punto G; el valor de p aumenta con e mientras que disminuye el ángulo m.



TEODOLITO DE TRÁNSITO CON SU LINTERNA

SEXTANTE DE BOLSILLO



SEXTANTE DE MARINA

Estos principios se utilizan para el arreglo del anteojo y para medir distancias, así se construyen los anteojos de manera que para una distancia $CM = 2$ metros, los hilos $ab$ comprendan sobre la mira $AB = 0^m 01$, de ahí si $CM = 100^m$, será $AB = 0.50$.

Si se hace $2 \text{ tang. } \frac{1}{2} m = 0.02 = AB$, será $CM = 1^m$ y para $CM = 100^m$, $AB = 2,^m 00$.

Así, pues, si para cualquier anteojo con retículo se conoce la espresión $2 \text{ tang. } \frac{1}{2} m$, será fácil con el auxilio de una mira apreciar distancias horizontales con una precisión que puede llegar á $\frac{1}{500}$ ó $\frac{1}{600}$ de la distancia máxima de $600^m$; á mayor distancia hasta $1500^m$ el error máximum podrá alcanzar á $\frac{1}{150}$ metros.

Se construyen también otros anteojos destinados á apreciar distancias. En estos, dos son las partes principales: *el objetivo* y *el tornillo micrométrico.*—La lente se halla dividida en dos discos; de los cuales el uno está fijo y el segundo se mueve por medio de un tornillo micrométrico.

Cuando los dos discos ocupan su posiciòn original, se vé una sola figura del objeto observado; haciéndolos mover se vén dos imágenes; de manera que puede hacerse coincidir la imágen de dos objetos y, como uno de los discos ha sido movido por el tornillo, se conoce el ángulo formado ò distancia recorrida por el disco. El tornillo micrométrico tiene un paso muy fino, sea $\frac{1}{10}$ de milímetro, por ejemplo; su cabeza se encuentra dividida en un número de partes, sean 60,—y pasando frente á un índice, puede conocerse el número de divisiones pasadas.

Si, como se ha dicho, el paso del tornillo es de $\frac{1}{10}$ de milímetros, que la cabeza tenga 60 divisiones, y que se anote que el tornillo ha dado 8 vueltas y $\frac{21}{60}$ de otra, la distancia a b recorrida por el disco será:

$$0{,}1 \times 8\,\frac{21}{60} = 0{,}1 \times 8{,}35 = 0{,}835$$

De lo que precede fácil es deducir los dos principios fundamentales de los anteojos destinados á medir ó apreciar distancias con más ó menos exactitud.

Los unos mantienen fija la distancia de los hilos del retículo obligando por lo tanto la lectura sobre una mira, lo que forzosamente limitará la distancia á determinarse cuanto más á 600 metros.

Los otros permiten alterar el espacio de los hilos, no necesitando el empleo de una mira y si solo el de una base fija, de manera que: siendo más fácil hacer coincidir los hilos con las aristas de la base, que hacer una lectura podrán apreciarse distancias mucho mayores según la magnitud de la base empleada.

En la primera clase de estos instrumentos el ángulo diastomométrico es fijo y determinado una vez por todas, mientras que en la segunda este es variable y medido por un tornillo micrométrico en los instrumentos de precisión ó determinado experimentalmente como sucede en las estadías militares.

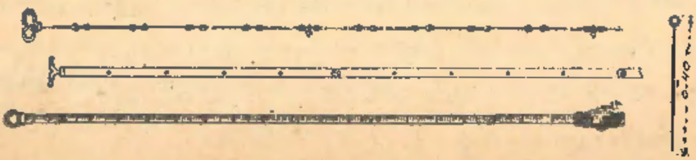
Los Taqueómetros, los Cleps y demás intrumentos de esta categoría llevan un anteojo de la primera clase, esto es con un retículo de hilos fijos y para mayor abundancia de recursos y de verificación estos llevan 2 ó 3 hilos equidistantes del hilo central y simétricamente colocados. Este recurso permite: ó hacer 3 lecturas para comprobación de una misma distancia ó emplear los más apartados para las distancias mayores. Estos anteojos tienen pues 2 ó 3 ángulos diastimométricos, fijos y conocidos.

Por construcción, los anteojos de hilos ó discos movibles tienen que ser de mayores dimensiones que los anteriores, por esto no se les ha dado la perfección en su adaptación á los instrumentos de geodosía, sin embargo su uso en nuestras llanuras es de una aplicación útil y ventajosa siendo así preferibles estos á los anteriores.

Existen a mas varios telémetros de aplicación práctica, para apreciar distancias, pero sin aplicación á operaciones geodésicas

## Instrumentos de Medir

**Cadena y cinta**—Para medir se emplean particularmente: la cadena de eslabones, la cinta de acero y la cinta de género ó ruleta;—todas son de 20, 25 ó 50 metros, llevando señales especiales para indicar los metros y sus fracciones de 20 centímetros, ó menos.



Para emplear la cinta ó la cadena se hace uso de fichas (por lo general son 10) que se clavan en tierra, una vez bien estirada la cadena y en la pequeña muesca que presenta la manija de la cadena en su lado exterior.

Para trazar la línea que debe medirse, se emplean *Jalones*, de ($1^m$ 50 á 2.50) ó cañas bien derechas y largas (de 3 á 4 metros) y botadores (cañas tacuaras, álamos) bien derechos de 5 á $6^m$ de largo y de 6 á 10 centímentros de diámetro.

Los jalones que se emplean para distancias cortas, son generalmente de pino, de forma octogonal, pintados y con púa de fierro.

Las cañas bien derechas (se preparan expresamente humedeciéndolas y acercándolas al fuego para enderezarlas) se emplean para colocarlas á grandes distancias y los botadores para situarlos en ciertos puntos fijos que deben verse de muy lejos (hasta los 15 kilómetros).

Estos instrumentos son demasiado simples y conocidos para entrar en mayores detalles.

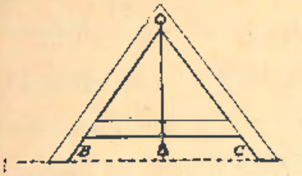
Se considera que el empleo de la cinta de acero en terreno parejo da una precisión muy superior al de la cadena de eslabones—hoy poco se emplea esta, y que puede alcanzarse un resultado de $0^m.10$ por kilómetro.

El error de alargamiento por dilatación, puede ser apreciado por la siguiente fórmula en que $t_0$ indica la temperatura cuando se verificó el largo de la cinta y t la temperatura al momento del nuevo experimento:

Alargamiento $A = L\ (t - t_0)\ 0.0000123.$

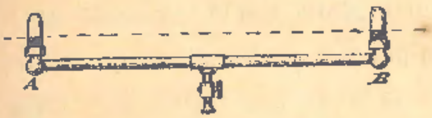
## Niveles

**Nivel de albañil**—*O á plomada*—formado de un triángulo equilateral de madera con una plomada cuyo hilo debe coincidir con el medio de la línea BC.




Se emplea solo en trabajos de pequeña extensión.

El nivel de agua compuesto de un tuvo de latón, que lleva en sus dos estremidades AB un pequeño tubo de vidrio.




Llenado de agua (preferible es que sea con algún color), ésta sube en los dos tubos de vidrios estableciendo el plan horizontal;—de manera que, haciendo pasar una visual por las dos superficies del agua en los tubos A y B, puede leerse sobre una mira la cifra que se halla en su prolongación.

Como las mayores visuales no pueden pasar de 30 á 40 metros, el uso de ese nivel es limitado á los pequeños trabajos de replanteo de construcciones, cañales, calzadas, etc, etc.

**Nivel de aire**—Compuesto de un tubo de vidrio ligeramente encorvado y contenido á su vez en otro de co-

bre ó latón que se halla unido á una planchuela metálica perfectamente plana y paralela al eje del tubo.

Llenado el tubo de vidrio con un líquido cualquiera (en unos se emplea el alcohol dejando un poco de aire, en otros se emplea simplemente agua, introduciendo una gota de aceite)—se forma una «ampolla» que viene á ocupar el centro del tubo sobre el cual se han trazado previamente varias líneas equidistantes y mediante las cuales se pueden apreciar las correcciones del instrumento ó modificaciones de la inclinación del plano que se desea nivelar.

Para verificar la exactitud del instrumento, se le coloca sobre una regla ó mesa bien plana y si la burbuja ó ampolla no viene á ocupar la parte más elevada de la curvatura del tubo, se levanta la regla por medio de cuñas hasta conseguir el objeto deseado con la burbuja; obtenido ese resultado se dá una media vuelta al nivel, esto es le coloca sobre la regla de manera que la punta que antes estaba á la derecha esté ahora á la izquierda.

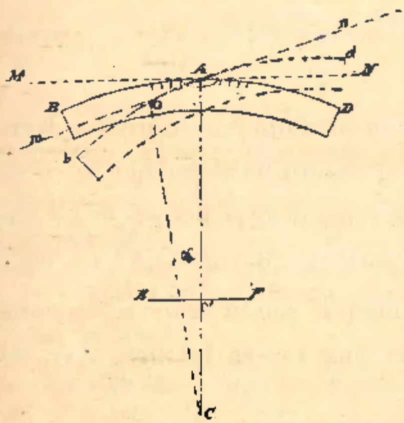
Si el nivel esta bien, esto es, si la planchuela está completamente paralela al eje del nivel, la burbuja volverá á ocupar el sitio medio que ocupaba en la posición anterior y en caso que asi no fuera, se levantará uno de los apoyos del nivel hasta corregir la mitad de la diferencia salvándose la otramitad por medio de las cañasde la regla.

Se vuelve luego á la primer posición que ocupaba el nivel y si su estado no es satisfactorio se corrige otra vez la otra mitad de la diferencia.

Procediendo de la misma manera hasta obtener por resultado de que en cualquier posición del nivel la burbuja quede siempre inmovil.

Hay algunos niveles de aplicación especial para la geodesia, que tienen en uno de los apoyos, un tornillo para efectuar las correcciones.

### Sensibilidad de los niveles




En la posición del nivel BD EF está comprobado el paralelismo de la tangente MN con FF y la vertical AC pasa por el punto céntrico del arco BD del tubo del nivel donde se halla la burbuja en el punto cero de la graduación.

En la posición bd, EF, la tangente m n hace con la horizontal un ángulo a igual al ángulo O C A ; pero el arco OA por su pequeñez se confunde con su tangente y el triángulo O C A en el cua AC = radio de curvatura del arco BD del tubo = r, se tiene

$$OA = n = r \text{ tang. } a$$

y espresándolo en segundos

$$n = r\, a \text{ sen } 1''$$

El recorrido de la burbuja para cualquier valor de a depende pues del radio r.

Asi si se quiere que el recorrido de la burbuja sobre el tubo marque 3 milímetros por una inclinación de un 1" entre la horizontal y la tangente, se debe tener.

$$r = \frac{n}{a \sin 1''} = \frac{3}{1 \sin 1''} = 619^{m}$$

*Para conocer el valor* de las divisiones del nivel grabadas sobre su tubo—basta colocar el instrumento nivelado y listo para operar, á una distancia D medida exactamente de una mira colocada verticalmente—basta con 10 metros.

Luego se hace coincidir la burbuja con la última división del tubo, mediante con el tornillo de aproximación y en esta postura se leé sobre la mira la división que coincide con el hilo horizontal del retículo; después se hace desplazar la burbuja hasta coincidir con la graduación más cercana del centro y se hace una nueva lectura. Asi se tiene.

D = distancia horizontal en metros

d = diferencia de las dos lecturas sobre la mira

n = número de divisiones recorridas por la burbuja

a = ángulo formado por las dos visuales

$$\text{de } 1 : \text{tang.} :: D : d, \quad \text{tang } a = \frac{d}{D}.$$

ó en segundos

$$a = \frac{d}{D \sin 1''}$$

Ejemplo: Con un nivel Egualt, $n = 10 \quad D = 10$

| | |
|---|---|
| 1ª lectura.................... | 0.4627 |
| 2ª » .................... | 0.4457 |
| diferencia d = | 0.0170 |

$$\log.\ 0.0170 = 8.2304$$

$$\log.\ 10 \sin 1'' \text{ (constante)} = 5.6856$$

$$2.5448$$

$$\text{corresponde} = 350''.8$$

$$\frac{a}{a} = 350''.10$$

El grado de precisión de un instrumento de nivelación depende asi, del poder de su anteojo y del radio de curvatura del tubo del nivel de aire.

Basta que el anteojo aumente de 20 á 30 veces pues por ser las visuales, verdaderas rasantes á la superficie terrestre y por lo tanto sujetas á las variaciones atmosféricas más pronunciadas por los vapores de la tierra—las lecturas no convienen hacerse á distancias mayores de 150 metros.

En cuanto á la sensibilidad del nivel, todas las cuestiones relativas á la sensibilidad del tubo del nivel quedan resueltas por las mencionadas ecuaciones

$$x = \frac{n}{r \sin 1''} \text{ ó } a = \frac{d}{D \sin 1''}$$

y la igualdad $\frac{r}{n} = \frac{D}{d}$

Asi en un nivel cuyo radio de curvatura es $50^m$ y que el desplazamiento de la burbuja de un milimetro,

sea $n = 1$ milímetro $= 0.001$ se tendrá

$$a = \frac{0.001}{50 \sin 1''} = 4''.125$$

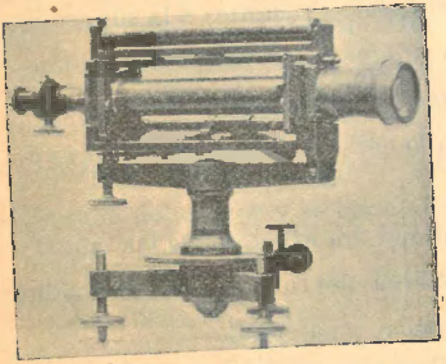
esto indica que á un desplazamiento de 1 milímetro de la burbuja corresponde un ángulo de 4" (segundos) y luego, para conocer lo que este ángulo abarca sobre la mira colocada á la distancia D, supóngase $75^{ml}$

se tendría $d = 4''.125 \text{ D } \sin 1'' = 0.0015^{m}$

esto es: una falta de aproximación de un milímetro en la posición de la burbuja ocasionará en estas condiciones un error de lectura de 1 milímetro y medio.

Tales son las bases para apreciar la sensibilidad de un nivel.

**Nivel de «Egault»**—Este instrumento que es el más usual, se compone, como lo indica la figura, de un anteojo colocado en dos anillos que lleva en sus estremidades la regla ó planchuela del nivel.



Esa planchuela con su anteojo y su nivel se hallan colocados sobre el extremo de una pequeña columna que á su vez se halla asegurada en una posición vertical sobre un disco munido de 3 tornillos.

Colocado el instrumento sobre su trípode y puesto de nivel (esto es perfectamente horizontal) por medio de los 3 tornillos; el eje del anteojo, la planchuela del nivel y el disco de base deben estar todos en planos paralelos y perpendiculares á la columna que los reune.

Colocando el instrumento como queda dicho, se empieza por hacer llegar la ampolla del nivel á su centro, haciéndole ocupar una posición paralela á dos de los tornillos de base y haciendo girar simultáneamente los dos hasta conseguir el objeto; luego se hace describir á la parte superior un cuarto de círculo á fin de que el eje del anteojo ocupe una posición perpendicular á la anterior, esto es, en dirección al tercer tornillo de la base y con él se hará nuevamente llegar al centro la ampolla.

*Paralelismo del eje del anteojo con el plano del nivel.*— Se dirije una visual á un punto fijo colocado á una distancia conveniente, luego haciendo describir al instrumento en ángulo de 180° se dá vuelta al anteojo para dirigir nuevamente una visual al mismo punto; si ésta no coincide exactamente con el punto fijado hay que alzar los anillos que sostienen el anteojo, tocando los tornillos que se encuentran en la parte inferior de la planchuela —(se corrige siempre la mitad de la diferencia, para la otra hay que hacer girar el instrumento de 180°.

*Paralelismo del eje óptico con el plano del nivel.*—Para esto se fija un punto, se invierte luego el anteojo, (haciendo describir un ángulo de 180°, sin retirarlo de sus anillos), y si la visual no vuelve á coincidir con el punto fijado, se corrige la mitad de la diferencia, por medio de los tornillos que sujetan los hilos del ocular. Se repite en seguida la misma operación hasta llegar al objeto buscado.

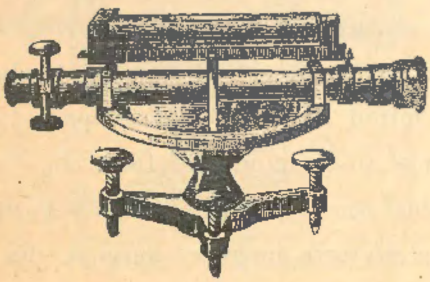
La misma operación se efectúa para asegurarse de que el hilo vertical está en el mismo eje del anteojo.

Con estas dos verificaciones el instrumento está en condiciones de dar resultados exactos—de manera que estando en campaña hay que hacer esa verificación muy á menudo, si no es diariamente antes de empezar el trabajo.

Es para salvar cualquier error de paralelismo entre el eje óbtico y el nivel que es prudente y hasta necesario tomar siempre dos lecturas, una con cualquier posición de anteojo y la segunda invirtiéndole; la lectura verdadera será el término medio de las dos observadas.

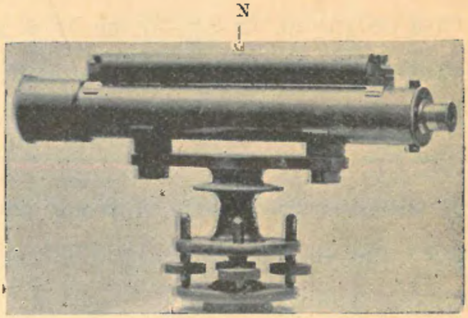
**Nivel de Bourdaloue.**—Se funda este instrumento en el mismo principio que el anterior y no difiere de él más que por sus disposiciones.

El disco ó plano del nivel se coloca horizontal por medio de sus 3 tornillos, el anteojo se encuentra colocado en los anillos que exteriormente forman un cuadrado mediante los cuales descansa el anteojo directamente sobre el disco horizontal y el nivel se aplica sobre la parte exterior de los anillos.



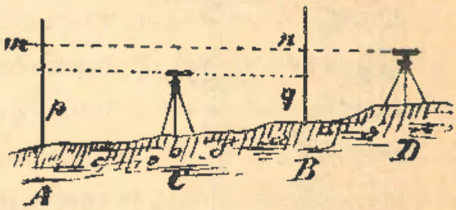
Las verificaciones del instrumento son las mismas y se efectúan de la misma manera que el de Egault.

**Nivel inglés ó de Throughton.**—Este nivel se compone de un anteojo que reposa sobre una plataforma A B á la cual está invariablemente asegurado formando así una sola pieza—de modo que el anteojo no puede girar sobre su eje ni cambiar de posición.




Un nivel N de burbuja, de gran dimensión, se encuentra colocado sobre el anteojo y sirve para horizontar la plataforma, lo que se consigue por medio de los tornillos que se hallan bajo la plataforma.—La construcción esmerada del instrumento asegura el paralelismo de la plataforma y generatriz del nivel;—resta solo al operador asegurarse del paralelismo del eje óbtico con el nivel.

Para asegurarse del paralelismo, ó sea corregir el instrumento — se coloca el nivel en un punto C equidistante (50 ó $100^{m}$) de dos miras verticales A y B. Una vez horizontada la plataforma se hacen las lecturas respectivas de p en A y q en B, la diferencia de nivel entre ambos puntos será, p-q.



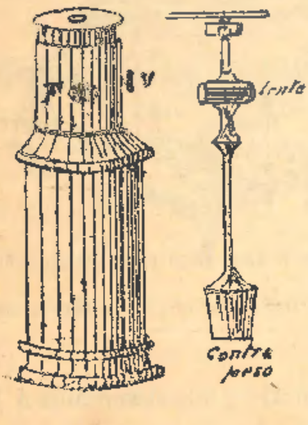

Se coloca en seguida el nivel en D—en la dirección A B —y no muy lejos de B, unos 30 metros;—luego se hacen las lecturas m en A y n en B y si resulta $m-n=p-q$ el instrumento está arreglado, esto es, el eje óbtico está paralelo á la plataforma.

Si no resultara así y que se tuviera $m-n > p-q$ se hace bajar el retículo por medio de sus pequeños tornillos, ó en caso de que $m-n < p-q$, se hace subir de una pequeña cantidad y se empieza nuevamente toda la operación hasta conseguir el resultado de la perfecta igualdad $m-n = p-q$.

Esta operación es de tanteo y paciencia—algo morosa, pero una vez bien arreglado el instrumento su estado se conserva mucho tiempo.

Este instrumento es cómodo para operar y ser transportado, pero sus resultados no pueden ser comparables á los obtenidos con el nivel Egault ú otro que permita hacer girar el anteojo sobre su eje y tomar dos lecturas.

**Nivel colimator (de Goulier).**—Este nivel, que permite una aproximación suficiente para reconocimientos y pequeñas operaciones, se compone de un cilindro metálico de unos 13 centímetros de altura. Colocado verticalmente sobre su pié y alzada la parte superior por medio del tornillo V quedan visibles dos ventanillas por las cuales se dirije la visual á la mira.




En este estado, un pequeño tubo (que lleva en uno de sus extremos un lente y en el otro un vidrio esmerilado con un trazo horizontal) y el todo suspendido verticalmente, viene á ocupar casi la mitad de la ventanilla F, de manera que el observador verá en un mismo instante coincidir la línea del lente con un punto donde dirige la visual y podrá así leer la cota sobre la mira, ó valiéndose de la mira con disco hacer correr este hasta la coincidencia.

Es un instrumento portátil que no necesita corrección alguna y muy interesante para expediciones y reconocimientos.

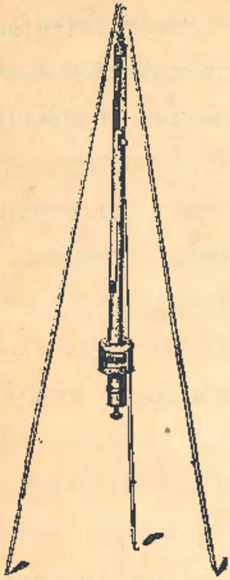
## Medición de Alturas con el Barómetro ó Nivelación Barométrica

### Barómetro

El barómetro es un instrumento muy á propósito para medir alturas ya vaya solo ó acompañado del termómetro. Para éste fin no habrá más que observar las diferentes alturas que dé el mercurio entre las estaciones inferior y superior. Este proceder se funda en que las capas ascendentes de aire disminuyen de densidad según los términos de una progresión geométrica, al paso de sus espesores ó las elevaciones representan una progresión aritmética: por manera que si conocemos la relación entre las densidades y elevaciones, fácilmente podremos hallar estas en vista de las densidades que el barómetro señala.

Existen especialmente dos categorías de barómetros, los á columnas de Mercurio y los Aneroides (metálicos).

El barómetro á columna de mercurio consiste en un tubo de vidrio cerrado en su extremidad superior, graduado en todo su largo (en centímetros) y llevando en su extremidad inferior un depósito de mercurio.



El barómetro de Fortín, es generalmente el más empleado para las operaciones en campaña. Se compone de un tubo de vidrio suspendido á un trípode y llevando á su otro extremo un cilindro con mercurio.

Su construcción se apoya en el principio del equilibrio de una columna de mercurio de $0^m.76$ con la presión atmosférica, esto es: que al nivel del mar una columna de un centímetro cuadrado de base con $0^m76$ haría equilibrio á una columna de agua de $10^m333$ de altura, cuyo peso es de 1 kilo y 33 gramos ($1^k033$) equivalente á la presión atmosférica.

Los Aneroides ó barómetros metálicos, están basados en las alteraciones ó deformaciones que sufra una caja metálica herméticamente cerrada, formando el vacío interior,


esta caja, elástica por su construcción, altera su forma según la presión atmosférica sea mas ó menos intensa, y estas alteraciones son indicadas por medio de una aguja sobre un círculo dividido. La división del círculo graduado empieza en el punto que indica la aguja cuando el barómetro ó columna de mercurio marca 0.76, y cada graduación sigue indicando los milímitros en más ó en menos, de acuerdo con las oscilaciones marcadas en el barómetro de mercurio.

La división de los barómetros es en centímetros y milítros.

Las observaciones barométricas pueden tener lugar de cuatro maneras.

1.ª Observaciones simultáneas próximas: es decir, cuando se opera con dos barómetros al mismo tiempo y á cortas distancias entre dos puntos diferentes. Sus resultados son exactos.

2.ª Observaciones simultáneas distantes: ó cuando las operaciones se hacen con dos barómetros á distancia considerable. Si esta es mucha, como si, por ejemplo, pasara de 6 leguas, se repetirán varias operaciones en un tiempo determinado (2, 4, 6 meses ó más), á fin de tomar el término medio que compense los errores.

3.ª Observaciones aisladas; ú operaciones con un solo barómetro, teniendo conocida ya la altura media barométrica al nivel del mar. Para que haya toda la exactitud apetecible se debe procurar hacer la observación superior á la temperatura media; á cuyo fin puede servir de base: que por cada $200^m$ de altura corresponde $1^o$ de decremento en el termómetro centigrado.

Así pues, si la altura calculada sin contar con la temperatura, fuese de 2000 metros, la temperatura en la base sería de $10^o$; correspondiendo, por consiguiente en la estación superior 5º de aumento á la mitad de la temperatura allí observada, para tener con esta suma la temperatura media que debería entrar en el cálculo.

4ª Observaciones sucesivas, ó cuando se opera con un solo barómetro, darán buenos resultados cuando el tiempo esté sereno y se tarde poco en llegar á la cumbre.

---

Las mejores observaciones son las que hacen en un día de calma, de las 10 a. m. á las 3 p. m.; si se trabaja con un solo instrumento, debe anotarse en la Estación inferior, la altura baromética y la temperatura. Si no se requiere mucha exactitud en la apreciación de una altura puede emplearse la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned} \text{Altura inferior} &= 0,^{m}763 \\ \text{d}^{o}\ \text{superior} &= 0,^{m}509 \\ \hline \text{diferencia} &= 0,^{m}254 = D \end{aligned}$$

$$\text{dif. alt. } x = D \times 13 = 254 \times 13 = 3302^{m}$$

Si la división es en líneas inglesas

$$\begin{aligned} \text{alt. inf.} &= 394 \text{ líneas} \\ \text{alt. sup.} &= 263 \\ \hline \text{dif.} &= 131\ D \end{aligned}$$

$$\text{dif. alt. } x = D \times 25,^{m}07$$

$$x = 131 \times 25,07 = 3284,^{m}17$$

El empleo del barómetro para la determinación de alturas se funda en la siguiente teoría.

Suponiendo la atmósfera divida en capas de una determinada espesor, la densidad de cada una de ellas disminuirá progresivamente según se aparten estas de la superficie del mar; designando con 1 la densidad del aire á la altura 0, con $\frac{1}{a} = d$ la densidad de la capa primera, con $\frac{1}{a^2} = d^2$ la de la segunda y así sucesivamente, se tendrán las dos progresiones siguientes:

| | |
|---|---|
| aritmética | 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. . . n |
| geométrica | 1. d. $d^2$ $d^3$ $d^4$ $d^5$ $d^6$ $d^7$ $d^8$ $d^9$ $d^n$ |

Los términos de la primera, son pues los logarimos especiales de la segunda, aquellos representan la altura y estos la densidad del aire; así pues si se hace H y H' dos alturas cualesquiera, en las cuales la densidad respectiva será $d^m$, $d^n$ ó simplemente $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ así que se tendrá

$$H = L\frac{1}{m}\ ;\ H' = L\frac{1}{n}$$

y $H - H' = L\frac{1}{m} - L\frac{1}{n}$ ó más bien $H - H = L\frac{n}{m}$

pero como la altura barométrica es proporcional á la presión atmosférica, llamando h y h' esa altura en cada una de las estaciones puede ponerse $\frac{h}{h'} = \frac{n}{m}$, luego

$$H - H' = L\frac{h}{h} = L\,h - L\,h' \quad (1)$$

Para reducir la expresión logaritmica de característica L á vulgares, se multiplicará por el módulo **M** cuyo valor se deducirá haciendo

$$-\frac{1}{M} L\,A = \log.\ A\ ,\ L\,A = M \log.\ A$$

espresión que puesta en la (1) dá

$$H - H' = M \log.\ (h' - h) = M \log.\ (h' - \log h)$$

Para $M = \frac{H - H'}{\log h' - \log h} = \frac{10797.408}{\log 34 ;-\log 347} = 864000$ líneas de París

pero como una toesa tiene 864 líneas la fórmula queda en

$$H - H' = 10000\ (\log h' - \log) \quad (A)$$

En esta misma fórmula, introduciendo las correcciones debidas á la diferencia de temperatura en las dos estaciones, reduciendo á metros su coeficiente y representando por T la temperatura y por H la altura barométrica en la estación inferior, así como t y h los iguales significados en la estación superior, se transforma en

$$H - H' = D = 18336 \left(1 + 2\,\frac{T+t}{1000}\right) \log \left[\frac{H}{h\left(1+\frac{T-t}{5412}\right)}\right] \qquad \text{(B)}$$

Puede aun simplificarse no tomando en cuenta la corrección por la dilatación del mercurio si la temperatura del ambiente no fuera muy elevada.

$$D = 10393 \left(1 + \frac{2T+t}{1000}\right) \log \frac{H}{h} \qquad \text{(c)}$$

Fórmula de Bobinet.—

$$D = 16000\,\frac{H'-h}{H'+h}\left(1+\frac{2T+t}{1000}\right)$$

$$y\ H' = H\left[\,(1 - 0.000161\,(T'-t)\,\right]$$

T y H= temperatura del ambiente y altura barométrica en la estación inferior.

t y h = iguales significados en la estación superior.

T' y t' = respectivas temperaturas dadas por el termómetro fijo al barómetro. —

H' = altura del mercurio á la misma temperatura t'.

Esta fórmula es exacta para alturas que varían de 1000 á 2080 metros.

= Fórmula del «Bureau des Longitudes» =

$$x = \left[18336 \log \frac{H}{h} - 1,2843\,(T'-t')\right]\left[1 + \frac{2T+t}{1000}\right]$$
$$\left[\left(1 + 0.0265 \cos 2L + \frac{x + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{s}{3188999}\right)\right]$$

H, T, T' = altura dada en milímetros por el barómetro, temperatura del ambiente y temperatura del termómetro fijo al barómetro en la estación inferior.

h, t, t' = igual significación en la estación superior

L = latitud. Al aplicar esta fórmula habrá que introducir una altura x calculada por otra fórmula para obtenerla aproximativamentente y, luego de efectuado todo el cálculo repetirlo introduciendo en ella ese nuevo valor de x.

Esta formula puede simplificarse, obteniéndose así mismo buenos resultados para las operaciones comunes de geografía, escursiones etc., etc.

$$x = 18393 \left[ 40{,}002\ (T - t) \right] \left( 1 + 0.002837 \cos 2L \right)$$

$$\left[ \log H - \log h - 0{,}00008\ (T' - t') \right]$$

Si se emplea un barómetro aneroide cuyos resultados merecen fé hasta alturas de 400 metros, puede emplearse la siguiente fórmula

$$x = \log \frac{H}{h}\ 18393 \left( 1 + 0.002\ (T + t) \right)$$

Para la aplicación de estas fórmulas se han calculado tablas muy útiles y que simplifican sumamente todas las operaciones = Tablas VII al final.

Para observaciones rápidas y de una aproximación suficiente á los usos de geografía con un error de 3 á 4 metros puede hacerse uso de la siguiente tabla de Mr. Livet.

| Altura de la columna del barómetro | TEMPERATURA EN GRADOS CENTÍGRADOS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10° | 12° | 14 | 16 | 18 | 20 |
| m/m 760 — | 10.8 | 10.9 | 11.0 | 11.1 | 11.2 | 11.3 |
| 750 — | 11.» | 11.1 | 11.2 | 11.2 | 11.3 | 11.4 |
| 740 — | 11.1 | 11.2 | 11.3 | 11.4 | 11.5 | 11.6 |
| 730 — | 11.3 | 11.4 | 11.5 | 11.5 | 11.6 | 11.7 |
| 720 — | 11.4 | 11.5 | 11.7 | 11.7 | 11.8 | 11.9 |
| 710 — | 11.6 | 11.7 | 11.8 | 11.8 | 11.9 | 11.» |
| 700 — | 11.8 | 11.9 | 11.9 | 12.1 | 12.1 | 12.2 |

Si en las observaciones se obtuvieran H ó h menores que las cifras de la tabla, como ser:

$$H = 702 \text{ y } h = 650$$

habría que multiplicar ambas por una cantidad mayor que la unidad como ser $1 + \frac{1}{12}$ lo que daría

$$H = 702 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 758 \qquad h = 650 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 704$$

Ambas comprendidas en la tabla.

Si fueran mayores que 760 se multiplicaría ambas alturas por una cantidad inferior de la unidad.

La siguiente fórmula barométrica puede fácilmente calcularse con los elementos de la tabla que figura en la colección de tablas, al final de este tomo y dar un resultado muy satisfactorio para los usos generales de topografía.

$$D = 18393^{m} \left[ \log h' - \log h - 0{,}00008\, P \right] \left[ 1 + 0.002\, (t + t') \right]$$

en la que D = diferencia de nivel entre las estaciones A y B h' = altura barométrica en la estación A y t' la temperatura indicada por el termómetro libre siendo n' la del termómetro anexo.

h, t y n las respectivas anotaciones de la estación B

Resultará:

$$\text{en A} \ldots\ldots h' = 728,^{m}52 \quad t' = 28^{\circ}\,3 \ldots\ldots n' = 24^{\circ}\,7$$

$$\text{» B} \ldots\ldots h = 705,^{m}65 \quad \underline{t = 25,\,5} \ldots\ldots \underline{n = 27,\,8}$$

$$t' + t = 53^{\circ},8 \quad n - n' = P = -\,3,10$$

$$\log h' = 2.8624415$$

$$-\log h = \underline{2.8485893}$$

$$0.0138528$$

$$0,00008 \times 3,1 = \underline{+\,0.0002481}$$

$$m = 0.0141008$$

$$\log.\ 18393 = 4.2646526$$

$$\log 1,1076 = 0.0443829$$

$$\log m = \underline{8.1492953}$$

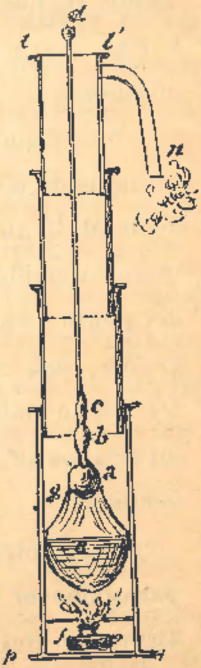
$$\log.\ D = 2.4582608$$

$$D = 287\ \text{m}\ 40$$

$$1 + (t' + t)\ 0.002 = 1.1076$$

---

IPSÓMETRO Ó TERMOBARÓMETRO




Este instrumento destinado á conocer la temperatura á la cual empieza la ebullición del agua y de ahí deducir la altitud del sitio, se compone de las siguientes piezas:

1.° Un tubo metálico que á semejanza de un anteojo de larga vista se halla formado de 3 cuerpos que pueden penetrar uno dentro del otro;—la parte inferior del tubo se halla cerrada por una base doble, en la cual se coloca la lámpara á alcohol f. En la parte superior de esa base se halla una pequeña caldera e semi-esférica, en la cual se pone el agua que debe hacerse hervir.

2.º Un tubo de vidrio a. b. c. d. que contiene el mercurio y cuya forma difiere de la del termómetro ordinario en que tiene tres ampollas destinadas: las dos primeras *b* y *c* á servir para la expansión del mercurio á fin de que á altas temperaturas no alcance grandes alturas en el resto del tubo; la tercera *d* para almacenar el poco de aire que por defecto de construcción pudiera haber quedado en el tubo.

Para hacer funcionar el aparato se pone un poco de agua en la caldera *e*, se coloca el termómetro descansando sobre el soporte *g* y colocada la tapa, *ll'* se enciende la lámpara *f* esperándose el momento de la ebullición que se observa por el vapor que sale por el tubo *n*;—en ese momento se hace la lectura del termómetro, repitiéndola varias veces pues la observación puede durar algunos minutos.

A fin de que la lectura de la graduación indicada por la columna de mercurio sea fácil y apreciable hasta fracción decimal, la ampolla ó depósito *a* del mercurio es de bastante capacidad para que la ascensión de la columna fuera del punto *c* empiece solo á la temperatura de 85º, 50 centígrados; así, el espacio destinado á los grados de 85º 50 á 100º 50 se halla dividido de tal manera que cada grado mide unos 12 milímetros; es fácil su fraccionamiento en décimos.

El ipsómetro, así como el barómetro, puede ser utilizado para conocer la diferencia de nivel entre dos puntos ó la altura de uno sobre el nivel del mar.

Para el primer caso el resultado se obtiene de la comparación de las observaciones inmediatas hechas en los dos puntos, simultáneas si se puede operar entre dos observadores, ó con el menor intérvalo posible siendo uno solo el observador.

Para el 2.° caso, esto es, determinar la altitud de una estación, pueden presentarse tres circunstancias: 1.° que en la proximidad exista un punto de altitud ya determinada, en cuyo caso bastará conocer la diferencia de nivel entre este y el que quiere determinarse; 2.° si el punto está próximo al mar, en cuyo caso las observaciones se hacen simultáneamente en los dos puntos ó con corto intérvalo; 3.° no existiendo ninguna de las condiciones anteriores y siendo entonces necesario basarse en la hipótesis de que la presión barométrica al nivel del mar es la de 760 milímetros, el resultado presentará siempre el carácter de aproximado.

Para el cálculo se emplean ciertas fórmulas sencillas y la tabla VII en la cual la 1.ª columa contiene la temperatura indicada por el termobarómetro, la 2.ª la presión barométrica correspondiente, siempre en la hipótesis de ser esta de 760 milímetros al nivel del mar; la 3.ª la altura sobre el nivel del mar y la 4.ª las diferencias para la interpolación.

La fórmula fundamental y más aplicable es

$$D = \triangle\left(1 \times \frac{2\ (t-t')}{1000}\right)$$

en la que D = diferencia de nivel entre las dos estaciones en las cuales se ha tenido h y h' = alturas barométricas correspondientes á las temperaturas de ebullición T, T' y t y t' temperatura del termómetro libre; $\triangle$ = diferencia de nivel directamente deducida de las tablas ó sea de las alturas indicadas por el ipsómetro.

Ejemplo:

1.ª estación inferior: (termómetro) t = 28° 8, T (del ipsómetro) = 90° 10 = 736,29 mm.
2.ª » superior: » t' — 25° 8, T' » = 97° 40 = 682.69

La tabla asigna las siguientes altitudes á esas dos presiones:

para 692,69 m/m = 740.8 metros t = 28.3
» 736,29 » = 253.1 » t' = 25.8

$\triangle$ = 487;7 metros (t—t')=2 ,5

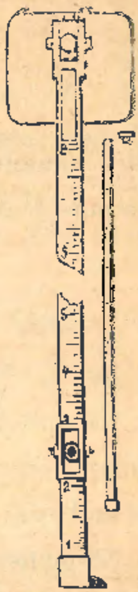
$D = 487.7 \times 1.005 = 490,\overset{m}{\ }15$ $\left(1 \times \frac{2\,(t-t')}{1000}\right) = 1.005$

## Miras

Se emplean de preferencia solo dos clases de miras: las *con disco* que se componen de una regla de 2 á 4 metros, dividida en centímetros, lleva en la cara opuesta á la dividida, un disco pintado para indicar su medio, este disco puede correr sobre la regla y se sujeta oportunamente por medio de un tornillo.

El asistente que presenta la mira hace subir ó bajar el disco, según las señas del observador y una vez apretado el tornillo, lée la división indicada por un índice, en el inverso de la mira.

**La Mira parlante** — Se compone de 3 reglas huecas, de manera que una entra dentro de la otra; una de sus caras,



la que se presenta al observador, está pintada y dividida en centímetros y medio centímetros, al hacer uso de la mira, se hace correr una ó las dos reglas interiores y el asistente la presenta bien verticalmente.

Existen de estas miras divididas en doble centímetros, esto es: en la altura de 2 metros se marca 1 metro y en cada 20 centímetros se escribe 10 centímetros, de manera que esa división es el duplo de la verdadera.

La utilidad y ventaja de esta división es para abreviar el cálculo y tener mayor exactitud, pues como es indispensable al leer una cota sobre la mira, hacer dos lecturas invirtiendo cada vez el anteojo, la lectura definitiva será el término medio; sean 1.ª lectura 2.350 y la 2.ª 2.360, término medio será

$$\begin{array}{r} 2.350 \\ 2.360 \\ \hline 4.710 \\ \hline 2.355 \end{array}$$

sea sumando y dividiendo.

Con la otra mira, llamada también de «Bourdalloue», se leerá: 1ª lectura 1.175, 2.ª 1.180, luego la verdadera será

$$\begin{array}{r} 1.175 \\ +\ 1.180 \\ \hline 2.355 \end{array}$$

resultado que se obtiene solo sumando; también siendo más anchas las divisiones, es más fácil apreciar las fracciones de centímetros.

## Fototeodolito ó Fotográmetro

La aplicación de la fotografía á las operaciones geodésicas, constituye una de las novedades científicas de la actual era de progreso.

No pudiendo, en el presente trabajo, historiar la aplicación de la fotografía á la geodesía, ni detallar la teoría de la utilización de las vistas fotográficas para la representación y fijación de los accidentes topográficos de una región;—me limitaré á exponer los hechos y describir el procedimiento.

El *Fototeodolito* se compone de un teodolito común de 5 pulgadas, con anteojo excéntrico y una cámara oscura colocada en la parte superior de los soportes donde habitualmente se coloca el anteojo en los teodolitos de tránsito.

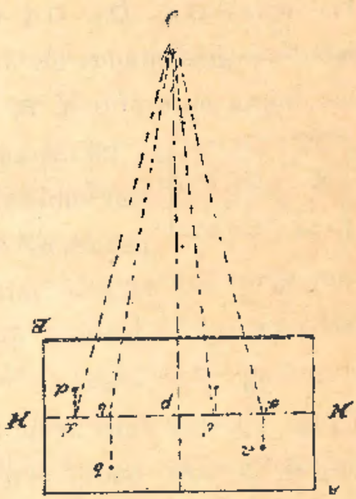
El uso de ese instrumento es igual al del teodolito y una vez nivelado, orientado y dirigida la visual sobre el punto de partida, se tomarán los ángulos como de costumbre.

Como consecuencia de la colocación del instrumento, en estación, y por construcción de este, resultará hallarse la línea focal de la cámara oscura en la línea de fe indicada por los nonios — asi como paralela al limbo del instrumento.

De esta manera una vista fotográfica tomada con esta càmara demarcará con toda precisión: el punto central sobre el cual se ha dirigido la visual y la línea horizontal ó de horizonte perpendicular á la vertical que pasa por el punto céntrico.

Para asegurar el éxito de esta operación la cámara va munida de tornillos para las respectivas correcciones.

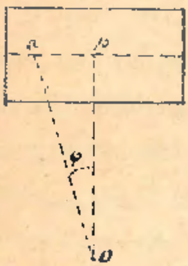
Sea A B una prueba fotográfica de un tamaño cualquiera; es una verdadera perspectiva del cuadro que se tiene á la vista; en ella figura: la línea de horizonte H H, el punto central P y la vertical P O que representa la proyección de la visual establecida desde el ojo del observador ó punto focal del aparato en O, hasta el objeto P.



Las imágenes ó puntos a .b c..... de la imagen corresponden á los de la naturaleza observada y conservan entre sí con relación al punto focal O la misma relación que los objetos A B C..... con el mismo punto,

$$Oc : cb :: OC : CB :$$

por consiguiente: si sobre una vista ó prueba fotográfica, tomada desde una estación M y dirigido el eje óbtico sobre el punto central (objeto notable ó señal especial P que pueda verse de otra estación combinada N) se traza la línea de horizonte H H, fácil de establecer sobre el objetivo pasando por el eje focal; decimos pues si se traza la línea de horizonte y sobre ella se bajan las ordenadas a a', b b', c c', d d'... se tendrá una proyección sobre el horizonte; luego si desde P y perpendicularmente á H H se fija la distancia P O igual á la *distancia focal absoluta* en su verdadero tamaño y que desde O se tracen las líneas O a', O c' O d' O b'..... se tendrán gráficamente representados los ángulos formados desde O entre los puntos naturales A. B. C D....




La distancia focal P O debe ser fijada con toda exactitud, desde que de ella depende toda la precisión del trabajo; se obtiene midiendo con el mayor cuidado sobre el vidrio despulido de la cámara oscura, la distancia en milímetros que separa, sobre la línea de horizonte, el punto de vista central P, de otro punto notable a, y luego midiendo con el círculo horizontal del teodolito el ángulo φ que forman entre sí dichos puntos A P, se tiene para el triángulo a P O recto en P.

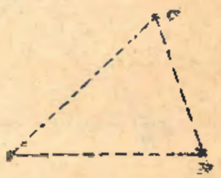
$$r. : \text{tang. } \varphi :: O P : a P, \text{ de donde } O P = \frac{a P}{\text{tang. } \varphi}$$

Conviene repetir esa operación varias veces y con diferentes objetos pues servirá siempre para el mismo aparato.

Conocido asi el modo de preparar cada prueba fotográfica para su empleo posterior, pasemos á la manera de operar.

Para relevar el plano de una región de cualquier extensión que sea, se procederá como siempre por una triangulación hecha con más ó menos escrupulosidad; pues bien, en cada vértice ó estación bastará con tener una ó más vistas fotográficas para solo con su ayuda poder construir todo el detalle interno comprendido por la red de triángulos.

Sean A B C tres estaciones desde las cuales se han medido los ángulos y tomado vistas; en A se habrá fijado el punto B como punto céntrico P, y de la misma manera se habrá procedido desde los otros, pero en cada una de las vistas aparecerán muchos otros puntos notables que se encontrarán repetidos en todas ellas.

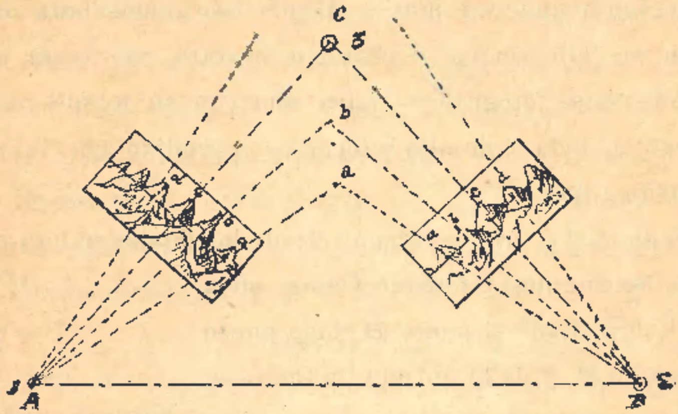


Solo la enunciación de este hecho y el recuerdo de que todo punto queda fijado por la intersección por lo menos de 2 visuales dirigidas sobre él desde puntos ya determinados, fácil es comprender la teoría de la aplicación de las vistas fotográficas á la topografía.

Tracemos en el papel y á la escala que se adopte la linea A B de longitud conocida por la triangulación, asi como los correspondientes ángulos en A y en B; de hecho quedará determinado el punto C.

Ahora, si en A se aplica la vista fotográfica tomada desde él hacia C, preparada ya como se ha dicho y se le coloca sobre el papel de manera que coincida la línea O P con A C y que la distancia focal O P sea la calculada, se tendrá preparada la base para trazar al lapiz todas las visuales a. b. c.... fijadas en la vista.

Repetida la misma operación desde B y tiradas igual-

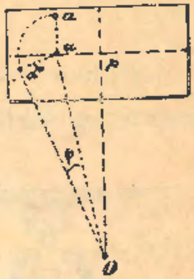



mente las visuales, quedarán determinados ó fijados en el papel los puntos relevados a. b. c. d.....

Igual operación se habrá hecho desde A hacia B., de B hacia A y C y de C hacia B y A, de manera que habrá profusión de visuales y que el mayor trabajo será reconocer en las vistas los mismos puntos que se ven bajo diferentes formas, lo que se simplificaría si se usaran señales especiales.

Para completar el relevamiento topográfico asi obtenido, solo falta determinar la altitud relativa de cada uno de esos puntos y esta operación también se facilita por la vista fotográfica.

Si se quiere conocer la altura sobre el horizonte del punto A que ha proyectado el punto a sobre la vista, bastará sobre el radio o a' levantar la perpendicular a' a" igual á a a'. En ese triángulo, a" o a' se conoce la distancia focal o a', y la altura a' a", luego podrá hallarse ó medirse el ángulo de altura φ



$$\text{tang. } \varphi = \frac{a'' \, a'}{o \, a'}$$

Si ahora se mide en el plano recién construido la distancia O A, sea de A al punto a cuya altura quiere conocerse se tendrá por la proporcionalidad de los triángulos

$$r : \text{tang. } \varphi :: \text{O A} : \text{H}$$

Sea $$\text{H} = \frac{\text{distancia A O}}{\text{tang. } \varphi}$$

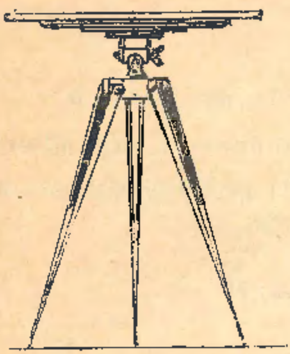
Esta altura, sumada á la altitud del punto de observación A ó B, dará á su vez la altitud del punto observado en el interior del triángulo.

Con estos conocimientos podrá pues levantarse en breve tiempo el plano topográfico de una extensa zona, lo que se hará con mayor facilidad cuanto más accidentado sea el terreno.

Los principios que quedan enumerados, suceptibles aún de muchos mejoramientos, permiten aplicar el sistema ó sea recurrir al auxilio de las vistas fotográficas, para solucionar muchos problemas topográficos empleando para ello el mínimum de tiempo.

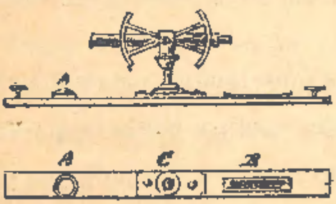
### LA PLANCHETA

La plancheta, que hoy vuelve á emplearse ventajosamente en ciertas operaciones topográficas, es un instrumento sencillo, de un uso fácil y susceptible de proporcionar un resultado satisfactorio. Las piezas que constituyen la plancheta de relevamiento son:



1.º el trípode; 2.º la plancheta propiamente dicho que mide de 60 á 80 centímetros por costado; 3.º la regla alidada.

La regla alidada constituye la parte más importante del instrumento; sobre esta regla metálica, de 60 á 70 centímetros de largo y dividida en milímetros en una de sus aristas, se encuentra : un nivel esférico A.




Una declinatoria B y un anteojo analático C, con arcos de círculo vertical y todos los tornillos correspondientes á su uso habitual.

Para fijar la plancheta sobre el trípode, tiene ésta, adherida á su parte inferior, una chapa triangular con tres tornillos que se adaptan en las aberturas de otra pieza igual colocada á cierta altura sobre la cabeza del trípode. Estos mismos tornillos sirven también para terminar la nivelación de la plancheta colocada en el primer momento casi de nivel, lo que se consigue con un pequeño nivel de bolsillo ó con el mismo de la regla.

Para operar con exactitud, el instrumento debe haber sido revisado para no adolecer de alguno de los siguientes errores:

1.° *Verificación del nivel.*—Una vez considerada de nivel la plancheta, se coloca la regla en un sentido cualquiera observando que la burbuja del nivel esté en su sitio; luego se coloca nuevamente la regla en una posición perpendicular á la anterior y entonces si la burbuja no conserva su posición, se corrije la diferencia mitad por los tornillos de la plancheta y mitad por los del nivel.

2.° *Error de colineación.*—El eje óptico del anteojo debe ser absolutamente paralelo á la regla. Esta corrección se efectúa como para el teodolito ó cualquier otro instrumento análogo y en caso de tener que hacer la corrección se moverá el retículo de la cantidad necesaria en cada posición del anteojo.

3.° *Que un hilo* del retículo esté bien vertical; se notará si dando al anteojo un movimiento en el sentido vertical el hilo no se aparta del de una plomada colocada á cierta distancia; en caso de requerir una corrección se efectuará por medio de los tornillos del soporte del anteojo.

4.° *Error del paralelismo del eje óptico* del anteojo con el borde de la regla; para verificar esta condición se coloca la regla en una de las esquinas de la plancheta, se dirije una visual á un punto distante y bien aparente y se traza al lápiz una línea por el borde de la regla; en seguida se vuelve á colocar la regla de manera que el mismo borde coincida con la línea al lápiz, pero de manera que el anteojo se encuentre colgado debajo de la plancheta. En esta posición se dirigirá la visual al mismo objeto y si la coincidencia no es exacta habrá que corregir el error de paralelismo por medio de los tornillos del soporte del anteojo.

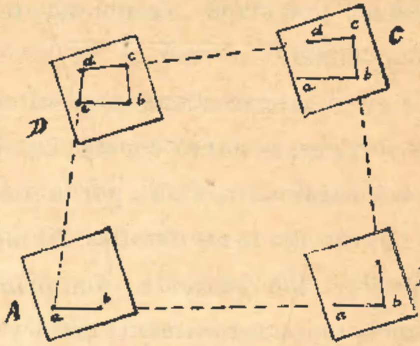
5.º Una vez constatada la exactitud de los niveles y del paralelismo del eje óptico, con la regla y la plancheta, se hará coincidir en esta posición el cero de los índices de los arcos verticales, moviendo los tornillos correspondientes y anotándose en seguida cualquier error de índice, como defecto de construcción.

*Uso de la plancheta.*—Con el empleo de la plancheta se habrá construído en el mismo terreno el plano de la parte relevada, con este objeto se pega, como para el dibujo, una hoja de papel sobre la plancheta y después de adoptada una escala conveniente, se trazan por medio de la regla las líneas correspondientes á las visuales dirigidas ya á objetos determinados ya siguiendo las líneas de un polígono.

Marcadas á la escala, la longitud de la línea ó visual el punto aquel quedará fijado sobre el plano y procediendo de la misma manera con los demás se llegará á completar el plano de la región que se tiene á la vista.

Tres son los medios más generalizados de emplear la plancheta.

1.º Por medio de medición directa de las visuales.— Siendo A B C D los cuatro vértices de un polígono cuyo plano quiere levantarse, se coloca la plancheta en el punto A pero, en el concepto de que todo el plano representativo del terreno debe caber en la hoja de plancheta, dada la escala adoptada; se coloca esta de manera que la vertical del punto A corresponda al punto a de la plancheta. Entonces clavando en ese punto una aguja fina se coloca la regla contra ella y se dirije la visual del anteojo hacia el punto B, en esta posición la regla indicará sobre el papel la dirección de la visual y podrá ser trazada á lápiz. Ahora conocida la distancia A B, ya midiéndola con la cinta, ya calculándola con el anteojo analático, se aplicará en A b, á la escala adoptada. De la misma manera se trazarán sobre el papel las visuales que se dirijan á diferentes puntos manteniendo siempre el contacto con la aguja del punto A.

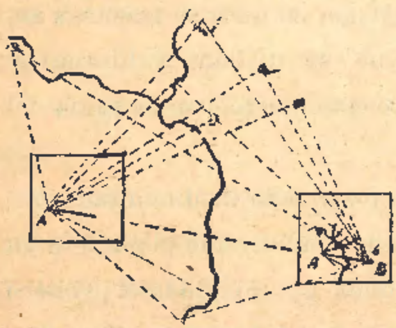



Trasladándose luego al punto B, toda la dificultad consiste en colocar la plancheta de manera que el punto b ya marcado sobre el papel y la línea A b coincidan el primero con la vertical del punto B y la segunda con la alineación B A.—Lo primero se obtiene con la plomada y lo segundo con la regla alidada. Una vez colocada la planeheta en su nueva estación, nivelada y asegurada por sus correspondientes tornillos, se procederá como queda dicho para la estación precedente, cambiando la aguja de sitio sea, colocándola en b.

Siguiendo este mismo procedimiento para cada uno de los vértices, se habrá construido el polígono reducido que se debía relevar y, á más, por la intersección de las visuales se habrán fijado los detalles del interior.

2.º *Por intersecciones.*—La principal aplicación de la plancheta, es seguramente para relevamientos topográficos, no para la medición de un polígono y más aún por rodeo como en la primera aplicación; así que, operando por estaciones independientes pero ligadas entre sí, puede obtenerse rápidamente un resultado satisfactorio.

Si del punto A, convenientemente fijado sobre la plancheta se dirigen las visuales á todos los accidentes del terreno ó á señales especiales colocadas al efecto, trazando sobre el papel las líneas indicadas por la regla y, si después de terminada esa operación se traslada la plancheta al punto B, extremo de la distancia A B, conocida y reducida sobre el plano de la escala adoptada, colocándose aquella de manera



que A B responda á la dirección de B A y el punto b de la vertical de B;—con trazar las nuevas visuales á los mismos puntos anteriores se determinará exactamente la situación de estos sobre el plano.

Ahora bien, si se repite la misma operación de una tercer estación, cada punto se encontrará determinado por tres visuales y comprobada así su situación.

3.° *Por irradiación ó radios polares.*—Consiste en hacer una sola estación desde la cual se dirigen visuales á todos los objetos, accidentes de terreno ó señales se trazan sobre el papel esas visuales y midiendo ó apreciando la distancia á cada uno de ellos por medio del anteojo analático ó cualquier telémetro, se fijan así los puntos sobre el plano.

Este procedimiento aislado es pocas veces empleado, debe siempre ir apareado con él de intersecciones.

En general es al operador que corresponde combinar todos los recursos de su instrumento con el trabajo que se propone realizar; tanto más, que siendo la principal aplicación de la plancheta el relevamiento de parajes accidentados y comprendidos dentro de puntos determinados ya, por medios más exactos, puede elegir estaciones culminantes que fácilmente podrán ligarse entre sí y desde las cuales puede descubrir un vasto horizonte.

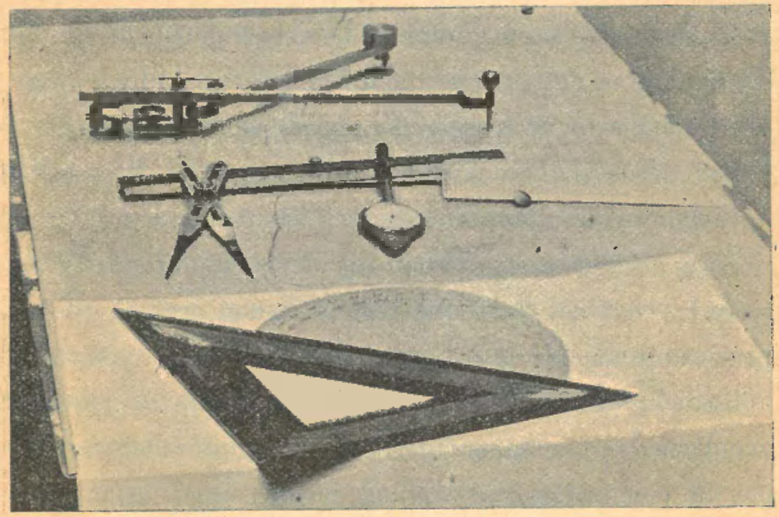
### Instrumentos de dibujo

Para el dibujo se emplean las reglas y escuadras como elementos indispensables para trazar líneas. Entre las escuadras, las de 45° son preferibles por prestarse más que las otras al trazado de perpendiculares.

Los compases, tiralíneas, etc. Compás de reducción. Transportador semi-circular ó de círculo entero.

Tales son las elementos indispensables para el dibujo lineal y su uso es demasiado conocido para detallarlos.

Hay también transportadores metálicos de 10 á 15 centímetros de diámetro con su correspondiente nonius y regla, igual á la graduación de los teodolitos. Los hay

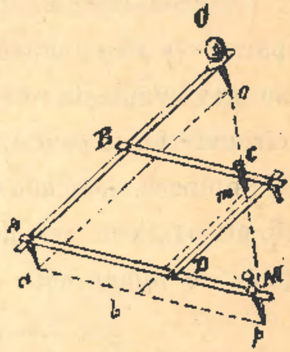


también de marfil en forma rectángular; pero un buen transportador de talco es suficientemente exacto.

Su rectificación se hace levantando con él una perpendicular en un punto dado sobre una recta, y luego invirtiendo la posición del transportador, debe coincidir la graduación con el ángulo recto ya trazado.

Como instrumentos accesorios de un uso limitado y destinados principalmente para facilitar el trabajo, los principales son:

**El Pantógrafo.** — Instrumento destinado á copiar cualquier figura reduciéndola ó aumentándola en una proporción dada. Varias formas se han dado al instrumento, pero su base es siempre la misma. Se compone forzosamente de 4 reglas (de madera ó metal) articuladas en los puntos A B C D y satisfaciendo á dos exigencias; la una, de que formen siempre un paralelógramo y la otra de que los puntos O m P estén en una misma línea.




Si p es la punta seca con la que se sigue el trazado de la figura á reproducir y m, el lapiz que reproduce el trayecto recorrido por M p, se forman dos triángulos semejantes, o a p y m b p, de los cuales se deduce:

$$pa : oa :: pb : bm$$

ó también $ao : Bo :: op : om$ pero como $ao$ y $Bo$ son constantes, luego la relación entre $op$ y $0m$ será también constante y las dos figuras obtenidas serán semejantes y proporcionales á la relación que se establezca entre $0m$ y $op$.

**Planimetro.**—Instrumento destinado á medir las superficies encerradas por cualquier polígono construído á una escala dada.

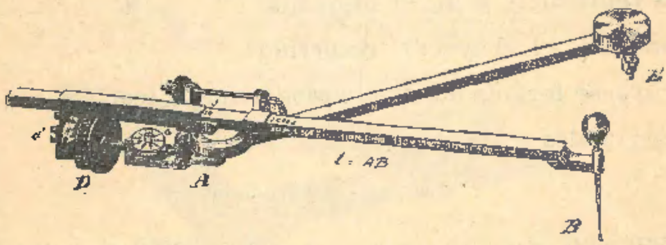
La punta E sirve para fijar el instrumento, fuera ó dentro de la figura cuya superficie se quiere conocer.

La punta B sirve para seguir con toda proligidad el perímetro trazado.

El tambor ó disco D se apoya sobre el dibujo y gira á un lado ú otro y aún se arrastra sin dar vuelta, según el movimiento que le induzca el brazo E = B A del apuntador.

La circunferencia del tambor D está dividida en cien partes—y va acompañada de un índice "d"; por otra parte, su movimiento de rotación se comunica á la pieza G cuya circunferencia está dividida en 10 partes.

Entónces, colocado el brazo A B en el punto correspondiente (J), con relación á la escala del plano y, después de tomar nota de la numeración indicada en ese




instante por los índices en D y G, se recorre con la punta B todo el perímetro del polígono trazado, hasta volver al punto de partida.

Hecha esta operación, se vuelve á leer la numeración de los índices G y D y tomada la diferencia entre ésta y la lectura anterior, se conoce el número de vueltas que ha dado el tambor D y partes de otra en la pieza G.

Obtenida esa cifra (4 vueltas y $\frac{767}{1000}$ partes sean 4767 partes), se multiplica por el coeficiente escrito sobre el brazo A B, y se tiene la superficie buscada.

Supóngase que el brazo AB = b se haya hecho correr hasta fijarlo en J en la graduación marcada 100 $^{m.m.\ 9}$, cada revolución del tambor D indicará entonces que el trazador B ha recorrido un perímetro que encierra una superficie de 100 milímetros cuadrados; así, si después de haber recorrido el perímetro de la figura la pieza G indica 3 (3 revoluciones completas de D) y el tambor 47,80, sea un total de 347.8 divisiones, la superficie buscada será S = 100 $^{m.m.\ 9}$ $\times$ 347,80 = 34780 milímetros cuadrados.

Ahora si la escala del plano es de 0,01 = 500 metros 1 milímetro representará 50 m.$^{s}$ y 1 $^{m}/_{m}$ cuad. = 2500 mts. cuads. luego la superficie buscada será

$$347{,}80 \times 2500 = 86{,}950{,}000 \text{ mts. cuads.}$$

De la misma manera asignando al milímetro cuadrado un valor diferente según la escala se podrá siempre obtener la superficie buscada sobre cualquier plano.

Para facilitar esta operación se han fijado sobre el brazo A varios puntos correspondientes á algunas escalas de mayor uso en la práctica.

Si el plano fuera muy grande y que por lo tanto la punta fijadora E tuviera que ser colocada dentro del perímetro, habría que aumentar á la lectura hecha una cantidad fija y que se encuentra grabada sobre el brazo L junto al punto que indica la escala; así en el caso anterior se encuentra la cantidad 1912.60 lo que hace que el número de milímetros cuadrados recorridos por el puntero B es de (347.80 + 1912.6) $\times$ 100 = 2260.40 $\times$ 100 = 226040 m.m. cuads.

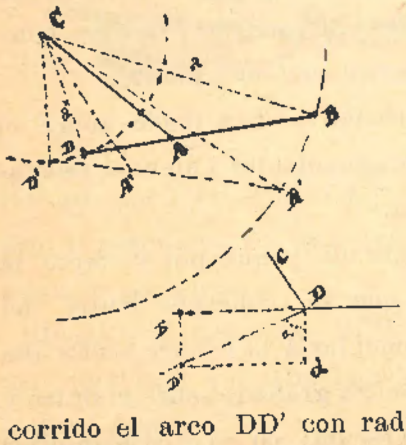
Puede resolverse también este caso dividiendo el plano en dos ó más figuras, que permitan por su tamaño colocar el fijador E fuera del perímetro á recorrer con el puntero E.

Tal es la marcha á seguirse para el uso de ese instrumento muy exacto, pero para el cual se requiere mucha práctica.

### TEORÍA ABREVIADA DEL PLANÍMETRO

Aunque la teoría de este instrumento, que representa una de las más perfectas aplicaciones de las matemáticas á la mecánica, es muy complicada; puede ésta simplificarse en los siguientes términos:

Las líneas C A, B A D, representan el planímetro en posición para operar;—el punto C fijo, el B el indicador que seguirá el contorno de la figura—y D el disco contador situado al extremo del brazo A B.



Si el indicador describe el arco B B' con radio C B = d, el disco D habrá recorrido el arco DD' con radio C D y esto, por la invariable proporción del triángulo C A B.

En el recorrido efectuado por el disco, de D á D' dos movimientos ha efectuado este: uno de *rotación* D E = D' d y otro de *arrastre* E D' que nada produce.

Del triángulo D E D' se deduce el valor del recorrido de rotación, llamando; $a$ el ángulo D' D d = C D E

$$D\,E = D\,d' = D\,D' \cos a$$

llamando: e = arco D D', recorrido del arco de radio C D $e'$ = arco del disco D correspondiente á ese mismo recorrido del arco D D'; el arco $e'$ será proporcional al radio del disco contador D y se tendrá $e' = e \cos a$

Para determinar el valor del ángulo $a$ en función del radio d = C B, del arco recorrido por el punto B, se deduce del triángulo C A B.

$$\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - 2\ \overline{CD} \times DA \cos CDA$$

pero, C D A = 180 — $a$, pues que D' D d = C D E por ser perpendiculares entre si los lados de los triángulos respectivos; luego haciendo C A = R, C D = á y D A = r, la fórmula anterior queda expresada por

$$R^2 = a'^2 + r^2 + 2\,a'\,r \cos a \quad [1]$$

de la misma manera se deduce del triángulo C B D, llamando A B = l, C B = a $\quad a^2 = a'^2 + (r+l)^2 + 2\,a'(r+l) \cos a\ [2]$

Restando la 1 de la 2 se tendrá:

$$a^2 - R^2 = 2\,r\,l + l^2 + 2\,a'\,l \cos a$$

de donde $\quad a' \cos a = \dfrac{a^2 - (R^2 + l^2 + 2\,r\,l)}{2\,l} \quad [3]$

Cuando el punto B recorre un arco B B' = E con el radio imaginario C B = a, se ha engendrado un sector cuya superficie es

$$S = \frac{1}{2}\,E \times c\,B = \frac{1}{2}\,E\,a$$

pero en el mismo instante el disco D describe otro arco e relacionado con el E por la invariable proporción de los brazos del instrumento y se tiene

$$\frac{e}{E}=\frac{a'}{a} \text{ de donde } e = \frac{E\,a'}{a}$$

y de la relación $e' = e \cos \alpha$ que representa el correspondiente arco del disco, se deduce sustituyendo e por su valor. $e' = \frac{E\,a' \cos \alpha}{a}$

sustituyendo ahora $a' \cos \alpha$ por su valor en [3] se tiene

$$e' = \frac{E}{a}\,\frac{a^2 - \left(R^2 + l^2 + 2\,r\,l\right)}{2\,l} = \frac{E\,a}{2\,l} - \frac{E}{2\,a\,l}\left(R^2 + l^2 + 2\,r\,l\right)$$

de donde se deduce

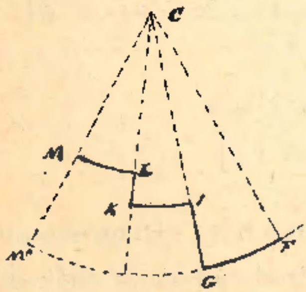
$$e'l = \frac{Ea}{2} - \frac{E}{2a}\left(R^2 + l^2 + 2rl\right) = \text{Sup. del Sector} - \frac{E}{a}\left(R^2 + l^2 + 2rl\right)$$

La relación $\frac{E}{a}$ del arco E á su radio a, es igual á un arco $m$ semejante á E de un círculo de radio 1; luego

$$\text{Sup. Sector} = e'l + \tfrac{1}{2}\, m \left(R^2 + l^2 + 2rl\right)$$

haciendo $R^2 + l^2 + 2rl = H$ se tiene

$$\text{Sup. Sector} = e'l + \tfrac{1}{2}\, m\, H \quad [4]$$




Los términos que entran en la constante H son cantidades invariables por construcción del instrumento.

Supongamos que el indicador B haya recorrido los sectores F G, I K, L M y vuelto al punto M' de manera que C M' = C F

Todo el arco recorrido se compone de

1.° suma de los arcos F G, I K, L M

2.° suma de las líneas G I, K L

3.° línea M M'

La superficie de los respectivos sectores será

para CFG, sup. $= e'l + \frac{1}{2}\, m\, H$

» CIK, » $= e'l + \frac{1}{2}\, m\, H$

» CLM, » $= e'l + \frac{1}{2}\, m\, H$

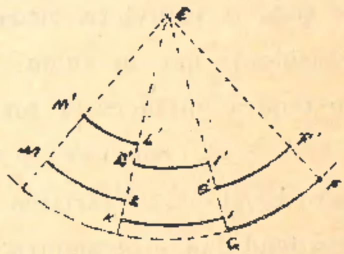
haciendo $e'$ la suma total de las $e$ y $m'$ la de las $m$

se tiene sup. total $= e'l + \frac{1}{2}{}'\, H\, m$ [5]

Si la suma de los ángulos del sector equivale á 4 rectos el conjunto formará una figura completa de superficie continua en cuyo interior se encuentra el punto C, entonces la suma $m' = 2\pi$ y la fórmula [5] se transformará en

$$\text{Sup. total} = e'l + \pi\, H.$$

Supóngase que se quiere deducir la superficie de los trapecios circulares FGG'F', IKK'I', LMM'L que tienen por centro común el punto C.



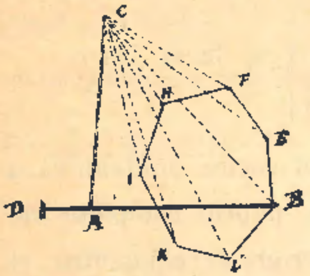
Se apreciará primero la superficie exterior FGIKLM como en el caso anterior y se le restará la interior limitada por F'G'I'K'L'M' —

Para la ejecución el indicador B recorrerá el perímetro empezando por el punto F y siguiendo por GIKLMM' y volviendo por L'K'I'G'E' hasta F

Como la suma de los ángulos recorridos por el Radio CB en un sentido, es igual á la de los recorridos en el otro se tendrá, $m = o$ y la fórmula [5] se reducirá en este caso a'

$$\text{Sup. total} = e'l \quad [6]$$

Siendo C el polo ó punto fijo del instrumento situado fuera de la figura, se podrá considerar la superficie de




ésta como la suma de los varios trapecios circulares en que se divide trazando idealmente los radios de cada vértice al polo C.

Hecho pues, el recorrido del perímetro como en el caso anterior y llamando como siempre $e'$ = desarrollo del arco del disco D y $l = AB$ el resultado será dado por la fórmula ya conocida [6]

$$\text{Sup.} = e'l$$

Si por lo contrario siendo demasiado grande la figura, el polo C estuviera situado en su interior, se podrá considerar que la suma de los ángulos es de 4 rectos y se tendrá entonces la fórmula [4]

$$\text{Sup.} = e'l + \pi\left(R^2 + l^2 + 2\ r\ l\right)$$

pero siendo el 2.º término una constante, su valor es la cantidad que se encuentra escrita sobre uno de los brazos del planímetro.

En cuanto al producto $e'l$ puede ser leído directamente sobre el disco contador D si se ha tenido el cuidado de dividir su circunsferencia de manera de que cada división corresponda á ese producto en vez de sólo al desarrollo del arco $e$.

Por ejemplo: llamando x el radio del disco D cuyo giro completo queremos represente un centímetro cuadrado,

se tendrá: $100 = 2\pi x l$, de donde $x = \frac{100}{2\pi l}$

Como en los planímetros de *Amsler* el radio del disco D es de *un centímetro,* el largo del brazo $l = AB$ correspondiente á la superficie de la fórmula anterior será

$$l = \frac{100}{2\pi} = 159{,}10 \text{ milímetros}$$

El valor de la constante $H = \pi\left(R^2 + l^2 + 2rl\right)$ será ahora facil de determinar pues se tiene: $CA = R = 15{,}80$ centímetros

$AB = l = 15{,}91$ »

$AD = r = 3{,}33$ »

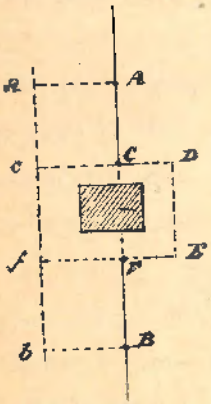
de donde, $H = \pi\left(R^2 + l^2 + 2rl\right) = 1912{,}60$

## III — Líneas con obstáculos

### SU TRAZADO Y MEDICIÓN—APLICACIONES VARIAS

Si al trazarse y medirse una línea se encuentra esta interrumpida por algun obstáculo, hay que arbitrar los medios para salvar la dificultad y continuar la línea.

De dos clases pueden ser estos obstáculos, los unos que interceptan la vista, como ser: una casa, un monte, etc. y que por lo tanto impiden trazar la línea, pasar la visual; y los otros que sólo interrumpen la medición, como ser una laguna, un rio, etc.




*1.º caso*—Al trazarse la línea A B hay uno ó más edificios que impiden el poderse ver dichos puntos.

Si la línea no es muy larga puede trazarse una paralela midiendo desde A y perpendicularmente á la dirección A B una distancia A a, de n metros—repitiéndose en B igual operación se tendrán los dos estremos a y b de la nueva línea paralela á la principal A B.

Si hubiera que fijar algunos puntos sobre la línea A B como ser C. F. etc. solo habría desde la línea a. b. que medir perpendicularmente en C y F los n metros igual á A a —y con esa operación quedarían establecidos los puntos pedidos.

Si el obstáculo se presenta en una línea ya trazada, al llegar al punto C, se levanta una perpendicular C D midiéndose por ella una distancia suficiente para salvar el obstáculo, luego se cuadra, midiéndose D E y se vuelve á cuadrar para medir E F igual á C D, la línea total A B será A C+D E+F B.

Debe tenerse presente que la exactitud de la operación dependerá del trazado de la línea F B para que esté bien en la prolongación de A C y esto se conseguirá solo midiendo los 4 ángulos rectos con mucho cuidado y trazando las líneas C D, D E y E F con banderas á gran distancia (mas ó menos 100 m p. e.) á fin de no cuadrar sobre una línea muy corta como sería C. D.

Este proceder de formar el rectángulo C D E F, es muy exacto, y puede ser aplicado á cualquier género de obstáculos.

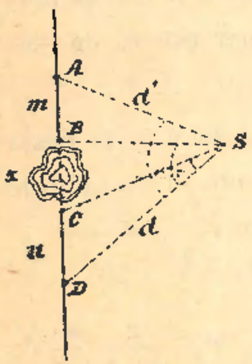
2.º *Caso.*—El obstáculo es de naturaleza á dejar pasar la visual; en este caso, una vez verificado el trazado de la línea, se mide hasta C y desde ahí; ó se forma el rectángulo C M N E ó el triángulo C D E.


Si el obstáculo es de importancia, es preferible adoptar la forma triangular pues, se forma el ángulo recto en C, ú otro cualquiera A C G, se mide la línea C D ó C G y desde su estremo, tomando el ángulo C D E ó C G E según el caso, fácilmente podrá resolverse el triángulo en el cual se tendrá siempre á favor de la solución, la línea C D ó C G, y los ángulos: E C D y E D C ó C G E y E G C; entonces G E D $= 180° -$ (ECD+CDE) y luego: son E : CG:: son G : CE. $= \frac{\text{sin D} \times \text{C D.}}{\text{sen C}}$ —

Si se llegára á formar en D' un ángulo C D E' $= 45,°$ siendo recto el ángulo en C, se tendrá en ese triángulo isóseles C D' E iguales los ángulos en E y en D' y por lo tanto C E $=$ C D'.

Esto es: la línea C D' medida como base sería igual á la cantidad C E buscada.

En todo caso, conviene procurar que el ángulo en D resulte, de 40 á 60 grados y por otra parte, medir como comprobación el ángulo C E G ó G E D ó C E D' para asegurarse que entre los tres formen 180°.




Puede también salvarse un obstáculo de la siguiente manera:

Sean A. B. C y D, 4 puntos de una misma línea recta, se conocen las distancias AB $=$ m y CD $=$ n.

Del punto S se miden los ángulos parciales que hacen esos 4 puntos y el ángulo en D así se tiene.

Angulos C D S $=$ D

» D S C $= \alpha$ y haciendo

» D S B $= \omega$; D S $=$ d

» D S A $= \gamma$; A S $=$ d'

Se trata de hallar la distancia C B $=$ X

Considerando los dos triángulos C D S y B D S se tendrá $S\,C = \dfrac{m \operatorname{Sen} D}{\operatorname{Sen} \alpha}$ $\qquad S\,B = \dfrac{(m + x) \operatorname{Sen} D}{\operatorname{Sen} \omega}$

$$\frac{S\,C}{S\,B} = \frac{m \operatorname{Sen} \omega}{(m + x) \operatorname{Sen} \alpha}$$

de los triángulos C A S y B A S se tiene

$$S\,C = \frac{\operatorname{Sen} (D + \gamma)\,(n + x)}{\operatorname{Sen} (\gamma - \alpha)} \qquad S\,B = \frac{n \operatorname{Sen} (B + \gamma)}{\operatorname{Sen} (\gamma - \omega)}$$

$$\frac{S\,C}{S\,B} = \frac{(n + x) \operatorname{Sen} (\gamma - \omega)}{n \operatorname{Sen} (\gamma - \alpha)}$$

luego; $\dfrac{m \operatorname{Sen} \omega}{(m + x) \operatorname{Sen} \alpha} = \dfrac{(m + x) \operatorname{Sen} (\gamma - \omega)}{n \operatorname{Sen} (\gamma - \alpha)}$

reduciendo al mismo denominador y diviendo ambos miembros por Sen $\alpha$ Sen $(\gamma - \omega)$

$$x^2 + (m + n)\,x + m\,n = \frac{m\,n \operatorname{Sen} \omega \operatorname{Sen} (\gamma - \alpha)}{\operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Sen} (\gamma - \omega)}$$

y haciendo

$$\operatorname{tang}^2 M = \frac{4\,m\,n \operatorname{Sen} \omega \operatorname{Sen} (\gamma - \alpha)}{(m - n)^2 \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Sen} (\gamma - \omega)} \quad (1)$$

se tiene $\quad x^2 + (m + n)\,x = \frac{1}{4}\,(m - n)^2 \operatorname{tang.}^2 M - mn$

$$\text{y; } x = \frac{m + n}{2} \pm \sqrt{\frac{(m - n)^2}{4} \operatorname{tang.}^2 M + \frac{(m - n)^2}{2}} \quad (2)$$

---

Igual solución puede obtenerse procediendo de esta otra manera: ángulo D C S = 180 — (D + $\alpha$), D B S = 180 — (D + $\omega$), D A S = 180 — (D + $\gamma$)

de los triángulos D C S y B A S

$$d = \frac{m \operatorname{Sen} (D + \alpha)}{\operatorname{Sen} \alpha}; \quad d' = \frac{n \operatorname{Sen} (D + \omega)}{\operatorname{Sen} (\gamma - \omega)}$$

y del triángulo A S D

$$\text{Sen}\ (810 - (D + \gamma) : d :: \text{Sen}\ \gamma : m + n + x$$

de donde

$$(m + n) + x = \frac{d\ \text{Sen}\ \gamma}{\text{Sen}\,(D + \gamma)}\ \text{ó también}\ (m + n) + x = \frac{d'\ \text{Sen}\ \gamma}{\text{Sen}\ D} \quad (2)$$

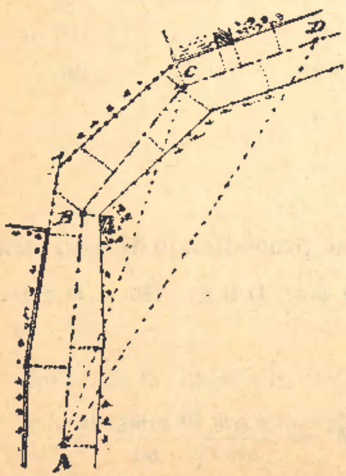
el valor de x será; $x = (m + n) + x - (m + n)$

---

Este problema tiene varias aplicaciones en la práctica puede hacer conocer el ancho de una laguna y salvar un obstáculo como ser un médano; para mayor seguridad puede medirse también el ángulo D A S con cuyo valor se comprobará la exactitud de los otros, pues que

$$DAS + ASD + SDA = 180^{\circ}$$

*Levantar el plano de un camino*, limitado en sus dos costados — la operación se hará por medio de una línea auxiliar, trazada si es posible por el medio del camino.

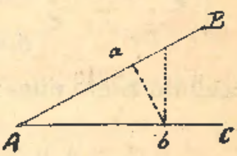



Establecida esa línea se relacionan á ella todos los accidentes existentes á uno y otro lado, por medio de ordenadas. Cuando sea necesario ó conveniente cambiar la dirección se mide el ángulo formado por la nueva línea (B C) con la anterior A B.

En llegando al tercer vértice y en adelante, será siempre conveniente procurar tomar un otro ángulo formado por la segunda línea y el vértice anterior; esto es, llegando en C se tomará el ángulo formado por la línea C B y la visual C A. Esta precaución sirve para comprobación de la operación.

Así mismo será siempre prudente y conveniente tomar los ángulos formados por la línea medida y todos los puntos ya fijados y señalados con una bandera.

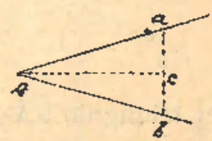
APLICACIONES—*1.ª medir un ángulo.*—Con solo la cadena ó cinta‘ sean A B y A C, dos líneas ya establecidas, sí, sobre cada una de ellas se mide una distancia cualquiera A a y A b y luego se ligan los puntos a y b midiendo la distancia, se tendrá un triángulo en el cual se conocerán los tres lados; con su resolución se obtendrá el ángulo en A.




$$\tan g \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{(S-a)}}$$

Infinidad de maneras pueden aplicarse para medir ese ángulo—si en b se levanta una perpendicular se forma el triángulo rectángulo y medidos los tres lados se tiene: $\tan g A = \frac{b\,a}{A\,b}$

Si se mide en A a y A b, distancias iguales se formará un triáungulo isósele (sea el caso de poderse medir una distancia de cien metros)—luego, establecida la línea a b, se fija en la mitad de su largo b a, el punto c y me-

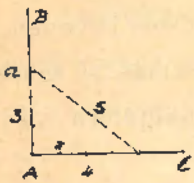


dida la distancia A C se forma un triángulo rectángulo del cual se deduce, tang $\frac{1}{2}$ A $= \frac{c\,b}{A\,c}$

2.° Si se tratara de establecer en A un ángulo recto, se tendría que formar un triángulo cuyas dimensiones respondieran à la fórmula.

$$A\,a = \sqrt{(a\,b)^2 - (A\,b)^2}\,.$$

*Por ejemplo.*—Midiendo en Ab 4 metros — y tomando dos cintas una de $3^m$. y otra de $5^m$., fijando uno de los extremos de la de $5^m$. en b y uno de la otra cinta en A y luego de bien estiradas reuniendo los extremos de los dos en el punto a, se tendría formado un ángulo recto pues:

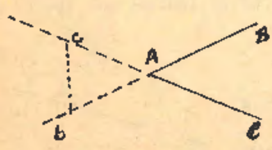



$$\overline{a\,A}^2 + \overline{A\,b}^2 = \overline{a\,b}^2; \text{ sea } 3^2 + 4^2 = 5^2\,;\ 9 + 16 = 25$$

Igual resultado se obtiene con los multiplos de 3, 4, 5; así se puede hacer para los lados del triangulo 12, 16 y 20 pues que

$$\overline{12}^2 + \overline{16}^2 = \overline{20}^2; \quad 144 + 256 = 400$$

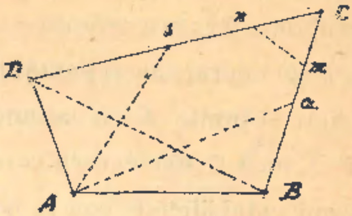
3.° Sea tomar el ángulo que forma un muro ó edificio, ABC.




Prolongando las lineas AB y AC, cada una en una distancia cualquiera Ac ó Ab se llega á formar el triángulo bAc, en el cual se conocen los lados y fácil será conocer el ángulo cAb = BAC, por cualquier método antes espuesto.

4.° Sea levantar el plano de un polígono, haciendo uso solo de la cadena ó cinta.

La base de todas esas operaciones, es formar triángulos con los tres lados conocidos.



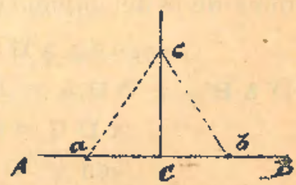
Luego en el caso presente la aplicación de cualquier proceder dependerá de las dimensiones de los lados del polígono ABCD, y de la más ó menos facilidad para recorrer su interior midiendo líneas auxiliares.

Si se pueden medir diagonales Aa, Ab, DB, como lo indica la figura, seguramente será el proceder más exacto; pero si no fuera esto posible, puede en cada vértice formarse el triángulo mcn.

De una manera ú otra, basta que el operador se dé cuenta de que es indispensable conocer los tres lados del triángulo y podrá aplicar cualquier procedimiento, que sea más apropiado á las circunstancias.

5.° Levantar en el punto C. una perpendicular á la línea AB.

Si la operación ha de hacerse con un instrumento que permita medir el ángulo, solo hay que colocar este en el punto C, cuidando que el eje se encuentre bien en la línea AB— y luego de fijar la visual sobre A ó B se hace girar el limbo superior midiendo 90.° Una vez

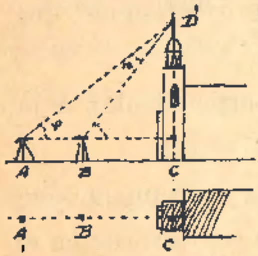


asegurado el anteojo en esa posición solo resta mandar colocar una bandera en un punto cualquiera de la línea atendiendo las señas que se hagan para ponerla bien en el eje obtico del instrumento.

Si se opera con el sextante, ó con la escuadra óbtica al fijar el punto A, se mandará poner una bandera en dirección á C, haciéndola correr hasta que aparezca en el espejo coincidiendo con la bandera A, vista por la parte inferior del espejo.

Si se operara sin instrumento, se fijarán dos puntos a y b á igual distancia de C, a C = b. C. y luego tomando la mitad de una cinta ó hilo algo largo, se conserva en la mano dicho medio, mientras que se manda colocar cada uno de los estremos en los puntos a y b. Estirando bien las dos mitades c. a., c b; se fijará el punto c, que se hallará en la perpendicular pedida.

*Problemas.*—1.° Hallar la altura D C inaccesible; fijados los puntos A B C, en una misma dirección, mídase la distancia A B y los ángulos D. A. C, $= \varphi$ y D B C $= \delta$, formados sobre la horizontal A C (el nivel del teodolito hallándose el zero del limbo vertical de acuerdo con la línea de fé del anteojo paralelo al horizonte.)




Luego en A B D, se conoce: A B = a

$$D\,A\,B = \varphi,\ D\,B\,A = (180^\circ - \delta) = \alpha \text{ se hallará: } D\,B.;$$

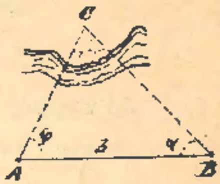
$$A\,D\,B = n = 180^\circ - (\varphi + \alpha)$$

$$\text{sen } \varphi : D\,B :: \text{sen } n : A\,B,$$

$$D\,B = \frac{\text{sen } \varphi\ A\,B}{\text{sen } n}$$

En D B C. conocidos D B; $DX = \delta$ y D C B recto, se tiene $1 : \sin \delta :: BD : DC$; $DC = \sin \delta \times BD$. y la altura total D T será D C, mas la altura del instrumento A O.

2.º Hallar la distancia desde A á un punto inaccesible C.



Trázese una línea cualquiera A B, formando el triángulo A B C.

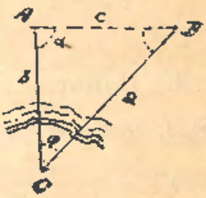
Se conocerá:

$AB = b$, y ang. $CAB = \varphi$; $ABC = \alpha$

luego $ACB = 180^\circ - (\varphi + \alpha) = \delta$. $\sin \delta : b :: \text{sen}\, \alpha : AC$.

$$AC = \frac{b \sin \alpha}{\sin \delta.}$$

3. Hallar la distancia A B, conociéndose el ángulo $ACB = \varphi$ y las distancias $AC = b$ y $BC = a$



$$(\alpha + \delta) = 180^\circ - \varphi$$

$$(a + b) : (a - b) :: \text{tg.} \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right) : \text{tg.} \left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)$$

$$\text{tang} \left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right) = \frac{\text{tang} \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right) (a - b)}{a + b}$$

sean: $a = 700$, $b = 600$, $\varphi = 56^\circ 12'$

$$\tfrac{1}{2} (\alpha + \delta) = 180^\circ - 56^\circ 12' = 61^\circ 54'$$

$(a - b) = 100$ ............... log. 2,000000

tang. $\frac{(\alpha + \delta)}{2} = 61^\circ 54'$..... log. + 10,272499

12,372499

$(a + b) = 1300$............. log. — 3,113943

log. tang. $\frac{(\alpha - \delta)}{2}$ $=$ 9,158556 $=$

$$\text{tang.}\ \frac{(\alpha - \delta)}{2} = 8^\circ\ 11'52''$$

Angulo mayor $BAC = \alpha = 61.°54 + 8°.11'.52'' = 70°.5'.52''$

$\sin\alpha : a :: \sin\varphi : AB \qquad AB = \dfrac{a \sin\varphi}{\sin\alpha}$

---

$\sin\varphi$ (56°12')................... lg.... $+$ 9.919593

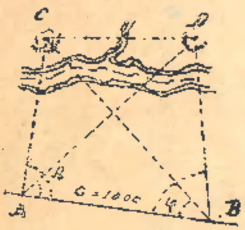
a....... 700................... lg.... $+$ 2.345098

$\sin\alpha$ 70°5'52'')........... conp. log.... $+$ 0.026745

$AB = C = 618{,}63$............ log. A B $=$ 2.791436

---

4.° Hallar la la distancia CD entre dos puntos inaccesibles; mídase una línea cualquiera AB, y los ángulos en los puntos A y B con los C y D, resultan dos triángulos ACB y ADB, en los cuales se conocen la base y los ángulos adyacentes.




En ACB; $AB = c = 1000$

$ABC = \varphi = 57°33'$; $CAB = \beta = 96°57'$

$ACB = 180° - (96°57' + 57°33') = 25°30'$

$\sin 25°30' : AB :: \text{sen } 96°57' : BC$

sen $CAB = 96°57$.............. log. $=$ 9.995797

$AB = 1000$........... $+$ log. $=$ 3.000000

sen $ACB = 25°30'$...... conp. log. $=$ 0.366016

$\underline{\underline{BC}} = 2305.75$....... log. BC $=$ 3.362813

En A B D

$$
\begin{array}{rr}
A\,B = 1000,\ A\,B\,D = & 107^{o}52' \\
D\,A\,B = & +\ 54^{o}12' \\
\hline
 & 162^{o}04' \\
A\,D\,B = & 17^{o}56' \\
\hline
 & 180\ » \\
\end{array}
$$

sin A D B : A B : : sin D A B : B D.

$$
\begin{array}{lr}
\text{sen } D\,A\,B = 54^{o}12' \ldots\ldots\ldots \text{ log.} = & 9.909055 \\
A\,B = 1000 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ log.} = & 3.000000 \\
\text{sen } A\,D\,B = 17^{o}56' \ldots\text{ conp. log.} = & +\ 0.511576 \\
\hline
\underline{\underline{B\,D}} = 2634.09 \ldots\ldots \text{ log. } B\,D = & 3.420681 \\
\end{array}
$$

En el triángulo C B D

$$
\begin{array}{lr}
(B\,D - B\,C) = 328.34 = \text{lg.} & 2.516324 \\
\text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(D + C) = 64^{o}50 = \text{lg.} & 10.328201 \\
(B\,D + D\,C) = 4939.89;\ \text{conp. log.} & 6.306287 \\
\hline
\text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(C - D) = 8^{o}3'18'' = & 9.150812 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\tfrac{1}{2}\,(D + C) = & 64^{o}50'30'' \\
\tfrac{1}{2}\,(D - C) = & 8^{o}\ 3'18 \\
\hline
 & 72^{o}53'48 = B\,C\,D \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{sin } C\,B\,D = 50^{o}19' = \text{lg.} & 9.886257 \\
B\,D = 2634.09 \quad = & 3.420631 \\
\text{sin } B\,C\,D = 72^{o}53'48'' = & 0.019644 \\
\hline
C\,D = 2130{,}95 \quad = & 3.326532 \\
\end{array}
$$

## IV. — Nivelación

La superficie de la tierra es sensiblemente la de una esfera, á cuyo centro concurren todas las líneas verticales; esa superficie ideal constituye el plano de comparación que se supone pasar por el nivel medio de los mares y á ella se reducen todas las operaciones. Se dice que una línea ó un plano está de nivil, cuando es paralelo á la superficie media de los mares.

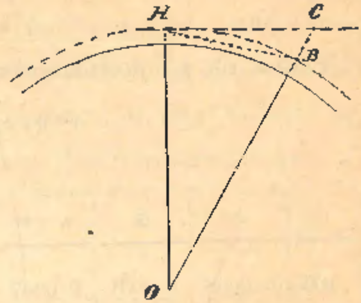
Así pues, todos los puntos que se hallan á igual distancia del centro de la tierra, se encuentran en el *mismo nivel* y la nivelación tiene por objeto, hallar la diferencia de nivel entre dos ó más puntos.

Por lo general, toda nivelación se reduce al *nivel medio de los mares* y en cada Estado, se fijan puntos inalterables llamados *puntos de referencia* habiendo determidado previamente y por una serie de observaciones la cota de estos puntos con relación al nivel medio del mar.

Entre nosotros ese plan de comparación, para todos los estudios de ferrocarriles, caminos, etc., es el de las aguas medias del Río de la Plata que pasa á $19^{m.}$ bajo la estrella del peristilo de la Catedral de la Ciudad de Buenos Aires.

Cuando la cota, ó diferencia de nivel de un punto con respecto al plano de comparación, se refiere al nivel del mar, esta se llama Altitud

Cuando un NIVEL está colocado en estación, *el plano* *horizontal* que pasa por el anteojo ó línea de visual de ese instrumento, es idealmente perpendicular á la vertical del lugar, así: el plano que pasa por H en dirección á B, hallará este punto más abajo de su dirección.




Ese plano HC se llama *nivel aparente* y la diferencia CB, diferencia entre el nivel aparente y el verdadero.

Su expresión será, haciendo: distancia $HC = d$, Radio $= R$ y $BC = OC - OB = h$

$$h = \frac{d^2}{2R} = \frac{d^2}{12732396} = 2 \log d - \log 12732396 = 2 \log d - [7.180631]$$

Tal es el error cometido al tomar la altura del punto B para obtener su nivel verdadero; hay también otro error debido á la refracción, que hace aparecer el punto C más alto de lo que está en realidad, de donde resulta que hay que rebajar aun la refracción de la cantidad hallada para **h**. — Si á la fórmula anterior se aplican los efectos de la refracción en paises templados, se tiene

$$h = 0.84 \frac{d^2}{2R}$$

Por lo que precede no hay que considerar muy complicada la nivelación, pues que, como las visuales tiradas en cada postura del instrumento, varian solo de 100 á 500 metros y este último en grandes reconocimientos es preciso saber que la diferencia entre los dos niveles, aparente y verdadero es pequeña como lo demuestra la tabla siguiente:

TABLA DE LA CORRECCIÓN POR DIFERENCIA DE NIVEL Y REFRACCIÓN

| | A | B | A — B | | A | B | A — B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0007 | 550 | 0.0236 | 0.0038 | 0.0198 |
| 150 | 0.0017 | 0.0002 | 0.0015 | 600 | 0.0283 | 0.0045 | 0.0257 |
| 200 | 0.0031 | 0.0005 | 0.0026 | 650 | 0.0332 | 0.0055 | 0.0279 |
| 250 | 0.0049 | 0.0007 | 0.0042 | 700 | 0.0385 | 0.0062 | 0.0323 |
| 300 | 0.0071 | 0.0011 | 0.0060 | 750 | 0.0442 | 0.0071 | 0.0371 |
| 350 | 0.0096 | 0.0015 | 0.0081 | 800 | 0.0503 | 0.0080 | 0.0422 |
| 400 | 0.0126 | 0.0020 | 0.0106 | 850 | 0.0567 | 0.0092 | 0.0475 |
| 450 | 0.0157 | 0.0026 | 0.0131 | 910 | 0.0636 | 0.0102 | 0.0534 |
| 500 | 0.0196 | 0.0031 | 0.0165 | 1000 | 0.0785 | 0.0126 | 0.0660 |

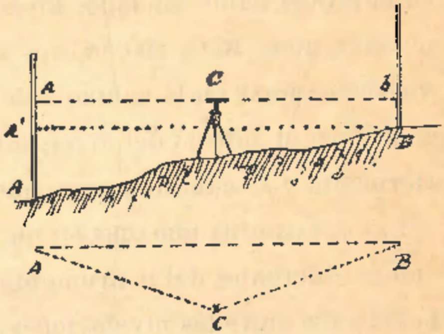
A = diferencia entre el nivel aparente y el verdadero.
B = lo que baja el nivel; causa de la refracción
A — B = cantidad á rebajar al nivel aparente.

$$h' = (h - e) = 0.84 \ \frac{d^2}{2R}$$

lectura hecha á $850^m$............ h = 2.2570
corrección (A — B)............ = — 0.0475
lectura verd. ...... = 2.2095

Con ciertas precauciones que se esplicarán más tarde, puede despreciarse esa corrección.

Si se tratara de averiguar la diferencia de altura entre dos puntos A y B distantes entre sí unos 200 ó 300 metros, se colocaría una mira en ambos puntos y colocando el nivel fuera de la línea de esos puntos y poco más ó menos á la mitad de la distancia, se establecería el plano del instrumento; luego dirigiendo hacia B una visual, se mediría la altura B b — y después, dándole vuelta hacia A la altura A a; conocidas estas dos alturas la diferencia de nivel sería A a — b B = A a′




Por este proceder se comprende que como los dos puntos se hallan proximamente á la misma distancia del instrumento C, la corrección que habría que hacer sería igual para las dos alturas, lo que indica que puede despreciarse.

$$(Aa - d) - (bB - d) = Aa - bB.$$

Tal es la teoría fundamental de la nivelación.

Si la distancia á nivelar fuese muy larga, hay que proceder con *Nivelación compuesta,* es decir por una serie de nivelaciones simples relacionadas entre sí.

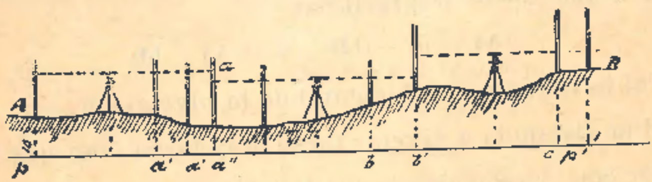
Para la nivelación compuesta, el método más generalmente empleado es el siguiente:

Después de colocado el instrumento en un punto cualquiera, no muy distante de uno de los estremos de la línea que debe nivelarse, se coloca la mira en el punto de partida, que debe ser inalterable para servir en todo tiempo de punto de referencia; luego se mide la altura de la mira y se le da el nombre *Golpe de espalda.*

Después de anotada esa altura en su columna correspondiente, se hace colocar la mira en uno ó dos puntos de la línea que se nivela, se apuntan las alturas en la columna llamada *Adelante* y se hace mantener la mira en el último punto anotado; luego se traslada el instrumento á unos 100 ó 200 metros de ese último punto, se vuelve á anotar en la columna de la espalda, la altura que se lee con el anteojo del nivel, sobre la mira dejada anteriormente y se continua como queda dicho.

Las dos alturas tomadas en un mismo punto por 2 posiciones diferentes del instrumento son las que establecen la relación entre las nivelaciones simples que constituyen la nivelación compuesta.

Para uniformar la operación se la relaciona con un




plano de comparación PP' tomado arriba ó abajo del terreno; para esto se aumenta á la primera lectura una cantidad cualquiera 20, 30 ó $100^{m}$ y el resultado final después de calcular cada cuota de los puntos a, a', a', b... se obtiene por una simple resta.

Veamos y estudiemos la nivelación siguiente:

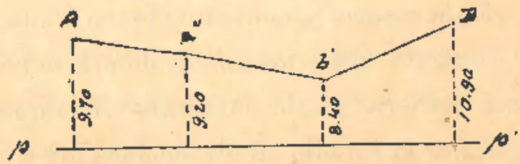
| PUNTOS | DISTANCIAS | ATRAS Ó ESPALDA | ADELANTE Ó FRENTE | RECTIFICADOS | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ATRAS | ADELANTE |
| | | | | | (10) |
| A | | 0.30 | | 9.70 | |
| a | A a = 70 | — | 1.30 | — | 8.70 |
| a' | a a' = 60 | — | 1.10 | — | 8.90 |
| a'' | a' a'' = 50 | 0.20 | 0.80 = | 9.40 | 9.20 |
| b | a'' b = 100 | — | 1.20 | — | 8.20 |
| b' | b b' = 60 | 2.60 | 1.— = | 11.— | 8.40 |
| c | b' c = 110 | — | 0.95 | — | 10.05 |
| B | C B = 40 | — | 0.10 = | — | 10.90 |
| | | 3.10 | 1.90 | | |
| | | dif. = 1 20 | | | |

Supongamos el plano de comparación PP á 10 metros abajo de la primera visual punto A, resulta que la elevación de A sobre el plano PP' será = 10 — 0.30 = $9^m$ 70 este mismo plano sigue hasta a'', lúego la altura de a'' será = 10 — 0.80 = 9.20.

El 2.º plano de visual resulta estar á 0.20 más alto que el punto a'' luego distará de:

P. P' : 9.20 + 0.20 = 9.40

de ahí el punto b' estará á 9.40 — 1 = 8.40.




El 3.º plano estará á la altura de = 8.40 + 2.60 = 11.— y el punto B distará del plano 11 — 0.10 = 10.90.

Luego el punto B estará a 10.90 — 9.70 = 1.20 más alto que A, y el b se hallará á 9.70 — 8.40 = 1.30 más bajo que A.

Para calcular los cotas intermediarias se ha procedido:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 10.— | 10.— | 8.40 | |
| | — 0.30 | — 1.30 | + 2.60 | |
| atras | 9.70 | 9.70 adelante | atras 11.— | 11.— |
| | | 10.— | | — 0.95 |
| | | — 1.10 | | 10.05 adelante |
| | | 9.90 adelante | | 11.— |
| | | 10.— | | — 0.10 |
| | | — 0.80 | | 10.90 adelante |
| | 9.20 | 9.20 adelante | | |
| | + 0.20 | + 0.20 | | |
| atras | 9.40 | 9.40 | 10.90 | 3.10 |
| | | — 1.20 | — 9.70 | 1.90 |
| | | 8.20 adelante | 1.20 dif. | 1.20 dif. |
| | | 9.40 | | |
| | | — 1.— | | |
| | | 8.40 adelante. | | |

Toda operación de nivelación debe ser rectificada y para ello basta repetirla en sentido inverso, ya tomando los mismos puntos de la anterior, ya siguiendo otra traza que ligue siempre los dos extremos.

Es necesario y conveniente en cada nivelación dejar estacas en todos los puntos donde se coloque la mira; de esa manera puede facilitarse cualquier verificación ó ampliar el estudio en direcciones diferentes al del primer trazado.

Antes de emprender una nivelación, debe verificarse la exactitud del instrumento; precaución que deberá repetirse con frecuencia en una operación larga y diariamente si fuera posible.

La mira debe siempre colocarse bien á plomo y con la cara de frente al anteojo del nivel.

La inscripción en la cartera, de las lecturas de mira, debe hacerse con cuidado para no confundir un punto con otro, asi mismo se cuidará que esa inscripción quede frente á la distancia que le corresponde y completando la anotación ya con un croquis ya con detalles especiales.

Cuando se trabaja con un nivel, cuyo anteojo está libre en sus abrazaderas, como en el nivel *Equalt,* conviene siempre hacer dos lecturas consecutivas, una en la posición normal del anteojo y otra invirtiéndolo; tomando luego el término medio de ambas lecturas, se tendrá de esa manera la cota exacta salvándose así cualquier defecto de paralelismo del eje focal del anteojo.

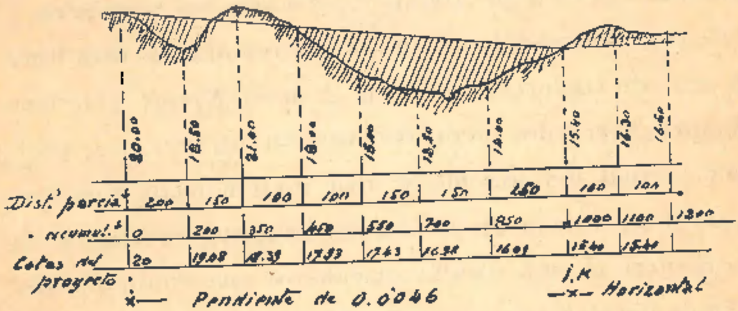
Con los niveles de anteojo fijo, como en el nivel Inglés, este recurso no existe, de ahí la necesidad de asegurarse bien de la exactitud del instrumento antes de operar.

## APLICACIONES DE LAS NIVELACIONES

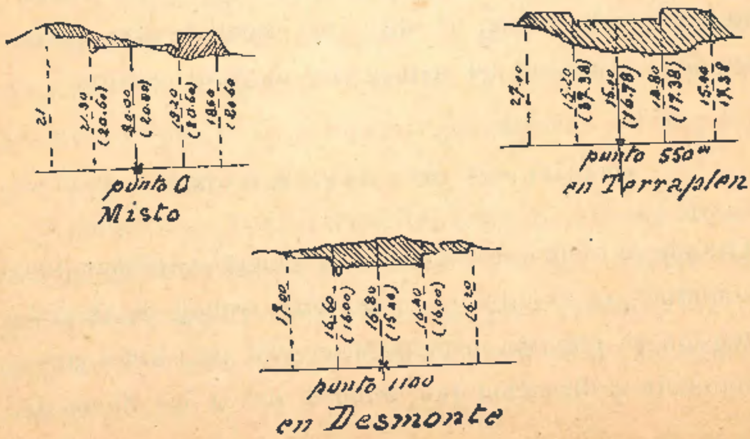
Cuando se tiene que hacer una nivelación para estudiar un camino, un canal ó cualquier otro trabajo de alguna extensión, se examina primero el terreno para saber próximamente la dirección que deberán llevar las líneas y luego se procede á hacer la nivelación compuesta para estudiar el *perfil longitudinal y los transversales.*

*Perfil longitudinal,* se llama la nivelación de la línea eje de la operación y *transversal* al de pequeñas líneas perpendiculares al eje, casi siempre equidistantes entre si y prolongadas lo suficiente á uno y otro lado del eje — ; en ambas líneas, se procede como ya queda dicho y relacionando cada perfil transversal con el punto más inmediato del eje principal . —

PERFIL LONGITUDINAL




PERFILES TRANSVERSALES



Por las dos figuras adjuntas se ve claramente lo que se entiende por perfiles; así la fig. 1.ª, representa el perfil longitudinal en el cual, los números escritos sobre AB indican las cotas del terreno asi como en las demás líneas van las distancias parciales, las acumuladas desde el punto de partida y finalmente las cotas definitivas del proyecto.

La línea MN indica la razante ó pendiente que debe tener el proyecto, siendo esta en el presente caso:

$$p = (20 - 15.40) = 4.60$$

y por metro: $i = \frac{4.60}{1000} = 0^{m}0046$

ó sea 4 y ½ centímetros por ciento.

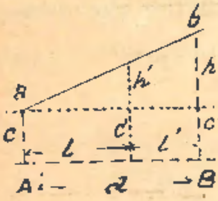
Las partes rayadas indican los desmontes y terraplenes que hay que hacer, cuyo volumen se aprecia considerando cada sección de desmonte ó terraplen como troncos de pirámides cuyas bases se hallan sobre el plan de pendiente.

En las figuras que representan los perfiles transversales, ejecutados á las distancias de 380, 550 y 1000 del punto de partida, se ven en la línea que representa el eje general, la cota correspondiente á los dos perfiles y á uno y otro lado las distancias medidas y las cotas de los puntos, observados, casi siempre equidistantes del eje.

Se acostumbra también escribir con tinta colorada ó entre paréntesis las cotas de los trabajos que deben realizarse, esto es: la diferencia entre la cota del terreno y la del proyecto.

Las cotas del proyecto se establecen sobre el perfil longitudinal teniendo presente: el objeto buscado en el proyecto y la compensación entre los trabajos de desmonte y terraplen.

Fijada sobre el perfil la línea adoptada como razante, la que generalmente resulta ligando dos puntos del perfil longitudinal, viene el cálculo de las cotas intermediarias y la de los puntos de paso.




Sea la distancia entre las dos cotas adoptadas, $AB = d$.

$h = Bb - Aa = c' - c$ diferencia de nivel entre puntos extraños

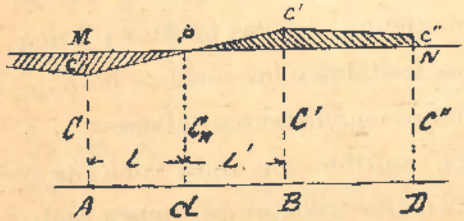
$p =$ pendiente por metro $= \frac{h}{d}$

Se desea conocer la cota intermediaria $h'$ á la distancia $l$, del punto A.

De $1 : p : l : h'$ se tiene $h' = pl$ y también, $l = \frac{h'}{p}$ de donde $c'' = c + pl$

Si no se quiere calcular ó hacer uso de la pendiente por metro, se tendrá

$$c'' = c + \frac{l}{d}(c' - c)$$



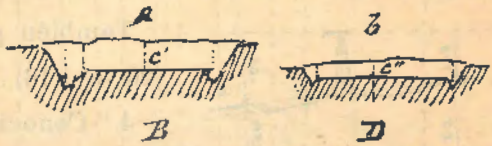

Sea en el perfil adjunto, c.c' c'' las cotas del terreno y C, C' C'' las cotas rojas del proyecto, MN la razante del proyecto en rampla de $p = \frac{DN - AM}{AD}$

ó tambiém $p = \frac{(C'' - c'') - (C + c)}{AD}$

Si AB = d, el *punto de paso* P se hallará á la distancia l, y se tendrá

$$l = \frac{dc}{c + c'} \text{ y } l' = \frac{dc'}{c' + c}$$

Para el cálculo de los desmontes y terraplenes existen varias fórmulas empíricas y métodos más ó menos expeditivos, pero la base fundamental de todos ellos está establecida en la apreciación del volumen de sólidos. Si en c' y c" los perfiles transversales del proyecto son los de las figuras a y b. fácil será calcular la superficie de cada perfil y hallar s para la c' y s' para la c", luego siendo d la distancia que separa c' y c" el volumen comprendido entre esos dos perfiles será $V = \frac{s + s'}{2} \times d$.




Asi mismo se tendrá para el volumen hasta el punto de paso, cuya sección es la de un triángulo $V = \frac{1}{2} (s \times l')$

Para aplicar sobre el terreno, un perfil determinado, es decir para poner las estacas que sirven de guía á los peones para ejecutar los terraplenes y los desmontes, se procede en general como sigue:

1.° Desde el punto O de partida ya señalado en el primer estudio, se vuelve á trazar el eje.

2.° Desde el mismo punto se miden y señalan con buenas estacas, las distancias marcadas en el perfil.

3.° Se coloca el nivel en un punto cualquiera desde donde se vean el punto O y las estacas y colocando la mira sobre el punto O se observa la altura, luego conociendo ésta y la diferencia que debe haber, según el perfil difinitivo, entre cualquiera de los otros puntos y el de partida, se deduce la altura de mira que debe corresponder para las estacas 1. 2. 3. etc.

Por ejemplo: la lectura sobre la mira puesta en el punto A cuya cota es 20$^m$ ha dado 1$^m$ 16, se tiene para la estación siguiente, cuya cota debe ser 19.91:

diferencia, $20 . - 19.91 = 0{,}09$ más bajo;

luego la altura de mira que corresponde á la estaca 1.ª será $1^m16 + 0.09 = 1^m25$.

También puede hacerse:

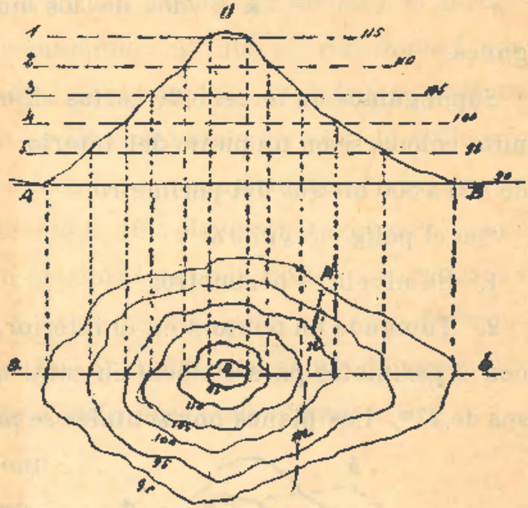
$(20 + 1{,}16) . - 19.91 = 1.25$

4.° Conocida la altura que debe corresponder á una estaca, se clava ésta un poco, se coloca la mira encima y se golpea aquella hasta que la línea de fe del nivel corresponda á la altura que se debe leer en la mira.

## NIVELACIÓN DE UNA SUPERFICIE Y TRAZADO DE LAS CURVAS DE NIVEL

Para poder representar la conformación de un terreno ó sea una superficie y darse una idea fija de sus ondulaciones para poder calcular cualquier trabajo que quiera hacerse en él, se ha imaginado, la existencia de una serie de planos horizontales y equidistantes que desde el punto más elevado del terreno cortarían este hasta llegar al plan de comparación.

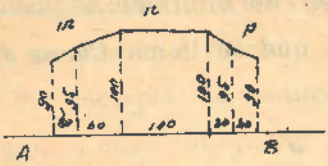
Como se concibe facilmente, si estos planos existieran en realidad, sobre todo en un terreno muy quebrado, cada uno de ellos representaría una sección diferente; es justamente el límite de esa sección que se llama *Curva de Nivel.*




En la adjunta figura se vé la disposición imaginada para los planos horizontales y perpendiculares á la vertical del punto O, y por la proyección horizontal se comprende como todos los puntos situados sobre el plano 3. 3, se hallarán á igual altura sobre el plano A. B.

Conociendo, pues, varios puntos de cualquiera de esos planos, así como la distancia de ellos á la vertical del punto O, será fácil trazar la proyección y dibujar así las curvas que por su proximidad ó alejamiento entre ellas indicarán la menor ó mayor pendiente del terreno.

Por la inspección de la figura, se vé que cualquier punto que se halle sobre la tercer curva tendrá $100^{m}$ de elevación sobre el plano de comparación AB, y midiendo la distancia de ese punto hasta el O cuya cuota es 115, fácil será hallar la pendiente ó formar un perfil cualquiera, como ser el de la línea m. m. p.



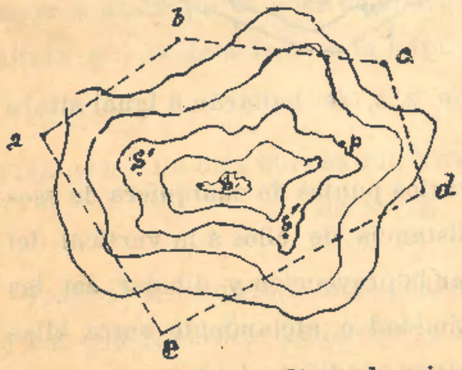
En cuanto á la determinación práctica de los puntos de cada curva de nivel hay varios métodos de los cuales veremos algunos.

Supongamos un terreno de cortas dimensiones que permita colocarse en un punto del interior que no diste más de 300 á 500 metros del perímetro.

Sea el polígono a b c d e:

1.° Se nivela el perímetro;

2.° Tomando un punto S en el interior, se le relaciona con el perímetro para conocer su cota, que supondremos sea de 27$^{m}$. Los planos horizontales se proyectan: á 1$^{m}$ el uno del otro (podrían estar á 2, 3, 10, etc., según el grado de exactitud del trabajo y la pendiente del terreno.



3.° Se coloca el instrumento en un punto S', y se lee la altura de mira de S que supondremos de 0$^{m}$32, luego el plano que pase 1$^{m}$ más bajo tendrá por altura de mira:

$$1^{m}00 + 0.32 = 1^{m}32$$

4.° Se manda el ayudante con la mira y estacas, se la hace caminar á uno y otro lado hasta encontrar un punto, donde la altura de mira corresponde á 1 $^{m}$ 32; de la misma manera se colocarán varios puntos con la misma cota los que quedarán así sobre la misma curva ó plano.

5.° Si para el 3 ó 4 plano ya no alcanzara el largo de la mira para medir la altura debida, se mudará el instrumento á un punto cualquiera S'' que se relacionará con un punto ya acotado p por ejemplo y, conociendo su altura de mira como en S, se procederá como ya queda indicado.

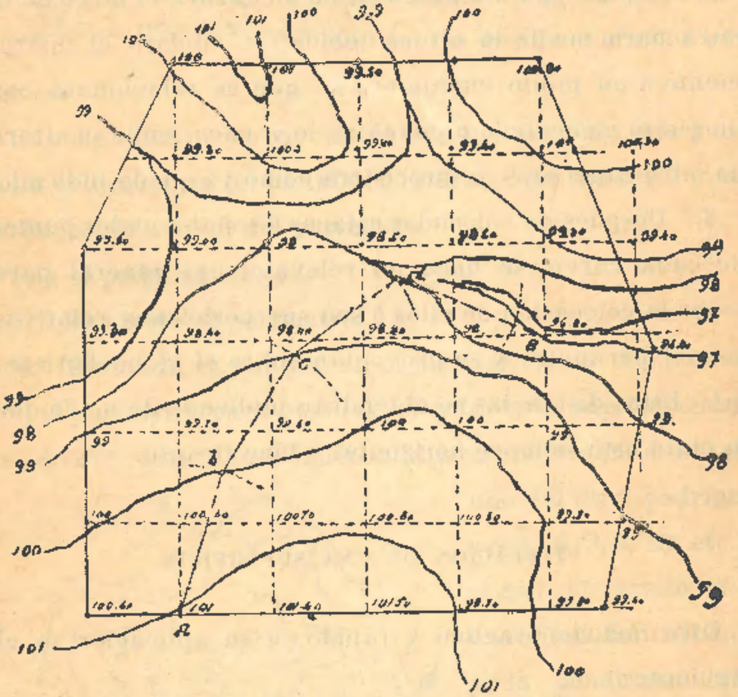
6.° Después de colocadas estacas ó señales en los puntos de cada curva, se hace un relevamiento general para tener la colocación de ellos ó sea sus posiciones relativas con el perímetro y se proyectan sobre el plano horizontal. Estas distancias se obtendrán midiendo de modo que la cinta esté siempre horizontal y bien tirante.

### NIVELACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Otro método práctico y rápido en su aplicación es el siguiente:

Sea el polígono ABCDEF cuya nivelación interna se quiere hacer para conocer sus verdaderas depresiones, á fin de confeccionar, por ejemplo, un proyecto de irrigación ó desagüe, ó por cualquier otro motivo.

Se comenzará por dividir todo el terreno en cuadrados de 10, 20, 30, 50 ó más metros por costado según la extensión del terreno y el grado de exactitud que se quiera obtener. En cada vértice de esa división se colocará una estaca (de 50 cents.) bien clavada y visible sobresaliendo de 5 á 10 centímetros del suelo. Esta división regular puede hacerse cualquiera que sea la figura del polígono; conviene señalar con estaca las intersecciones con



el deslinde y aún pasar más allá para completar los cuadrados como ser en el caso presente los puntos m. m' m'', n. n' n'', p. p' p'', etc.

Luego de preparada así la superficie á nivelar se procede á la nivelación compuesta de todas las estacas, partiendo para esa operación ya del río de donde se quiere desviar el agua, ya de un punto de referencia cualquiera ó simplemente de un punto del perímetro.

La nivelación se hará procediendo por orden numérico, empezando por uno de los esquineros, sea del punto E y siguiendo por todas las estacas hasta D, luego pasando á la segunda línea a... m, y después F... n, etc. De esta manera el apunte de la libreta no ofrecerá duda alguna al calcular las cotas. Si se encontrara al nivelar una línea algún accidente, como ser una zanja, un arroyo, una depresión mayor, etc., se tomarán las cotas correspondientes anotándolas en el orden que le asigna su situación entre las estacas.

Fácil es comprender que según la extensión de esa superficie habrá que hacer una ó varias estaciones.

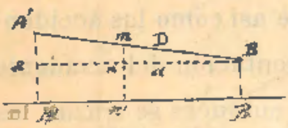
Calculadas las cotas relacionadas al punto de referencia ó á una cota asignada al punto de partida y construído el plano indicando la división cuadricular, se escribe en cada estaca la cota correspondiente así como las accidentales conjuntamente con la representación del accidente que ha dado lugar á ellas y recién entonces se trazan las curvas de nivel, teniendo presente para facilitar ese trabajo las anotaciones tomadas en el terreno con el propósito de representar más exactamente la superficie.

Finalmente con este plano acotado se calcularán las razantes más convenientes al proyecto que se debe confeccionar y los movimientos de tierra que de él resulten, pues cada línea representará un perfil en el cual podrá establecerse la razante del proyecto; con este fin será conveniente adoptar los perfiles en un sentido como bases y en el otro como determinantes de las pendientes á adoptarse, sin que por esto dejen unos y otros perfiles de representar igual valor.

### PLANOS ACOTADOS

En algunos casos pueden suprimirse las curvas de nivel y sólo indicar sobre el plano topográfico las cotas de la nivelación marcando los puntos precisos de su observación, estos se llaman planos acotados.

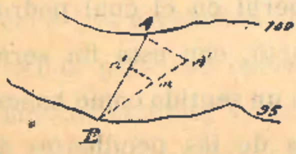
Pero, en un plano acotado donde han de trazarse las curvas de nivel con una aproximación satisfactoria; puede apreciarse mejor la línea dependiente que liga dos cotas consecutivas, y que puede considerarse como no interrumpida; luego, llamando h la diferencia de las 2 cotas y D la distancia real que separa los mencionados puntos, se tendrá para la distancia horizontal d que figura con el




Plano de comparación

plano angulo pendiente $\delta$, sen $\delta = \frac{h}{D}$ distancia horizontal d, $d = D \cos \delta$ ahora suponiendo que las cotas de los puntos A y B sean para $B = 23.20$ para $A = 25.35$ y que se quiera trazar la curva de los 24 metros que cae más ó menos en m siendo $h = 25{,}35 - 23{,}20 = 2^{m}15$ y $mn = 24 - 23.20 = 0.80$ de los triángulos m B n, A B a

$$Bn : mn :: Ba : h, \quad Bn = \frac{mn \cdot Ba}{h} = \frac{0.80 \times d}{h}$$




De lo que precede se deduce también que el triángulo B A a de la figura anterior corresponde sobre un plano con curvas de nivel al triángulo A A' B de la adjunta figura, en el que A A' = h representa la *equidistancia* de los planos paralelos y A' B la línea dependiente natural, de donde se desprende que sobre un plano con curvas de nivel puede trazarse una línea que mantenga una determinada pendiente.

De lo que precede se deduce que sobre un plano acotado y con curvas de nivel, facil es trazar una línea de pendiente determinada, como cuando se trata de trazar una acequia con el menor movimiento de tierra.

Sea trazar sobre un plano á la escala de $\frac{1}{1000}$ una razante con una pendiente de $1^m$ por 100, sea 0,01 por metro.

El plano tiene las curvas de nivel trazados de metro en metro, luego el desarrollo de la razante entre dos curvas deberá ser de $1^c : 1^m : 100^{cn} : d = 100^m$.

Así, pues, si desde el punto de partida a, y con una abertura de compás igual á $100^m$ (á la escala del plano) se traza un arco de círculo, este cortará una curva inmediata (de los $99^m$) en el punto b, que será el segundo punto de la línea proyectada.

Repitiendo la misma operación desde b y con el mismo radio de $100^m$, pues que las curvas distan $1^m$, se fijarán sucesivamente los puntos c d — del trazado proyectado.

Luego, tomando gráficamente los ángulos, podrá ejecutarse el trazado sobre el terreno y salvar entonces cualquier error ó diferencia.

## PRESENTACIÓN DE PROYECTOS Y ESTUDIOS DEFINITIVOS

El Departamento Nacional de Ingenieros ha dispuesto lo siguiente:

Los planos generales se construirán á una de las escalas

$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{2000}, \frac{1}{2500}, \frac{1}{5000}, \frac{1}{10000}$$

según la magnitud del trabajo y sus detalles.

Para el perfil longitudinal se adoptará la misma escala del plano general para las distancias horizontales y una escala décupla para las alturas.

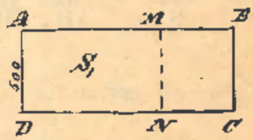
## División de Terrenos

### ANALÍTICA Y GRÁFICAMENTE

Se presenta con mucha frecuencia el caso de tener que dividir un terreno de tal ó cual manera y con partes iguales ó proporcionales; esta operación presenta más ó menos dificultades según la regularidad ó irregularidad de la figura del terreno y también por las condiciones especiales del problema á resolver.

Cada caso tiene su particularidad y solo se pueden exponer las principales bases de operación que pueden encontrar su aplicación en la práctica.

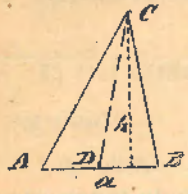
La división de una figura regular en dos ó más partes iguales no puede ofrecer dificultad alguna, basta recordar la fórmula de la superficie de una figura cualquiera, para según el caso, despejar la incógnita que se necesite, por ejemplo: si en el paralelógramo A B C D, se debe deslindar x una superficie $S_1 = 625.000$ m/c. sobre el costado AD = 500 m. se tendría para la superficie AD MN = $S_1$  $S_1 = AD \times DN$, luego siendo DN la única cantidad desconocida su valor sería dado por




$$DN = \frac{S_1}{AD} = \frac{625.000}{500} = 1.250 \text{ m.}$$

Conviene pues buscar la solución de los problemas que pueden presentarse en las figuras irregulares.

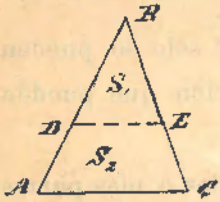
1.º Dividir el triángulo A B C en dos partes iguales por una línea que salga de uno de sus vertices.




Si el vertice dado es C, y se divide AB en dos partes iguales se tendrá formados dos triángulos de igual base AD = DB, é igual altura h, común á todo el triángulo; se tendrá $\frac{AD \times h}{2} = \frac{DB \times h}{2}$

De la misma manera se procederá si hubiera que hacer la división del triángulo en 3 ó más partes.

2.º Dividir un triángulo A B C en dos partes iguales por medio de una paralela á uno de sus costados; sea una paralela á AC.




Como las áreas de dos triángulos son entre sí como el cuadrado de sus lados homólogos, se tendrá llamando S la superficie total del triángulo A B C y $S_1 = S - S_2 = \frac{S}{2}$ la del triángulo A D E que se encontrará deslindado una vez deslindada la superficie A B C D

$$S : s_2 :: \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2 \quad \text{y haciendo} \quad AB = c \quad y \quad BD = e$$

$$s : s_2 :: a^2 : e^2; \qquad e = \sqrt{\frac{s_2\ a^2}{s}} = \frac{1}{2}\left(\log.\ s_2 + {}^2\log.\ a + c\log.\ s\right)$$

De igual manera se procedería si la división hubiera de hacerse en 3 ó más partes, teniendo presente que según el caso la superficie del triángulo A D E será siempre la diferencia de la superficie total menos la de la parte inferior D E A C cualquiera que sea.

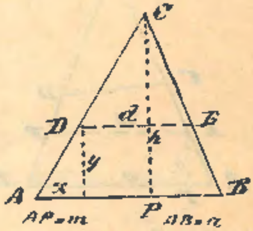
Por ejemplo sea Z la superficie que deba separarse bajo las líneas ACDE; se tendría $S_1 = S - Z$, luego aplicando el mismo principio

$$S : (s - z) :: \overline{AB}^2 : \overline{BD}^2 ; \quad S : (s - z) :: a^2 : e^2$$

$$e = \sqrt{\frac{(s - z)\, a^2}{s}}$$

---

Este mismo problema puede presentarse bajo la siguiente forma. Conocida la línea $AB = a$, y los ángulos en A y B sea $CAB = \varphi$, $CBA = \gamma$, separar una superficie S por una paralela á AB.




Con los ángulos en A y B y con la línea $AB = a$ puede cerrarse el triángulo ABC y hallar AC; $1 : \cos\varphi :: AC : AB$; $AC = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ y asi mismo la altura $CP = h$; $h = \operatorname{sen}\varphi\, AC$.

De la semejanza de los triángulos, ADR y ACP se tiene haciendo, $DE = d$

$AR = x$, $DR = y$, $AP = m$; $x : y :: m : h$, $hx = ym$, $y = \dfrac{hx}{m}$

Superficie ABDE........................ $2s = (a + d)\, y$

de igual manera se encontrará $\qquad y = \dfrac{h\,(a - d)}{a}$

luego combinadas estas tres ecuaciones su resolución dará el valor de $d = DE$

$$d = \sqrt{a\left(a - \frac{2s}{h}\right)} = a\sqrt{1 - \frac{2s}{ah}}$$

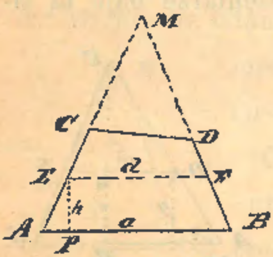
Conocido el valor de d fácil será deducir el de y, y aún el de x, se tendrá:

$$y = \frac{2s}{(a+d)}; \qquad x = \frac{4}{\tan.\varphi}; \qquad AD = \frac{y}{\text{sen.}\varphi}$$

también puede hallarse directamente el valor de y. x. combinándose las tres ecuaciones anteriores

$$y = h\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{ah}}\right) x = m\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{ah}}\right) = AP\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{ah}}\right)$$

3.—Dividir en dos partes iguales un cuadrilátero ABCD




en el cual se conocen los 4 lados— estableciendo una línea paralela á AB. Como todo cuadrilátero irregular forma parte de un triángulo, puede calcularse este como en el presente caso en que el cuadrilátero ABCD forma parte del triángulo MAB.

Conocidos esos elementos, se deducirá la superficie del triángulo total y luego el largo de la línea AE como en el caso anterior sea

$$S_t : S_1 :: \overline{MA}^2 : \overline{ME}^2 = (MA - AE)^2$$

También puede resolverse el problema como en el número anterior, hallando las dimensiones del trapecio ABEF sea:

$$S_1 = \frac{AB + EF}{2} \times EP = \left(\frac{a+d}{2}\right) h.$$

*Ejemplo.* — Angulo en $A = 45^o$, en $B = 88^o$, $AB = 200^m$, $AC = 120$, $AD = 1(0$

Superficie á entregar entre A B E F = $9000^m$

ángulo en $M = 180 - (A + B) = 47°$

$$MB = \frac{AB \text{ sen. } A}{\text{sen. } M}$$

log. 200m = 2.30103
log. sen. 45° = 9.84949
cos. log. sen. 47 = 0.13587

2.28639

M B = 193.80

sup. total $S = \left(\frac{200 \times 193.8 \text{ sin } 88°}{2}\right)$

log. 200 = 2.30103
log. 193.8 = 2.28639
log. sin 88° = 9.99974

4.58716
log. 2 = 0.30103

4.28613

S = 19370mc.

área á entregar $= S_t \; S : S_1 :: \overline{BM}^2 : \overline{MF}^2$

$$MF = \sqrt{\frac{9000 \times (193.8)^2}{19730}}$$

log. 9000 = 3.95424
2 log. 193.8 = 4.57278
cos. log. 19370 = 5.71387

log. $\overline{MF}^2$ 4.24089

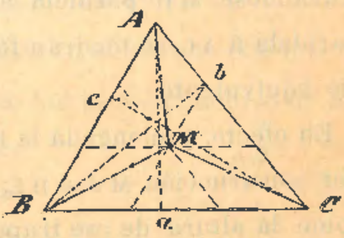
log. M F = 2.12049

M F = 132.10

$BF = MB - MF = 193.8$
$- 132.10$

B F = 61.7

**4.—Dividir un triángulo A B C en tres partes equivalentes** por líneas que partiendo de cada uno de los vértices se reunan en un mismo punto central **M.**

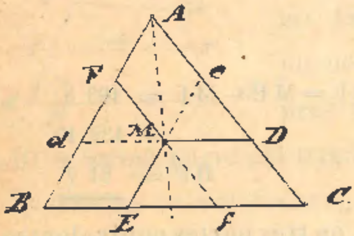



Si de A se baja la perpendicular A a sobre B c, será la altura del triángulo; si por la tercera parte de A a, se traza una paralela á BC, sobre esa paralela deberá encontrarse el punto M porque el triángulo que resulte BMC tendrá por superficie $\frac{1}{2}\left(BC \frac{Aa}{3}\right)$ siendo la del total $\frac{1}{2}$ (BC$\times$A a).

Bajando de B una perpendicular B b sobre AC, también se tendrá sup. total $= \frac{1}{2}$ (BC $\times$ B b) y si se divide B b en 3 partes iguales y por una de ellas se traza la paralela á AC, esa línea que también contiene el punto M, cortará la paralela á BC fijando M por la intersección de ellas, luego también se tendrá $S_3 = \frac{1}{2}\left(AB\frac{Bb}{3}\right)$.

Igual operación hecha con la perpendicular bajada de C sobre AB, servirá de verificación á las anteriores y así se tendrán tres triángulos ACM, AMB y BMC, equivalentes entre sí.

5.—De un punto M situado dentro del triángulo A B C dividir este en tres partes equivalentes por líneas respectivamente paralelas á los costados.



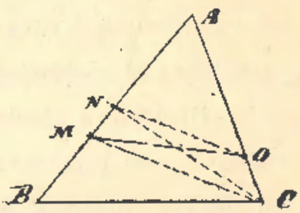

Por el punto a, mitad de BC, trácese la mediana A a y en el tercio de su extensión fíjese el punto M; entónces trazándose MD paralela á BC, ME paralela á AB y MF paralela á AC se tendrán formados 3 trapecios de superficie equivalente.

En efecto, prolongada la línea M D, resulta M d = M D y por construcción M d = B E; luego $\frac{1}{2}$ (MD + EC) = $\frac{1}{2}$ BC y, como la altura de ese trapecio es la tercera parte de la altura del triángulo A B C, resulta que la superficie de D M C E es la tercera parte del total.

De la proporcionalidad que resulta de la división de los lados de un triangulo por paralelas equidistantes, resulta también que C D = $\frac{1}{3}$ A C, B E = $\frac{1}{3}$ B A C y A E = $\frac{1}{3}$ A B, luego la solución del problema puede también obtenerse trazando las líneas D d, E c, F f respectivamente paralelas á las líneas B C, A B y A C, el punto de intersección de las tres líneas será el punto M.

6.—Dividir el triángulo A B C en dos partes equivalentes por una recta que parta de un punto M dado sobre uno de sus costados.

Hágase: A N = N B y N O paralela á M C, la línea M O será la divisoria pedida.

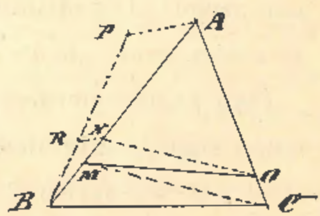



En efecto: sup. triang. A C N = sup. trian. B C N; pero sup. A M O = sup. A N C, pues que ambas tienen de común el triángulo A N O y que los triángulos N O M y O M C son equivalentes del paralelismo de N O y M C—; luego A O M = A N C y por lo tanto sup. A M O = sup. M O B C.

Es conveniente observar que por efecto de las paralelas N O y M C se tiene; A D : A C : : A N : A N de donde

$AO = \frac{AC \times AN}{AM}$ lo que permite fijar en el terreno el punto O.

Si la división del triángulo hubiera de hacerse de tal manera que las dos superficies fueran entre sí como en la pro porción de m á n; se dividiría A B en dos partes tales que se tuviera: B N : N A : : m : n sea




$$AN = \frac{BN\,n}{m}$$

Sea M el punto dado en el triángulo ABC y $m = 3$; $n = 5$ Sobre una línea arbitraria BP y a una escala cualquiera, mídase $BR = 3$ y $RP = 5$, se tendrá

$BR : RP :: BN : NA$ sea $3 : 5 :: BN : NA$ de donde:

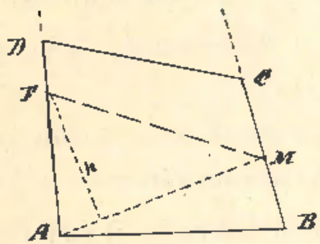
$$AN = \frac{BN\,5}{3} = \frac{BN\,n}{m}$$

tambien puede hacerse

$$AB : (m + n) :: BN \,.\, n, \quad BN = \frac{AB.\,n}{(m + n)}$$

de una manera ú otra fijado el punto N se procederá para establecer MO como en el caso anterior.

7.—Dividir un cuadrilátero ABCD en dos partes equivalentes por una recta que parta de un punto M fijado en uno de los costados. Se suponen conocidos todos los elementos del cuadrilátero.




Sea ABCD el cuadrilátero en que se tiene

$AB = 1000$, $AD = 824$,

$BC = 622$ y $BM = 320$

asi como el ángulo en $A = 91°$ y en $B = 79°$.

Como se ha dicho puede completarse el triángulo que comprende el cuadrilátero, sea el triángulo AZB y luego proceder como queda expuesto en el caso precedente.

Pero puede operarse de una manera más sencilla y es como sigue: Admitiendo que la mitad de la superficie total sea $S = 426.000$ ó también que ésta sea la superficie que hay que deslindar en las condiciones estipuladas: calculando primeramente la superficie del triángulo

A B M con AB = 1000, BM = 320 y ABM = 79°.

$$S = \frac{AB \times BE \times \text{sen } 79}{2.}$$

log. 1000 = 3.00000
log. 320 = 2.50515
log. sin 79° = 9.99195
5.49710
— log. 2 = 0.30103
log. S = 5.19607
S = 157020.mc

Calculando ahora el valor de la diagonal AM por

$$\text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \text{tang.}\frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)(a-b)}{a+b}$$

$$\frac{A\,B}{2} = \left(\frac{180-79}{2}\right) = 50.^\circ 30$$

log. tang. 50.° 30 = 0.08390
log. (a — b) = 680 = 2.83251
C log. (a + b) = 1320 = 6.87943

$$\text{tig. tang.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = 9.79584$$

$$\frac{A-B}{2} = 32.^\circ$$

$\widehat{A\,M\,B} = 50.^\circ 30 + 32.^\circ = 82.^\circ 30$

M A B = 50.° 30 — 32.° = 18.° 30

sen. (AMB) : AB :: sen. (MBA) : AM
sen. 82.° 30 : 1000 :: sen. 79.° : AM
log. 1000 = 3.00000
log. sen. 79.° = 9.99195
C log. sen. 82.30 = 0.00373
2.99568
AM = 990m

Ahora se tiene

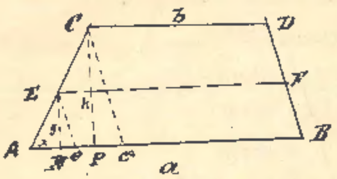
| | |
|---|---|
| Superficie á integrar... = | 426.000 |
| » AMB....... = | 157.020 |
| Faltan entregar... | 268.980 |

Esta superficie habrá que completarla en el triángulo A M F y se tendrá de: $S = \frac{AM \times AF \text{ sen. } (F\,A\,M)}{2.}$

siendo F A M = 91.° — 18.° 30' = 72.° 30

$$A\,F = \frac{2s}{A\,M \text{ sen. } A} = \frac{268980 \times 2}{990 \times \text{sen. } 72.^\circ 30}$$

log. 268980 = 5.42971
log. 2 = 0.30103
C log. 990 = 7.00432
C log. sen. 72.° 30 = 0.02058
log. A F = 2.75564
A F = 569.70




8—De un trapecio A B C D cuyos elementos son conocidos separar una superficie dada por una paralela á la base mayor llamando A B = a, C D = b, altura total C P = h, A P = c altura de la figura á calcular E N = y, A N = x, E F = z superficie á entregar S.

de E A N y C A P; $x : y :: c : h$ de donde $x\,h = y\,c$ (1)

siendo E C, C c, D B paralelas se tendrá A e: y :: A c: h sea; $(a-z) : y :: (a-b) : h$ » » $y = \frac{h\,(a-z)}{a-b}$ (2)

de la superficie $S = \left(\frac{a+z}{2}\right) y$; $2s = (a+z)\,y$ » » $y = \frac{2s}{(a+z)}$ (3)

de la combinación de estas 3 ecuaciones se deduce

de 2 y 3; $\frac{h\,(a-z)}{(a-b)} = \frac{2s}{(a+z)}$; $\frac{h}{(a-b)} = \frac{2s}{(a+z)(a-z)} = \frac{2s}{(a^2-z^2)}$

de donde:

$$h = \frac{2s\,(a-b}{(a^2-z^2)} \text{ y finalmente } Z = \sqrt{\frac{2s\,(a-b)}{h} - a^2} \quad (4)$$

conocido el lado Z, se hallará y por $y = \frac{2s}{(a+z)}$ (5)

*Ejemplo.*— $a = 1400$, $b = 820$, $h = 320$, $s = 145000$ m.

de la figura que precede $(a-b) = 580$

Por fórmula (4)

log. 2 s = (290000) = 5.46240
log. (a − b = 580 = 2.76343
+ c. log. h = 320 = 7.49485

5.72068

$\frac{2S\,(a-b)}{2}$ = 525650

− a² = (1400)² = 1960000

$\frac{2s\,(a+b)}{h} - a^2$ = 1434350 = z²

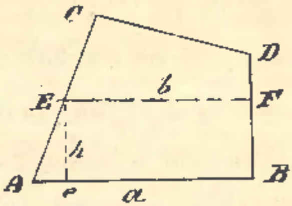
log. z² = 6.1566751

log. z = 3.0783375
z = 1197.68

Por fórmula (5)

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. 2 s = | 5.46240 | a = | 1400 |
| log. (a + z) = | 3.41457 | z = | 1197.68 |
| log. y = | 2.04783 | (a + z) | 2597.68 |
| y = | 111.64 | | |

9—En un cuadrilátero ABCD recto en B se trata de separar una superficie S, por una paralela á un lado A B = a. Llamando A B = a y el ángulo E A B = , $\alpha$ así




como Ee = h, Ae = x = (a — b) se tiene

del triángulo A e E $\qquad h = (a - b) \text{ tang. } \alpha$

y la superficie $\qquad 2\,s = (a + b)\,h$

resueltas estas ecuaciones se tendrá

$$2\,s = (a - b)\,(a + b) \text{ tang. } \alpha = a^2 \text{ tang. } \alpha - b^2 \text{ tang. } \alpha$$

de donde $b = \sqrt{\dfrac{2\,s - a^2 \text{ tang } \alpha}{\text{tang. } \alpha}}$ (1) y luego $h = \dfrac{2\,s}{(a+b)}$ (2)

*Ejemplo* — haciendo AB = a = 977.$^{m}$, ángulo en

A = $\alpha$ = 78.o18 y S = 450000.$^{m}$

Fórmula (1) $\qquad\qquad$ Fórmula (2)

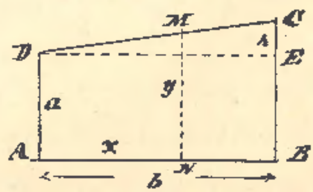
$$2 \text{ log. } a = 5.9795992$$
$$\text{log. tang. } \alpha = \underline{0.6838408}$$
$$6.6636400$$
$$= -\ 4.609.353$$
$$2\,s = +\quad 900.000$$
$$(2\,s - a^2 \text{ tang. } \alpha) = \underline{3.769333} = 6.5692978$$
$$-\text{ log. tang. } \alpha = \underline{0.6838408}$$
$$2 \text{ log. } b = \underline{5.8854570}$$
$$\text{log. } b = 2.9427285$$
$$b = \quad 876{,}45$$

$$a = 977$$
$$b = \underline{876.45}$$
$$(a + b) = 1853.45$$

$$AE = \frac{h}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{log. } 2\,s = 5.9542425$$
$$-\text{ log. } (a + b) = \underline{3.2679692}$$
$$\text{log. } h = 2.6862733$$
$$\underline{h = \quad 485{,}89}$$
$$\text{log. } h = \ 2.6862$$
$$-\text{ log. sen. } \alpha = \underline{9\ 99068}$$
$$2.69539$$
$$A\,E = 495{,}48$$

10 — En un cuadrilátero A B C D con sus ángulos rectos en A y B, sacar una superficie S por medio de una perpendicular á la base A B




llamando A D = a, $\quad$ A B = b,

C D = c; $\quad$ C E = h, $\quad$ C B = a + h, ángulo $CDE = (CDA - 90^\circ) = a$; llamando $r$ al incremento ó tangente correspondiente al ángulo $a$

será; $r = \frac{h}{b}$ de donde $y = a + xr$ sea $x = \frac{y - a}{r}$

Tambien se tiene, $2s = (a + y)\,x$, de donde $x = \frac{2s}{a + y}$;

Igualando esos dos valores de $x$ se tiene

$\frac{2s}{a + y} = \frac{y - a}{r}$ de donde $2sr = (a + y)(y - a) = a^2 - y^2$

de ahy $y = \sqrt{2sr + a^2}$ ó tambien $y = \sqrt{2s\,\text{tang.}\,a + a^2}$

conocido $y$, se tendrá $x = \frac{2s}{a + y}$

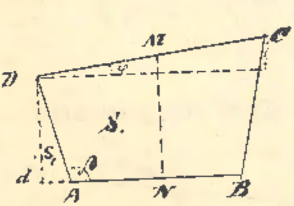
*Ejemplo*—haciendo $AD = a = 2300.^m$, ángulo $CDE = a = 1^\circ.20'$

$s = 2.325.740.^m$, $2s = 4.641.480$.

log. 2 s [4.651.480] = 6.6675911
log. tang. 1°.20' — = 8.3668955
log. (2 s. tang. $a$) = 5.0344856 = 108.244
(a²) = 2300² = 5.290.000
y² = 5.398.244
M N. = y = 2323.82
a = 2300
(a + y) = 4623,82

log. 2 s = 6.6675911
— log. (a + y) = 3.6649990
log. x = 3.0025921
A N = x. = 1095,98

11.—En un cuadrilátero cualquiera A B C D, separar una superficie S por medio de una línea perpendicular á la base.




Sea $AB = a$, la base sobre la cual se debe levantar la perpendicular M N que encierre la superficie S dentro de los límites A D M N. Todos los elementos y ángulos son conocidos.

Calculadas las coordenadas de A D, d A = A D cos $b'$, d A = A D sen. $b'$, y $S_1$ la superficie del triángulo A d D. Se resolverá el problema como en el caso anterior 10, separando dentro de las líneas D d N M la superficie

$$(S + S_1) = S_t \qquad \text{ángulo } a = 1.^\circ\, 20'.$$

*Ejemplo:* C D = 495, 48.; D A N = 101.°42', D A d = $b'$ = 78.°18';

| | | |
|---|---|---|
| D A sen. $b'$ = 485,18 = D d = a | S .................... | 400.000 |
| D A cos. $b'$ = 100,47 = d A | Sup. $S_1 = \frac{1}{2}$ (A d + D d) = | 24.373 |
| | $S_t$ = | 424.373 |
| | 2 $S_t$ = | 848.746 |

$$\text{por. } M\,N = y = \sqrt{2\,S \text{ tang. } a + a^2}$$

log. 2 S = 5.9287774    log. = 485.18 = 2.6859208

log. tang. $a$ = 6.3668945    log. $a^2$ = 5.3718426

log. 2s tang. $a$ = 4.2956719    $a^2$ = 235.419.2

2s tang. $a$ = 19.754.75

+ $a^2$ = 235.429 20    $x = \dfrac{2\,s}{a + y}$

$y^2$ = 254973.95, log. = 5.4064942 | a = 485.18    log. 2 s = 5.9287774

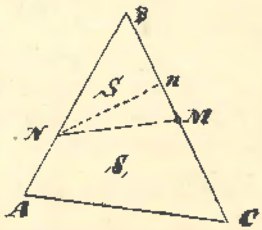
log. y = 2.7032471 | y = 504.94    log. (a + y) = 2.9956.878

y = 504.94;    (a + y) = 990.12    — log. x = 2.9330.866

A N = d N - d A = 857.2 — 100.4    x = 857.203 = d N

A N = 756.8

12.—En el triángulo A B C, conocido por sus elementos y superficie $S_t$, separar una superficie S, en uno de sus ángulos y por una línea que parta del punto M sobre uno de sus lados.




Sup. $2\,s = B\,M \times h$, de donde $h = \frac{2\,s}{B\,M}$

de 1 : sen. B :: B N : h, se tiene

$$h = B\,N \sin B$$

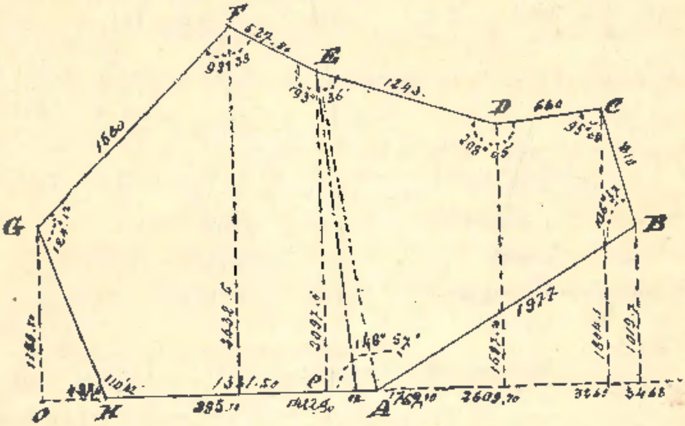
Luego $\frac{2\,s}{B\,M} = B\,N \sin B$    de donde

$$B\,N = \frac{2\,s}{B\,M \sin B}$$

Como B M se conoce por condición, con B N se fijará el punto N para trazar la línea M N.

## APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS ANTERIORES

13 — Calculadas las coordenadas del polígono adjunto se desea hacer en él varias divisiones.




La superficie total es de

$S_t =$

sup. a = 252.867.<br>
» b = 1.352.942<br>
» a = 1.195.414<br>
» d = 2.252.043<br>
» c = 1.140.088<br>
s — = 284.921

6.478.275

— A.B.O. = 855.030

$S_t$ = 5.623.245

1°. Dividir el polígono en dos partes equivalentes por una recta que salga del vértice E. Se empezará por calcular la superficie encerrada dentro del polígono cerrado por la línea EA que tiene y = 2097.6; x = 346.8

b = 1.352.942
c = 1.195.414
Sup. A H G F E e = 2,548 356
1761.1
— 1422.3
Sup. A e E = $\frac{346.8 \times 2097,6}{2}$ = 363.724
S = 2.912.080
$\frac{1}{2}$ $S_t$ = ....... 2.811.622
Exceso = 100.458

Línea E A

tang. a = $\frac{y}{x}$

log. y (2097.6) = 3.32722
log. x (346.8) = 2.54079
log. tang. a = 0.78643
tang. a = 80°42'48''

línea E. A. = $\frac{y}{\text{sen. a}}$

log. y = 3.32722
log. sen. a = 9.99427
log. E A = 3.33295
E A = 2152 50

Este exceso habrá que deslindarlo en un triángulo E A n sobre la base c. A y con la fórmula del problema 12.

A n = $\frac{2\,S}{(A\,E)\ \text{sen. a}}$ se hallará la cantidad á medirse de A hacia H

log. 2 S = 200.916 = 5.30302
c log. A E = 2152,5 = 6.66705
c log. sen. a = 80°42'48'' = 0.00573

log. A n = 1.97580
A n = 94.58
H n = 1331.5 — 94.58 = 1236.92.

cálculo de la línea n E y sus coordenadas

para n E

y = 2097.6 = e E
x = 346.8 — 94.6 = 252.2 = n e

tang. a = $\frac{y}{x}$

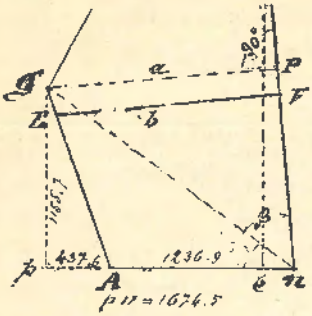
n E = $\frac{y}{\text{sen. a}}$

log. y = 3.32722
log. x = 2 40175
tang. a' = 0 92547
a' = 83°.13'46'' = H n

log. y = 3.32722
log. sen. a' = 9.99695
log. n E 3.33027
n E = 2139.32

Se trata ahora de dividir el polígono E F G H n recien deslindado en 2 partes equivalentes por una perpendicular sobre la línea E n.—

Como se conocen las coordenadas del punto g puede




formarse el polígono g p n P en el cual se conocerá; g p = 1155.7, p n = 1674.5 y el ángulo P n p = 83.º 13' 46'' las líneas g P, n P no se conocen y deben formar en P un ángulo recto.

Resolviendo el triángulo g p n se tendrá:

$$\text{ángulo } d = \frac{g\,p}{p\,n} \qquad \begin{aligned} \log.\ 1155.7 &= 3.062845 \\ \log.\ 1674.5 &= 3.223885 \\ \text{tang. } d &= 9.838960 \\ d &= 34.^o\,36'\,43'' \end{aligned}$$

$$g\,n = \frac{p\,g}{\text{sen. } d}$$ pero en el triángulo n g p,

$$n\,P = g\,n.\cos.\,(83.^o 13' 46'' - d); \qquad \text{luego } n\,P = \frac{p\,g\,\cos.\,b}{\text{sen. } d}$$

$$b = 83.^o\,13'\,46'' - 34.^o\,36'\,43'' = 48.^o\,37'\,03''$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. 1155.7 = | 3.062845 | coordenadas de n P | |
| log. cos. 48.º37' 03'' = | 9.820263 | P n'....... | 3.125716 = 1335.72 |
| | 2.883108 | sin. 83.º13'46'' = | 9.996960 |
| — log. sin. 34.36.43'' = | 9.754352 | log. 1345.18 = | 3.128756 |
| log. n. P = | 3.128756 | cos. 83.13'46'' = | 9.071595 |
| n P = | 1345.12 | n n'...... | 2.200351 = 158.31 |

Sup. g A n P

| | |
|---|---|
| g p P n' = | 1.888.730.34 |
| + P n' n = | 105.653.87 |
| | 1.994.384.21 |
| — g p H = | 252.867.00 |
| g A n P = | 1.741.517.21 |
| Sup. á deslindar. = | 1.415.811.00 |
| Exceso = | 335.705.21 |

Esta superficie de 335796, = S, hay que separarla por una paralela á g P; luego se aplicarán las fómulas del caso 9.

Para hallar $g\,P$ por medio de sus coordenadas

$x = p\,n' = p\,n - n'\,n = 1674.50 - 158{,}30 = 1516{,}20$

$y = P\,n' - g\,p = 1335{,}70 - 1155{,}70 = 180.0$

luego $g\,P = a = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x^2 = 32.400$ | $A = 101^\circ\,42'$
$y^2 = 2.298.863$ | $n = 83\ 13.\ 46$
$2.331.263$ | $P = 90$
| $274^\circ\,55'\,46''$

$g\,P = a = 1526.80$ | $A\,g\,P = t = 85\ 04\ 14$
| $360^\circ\ 00\ 00$

$$E\,F = b = \sqrt{\frac{2\ S}{\text{tang.}\ t} - a^2}\ ;\ h = \frac{2\ S}{a + b}\ ;\ g\,E = \frac{h}{\text{sen}\ t}$$

log. 2 S = (671412) = 5.8269891

— log. tang. $t$ (85° 04' 14'') = 1.0650143

$\log. \frac{2\ S}{\text{tang.}\ t} = 4.7619748 = \ldots\ldots\ldots\ 57.806.26$

— 2 log. a (1526,80) = 63615130 = .......... 2.298.863.00

$b^2 = 2.241.058.00$

$E\,F = b = 1.489.90$

$a = 1.626.84$

$(a + b) = 3.116.54$

log. 2 S = 5.8269891

— log. (a + b) = 3.4936671

log. h = 2.3333220 | log.......... 2.3333220

h = P F = 215.43 | — log. sin. $t$ = 9.9983900

log. g E = 2.3349320

g E = 216.23

resulta para el polígono n F E h; n F = 1345.12 — 215.43 = 1129.69

E F = 1489.70 A E = 1235 — 216.23 = 1018.77

Sup. = 1.405.811 mc.

## DIVISIÓN PROPORCIONAL

1.º—Dividir una cosa proporcionalmente á ciertas cantidades dadas, es hacer de modo que exista entre las partes divididas la misma relación, que entre los números citados.

Así, si se divide 49 en dos partes proporcionales á los números 4 y 3 se tendrá:

$$28 : 21 : : 4 : 3 \text{ . ó } = \frac{28}{4} = \frac{21}{3}$$

«Como regla absoluta puede decirse que para dividir « una cantidad proporcionalmente á ciertos números, se « hace la suma de estos, se divide con ella la cantidad « dada, obteniéndose así la razón que debe existir entre « las partes divididas; luego se multiplica esa razón por el « número que corresponde á cada parte y se obtiene así « la resolución del problema.»

Sea dividir 100 entre tres personas A, B y C en proporción á los números 5, 3 y 2 — tendremos

$$5 + 3 + 2 = 10 \text{ y } \frac{100}{10} = 10 \text{ luego la razón será}$$

10 y tendremos

$$\begin{aligned} A &= 10 \times 5 = 50 \\ B &= 10 \times 3 = 30 \\ C &= 10 \times 2 = 20 \\ & \qquad\quad \overline{100} \end{aligned}$$

Divídase 80 en dos partes proporcionalmente á los números 5 y 3 tendremos.

$$r = 5 + 3 = \frac{80}{8} = 10 \text{ luego } 1^a\ 10 \times 5 = 50$$

$$2^a\ 10 \times 3 = 30$$

$$\overline{80}$$

Como ejemplo de lo que precede, propongamos dividir una propiedad entre tres dueños, debiéndose hacer proporcionalmente al capital que cada uno ha invertido en la compra y debiendo tener igualmente un frente proporcional sobre la calle ó camino real.

El capital del 1.° es 10.000 $, el del 2.° 8.000 $ y el del 3.° de 7.000 $.

Sea el cuadrilátero A B C D el que debe dividirse proporcionalmente y en el cual se tiene:

$AD = 1990^m$ $AB = 1870^m$, $BC = 1560^m$ con frente á un camino; el ángulo interno $CBA = 116^o$ cuyo complemento $CBb = 64^o$ y el ángulo interno $DAB = 88^o\,30'$.

Principiando por hallar la superficie,

Cálculo de B d y D d como proyección de C B sobre A B

| | |
|---|---|
| log. sin 64° = 9.95366 | log. cos. 64° = 9.64184 |
| log. de 1560 = 3.19312 | log. 1560 = 3.19312 |
| 3.14678 | 2.83496 |
| C b = 1402 | B b = 683.80 |

Cálculo de A d y D d como proyección de A D sobre A B

| | |
|---|---|
| log. sin 83° 30 = 9.99985 | log. cos. 83° 30' = 8.41792 |
| log. 1990 = 3.29885 | log. 1990 = 3.29884 |
| 3.29870 | 1.71677 |
| 1989 = D d | 52 = A d |

$$d\,b = 1870 - A\,d + B\,d = 2500$$

$$S = \left(\frac{B\,d + C\,b}{2}\right) \times d\,b + \left(\frac{D\,d + A\,d}{2}\right) - \left(\frac{C\,b + B\,b}{2}\right) = \left(\frac{1402 + 1989}{2}\right)$$

$$\times 2501 + \tfrac{1}{2}\,(1989 \times 52) - \tfrac{1}{2}\,(1402 \times 683.3)$$

$S = 4.240.445{,}5 + 51714 - 478783 = 3.813.376$ metros cuadrados

I—Para repartir esa superficie proporcionalmente á los capitales de los compradores, buscaremos 1.° la razón (r) que será:

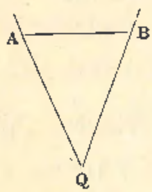
$$r = \frac{3.813.376}{10.000 + 8000 + 7000} = 152{,}535 \qquad \begin{aligned} \text{luego } S_1 &= 10000 \times r = 1.525.350m^2 \\ S_2 &= 8000 \times r = 1.220.280 \text{ »} \\ S_3 &= 7000 \times r = 1.067.746 \text{ »} \\ &\overline{\phantom{=}3.813.376m^2} \end{aligned}$$

II—Para hallar el frente proporcional será:

$$r = \frac{1560}{10.000 + 8000 + 7000} \quad \text{luego} \quad \begin{aligned} fr_1 &= 10.000 \times r = 624 \\ fr_2 &= 8.000 \times r = 499.4 \\ fr_3 &= 7.000 \times r = 436.6 \\ & \overline{\phantom{=}1.560} \end{aligned}$$

$$r = 0.0624$$

III—Para hacer la división busquemos ahora el triángulo complementario sobre A B y por la prolongación de los costados B C y A D.




el ang. en $Q = 180 - (91° 30' + 64°) = 24° 30'$

luego $\text{sen.}\ 24°30' : 1870 :: \text{sin.}\ 91°30' : Q\,B = 4508^{mt}$

y $\text{sen.}\ 24°30' : 1870 :: \text{sin.}\ 64° : Q\,A = 4053^{mt}$

de a h y; $S. = A\,Q\,B = \frac{A\,Q \times B\,Q \times \text{sen.}\ Q}{a\ r} = 3.788.181^{m/c}$

IV—Ahora pues, conociendo estos datos, podemos fácilmente hallar las dimensiones de la parte correspondiente al capitalista 1°. Ubicada sobre la linea A B pues tenemos, aumentando al triángulo A B Q, la superficie que corresponde a $S_1$ y aumentando al costado Q B el frente que corresponde al 1°., tendremos formado un nuevo triángulo p. m. Q, en el cual la linea p. m. es imaginaria y donde conocemos: la superficie, el lado

Q. m. y el ángulo en Q : tendremos pues; de la fórmula

$$S = \frac{Q\,p \times Q\,m \times \sin. Q}{2} \quad \text{sacamos}$$

$$Q\,p = \frac{s \times 2}{Q\,m \times \sin. Q}$$

$$Q\,m = Q\,B \times B\,m = 4508 + 624 = 5132$$

luego $\quad Q\,p = \log. 5313.531 = 6.72539$

$$\begin{array}{l} 3.788.181 \\ 1.525.350 \\ \hline 5.313.531 = S \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \log. 2 = 0.30103 \\ \hline 17.02642 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \log. 5132 = 3.71029 \\ + \text{sen. } 24^{\circ}30' = 961773 \end{array}\right\} = -13.32802$$

$$\overline{3.69840} = 4993{,}3 = Q\,p$$

de donde $A\,p = Q\,p - A\,Q = 4993.3 - 4053 = 940^{mt}$

para hallar p. m. diremos.

$$\text{tang.}\left(\frac{p+m}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{p-m}{2}\right) :: \left(Q\,p + Q\,m\right) : \left(Q\,p - Q\,m\right)$$

y conociendo los dos ángulos en p y m.

$$\text{sen. } Q : p\,m :: \text{sen. } p : Q\,m \qquad p\,m = \frac{\text{sen. } Q \times Q\,m}{\text{sen. } p}$$

Con este mismo proceder hallaremos las dimensiones de las otras fracciones ó sea la resolución completa del problema.

*Otro procedimiento:* fijados los puntos a b c que determinan el frente proporcional, conocido el angulo en B, facil es conocer los coordenados de dichos puntos, que se llamarán $h_a$ $h_b$ $h_c$

Luego con esas mismas alturas, el angulo $\alpha$ en A, é imaginando una paralela a a' á A B tirada desde el punto a, facil será calcular el largo de la línea A a' y sus coordenadas A d, a' d, así como la superficie comprendida en A B a a', sea $\quad S_a = \frac{a\,a' + A\,B}{2} \times h.$

Siendo $S_1$ la superficie á entregar y $S_a$ la entregada ya y $S_x$ la á entregar, se tiene $S_x = S_1 - S_a$

Asi pues, esa superficie $S_x$ afectará la figura triangular pues que no puede apartarse del punto a y que se tiene la base a a' y la línea de contra fondo A D; esa superficie tendrá por espresión $$S_x = \frac{a\,a' \operatorname{sen} \alpha}{2} \times x,$$

de donde $$x = \frac{2\,S_x}{a\,a' \operatorname{sen.} \alpha}$$

Siendo x la distancia a' m á medirse sobre A D resultando para ese contrafrente $A\,m = A\,a' + a'\,m$.

Para $S_2$ y $S_3$ se procederá de la misma manera, teniendo presente que la superficie á entregar será siempre igual á la suma de las precedentes.

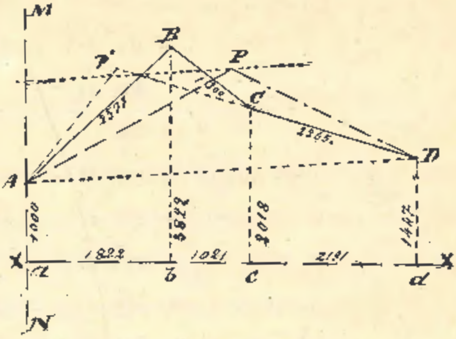
Sea, al deslindar $S_2$, se tendrá que la superficie total á entregar es igual á $S_t = S_1 + S_2$

2.º—Dividir un triangulo A B C en dos partes que estén entre sí en la razón de m n por una línea que parta del vértice A.

Se dividirá la base $B\,C = b$ en dos partes x é y tales que $$(m + n) : b :: m : x = \frac{b\,m}{m + n}$$
$$(m + n) : b :: n : y = \frac{b\,n}{m + n}$$

Si se hubiera de dividir proporcionalmente á m n p sería $$(m + n + p) : b :: x = \frac{m\,b}{(m + n + p)}$$
$$y = \frac{b\,m}{(m + n + p)}$$
$$z = \frac{b\,p}{(m + n + p)}$$

*Problema 1.º* — La línea quebrada A B C D separa dos propiedades y se quiere sustituirle una línea recta ú otra línea menos quebrada conservando los dos puntos extremos A y D y sin alterar las superficies de cada propietario




línea AB = 2577$^{m}$, BC = 1300$^{m}$, CD = 2265

$\widehat{ABC} = 96.^\circ 49'$, $\widehat{BCD} = 156.^\circ 25'$

Suponiendo que la línea MN sea un deslinde común á las dos propiedades P y Q. Esta línea podría ser trazada arbitrariamente ó representar la meridiana.

A una distancia cualquiera de A, se trazará una perpendicular á MN adoptándola como eje de las abcisas x y como consecuencia la línea MN como eje de ordenadas.

Si la línea MN es un deslinde, el ángulo MAB será conocido, así mismo puede serlo si esa línea representa la meridiana, pero si es una línea arbitraria el ángulo MBA también se fijará arbitrariamente siendo su objeto sólo relacionar la línea cuadrada con los ejes de coordenadas.

Admitiendo el ángulo MAB = 4:°, hay que empezar por deducir los ángulos que cada línea forma con el eje de abcisas XX.

En este caso, siendo MN la línea de base, el ángulo MAB está en el 1.$^{er}$ cuadrante y el BAN en el 2.°

luego 1.er ángulo = 45.º ... 1.er cuad. = 45.º
+ 263 11
308 11
− 180
2.º ángulo = 128 11 ... 2.º cuad. = 51.º 49'
+ 156 25
284 36
− 180
3.er ángulo 104.º36' ... 2.º cuad. = 75.º 24'

x = 1822.20 +
log. x = 3.26060
sen. 45.º = 9.84949
log. A B = 3.41111
cos. 45 = 9.84949
log. y = 3.26060
y = 1822.20 +

x = 1021.83 −
log. x = 3.00938
log. sen. 51. 49' = 9.89544
log. B C = 3.11394
log. cos 51.º 49' = 9.79111
log. y = 2.90505
y = 803.61 +

x = 2191.85 −
log. x = 3.34081
log. sen. 75.º 24 = 9.98574
log. C D = 3.35507
log. cos. 75.º 24 = 9.40152
2.75659
y = 570.938 +

| Ordenadas y | Abcisas x |
|---|---|
| A a = 1000 | a b = 1822.20 |
| B b = 2822.20 | a c = 1822.20 + 1021.8 = 2844m |
| C c = 2018.60 | a d = 2844 + 2191.8 = 5035.80 |
| D d = 1447.70 | |

Calculando ahora la superficie encerrada entre a A B C D d se obtiene S = 9.467.084 m.² c.²

Si la línea rectificada pudiera establecerse uniendo por una recta los puntos inamovibles A y D, la superficie encerrada en el trapecio A a d D sería de

$$S = \left(\frac{1000 + 1447.7}{2}\right) \times 5035.80 = 6.163.063,^{mc}83$$

Se vé, pues, que de ninguna manera satisfacería esa línea A D á las condiciones del problema, de manera que habrá que completar la falta de superficie que resulta para Q con un triángulo cuya base sea la línea A D.

En este caso se tendrá; llamando S la superficie que falta á Q

Sea $S = 9.467.084 - 6.163.063 = 3.340.021$

que la altura del triángulo se hallará por

$$2\,S = A\,D \times h \quad y \quad h = \frac{2\,S}{A\,D} - \frac{6.608.042}{A\,D = 5055.8} = (1307.02)$$

Valor de A D

$$x = 5035{,}80$$

$$y = y_3 - y_0 = 1447.7 - 1000 = 447.7$$

$$\text{tang. } m = \frac{y}{x} = \frac{447.7}{5035}$$

$$\log. 447.7 = 2.65099$$

$$\log. 5035 = 3.70200$$

$$\log. \text{tang } m = 8.94899$$

$$m = 5^{\circ}4'52''$$

$$A\,D = \frac{x}{\cos. m}$$

$$\log. 5035 = 3{\cdot}70200$$

$$-\log. \cos. 5^{\circ}4'52'' = 9.99829$$

$$\log. A\,D = 3.70371$$

$$A\,D = 5055{,}80$$

La forma que habrá que dar al triángulo A D P puede variar según las exigencias ya locales, ya de los propietarios; el más sencillo será el de establecer un triángulo isósceles de altura h cuya solución será:

$$\text{tang. } P\,D\,A = \text{tang. } t = \frac{h}{\frac{1}{2}(A\,D)} = \frac{1307.02}{2527.90}$$

$$\log. 1307.02 = 3.11628$$

$$\log. 2527.90 = 3.40278$$

$$\log. \text{tang. } t = 9.71350$$

$$t = 27^{\circ}20'21''$$

$$y \quad A\,P = \frac{2527.90}{\cos. t}$$

$$\log. 2527.90 = 3.40278$$

$$\log. \cos. 27^{\circ}20'21'' = 9.94856$$

$$\log. A\,P = 3.45422$$

$$A\,P = 2845{,}69$$

Si se pone como condición de que la nueva línea divisoria deberá pasar por el punto C, sea que D C forme parte del nuevo deslinde; en este caso para integrar el triángulo A D P' se tendrá para el largo D P' que forma con A D un ángulo C D A $= 18^\circ 40' 52'' = a$

$\frac{2\,S}{A\,D} = h$   y de   $1 : \text{sen. } a :: D\,P' : h$   ,   $h = D\,P' \text{ sen. } a$

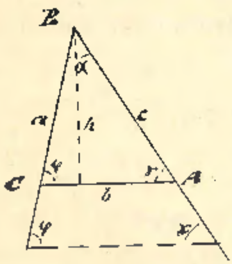
luego   $\frac{2\,S}{A\,D} = D\,P' \text{ sen. } a$   y   $D\,P' = \frac{2\,S}{A\,D \text{ sen. } a}$

| | | |
|---|---|---|
| log. 2 S = 6.608.042 | = 6.82010 | |
| C log. A D = 5055,8 | = 6 29629 | |
| C log. sen. 18°40'52'' | = 0.49445 | |
| log. D P' | = 3.61084 | |
| D P' | 4081,70 | |

Determinado el largo del costado D P', será ya facil determinar el otro costado A P' y el ángulo P' A D.

La primer solución permite variar al infinito la forma que puede darse al triángulo A P D, pues siendo la altura $h = 1307^{m}$ común á todo triángulo de igual superficie y que tenga A D por base, se concibe que trazando al otro extremo de h una parelela á A D, el vértice P del nuevo triángulo podrá ocupar sobre dicha paralela el punto que más convenga á los interesados.

2.º *Problema*—En un terreno de figura triangular y en el cual sólo se conocen los 3 ángulos, hay de separar una superficie dada por medio de una paralela á uno de los costados; también podría estipularse que la determinación de la superficie dada se hará por medio de una linea que forme un ángulo $m$ con uno de los costados.




Los ángulos son:   $a = 44.^\circ 27'$
$m = 78.^\circ 18'$
$t = 57.^\circ 15'$

Superficie á deslindar $S = 94.^{h}\ 75.^{a}\ 00.^{c}$

Resuelto el problema la superficie sería expresada

por, $S = \frac{b \times h}{2}$ ó sea $2\,S = b\,h$

pero $h = a$ sen. $m$, luego $2\,S = b\,a$ sen. $m$

$$b = \frac{2\,S}{a \text{ sen. } m}$$

por otra parte en el triángulo total se tiene

$$\text{sen. } t : a :: \text{sen. } a : b, \quad b = \frac{a \text{ sen. } a}{\text{sen. } t}$$

$$\text{luego } \frac{2\,S}{a \text{ sen. } t} = \frac{a \text{ sen. } a}{\text{sen. } t}, \qquad 2\,S = \frac{a^2 \text{ sen. } m \text{ sen. } a}{\text{sen. } t}$$

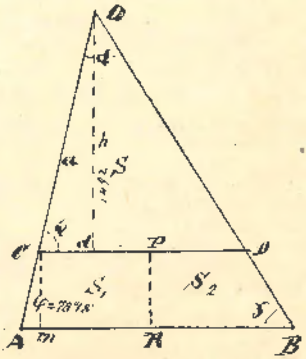
$$a = \sqrt{\frac{2\,S \text{ sin. } t}{\text{sen. } m \text{ sen. } a}}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2\,S = 1.895.000$ log. | $= 6.27761$ | | |
| log. sen. $t = 67.^{\circ}\ 55'$ | $= 9.92482$ | $h = a$ sen. $m$ | |
| C log. sen. $a = 44.^{\circ}\ 27'$ | $= 0.15472$ | log. $a$ | $= 3.18313$ |
| C log. sen. $m = 78.^{\circ}\ 18'$ | $= 0.00912$ | log sen. $m$ | $= 9.99088$ |
| log. $a^2$ | $= 6.36627$ | log. $h$ | $= 3.17401$ |
| log. $a$ | $= 3.18313$ | $h$ | $= 1492.83$ |
| $a$ | $= 1524.23$ | | |

$$A\,C = b = \frac{a \text{ sen. } a}{\text{sen. } t}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. $a =$ | $3.18313$ | log. $b =$ | $3.10359$ |
| log. sen. $m =$ | $9.84528$ | log. $h =$ | $3.17401$ |
| C log. sen. $t =$ | $0.07518$ | log. $2\,S =$ | $6.27760$ |
| log. $b =$ | $3.10359$ | $2\,S =$ | $1.895.000$ |
| $b =$ | $1269.382$ | $S =$ | $947.500$ |

*3.º Problema*—El triángulo BAO del cual sólo se conocen los 3 ángulos y los lados AB y AO, debe ser dividido en 3 partes, dos de ellas de superficie determinada, por una paralela á AB.




Se tienen los siguientes datos:

$A\,O = 2020^m = h$; $\quad A\,B = 1681.80 = m$

Ángulos — en A ... $m = 78°18'$ | Superficies para S. = $94^h 75^a 00$
» » B ... $t = 57\ 15$ | » » $S_1$ = 45.0000
» » O ... $a = 44°27'$ | » » $S_2$ = el resto

Para hallar las dimensiones del triángulo OCD se tendrá de $2\ S = b \times h$, $b = \frac{2\ S}{h}$

pero de 1 : sen. $m$ : : a : h, $h = a$ sen $m$, luego $b = \frac{2\ s}{a \text{ sen } m}$

De sen. $a$ : b : : sen. $t$ : a, $b = \frac{a \text{ sen. } a}{\text{sen. } t}$, igualando esos dos valores de b se tendrá

$$\frac{2\ s}{a \text{ sen. } m} = \frac{a \text{ sen. } a}{\text{sen. } t} \text{ y; } 2\ S \text{ sen } t = a^2 \text{ sen. } a \text{ sen. } m$$

$$\text{de donde } a = \sqrt{\frac{2\ S \text{ sen. } t}{\text{sen. } a \text{ sen. } m}}$$

Cálculo de a = OC

log. 2 S = 1895000 = 6.2776092
log sen. $t$ (57°15') = 9.6248161
c. log. sen. $a$ (44°27') = 0.1547242
c. log. sen. $m$ (78°18') = 0.0091185
log. $a^2$ = 6.3662680
log. a = 3.1831340
a = 1524.52

Calculo de CD = b

sen. 57°15 : 1524.52 :: sen. 44°27' : b
log. 1524.52 = 3.1831340
log. sen. 44°27 = 9.8452758
c log. sen. 57°15' = 0.0751839
log. b = 3.1035937
b = 1269.40 = CD

OC = a = 1524.52
OD = b = 1269.40

Comprobación

proyección de OC sobre CD

$$\text{Sup. OCD} = \frac{\text{O d} \times \text{CD}}{2}$$

3.1740155 = 1492,86 = O d
log. sen. 78.18 = 9.9908815
log. 1524.52 = 3.1831340
log. cos. 78.18 = 9.3070407
2.4901747 = 309.15 = C d

log. O d = 1492.86 = 3.1740155
log. C d = 1269.40 = 3.1035937
log. 2 S = 6.2776092
2 S = 1.895.000
S = 9475.00

Cálculo de $S_1 = 45.^{h}00.^{a}00.^{c}$

$$
\begin{aligned}
OA &= 2020 \\
-\,OC &= \underline{1524.52} \\
CA &= 495.48
\end{aligned}
$$

proyección de CA

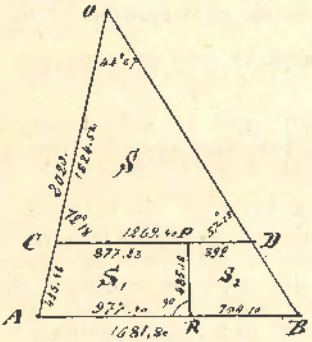
$$
\begin{aligned}
&\overline{2.6859076} = 485.185 = Cm \\
\log.\ \text{sen.}\ 78.18 &= 9.9908815 \\
\log.\ 495.48 &= 2.6950261 \\
\log.\ \cos.\ 78.18 &= \underline{9.3070407} \\
&2.0020668 = \underline{100{,}47 = Am}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 450.000 \\
S_c &= \underline{24.378{,}27} \\
425.621{,}73 &= Cm \times x
\end{aligned}
$$

$$\text{Sup. } ACm = \frac{Cm \times Am}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\log.\ Cm &= 2.6859076 \\
\log.\ Am &= \underline{2.0020668} \\
\log.\ 2S_c &\quad 4.6879744 \\
2S_c &= 48746{,}5369 \\
S_c &= 24378.268
\end{aligned}
$$

luego de; $S_x = Cm \times x$, ... $x = \dfrac{S}{Cm}$




$$
\begin{aligned}
\log.\ S_x = 425620 &= 5.6290237 \\
-\log.\ cm = 485{,}18 &= \underline{2.6859029} \\
\log.\ x &\quad 2.9431200 \\
x &= 877.24 = CP
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Am &= 100.47 \\
CP = mR &= \underline{877.23} \\
AR &= \underline{977.70}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CD &= 1269.40 \\
CP &= \underline{\ \ 877.24} \\
PD &= \ \ 392.16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AB &= 1681.80 \\
AR &= \underline{\ \ 977.70} \\
RB &= \ \ 704.10
\end{aligned}
$$

$$S_2 = \frac{PD + RD}{2} \times Cm = \frac{392.16 + 704.10}{2} \times 485.185 =$$

Sup. total de OAB; $2S_t = m\,h \,\text{sen}\, m$

$$
\begin{aligned}
2S &= m\,h\ \text{sen.}\ m \\
\log.\ 2020 &= 3.3053514 \\
\log.\ 1681.8 &= 3.2257743 \\
\log.\ \text{sen.}\ 78°18' &= \underline{9.9908815} \\
\log.\ 2S &\quad \underline{6.5220072} \\
2S &= 3326650{,}767 \\
S &= 1663.325{,}383
\end{aligned}
$$

Prueba

$$
\begin{aligned}
\text{Sup. } S &= 947.500 \\
\text{Sup. } S_1 &= 450.000 \\
\text{Sup. } S_2 &= \underline{265.725.38} \\
S_t &= \underline{1663.225{,}38}
\end{aligned}
$$

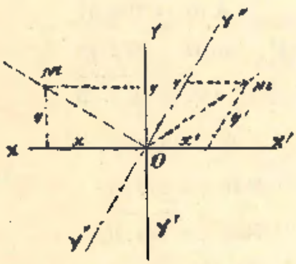
$$
\begin{aligned}
S_2 &= 548.135 \times 485.185 \\
\log.\ 548.135 &= 2.7388887 \\
\log.\ 485.185 &= \underline{2.6859076} \\
\log.\ 2\,S_2 &= \underline{5.4247063} \\
S_2 &= 2\ 65725{,}38
\end{aligned}
$$

## VI — Cálculo analítico del polígono y de su superficie

La proyección de los lados de un polígono, sobre un sistema de ejes de coordenadas, constituye el medio mas practico para conocer la exactitud de los elementos angulares y lineales que forman el polígono, así como una manera exacta y metódica para hallar la superficie que encierra.

Si se adoptan dos rectas infinitas x x', y y', formando entre sí un ángulo cualquiera conocido: estas rectas constituirán un sistema de *ejes de coordenadas*. Llamándose á la horizontal *eje de abcisas* y á la otra y y' *eje de ordenadas*.

El punto O. de intersección de los dos ejes se llama *orígen* de las coordenadas.




Cuando el ángulo formado por los dos ejes es oblicuo, el sistema se denomina *oblícuo* y cuando el ángulo es recto *octogonal ó recto*.

Si de un punto M, se trazan paralelas á los ejes de coordenadas, las líneas M y; ó m y' paralelas al eje de abcisas, serán las abcisas del punto M ó del m; así las M x y m x' las *ordenadas* de los puntos M ó m y se contarán siempre desde el origen O.

Se tendrá así, M y = O x = x , M x = O y = y . Así es que cualquier punto se encuentra determinado cuando se conocen sus coordenadas x , y.

Siendo el sistema de coordenadas *octogonales* ó *rec-*

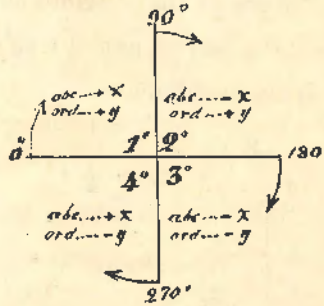
*tangulares,* el que mejor se presta al cálculo poligonal, el presente estudio tendrá por objeto su exámen y aplicación.

*Bases generales.*—Todas las ordenadas levantadas á la parte arriba del eje de abcisas x x', *serán positivas* y llevarán el signo +, así mismo serán *negativas* las que se encuentren á la parte de abajo y llevarán el signo —.

*2º* Las abcisas contadas á la izquierda del eje de ordenadas y y', son consideradas *positivas* y serán + y, mientras que las de la derecha serán negativas y escritas — y.

*3er* Los 4 cuadrantes formados por los dos ejes de coordenadas se denominan: 1º el de la izquierda y 2º el de la derecha á la parte superior del eje de abcisas, 3º el de la derecha y 4º el de la izquierda en la parte inferior del referido eje.

*4º* El cero de la graduación de la circunferencia se considera situado en el estremo izquierdo del eje de abcisas, y la numeración sucesiva siguiendo la dirección de las agujas de un reloj.




De lo que precede resulta que segun el cuadrante las coordenadas tienen los siguientes signos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1er Cuadrante de 0º á 90º | abcisa + x<br>ordenada + y | 2º Cuadrante de 90º á 180 | abcisa — x<br>ordenada + y |
| 3er Cuadrante de 180º á 270º | abcisa — x<br>ordenada — y | 4º Cuadrante de 270º á 360 | abcisa + x<br>ordenada — y |

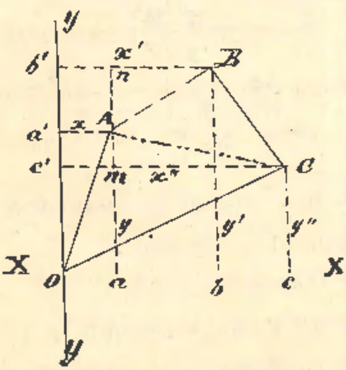
Sean $-x$ y $+y$ las coordenadas de un punto dado; siendo negativa la abcisa, el punto se encontrará á la derecha en el 2º ó 3er cuadrante, pero siendo positiva la ordenada, esto es en la parte superior del eje de abcisas, está visto que el punto se hallará en el 2º Cuadrante.

Toda línea se hallará situada, conociéndose las coordenadas de sus estremos; así, sea la línea A B para la que se tiene: punto A $\left\{ \pm \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$, punto B $\left\{ \mp \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$.

El punto A se hallará en el 4º Cuadrante y el B en el 2º.

Si por lo contrario se tuviera un sistema de líneas, sean 3 vértices para los cuales se tiene: para A $\left\{ \begin{matrix} +x \\ +y \end{matrix} \right.$ para B $\left\{ \mp \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$, para C $\left\{ \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right.$; se vé facilmente que A está en el 1er Cuadrante, B en el 2º y C en el 3º — siempre con relación al sistema de ejes adoptado para el caso.

*Teorema* 1.º—El conocimiento de las coordenadas de los vértices de un polígono con relación á un sistema de ejes rectangulares, permite su construcción y la resolución de varios problemas.




La inspección de la adjunta figura, demuestra claramente que, abstracción hecha por el momento de los signos de las coordenadas parciales, será fácil construir el polígono O A B C siempre que se conozcan las siguientes coordenadas medidas constantemente desde el orígen O y en sus respectivas direcciones.

Para punto A, $x = A\,a' = O\,a$, $y = A\,a = O\,a'$

» » B, $x' = B\,b' = O\,b$, $y' = B\,b = O\,b'$

» » C, $x'' = C\,c' = O\,c$, $y'' = C\,c = O\,c'$

Fijados de esta manera los puntos A B C, siendo O el de partida, solo restará ligarlos por líneas rectas para tener determinado el polígono.

Si se presentara el caso de no conocerse el largo de la línea A B por ejemplo, éste podría deducirse por la resolución del triángulo A n B recto en n, y en el cual se tiene

$$B\,n = (B\,b' - A\,a')\,; \quad A\,n = (B\,b - A\,a)$$

Luego: ángulo para $B\,A\,n = \text{tang. } A = \frac{B\,n}{A\,n} = m$

y para $$A\,B = \frac{B\,n}{\text{sen. } m}$$

Si ahora se tratara de calcular la línea interior A C que liga esos dos vértices del polígono, se tendría formado un triángulo A m c, recto en m y cuyos catetos son:

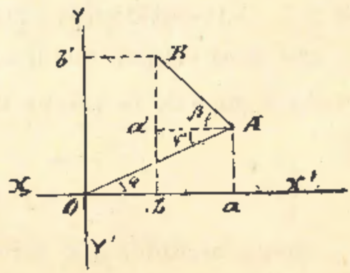
$$A\,m = A\,a - C\,c, \quad C\,m = C\,c' - A\,a'$$

Luego como en el caso anterior, se tendría:

$$\text{tang. ángulo } A\,C\,m = \frac{A\,m}{C\,m'}; \quad A\,C = \frac{C\,m}{\text{cos. } C}$$

*Teorema* 2.°—Cada vértice de un polígono tiene sus coordenadas parciales con respecto á la línea ó costado que lo reune con el anterior, y sus coordenadas absolutas relacionadas con el sistema de ejes adoptado.

Sean las líneas O A y A B relacionadas á los ejes X X', Y Y' por el ángulo $A\,O\,X = m$ conocido.




Las proyecciones ó coordenadas de la línea O A serán:

$O\,a = x$, $A\,a = y$ cuyos valores se hallarán por las fórmulas generales:

$$\left.\begin{aligned} A\,a &= y = O\,A \text{ sen.} m \\ O\,a &= x = O\,A \cos. m \end{aligned}\right\} (1)$$

Estas coordenadas del vértice A son parciales con relación á O A y al mismo tiempo absolutas con relación á X X por el hecho de hallarse el vértice O sobre el mism o eje

Pasando ahora á calcular las coordenadas del vértice B perteneciente á la línea A B, habrá que imaginar al eje de abcisas X X trasladado paralelamente al vértice A y entonces se tendrá formado el triángulo B a' A en el cual se conoce B A y el ángulo $B\,A\,a' = B\,A\,O - a'\,A\,O = B\,A\,O - m = b$ luego:

$$B\,a' = B\,A \text{ sen. } b = x'$$
$$A\,a' = B\,A \cos. b = y'$$

Para reducir estas coordenadas parciales á absolutas se tendrá siempre para el vértice B

$$x'' = B\,b' = O\,a - A\,a' = O\,a - a\,b = O\,b = x - x'$$
$$y'' = b'\,O = B\,b = B\,a' + a'\,b' = y' + y$$

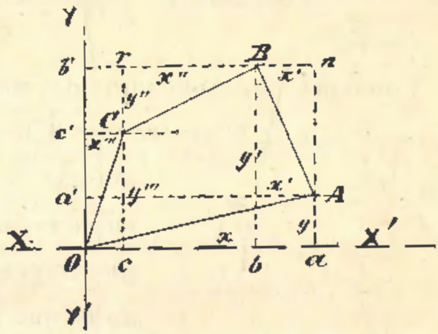
Del exámen de la figura se vé que la línea O A se encuentra en el segundo cuadrante, luego para A se tenía $+y$, $-x$; mientras que para la línea A B que como se vé corre en el primer cuadrante se tenía para B; $+y$, $+x$, se deduce pues de lo que precede:

$$x'' = (-x) - (+x') = -x''$$
$$y'' = (+y) + (+y') = +y''$$

Lo que significa que para calcular las coordenadas absolutas hay siempre que tener presente los signos correspondientes de las parciales.

*Teorema* 3.°—En todo polígono cerrado, la suma de las abcisas positivas debe ser igual á la de las negativas y de igual manera la suma de las ordenadas positivas igual á la de las negativas.

Sean OA, AB, BC, CO un sistema de líneas que forman al polígono y y, y' y'' y'', x, x' x'' x''' las coordenadas parciales de los respectivos vértices.




Por el exámen de la figura se deduce que la línea O A corre en el 2.° cuadrante, que la A B, corre en el 1.°, la B C, en el 4.° y la C O, también en el 4.°.

Así mismo calculadas las coordenadas absolutas se desprende del exámen de la figura que esas coordenadas forman un paralelógramo O a n b', en el cual a n = O b' = B b = y + y', ambas ordenadas positivas pues que pertenecen al 2.° y 1.$^{er}$ cuadrante; pero también O b' = b' c' + c' O = y'' + y''' que son negativas por pertenecer ambas al 3.$^{er}$ cuadrante; luego se tiene

$$(+\,y) + (+\,y') = (-\,y'') + (-\,y''')$$

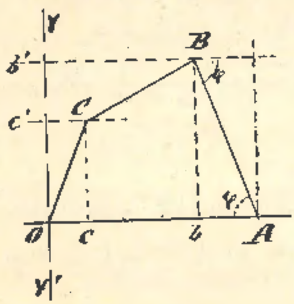
de la misma manera se tiene

O a =, – y' negativa por el 2.° cuadrante pero, $O\,a = n\,b' = n\,B + B\,r + C\,c' = +(x') + (+x'') + (+x''')$ todas abcisas positivas por pertenecer al 2.° y 4.° cuadrante.

Luego se tiene $O\,a = b'\,n$ sea $-x = +x' + x'' + x'''$

El conocimiento de estos 3 teoremas servirá de base para la resolución de todos los casos en que puede ser utilizado el sistema de coordenadas á los cálculos de un polígono.

Como primera aplicaciòn del sistema, supóngase que el costado O A de la precedente figura, coincida con el eje de abcisas X X, para calcular las coordenadas de los vértices habrá que empezar por deducir los ángulos que cada línea forma con el mencionado eje X X ó sea con la paralela trazada por cada vértice.




El ángulo interno en $A = m$ es menor de 90.° luego la línea corre en el 1.$^{er}$ cuadrante.

Para hallar el ángulo que la línea B C forma con la m n paralela á XX trazada por B, se tiene,

$$m\,B\,C = 180.° - (C\,B\,A + A\,B\,m) = 180.° - (b + m) = n$$

pero también se tiene; $m\,B\,C = 360.° - (b + m + 180.°) = n$

Es un ángulo comprendido en el 4.° cuadrante.

En el vértice C se tiene para el ángulo c' C O formado por la paralela á X X y la línea C O se tiene

$$n\,C\,B = c'\,C\,B = b + n\,; \qquad m\,B\,C = B\,C\,p = n$$

ángulo $B\,C\,O = m$

Sumando estos tres ángulos y restándolos de 360.º

$$c' \text{ C O} = \text{C O A} = 360.^\circ - (b + m + n + a)$$

Para facilitar la deducción del ángulo de proyección se ha deducido la siguiente:

*Regla general*: adoptado el costado del polígono que debe servir de base, esto es confundirse con el eje de abcisas X X —, se sumará el primer ángulo interno de la derecha con el del siguiente vértice, observando en esa operación una marcha inversa á la de las agujas del reloj.

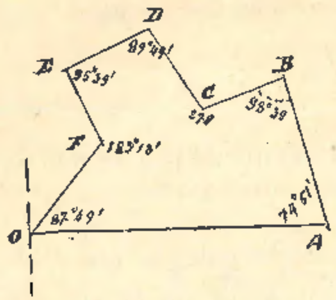
Si esa suma es mayor que dos rectos se restará de ella 180.º y el residuo indicará el cuadrante en el que corre la línea —, si por lo contrario esa suma es inferior á 2 rectos. se le suma 180.º y el resultado indicará igualmente el cuadrante.

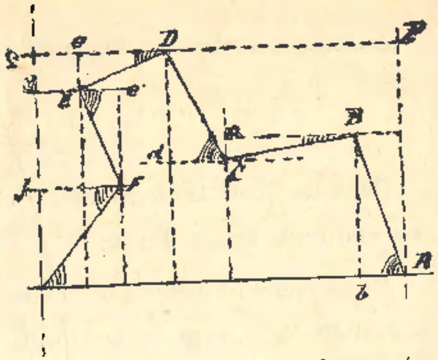
Al resultado así obtenido, residuo ó suma, se le suma el 3.er ángulo y luego á ese total se le resta ó suma 180.º según sea mayor ó menor de dos rectos.

Puede reducirse la regla á decir que, empezando por la derecha de la figura; cada ángulo se suma á su precedente y de esa suma se resta ó suma 180.º según el resultado sea mayor ó menor que dos rectos. Al sumar el último ángulo el resultado final deberá ser siempre 180.º.

Tampoco debe olvidarse que el ángulo que se busca, es el que la línea del polígono forma en el eje de abcisas.

Como aplicación de las reglas que preceden pasemos á calcular los ángulos del siguiente polígono:




**ÁNGULO DE CÁLCULO**

El ángulo en A = 74°51' pertenece al 1.er Cuad.te siendo menor que 90° — 1.er C. = 74°51'

se le suma el B = 98 39
173 30' suma menor de 2 rectos

se le suman 180
353°30' corresponde al 4.º C.te así que se tiene — 360° − 353 30 — 4.º C. = 6°30'

se le suma el C 270
623 30 siendo mayor de 2 rectos

se le restan 180
443 30 siendo mayor que 360° prueba que la

se le suma el D = 89 49 — línea pasó al 1.er Cuad.te, luego — 443 30 − 360° — 1.er C. = 83°39
533 19 mayor de 2 rectos

se le restan 180
353 19 que corresponde al 4.º C.te, luego — 360° − 353 19' — 4.º C. = 6°41'

se le suma el E = 95 39
448 58 mayor de 2 rectos

se le restan 180
268 58 corresponde al 3.er C.te, luego — 268 58' − 180 — 3.er C. = 88°58'

se le suma el F = 183 13
452 11 mayor de 2 rectos

se le restan 180
272 11 corresponde al 4.º C.te, luego — 360° − 272°11' — 4.º C. = 87°49'

se le suma el O = 87 49
360 00

se le restan 180 00
180° que corresponde al 2.º C.te exacto, luego — 2.º C. — 0

Este resultado se obtendrá siempre que la suma de los ángulos internos del polígono corresponda al número de sus lados.

El exámen de la figura 2, hará comprender la marcha y el resultado obtenido en la deducción de los ángulos de proyección, y por consiguiente la disposición de las coordenadas á calcularse para cada línea del polígono; en efecto, las coordenadas parciales de cada línea dan orígen á los siguientes triángulos rectángulos, en los cuales se conoce la línea del polígono y el ángulo de proyección deducido, de manera, que por las fórmulas (1) se calcularán los catetos y x.

Los triángulos á resolver serán, pues:

A B b, B C c, C D d, D E e, E e' F, F f O

Conocidas las coordenadas parciales, sólo restará deducir las absolutas de cada vértice y comprobar la igualdad con las demás de las coordenadas de signos contrarios.

*Teorema* 4.º — Todo polígono puede inscribirse dentro de un cuadrilátero cuyos costados son: al uno la abcisa absoluta mayor y el otro la ordenada absoluta mayor; á los lados de ese cuadrilátero pueden relacionarse todos los vértices, restando sus respectivas coordenadas absolutas de los correspondientes lados del cuadrilátero.

Este teorema tiene su aplicación para la representación gráfica del cálculo por coordenadas, así como para el cálculo de superficie.

*Ejemplo.* — Sea calcular las coordenadas del polígono representado en la figura 1 de los párrafos anteriores y cuyos ángulos han sido ya deducidos.

Aplicando las fórmulas (1) sean:

$$y = d \text{ sen. } m, \qquad x = d \text{ cos. } m$$

se obtienen las coordenadas buscadas con sus correspondientes signos según el cuadrante.

2.88989 = 776.00 = + y

*1.er Cuadrante*

log. sen. 74°51' = 9.98463
log. A B = 804 = 2.90526
log. cos. 74.51 = 9.41721

2.32247 = 210.12 = + x

2.40892 = 255.20 = − y

*4.o Cuadrante*

log. sen. 6°30' = 9.05385
log. B C = 2265 = 3.35507
log. cos. 6°30 = 9.99719

3.35226 = 2250.40 = + x

3.11120 = 1291.88 = + y

*1.er Cuadrante*

log. sen. 83°30' = 9.99719
log. C D = 1300 = 3.11401
log. cos. 83.30 = 9.05385

2.16786 = 145.19 = + x

1.82707 = 67.15 = − y

*4.o Cuadrante*

log. sen. 6°41' = 9.06589
log. D E = 577 = 2.76118
log. cos. 6°41' = 9.99704

2.75822 = 573.10 = + x

3.08807 = 1224 83 = − y

*3.er Cuadrante*

log. sen. 88°58' = 9.99993
log. E F = 1225 = 3.08814
log. cos. 88°58' = 8.25609

1.34423 = 22.09 = − x

2.71568 = 520.60 = − y

*4.o Cuadrante*

log. sen. 87°49' = 9.99968
log. F O = 521 = 2.71600
log. cos. 87.49 = 8.58089

1.29689 = 19.81 = + x

Como prévia verificación de los cálculos que preceden y aún de las medidas del polígono, conviene verificar el enunciado del teorema 3.º; así se tiene:

| Abcisas x | | Ordenadas y | |
|---|---|---|---|
| positivas + | negativas — | positivas + | negativas — |
| 210.13 | | | |
| 2.250.40 | | | 255.22 |
| 147.20 | | | 67.15 |
| 573.10 | 22.09 | 776.00 | 1.224.83 |
| 19.80 | 3.178.54 | 1.291.80 | 520.60 |
| 3.200.63 | 3.200.63 | 2 067.80 | 2.067.80 |

Verificada así la exactitud de las coordenadas parciales puede luego procederse á la determinación de las absolutas.

Ordenadas

| | | |
|---|---|---|
| del punto A | = + | 0. |
| » » B | = + | 776.22 |
| para línea B C | = — | 255.22 |
| ord. del punto C | = + | 520.78 |
| para línea C D .. | = + | 1 291.80 |
| ord. del punto D | = + | 1.812.58 ord. máxima |
| para línea D E | = — | 67.15 |
| ord. punto E | = + | 1.745.43 |
| para la línea E F | = — | 1.224.83 |
| ord. punto F | = + | 520.60 |
| para línea F O | = — | 520.60 |
| ord. punto O | = | 0. |

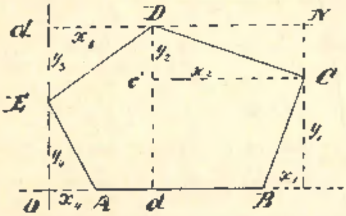
Abcisas

| | | |
|---|---|---|
| abcisa del punto A = O A | = — | 3.178.54 |
| para la línea A B .... | = + | 210.12 |
| abcisa punto B .... | = — | 2.968.42 |
| para la línea B C .... | = — | 2.250.40 |
| abcisa punto C .... | = — | 718 02 |
| para la línea C D .... | = + | 147.20 |
| abcisa del punto D .... | = — | 570.82 |
| para línea D E .... | = + | 573.10 |
| abcisa punto E .... | = + | 2.28 |
| para línea E F .... | = — | 22.09 |
| abcisa punto F .... | = — | 19.81 |
| para línea F O .... | = + | 19.80 |
| abcisa punto O .... | = — | 0. |

abcisa máxima

| | |
|---|---|
| abcisa de O A = | 3.178.54 |
| » » E = | 2.28 |
| abcisa máxima = | 3.180.82 |

Conocido así el método para hallar las coordenadas parciales y absolutas, pasaremos ahora al cálculo superficial sirviéndose sólo de estos elementos; lo que es fácil, teniendo presente que por el simple hecho de haberse establecido las coordenadas de cada vértice, el polígono se halla dividido en figuras geométricas rectangulares, tales como triángulos, trapecios y paralelógramos.




Sea A B C D E un polígono en el cual se conocen las coordenadas de todos los vértices, si se construye la figura resultará la adjunta, por la cual se vé la división que resulta por las coordenadas parciales de cada línea.

Podría, pues, calcularse directamente la superficie de cada figura, pero pueden hacerse algunas simplificaciones, por ejemplo: Si se considera el polígono dividido en dos trapecios, C c D d y E O D d bastará hallar la superficie de cada uno de ellos y deducirles la de los triángulos B C c y A O E para tener la superficie del polígono.

| Luego para C c D d se tiene | y para E O D d |
|---|---|
| $2\ S_1 = y + (y_1 + y_2) \times x_2$ | $2\ S_2 = y_4 + (y_4\ y_3) \times x_3$ |
| á deducir; $2\ s_1 = y_1 \times x_1$ | menos; $2\ s_2 = y_4 \times x_4$ |
| y queda; $2\ S_1 = 2\,(S_1 - s_1)$ | quedando; $2\ S_2 = 2\,(S_2 - s_2)$ |

$$\text{Luego; sup. total} = \frac{(S_1 - s_1) + (S_2 - s_2)}{2}$$

También podría hallarse la superficie del polígono, descontando de la del paralelógramo que lo inscribe, la suma de las figuras extrapoligonal que tienen por valor la de las coordenadas parciales; así en el presente caso, se tendría:

Sup. paralelógramo d O C N de coordenadas máximas.

$$\text{Sup.} = O\,c' \times O\,d = x_m \times y_m$$

á deducir $S_1 = \frac{1}{2}(x_1 \times v_1)$ $\quad S_3 = \frac{1}{2}(x_3 \times y_3)$

$S_2 = \frac{1}{2}(x_2 \times y_2)$ $\quad S_4 = \frac{1}{2}(x_4 \times y_4)$

Sea $\quad S_t = S_p - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

Este método de coordenadas para verificar la exactitud de los elementos de un polígono y el cálculo de la superficie, tiene á más, la ventaja de ser metódico y poder ser presentado en forma de planilla, de manera que una vez calculados los elementos y colocados en sus correspondientes columnas, la planilla contiene los datos para construir el plano y calcular la superficie.

El examen de la adjunta planilla completará la explicación del sistema.

Las columnas 1, 2 y 3 contienen los elementos del polígono á calcular.

La 4.ª el ángulo de proyección formado por cada línea con el eje de abcisas, siguiendo en su cálculo la forma ya indicada.

Las columnas 7.ª y 8.ª comprenden las coordenadas parciales de cada línea, clasificadas según sus signos y calculadas por las fórmulas (1).

Es el caso de observar que cuando las sumas de las dos columnas de abcisas ó de ordenadas, arrojan una diferencia comprendida dentro de la tolerancia admitida en mensuras, se divide la diferencia por mitad entre las dos columnas afectándole del signo conveniente y luego se reparte esa media diferencia entre los sumandos de cada colum-

PLANILLA PO

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estaciones | Línea | Angulo | Angulo reducido | Cuadrante | Distancia | Abcisas | | Ordenadas | |
| | | | | | | + x | — x | + y | — y |
| A | A B | 74° 51' | 74° 51' | 1 | 803. — | 210.12 | — | 776. — | — |
| B | B C | 98° 39' | 6° 30' | 4 | 2265. — | 2250.40 | — | — | 255.23 |
| C | C D | 270° | 83° 30' | 1 | 1300. — | 147.30 | — | 1291.80 | — |
| D | D E | 89° 49' | 6° 41' | 4 | 577. — | 573.10 | — | — | 67.12 |
| E | E F | 95° 39' | 88° 58' | 3 | 1225. — | — | 22.09 | — | 1224.83 |
| F | F G | 183° 13' | 87° 49' | 4 | 521. — | 19.81 | — | — | 520.69 |
| G | G A | 87° 49' | 0 | 2 | 3178.54 | | 3178.54 | — | — |
| | | | | | | 3200.63 | 3200.63 | 2067.80 | 2067.5[illegible] |

La 1.ª columna sirve para indicar el vértice en el cual se ha medido el ángulo de la columna 3.ª y empezado la operación.

La 2.ª columna sirve para indicar la línea cuya proyección se calcula.

» 3.ª » » » » el ángulo medido.

» 4.ª » » » » el ángulo de proyección calculado según la regla general.

La 5.ª columna sirve para indicar el cuadrante en el cual cae al ángulo anterior.

» 6.ª » » » » la distancia medida.

» 7.ª y 8.ª columnas sirven para indicar las coordenadas calculadas por las fórmulas (1) y colocadas cada una en su columna correspondiente, según su signo. Las diferencias en las sumas respectivas en la 7.ª y en la 8.ª se repartirán proporcionalmente entre cada uno de los sumandos.

COORDENADAS

| 9 | | 10 | | 11 | | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Corregidas | | Coord. acumuladas | | Factores | | Productos | |
| abc. x | ord. y | abc. x | ord. y | x | y dobles | + | — |
| + 210.12 | + 776.00 | + 210.12 | + 776.00 | + 210.12 | + 776.00 | 163053.12 | — |
| + 2250.40 | — 225.22 | + 2460.52 | + 520.78 | + 2250.40 | + 1296.78 | 2918273.71 | — |
| + 147.20 | + 1291.80 | + 2607.72 | + 1812.58 | + 147.20 | + 2333.36 | 343470.56 | — |
| + 573.10 | — 67.15 | + 3180.82 | + 1745.43 | + 573.10 | + 3558.01 | 2039095.53 | — |
| — 22.09 | — 1224.83 | + 3158.73 | + 520.60 | — 22.09 | + 2266.03 | — | 50056.60 |
| + 19.81 | — 520.60 | + 3178.54 | — 0.00 | + 19.81 | + 520.60 | 10313.08 | — |
| — 3178.54 | | | | | | | |
| | | | | | | 5474206.03 | 50056.60 |
| | | | | | | — 50056.60 | |
| | | | | | 2 S = | 5424149.43 | |
| | | | | | S = | 2712074.71 | |

La 9.ª columna sirve para indicar las coordenadas corregidas con sus respectivos signos.

» 10.ª » » » » las coordenadas combinadas entre sí según su signo, indicarán, pues, las coordenadas absolutas de cada vértice, sobre la línea de base A G para las ordenadas, y desde el punto A para las abcisas. Es la columna que sirve para la construcción del plano.

La 11.ª columna sirve para indicar los factores que servirán para el cálculo superficial: por una parte figuran las abcisas en su verdadero valor corregido (columna 9.ª); por la otra figuran las ordenadas absolutas de la columna 10 combinadas dos á dos, y que representan ya la altura de un triángulo (la primera y última), ya la suma de los lados paralelos de un trapecio.

La 12.ª columna sirve para indicar los productos de los factores de la columna 11 colocados según lo exija el signo que resulte del de dichos factores.

na. Sea, por ejemplo, que las sumas de las abcisas den + 3210 y — 3190 la diferencia será de 20 cuya mitad 10 será agregada á cada columna en esta forma:

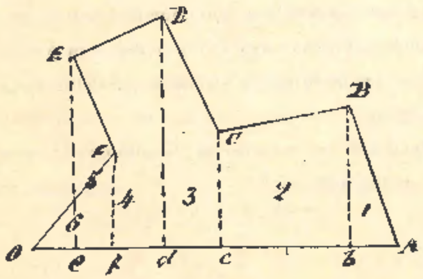
| | |
|---|---|
| + 3210 | — 3190 |
| — 10 | + 10 |
| + 3200 | 3200 |

Luego la cantidad 10 será repartida proporcionalmente entre los sumandos de cada columna con su correspondiente signo.

La columna 9, sirve para las coordenadas corregidas precedidas de su signo.

La columna 10 contiene las coordenadas acumuladas cuyo cálculo ha sido ya detallado; esta columna sirve principalmente para la construcción del plano y muchas veces se suprime la de las abcisas por no figurar en el cálculo superficial más que las de ordenadas.

La columna 11 que contiene los factores que sirve de base al cálculo superficial, de manera que su importancia merece un exámen detenido.




En la figura adjunta las lineas B b, C c, D, d, E e, F f, representan las ordenadas acumuladas de cada vértice y las distancias A b, b c, c d, d e, e f, f o, las abcisas de las respectivas lineas A B, BC, CD.

Ahora la doble superficie del triángulo 1 es:

$$S_1 = A\,b \times B\,b = y_1 \times x_1$$

La del trapecio 2, $S_2 = (Cc + Bb) \times cb$, pero, $Bb = y_1$ mientras que $Cc = y_1 - y_2$, luego $S_2 = (y_1 + y_1 - y_2)\, x_2$ $= (2\, y_1 - y_2)\, x_2$. Para el 3.^er^ trapecio se tiene haciendo $(2\, y_1 - y_2) = n$.

$$S_3 = (Cc + Dd)\, dc = \left[ n + (n + y_3) \right] x_3 = (2n + y_3) \times x_3$$

De lo que precede se desprende que el factor—*ordenada doble*—es la suma de las ordenadas absolutas de los dos extremos de una línea, ordenadas que han sido ya calculadas; pero en caso de quererse eliminar ese cálculo prévio, también puede obtenerse la *ordenada doble* directamente, sirviéndose de las ordenadas parciales con su signo.

El metodo á seguirse es el siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| $y_1$ | + 776 | 1° factor |
| $+ y_1$ | + 776 | |
| | + 1552 | |
| $+ y_2$ | − 255.22 | |
| | + 1296.78 | 2° factor |
| $+ y_2$ | − 255.22 | |
| | + 1041.56 | |
| $+ y_3$ | + 1291.80 | |
| | + 2333.36 | 3° factor |
| $+ y_3$ | + 1291.80 | |
| | + 3625.16 | |
| $+ y_4$ | − 67.15 | |
| | + 3558.01 | 4° factor |
| $+ y_4$ | − 67.15 | |
| | + 3490.86 | |
| $+ y_5$ | − 1224.83 | |
| | + 2266.03 | 5° factor |
| $+ y_6$ | − 1224.83 | |
| | + 1041.20 | |
| $+ y_6$ | − 520.60 | |
| | + 520.60 | 6° factor |

**Comprobación por las ordenadas acumuladas**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ª ordenada acu. | + 776 | 776 | 1° factor |
| 2ª » » | + 520.78 | 1296.78 | 2° » |
| 3ª » » | + 1812.58 | 2333.36 | 3° » |
| 4ª » » | + 1745 43 | 3558.01 | 4° » |
| 5ª » » | + 520.60 | 2266.03 | 5° » |
| 6ª » » | — 0 | 520.60 | 6° » |

El sistema de cálculo de ordenadas dobles es sencillo, basta observar los signos para llegar á un buen resultado cuya prueba consiste en que el último factor sea igual á la ordenada de la última línea.

Como comprobación del cálculo superficial, se suelen repetir los cálculos invertiendo los factores, esto es, se deducen las abcisas dobles y se multiplican por las ordedenadas parciales.

La columna 12 contiene los productos dados por los elementos de la columna 11, son positivos ó negativos según los signos de los factores, recordando que *signos iguales* dan un producto *positivo,* mientras que *signos desiguales* dan resultado *negativo.*

Ahora, como se ha visto, todas las superficies son dobles, lo que implica que, una vez tomada la diferencia entre las sumas de las dos columnas de productos, habrá que tomar la mitad del resíduo, cualquiera que sea su signo, para conocer la verdadera superficie del polígono.

Para la formación de las planillas que deben agregarse á las operaciones de mensuras, se han adoptado varias disposiciones, haciendo desaparecer en unas todos los elementos y suprimiendo varios de ellos en otras; creemos que el modelo adjunto satisface á todas las exigencias y es al mismo tiempo el más sencillo.

## SISTEMA DE LATITUDES Y APARTAMIENTOS

Si en vez de adoptar para el cálculo de coordenadas un sistema de ejes que pase por uno de los costados del polígono, se adopta uno que forme un ángulo cualquiera con uno de los costados del polígono, el orden de cálculo será el mismo.

En el presente sistema llamado *«de Latitudes y Apartamientos»*, se ha adoptado la meridiana y su perpendicular como ejes de coordenadas, siendo indiferente que sea el meridiano verdadero ó el magnético.

Prescindiendo del orden de cálculos que es idéntico al sistema anterior, éste presenta varias ventajas, así: es de práctica, al presentar una mensura indicar el rumbo y siendo éste el ángulo que una línea forma con la meridiana, es también el ángulo de proyección de cada línea; por otra parte, al tratarse de una subdivisión complicada, el empleo del rumbo en estos casos permite notar con toda sencillez las diferencias de paralelismo entre líneas á veces muy distantes una de otra; en fin, al decir de muchos prácticos, este sistema es preferible al anterior y tal vez se encuentre aún hoy más generalizado que el anterior.

*La Latitud* es la abcisa que se mide sobre la meridiana, es Norte y positiva ó Sud y negativa, según lo indique el rumbo y por lo tanto corra hacia el Norte ó hacia el Sud. La expresión es $L = d \cos m$ en la cual $d$ = línea y $m$ = rumbo.

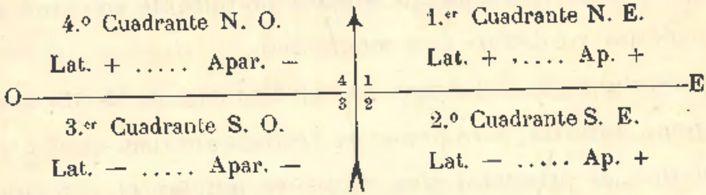
*El Apartamiento* es la ordenada, medida perpendicularmente á la meridiana; es *Este* y *positiva* ú *Oeste* y *negativa*, según lo indique el rumbo y por lo tanto se encuentre á la derecha ó la izquierda de la meridiana.

Su expresión es:

$$A = d \operatorname{sen} m.$$

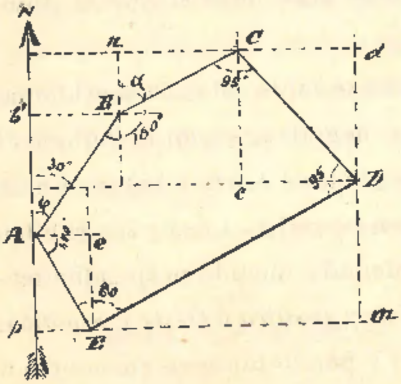
El primer cuadrante en este sistema es el de la derecha sea el N. E. siguiendo los demás el orden natural sea el de las agujas de un reloj.

Las coordenadas tienen pues los siguientes signos:




Para mayor comodidad del cálculo se procurará siempre hacer pasar la meridiana por el punto más al Oeste del polígono á calcular.

La deducción del ángulo de proyección *m* ó sea el rumbo es la primer operación á ejecutar, para lo cual puede hacerse uso, ya de un método gráfico, ya por el analítico anteriormente indicado.




Para deducir los ángulos de proyección por el método gráfico, teniendo á la vista el adjunto croquis, observemos lo siguiente:

En el triángulo formado por la línea A B y la meridiana se tiene el ángulo *m* = rumbo N. 30º E.

Si por B se trazan: una paralela á la meridiana y á su perpendicular, podrá deducirse el ángulo n B C = *a* de proyección ó rumbo de la línea B C, en efecto n B C = 180 — (C B A — A B b) = 180 — (160 — 30) = 180 — 130 = 50° que, como va dirigido en el 1.er cuadrante será N. 50° E.

Procediendo de igual manera el vértice C, se tiene, recordando siempre que

n B C = B C c, *ángulo c C D* = B C D – B C c = 95 — 50 = 45°,

y que como C D corre en el 2.° cuadrante será:

S. 45° E.

En el punto D, recordando que c C D = C D d;

*ángulo m* D E = 180° – (C D d + C D E) = 180 – (45 + 95) = 40° y como la línea D E corre en el 4.° cuadrante será S 40° O.

En el punto E, se tiene para el ángulo de proyección ó rumbo; *ángulo* e E A = A E D — e E D = 80° — 40 = 40 que por correr en el 1.er cuadrante es: N. 40° E.

En el punto A se obtendrá una verificación pues debe tenerse:

b'AB + BAE + EAp = 180°

30 + 110 + 40 = 180°

Este método, que puede llamarse gráfico, necesita tener á la vista un croquis claro para darse bien cuenta de la magnitud de los ángulos y correspondiente dirección de las líneas según el cuadrante que ocupe; la aplicación del método descrito anteriormente para la deducción del ángulo de proyección, es más seguro, independiente y rápido, sólo necesita tener presente que al primer ángulo hay que sumarle el rumbo de la línea anterior. Así en el presente caso, partiendo del punto A con el rumbo de la línea AB al N. 30° E. se tendrá:

rumbo 30 N 30 E
ángulo en A 110

primer línea AE 140 en el 2.° $C^{te}$ sea 180 − 140 = S. 40° E
+ ángulo en E = 80

220
− 180

para línea ED 40 en el 1.er $C^{te}$ sea N. 40 E
+ ángulo en D = 95

135
+ 180

para línea DC 315 en el 4.° $C^{te}$ sea 360 − 315 = N. 45° O
ángulo en C + 95

410
− 180

para línea CB 230 en el 3.er $C^{te}$ sea 230 − 180 = S 50° O
+ ángulo en B + 160

390
− 180

para línea BA 210 en el 3.er $C^{te}$ sea 210 − 180 = S 30° O.
Comprobación
+ ángulo en A − 110

320
− 180

para línea AE 140 en el 2.° $C^{te}$ como antes.

2.° *Ejemplo.* Aplicación al polígono de la planilla adjunta.

1er rumbo dado para
línea 1. 13 43.50 N. 43°50 E.
+ 1er ángulo en 1 + 88.20

1er línea 1. á 2 132.10 en el 2.° el $C^{te}$ sea 180°—124.°10'=S. 47°50' E.
+ ángulo en 2 180.17

312.27
− 180

para línea 2 á 3 132.27 en el 2.° $C^{te}$ sea 180° — 132.27 = S. 47°33' E.
+ ángulo en 3 179.30

311.57
− 180

para línea 3 á 4 131.57 en el 2° $C^{te}$ sea 180° — 131°57' = S. 48°03' E.
+ ángulo en 4 179.52

311.49
− 180

para línea 4 á 5 131.49 en el 2.° $C^{te}$ sea, 180° — 131.°49' = S. 48° 11E.

| | | |
|---|---|---|
| *Del frente* | 131.49 | |
| + ángulo en 5 | 186.11 | |
| | 318.00 | |
| | — 180 | |
| para línea 5 á 6 | 138.00 | en el 2.° C^te^ sea, 180 — 138° = S. 42°00' E. |
| + ángulo en 6 | 173.53 | |
| | 311.53 | |
| | — 180 | |
| para línea 6 á 7 | 131.53 | en el 2.° C^te^ sea 180 — 131.°53' = S. 48°07' E. |
| + ángulo en 7 | 90.18 | |
| | 222.11 | |
| | —180 | |
| para línea 7 á 8 | 42.11 | en el 1.^er^ C^te^ sea.............. ..N. 42°11' E. |
| + ángulo en 8 | 89.50 | |
| | 132.01 | |
| | + 180 | |
| para línea 8 á 9 | 312.01 | en el 4° C^te^ sea, 360° — 312°01....N. 47°59'O. |
| + ángulo en 9 | 70.04 | |
| | 582.05 | |
| | — 180 | |
| para línea 9 á 10 | 402.05 | en el 1° por pasar de 360°, sea 402°05'—360= N. 42°05' E. |
| + ángulo en 10 | 90.41 | |
| | 492.46 | |
| | — 180 | |
| para línea 10 á 11 | 312.46 | en el 4.° C^te^ sea 360 — 312°46'.... N 47°14' O. |
| + ángulo en 11 | 89.05 | |
| | 401 51 | |
| | — 180 | |
| para línea 11 á 12 | 221.51 | en el 3.° C^te^ sea 221.51 — 180.....S 41°51' O. |
| + ángulo en 12 | 270°.55 | |
| | 492.46 | |
| | 180 | |
| para línea 12 á 13 | 312.46 | en el 4.° C^te^ sea 360°—312°46.... N. 47°14'O. |
| + ángulo en 13 | 91.04 | |
| | 403.50 | |
| | — 180 | |
| para línea 13 á 1 | 223.50 | en el 3.° C^te^ sea 223°50'—180....S. 43°50' O. |
| + ángulo en 1 | 88.20 | |
| | 312.10 | |
| | — 180 | |
| para línea 1 á 2 | 132.10 | en el 2.° C^te^ sea 180 — 132°10'....S. 47°50'E. |

idéntico rumbo al adoptado para la línea 1. 2.

Conocido el método para deducir el ángulo de proyección de cada línea sobre la meridiana, sea el rumbo, el

## PLANILLA POR LATITU[illegible]S Y

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 6 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estaciones | Rumbos | Ángulos internos | Distancias | Latitudes cos. x | | Apartamient[illegible] sen. y | | |
| | | | | Norte + | Sud — | Este + | Oe[illegible] — | |
| 1 | S. 47° 50' E. | 88° 20' | 2872 | — | 1927.89 | 2128.70 | — | — |
| 2 | S. 47° 33' E. | 180° 17' | 1140 | — | 1769.43 | 841.16 | — | — |
| 3 | S. 48° 03' E. | 179° 30' | 2640 | — | 1764.78 | 1963 40 | — | — |
| 4 | S. 48° 11' E. | 179° 52' | 2617 | | 1744 84 | 1950 39 | — | — |
| 5 | S. 42° 00' O. | 186° 11' | 123 | — | 91.46 | — | 82.[illegible] | — |
| 6 | S. 48° 07' E. | 173° 53' | 1218 | — | 813.16 | 906.82 | — | — |
| 7 | N. 42° 11' E. | 90° 18' | 4725 | 3501.25 | — | 3172.82 | — | + |
| 8 | N. 47° 59' O. | 89° 50' | 106 | 70.95 | — | — | 78.[illegible] | + |
| 9 | N. 42° 05' E. | 270° 04' | 3204 | 2377.88 | — | 2147.85 | — | + |
| 10 | N. 47° 14' O. | 90° 41' | 4263 | 2894.66 | — | .... | 31[illegible] | + |
| 11 | S. 41° 51' O. | 89° 05' | 2693 | — | 2006.00 | — | 179[illegible].70 | — |
| 12 | N. 47° 14' O. | 270° 55' | 5975 | 4057.10 | — | — | 4[illegible].40 | — |
| 13 | S. 43° 50' O. | 91° 04' | 5248 | — | 3785.63 | — | 36[illegible] | — |
| | | 1980° 00' | | 12901.82 | 12903.13 | 13110.64 | 131[illegible].34 | |
| | | | | dif. = 1.31 | | dif. = 2.30 | | |

## UDES Y APARTAMIENTOS

| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Latitudes corregidas | Apartamientos corregidos | Factores | | Productos | |
| | | y apart. acumul. | x | + | — |
| — 1927.79 | + 2128.52 | + 2128.52 | — 1927.79 | — | 4103339.57 |
| — 769.40 | + 841 08 | + 5098.12 | — 769.40 | — | 3922493.53 |
| — 1764.69 | + 1963.22 | + 7902.42 | — 1764.69 | — | 13745321.55 |
| — 1744.75 | + 1950.21 | + 11815.85 | — 1744.75 | — | 20615704.29 |
| — 91.40 | — 82.30 | + 13688.76 | — 91.40 | — | 1150695.66 |
| — 813.12 | + 906.75 | + 14508.21 | — 813.12 | — | 11796915.71 |
| + 3501.41 | + 3172.53 | + 18587.49 | + 3501.40 | 65042237 49 | — |
| + 70.95 | — 78.75 | + 21681.27 | + 70.95 | 1538286.11 | — |
| + 2677.98 | + 2147.18 | + 23749.70 | + 2577.98 | 56476311.61 | — |
| + 2894.84 | — 3129.85 | + 22767.03 | + 2894.84 | 65906909.12 | — |
| — 2006.30 | — 1796 56 | + 17840.32 | — 2005.90 | — | 35785097.89 |
| + 4057.30 | — 4386 75 | + 11656.71 | + 4057.30 | 47294769.48 | — |
| — 3785.43 | — 3634.98 | + 3634.98 | + 3785.43 | — | 13759962.34 |
| 13109.49 | 13109.49 | | | 236258513.81 | 104879530.54 |
| | | | | — 104879530.54 | |
| | | | 2 S = | 131378983.27 | |
| | | | S = | 65689491.63 | |

cálculo de las coordenadas, sea abcisa $x$ = latitud y ordenada $y$ = apartamiento se efectuará por las fórmulas ya conocidas

$$\begin{matrix} L = d \cos. m \\ A = d \operatorname{sen}. m \end{matrix} \qquad (1)$$

El cálculo de las coordenadas acumuladas, así como el de las dobles para los factores, se efectúa como ya se ha dicho al tratarse el mismo tema en el capítulo anterior.

Para la formación de la planilla se observa el mismo procedimiento que en la de las coordenadas simples, esto es, en las 4 primeras columnas figuran los elementos del polígono, *estación, ángulo, rumbo y distancia*, en las columnas 5 y 6 se inscriben las coordenadas obtenidas por el cálculo haciendo constar las diferencias si las hubiera ó simplemente las ya corregidas.

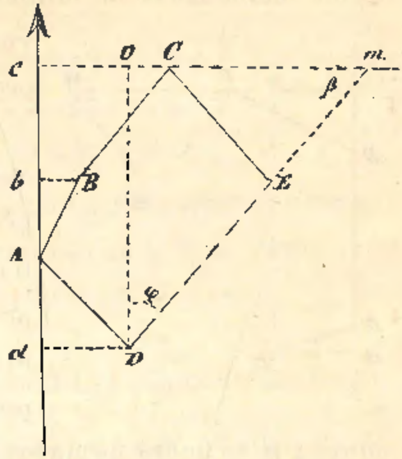
En las columnas de los factores, figuran en una las abcisas parciales y en la otra las ordenadas dobles, ó vice versa si se quiere.

En las columnas de los productos figuran estos según los signos de sus factores y la mitad de la diferencia de la suma de ambas sumas será la superficie buscada.

El exámen de la planilla completará la presente descripción:

PROBLEMAS

En un polígono de 5 lados se han podido medir sólo los lados AB, BC y AD y observar los ángulos en los puntos C, B, A y D, de manera, que el punto E sólo se encuentra determinado por intersección; se desean conocer las líneas CE y ED.




Para resolver este problema por el sistema de *latitudes* y *apartamientos* se calculará préviamente el rumbo ó ángulo de proyección de cada línea, operación fácil á hacerse pues que los 5 ángulos son conocidos; el ángulo en

E = 540° – (A + B + C + D);

por lo tanto, se conocerá el ángulo *m* de la línea D E.

Conocidos los ángulos de proyección y calculadas las coordenadas de los vértices C, B, A, D, podrá formarse el triángulo D O m en el cual: D O = suma de las abcisas ó latitudes, ángulo $g$ = rumbo de D E prolongada hasta m. y ángulo $b$ en el vértice $m$ que es $b = 90 - g$.

Luego resolviendo el triángulo D O $m$ se tendrá

$$O\,m = D\,O \times \text{tang } b, \text{ y } m\,C = m\,O - O\,C$$

siendo O C = C c – D d diferencia de apartamientos.

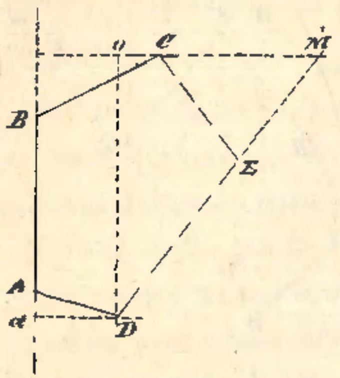
Así mismo se tendrá $m\,D = D\,O \times \text{sen } b$.

En el triángulo C $m$ E, se conoce:

el ángulo $b$ en $m$, el ángulo en C sea $m$ C E = 180° – c C E el ángulo en E = 180 - C E D y el lado C $m$ luego se puede hallar

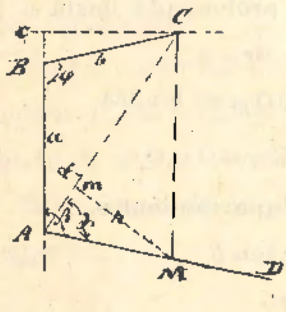
$$C\,E = \frac{C\,m \text{ sen. } b}{\text{sen. } E}, \quad E\,m = \frac{C\,m \text{ sen. } C}{\text{sen. } E}, \text{ de donde } D\,E = D\,m - E\,m$$

También puede resolverse este problema sin el auxilio de las coordenadas de latitudes y apartamientos, observando, sin embargo, el mismo orden de cálculo.




Asi calculando las proyecciones de B C y A D sobre A B prolongando y trazando desde D una paralela á A B así como prolongando D E hasta M punto de intersección con la perpendicular trazada desde C sobre A B, se habrá formado el triángulo D O M cuya resolución es idéntica á la expuesta anteriormente.

2.° *problema*—Hay que deslindar una superficie S dentro de un perímetro del que se conoce sólo dos lados y dos ángulos adyacentes.




Sean los lados conocidos B C = b, A B = a y los ángulos, C B A = *t*, B A D = *n* el lado A D es indefinido.

Calculada la proyección de B C sobre A B prolongado se determinará el triángulo A c C en el cual se hallará el ángulo *p* y el lado C A por: tang. $p = \frac{Cc}{Ac}$, $AC = \frac{Ac}{\cos. p}$

$$\text{Sup. } ABC = S_1 = \frac{Ac \times Cc}{2} - \frac{Bc \times Cc}{2}$$

Para completar la superficie á entregar se tiene

$$S_2 = S - S_1$$

y esta deberá afectar la forma del triángulo C A M.

Luego la superficie $S_2$ tomará por expresión:

$$2S_2 = CA \times h,$$

pero h, en el triángulo M A m tiene por valor $1 : \text{sen}\, r :: AM : h$

$h = AM\ \text{sen.}\ r$ sustituyendo este valor de h.

$$2S_2 = CA \times AM\ \text{sen}\ r \quad \text{de donde}\ AM = \frac{2S_2}{CA\ \text{sen.}\ r}$$

Conocida así la distancia A M, á medirse sobre la línea A D, fácil será luego deducir el ángulo en M y el largo de la línea C M dando así por resuelto el problema.

### CORRECCIÓN DE LAS COORDENADAS Y SUS CONSECUENCIAS

Se ha dicho que las diferencias que resulten de las sumas de abcisas ú ordenadas positivas y negativas, se reparten proporcionalmente á los sumandos; pero esa alteración de las coordenadas calculadas modifica, como es natural, el largo de la línea, su ángulo de proporción y bien entendido, el ángulo interno del polígono.

Para mejor explicación servirá el siguiente ejemplo:

Ordenadas

| + | — |
|---|---|
| 776 | — |
| — | 253 |
| 1288 | — |
| — | 67 |
| — | 1220 |
| — | 520 |
| 2064 | 2060 |
| difer. = 4 | |
| ½ dif. | 2 |
| + 2064 | — 2060 |
| — 2 | + 2 |
| def. 2062 | 2062 |

Siendo 4 la diferencia, hay que asignar la mitad á cada una de las sumas, á la mayor se le restarán 2, y á la menor se le sumará la misma cantidad, lo que dá por suma definitiva 2062,00.

Como se vé la diferencia 2 es aceptable por cuanto no pasa del 1 por mil de la cantidad lineal.

Ahora, hay que repartir esas 2 unidades proporcionalmente á los sumandos, se tendrá:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2060 : 2 :: 253 : x = 0.24$ | sea | 253.24 |
| $2060 : 2 :: 67 : x = 0.07$ | » | 67.07 |
| $2060 : 2 :: 1220 : x = 1.18$ | » | 1221.18 |
| $2060 : 2 :: 520 : x = 0.51$ | » | 520.51 |
| | | 2062.00 |

Corregida de esta manera la otra columna, así como las dos pertenecientes á las abcisas, se tendrá, por ejemplo, que en vez de que la línea B C cuyo cálculo directo ha dado: $+ x = 2250.40$ , $- y = 253.$
es ahora corregida: $+ x = 2251$ , $- y = 253.24.$

Luego del triángulo formado por las coordenadas

$$y : \text{tang. } m :: x : y \quad \text{se tiene; tang. } m = \frac{y}{x}.$$

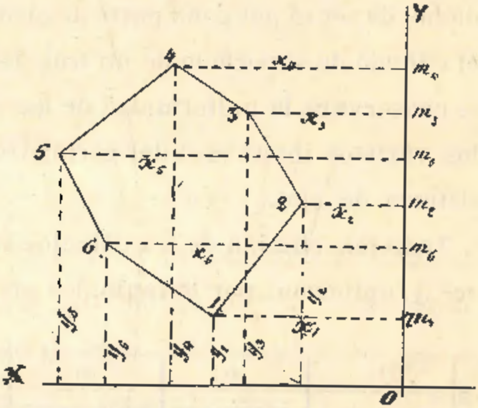
$$\text{y conocido } m \text{ , } 1 : \cos. m :: Bc : Bn \text{ , } BC = \frac{Bn}{\cos. m.}$$

La resolución de estas fórmulas dará pues, el ángulo de proyección $m$ y la nueva distancia B c de la línea corregida; con el ángulo $m$, y el de igual clase de las líneas adyacentes á B C se deducirá el ángulo corregido, interno del polígono.

Por demás sería entrar en mayores detalles para una operación tan sencilla, las indicaciones y fórmulas que preceden, son suficientes para salvar cualquier dificultad.

## Cálculo de una Superficie en función de las coordenadas absolutas de los vértices del polígono referidas á un orígen dado.

La superficie del polígono 1. 2. 3. 4. 5. 6. será evidentemente igual á la suma de los trapecios $[(x_1+x_6) \times (m_5-m_1)]+[(x_6+x_5) \times (m_5-m_6)]+[(x_5+x_4) \times (m_4-m_3)]$ ó sea:




$$S = \tfrac{1}{2}(x_1+x_6)(y_6-y_1) + \tfrac{1}{2}(x_5+x_4)(y_5-y_6) + \tfrac{1}{2}(x_5+x_4)(y_4-y_5)$$

disminuida de la superficie de los trapecios exteriores al polígono, esto es:

$$-[(x_1+x_2)(m_2-m_1)+(x_2+x_3)(m_3-m_2)+(x_3+x_4)(m_4-m_3)]$$

ó sea: $S_1 = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)(y_2-y_1)+\tfrac{1}{2}(x_2+x_3)(y_3-y_2)+\tfrac{1}{2}(x_3+x_4)(y_4-y_3)$

de donde se deduce la fórmula general:

$$S = \tfrac{1}{2}\left[(x_1+x_2)(y_1-y_2)+(x_2+x_3)(y_2-y_3)+(x_3+x_4)(y_3-y_4) + (x_4+x_5)(y_4-y_5)+(x_5+x_6)(y_5-y_6)+(x_6+x_1)(y_6-y_1)\right]$$

Expresión que efectuada sistemáticamente y teniendo en cuenta los signos de cada coordenada puede ponerse en forma de planilla facil de llenar, como se demostrará más adelante.

Para aplicar este sistema, dado el caso de que el polígono cuya superficie se busca no sea parte de un polígono mayor de coordenadas ya determinadas y que, por lo tanto, las coordenadas del punto 1 sean deducidas de aquellas; bastará asignar á las coordenadas del punto 1 una cantidad arbitraria que servirá de punto de partida.

Este sistema tiene su aplicación en el caso que queda dicho, de ser el polígono parte de otro mayor, por ejemplo, el cálculo de superficie de un fraccionamiento, con lo que se conservará la uniformidad de las coordenadas de todos los vértices internos ó del perímetro reducidas á un sólo sistema de ejes.

También elimina de los cálculos las figuras triangulares y uniforma, por lo tanto, los sistemas de cálculos.

| VÉRTICES | (1) COORDENADAS | | (2) FACTORES | | (3) PRODUCTOS | | COMPROBACIÓN | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x | y | Sumas x | Difers. y | Posit. | Negat. | Sumas y | Difer. x | PRODUCTOS + | PRODUCTOS — |
| 1 | + 162.50 | + 49.90 | + 229.00 | — 74.94 | — | 17163.36 | + 174.75 | + 96.00 | 16776.00 | — |
| 2 | + 66.50 | + 124.85 | + 174.00 | — 96.30 | — | 16756.20 | + 346.00 | — 41.00 | — | 14186.00 |
| 3 | + 107.50 | + 221.15 | + 308.75 | — 89.90 | — | 12319.12 | + 482.20 | — 93.75 | — | 45206.25 |
| 4 | + 201.25 | + 261.05 | + 471.85 | + 78.55 | 37024.24 | — | + 443.55 | — 68.85 | — | 30538.42 |
| 5 | + 270.10 | + 182.50 | + 507.50 | + 105.00 | 53287.50 | — | + 260.00 | + 32.70 | 8502.00 | — |
| 6 | + 237.40 | + 77.50 | + 399.90 | + 27.50 | 11037.24 | — | + 127.40 | + 74.90 | 9542.26 | — |
| | | | | | 101349.28 | 46238.87 | | | 34820.26 | 89930.67 |
| | | | | | 46238.87 | | | | | 34820.26 |
| | | | | 2 S = | 55110.41 | | | | 2 S = | 55110.41 |
| | | | | S = | 27555.20 | | | | S = | 27555.20 |

En las columnas (1) tituladas Coordenadas, van colocadas las coordenadas acumuladas de cada vértice y referidas á los ejes adoptados al efecto; por razón natural todas aparecen con el signo más, pues en realidad se encuentran comprendidas en el primer cuadrante de los grandes ejes.

En las columnas (2) tituladas Factores, van inscritas en una las sumas parciales

$$x_1 + x_2 , x_2 + x_3 \ldots\ldots x_5 + x_6 , x_6 + x_1$$

en la otra las diferencias

$$y_1 - y_2 , y_2 - y_3 \ldots\ldots y_5 - y_6 , y_6 - y_1 .$$

Las sumas de las $x$ por razón natural tendrán todas el signo positivo, pero las diferencias de $y$ resultarán unas con $-$ y otras con $+$; así

$$+ 49.90 \text{ menos } + 124.85 = - 74.94$$

$$+ 124.85 \text{ menos } + 221.15 = - 96.30,$$

pero

$$+ 261.05 - (+ 182.50) = + 78.55$$

y

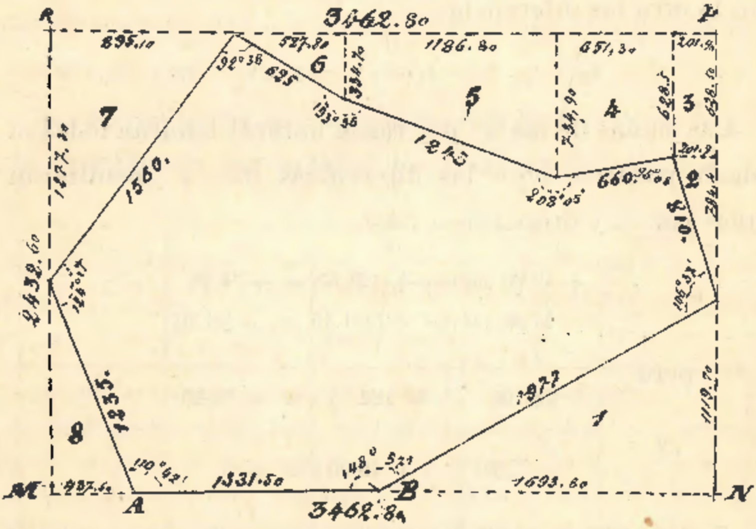
$$+ 77.50 - (+ 49.90) = + 27.$$

En las columnas (3) Productos, van colocados según el signo que resulte de los factores, el producto de los términos de las columnas (2).

Como comprobación del resultado de estos cálculos, puede repetirse la operación haciendo la suma de las $y$ en vez de las $x$; y la diferencia de las $x$ en vez de las $y$ como se vé en la presente planilla.

### CÁLCULO SUPERFICIAL POR DEDUCCIÓN DE LAS SUPERFICIES EXTRAPOLIGONALES

Después de calculadas las proyecciones de cada línea del polígono sobre la que se ha adoptado como base, sea la A B prolongada en M N atendiendo el cuadrante á que




pertenece cada línea proyectada, fácil es construir el paralelógramo M N P R, que encierra la figura, y en el cual el lado M N representa la suma de las abcisas positivas ó negativas, y las lados N P, M R la suma de las ordenadas positivas ó negativas.

Luego deduciendo el complemento de cada una de esas coordenadas hasta el límite del paralelógramo, se tendrán las dimensiones de las figuras 1, 2... 7, 8, cuyas superficies será fácil calcular.

Luego, pues, si de la superficie total del paralelógramo M N P R se deduce la suma de las figuras extrapoligonales 1, 2, 3... 8, se obtendrá la superficie del polígono.

Haciendo los cálculos del precedente ejemplo, se tendrá:

3 00848 = 1019.70
Log. sen. 31° 03' = 9.71247
Log. 1977 = 3.29601 — 2.º
Log. cos......... = 9.94384
3 22885 = 1693 80

2.89456 = 748.40
Log. sen. 75° 34' = 9.98607
Log. 810 = 2.90849 — 1.º
Log. cos......... = 9.39664
2.30513 = 201.90

2.02799 = 106.40
Log. sen. 9° 13' = 9.20845
Log. 660 = 2.81954 — 4.º
Log. cos......... = 9.99425
2.81379 = 651.30

2.60230 = 400.20
Log. sen. 18° 47' = 9.50784
Log. 1243 = 3.09447 — 1."
Log. cos......... = 9.97623
3.07070 = 1186.80

2.52471 = 334.70
Log. sen. 32° 23' = 9.72883
Log. 625 = 2.79588 — 1.º
Log. cos......... = 9.92659
2.72247 = 527.80

3.10640 = 1277.30
Log. sen. 54° 49' = 9.91328
Log. 1560 = 3.19312 — 4.º
Log. cos......... = 9.75877
2.95189 = 895.10

3.06269 = 1155.30
Log. sen. 69° 18' = 9.97102
Log. 1235 = 3.09167 — 3.º
Log. cos......... = 9.54836
2.64003 = 437.60

SUMAS DE LOS SENOS

1.° = + 1019.70 +
2.° = + 784.40
1804.10 +
3.° = − 106.40
1697.70 +
4.° = + 400.20
2097.90 +
5.° = + 334.70
N P = 2432.6 +

6.° = − 1277.30
7.° = − 1155.30
R M = − 2432.60

SUMAS DE LOS COSENOS

2.° = + 201.90
3.° = + 651.30
4.° = + 1186.80
5.° = + 527.80
6.° = + 895.10
P R = 3462.90

8.° = − 437.60
0 = − 1331.50
1.° = − 1693.80
M N = 3462.90

DEDUCCIÓN DE LAS ORDENADAS EXTERIORES

$$2432.6 - 1804.1 = 628.5$$
$$2432.6 - 1697.7 = 734.9$$
$$2432.6 - 2097.9 = 334.7$$

Las demás son las propias coordenadas de cada línea.

Superficie del paralelógramo M N P R = $3462.90 \times 2432.60 = 8423850.54$

Figuras extrapoligonales á deducir:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.º...... | $\frac{1}{2}(1693.8 \times 1019.7)$.......... | = 863583.93 | |
| 2.º...... | $\frac{1}{2}(784.4 \times 201.9)$............ | = 79185.18 | |
| 3.º...... | $(628.5 \times 201.9)$............. | = 126894.15 | |
| 4.º...... | $\frac{1}{2}(734.9 + 628.5) \times 651.3$.. | = 443991.21 | |
| 5.º...... | $\frac{1}{2}(334.7 + 734.9) \times 1186.8$. | = 634700.64 | |
| 6.º...... | $\frac{1}{2}(334.7 \times 527.8)$........... | = 88327.33 | |
| 7.º...... | $\frac{1}{2}(1277.3 \times 895.1)$.......... | = 571655.61 | |
| 8.º...... | $\frac{1}{2}(1155.3 \times 437.6)$.......... | = 252779.64 | |
| | Suma.... | 3061117.69 | 3061117.69 |
| | Superficie buscada.... | = | 5362732.85 |

# COSMOGRAFIA

## COORDENADAS ESFÉRICAS Y CELESTES

Tres son los sistemas de coordenadas adoptados para los estudios y trabajos astronómicos, fundados todos ellos en la hipótesis de que la tierra permanece fija y que el sol y demás astros giran á su alrededor.

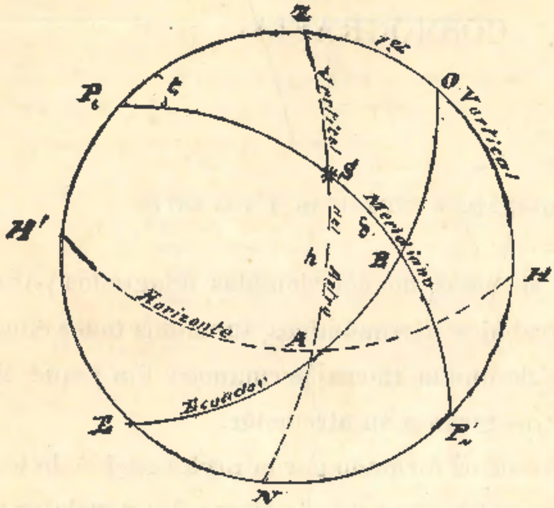
*El primer sistema*, es formado por la prolongación de los mismos planos que forman sobre la tierra los paralelos y meridianos; tiene pues por eje, la prolongación del eje terrestre y sus polos Norte y Sud así como el plano perpendicular al eje que pasa por el centro, es su *ecuador*.

*El segundo sistema* se apoya en el eje que pasa por el observador y el centro de la tierra; sus polos se llaman Zenit y Nadir y el plano perpendicular á ese eje y que pasa por el centro de la tierra se llama Horizonte.

*El tercer sistema* tiene por base la *Eclíptica* cuyo plano pasa también por el centro de la tierra.

Sea NHSON la esfera celeste concéntrica con la de la tierra; $P_n$ $P_s$ la línea de los polos ó eje terrestre prolongado OBE el plano del Ecuador.

Z el zenit del observador, N su nadir; PZE NO es el meridiano celeste, esto es, el círculo máximo que pasa por los polos y por el Zenit y Nadir del observador; la parte del meridiano que contiene el Zenit es el meridiano superior del observador y la otra parte el meridiano inferior; H H' es el horizonte verdadero, esto es, el círculo máximo perpendicular al primer vertical y al eje del Zenit y Nadir.




*Declinación* es el arco S B de meridiano celeste comprendido entre el ecuador y el astro; se cuenta desde el ecuador hacia el Norte ó hacia el Sud hasta 90 grados, llevando el signo + cuando el astro está en el emisferio Norte, y el signo — cuando se halla en el del Sud.

*Ascensión Recta*, es el arco de ecuador comprendido entre los máximos de declinación; se cuenta de 0° á 360° de Oeste á Este; se le representa con el símbolo $\alpha$ ó Asc. Recta siendo su punto de partida ó 0° la estrella $\gamma$ de Aries.

*Horario*, es el ángulo E P B formado en el Polo por dos meridianos ó máximos de declinación, que pasan: el uno por el astro S y el otro por el punto adoptado como orígen de los cálculos sea por el Zenit del observador, y se llama también meridiano del observador. La medida del ángulo horario es el arco de ecuador B E comprendido entre dichos meridianos se cuenta de 0° á 360° ó de $0^h$ á 24 horas en dirección Este á Oeste.

*Vertical primero* es el círculo máximo que pasa por el Zenit y Nadir y por los puntos Este y Oeste del horizonte del observador.

El círculo máximo que pasa por el Zenit y Nadir y el astro, se llama *Vertical del Astro.*

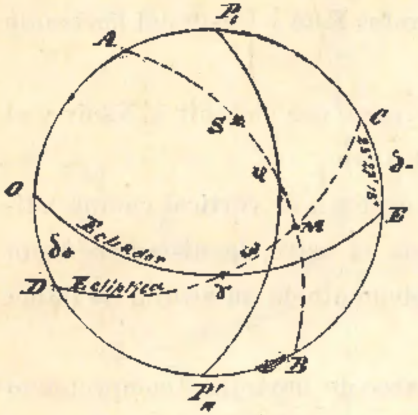
*Altura* de un astro, es el arco S A de vertical comprendido desde el horizonte hasta el astro; la distancia de un astro al Zenit, sea el complemento de su altura, se llama *distancia zenital* Z S.

*Azimut* de un astro es el arco de horizonte comprendido entre el vertical del astro y el meridiano del observador; corresponde pues á un ángulo en el Zenit, A Z H. Se cuenta sobre el horizonte desde el Norte hacia el Este y hasta 360 grados.

*Amplitud*, es el arco de horizonte comprendido entre el vertical del astro y el *vertical primero*; es el complemento del Azimut, se observa cuando el astro se halla próximo al horizonte ó en él mismo y se escribe poniendo E ó O cuando es oritiva ú oxídua y luego N ú S, según su dirección: amplitud O. 20°15′ S.

*Longitud celeste* de un astro es el arco de *eclíptica* comprendido entre el punto adoptado como orígen (γ de Aries mismo orígen que él de las Ascensiones Rectas) y el máximo de Latitud.

*Latitud Celeste*, es el arco de máximo de latitud comprendido entre la eclíptica y el astro; se cuentan de 0° hasta 90° empezando de la eclíptica hacia el Norte ó hacia el Sud; en la primer dirección son latitudes positivas y en la segunda negativas ó Sud.




Como orígen de las longitudes y también de las ascensiones rectas se ha adoptado el *equinocial de primavera*, sea el punto en que, idealmente, la eclíptica corta al ecuador. Este punto corresponde á la estrella γ de la constelación Aries y el sol coincide con él el 21 de Marzo.

El ángulo formado por los dos planos: *eclíptica y ecuador* se llama *oblicuidad de la eclíptica* y mide 23°27'18.

La línea, que, pasando por el centro de la esfera pasa también por los dos puntos en que la eclíptica corta al ecuador, se llama: *línea de los equinoccios* y estos puntos: equinoccio de primavera y equinoccio de otoño.

Los puntos en que más se aparta la eclíptica del ecuador, esto es, cuando el sol llega á su declinación máxima, tanto en el emisferio Norte como en el Sud, se llaman *Solsticios* de verano y *Solsticios* de invierno respectivamente.

La eclíptica representa la trayectoria ú órbita que se supone describe el sol alrededor de la tierra en un año (año trópico); por lo tanto, las declinaciones del sol se hallan siempre representadas por el ángulo formado por ese plano con el ecuador; estas declinaciones son: cero grados (ó nulas) en los equinoccios, positivas mientras recorre el sol el hemisferio Norte $+\delta$, y negativas en el hemisferio Sud $-\delta$.

La situación de un astro se halla pues definida por dos sistemas de coordenadas, su ascensión recta y su declinación con respecto al ecuador, y su longitud y latitud con respecto á la eclíptica.

*Zodiaco*, se llama así la faja de ocho y medio grados á cada lado de la eclíptica y en la cual todos los planetas hacen su revolución aparente. Con algunas de las estrellas fijas que existen en esa faja, se han formado las *doce constelaciones* que se llaman también signos del Zodiaco y que corresponden á los doce meses del año: estos signos son:

| | | |
|---|---|---|
| 1 Aries...... 0° | 5 Leo........... 120° | 9 Sagitarius..... 240° |
| 2 Taurus... 30° | 6 Virgo........ 150° | 10 Capricornius.. 270° |
| 3 Gemino... 60° | 7 Libra......... 180° | 11 Acuarius....... 300° |
| 4 Cáncer.... 90° | 8 Escorpión... 210° | 12 Pisces .......... 330° |

**RESÚMEN DE LAS COORDENADAS ADOPTADAS**

| | | |
|---|---|---|
| 1.er sistema<br>Polo = el polo | El ecuador<br>Meridianos | Ascensiones rectas = $\alpha$<br>Declinaciones....... = $\delta$ |
| 2.° sistema<br>Polo = zenit | Horizonte<br>Vertical primero | Azimutes.... ....... = A<br>Amplitudes<br>Alturas.............. = h |
| 3.er sistema<br>Polo de la eclíptica | Eclíptica<br>Máximas de latitud | Longitud.. = Long. ó $\omega$<br>Latitud.... = L. ó $\varphi$ |

Ángulos formados { en el polo..... horarios..... = t ó H , medido en el ecuador
» » zenit..... azimutes... = A » » » horizonte

Puede pasarse de un sistema á otro de coordenadas por las siguientes fórmulas, en las que se emplean, á más de los símbolos ya indicados en el cuadro que precede, la oblicuidad de la eclíptica $= \varepsilon$.

1.$^{er}$ caso. Conociendo la longitud celeste $\omega$ y la latitud L del astro, hallar la ascensión recta $\alpha$ y la declinación $\delta$.

Haciendo $\operatorname{tang} x = \dfrac{\operatorname{tang} L}{\operatorname{sen} \omega}$ (1) se tendrá

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \omega}{\cos x} \cos (x + \varepsilon) \; (2); \quad \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} L \frac{\operatorname{sen} (\varepsilon + x)}{\operatorname{sen} x} \; (3).$$

2.° Conociendo la Ascensión recta $\alpha$ y la declinación $\delta$, hallar su longitud $\omega$ y latitud L.

Haciendo también: $\operatorname{tang} x' = \dfrac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{sen} \alpha}$ (4) se tendrá

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos x'} \cos (x' - \varepsilon) \; (5); \quad \operatorname{sen} L = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} x'} \operatorname{sen} (x' - \varepsilon) \; (6).$$

1.$^{er}$ ejemplo: Long. $\omega$ del astro $= 30^\circ\ 13'\ 30''$; latitud $L = 4^\circ\ 39'$; oblicuidad $\varepsilon = 23^\circ\ 28'$.

| Fórmula 1 | Fórmula 2 |
|---|---|
| log. tang. L = 8.910285 | log. tang. ω = 9.765369 |
| c. log. sen. ω = 0.298089 | cos. (ε + x) = 9.925238 |
| log. tang. x = 9.208374 | c. log. cos. x = 0.005595 |
| x = 9° 10' 41'' | log. tang. α = 9.696292 |
| ε = 23° 28' 00'' | α = 26° 25' 26'' |
| x + ε = 32° 38' 41'' | ó 1$^h$ 45' 41'' |

Fórmula 3

log. sen. L = 8.908856 +

log. sen. (ε + x) = 9.731930 +

c. log. sen. x = 0.797231 +

log. sen. δ = 9.438018 +

δ = 15° 54' 43'' N

2.° ejemplo. Conocida: Ascención recta $\alpha = 171^\circ\ 24'$, declinación $\delta = 8^\circ\ 8'$ N, oblicuidad $\varepsilon = 23^\circ\ 28'$, hallar la long. $\omega$ y lat. L.

Fórmula 4

$$\begin{aligned} \text{log. tang. } \delta &= 9.15508 \\ \text{c. log. sen. } \alpha &= 0.82526 \\ \hline \text{log. tang. } x' &= 9.98034 + \\ \hline x' &= 43^\circ\ 42'\ 15'' \\ \varepsilon &= 23^\circ\ 28' \\ \hline (x - \varepsilon) &= 20^\circ\ 14'\ 15'' \end{aligned}$$

Fórmula 5

$$\begin{aligned} \text{log. } \alpha &= 9.17965 - \\ \text{log. cos. } (x' - \varepsilon) &= 9.97233 + \\ \text{c. log. cos. } x' &= 0.14089 + \\ \hline \text{log. tang. } \omega &= 9.29287 + \\ \hline \omega &= 168^\circ\ 53'\ 42'' \end{aligned}$$

Fórmula 6

$$\begin{aligned} \text{log. sen. } \delta &= 9.15069 + \\ \text{log. sen. } (x' - \varepsilon) &= 9.53896 + \\ \text{c. log. sen. } x' &= 0.16056 + \\ \hline \text{log. sen. L} &= 8.85021 + \\ \hline \text{L} &= 4^\circ\ 3'\ 42''\ \text{N} \end{aligned}$$

*Latitud terrestre* es el arco de meridiano comprendido desde el Ecuador hasta el punto del observador. Se mide de 0° á 90° empezando desde el Ecuador y concluyendo en el polo.

*Meridianos terrestres* son círculos máximos que pasan por los polos cortando perpendicularmente el Ecuador. Tienen por orígen un punto arbitrario, adoptándose generalmente para los cálculos el que pasa por uno de los observatorios de las tablas ó efemérides de que se disponga. Llámase éste *primer meridiano* ó meridiano de las tablas.

La longitud es, pues, el arco de ecuador comprendido entre el primer meridiano y el que pasa por el observador.

*Diferencia de longitud y horario.* En el momento de una observación, los ángulos formados en el Polo por el meridiano que pasa por el astro y con los del observador y del observatorio correspondiente á las tablas ó efemérides que se adopten para los cálculos, expresarán dos horarios, el local y el del observatorio; su diferencia corresponderá á la diferencia de longitud entre ambos puntos. (Véase hora reducida.)

### MEDIDA DEL TIEMPO

*El Día Sidereo,* es el tiempo uniforme transcurrido entre dos pasages consecutivos de una misma *Estrella* por el mismo meridiano; principia para un lugar cualquiera en el instante en que la *estrella* γ *de Aries* ó punto vernal pasa por el meridiano del lugar; se deduce de esto que el tiempo sidereo es igual al ángulo horario del punto vernal con relación al meridiano adoptado. También puede decirse: que dicho tiempo es la ascención recta del meridiano del lugar.

Cuando una estrella pasa por el meridiano, su ascensión recta es igual á la del meridiano y por lo tanto á la hora siderea local. Cuando son: la $1^h$ $2^h$ $3^h$..... tiempo sidereo, el ángulo horario es $1^h$ $2^h$..... y también es lo mismo decir, que en ese instante pasa por el meridiano un punto del ecuador cuya ascensión recta es de $1^h$ $2^h$ $3^h$.....

El día sidereo es la *unidad del tiempo,* tiene una duración menor que el día solar, se divide en 24 horas y un año tiene $366\frac{2422}{10000}$ días sidereos.

*Día Solar verdadero*, es el tiempo que media entre dos pasages sucesivos del sol por el meridiano del mismo lugar.

Por el hecho de recorrer la eclíptica y no el ecuador, la duración del día solar no es uniforme, esto es: si en un mismo instante pasan por el mismo meridiano el sol y una estrella, al día siguiente á las $24^h$ el sol no habrá aún llegado al meridiano, cuando la estrella efectuará su paso por él.

Sin embargo, debido á la precesión de los equinoccios, resulta que el año trópico cuenta 365,2422 días solares medios, de donde 366,2422 días sidereos = 365,2422 días solares medios.

*Día Solar medio*, si se imagina un sol ficticio que recorra el ecuador en vez de la eclíptica, se conseguirá un movimiento uniforme llamado *día medio*, ó *tiempo medio.*

El paso de estos dos soles, uno verdadero y otro ficticio, no se hará, pues en el mismo instante y esta diferencia constituirá la *ecuación de tiempo,* variable progresivamente cada día, siendo aditiva durante un tiempo y sustractiva en otro.

Así se tiene $h_m = h_v \pm Ec.$ $\qquad h_v = h_m \mp Ec.$

El día solar medio, mide $1^d\ 3'56'',55$ sidereos.

*El Tiempo Astronómico* lo cuentan los Astrónomos desde *medio día,* ya sea verdadero ó medio, dividiéndolo en 24 horas contadas en el mismo orden de 1 á 24.

*El Tiempo Civil* es el adoptado en la vida social, se cuenta en dos séries de 12 horas, empezando la primera á las doce de la noche y la segunda desde medio día; se distingue la primera serie ó mitad con el calificativo de a. m. (antes del meridiano) y la segunda con p. m. (pasado meridiano). El día Civil se adelanta de 12 horas al día Astronómico.

## CONVERSIÓN DEL TIEMPO CIVIL EN ASTRONÓMICO Y VICEVERSA

**El tiempo civil p. m. es igual al t. astronómico con la misma fecha del día; pero si el tiempo es a. m. para tener el tiempo astronómico se añadirán 12 horas disminuyendo 1 día á la fecha.**

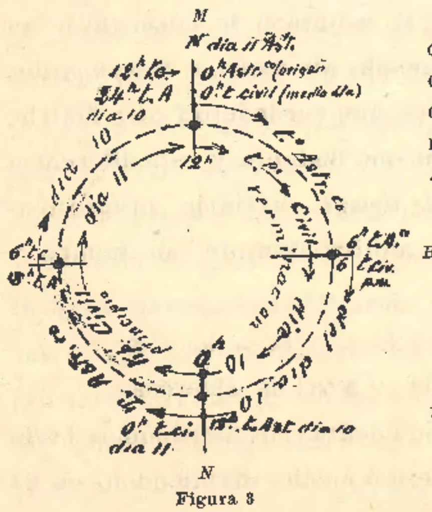



Figura 3

De la figura 3 se deduce, siendo M. el punto O. ú orígen del día Civil de fecha 10 y N el orígen del día Astronómico de misma fecha:

Arco MB = $6^h$ p.m. t. c. día 10 de..
» MB = $6^h$ t. Ast$^{co}$ » 10 »..
» MN = $12^h$ ó $0^h$ t. c » 11 »..
» MN = $12^h$ t. Ast$^{co}$ » 10 »..
» MA = $11^h$ t. Civil » 11 »..
» MA = $23^h$ t. Ast$^{co}$ » 10 »..

REGLA
- T. A$^{co}$ = T. c. (p.m.) con misma fecha
- T. A$^{co}$ = T. c. (a.m.) + $12^h$ con 1 día menos en la fecha
- T. c. (p. m.) = T. A$^{co}$ con misma fecha
- T. c. (a.m.) = T. A$^{co}$ — $12^h$ con 1 día más en la fecha

## RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO SIDEREO, LA ASCENSIÓN RECTA Y EL MERIDIANO DEL OBSERVADOR

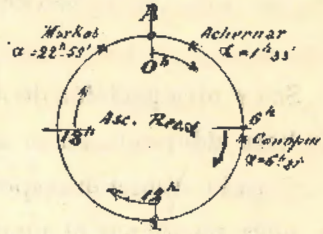



Figura 1

*Fig. 1.*—Situación relativa en Asc. recta de las Estrellas con el punto vernal (γ de Aries) origen de ellas.

Las Asc. rect. se cuentan en el sentido de la marcha de las agujas del reloj N. E. S. O. y la relación existente entre ellas es casi constante.


Figura 2

*Fig. 2.*—Sea N. E. S. O. el horizonte del observador cuyo meridiano pasa por N. y S. hallándose en N. el orígen de la medida del tiempo: O.h Los ángulos horarios se miden desde el punto N. en sentido inverso á la marcha de las agujas del reloj, N. O. S. E. de $0^h$ á $24^h$

Sea: γ la situación que en Marzo día.... ocupa el punto γ á las $0^h$ t. m. del meridiano N, que tiene por hora siderea $\theta = 23^h\ 14'\ 19''$.

C será el punto que ocupará la estrella *Canopus* en el mismo instante siendo su asc. rect. $6^h\ 21'$.

Para que *Canopus* pase por el meridiano de N. necesita recorrer el arco C E N que tiene por medida

$24^h$ — (hora siderea local) + (Asc. rect. *Canopus*) $= 24^h - \theta + \alpha$

sea: $t.\ s.\ \text{pasage} = \alpha - \theta$; sumando $24^h$ á $\alpha$ si fuera necesario para efectuar la resta.

Hora del paso de *Canopus* por el meridiano al 14 Marzo.

$$\begin{array}{rl} \text{Asc. rect. } \alpha = & 0^h\ 21'\ 40'' \\ \text{hor. Sid. } \theta = & 23^h\ 30'\ 05'' \\ \hline h_s = & 6^h\ 51'\ 35'' \end{array}$$

Sea $\gamma'$ otra posición de Aries correspondiente á Mayo con la hora siderea $\theta = 3^h\ 26'\ 38''$ á $0^h$ del meridiano de N.

C' es la situación respectiva de *Canopus* en ese instante y para pasar por el meridiano N deberá recorrer el arco C'N igual á su asc. recta menos la hora siderea

$$C'N = \gamma' C' - \gamma' N = \alpha - \theta$$

Para la estrella Markab que ocupa la posición M' correspondiente al mes de Mayo, tendrá que recorrer el arco M' SEN para llegar al meridiano de N, pero su ascen. rect. es el arco $\gamma'$ NEM'

luego; $\quad M'SEN = M'SEN\gamma' - N\gamma' = \alpha - \theta$

$$\begin{array}{ll} \text{Asc. rect. Markab} & \alpha = 22^h\ 59'37'' \\ \text{hora Sid. á } 0^h \text{ el 10 Mayo} & \theta = \ \ 3\ \ \ 14\ 45'' \\ \hline \text{hora Sid. del pasage} & t_s = 18^h\ 44\ 49'' \end{array}$$

Para hallar la hora t. m ó civil del paso de una estrella por el meridiano de un lugar cuya longitud es $\omega$ al Oeste ó al Este del meridiano de las tablas astronómicas de que se dispone, habrá que reducir la hora siderea á hora media mediante la corrección indicada por las tablas y la fórmula general será: pasage por meridiano

$$t_m = (\text{Acs. rect.} - \text{hora Sid.}) - \text{corr. tablas} \pm \text{longitud}$$

$$t_m = (\alpha - \theta) - \text{corr.} \pm \omega$$

Fórmula general: $\theta = \alpha$ (del sol verd.) $+$ T (tiempo verdad.)

$$T = \theta - \alpha$$

*Nota*— Para conocer aproximadamente cuales son las estrellas conocidas que pasarán por el meridiano del lugar á la hora que se desea hacer una observación, sea por ejemplo entre 8 y 9 horas de la noche, bastará aplicar esta fórmula: $t.\,m. - \theta = \alpha$ (de la estrella).

Luego buscando en las tablas cuales son las estrellas que tienen esa asc. rect, se hará para cada una el cálculo exacto.

## EL AÑO

El año trópico tiene $365 \frac{24222}{100000}$ días medio solares

» » » $366 \frac{24222}{100000}$ días Sidereos

1 día Sidereo $= \frac{365{,}2422}{266{,}2422} = 0{,}\ 99727$ día medio

24 hor. Sid. $= 23^h\ 56'04'',091$ tiempo medio

24 hor. med. $= 24^h\ 03'56'',555$ » Sidereo

$$1''\ t.\ m. = 1''\ 0027\ t_s$$

$$1''\ t.\ s. = 0''\ 9972\ t_m$$

Las efemérides de las tablas astronómicas, dan tablas para convertir la hora siderea en hora media y viceversa; así mismo se encuentran en los elementos del día solar la relación entre el día ***solar medio*** y ***el verdadero***, llamada ***Ecuacion de tiempos***. En algunas tablas figura sólo «tiempo verdadero á medio día medio» elemento que restado de 12 horas da la ecuación de tiempo con su signo + ó —.

$$t_v = t_m \mp e; \qquad t_m = t_v \pm e$$

## USO DE LOS EFEMÉRIDES

Observación hecha á las $4^h\ 4'\ 20''$ tiempo verdad. el 9 Marzo— reducirlo á tiempo medio

el día 9 á medio día verdadero. — Ecua. tiempo $= + 0^h\ 10'\ 32'',50$

» » 10 » » » » $- 0^h\ 10'\ 16'',80$

dif. en $24^h = - 0^h\ 0'\ 15'',70$

luego; $24^h : 0^h\ 0'\ 15{,}7 :: 4^h\ 4'\ 20'' : x = 0'\ 3''\ 05$

Ecua. tiempo día 9 $= + 0^h\ 10'\ 32'',50$

dif. por $4^h\ 4'\ 20''$ $=$ $-\ 3'',05$

Ec. tiemp. buscada $= + 0^h\ 10'\ 29'',45$

hora verdadera $=$ $4^h\ 40'\ 20''$

hora media buscada $=$ $4^h\ 50'\ 49'',45$

*Tiempo medio á tiempo sidereo*—En 13 de Mayo 1896 en un lugar á $4^h\ 2'\ 55''$ Oeste de París son las $22^h\ 17'\ 24''$ tiempo medio astronómico ¿cuál es el tiempo sidereo correspondiente? Según la *Connaisance du temps:*

al día 13, $t_m$ del lugar $= 22^h\ 17'\ 24''$
dif. de longitud $= 4^h\ 2'\ 53''$
$t_m$ en París el día 14 $= 2^h\ 20'\ 17''$
(hora reducida)

día 14 $t_s$ á $0^h$ en París $3^h\ 30'\ 52''\ 39$
dif. por $2^h\ 20'$..... .. $0'\ 22''\ 99$
» » $17''$...... $0'\ 05$
$3^h\ 31'\ 15'\ 43$
hora $t_m$ del lugar... $22^h\ 17'\ 24'\ 70$
$t_s$ buscado día 14.... $1^h\ 48'\ 40''\ 13$

En 13 de Mayo de 1897, en un lugar á $0^h\ 1'\ 44''\ 90$ al Oeste de La Plata, son las $22^h\ 17'\ 24''\ 70$ ¿á qué hora siderea corresponde? Con el almanaque del Observatorio de La Plata.

| | |
|---|---|
| día 13, $t_m$ lugar $= 22^h\ 17'\ 24''\ 70$ | día 13, $t_s$ á $0^h$ La Plata $3^h\ 26'\ 38''\ 40$ |
| dif. de longitud $0^h\ 1'\ 44''\ 90$ | (tabla C) corr. por $1'\ 44''\ 20$ $+\ 0''\ 30$ |
| $t_m$ de La Plata $= 22^h\ 19'\ 09''\ 60$ | $3^h\ 26'\ 38''\ 70$ |
| (hora reducida) | hora del lugar....... $22^h\ 17'\ 24''\ 70$ |
| | día 14, $t_s$ buscado ... $1^h\ 44'\ 03''\ 40$ |

Hallar la hora siderea de un lugar el 20 Agosto siendo $\varphi = 32^\circ\ 15'$ y longitud. $\omega = 4^h\ 34'$ O. París

$$\text{T. verd.} = 21^h\ 11'\ 17''$$
$$+\ \text{dif. } \omega = \ \ 4^h\ 34'$$
$$\text{T. verd. en París} = 1^h\ 45'\ 17''\ \text{día 21} = 1^h\ 754$$

asc. rect. del Sol á $0^h$ verd. $= 10^h\ 18'\ 44''$ var. hor. $= +\ 9''\ 158$

corr. por $1^h\ 754 \times 9''\ 158 = +\ 16''\ 06$

asc. rect. calculada $= 10^h\ 19'\ 00''\ 06$

$+$ tiempo verd. local $= 21^h\ 11'\ 17''$

tiempo Sidereo $= 7^h\ 30'\ 17''\ 06$

En Mendoza á $0^h\ 43'\ 42''$ de long. O. de La Plata, siendo las $2^h\ 19'\ 30''$ p. m. el 11 de Mayo 1897 — hallar la hora siderea correspondiente

| | | |
|---|---|---|
| T. s. á medio día medio en La Plata el día 11... | | $3^h\ 18'\ 45'',30$ |
| tabla C = correc. por $43'\ 42''$.................. | $+$ | $7'',20$ |
| t. s. á medio día en Mendoza.................... | $=$ | $3^h\ 18'\ 52'',50$ |
| tiemp. astr. local de la obser.................... | $=$ | $2\ 19'\ 30$ |
| tabla C. corrección par. $2^h\ 19'\ 30''$ $t_m \left\{ \begin{array}{l} 2^h = 0'\ 19''\ 70 \\ 19' = 0\ \ 3\ \ 10 \\ 30'' = 0\ \ 0\ \ 10 \end{array} \right\}$ | $= +$ | $22''\ 90$ |
| hora sid. buscada... | $=$ | $5^h\ 38'\ 45'',40$ |

Conocida la hora siderea $5^h\ 38'\ 45'',40$ en Mendoza fecha anterior hallar la hora t. m. correspondiente.

| | |
|---|---|
| tiempo sidereo dado........................ | $5^h$ 38' 45'', 40 |
| t. s á medio día en Mendoza (como anterior). | 3. 18 52'' 50 |
| diferencia... | $2^h$ 19' 52'' 90 |
| tabla B — correc. por $2^h$ 19' 52'', 90......... — | 22'' 90 |
| t. m. hora buscada = | $2^h$ 19' 30'' |

Mismo ejemplo que el anterior para las $17^h$ 37' 39''.8 t. sid.

| | | |
|---|---|---|
| t. s. dado.................. | 17.37.39''.8 | |
| t. s. (a. m. d. m).......... | 3.18.52.50 | |
| | 14.18'47'30 | |
| corr. tabla B por $14^h$ 18' 47'' — | 2' 20'' 30 | |
| t. m. hora buscada......... | $14^h$ 16' 27'.00 | día 11. |
| corresponde á $2^h$ 16' 27 t. civil | | » 12. |

Siendo las $21^h$ 11' 17''.20 tiemp. verd. el 25 Agosto de 1896 y la longitud $\omega$ del punto $= 7^h$ 45' al Este de París hallar la h. s. para ese punto.

| | |
|---|---|
| T. v. local...... | $21^h$ 11' 17'',20 |
| dif. long......... — | 7 45' |
| T. v. en París... = | $13^h$ 26' 17'.20 |
| (hora reducida).... | $13^h$ 438 |

| | |
|---|---|
| Asc. rect. del sol á $0^h$ v. el 25 | $10^h$ 18' 45'', 80 |
| corr. para ($8^h$ 438 $\times$ 9'' 158 + | 203,07 |
| Asc. rect. calculada..... = | $10^h$ 20.47.87 |
| Tiemp. verd°. local...... | 21 11.17.20 |
| » sid. v. buscado.. = | $7^h$ 32' 05'' 07 |

$$h._s = h._v + \text{Asc. rect.}$$

La Asc. rect. del Sol corresponde á la hora siderea del día. Hallar el tiempo medio correspondiente al ángulo horario del Sol $= 20^h$ 14' 15'' 60 el día 17 Octubre 1996 en un punto á $5^h$ 13' 16'' O. de París.

En este caso el ángulo horario corresponde al tiempo verdadero

| | |
|---|---|
| t. v. el 17 Octubre = $20^h\ 14'\ 15'', 60$ | t. m. a $0^h$ en París = $11^h\ 45'\ 05'', 92$ |
| dif. long. = $5^h\ 13\ \ 16,\ 00$ | cor. $1^h\ 459 \times 0'',459 = \quad -\ 0'', 67$ |
| t. v. en París día 18 = $1^h\ 26'\ 31'', 60$ | t. m. = $11^h\ 45'\ 05'', 25$ |
| $1^h\ 459$ | t. v. observado = $20^h\ 14'\ 15'', 60$ |
| | t. m. buscado = $19^h\ 59'\ 20'', 85$ |

Hallar la hora t. m. del paso de la Luna por el meridiano de un lugar situado á $0^h\ 42'\ 23''$ O. de La Plata el día 12 de Marzo de 1897.

paso por La Plata el día 12 = $7^h\ 10', 00$

» » » » » 13 = $8^h\ 3', 20$ $\quad 24 : 6', 90 :: 0^h\ 42'\ 23'' : x = 0'201$

atraso diario......... = $0^h\ \ 6', 90$

Paso día 12 = $7^h\ 10'\ 100$

corr. por longitud. = $0'\ 201$

hora buscada = $7^h\ 10'\ 301$

### DIFERENCIA DE LONGITUD—HORA REDUCIDA

Hallándose fijo el Sol y la tierra animada de un movimiento de rotación de Oeste á Este, cada punto del Ecuador verá sucesivamente pasar el Sol por su meridiano, siguiendo aparentemente, como todos los demás astros, una marcha del Este al Oeste.

Efectuándose esa rotación de la tierra en 24 horas, el Sol recorre, en esa marcha ficticia $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ por hora; luego, tomando por punto de comparación el meridiano de un observatorio cualquiera, se deduce que toda localidad situada 15° al Este de ese meridiano, verá pasar el Sol por su meridiano con una hora de anticipación, así como el que se halle á igual distancia al Oeste lo verá con una hora de atraso.

Luego, la hora de un punto al Este del meridiano será: $T_1 = T_0$ — longitud y al Oeste: $T_1 = T_0 +$ longitud.

*Hora reducida.* Se llama así á la hora que en el lugar de las tablas astronómicas de que se dispone, corresponde á la hora local de otro punto; se obtendrá ésta sumando ó restando á la hora local la diferencia en longitud con el meridiano de las tablas.

En un lugar situado á $0^h\ 43'\ 42''$ al este de La Plata son las 12 hor. t. v. ó t. m. ¿Cual será la hora reducida á La Plata?

$$\begin{aligned} \text{t. local} &= 12^h\ 0'\ 0'' \\ \text{dif. long.} &= +\ 0^h\ 43'\ 42'' \\ \hline \text{hora en La Plata} &= 12^h\ 43'\ 42'' \end{aligned}$$

En un lugar situado á los $60^{\circ}\ 43'\ 15''$ de long. Oeste de París, son las $3^h\ 42'\ 13''$ (p. m.,) t. civil, día 24 de Marzo. ¿Qué horas serán en ese instante en París?

$60^{\circ}\ 43'\ 15'' = 4^h\ 2'\ 53''$ = dif. long en horas.

$$\begin{aligned} \text{hora local} &= 3^h\ 42'\ 13'' \\ \text{dif. de long. O.} &= +\ 4^h\ 02'\ 53'' \\ \hline \text{hora reducida á París} &= 7^h\ 45'\ 06''\ \text{p. m.} \end{aligned}$$

Si la hora fuese $9^h\ 42'\ 13''$ p. m., día 24 de Marzo, ó sea $9^h\ 42'\ 13''$ t. m. astronómico, la hora reducida sería:

| | |
|---|---|
| hora local $= 9^h\ 42'\ 13''$ | hora local t. m. $= 9^h\ 42'\ 13''$ |
| dif. long. $= +\ 4^h\ 02'\ 53''$ | dif. de long. $= 4^h\ 02'\ 53''$ |
| hora red. París $= 1^h\ 45'\ 06''$ | hora red. París $= 13^h\ 45'\ 06''$ |
| día 25 de Marzo. | t. m. del día 24 de Marzo. |

La *hora reducida* es indispensable para todos los cálculos astronómicos que deben hacerse en un sitio cualquiera, pues éstos se ejecutan como si fueran hechos en el mismo observatorio de las tablas astronómicas de que se dispone.

Las *tablas astronómicas* que anualmente se publican en forma de almanaque, por los observatorios de varias naciones, contienen todos los elementos necesarios para conocer la marcha de los astros y para efectuar todos los diferentes cálculos astronómicos.

Los almanaques más generalizados, son: *La Connaissance des temps* (C. des T.), del meridiano de París; *The Nautical Almanac*, del meridiano de Greenwich; *The american Efeméres*, calculado para los meridianos de Wáshington y de Greenwich; el *Almanaque Náutico*, del meridiano de San Fernando; el *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, para el meridiano de Berlín, etc.

Hoy tenemos entre nosotros *El Almanaque Anuario del Observatorio de La Plata*, que se publica por dicho observatorio y que, por lo tanto, ofrece grandes ventajas para nuestras operaciones.

En Montevideo, el Ingeniero Enrique Legrand publica también un *Almanaque Náutico*, reducido al meridiano de esa ciudad, y con datos de suma importancia.

Para facilitar el cálculo de la hora reducida, se reproduce á continuación un cuadro que fija la posición relativa de las diferentes capitales de la República, con los meridianos de *París, Greenwich, La Plata* y *Montevideo:*

| LUGAR | MERIDIANO DE PARÍS | MERIDIANO GREENWICH | DIFERENCIA EN HORAS CON LA PLATA Y MONTEVIDEO | |
|---|---|---|---|---|
| Merid. de París | 0° 0' 0'' | 2° 20' 14'' | 4h 1' 5'' 333 | 3h 54' 9'' 933 |
| Greenwich .... | 2° 20' 14'' | 0° 0' 0'' | 3h 51' 44'' 399 | 3h 44' 49'' 000 |
| Buenos Aires.. | 60° 42' 34'' | 58° 22' 20'' | 0h 1' 44'' 933 | 0h 6' 55'' 399 |
| Montevideo.... | 58° 32' 29'' | 56° 12' 15'' | 0h 6' 55'' 399 | 0h 0' 0'' 0 |
| La Plata....... | 60° 16' 20'' | 57° 56' 06'' | 0h 0' 0'' 0 | 0h 6' 55'' 399 |
| Córdoba....... | 66° 32' 14'' | 64° 12' 00'' | 0h 25' 3'' 599 | 0h 31' 58'' 999 |
| Corrientes..... | 61° 10' 02'' | 58° 49' 48'' | 0h 03' 34'' 799 | 0h 10' 30'' 198 |
| Mendoza ...... | 70° 39' 54'' | 68° 19' 40'' | 0h 43' 34'' 266 | 0h 50' 29'' 666 |
| Paraná........ | 62° 52' 17'' | 60° 32' 03'' | 0h 10' 23'' 799 | 0h 17' 19'' 199 |
| Salta.......... | 67° 44' 47'' | 65° 24' 33'' | 0h 29' 53'' 799 | 0h 36' 49'' 199 |
| San Juan...... | 70° 51' 32'' | 68° 31' 18'' | 0h 42' 20'' 799 | 0h 49' 16'' 199 |
| San Luis...... | 68° 41' 02'' | 66° 20' 48'' | 0h 33' 38'' 799 | 0h 40' 34'' 199 |
| Santa Fé...... | 63° 03' 24'' | 60° 43' 10'' | 0h 11' 08'' 266 | 0h 18' 03'' 666 |
| Santiago ...... | 66° 36' 02'' | 64° 15' 48'' | 0h 25' 18'' 799 | 0h 32' 14'' 199 |
| Villa María.... | 65° 34' 47'' | 63° 14' 33'' | 0h 21' 13'' 799 | 0h 28' 09'' 199 |
| La Rioja....... | 69° 32' 14'' | 67° 12' 00'' | 0h 37' 3'' 599 | 0h 43' 58'' 999 |
| Catamarca..... | 68° 33' 14'' | 66° 13' 00'' | 0h 33' 7'' 599 | 0h 40' 02'' 999 |
| Jujuy ......... | 67° 42' 32'' | 65° 22' 18'' | 0h 29' 44'' 799 | 0h 36' 40'' 199 |
| Colonia........ | 60° 11' 21'' | 57° 51' 07'' | 0h 0' 19'' 933 | 0h 6' 35'' 466 |

| | | |
|---|---|---|
| Hora observada en Buenos Aires.. | 10h 42' 13'' | a. m. día 10 |
| dif. long. con París.............. = | 4.2' 53'' | |
| hor. reducida á París............ | 2h 45' 06'' | |

| | | |
|---|---|---|
| Hora observada en Mendoza...... | 3h 15' 20'' | p. m. día 10 |
| dif. long. con La Plata al O..... + | 0h 43.34.26 | |
| hor. reducida á La Plata......... — | 3h 58' 54'' 26 | |

| | | |
|---|---|---|
| Hora observada en Montevideo... = | 2h 20' 35'' | p. m. |
| dif. long. con La Plata — 6' 53'' 39 E — | 0h 6' 53.39 | |
| hor. reducida á La Plata......... = | 2h 14' 01'' 21 | |

## DETERMINACIÓN DE LA DECLINACIÓN Y DEL ÁNGULO HORARIO DEL SOL

*La declinación del Sol* es dada por los almanaques náuticos ó efemérides, para todos los días á las doce, tiempo medio ó astronómico y va afectada del signo + si corresponde á la época en que el Sol se encuentra en el emisferio Norte y con el signo — si está en el Sud.

De ahí que en los cálculos en que figura la declinación, deba ésta aparecer mayor ó menor de 90°.

En un punto de latitud Sud, hallar la declinación del Sol correspondiente á las $5^h\ 40'\ 30''$ p. m., siendo la longitud de 70° 39′ 40″ O. de París el día 8 de Mayo.

| | | |
|---|---|---|
| Decl. del Sol, día 8 de Mayo.... | + 17° 12′ 50″ | en París |
| » » » » 9 » .... | 17° 28′ 51″ | |
| diferencia en 24 horas.... | + 0° 16′ 01″ | |

1.° La declinación buscada corresponde á un instante comprendido entre esas dos cantidades; luego hay que buscar la parte proporcional de la diferencia en 24 horas para $5^h\ 40'\ 30''$ reducida al meridiano de París.

| | |
|---|---|
| Hora de observación...... = | $5^h\ 40'\ 30''$ |
| diferenc. longit. ω ..... = + | $4^h\ 42'\ 10''$ |
| hora reduc. en París ... = | $10^h\ 22'\ 40''$ |

Luego $24^h : 16'\ 01'' :: 10^h\ 22'\ 40'' : x = 0^h\ 6'\ 54'',49$

| | | |
|---|---|---|
| Decl. día 8 á $0^h$ .... = + | 17° 12′ 50″ | |
| dif. por $10^h\ 22'\ 40''$.... = + | 6′ 54″, 49 | |
| decl. buscada.... | + 17° 19′ 44″, 49 | (Norte) |
| comp. declinación.... | 107° 19′ 44″, 49 | |

2.° Hallar la declinación correspondiente al 15 de Agosto, con la hora reducida al meridiano de Greenwich $= 5^h\ 40'\ 30''$

Declinación del día 15 á $0^h$ t. m. Gr... $+ 13^o\ 54'\ 15''$
» » » 16 » » » »... $+ 13^o\ 35'\ 17''$
dif. en $24^h$... $- 0^o\ 18'\ 58''$

luego de la proporción

$24^h : 18'\ 58'' :: 5^h\ 40'\ 30'' : x \qquad x = \frac{18'58''}{24} \times 5^h\ 40'\ 30'' = 4'\ 28''\ 70$

Decl. del día 15..... $+ 13^o\ 54'\ 15''$
dif. por $5^h\ 40''$..... $-\quad 4'\ 28''\ 70$
decl. buscada..... $+ 13^o\ 49'\ 46''\ 30$ (Norte)

3.° — Hallar la declinación del Sol correspondiente á una observación hecha en el hemisferio Sud el día 15 de Octubre, á las $4^h\ 23'$ t. m. hora reducida al meridiano de La Plata.

Decl. correspondiente al día 15 á $0^h$ La Plata $= - 8^o\ 41'\ 38''$
» » » » 16 » » » » $= + 9^o\ 03'\ 46''$
dif. en 24 horas $= + 0^o\ 22'\ 08''$

$\frac{22'08''}{24} = 55'',\ 33.$ dif. decl.; $55'',\ 33 \times 4^h\ 23' = 4^h.\ 02'',\ 53$

decl. día 15 á las $0^h = - 8^o\ 41'\ 38''$
dif. por $4^h\ 23' = +\quad 4'\ 02'',\ 53$
declinación buscada $= - 8^o\ 45'\ 40'',\ 53$
complemento declinación $= 81^o\ 14'\ 19'',\ 07$

*El ángulo horario del Sol* es su hora verdadera; luego, como las efemérides dan el tiempo verdadero (t. v.) para cada día á medio día, tiempo medio (t. m.), se deducirá la ecuación de tiempo $E = T_m - T_v$ y podrá reducirse la hora t. m. en verdadera.

1.° A las $9^h$ 45' 4" ant. merid. del día 10 de Enero, ¿cual será la hora verdadera correspondiente, estando el punto á 30° 40' 15" E. de Greenwich?

$$\text{t. m. local} = 9^h\ 45'\ 04''$$
$$\text{dif. de long.} = -\ 2^o\ 02'\ 41''$$
$$\text{t. m. en Greenwich} = 7^h\ 42'\ 23''$$
$$\text{compl. á } 12^h = 4\ \ 17\ \ 37\ = 4^h\ 29$$
$$\text{hor. verd. á } 0^h \text{ t. m. día } 10 = 11^h\ 52'\ 02'',\ 40$$
$$\text{Eq. de tiempo} = -\ \ 7'\ 57'',\ 60$$
$$\text{dif. de hora en } 24^h\ 1'' \text{ en } 4^h\ 30 = -\ \ 4'',\ 30$$
$$\text{Eq. tiempo buscada} = -\ \ 7'\ 53'',\ 30$$

$$\text{Hora media local} = 9^h\ 45'\ 04''$$
$$\text{Equ. tiempo hallada} = -\ \ 7'\ 53'',\ 30$$
$$\text{tiemp. verd. local} = 9^h\ 37'\ 10'',\ 70 \text{ ant. m.}$$
$$\text{compl. á las } 12^h = 2^h\ 22'\ 49'',\ 30 = \text{áng. horar. en tiempo}$$
$$\text{ángulo horario} = 35^o\ 42'\ 16'' = \text{» » » grados}$$

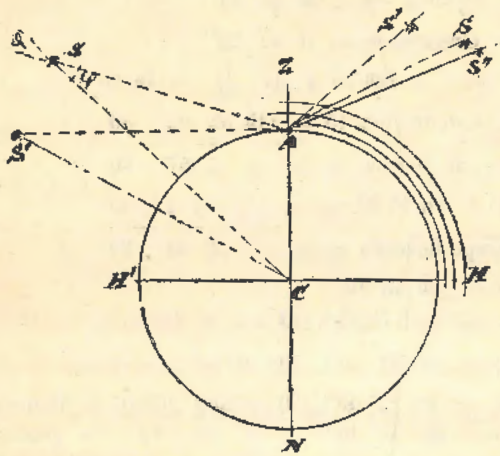
2.° En el punto A, con lat. = − 32'53 y long. = $0^h$ 41'34" O. de La Plata, hora t. m. = $10^h$ 2' 30", día 26 de Julio; hallar ángulo horario correspondiente.

$$\text{t. m. local} = 10^h\ 02'\ 30''$$
$$\text{dif. long.} = +\ 0^h\ 41'\ 34''$$
$$\text{t. m. La Plata} = 10^h\ 44'\ 04''$$
$$\text{comp. á } 12^h = 1^h\ 15'\ 56'' = 1^h{,}265$$
$$\text{t. v. á } 0^h \text{ la P.} = 11^h\ 53'\ 42'',90 \quad \text{Eq. tiempo} = -\ 6'\ 17'',10$$
$$\text{prop. por } 1^h{,}265 = -\ 0'\ \ 0'',26$$
$$\text{E. t. buscada} = -\ 6'\ 16'',074$$

$$\text{t. m. local} = 10^h\ \ 2'\ 30''$$
$$\text{E. tiempo} = -\ \ 6'\ 16'',074$$
$$\text{t. v. local} = 9^h\ 55'\ 13'',926$$
$$\text{comp. á } 12^h = 2^h\ 04'\ 46'',074$$
$$\text{áng. horar.} = 31^o\ \ 0'\ 11'',412$$

## CORRECCIONES DE PARALAGE—REFRACCIÓN Y SEMIDIÁMETRO

Se llama paralage el ángulo A S C bajo él cual un observador colocado en el astro S vería el radio C A de la tierra.




Sirve para reducir las observaciones hechas desde la superficie de la tierra á *su centro,* punto para el cual son calculadas todas las efemérides de las tablas astronómicas.

Como el ángulo A S C = $\varphi = \varphi'$, se vé que la paralage $\varphi'$ debe añadirse á la altura observada desde A para considerarla hecha desde el centro C.

Cuando el astro se halla en el horizonte S' del observador, la paralage se llama *horizontal,* en los demás casos es paralage *de altura,* pero si el observador se halla en el Ecuador, la paralage será *ecuatorial.*

La paralage varía con la latitud del observador.

Llamando:

| | | | |
|---|---|---|---|
| H = | paralage ecuatorial | p = $\varphi$ = | paralage altura |
| P = | » horizontal del lugar | $l$ = | latitud |
| Z = | complemento de altura | $\delta$ = | distancia C S del astro |
| R = | radio terrestre C A | $a$ = | altura del astro |

de sen p : r : : sen. (180 — *a*) : δ ó simplemente p : r : : sen. z : δ

se tiene; $p = \frac{r \text{ sen. } z}{\delta}$ ó sen. $p = \frac{r}{\delta}$

ó más exactamente $p = H (1 - M \text{ sen.}^2 l)$; M = aplanamiento esfera. Para una altura $a = 180 - z$; $p = \frac{r}{\delta} \cos. a$

se ha hallado para paralage horizontal del Sol = 8'' 57

» » » » » de la Luna = 57''

Así: la paralage de altura es igual á la paralage horizontal multiplicada por el coseno de la altura aparente; así mismo la paralage es inversamente proporcional á la distancia δ del astro.

Para las observaciones hechas con estrellas se desprecia la corrección de la paralage y aun en la generalidad de las observaciones hechas con el sestante ó el teodolito común puede despreciarse esa corrección para alturas del Sol.

Las tablas de *paralage del Sol*, dan ésta para cada altura aparente y en una columna siguiente la variación para 10', una simple proporción dará lo que corresponde á la altura observada y á la fecha.

Paralage para el 15 de Abril, altura observada = 33° para esa altura el 1.° de Abril la tabla da 7, 43'' y para el 1.° de Mayo 7'', 37, luego en 30 días disminuye de 0'', 06, en 15 días será 0'', 03 y la paralage buscada será

| | |
|---|---|
| día 15, altura 33°... paralage del 1.° = | + 7'', 43 |
| corr. por 15 días = | 0'', 03 |
| = | + 7'', 40 |

### REFRACCIÓN

Se llama *refracción* la diferencia ó ángulo formado por la dirección verdadera del rayo de luz de un astro y la aparente ó sea la dirección bajo la cual se le vé debido á la desviación que sufren estos rayos al atravesar las capas de diferentes densidades que constituyen la atmósfera. Por esa causa los astros aparecen más elevados de lo que están en realidad así que la refracción será una corrección siempre negativa. (Ver figura precedente).

La refracción disminuye á medida que aumenta la altura por lo que es nula en el zenit y mayor en el horizonte donde alcanza para el Sol en término medio hasta 33' 47''.

Conviene, pues, no observar alturas menores de 12 grados. Las tablas de refracción dan ésta para cada grado de altura así que con una simple interpolación se tendrá la que corresponde á la altura observada.

Sea la altura observada de 29° 58', la refracción dará

| | | | |
|---|---|---|---|
| para altura.. 29° | = 1' 44'' ,80 | Refr. de 29°... = | 1' 44'' ,80 |
| » » .. 30° | 1' 40'' ,70 | corr. por 58'... = | — 3'' ,96 |
| difer... | = 0' 4'' ,10 | refrac. buscada = | — 1' 40'' ,84 |

### SEMI DIÁMETRO

Como el Sol y la Luna tienen un diámetro aparente y apreciable para un observador y que las observaciones deben ser hechas con el punto céntrico de los astros, lo que en la práctica no es posible debiendo observar esos astros en su limbo, resulta que debe corregirse la altura observada del semi diámetro del astro, siendo aditivo si se ha observado la altura con el limbo inferior y negativo con el limbo superior: $\underline{\odot}$ + semi diám., $\overline{\odot}$ — semi diámetro.

El semi diámetro del Sol, de la Luna y algunos planetas es dado por las tablas; la del Sol varía de 15' 46" á 16' 18" y el de la Luna de 14' á 16' según los meses del año.

Por una simple interpolación se obtiene el semi diámetro para la fecha buscada.

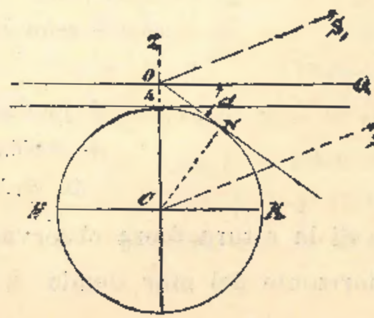
### CORRECCIONES

De lo que precede, las correcciones que deben hacerse á una altura observada de un astro son:

Menos refracción — refrac., más paralage + par. y más ó menos semi diámetro ± semi diám. Algunas veces debe también corregirse una altura de: menos depresión de horizonte — depres. si la observación se ha hecho con un sestante.

### DEPRESIÓN DE HORIZONTE

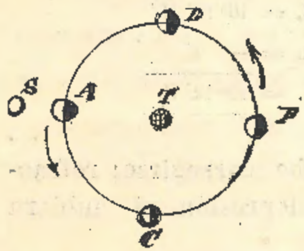
Si la observación de altura, se hace desde un punto O, elevado de h sobre el horizonte del mar y empleándose un sextante ú otro instrumento de reflexión, habrá que deducir de esa altura una cantidad d = ángulo Q O N llamado depresión de horizonte.



Las alturas observadas de planetas se corrigen de: menos refracción de altura, más paralage y más ó menos semidíametro si las tablas las dan.

### SIZIGIOS, CUADRATURAS, CONJUNCIÓN, OPOSICIÓN

Cuando un astro tiene una longitud que difiere de 180.° de la del Sol se dice que está en oposición con el Sol y en *conjunción* cuando tiene la misma longitud, ambas posiciones relativas se llaman también *Sizigios,* dándose el nombre de *en cuadraturas* cuando forman un ángulo de 90.° con la línea de los Sizigios.




La principal aplicación de estas denominaciones se encuentran en el estudio del movimiento de la Luna alrededor de la tierra.

Sea T la tierra supuesta fija así con el sol S. mientras que la luna describe su órbita alrededor de la tierra.

Cuando la Luna se encuentra en A mostrando á la tierra su faz no iluminada, se halla en *conjunción* con el sol, S A T están en la misma línea y será *Luna nueva.* Cuando la Luna ocupe el punto B, se hallará en *oposición* con el *Sol,* mostrará su faz iluminada y será *Luna llena.* Ambos puntos A y B se llaman Sizigios.

Cuando la luna ocupe el punto C, distante 90.° de A, será cuarto creciente y cuando el punto D cuarto menguante. Ambos puntos C y D se hallan en *cuadratura,* con el eje A B.

### TRIÁNGULO DE POSICIÓN

Se llama así el triángulo formado por los complementos de latitud, declinación y altura con sus vértices en el Polo, Zenit y Astro.

Sean:

$P\,Z = l = 90 - \varphi$ (compl. latitud)

$Z\,S = z = 90 - h$ (distancia zenital)

$P\,S = \Delta = 90 - \delta$ (compl. declinación)

Ángulo en P, sea ángulo horario $= t$

» » Z, » Azimut $= A$

» » S, » ángulo de posición $q$


Por la resolución de ese triángulo pueden resolverse la mayor parte de los problemas astronómicos destinados á la determinación de la posición geográfica de un punto, azimut de una línea y hora ó tiempo local.

La aplicación de las fórmulas generales de trigonometría esférica proporciona los resultados buscados.

En los capítulos que tratan de la determinación de la latitud, azimut, ángulo horario, etc., se hallará la aplicación de este triángulo.

### DETERMINACIÓN DEL TIEMPO — CÁLCULO DE LA HORA

Para las diversas operaciones que se relacionan con el tiempo, se hace necesario el empleo de *cronómetros* ó de *péndulos astronómicos* para conservar el tiempo correspondiente á un punto determinado, como ser la hora del observatorio de Córdoba ó del de La Plata.

Con un cronómetro que conserve la hora de uno de esos observatorios será fácil á un operador determinar la hora local del sitio donde se halle, ver la diferencia entre esa hora y la del cronómetro, y por lo tanto, conocer la longitud de su residencia.

Para que un cronómetro dé los resultados que de él se esperan, es necesario conocer dos elementos: 1.º la *corrección*, sea el atraso ó adelanto del reloj con el tiempo verdadero del lugar de partida; 2.º su *movimiento diario* ó sea el adelanto ó atraso de su marcha en 24 horas.

La primera corrección se obtiene anotando la diferencia entre la hora del cronómetro y la obtenida por observaciones directas del Sol ó de otro astro, especialmente por alturas meridianas ó circunmeridianas. Esta corrección se tendrá en cuenta con el signo que le corresponda y su clasificación de: hora *verdadera*, hora *tiempo medio* ú hora *siderea*.

La segunda corrección se obtiene repitiendo la operación consiguiente para conocer la corrección cada cinco ó seis días; entonces: llamando E y E' las épocas en que se determinan las correcciones, C y C' las correcciones que corresponden á dichas épocas y $\varphi$ la marcha diurna, se tendrá: $\varphi = \frac{C' - C}{E' - E}$ fórmula en la que se expresa la diferencia C' — C en segundos y fracciones, y la otra E' — E en días y fracciones.

*Ejemplo.* — El 26 de Julio por la mañana el cronómetro marca $9^h\ 13'\ 29'',50$ t. civil, y se ha hallado el tiempo astronómico medio $20^h\ 47'\ 17'',40$ (del día 25) por observaciones.

El 3 de Agosto, marcando el cronómetro $4^h\ 44'\ 24'',30$ p. m., se ha hallado el t. m. astronómico de $4^h\ 18'\ 44'',50$.

| 1.ª época, E a. m. t. civil | 2.ª época, E' p. m. t. civil |
|---|---|
| Cronómetro $= 9^h\ 13'\ 29'',50$ | Cronómetro $= 4^h\ 44'\ 24'',30$ |
| t. m. local $= 20^h\ 47'\ 17'',40$ | t. m. local $= 4^h\ 18'\ 44'',50$ |
| dif. C $= 0^h\ 26'\ 12'',10$ | dif. C' $= 0^h\ 25'\ 39'',80$ |
| | » C $= 0^h\ 26'\ 12'',10$ |
| | $(C' - C) = -\ 0^h\ 0'\ 32'',30$ |

$$(E'-E) = 8 \text{ días} + (28^h\ 18'\ 44''\ 5 - 20^h\ 47'\ 17'',40) = 8 \text{ días } 7^h\ 31'\ 27''\ 10$$

$$E' - E = 8,\ 313 \text{ días}$$

$$\varphi = -\frac{32''\ 30}{8,\ 313} = -\ 3''\ 89$$

$$\text{por hora } \frac{\varphi}{24} = \frac{-\ 3,\ 89}{24} = 0'',\ 162$$

## Cálculo de la hora por la observación del paso de un astro por el meridiano

Es el procedimiento más rápido y simple á la vez que el más exacto.

Colocado el instrumento en el plano del meridiano, si se observa el paso de una estrella conocida, se conocerá por su ascensión recta, la hora siderea del lugar; de manera, que si se anota la hora del cronómetro al instante de ese pasage se tendrá á la vez, el tiempo del cronómetro y el tiempo sidereo de la observación. Convirtiendo el t. s. en t. m. se conocerá la corrección del cronómetro.

Para hallar la hora del paso de una estrella por el meridiano local cuya longitud es conocida, se tiene $\theta$ la hora siderea local de las tablas.

t. m. del paso $= \alpha\ast - \theta +$ corr. tabular

*Ejemplo 1.°*—Paso de β de Hidra por el meridiano de un punto cuya longitud es de $0^h\ 43'\ 34''$ O. de La Plata el 10 de Marzo de 1897. De las tablas se sacará α de β de Hidra y la hora siderea t. s. θ de La Plata ese día.

| | |
|---|---|
| Asc. recta $\alpha = 0^h\ 20'\ 17''\ 80$..... | $= 24^h\ 20'\ 17''\ 80$ |
| T. S. el 10 de Marzo La Plata.... | $= 23^h\ 14'\ 18''\ 90$ |
| intérvalo sidereo... | $= 0^h\ 05'\ 58''\ 90$ |
| tabla C. dif. long. $= 43'\ 34''$ en t. s..... | $+\ 7'\ 26$ |
| | $0^h\ 06'\ 06''\ 16$ |
| corr. tabla B.... | $-\ 1''$ |
| t. m. buscado.... | $0^h\ 06'\ 05''\ 10$ |

*Ejemplo 2.°*—Hallar la hora del paso de α de Can menor (*Procyon*) el día 17 de Marzo en un punto situado á $43'\ 34''$ al O. de La Plata.

| | |
|---|---|
| Asc. recta $\alpha = 7^h\ 33'\ 56''\ 50\ (+24^h)$.. | $= 31^h\ 33'\ 56''\ 50$ |
| hora siderea á $0^h$ en La Plata. | $= 23^h\ 41'\ 54''\ 80$ |
| intérvalo sidereo.. | $7^h\ 52'\ 01''\ 70$ |
| corr. por $43'\ 34''$ en t. s... $=$ | $+\ 7''\ 20$ |
| | $7^h\ 52'\ 08''\ 90$ |
| (para reducir á t. m.) corr. tabla B... | $-\ 1'\ 17''\ 30$ |
| t. m. buscado.. $=$ | $7^h\ 50'\ 51''\ 60$ |

*Ejemplo 3.°*—Para la misma estrella el 4 de Julio de 1897.

| | |
|---|---|
| asc. rect. $\alpha =$ | $7^h\ 33'\ 56''\ 50$ |
| hora S. en La Plata á $0^h$ $=$ | $6^h\ 51'\ 39''\ 40$ |
| int. sidereo $=$ | $0^h\ 42'\ 17''\ 10$ |
| corr. por $43'\ 34''$ en t. S $+$ | $7''\ 20$ |
| | $0^h\ 42'\ 24''\ 30$ |
| corr. tabla B $-$ | $6''\ 90$ |
| t. m. buscado $=$ | $0^h\ 42'\ 17''\ 40$ |

Si se observa el pasage del Sol ú otro astro que tenga diámetro aparente, habrá que añadir al tiempo observado el tiempo de la duración del pasage del semidiámetro por el meridiano, cantidad que dan las tablas junto con las demás efemérides.

### Cálculo de la hora por alturas correspondientes

Consiste este método en anotar el tiempo (hora de un cronómetro) en el que un astro mide una misma altura á uno y otro lado del meridiano del observador. A un instante cualquiera se mide pues, la altura del astro antes de su paso por el meridiano, anotándose la hora y se espera á que llegue á la misma altura después de su pasage. Por esta observación se conocerá el intérvalo de tiempo transcurrido entre las dos posiciones iguales del astro á uno y otro lado del meridiano y como la marcha de todas las estrellas, es uniforme, la mitad de ese intérvalo de tiempo corresponderá al momento preciso de su paso por el meridiano.

Por lo tanto, conociéndose la hora ó tiempo medio del pasage de un astro por el meridiano y conocida también por esta observación la hora que le asigna el cronómetro podrá fácilmente deducirse la hora local y la corrección del cronómetro.

Si la observación se hiciera con el Sol, como éste no tiene una marcha uniforme su declinación varía constantemente y por lo tanto, habrá que tener en cuenta su incremento para corregir la hora media de las observaciones, esto es, del paso por el meridiano.

Así si $\gamma$ es la mitad del intervalo transcurrido, el ángulo horario correspondiente á cada una de las alturas observadas será

$$t = \gamma - x$$
$$t' = \gamma + x$$

Para calcular el valor de la corrección se tendrá la fórmula

$$x = A \, \Delta' \, \delta \text{ tang. } \varphi - B \, \Delta' \, \delta \text{ tang. } \delta$$

expresión llamada *corrección de medio día.*

Para calcular los elementos de esta fórmula se tiene:

$\delta$ = declinación del Sol á medio día

$\Delta \, \delta$ = aumento ó disminución de la declinación, según sea para las observaciones del Oeste ó del Este

$\Delta' \, \delta$ = aumento ó variación horaria tabular

$\Delta \, \delta = \Delta' \, \delta \, \gamma$ ($\gamma$ = mitad del intérvalo transcurrido)

$\delta_1 = \delta - \Delta \, \delta$ para la 1.ª observación

$\delta_2 = \delta + \Delta \, \delta$ » » 2.ª »

$$A = \frac{\gamma}{15 \text{ sen. } \gamma} \qquad B = \frac{\gamma}{15 \text{ tang. } \gamma}$$

ó también $A = \dfrac{(t' - t)}{30 \text{ sin. } \frac{15\,(t' - t)}{2}}$; $B = \dfrac{(t' - t)}{30 \text{ tang. } \frac{15\,(t' - t)}{2}}$

en estas expresiones $\gamma$ será expresado en horas y fracción decimal en el numerador y en arco en el denominador.

Para facilitar estos cálculos, se han calculado tablas de A y B con el argumento $2\gamma$, esto es, con el intérvalo total. Tabla III.

Calculada, pues, la corrección $x$ y llamando $T_0$ la semi suma de los tiempos del cronómetro para cada una de las observaciones se tendrá:

$$T\ (\text{exacto}) = T_0 - x$$

*Ejemplo 4.º*—El 22 de Mayo de 1897 en un lugar á $0^h\,43'\,42''$ al Oeste de La Plata se han observado dos alturas correspondientes de la estrella *Procyon* ($\alpha$ de Can menor). Para la primera el cronómetro marcaba $6^h\,33'\,28''$ t. m. y la segunda fué observada á las $9^h\,26'\,56''$.

| | |
|---|---|
| | 1.ª observación $= 6^h\,33'\,28''$ p.m. |
| t. s. á $0^h$ en La Plata día 22 $= 0^h\,1'\,37''$ | 2.ª » $= 9\ 26'\,56$ |
| corr. dif. long. (tabla C) $43'\,42'' = +\ 7''\,20$ | suma $= 16^h\,00'\,24''$ |
| t. s. local $= 0^h\,1'\,42''\,20$ | ½ suma $= 8^h\,00'\,12''$ |
| | t. m. pasage $= 7.31'\,00'',20$ |
| | adelanto del cronómetro $= 0^h\,29'\,11'',80$ |

$$\begin{aligned} \text{asc. rect. Procyon } \alpha &= 7^h\,33'\,56''\,50 \\ -\ \text{hor. sid. local} &= 0^h\,01'\,42''\,20 \\ \text{t. s. del pasage} &= 7^h\,32'\,14''\,30 \\ \text{corr.} &= -\ \ 1'\,14''\,10 \\ \text{t. m. pasage} &= 7^h\,31'\,00''\,20 \end{aligned}$$

*Ejemplo 5.º*—En un lugar cuya posición geográfica es latitud $\alpha = -32°\,53'$ S. y longitud $0^h\,42'\,34''$ se ha anotado la hora cronométrica de dos alturas correspondientes del Sol el día 18 de Marzo de 1897. Se desea hallar la hora local. Hora cronómetro á $12^h = 12^h\,38'\,25''$.

| | |
|---|---|
| int. $= 3^h\ 28'\ 50''$ | 1.ª obs. á las $10^h\ 54'\ 30''$ t. m. |
| $\gamma = \frac{1}{2}$ int. $= 1^h\ 44'\ 25'' = 1^h\ 740$ | 2.ª » » » $14^h\ 22'\ 20''$ |
| $= 26^o\ 06'$ | suma $= 25^h\ 16'\ 50''$ |
| $\delta = -\ 0^o\ 39'\ 54''$ | $\frac{1}{2}$ suma $= 12^h\ 38'\ 25''$ |
| $\Delta\ \delta = -\ 59''\ 250$ | corr. x $= \quad -\ 9''\ 95$ |
| log. $1.740 = 0.2405$.............. $0.2405$ | t. c á $12^h = 12^h\ 38'\ 15''\ 05$ |
| c. long. $15 = 8.8239$.............. $8.8239$ | t. m., $12^h = 12^h\ 08'\ 00''\ 80$ |
| c. lg. sen $\gamma = 0.3566$ c. lg. tg. $26^o 6' = 0.3099$ | adel. cr. $= 0^h\ 30'\ 14''\ 25$ |
| log. A $= 9.4210$ log. B $= 9.3743$ | |
| log. $\Delta\ \delta = 1.7727$.............. $1.7727$ | $z = A\,\Delta'\delta\,tg.\varphi - B\,\Delta'\delta\,tg.\delta$ |
| log. tg. $\varphi = 9.8106$ log. tang. $\delta = 8.0647$ | |
| $1.0043$ $9.217$ | $x = (-\ A' + B')$ |
| número $= -\ 10.10$ número $0.162$ | $x = -\ 10.10 - 0.162 = -\ 9''948$ |

*Ejemplo 6.º*—El 17 y 18 de Septiembre de 1896. Latitud Norte $43^o\ 17'\ 50''$ y longitud $0^h\ 18'$ Oeste de París.

Se han observado dos alturas correspondientes del Sol. La 1ª el 17 á la $1^h\ 25'\ 54''$ al Oeste y la 2ª el 18 á las $23^h\ 37'\ 57''$.

C. de T. á las $12^h$ el 18 t. v. $\delta = +\ 1^o\ 46'\ 22''$; $\Delta\ \delta = -58''\ 16$

Haciendo uso de las tablas de A y B

| | |
|---|---|
| lg. A $= 0.4151$ lg. B $= 0.3947$ n. | |
| lg. $\Delta\ \delta = 1.7646$ neg..... $= 1.7646$ » | tm, á $12^h$ verd. $= 11^h\ 54'\ 02''\ 78$ |
| lg. tg. $\varphi = 9.9717$ lg. tg. $\delta = 8.4905$ | el 17 1ª obser. $1^h\ 47'\ 57''$ |
| $2.1513$ neg. $0.6525$ | el 18 2ª » $23^h\ 37'\ 57''$ |
| $-\ 141''\ 7 = 2'\ 21''\ 70$ $+\ 4'',50$ | interv. $= 2\ \gamma = 21^h\ 50'\ 00''$ |
| $+ \quad 4''\ 50$ | |
| $x = - \quad 2'\ 17''\ 20$ | |

suma $= 1^h\ 25'\ 54''$

$\frac{1}{2}$ suma $= 0^h\ 42'\ 57''$

cor. $x = -\ 2'\ 17''\ 20$

t. cron. á $12^h$ verdadero $= 0^h\ 40'\ 39''\ 80$

t. m. á $0^h$ verdadero $= 11^h\ 54'\ 2''\ 80$

adelant. cronómetro $= 0^h\ 46'\ 37''\ 00$

Los mejores resultados con este método se obtendrán con la observación de las estrellas que culminan cerca del Zenit.

Cálculo de la hora por alturas correspondientes del Sol:

día 9 de Agosto 1897. Latitud estima 45° 48' Norte

declinación del Sol á medio día t. m. + 15° 43'' 12'' »

variación horaria $\Delta\ \delta = -\ 43'', 63$

adelanto del cronómetro + $5^h$ 40'

| Distancias zenitales | | Horas del cronómetro | | $t' - t$ | Corrección | Hora del cronómetro |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $t$ | $t$ | | $x$ | á medio día |
| 101° 10' 00'' | $\overline{\odot}$ | 2h. 28' 23'' 0 | 9h. 3' 16'' 5 | 6h. 33' 0'' 0 | + 10'' 63 | 5h. 40' 51.29 |
| 100» 50' 30'' | | 2h. 29' 52'' 8 | 9h. 1.46.5 | | | 5h. 40 51.19 |
| 96» 56' 0 | $\odot$ | 2h. 45' 1 0 | 8h. 46 40.5 | 5h. 59' 30'' 0 | + 10'' 24 | 5h. 40 51.90 |
| 96° 20' 0 | | 2h. 46' 34'' 5 | 8h. 45' 6.2 | | | 5h. 40 51.50 |
| 96» 0 0 | | 2h. 47' 38'' 0 | 8h. 44' 4.0 | | | 5h. 40 51.15 |
| 94° 14' 0'' | $\overline{\odot}$ | 2h. 49' 23'' 0 | 8h. 42 18'' 0 | 5h. 48' 0'' 0 | + 10'' 1 | 5h. 40 51.51 |
| 92» 57' 50'' | | 2h. 53' 55'' 5 | 8h. 37' 46' 2 | | | 5h. 40 51.86 |

Estado medio del cronómetro á medio día local = + $5^h$ 40' 51'' 60

*Cálculo del 1.$^{er}$ grupo:*

corrección $x = -\ A\ \Delta\ \delta\ \text{tang.}\ \varphi + B\ \Delta\ \delta\ \text{tang.}\ \delta$

$t' - t = 6^h\ 33'\ 00''$

$\Delta\ \delta = -43''\ 63$

$\varphi = +45°\ 48'$

1.$^{er}$ térm. = 12'' 95

2.° » = − 2'' 32

x = + 10'' 63

log. A = 9.4605

log. $\Delta\ \delta$ = 1.6398

lg. tang. $\varphi$ = 0.0121

lg. 1.$^{er}$ térm. = 1.1124

1.$^{er}$ » = 12'' 95

$\frac{t' + t}{2} = 5^h\ 45'\ 49''\ 75$

x = + 10'' 63

hora del cron. á m. día = $5^h$ 46' 0'' 38

t. medio á m. d. v. = 0.5' 9.09

estado del cron. á m. d. v. = $5^h$ 40' 51.29

log. B = 9.2764

log. $\Delta\ \delta$ = 1.6328

log. tang. $\delta$ = 9.4494

log. 2.° térm. = 0.3655

2.° térm. = 2'' 32

t. = $2^h$ 29.52'' 8

t' = 9.11.46.5

$\frac{t' + t}{2}$ = 5.45' 49 ' 65

x = + 10'' 63

h. cron. = 5 46' 0'' 28

t. m. á m. d. = $0^h$ 5 9 09

$5^h$ 40 51'' 19

Igual operación se hace con los demás grupos.

### Por alturas iguales de dos astros diferentes

El método que precede puede sufrir algunos inconvenientes en la práctica ó prestarse á errores de observación, por el largo espacio de tiempo transcurrido entre las dos observaciones de altura; puede ser ventajosamente substituido por él de observar dos estrellas distintas en el instante de tener igual altura, así como las horas correspondientes á éstas, al fin principal de conocer el intérvalo de tiempo.

En esta observación no hay necesidad de leer la altura observada y se pueden elejir dos estrellas tales, que el tiempo transcurrido entre la observación de cada una de ellas sea reducido á pocos minutos, evitando así todo error de lectura, de movimiento ó desarreglo del instrumento.

Sean $\alpha$ de *Balanza* y $\alpha$ de *Liebre* las dos estrellas observadas el 23 de Mayo de 1897, la primera á las $11^h\ 07'\ 20''$ t. m., y la segunda á las $11^h\ 19'\ 27''$ t. m., tomadas con un cronómetro cuya marcha es de — 11'', 90 en 24 horas.

La resolución del problema consiste en hallar los ángulos horarios de cada una de las dos estrellas en el instante de la observación; la diferencia de estos dos ángulos ($t$ y $t'$) puede tenerse por aproximación, pues se conoce: la hora siderea local $\theta$,

$$\left.\begin{array}{r}\text{las ascensiones rectas } \alpha,\ \alpha' \\ \text{y las declinaciones } \delta,\ \delta'\end{array}\right\}\ \text{respectiva á cada estrella.}$$

Luego $\quad t = \theta - \alpha \quad$ y $\quad t' = \theta' - \alpha$

$$t - t' = (\theta - \theta') - (\alpha - \alpha').$$

Ahora las fórmulas á resolver, serán:

1.ª $\quad \operatorname{tang} M = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotag} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \operatorname{cotag} \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$

2.ª $$m = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotag} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\operatorname{sen} M}$$

3.ª $$\cos \left[ \tfrac{1}{2}(t' + t) - M \right] = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{m}$$

$$t = T - c - \alpha \quad , \quad t' = T' - c' - \alpha'$$

$$t' - t = (T' - T) - (c' - c) - (\alpha' - \alpha)$$

$T$ y $T'$ = tiempos de la observación, $t$ y $t'$ = ángulos horarios buscados, $c$ y $c'$ = corrección del cronómetro para cada observación, $\varphi$ = latitud.

*Ejemplo 7.º* — Resolviendo, pues, el problema, se tiene:

latitud $\varphi = -43^\circ\ 01'\ 20''$ $\quad$ longitud $\omega = 3^h\ 15'\ 16''$ O. de París

para $\alpha$ de Balanza $\begin{cases} \alpha = 14^h\ 15'\ 09'',57 \\ \delta = -15^\circ\ 36'\ 49'',70 \end{cases}$

hora obs. $T = 11^\circ\ 07'\ 20'',10$

para $\alpha$ de Liebre $\begin{cases} \alpha' = 5^h\ 28'\ 09'',44 \\ \delta' = -17^\circ\ 53'\ 52'',90 \end{cases}$

hora obs. $T' = 11^h\ 19'\ 27'',60$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T'$ = | $11^h\ 19'\ 27'',60$ | $\delta'$ = | $-17^\circ\ 53'\ 52'',70$ |
| $T$ = | $11^h\ 07'\ 20'',10$ | $\delta$ = | $-15^\circ\ 36'\ 49'',70$ |
| Intérvalo $I_o$ = | $0^h\ 12'\ 07'',50$ | $(\delta' - \delta)$ = | $-\ 2^\circ\ 17'\ 03'',00$ |
| Corr. del Cr. = | $+\ 0'',10$ | $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ = | $-\ 1^h\ 08'\ 31'',50$ |
| $I_m$ = | $0^h\ 12'\ 07'',60$ | $\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ = | $-\ 16^\circ\ 45'\ 21'',25$ |
| Red. á t. s. = | $+\ 2'',00$ | | |
| $I_s$ = | $0^h\ 12'\ 09'',60$ | | |

$$(24^h)$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= 5^h\,28'\,09'',44 \\
\alpha &= 14^h\,45'\,09'',57 \\
(\alpha' - \alpha) &= 14^h\,42'\,59'',87 \\
\alpha &= 14^h\,45'\,09'',57 \\
\alpha' &= 5^h\,28'\,09'',44 \\
(\alpha - \alpha') &= 9^h\,17'\,00'',13 \\
\text{I. s.} &= 0^h\,12'\,09'',60 \\
(t' - t) &= 9^h\,29'\,09'',73 \\
(t' - t) &= 142^\circ\,17'\,25'' \\
\tfrac{1}{2}(t' - t) &= 71^\circ\,08'\,42'',50
\end{aligned}$$

**Fórmula 1**

$$\begin{aligned}
\log \tan \tfrac{1}{2}(t' - t) &= 0.46661 \\
\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) &= 1.70037 \text{ ng.} \\
\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) &= 9.52132 \text{ ng.} \\
\log \tan M &= 2.68830\ (3.^\circ) \\
M &= 89^\circ\,52'\,57'' \\
& \phantom{=} 269^\circ\,52'\,57'' \\
\tfrac{1}{2}(t' + t) - M &= 91^\circ\,07'\,35'' \\
\tfrac{1}{2}(t' + t) &= 1^\circ\,00'\,32'' \\
\tfrac{1}{2}(t' - t) &= 71^\circ\,08'\,43'',50 \\
t' &= 72^\circ\,09'\,15'' = 4^h\,48'\,37'' \\
t &= 289^\circ\,51'\,49'' = 19^h\,19'\,27'',30
\end{aligned}$$

**Fórmulas 3 y 2**

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(t' - t) &= 9.97605 \\
\log \cot \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) &= 1.70037 \text{ ng.} \\
\text{C. } \log \operatorname{sen} M &= 0.00001 \\
\log m &= 1.67643 \\
\log \tan \varphi &= 9.96999 \text{ ng.} \\
\log m &= 1.67643 \\
\log \cos \left[\tfrac{1}{2}(t' + t) - M\right] &= 8.29356 \text{ ng. } (2.^\circ) \\
\tfrac{1}{2}(t' + t) - M &= -\,91^\circ\,07'\,35''
\end{aligned}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t =$ | $19^h\ 19'\ 27'',\ 30$ | $t' =$ | $4^h\ 48'\ 37''$ |
| $+\ \alpha =$ | $14^h\ 45'\ 09'',\ 57$ | $\alpha' =$ | $5^h\ 28'\ 09'',\ 44$ |
| $\theta =$ | $10^h\ 04'\ 36'',\ 87$ | $\theta =$ | $10^h\ 16'\ 46'',\ 44$ |
| $\theta_o =$ | $0^h\ 25'\ 48''$ | $\theta_o =$ | $0^h\ 25'\ 48''$ |
| | $9^h\ 38'\ 48'',\ 87$ | | $9^h\ 50'\ 58'',\ 44$ |
| corr. $=$ | $-\ \ 1'\ 36'',\ 50$ | corr. $=$ | $-\ \ 1'\ 38'',\ 90$ |
| $T_m =$ | $9^h\ 37'\ 12'',\ 37$ | $T_m =$ | $9^h\ 49'\ 20'',\ 54$ |
| $T_o =$ | $11^h\ 07'\ 20'',\ 10$ | $T_o =$ | $11^h\ 19'\ 27'',\ 60$ |
| adel. cron. $=$ | $1^h\ 30'\ 07'',\ 75$ | adel. cron. $=$ | $1^h\ 30'\ 07'',\ 10$ |

T. s. á $0^h$ París el 28 $= 0^h\ 25'\ 16''$

corr. por $\omega = +\quad 32''$

t. s. local $- \theta_o = 0^h\ 25'\ 48''$

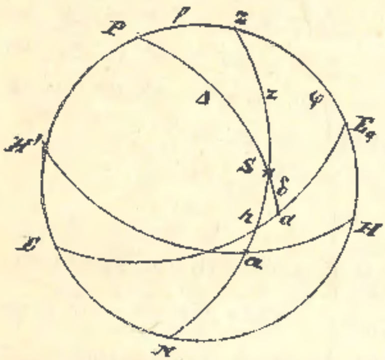
Como se vé los valores de M y $m$ se obtienen fácilmente siendo $m$ siempre positivo. M es dado por su seno y su coseno de lo que se deducirá su signo. Para conocer el cuadrante en el cual concluirá el arco $\frac{1}{2}(t'+t)-M$, dado solamente por su coseno, es fácil obtener de antemano un valor aproximativo de $\frac{1}{2}(t'+t)$ porque siempre es conocido el tiempo medio local aunque sea aproximativamente y con él se obtendrá el tiempo sidereo $\theta$ de cada observación recordando que $t=\theta-\alpha$, y $t'=\theta'-\alpha'$ y como la (fórmula 3) hará conocer el signo de $\frac{1}{2}(t'+t)-M$, no quedará duda sobre la magnitud del ángulo y el cuadrante en que termina.

Las circunstancias más favorables para determinar la hora por este método, son cuando se observan las estrellas á uno y otro lado del vertical primero, esto es, cuando sus azimutes se aproximan á 90° y 270°.

La observación se empezará siempre por la estrella al Este del meridiano.

### Por una sola altura

Si en un punto de latitud conocida, aunque sea de estima se observa la altura de un astro anotándose la hora del reloj, se podrá formar el *triángulo de posición* P Z S en el cual serán conocidos los tres lados y solo habrá que hallar el ángulo horario $t$ en el Polo.




Sea en dicho triángulo.

Z = zenit, P = polo S = astro, se conoce: la altura, la declinación del astro y la latitud del observador. A más se tiene.

S Z = 90° — latitud $= 90° - \varphi = l$, complemento latitud
P S = 90° — declin. $\delta = 90°\ \delta = \Delta$ » declinación
Z S = 90° — altura $h = 90° - h = Z$ » altura ó dist. zenital
Angulo S P Z en P = ángulo horario $t$
« S Z P » Z = » azimutal A
» P S Z » S = » de posición q

Para resolver el triángulo se empleará la fórmula

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, t = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(S - l)\ \text{sen}\,(S - \Delta)}{\text{s en s sen}\,(S - Z)}} \quad (1)$$

en la cual

$$S = \frac{l + \Delta + Z}{2}$$

esto es, la semi suma de todos los complementos.

También se emplea con mucha frecuencia y generalmente es la preferida por los marinos, la *fórmula de Borda* en la que entra, la altura observada y corregida, la latitud $\varphi$ y el *complemento* de declinación $\Delta$.

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos S \operatorname{sen} (S - h)}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta}} \quad (2) \qquad S = \frac{h + \varphi + \Delta}{2}$$

Este mismo problema se resuelve también por la fórmula siguiente, deducida de la fórmula fundamental y en la cual figura, la altura verdadera h (observada), la latitud $\varphi$ y la declinación del astro $\delta$.

$$\cos t = \operatorname{sen} h \sec \varphi \sec \delta - \operatorname{tang.} \varphi \operatorname{tang.} \delta \qquad (3)$$

calculable fácilmente por los *logaritmos de adición y sustracción.*

El ángulo $t$ obtenido por el cálculo es el tiempo verdadero y habrá que reducirlo á tiempo medio.

Para obtener un valor real de $\frac{1}{2}$ $t$ en las fórmulas 1 y 2 es forzoso que las cantidades que figuran bajo el radical sean positivas, así será preciso considerar siempre como tales esos elementos cualesquiera que sea su signo. Por otra parte $\frac{1}{2}$ $t$ debe ser siempre menor que 90° y $t$ será *positivo* si el astro se halla al Oeste y negativo en caso contrario.

*Ejemplo 8.°*—En 10 de Agosto en un lugar cuya latitud es $\varphi = + 34^{\circ}\, 36'\, 30''$ y longitud $\omega = 60^{\circ}\, 24'\, 28''$ Oeste de París, se ha determinado la altura verdadera del Sol $h = 27^{\circ}\, 49'\, 32'', 15$ siendo las $7^{h}\, 27'\, 30''$ tiempo medio de la mañana. Se pide la hora.

| | | |
|---|---|---|
| hora observada = $7^h\ 27'\ 30''$ | decl. del Sol día 10 = $+15^o\ 23'\ 13''$ |
| dif. de longitud. = $+\ 4^h\ 2'\ 53''$ | dif. por $1^h\ 29'\ 37''$ = $-\ 2'\ 07''\ 57$ |
| hora red. á París = $11^h\ 30'\ 23''$ | decl. buscada = $+15^o\ 31'\ 05''\ 43$ |
| del día 9 Agosto. | |

$$\begin{array}{llll}
\text{Latit. } \varphi = 34^o\ 36'\ 40'' & \text{compl. } l = 55^o\ 23'\ 10'' & & \\
\text{altura h} = 27^o\ 49'\ 32'',\ 15 & \text{» } z = 62^o\ 10'\ 27''\ 85 & & \\
\text{declin. } \delta = 15^o\ 31'\ 05'',\ 49 & \text{» } \Delta = 74^o\ 38'\ 54'',\ 57 & & \\
 & 2\ s = 192^o\ 12'\ 32'',\ 42 & & \\
 & s = 96^o\ 06'\ 26'',\ 21 & \text{....c. log sin} = & 0.00247 \\
 & (s - l) = 40^o\ 43'\ 16'' & \text{...... log sin} = & 9.81449 \\
 & (s - \Delta) = 21^o\ 27'\ 32'' & \text{...... log sin} = & 9.56327 \\
 & (s - z) = 33^o\ 55'\ 59'' & \text{.... c log sin} = & 0.25319 \\
 & & \text{log tang}^2\ \tfrac{1}{2}\ t = & 19.63342 \\
 & & \text{log tang}\ \tfrac{1}{2}\ t = & 9.81671 \\
 & & \tfrac{1}{2}\ t = & 33^o\ 15'\ 11'' \\
 & & t = & 66^o\ 30'\ 22''
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
t = 66^o\ 30'\ 22'' &= 4^h\ 26'\ 01'' \\
\text{comp. á 12 horas} &= 7^h\ 33'\ 59'' \\
\text{hora observ.} &= 7^h\ 27'\ 30'' \\
\text{atraso cronóm} &= 0^h\ 06'\ 28''
\end{aligned}$$

Aplicando al mismo problema la fórmula de «Borda»

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ t = \sqrt{\frac{\cos s\ \text{sen}\ (s - h)}{\cos \varphi\ \text{sen}\ \Delta}}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{altura verdadera} \odot,\ h = 27^o\ 49'\ 32'' & & \\
\text{latitud } \varphi = +\ 34^o\ 36'\ 40'' & \text{comp. log cos } \varphi = & 0.08458 \\
\text{compl. declin. } \Delta = 74^o\ 38'\ 54'' & \text{cap. log sen } \Delta = & 0.01578 \\
2\ s = 137^o\ 05'\ 06'' & & \\
s = 68^o\ 32'\ 33'' & \text{....... log cos } s = & 9.56329 \\
(s - h) = 40^o\ 43'\ 01'' & \text{......... log sen} = & 9.81446 \\
 & & 19.47811 \\
 & \text{log sen } \tfrac{1}{2}\ t = & 9.73905 \\
 & \tfrac{1}{2}\ t = & 33^o\ 30'\ 22'' \\
 & t = 66^o\ 30'\ 22'' = & 4h\ 26'\ 01'',\ 47
\end{array}$$

$$t = 4^h\, 26'\, 01''$$
$$\text{comp. á } 12^h = 7^h\, 33'\, 59''$$
$$\text{hora observ.} = 7^h\, 27'\, 30''$$
$$\text{atraso cron.} = 0^h\, 06'\, 29''\ \text{t. v.}$$
$$+\ \text{Eq. tiempo} = 5'\, 07''$$
$$\text{t. m.} = 0^h\, 11'\, 36''$$

Otro modo

$$\text{t. v. calculado} = 7^h\, 33'\, 59''$$
$$+\ \text{Eq. tiempo} = 5'\, 07''$$
$$\text{t. m. local} = 7^h\, 39'\, 06''$$
$$\text{t. m. observ.} = 7^h\, 27'\, 30''$$
$$\text{atraso cron.} = 0^h\, 11'\, 36''$$

*Ejemplo 9.°* — En 10 de Agosto de 1896, en un sitio de latitud $\varphi = +\ 29°\ 17'\ 20''$ y longitud $4^h\ 2'\ 53''$ Oeste de París, se ha observado como á las $10^h\ 30'$ de la noche y hacia el Oeste, la altura de *Antarés* $h = 15°\ 29'\ 30''$.

Se pide la hora.

De los efemérides se tiene para Antarés:

$$\alpha = 16^h\ 23'\ 05'',2 \quad , \quad \delta = -\ 26°\ 12'\ 20'',3$$

Aplicando la fórmula (3) con las tablas de Add. y Sustr. de Houel, fórmula:

$$\cos t = \text{sen}\, h \sec \varphi \sec \delta - \text{tang}\, \varphi\ \text{tang}\, \delta.$$

$$\log.\ \text{sen.}\ h = 9.42667$$
$$\log.\ \sec.\ \varphi = 0.05940$$
$$\log.\ \sec.\ \delta = 0.04740$$
$$9.53317$$
$$\text{núm. tabular}\quad 0.25740$$
$$\log.\ \cos t. = 9.79057 \quad (1.°)$$

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = 9.74890$$
$$\log.\ \text{tang.}\ \delta = 9.69213\ \text{ng.}$$
$$\text{add.}\quad 9.44103$$
$$-\ 9.53317$$
$$\text{Arg.}\quad 9.90786$$

$$t. = 51.°\ 52'\ 24'' = 3^h\ 27'\ 29''\ 60$$

$$\text{Asc. rect. } \alpha = 16^h\ 23'\ 05''\ 20$$
$$\text{horario t.} = 3\ \ 27'\ 29''\ 60$$
$$\theta = (\varphi + t.) = 19^h\ 50'\ 34''\ 80$$
$$\theta_0 = 9\ \ 18'\ 29''\ 40$$
$$\text{T. m.} = 10^h\ 30'\ 21''\ 40$$
$$\text{hor. cron.} = 2\ \ 13'\ 29''\ 80$$
$$\text{adelanto} = 3^h\ 43'\ 08''$$

*Ejemplo 10.*—23 Marzo 1897. Lat. Norte $\varphi = 44.^\circ 19' 20''$ Longitud $\omega = 6.^\circ 57' 19'' = 0^h 27' 49''$ Este de París; altura verdadera observada de ☉ $h = 28.^\circ 29' 11''$ hora del reloj $3^h 39' 49''$ de la tarde. Haciendo uso del «Nautical almanach».

| | |
|---|---|
| hora observación $= 3^h 39' 49''$ | decli. á $0^h$ Greenw. el 23 $= + 1^\circ 14' 39''$ |
| dif. long. París $= 0\ 27' 49''\ 3$ | dif. prop. $3^h 040 \times 59'' 0 = + 3' 00''$ |
| t. m. París $= 3^h 11' 59''\ 70$ | decli. buscada $= + 1^\circ 17' 39''$ |
| dif. long. Greenw. $= 9' 21''$ | comp. decli. $\Delta = + 88^\circ 42' 21''$ |
| t. m. Greenw. $= 3^h 02' 38''\ 70$ | |
| $= 3^h 040$ | |

Eq. tiempo día 23 $= + 6' 32''\ 80$
dif. por $3^h 04 \times 0'' 79 = - 2''\ 30$
Eq. tiempo verd. $= + 6' 30''\ 50$

Lat. $\varphi = + 44.^\circ 19' 20''$
C. decli. $\Delta = + 88.^\circ 42' 21''$
alt. $h = 28.^\circ 29' 11''$
$2s = 161.^\circ 30' 52''$
$s = 80.^\circ 45' 26''$
log. cos. $s = 9.20582$
log. sen. $(s - h) = 9.89812$
C. log. cos. $\varphi = 0.14544$
C. log. sen. $\Delta = 0.00011$
log. sen.$^2 \frac{1}{2} t$ $19.24949$
log. sen. $\frac{1}{2} t$ $9.62474$
$\frac{1}{2} t = 24.^\circ 55' 33''$
$t = 49.^\circ 51' 06''$
$= 3^h 19' 24''\ 4$
Eq. tiempo $+ 6' 30''\ 5$
t. m. local $= 3^h 25' 54''\ 90$

NOTA PARA EL PROBLEMA 9—Calculando con las tablas de adición y sustracción debe tenerse presente que: el término

$$\text{sen. } h \text{ sec. } \varphi \text{ sec. } \delta$$

es siempre positivo y que el de tang. $\varphi$ tang. $\delta$ es positivo si $\varphi$ y $\delta$ son del mismo signo y negativo en caso contrario; por lo tanto, en el primer caso $(+) - (+)$ se emplearán las tablas de sustracción y las de adición en el otro.

2.ª aproximación hecha con tiempo m. local = $3^h\,25'\,54''\,90$

resulta; decli. $\delta = +\,1.^\circ\,17'\,25''$   $\Delta = 88.^\circ\,42'\,35''$

Ecu. tiempo $= +\,6'\,30''\,60$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lat. $\varphi = +$ | $44.^\circ\,19'\,20''$ | C. log. cos. $\varphi$ = | 0.14544 |
| decli. $\delta = +$ | $88.^\circ\,42'\,35''$ | C. log. sen. $\Delta$ = | 0.00011 |
| alt. h = | $28.^\circ\,29'\,11''$ | | |
| 2s = | $161.^\circ\,31'\,06''$ | | |
| s = | $80.^\circ\,45'\,33''$ | log. cos. s = | 9.20570 |
| (s — h) = | $52.^\circ\,16'\,22''$ | log. sen. (s — h) = | 9.89814 |
| | | | 19.24939 |
| | | log. sen. $\frac{1}{2}$ t | 9.62469 |
| | | $\frac{t}{2}$ = | $24.^\circ\,55'\,22''$ |
| horario = | $3^h\,19'\,22''\,90$ | t = | $49.^\circ\,50'\,44'$ |
| Eq. tiempo = + | $6'\,30''\,60$ | = | $3^h\,19'\,22''\,90$ |
| t. m. local = | $3^h\,25'\,53''\,50$ | | |

*Ejemplo 11.*—En 7 Agosto. Latitud $\varphi = -\,32.^\circ\,53'$, longitud $0^h\,41'\,34''$ Oeste de La Plata, se ha observado la mayor elongación de $\alpha$ de la Cruz indicando en ese instante el reloj las $8^h\,01'\,00''$.

| | |
|---|---|
| Asc. rect. $\alpha = 12^h\,20'55''\,60$ | lg. tang. $\varphi$ = 9.81058 |
| decli. $\delta = -\,62.^\circ\,31'46''\,88$ | lg. tang. $\delta$ = 0.28404 |
| hor. sid. loc. $\theta_0 = 9^h\,04'38''$ | lg. cos. t = 9.52654 |
| | $t = 70^\circ\,31'32'' = 4^h\,41'26''13$ |

$$\cos.\ t = \frac{\text{tang. } \varphi}{\text{tang. } \delta}$$

| | |
|---|---|
| t. sid. á $0^h$ La Plata = $9^h\,04'\,45''$ | horario hallado t = $4^h\,41'\,26''\,13$ |
| dif. long. $41'\,34''$ = $7''$ | + asc. rect. $\alpha$ = $12^h\,20'\,55''\,60$ |
| t. sid. local $\theta_0 = 9^h\,04'\,38''$ | $\theta = \alpha + t = 17.^\circ\,02'\,21''\,73$ |
| | h. s. local $\theta_0$ = — $9^h\;4'\,38''$ |
| | t. s. = $7^h\,57'\,43''\,73$ |
| | corr. = — $1'\,18''\,33$ |
| | t. m. local = $7^h\,56'\,25''\,40$ |
| | t. cron. = $8^h\,01'\,00''$ |
| | adelanto cron. = $0^h\;4'\,34''\,60$ |

*Ejemplo 12.* — En 1.° de Septiembre. Lat. $\varphi = -32° 53'$, long. $0^h$ 41' 34" O. de La Plata. Se han observado alturas del sol. Hallar la hora. El cronómetro arreglado á la hora de Córdoba. Fórmula Borda.

| hora | altura ◎ |
|---|---|
| 1h 59' 30" | 40° 40' |
| 2h 00' 30" | 41° 32' |
| 2h 01' 30" | 42° 20' |

t. m. 2h 00' 30" .................. 41° 30' 40"

— refr. + p = — 1' 06"

41° 29' 34"

semi di. = + 15' 55"

alt. ver. ◎ = 41° 45' 29" —

lat $\varphi$ = 32° 53' ........... c. log cos $\varphi$ = 0.0758356

com. decl. $\Delta$ = 98° 06' 18" ....... c. log sen $\Delta$ = 0.0043604

172° 44' 47"

s = 86° 22' 23" .......... log cos s = 8.8012278

h = 41° 45' 29"

s — h = 44° 36' 54" .... log sen (s — h) = 9.8465385

18.7279623

log sen ½ t = 9.3689811

sen ½ t = 13° 22' 03"

t = 26° 44' 06"

= 1h 46' 56", 40

hora = $2^h$ 00' 30"
dif. long. = 41' 34"
hora L. P. = $2^h$ 42' 04"

decli. día 1.° = $\delta$ = + 8° 7' 45"
cor. por $2^h$ 42' = — 1' 27"
decli $\delta$ = + 8° 6' 18"
comp. decl. $\Delta$ = 98° 6' 18"

t. v. = $1^h$ 46' 56" 40
Equ. tiempo = + 0' 12" 50
t. m. local = $1^h$ 47' 08" 90
dif. con Córdoba = 18' 30" 60
hor. Córdoba = $2^h$ 05' 39" 50
hor. cronom. = $2^h$ 00' 30
atraso = $0^h$ 05' 09" 50

## DETERMINACIÓN DE LA LATITUD

### Por altura Meridiana

Puede determinarse la latitud de un punto observándose la altura meridiana del Sol ó cualquier otro astro de declinación conocida.

Se observa el paso de un astro por el meridiano, aunque no se conozca exactamente la dirección de éste, siguiendo el *astro* con el anteojo del teodolito ú otro instrumento, de tal manera, que aquél permanezca siempre confundido con el hilo vertical del retículo hasta que el movimiento en Azimut, que va disminuyendo insensiblemente, llegue á anularse; entonces, la estrella, el Sol ó la Luna parecen no tener movimiento sino en altura.

Es, en este instante, que el astro pasa por el meridiano del observador, pues bien pronto se le vé abandonar el hilo horizontal para tomar un movimiento en sentido contrario, esto es, de descenso.

En esta situación se leé la graduación del círculo vertical para conocer la altura del astro sobre el horizonte y la del círculo horizontal para el Azimut ó su cálculo.

Antes de empezar una observación se cuidará de que el cero del círculo vertical coincida bien con el *nonio* y el *nivel* del anteojo; así mismo el círculo horizontal, con su nonio sobre cero, será dirigido con anticipación, ya en la dirección del meridiano magnético, ya sobre un punto cuyo Azimut se determinará en oportunidad.

La altura meridiana observada será corregida para convertirla en verdadera y se tomará su complemento ó distancia zenital z; luego se calculará la declinación correspondiente á la hora local reducida al meridiano de las tablas que se tenga para los cálculos y con éstos datos se hallará la *Latitud* por la siguiente fórmula general.

$$\text{Latitud} \quad \varphi = Z + \delta$$

en la que $Z$ = complemento de altura y $\delta$ = declinación, debiendo siempre tener presente los signos correspondientes á cada término.

Respecto á signos debe tenerse presente que el de la declinación lo dan las tablas y que para el de la altura y su complemento, se observará el siguiente convenio por todos aceptado: *toda altura observada mirando hacia el Sud* es POSITIVA *y mirando hácia el Norte* NEGATIVA.

En el caso de observarse un astro en su paso inferior, entre el polo Sud y el horizonte inmediato, debe entenderse que la declinación será la distancia del astro al Ecuador pasando por el zenit del observador, esto es $= 180 - \delta$

Figura 9

$Z$ = zenit del observador, más ó menos 35.° del Ecuador;

H. H' = horizonte, P = polo Sud $E_1$ $E_1$ = Ecuador; EPE' = hemisferio Sud y EP'E' = hemisferio Norte; linea SS', posiciones que ocupará el Sol en su máximo de declinación negativa (en el hemisferio Sud), línea S''S''', posiciones del Sol en su máxima declinación positiva (en el hemisferio Norte).

Los siguientes ejemplos demostrarán la generalidad de la fórmula $\varphi = \delta + Z$

1.° 17 Febrero 1897, altura meridiana observada $\alpha$ de la Cruz; $h = 24.°32'19''$, haciendo frente al Sud. La declinación es $\delta = -62.°31'14''$.

En el instante de la observación se vé que el astro $\alpha$ ocupa el punto a de la figura 9.

La declinación para el cálculo será $APZE = 180.° - E_1A$ sea

$$\delta = 180 - 62.°31'14'' = -117.°28'45''$$

distancia zenital $Z = 90 - 24.°32'19'' = +\ 65.°21'41''$

Latitud buscada $\varphi = -\ 52.°01'04''$ (Sud).

Mismo resultado se obtendría diciendo:

Latitud $PH' = PA + AH' = (90.° - \delta) + h$

$90 - 62.°31'14'' = 27.°28'46''$

alt. observado $h = 24.°32'19''$

Latitud $\varphi = 52.°01'05''$

2.° En 7 Mayo 1897, se ha observado una altura meridiana del Sol borde inferior de 28.°36'25'' dando frente al Norte, se pide la Latitud. Alt. corr. $\odot = -\ 28.°50'48''$

Declinación para ese día, calculada $S = -\ 4.°53'32''$

aplicando la fórmula $\varphi = \delta + Z$

distancia zenital $= 90 - 28.°50'48'' = -\ 61.°09'12''$

$+$ declinación calculada $\delta = -\ 4.°53'32''$

Latitud $\varphi = -\ 66.°02'44''$ (Sud).

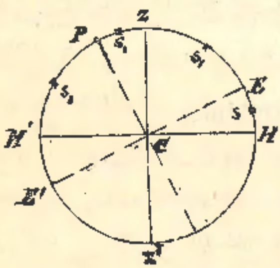
Atendiendo que en la figura 9 el Sol ocupa el punto B se tiene igualmente:

Latitud ZE = ZB + BE = (90 — BH) + BE = dist. zenital + declinación

3.º En 17 Septiembre 1897, altura meridiana observada de $\alpha$ de Escorpión (Antarés) = 78.º 7' 44'' haciendo frente al Norte

| | |
|---|---|
| Declinación de $\alpha$ de Escorpión = | — 26.º 12' 19'' |
| + distancia zenital = 90 – 78.º 7' 44'' = | – 11.º 52' 28 |
| Latitud buscada $\varphi$ = | — 38.º 04' 47'' |

Como complemento de lo que precede y para mayor claridad en el proceder á observarse en cada caso, conviene la siguiente demostración gráfica de la resolución de este problema.




Sean: $Z_1 Z'$ la línea del zénit y $H_1 H$ la del horizonte del observador.

P, P' la línea de los polos y E E, la del Ecuador.

El astro será siempre observado sobre el horizonte del observador en una de las 4 posiciones siguientes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.ª entre el Horizonte y el Ecuador | | | | | en S |
| 2.ª | » | » Ecuador | » » Zenit | » | $S_1$ |
| 3.ª | » | » Zenit | » » Polo | » | $S_2$ |
| 4.ª | » | » Polo | » » Horizonte | » | $S_3$ |

En relación al zenit Z, el sol no ocupará más que las dos primeras posiciones.

La latitud será el arco Z E, sea la elevación del zenit sobre el ecuador, ó su equivalente P H', elevación del Polo sobre el horizonte.

Para la primera posición del astro en S, se tiene:

$$\text{Lat. Z. E} = \text{Z S} - \text{S E} \ldots \text{sea} \ldots \text{lat.} \varphi = \text{Z} - \delta$$

Para la segunda posición en $S_1$

$$\text{Lat. Z E.} = \text{Z } S_1 + S_1 \text{ E} \ldots \text{sea} \ldots \varphi = \text{Z} + \delta$$

Para la tercera posición en $S_2$

$$\text{Lat. Z E} = S_2 \text{ E} - \text{Z } S_2 \ldots \text{sea} \ldots \text{lat.} \varphi = \delta - \text{Z}$$

Para la cuarta posición en $S_3$

$$\text{Z E} + \text{Z } S_3 + S_3 \text{ E'} = 180^o \ldots \text{sea} \ldots \varphi + \text{Z} + \delta = 180^o$$

de donde $\varphi = 180 - (\text{Z} + \delta)$.

Teniendo presente éstas expresiones gráficas y los signos propios de cada elemento, según se ha dicho anteriormente, desaparecerá toda duda sobre la resolución de cualquier caso de este problema.

### Por alturas circunmeridianas

Como el procedimiento de la altura meridiana no se presta á repetición y tiene un instante único y preciso, todo lo que constituye un sério inconveniente; así también el temor de no hacer una observación exacta del paso de un astro por el meridiano, mayormente si éste no está ya determinado, y finalmente como comprobación de las observaciones, conviene observar una série de alturas próximas al meridiano, de 7 á 10 minutos antes ó después, ó antes y después del paso efectivo.

Estas alturas se llaman circunmeridianas, y al observarlas se anotarán igualmente las horas respectivas de cada una.

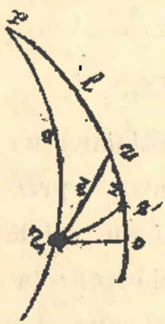
Tomando luego el término medio de las alturas y de los horarios, se reducirá esta altura á la altura meridiana correspondiente.

Si la observación se ha hecho á uno y otro lado del meridiano, se tendrá así á cada lado del meridiano una série de pequeños triángulos, de cuya resolución se conocerá la altura correspondiente á la meridiana y la hora exacta de dicho paso. Una vez obtenidos estos datos se terminan los cálculos para la latitud como en el caso anterior.

Atendiendo la figura adjunta, se tiene:

P Z S' O = meridiano local.

Z S = $Z_1$ = distancia zenital correspondiente á la única altura ó al término medio de las alturas observadas á un lado del meridiano.



$$Z_1 = 90 - h.$$

Si la observación se hace con una estrella, esta distancia zenital será igual á uno y otro lado del meridiano si el ángulo horario en P es igual para cada observación.

S' = posición del astro á su paso verdadero por el meridiano; en ese instante su distancia zenital, será.

$Z = Z\,S' = Z\,O - S'\,O$ ó también $Z\,S = Z_1 = Z\,S' + S'\,O$

De la ecuación fundamental de los triángulos esféricos se deduce la resolución del triángulo S Z S', sustituyendo en ella h por $Z' = 90 - h$

$$\cos Z = \cos Z_1 - 2 \cos \varphi . \cos \delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} t.$$

El 2.º miembro llámase *reducción al meridiano,* y en él entra la latitud estimada, lo que en ciertos casos obliga á hacer cálculos sucesivos de aproximación, sustituyendo en ellos sucesivamente las latitudes obtenidas del cálculo. Este inconveniente se salvará haciendo muy pequeño el ángulo horario t, cuanto más 10 minutos de tiempo.

El desarrollo de la fórmula anterior da ésta otra, llamada *fórmula de Delambre:*

$$Z = Z_1 - \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\operatorname{sen} Z_1} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''} + \left(\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\operatorname{sen} Z_1}\right)^2 \frac{2 \cot Z_1 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''} \cdots$$

haciendo $\dfrac{\cos \varphi \cos \delta}{\operatorname{sen} (\varphi - \delta)} = A \qquad A^2 \cot (\varphi - \delta) = B$

habiéndose sustituído $Z_1$ por $(\varphi - \delta)$

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''} = m \qquad \frac{2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''} = n$$

y sustituyendo esos valores en el desarrollo anterior se tiene la fórmula general

$$Z = z_1 - A m + B n$$

El término $B n$ podrá ser despreciado si t no pasa de 10 minutos.

Teniendo en cuenta la corrección que corresponde aplicar al horario t, así como también la que corresponde al emplearse un cronómetro arreglado á la hora siderea, se introducen dos nuevos coeficientes: k para la primera corrección y i para la segunda llegando á dar al término A su valor definitivo.

El valor del coeficiente k es dado por las tablas III formadas con el argumento u (marcha diurna del cronómetro) y $W + dE$ (marcha diurna, mas variación de la ecuación de tiempo); resultando así para k el valor de

$$k = \left( \frac{1}{1 + \frac{u + d\,E}{86400}} \right)^2$$

con la introducción de estos coeficientes se llega al siguiente resúmen aplicable á todos los casos:

Estrella observada con cronóm. tiempo medio. $A = k \left( \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} \right)$

» » » » tiempo sidereo $A = k\,i \left( \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} \right)$
(log. i = 0.002375)

Sol observado con cronómetro á tiempo medio $A = k' \left( \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} \right)$

» » » » tiempo sidereo $A = k'\,i' \left( \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi - \delta)} \right)$
(log. i' = 9.997625)

Los coeficientes m y n así como sus logaritmos se encuentran en forma de tablas en casi todos los almanaques náuticos y se reproducen al final de este libro: tablas IV.

*Ejemplo 4.°* — De una serie de 6 alturas circunmeridianas del sol, hechas el 20 de Julio de 1896, se ha obtenido el siguiente promedio de 3 á cada lado $h = 36° 1' 9'', 20$, los ángulos horarios resultaron ser para la primera serie $t = -7' 58'', 10$ y para la segunda $t = +7' 1'', 20$.

El promedio de los horarios, será
$$t_1 = -7' 58'', 10$$
$$t_2 = +7' 01'', 20$$
$$2t = 0' 56'', 90$$
$$t = 0' 28'', 45$$

La declinación correspondiente resultó ser de

$$\delta = +\ 20^\circ\ 30'\ 09''\ 40$$

alt. obser. ◎ = 36° 01' 09'', 4
— refr. + paral. = — 1' 16'', 1
semidiámetro = + 15' 46'', 7

alt. corr. ◎ h = 36° 15' 39'', 6 .......... $Z_1$ = 53° 44' 20'', 40
A m = — 2' 02'', 20
B n = — 0' 0''

frente al Norte Z = — 53° 42' 18'', 20
declinación δ = + 20° 30' 09'', 40

latitud φ = — 33° 12' 08'', 80

### Cálculo de Am y de Bn

declin. = + 20° 30' 9'' .................... log cos = 9.97159
latitud = — 33° 00' 0'' .................... log cos = 9.92359

(φ — δ) = — 53° 30' 9'' .................. c. log sen = 0.09481

log A = 9.98999
log m = 2.09702

(2' 2'', 20) log A m = 2.08702

Estos valores son los que aparecen en el cálculo precedente:

log A² = 9.9800
log cot (φ — δ) = 9.8692
log n = 8.6990

log B n = 8.5482
B. n. = 0'', 4

*Ejemplo 5.°* — Día 14 de Diciembre de 1896. Latitud de estima 37° 28' Norte. Altura circunmeridiana corregida, h = 28° 57' 50 ''; en ese instante el cronómetro en tiempo sidereo indicaba $3^h$ 38' 17'', á más á $0^h$ verdadero local indicaba $4^h$ 2' 58'', siendo su marcha diurna — 12'', 75.

de la C. des T., pág. 26, T. m. va creciendo... d E = + 29'', 20

| | | |
|---|---|---|
| t. cron. á 0h. verd. = 4h 02' 58'' | De la tabla IV | u = — 12'', 75 |
| » » observación = 3h 38' 17''. 70 | log m = 3,07701 | u + d E = + 16'', 30 |
| para m. n. t = 0h 24' 40'', 30 | log n = 0.5417 | |

$$\text{(Estima)}\ \varphi = +\ 37^\circ\ 28'\ 00'' \ \ldots\ldots\ \log\cos = 9.89966$$
$$\delta = -\ 23^\circ\ 17'\ 03'',\ 70 \ldots\ldots\ \log\cos = 9.96311$$
$$\varphi - \delta = 60^\circ\ 45'\ 03'',\ 20 \ldots\ \text{c.}\ \log\text{sen} = 0.05924$$
$$9.92201$$
$$\log K' = 9.99984$$
$$\log i' = 9.99763$$
$$\log A = 9.91948$$
$$\log m = 3.07701$$
$$\log A\ m = 2.99649$$
$$A\ m = -\ 16'\ 32''$$

$$h = 28^\circ\ 57'\ 50''$$
$$Z = 61^\circ\ 02'\ 10''$$
$$A\ m = -\quad 16'\ 32''$$
$$B\ n = +\quad 0'\ 01'',\ 30$$
$$\text{(frente sud)}\ Z = +\ 60^\circ\ 45'\ 39'',\ 30$$
$$\delta = -\ 23^\circ\ 17'\ 03'',\ 20$$
$$\text{Latitud}\ \varphi = +\ 37^\circ\ 28'\ 36'',\ 10$$

$$\log\text{cotg}\ (\varphi - \delta) = 9.7482$$
$$\log A^2 = 9.8390$$
$$\log n = 0.5417$$
$$\log B\ n = 0.1289$$
$$B\ n = 1'',\ 30$$

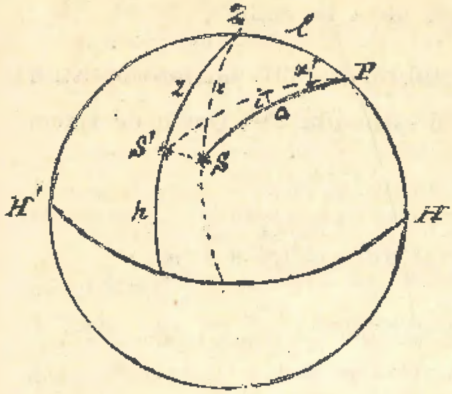
Este mismo problema de *alturas circunmeridianas* puede resolverse por el siguiente método:

Sea $h$ y $h + v$ las dos alturas del Sol observadas ya á un sólo lado, ya á ambos lados del meridiano.

Sea $i =$ el intérvalo de tiempo que ha mediado entre ambas observaciones, y cuya medida es el ángulo horario S P S' en el Polo.

Sea también $x$ el valor del ángulo horario que falta al astro en su menor altura observada para pasar por el meridiano. Si la observación es hecha á un sólo lado del meridiano se tendrá para la 2.ª altura ángulo horario $Z\ P\ S'' = x - i$..

Sea ahora $\alpha$ = la expresión de la cantidad de movimiento ascensional del Sol en su proximidad al meridiano en un minuto de tiempo.




En la proximidad al meridiano las alturas varían en relación al cuadrado del ángulo horario; así se tendrá llamando $h_m$ la altura meridiana

$$h_m = h + \varphi\, x^2 \quad \text{y} \quad h_m = h + v + \alpha\,(x - i)^2$$

de donde $$h + \alpha\, x^2 = h + v + \alpha\,(x - i)^2$$

de lo que resulta $$x = \frac{v + \alpha\, i^2}{2\,\alpha\, i}$$

Sustituyendo este valor en $h_m = h + \varphi\, x^2$

se tiene $$h_m = h + \frac{(v + \alpha\, i^2)^2}{4\,\alpha\, i^2}$$ fórmula que da el valor de la altura meridiana.

El valor del incremento $\alpha$ es dado por la siguiente fórmula $$\alpha = 1'',9635\, \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi \mp \delta)}$$ en la cual la constante $$1'',9635 = \left[\,(60'')^2\, \frac{225}{2}\, \operatorname{sen} 1''\,\right]$$

El valor de $\alpha$ ha sido reducido á tablas en las cuales se entra con la latitud y declinación.

En la expresión $\operatorname{sen}(\alpha \mp \delta)$ se empleará el signo — cuando la latitud y la declinación tengan el mismo signo, y el signo + en caso contrario. Si la declinación fuera mayor que la latitud, se haría entonces: sen $(d \mp \varphi)$, observando la misma regla para los signos.

*Ejemplos.*—El 6 de Octubre de 1897, latitud de estima $= 40^\circ\ 40'$ Norte. Longitud estimada $30^\circ$ Oeste de Greenwich.

1.ª altura observada $h = 43^\circ\ 39'\ 52''$ á las $11^h\ 56'\ 5''$ del cronóm
2.ª » » $h', = 43^\circ\ 51'\ 32''$ á las $12^h\ 9'\ 5''\ 90$ » »

**Hallar la latitud.**

| | | |
|---|---|---|
| intérvalo entre las dos observ. $i =$ | 0h 13 0'' 90 | (ángulo horario |
| Cuadrado del intérvalo. $i^2 =$ | 169' 40 | |
| valor del incremento de altura $\alpha =$ | 2'' 10 | (según la tabla) |
| Producto $\alpha\ i^2 =$ | 355 70 | |
| dif. de alturas observadas, $v =$ | 700'' | $(51'\ 32'' - 39'\ 52'' = 11'\ 40'' = 700'')$ |
| Suma $(v + \alpha\ i^2) =$ | 1055 7 | |
| al cuadrado $(v + \alpha\ i^2)^2 =$ | 1114502 5 | |
| $4\ \alpha\ i^2 =$ | 1422 8 | |

$$\text{valor de } x^2 = \frac{(v + \alpha\ i^2)^2}{4\ \alpha\ i^2} = 783''\ 3$$

aumento de altura, $x = 13'\ 3'',\ 30$ para la reducción al meridiano.

No disponiéndose de la tabla de incrementos $\alpha$, su cálculo puede hacerse por las fórmulas

$$\alpha = 1''\ 9635\ \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\operatorname{sen}(\varphi + \delta)}$$

| | |
|---|---|
| declin. ◎ día 6 = | $- 5^\circ\ 7'\ 32''$ |
| dif. 57'' 6 x $2^h$ = | $+ \quad 1'\ 55''$ |
| declin. $\delta$ = | $- 5^\circ\ 9'\ 27''$ (Sud) |

| | |
|---|---|
| latitud .... = | $+ 40^\circ\ 40'$ |
| declinación $\delta$ = | $- \quad 5^\circ\ \ 9'$ |
| $(\varphi + \delta)$ = | $45^\circ\ 49'$ |

| | |
|---|---|
| log. 1.9335. . | = 0 29303 |
| log. cos $\varphi$. . | = 9.87996 |
| log. cos $\delta$. . | = 9.99824 |
| comp. log. sen $(\varphi + \delta)$. . | = 0.14441 |
| log. $\alpha$. . | = 0.31564 |
| x . . | = 2'' 07 |

Altura menor

alt. obser. ☉ $h = 43^\circ\ 39'\ 52''$

— (refr. + part.) $= -\ 0'\ 53''$

$43^\circ\ 38'\ 59''$

semi diám. $= +\ 16'\ 03''$

alt. verdadera $h = 43^\circ\ 55'\ 02''$

Cálculo de la latitud

alt. corr. $h = 43^\circ\ 55'\ 02''$

corr. $x = +\ 13'\ 03''$

alt. mer. $h = 44^\circ\ 08'\ 05''$

comp. alt. $Z = 45^\circ\ 51'\ 55''$ al Norte

declinación $\delta = 5^\circ\ 9'\ 27''$ » Sud

lat. buscada $\varphi = 40^\circ\ 42'\ 28''$ » Norte

El método que precede ha sido modificado en parte permitiendo con sólo las dos alturas observadas y la hora de cada una de las observaciones, obtener un resultado más aproximado que el anterior aun en el caso de ser muy pequeña la altura zenital.

Partiendo siempre de que las alturas circunmeridianas varían en proporción al cuadrado del ángulo horario y, con las mismas anotaciones anteriores se tiene, llamando $P$ y $P_1$ los ángulos horarios correspondientes á las alturas observadas $h$ y $h_1$

$$\frac{h_m - h}{h_m - h_1} = \frac{P^2}{P_1^2}$$

transformando esta ecuación se tiene

$$\frac{h_m - h + h_m - h_1}{h_m - h - h_m + h_1} = \frac{P^2 + P^2}{P^2 - P^2}$$

de donde la fórmula general

$$h_m = \frac{1}{2}(h + h_1) + \frac{1}{2}(h_1 - h)\frac{P^2 + P_1^2}{P^2 - P_1^2}$$

en esta fórmula se obtiene la altura meridiana por el meridiano superior, si se consideran $h_m - h$ y $h_m - h_1$ positivos pero en caso de resultar negativos se tendrá el pasaje por el meridiano inferior siendo su expresión

$$h_m = \frac{1}{2}(h + h_1) - \frac{1}{2}(h_1 - h)\frac{P^2 + P_1^2}{P^2 - P_1^2}$$

*Ejemplo* 1.°—En 11 de Mayo 1897. En latitud $\varphi = 20°$ Norte (estimada) y mirando al Sud se han observado alturas circunmeridianas las que corregidas son:

1.ª altura ◎ $h = 87° 14'$ hora observada. . $11^h\ 52'\ 33''$
2.ª ,, ◎ $h_1 = 87° 30'$ ,, ,, . . $11^h\ 54'\ 28''$

declinación corregida $\delta + 18°\ 1'$

| | | |
|---|---|---|
| $h = 87° 14'$ | $P = 7' 27''$ | $P^2 + P_1{}^2 = 86', 10$ |
| $h_1 = 87° 30'$ | $P_1 = 5' 32''$ | $P^2 - P_1{}^2 = 24', 90$ |
| $h + h_1 = 174° 44'$ | $P^2 = 55', 5$ | $\frac{P^2 + P_1{}^2}{P^2 - P_1{}^2} = \frac{86',10}{24',90} = 3,46$ |
| $h_1 - h = 0° 16'$ | $P_1{}^2 = 30', 60$ | |
| $\frac{1}{2} h + h_1 = 87° 22'$ | | |
| $\frac{1}{2} h_1 - h = 0° 08'$ | | |

$$\frac{1}{2}(h + h_1) = 87°\ 22'$$

$$\frac{1}{2}(h_1 - h)\ \frac{P^2 + P_1{}^2}{P^2 - P_1{}^2} = 0°\ 27'\ 68 \text{ (reducción al meridiano)}$$

alt. merid. $h_m$: $= 87°\ 49'\ 68$
dist. zenital $= +\ 2\ \ 10, 22$
declin. $= +18\ \ 1, 00$
Latitud $\varphi = 28°\ 11', 22$ Norte.

*Ejemplo 2.°*—En 26 Febrero de 1897. Latitud estima 41° Norte, se han observado mirando al Sud, 2 alturas circunmeridianas que corregidas resultaron ser

1.ª observación $h = 40°\ 30'$ á la hora del cronómetro $11^h\ 44'\ 14''$
2.ª » $h = 40°\ 34'$ » » » » » $11^h\ 48'\ 53''$

Declinación corregida $\delta = 8°\ 30'$ comp. hor. $- 15'\ 46''$
hor. $= 11'\ 08''$

| | | |
|---|---|---|
| $h + h_1 = 81° 04'$ | $P = 15' 46''$ | $P^2 + P_1{}^2 = 372', 60$ |
| $h_1 - h = 0° 04'$ | $P_1 = 11' 08''$ | $P^2 - P_1{}^2 = 124, 60$ |
| $\frac{1}{2}(h + h_1) = 40° 32'$ | $P^2 = 248, 60$ | $P^2 + P_1{}^2 = 372, 60$ |
| $\frac{1}{2}(h_1 - h) = 0° 02'$ | $P_1{}^2 = 124, 00$ | $P^2 - P_1{}^2\quad 124, 60 = 2, 99$ |

$$\frac{1}{2}(h + h_1) = \quad 40^\circ\ 32'$$

$$\frac{1}{2}(h_1 - h)\frac{P_1^2 + P_1^{\prime 2}}{P^2 - P_1^2} = 2', 99 \times 2' \text{ (reduc. al merid.)} = \quad + \ 5', 98$$

$$\text{altura meridiano } h_m = \quad 40^\circ\ 37', 98$$

$$\text{Comp. } Z_m = \quad 49^\circ\ 22', 02 +$$

$$\text{Declinación } \delta = \quad 8^\circ\ 30' \quad -$$

$$\text{Latitud } \varphi \quad = + 40^\circ\ 52', 02$$

*Ejemplo* 3.°—En 14 de Diciembre se hizo una série de observaciones circunmeridianas de la estrella $\delta$ de Virgen, con el fin de calcular la latitud de un punto cuya latitud de estima es $\varphi = -34^\circ\ 51'\ 50''$

Efectuados los cálculos se presenta el resultado en la forma del siguiente cuadro:

| Reloj | Altura | Intérvalos | Alturas Meridianas |
|---|---|---|---|
| 9h 9' 52 " | 51.° 17' 27 " | 13' 35 " | ...................... 51.° 25' 23 " |
| ,, 12' 25 | — ,, 19' 35 | 11'. 2 | ...................... |
| ,, 14' 43 | ,, 22' 15 | 8' 44 | ...................... 51. 25' 42 " |
| ,, 17' 22 | ,, 23' 55 | 6' 5 | ...................... ,, ,, 50 " |
| ,, 22' 08 | ,, 25' 30 | 1' 9 | ...................... ,, ,, 34 " |
| ,, 23' 34 | ,, 25' 30 | 0' 7 | ...................... ,, ,, 30 " |
| ,, 24' 41 | ,, 25' 23 | 1' 4 " | ...................... ,, ,, 26 " |
| ,, 26' 08 | ,, 25' 05 | 2' 41 | ...................... ,, ,, 24 " |
| ,, 28' 14 | ,, 25' 05 | 4' 37 | ...................... ,, ,, 60 " |
| ,, 30' 09 | ,, 23' 10 | 6' 42 | ...................... ,, ,, 06 " |
| ,, 31' 38 | ,, 22' 0 | 8' 11 | ...................... |
| ,, 33' 38 | ,, 20' 48 | 10' 11 | ...................... ,, ,, 11 " |
| ,, 35' 30 | ,, 19' 05 | 12' 3 | ...................... ,, ,, 20 " |
| ,, 37' 19 " | ,, 17' 08 | 13' 52 " | ...................... 51. 25 24 " |

promedio de 12 alturas $\}$ = 51.° 25' 29''. 20

Intérvalos

hora cul. = 9. 28' 27''

,, 1.ª obs. = 9. 9' 52''

int. = 0. 13' 35''

corr. log. m. = 2. 55892

Tabla X

corr. inst. = + 1' 48''

51.° 27' 17, 20

Refrac. = − 0' 46, 4

Alt. verd. = 51.° 26' 30, 80

Dist. zenit. Z = −38.° 33' 29, 20

Declin. $\delta$ = + 3 41' 1, 80

Lat. bus. $\varphi$ = −34.° 52' 27, 40

Hora de la culminación

hora 1.ª obser. 9.h 9' 52''

,, últ. , — 9 37' 01''

18 46' 33''

hora cul. 9 23' 27''

(Horas corregidas de la marcha del reloj).

Cálculos de log. A.

log. cos $\varphi$ ( 34° 51' 50'') = 9. 91407

log. cos $\delta$ (+ 3° 41' 2'') = 9. 99910

c. lg. sen$(\varphi - \delta)$ (— 38° 32' 50'') = 0. 20540 neg

log. A. = 0. 11857

log. m. = 2. 55892

log. Am. = 2. 67749

Am. = 475'' 8 = 7' 55,'' 80

1.ª alt. obser. = 51° 17' 27''

— Am. = + 7' 55'', 80

1.ª alt. merid. = 51° 25' 22'', 80

Iguales cálculos se harán para cada altura observada.

## Por alturas correspondientes

Hecha la observación como se h, detallado al tratarse de la determinación de la hora, la mitad del tiempo transcurrido entre las dos observaciones de una *estrella* es el ángulo horario propio á cada una de las observaciones; con este ángulo podría obtenerse una latitud para cada una de las observaciones.

Si el astro observado es el Sol, los ángulos horarios $t$ y $t'$ de cada observación serán

$$t = \lambda - x \qquad t' = \lambda + x$$

siendo $\lambda$ la mitad del intérvalo verdadero transcurrido entre las dos observaciones y x la corrección para la reducción á medio día.

Con el tiempo de cada observación, se hallará la declinación para cada observación con relación al meridiano tabular que se adopte.

El momento *más favorable* para el mejor éxito de esta observación, es cuando el astro se encuentra próximamente á 45° del meridiano (sean las $9^h$ y las $3^h$ para el Sol).

*Ejemplo*—En 5 de Abril de 1896. Longitud $u = 4^h\ 3'$ O. de París. Latitud estima $= 34°\ 35'$ se ha observado al Este una altura de Sol $h = 22°\ 31'\ 21''$ á las $8^h\ 15'$ t. m. En ese instante el cronómetro indicaba $4^h\ 9'\ 41''$, 80 t. m.

Con la misma altura se observó el Sol al Oeste en el momento en que el cronómetro indicaba las $11^h\ 44'\ 52''$.

$\lambda = 3^h\ 47'\ 35''\ 20$ 1.ª observ. t. cron. $= 4^h\ 9'\ 41''\ 8$

2.ª » » $= 11^h\ 44'\ 25''\ 10$

$= 3^h\ 793 = 56°\ 53'\ 45''$ intérvalo $2\lambda = 7^h\ 35'\ 10''\ 30$

Horario del Este $-t = \lambda - x = -3^h\ 47'\ 50''$, 80

» » Oeste$= t' = \lambda + x = + 3^h\ 47'\ 25''$, 10

1.° Tiempo verd. de París $= 4^h\ 3' - 3^h\ 47'\ 50''$, $80 = 0^h\ 15'\ 9''\ 20$

2.° » » » » $= 4^h\ 3' + 3^h\ 47'\ 25''$, $10 = 7^h\ 50'\ 25''\ 10$

| | |
|---|---|
| | Tiempo m. $2\lambda = 7^h\ 35'\ 10''\ 30$ |
| | Eq. tiempo $= +\ 5''\ 50$ |
| $\lambda = 3^h\ 47'\ 37''\ 90$ | tiempo verd. $= 7^h\ 35'\ 15''\ 80$ |
| corr. $x = -\ 12''\ 85$ | $\lambda = 3^h\ 47'\ 37''\ 90$ |
| $\lambda \pm x = 3^h\ 47'\ 50''\ 75$ | corr. $x = -\ 12''\ 85$ |
| $\lambda' + x = 3^h\ 47'\ 25''\ 05$ | $\lambda \pm x = 3^h\ 47'\ 50''\ 75$ |
| | $\lambda' + x = 3^h\ 47'\ 25''\ 05$ |

Para el día 5 de Abril á $0^h\ 15'\ 9''\ 20$, declinación $\delta = + 6°\ 32'\ 37''\ 80$

» » » » » » $7^h\ 50'\ 25''\ 10$, » $\delta' = + 6°\ 29'\ 46''\ 10$

Empleando las fórmulas

$$\text{tang. } M = \text{tang. } \delta \sec t$$

$$\cos(\varphi - M) = \text{sen } h \text{ sen } M \text{ cosec } \delta$$

$$\varphi = (\varphi - M) + M$$

se obtendrá la latitud buscada.

| Al Este | Al Oeste |
|---|---|
| $\lg.\operatorname{tg}.\delta(6^\circ\,32'\,37'') = 9.0482656$ | $\log.\operatorname{tang}.\delta' = 9.0563993$ |
| $\lg.\sec t\,(56^\circ\,57'\,47'') = 0.2634402$ | $\log.\sec t' = 0.2621964$ |
| $\log.\operatorname{tang}.M = 9.3117098\,(1^\circ)$ | $\log.\operatorname{tang}.M = 9.3185957\,(1^\circ)$ |
| $M = 11^\circ\,35'\,02''\,30$ | $M = 11^\circ\,45'\,50''\,40$ |
| $\log.\operatorname{sen} M = 9.30277$ | $\log.\operatorname{sen} M = 9.30938$ |
| $\log.\operatorname{sen} h = 9.58325$ | $\log.\operatorname{sen} h = 9.58325$ |
| $\log.\operatorname{cosec}\delta = 0.95443$ | $\log.\operatorname{cosec}\delta' = 0.94640$ |
| $\log.\cos(\varphi - M) = 9.84045$ | $\log.\cos(\varphi - M) = 9.83903$ |
| $(\varphi - M) = \pm 46^\circ\,10'\,02''\,10$ | $(\varphi - M) = 46^\circ\,20'\,51''\,20$ |
| $M = -11^\circ\,35'\,02''\,30$ | $M = 11^\circ\,45'\,50''\,40$ |
| $\varphi = -34^\circ\,34'\,59''\,80$ | $\varphi' = 34^\circ\,35''\,00''\,80$ |

$$\begin{aligned} \varphi &= 34^\circ\,34'\,59''\,80 \\ \varphi' &= 35^\circ\,35'\,00''\,80 \\ & \overline{69^\circ\,10'\,00''\,60} \\ \text{Promedio } \varphi &= 34^\circ\,35'\,00''\,30 \end{aligned}$$

**Por alturas iguales de dos astros diferentes y el intérvalo de tiempo.**

Este procedimiento es equivalente al de alturas correspondientes.

Se observa la altura de un astro (*una estrella conocida*) mirando hacia el Norte, por ejemplo, y se anota la hora del cronómetro ó reloj disponible cuya marcha diurna es conocida; después con la misma altura y mirando hacia el Sud se espera que otra estrella conocida llegue á coincidir con los hilos del retículo y se anota nuevamente la hora.

De estos dos tiempos se deduce el *intérvalo*, el que se reducirá luego á grados.

Si el cronómetro está arreglado á tiempo medio, se reducirá el intérvalo á tiempo medio, reduciéndolo luego á *tiempo sidereo.*

La altura no tiene para qué figurar en los cálculos. Conviene que las estrellas observadas queden casi á igual distancia del zenit y debe adoptarse para altura común la de la estrella que culmina más lejos del zenit. Será conveniente que las Ascensiones rectas de ambas estrellas difieran poco de 12 horas.

Llamando: $\theta$, $\theta'$ = tiempo sidereo de cada observación

$\alpha\ \alpha'$ ; $\delta\ \delta'$ = Asc. rect. y declinación de cada estrella

$t$, $t'$ = ángulos horarios de cada observación

$h$ = altura común y $\varphi$ Latitud

Se tiene $t = \theta - \alpha$ ; y $t' = \theta' - \alpha'$

*Ejemplo 8.º* — En 7 de Octubre de 1897. Lat. estima — 35º Longitud = 4. h 0' 57" O. de París se ha observado la altura de β *de Camaleón* = 24º 52' al Oeste del Meridiano y con la misma altura α *de Andrómeda* al Este. El tiempo medio de la primera observación fué de 10 h 16' 57," 30 y el de la 2.ª de 10 h 59' 8," 50. La marcha del cronómetro es de + 7", 12 y su adelanto al tiempo medio local de 1 h 7' 28"

| | |
|---|---|
| 1.º tiempo cronómetro..... | 10. h 16' 57", 30 |
| 2.º ,, ,, ..... | 10. 59' 8", 50 |
| intérvalo λ = | 42' 11", 20 |

(marcha diurna) u = + 7", 12

$$\text{sea} \quad \frac{7''\ 12}{24} = +0'',21$$

La hora t. m. local será 1h 7' 28", 22 + 0", 21 = 1h 7' 28" 43

De la C. des T. se saca

| $\beta$ de Camaleón | $\alpha$ de Andrómeda |
|---|---|
| $\alpha = 12.^h 12' \; 8'', 99$ | $\alpha' = 0.^h \; 3' \; 4'', 64$ |
| $\delta = -78^\circ \; 44' \; 18'', 70$ | $\delta' = +28^\circ \; 31' \; 27'', 30$ |

Para la fecha y longitud dada, tiempo sidereo local $\theta_0$ $13^h \; 7' \; 9''; 19$

| Con $\beta$ de Camaleón | Con $\alpha$ de Andrómeda |
|---|---|
| 1.ª t. cron. $= 10.^h 16' 57'', 30$ | 2.ª t. crono. $= -10. \; 59' \; 8'', 50$ |
| correc. $= - \; 1. \; 7' 28'', 22$ | correc. $= - \; 1. \; 7' 28'', 22$ |
| t. m. $= 9. \; 9' 29'', 08$ | t. m. $= 9. \; 51' 41'', 07$ |
| $\theta_0 = 13. \; 7' \; 9'', 19$ | $\theta_0 = 13. \; 7' \; 9'', 19$ |
| $22. \; 16' \; 38'', 27$ | $22. \; 58' \; 50'', 26$ |
| corr. tabla $+ \; 1' \; 30'', 27$ | corr. tabla $+ \; 1' \; 37'', 20$ |
| T. sid. $\theta = 22. \; 18' \; 08'', 54$ | T. sid. $\theta' = 23^h \; 00' \; 26'', 46$ |
| $- \alpha = 12. \; 12' \; 8'', 99$ | $\alpha' = - \; 0. \; 03' \; ''4, 64$ |
| horario t. $= 10.^h \; 05' \; 59'', 56$ | horario t. $= 22^\circ \; 57' \; 21'', 82$ |
| t. $= 151^\circ \; 29' \; 53'', 30$ | t. $= 344^\circ \; 20' \; 27'', 20$ |
| log. cos. t $= 9. \; 9438909$ | log. cos. t $= 9. \; 9835743$ |

de $$\text{tang. } \varphi = \frac{\cos. \delta \cos t. - \cos \delta' \cos t'}{\text{sen } \delta' - \text{sen } \delta}$$

que puede calcularse por las tablas de adición y, sustracción se tiene

| | |
|---|---|
| log. cos. t $= 9. \; 9438909$ | log. cos. t' $= 9. \; 9835743$ |
| log. cos. $\delta = 9. \; 2906726$ | lon. cos. $\delta' = 9. \; 9437987$ |
| $9. \; 2345635$ neg. | adición $= 9. \; 9273730$ |
| $0. \; 7730236$ | $9. \; 2345635$ |
| log. numerador $= 0. \; 0075871$ neg. | Argum. A $= 0. \; 6928095$ |
| log. sen $\delta' = 9. \; 8790013$ | log. numerador $= 0. \; 0075871$ |
| log. sen $\delta = 9. \; 9915567$ | log. denominador $= 0.1638400$ |
| adic. arg. A $= 9.6874446$ | log. tang. $\varphi = 9. \; 8437471$ (neg) |
| número tabular $= 0.1722833$ | $\varphi = - \; 34^\circ \; 54' \; 30''$ |
| log. denominador $= 0.1638400$ | |

**Por dos alturas y el intérvalo de tiempo**

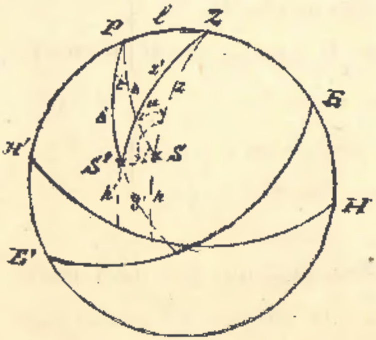
Consiste en observar dos alturas cualesquiera de un mismo astro, especialmente el sol, y el intérvalo de tiempo transcurrido entre ambas observaciones.

Este método puede ser aplicado principalmente de tres maneras, ya con el sol, ya con una sola estrella, ya con dos estrellas de posición conocidas en ascensión recta y declinación.

Las condiciones más favorables para la mayor exactitud de este proceder, consisten en que el ángulo formado por los verticales de los dos astros sea de 90° más ó menos; condición difícil de conseguir si la observación se hace sólo con un astro.

En caso de observarse un sólo astro no debe adoptarse un ángulo menor de 30° como diferencia de Azimutes entre las dos alturas.

Si el sol es el que se observa en dos épocas diferentes el intérvalo cronométrico que ha mediado entre ambas observaciones, deberá ser reducido á tiempo *verdadero.*




Habiéndose observado el astro, sea el sol, en dos épocas ó situaciones distintas, se han formado dos triángulos de posición PSZ y PS'Z en los cuales se conoce las distancias zenitales $z = ZS$, $z' = ZS'$ y los complementos de declinación $\Delta = PS$ y $\Delta' = PS'$. También es conocido el ángulo $SPS' = t$, intérvalo transcurrido entre ambas observaciones.

Para hallar $PZ = 90 - \varphi$, complemento de latitud, hay pues, que resolver estos tres triángulos: $SPS'$, $SZS'$ y $PZS$.

Por el triángulo $SPS'$ se hallará $SS' = D$ y $PSS' = x$.

Por el triángulo $SZS'$ se hallará el ángulo $ZSS' = y$, y $PSZ = u = y \pm x$.

Por el triángulo $PSZ$ se halla $PZ = \varphi$.

El ángulo $u$ puede tener dos valores según los casos y será

$$u = y + x \text{ cuando } \delta + \varphi < 90^{\circ} \text{ (lat. de estima)}$$
$$u = y - x \text{ cuando } \delta + \varphi > 90^{\circ}$$

Para la resolución de estos triángulos pueden emplearse las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{array}{c} \cos D = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos t \\ \operatorname{sen} PSS' = \operatorname{sen} x = \cos \delta \operatorname{sen} t \operatorname{cosec} D \\ \cos ZSS' = \cos y = \operatorname{sen} z \sec z' \operatorname{cosec.} D - \operatorname{tang} z' \operatorname{cotg} D \\ u = y \mp x \\ \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} z' \operatorname{sen} \delta' + \cos z' \cos \delta \cos y \\ \operatorname{sen} t' = \cos h' \operatorname{sen} y \sec \varphi \end{array}\right\} \text{fórmula A}$$

Estas fórmulas son calculables, las unas por los logaritmos vulgares y las otras por los de adición y sustracción.

También puede emplearse este otro grupo de fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \tfrac{1}{2} D = \text{sen } \Delta \text{ sen } \tfrac{1}{2} t \text{ , cotg } y = \text{tang } \tfrac{1}{2} t \cos \Delta \\ \text{sen } \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\dfrac{\text{sen }(p - z) \text{ sen }(p - D)}{\text{sen } z \text{ sen } D}} \text{ ; } p = \left(\dfrac{z + z' + D}{2}\right) \\ \text{tang } \lambda = \text{tang } \Delta \cos z \qquad \lambda = \text{ángulo auxiliar} \\ \text{ó sen } \lambda = \cos \tfrac{1}{2} u \sqrt{\text{sen } z \text{ sen } \Delta} \\ \text{sen } \tfrac{1}{2} \varphi = \sqrt{\text{sen } p \text{ sen }(p - 2\lambda)} \quad p = \dfrac{(z + \Delta + 2\lambda)}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{fórmulas} \\ \text{B}\end{array}$$

## *Aplicación del grupo B*

*Ejemplo 9.º*—24 Mayo, Lat estim $= +42^{\circ}$ ; long. $= 1^h\ 10'$ al O

1.ª Observación á $7^h\ 54'\ 28''$ alt. corr. $h = 35^{\circ} 35' 54''$, $z = 54^{\circ} 24' 06''$

2.ª Observación á $10\ 38'\ 57''$; alt. corr. ◎ $h' = 63^{\circ}\ 12'\ 16''$ ; $z' = 26^{\circ} 47' 44''$

$$\begin{array}{rl} \text{Intérvalo} = & 2^h\ 44'\ 29 \\ \text{corr.} = & \quad\ \ + 7 \\ \hline & 2^h\ 44'\ 36 = t \\ \hline & 1.\ \ 22'\ 18 = \tfrac{1}{2} t = 20^{\circ}\ 34'\ 30'' \\ \text{hora 1.ª obser.} = & 7.\ \ 54'\ 28 \\ \hline \text{hor. instante medio ob.} = & 9^h\ \ 16'\ 46'' \\ \text{dif. long.} = & +1.\ \ 10' \\ \hline \text{hora reducida} = & 10^h\ 26'\ 46'' \text{ día } 24 \\ \text{ó también} = & 22^h\ 26'\ 46'' \text{ día } 23 \\ \text{decli. del sol, corr. } \delta = & 20^{\circ}\ 44'\ 41'' \\ \text{compl. decli. } \Delta = & 69^{\circ}\ 15'\ 19'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{sen } D = & \text{sen } \Delta \text{ sen } \tfrac{1}{2} t \\ \text{sen } \Delta = & 9.970889 \\ \text{sen } \tfrac{1}{2} t = & 9.545843 \\ \hline \text{sen } \tfrac{1}{2} D = & 9.516732 \\ \tfrac{1}{2} D = & 19^{\circ}\ 11'\ 12''\ 50 \\ D = & 38^{\circ}\ 22'\ 25'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{cotg } y = & \cos \Delta \text{ tang } \tfrac{1}{2} t \\ \cos \Delta = & 9.549255 \\ \text{tang } \tfrac{1}{2} t = & 9.574468 \\ \hline \text{cotg } y = & 9.123723 \\ y = & 82^{\circ}\ 25'\ 35'' \end{array}$$

$$\text{sen } \lambda = \cos \tfrac{1}{2} u \sqrt{\text{sen } z \text{ sen } \Delta}$$

$$\begin{array}{rr}
\text{sen } \Delta = & 9.970889 \\
\text{sen } z = & 9.910113 \\
\hline
2) & 19.881002 \\
\hline
 & 9.840501 \\
\cos \tfrac{1}{2} u = & 9.953238 \\
\hline
\text{sen } \lambda = & 9.893739
\end{array}$$

$$\lambda = 51^\circ\, 31'\, 59''$$

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\text{sen } (p - z) \text{ sen } (p - D)}{\text{sen } z \text{ sen } D}}$$

$$\begin{array}{rlrr}
z' = & 26^\circ\, 47'\, 44'' & & \\
z = & 54^\circ\, 24'\, 06'' \ldots\ldots & \text{C. log. sen} = & 0.089886 \\
D = & 38^\circ\, 22\, 25'' \ldots\ldots & \text{C. log. sen} = & 0.207067 \\
\hline
2\,p = & 119^\circ\, 34'\, 15'' & & \\
p = & 59^\circ\, 47'\, 07'' & & \\
p - z = & 5^\circ\, 23'\, 01'' \ldots\ldots & \text{log. sen} = & 8.972319 \\
p - D = & 21^\circ\, 24'\, 42'' \ldots\ldots & \text{log. sen} = & 9.562372 \\
\hline
 & & 2\,) & 18.831638 \\
\hline
 & & \text{log. sen } \tfrac{1}{2} x = & 9.415819
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda = & 51^\circ\, 31'\, 59'' \\
\hline
2\,\lambda = & 103^\circ\, 03'\, 58'' \\
z = & 54^\circ\, 24'\, 06'' \\
\Delta = & 69^\circ\, 14'\, 33'' \\
\hline
2\,p = & 226^\circ\, 42'\, 37'' \\
\hline
p = & 113^\circ\, 21'\, 18''
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\tfrac{1}{2} x = & 15^\circ\, 06'\, 00'' \\
\hline
x = & 30^\circ\, 12'\, 00'' \\
y = & 82^\circ\, 25'\, 35'' \\
\hline
u = & 52^\circ\, 13'\, 35'' \\
\tfrac{1}{2} u = & 26^\circ\, 06'\, 47''
\end{array}$$

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} \varphi = \sqrt{\text{sen } p \text{ sen } (p - \lambda)}$$

$$p = 113^\circ\ 21'\ 18'' \ldots\ldots \qquad \log.\ \mathrm{sen}\ p = 9.962874$$

$$(p - 2\lambda) = 10^\circ\ 17'\ 20'' \ldots\ldots\ \log.\ \mathrm{sen}\,(p - 2\lambda) = 9.251909$$

$$2)\quad 19.214783$$

$$\log.\ \mathrm{sen}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi = 9.607391$$

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi = 23^\circ\ 53'\ 14''$$

$$\text{comp. lat. } \varphi = 47^\circ\ 46'\ 28''$$

$$\text{Latitud } \varphi = 42^\circ\ 13'\ 32''$$

El grupo de las fórmulas B está basado, en que se considera como isósceles el triángulo S P S ' á cuyo efecto se calcula la declinación para la hora correspondiente á la mitad del tiempo que ha transcurrido entre las dos observaciones; siendo $t$ la hora de la 1.ª observación y $\lambda$ el intérvalo entre las dos, la hora para la cual se calculará la declinación será: $T = t + \frac{1}{2}\lambda$

Ahora en el triángulo isósceles S P S' se tiene por la fórmula fundamental; $\cos D = \cos^2 \Delta + \mathrm{sen}^2 \Delta \cos t$ , restando ambos miembros de 1 se tendrá

$$1 - \cos^2 D = 1 - \cos^2 \Delta - \mathrm{sen}^2 \Delta \cos t$$

pero como $1 - \cos D = 2\,\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} D$ se deduce la fórmula $\mathrm{sen}\ \tfrac{1}{2} D = \mathrm{sen}\ \Delta\ \mathrm{sen}\ \tfrac{1}{2}\, t$ y luego de conocido $D = S S'$

$$\cot y = \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\, t \cos \Delta$$

El resto de la resolución es ya sencillo y fácil de deducir.

## *Aplicación de las fórmulas A*

*Ejemplo 10.* — En 11 de Marzo, en punto de: Latitud estima $+ 33^\circ\ 20$, se han observado las alturas de

*Arcturus* y α de Virgo con un cronómetro cuya marcha diurna es de - 10'', 32

Las horas y alturas ya corregidas son:

1ª observación á las 9h 40' 24'', 8 t. m... Arcturus h = 20° 44' 33''
2ª » » » 14 38' 17'' 30 t. m.. α Virgo h = 44° 59¡ 33''

para Arcturus

Asc. recl. $\alpha = 14^h\ 10'\ 57''\ 14$
declinación $\delta = +19°\ 43'\ 03'',70$

para α Virgo

Asc. recl. $\alpha' = 13^h\ 19'\ 44'',20$
decl. $\delta' = -10°\ 37'\ 22'',70$

$(\alpha' - \alpha) = 23^h\ 8'\ 47'',76$

tiempo cronóm. $t = 9^h\ 40'\ 24'',80$
» $t' = 14.\ 38\ 17.\ 30$
$t' - t = 4^h\ 57'\ 52'',50$
corr.... $+ 2'',10$
inter. tiem. med. $= 4^h\ 57'\ 54'',60$
corr... de la tabla $= +48'',90$
intérvalo Sidereo $= 4^h\ 58'\ 43'',50$

(24)
Interv. Sider. $= 4^h\ 58'\ 43'',50$
$-(\alpha'\ \alpha) = 23\ \ 8'\ 47'',76$
$t = 5^h\ 49'\ 55'',74$
$= 87°\ 28'\ 56'',10$

Cálculo de D

log sen $\delta$ = 9. 52813.... log cos $\delta$ = 9. 97376
log sen $\delta'$ = 9. 26563.n log cos $\delta'$ = 9. 99249
8. 79376.n log cos t = 8. 64275
8. 60900 8. 60900
log sust. 0. 18476 9. 72447
log cos D = 8. 33347
D = 91° 14' 15''

Cálculo de X

log cos $\delta$ = 9.97376
log sen t = 9.99958
log cosec D = 0.00010
log sen X = 9.97344
X = 70 9' 55'' (1°)

Cálculo de Y

log sen Z = 9. 54955 log tang Z' = 9. 99997
log sec Z' = 0. 15050 log cotg D = 8. 33358
log cosec D = 0. 00010 8. 33355
9. 70015 1. 38489
8. 33355 log cos Y = 9. 71844
log add. 1. 36660 Y = 58° 28' 19''

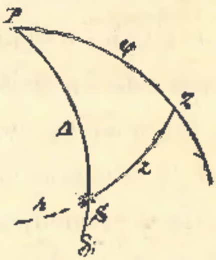
X = 70° 09' 55''
Y = 58° 28' 19''
U = 11° 41' 34''

Cálculo de t'

| | | |
|---|---|---|
| log sen Z' = 9. 84947 | log cos Z' = 9. 84950 | log cos Z' = 9. 84850 |
| log sen $\delta'$ = 9. 26563 | log cos $\delta'$ = 9. 99249 | log sen u = 9. 30679 |
| 9. 11510 | log cos u = 9. 99089 | log sec $\varphi$ = 0. 08310 |
| 0. 62545 | 9. 83288 | log sen t' = 9. 23461 |
| log sen $\varphi$ = 9. 74055 | 9. 11510 | t' = 9° 55' 38'' |
| $\varphi = +33^\circ\ 23'\ 00$ | log sust. 0. 71778 | = 0h 39' 31'', 90 |

**Por una altura y conocimiento del tiempo**

Este procedimiento se reduce á la resolución del triángulo de posición, pues que por la observación de la altura de un astro á un instante dado, por un cronómetro cuya marcha es conocida, se proporciona el conocimiento de



PS = $\Delta$ complemento declin., distancia polar
ZS = Z » de altura » zenital
SPZ = t ángulo horario
restando hallar PZ = colatitud.

Para la resolución de este triángulo conviene introducir el ángulo auxiliar $\alpha$ con lo que se facilitan los cálculos, pudiéndose emplear al efecto uno de los dos grupos siguientes de fórmulas.

$$\text{Grupo A} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang.} \alpha = \cos t \operatorname{tang.} \Delta \\ \cos(\varphi - \alpha) = \cos Z \cos \alpha \sec \Delta = \dfrac{\cos Z \cos \alpha}{\cos \Delta} \\ \varphi = (\varphi - \alpha) + \alpha \end{array} \right.$$

De la primera se tendrá el valor numérico de $\alpha$ menor que 90° con el signo de la tang. $\Delta$. La segunda ($\varphi - \alpha$ dará dos valores de signo contrario para la colatitud $\varphi$, tomándose el que más se aproxime á la latitud de estima.

El segundo grupo en el que se hace uso de los elementos directamente observados sea la altura $h$, horario $t$ y declinación $\delta$; son las siguientes fórmulas:

Grupo B
$$\left\{\begin{array}{l} \text{tang.}M = \text{tang.}\,\delta \sec t; \quad \text{ó sea;} \quad \text{tang.}M = \dfrac{\text{tang.}\,\delta}{\cos t} \\ \cos(\varphi - M) = \text{sen}\, h\, \text{sen}\, M \,\text{cosec}\,\delta = \dfrac{\text{sen}\, h\, \text{sen}\, M}{\text{sen}\,\delta} \\ \varphi = (\varphi - M) + M \end{array}\right.$$

Este procedimiento para obtener la latitud exige el conocimiento exacto de la hora verdadera de la observación, lo que muchas veces es difícil ó dudoso; por esta razón son preferibles los métodos anteriores. Por otra parte, es tan dificultoso tener el verdadero ángulo horario, que los resultados obtenidos por este método son tan defectuosos, que está en desuso.

El momento más favorable para aplicar este método es el de la mayor elongación del astro; para el Sol cuando éste se encuentra próximo al vertical primero.

Si se observa una altura del Sol á proximidad del meridiano, cuanto más á dos horas antes ó después, sean 30° para el ángulo horario, puede reducirse ésta á *altura* meridiana, por medio de la *reducción al meridiano* y se tendría

$$\cos Z = \text{sen}\, h + 2\,(\cos\varphi \cos\delta\, \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} t)$$
$$\varphi = \delta \pm Z$$

$Z$ = altura meridiana, $h$ = altura observada, el segundo término es la corrección al meridiano en el cual entra la latitud $\varphi$ de estima, de manera que con el resultado obtenido para $\varphi$ habrá que repetir el cálculo hasta una aproximación satisfactoria.

Si se hiciera la observación con una estrella cuya declinación es constante, el resultado será más satisfactorio y necesitará menos repeticiones.

También puede resolverse este problema aplicando las fórmulas generales de la trigonometría, conservando siempre la misma denominación de las lados.

ángulo P Z S = Z $\qquad \text{sen } Z = \dfrac{\text{sen } \Delta \text{ sen } t}{\text{sen } Z}$

ángulo P S Z = S $\qquad \text{cotg. } \frac{1}{2} S = \dfrac{\text{sen } \frac{1}{2}(\Delta + Z) \text{ tang. } \frac{1}{2}(t - Z)}{\text{sen } \frac{1}{2}(\Delta - Z)}$

lado P Z = $\varphi$, comp. latitud $\qquad \text{sen } \varphi = \dfrac{\text{sen } Z \text{ sen } S}{\text{sen } t}$

### *Aplicación de las fórmulas A*

*Ejemplo 11.*—

altura verdadera $\circledcirc = 22^\circ 26' 38''$ $\qquad$ declin. $= \delta = + \ 6^\circ \ 3' \ 21''$

distancia zenit $Z = 67^\circ 33, 22''$ $\qquad$ comp. $\delta = \Delta = + 96^\circ 03' 11''$

Ang. hor. $t = 302^\circ 38' 41'' = 57^\circ 21' 19''$ $\qquad$ Lat. estima $\varphi = - 30^\circ$

| | |
|---|---|
| $\cos t \ (57^\circ 21' 19'') = 9.73200$ | $\cos Z = (67^\circ 32' 22'') = 9.58182$ |
| $\text{tang. } \Delta \ (83^\circ 56' 49'') = 0.97475$ | $\cos \alpha \ (78^\circ 52' 42'') = 9.28532$ |
| $\text{tang. } \alpha = 0.70675$ | $\sec \Delta \ (83^\circ 56' 49'') = 0.97694$ |
| $\alpha = + 78^\circ 52' 42''$ | $\cos (\varphi - \alpha) = 9.84408$ |
| | $(\varphi - \alpha) = 45^\circ 42' 18'' +$ |

$$
\begin{array}{rr}
(\varphi - \alpha) = & + \ 45^\circ \ 42' \ 18'' \\
\alpha = & + \ 78^\circ \ 52' \ 42'' \\
\hline
 & 124^\circ \ 35' \ 00'' \\
 & - \ 90^\circ \\
\hline
\text{Latitud buscada } \varphi = & 34^\circ \ 35'
\end{array}
$$

## Aplicación fórmulas B.

*Ejemplo 12.—*

altur. verdad. ◎ = 22° 26' 38'' declinación $\delta = +6° 3' 11'$

ángulo horario t. = 302° 38' 41'' (57° 21' 19'')

log. tang. $\delta$ ( 6° 3') = 9. 02548    log. sen h (22° 26') = 9. 58181

log. sec t. (57° 21') = 0. 26807    log. sen M. = 9. 28532

log. tang. M. = 9. 29355    log. cosec $\delta$ = 0. 97694

M. = 11° 7' 18''    log. cost $\varphi$ — M. = 9. 84407

45° 42' 18''

M = + 11° 07' 18''

$\varphi$ — M = 45° 42' 18''

Latitud buscada $\varphi$ = 34° 35'

---

## Por reducción al Meridiano

*Ejemplo 13.—*

Lat. est. + 43°, long. estima 0.h 14' 21'' E. Paris

altura verdadera ◎ = h = 54° 53' 19'' hora t. m. local = 2h 08' 16''

t. m. local = 2.h 08' 16''

dif. long. = — 0. 14' 21''

t. m. Paris = 1.h 53' 55'' = 1.h 899

t. m. local = 2.h 08' 16''

Ecu. tiempo = + 3' 14''    declin. $\delta$ = + 21° 6' 24''

t. v. local = 2.h 11' 30''

t. = 32° 52' 30''

$\frac{1}{2}$ t. = 16° 26' 15''

alt. merid. calc. = Z. $\cos Z. = \operatorname{sen} h + 2 \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}$ t.

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. 2 | = 0. 3010300 | log. sen h | = 9. 9127724 |
| log. cos φ ( 43° ) | = 9. 8641275 | log. add. | — 0. 0544478 |
| log cos δ ( 216° ) | = 9. 9698479 | log. cos. Z | = 9. 9672202 |
| log. sen $^2 \frac{1}{2}$ (16° 26') | = 8. 9034784 | Z | = +21° 58' 56" |
| | = 9. 0384838 | | |
| | = 9. 9127724 | Z | = + 21° 58' 56" |
| Add. | = 0. 8742886 | δ | = + 21° 06' 24" |
| | | 1ª aproxi. de φ = | 43° 05' 20" |

repitiendo el cálculo con este nuevo valor de φ para obtener mayor aproximación se tiene

| | | |
|---|---|---|
| 2.ª aproximación ........ φ | = 43° 06' 47" 40 | |
| 3.ª ,, ........ ,, | = 43° 07' 11" 20 | |
| 4.ª ,, ........ ,, | = 43° 07' 17" 60 | |
| 5.ª ,, ........ ,, | = 43° 07' 19" 50 | |
| 6.ª ,, ........ ,, | = 43° 07' 20" 00 | definitiva |
| 7.ª ,, ........ ,, | = 43° 07' 20" | |

## Latitud por distancias zenitales de las estrellas circumpolares

Observando la altura de las circumpolares, como ser las estrellas de Hidra, de Centauro, de la Cruz, del Triángulo, etc., etc., que se hallan próximamente á 15° del polo, se obtienen resultados aceptables siempre que se conozca con exactitud la hora local.

Las fórmulas á emplear serán

$$\operatorname{tang.} \alpha = \cos t \operatorname{tang.} \Delta$$

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{\cos. z \cos. \varphi}{\cos. \Delta}$$

En las que se han conservado las mismas significaciones á los símbolos $t$, $\Delta$, $z$, $\varphi$.

Si la observación se hiciera con una estrella más próxima al polo, del que no se aparte más de 1.º 40' la fórmula más aplicable al caso sería

$$\varphi = z + \Delta \cos t - (\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 1'') (\Delta \operatorname{sen} t)^2 \operatorname{cotg.} z$$

Si el tiempo $t$ es mayor de 6 horas $= 90^{\circ}$ el coseno es negativo y el 2.º miembro es también negativo en valor absoluto.

El siguiente ejemplo dá una idea de la marcha á seguir para la resolución de ese poblema.

Día de observación, 7 Julio:

long. estima 35º 40' O París = 2 h 22' 40''
hora de la observación 10 h 52' 3'' t. m. local
dist. zenital de la estrella $\alpha$ ... z = 38º 35' 42''
dist. polar de la estrella $\Delta$ = 1º 19' 36''

Cálculo del ángulo horario.

| | |
|---|---|
| t. s. á las 12 en París..... | 7h 02' 20'' |
| corrección por 2h 22' 44''..... | + 23'' |
| t. s. local. á las 12h .... | 7h 02'. 43'' |
| t. m. de la observación | 10 52' 03'' |
| corr. por 10h 52' 3'' a t. s. | + 1' 47'' |
| hora local t. s..... | 17h 56' 33'' |
| ascen. recta. de la estrella — | 1º 15' 29'' |

Ang. horario de la estrella = 16º 41' 04'' = 250º 16'' 9' = $t$

$$\log. \Delta = 3.67909 \qquad \log. \tfrac{1}{2} \text{ sen } 1'' = 4.38454$$
$$\log. \cos. t = 9.52840 \qquad 2 \log. \Delta = 7.35818$$
$$\log. 2^o \text{ term.} = 3.20749 \qquad 2 \log. \text{ sen } t = 9.94745$$
$$= -1622.''9 \qquad \log. \text{ cotg. } z = 0.09792$$
$$= 26' 52'.5 \qquad \log. 3^{er} \text{ term.} = 1.78809$$
$$3^{er} - 61.'' 40$$

$$1^{er} \text{ término} = 38^o 35' 42''$$
$$2.^o \quad » \quad = -26' 52''$$
$$3.^o \quad » \quad = -1' 01''$$
$$\text{comp. lat.} = 38^o 07' 48''$$
$$\text{latitud} = 51^o 52' 12''$$

## DETERMINACION DEL AZIMUT Y MERIDIANOS

La determinación del meridiano de un lugar, es operación que con mucha frecuencia debe hacerse y para la cual existen muchos medios de operar.

Conocida la dirección de la meridiana, línea que pasa por los puntos Norte y Sud del horizonte, se deduce el *Azimut* de cualquier línea ú objeto, con sólo medir el ángulo formado por las dos direcciones; se cuenta del Norte hácia el Este, Sud y Oeste en el sentido de las agujas de un reloj y de 0° á 360.

El rumbo de una línea es el ángulo que hace con la meridiana, lo mismo que el Azimut, pero se cuenta ya del punto Norte, ya del Sud, hácia el Este ó el Oeste, sólo de 0 á 90 grados, con las notaciones de N x° E, S x° E S x° O, N x° O

La dirección de la meridiana puede determinarse en el terreno por varios métodos entre los cuales se consideran más rápidos y exactos: el de *Altura meridiana* y el de *Alturas correspondientes*, al que siempre se le da la preferencia.

La dirección de la meridiana por *altura meridiana*, se obtiene con las observaciones de cualquier astro al pasar por el meridiano, procediéndose como ya se ha expuesto en los capítulos anteriores; pero para obtener una determinación satisfactoria hay que repetir la operación varias veces, lo que se consigue fácilmente en una noche observando sucesivamente al paso de varias estrellas.

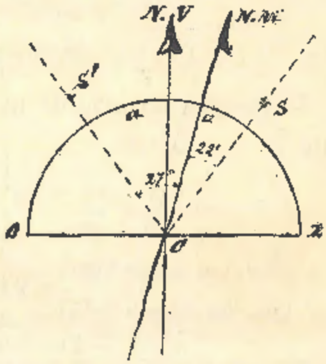
### Por alturas correspondientes

La observación en sí, se ha detallado en los capítulos anteriores particularizándose en la anotación de los ángulos horizontales que hace el astro antes y después de pasar por el meridiano, (1.ª y 2.ª observación) con un mismo objeto ó dirección que puede ser la del Norte magnético del instrumento.

Terminada la serie de observaciones, esto es, una vez conocidos los ángulos azimutales formados al Este y al Oeste del punto tomado por origen de ellos, en el instante de tener el astro igual altura en las dos situaciones; basta tomar el promedio de esos ángulos para tener la verdadera dirección de la línea meridiana y por lo tanto, conocer la cantidad angular de que debe corregirse la primitiva dirección al punto origen, para situarlo en la dirección buscada.

| alt.s obser.s | hora | áng. al Este | hora | áng. al Oeste |
|---|---|---|---|---|
| 52° 32' | 9h 22' | 22° 14' | 2h 55' | 332° 28' = 27° 32' |
| 52° 34' | 9h 25' | 22° 10' | 2h 52' | 27° 28' |
| 52° 36' | 9h 28' | 22° 06' | 2h 49' | 27° 24' |
| 52° 38' | 9h 32' | 21° 01' | 2h 45' | 27° 19' |
| | | Suma 88° 31' | | 109° 43' |
| | | promedio = 22° 07' 45'' | | promedio = 27° 25' 45'' |

Angulo al N. Este = 22° 07' 45''
» al N. Oeste = 27° 25' 45''
49° 33' 30''
promedio = 24° 46' 45''
1ª observación = 22° 14'
cor. hacia al Oeste = 2° 32' 45''




Si el astro observado es el sol, debe tenerse en cuenta el semidiámetro y la variación de la declinación en el intérvalo de tiempo $(t - t')$ y para ello debe aplicarse la siguiente corrección al término medio de las alturas.

A = ángulo al Este azimut — promedio de las observaciones.

A' = ángulo al Oeste azimut — promedio de las observaciones.

$\delta$ = declinación del sol á medio día y $\Delta\,\delta$ = el aumento proporcional á 1 hora por el intérvalo transcurrido entre las dos observaciones:

horario $t = \frac{T_, - T}{2}$ = mitad del tiempo transcurrido.

$$(A' - A) = \frac{\delta' - \delta}{\cos\varphi \operatorname{sen} t} = \frac{\Delta\,\delta}{\cos\varphi \operatorname{sen} t}$$

*Ejemplo.* — Latitud $\varphi = 34^\circ 35'$, long $\omega = 4^h 27'$ Oeste París; día 12 de Febrero, se observaron los ángulos azimutales del Sol antes y después del meridiano, en la forma siguiente:

1.ª observación a. m. $10^h 43' 29''$ áng. azimutal $A = 94^\circ 24' 28''$ al Este
2.ª » p.m. $2^h 40' 23''$ » » $A' = 301^\circ\ 5' 30''$ al Oeste

$$\tfrac{1}{2}\, t = 1^h 58' 27'' = 29^\circ 36' 50'' \qquad (58^\circ 54' 30''$$

$$t - t = 3^h 56' 54'' = 3^h 9485$$

Variación horaria de la declinación según efemérides, día 12 $= + 50''\ 40$.

$$\Delta\,\delta\ 3^h, 9485 \times 50'', 40 = + 3'\ 19'' = 199''$$

$$\log. \Delta\,\delta = 199'' = 2.2989$$
$$\left.\begin{matrix}\log. \cos \varphi = 9.9156 \\ \log. \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\, t = 9.6939\end{matrix}\right\} = 9.6095$$
$$\log. (A' - A) = 2.6894$$
$$\text{cor. } (A' - A = 489,''\ 10 = 8'\ 9''\ 10$$

$$\text{intér. } (A' - A) = 153^\circ 18' 58''$$
$$\text{corr. } \left(\frac{A' - A}{2}\right) = -\quad 4'\ 4''\ 60$$
$$\text{doble azimut} = 153^\circ 14' 53''\ 40$$
$$\text{dirección mer.} = 76^\circ 37' 26''\ 70$$

$$1.^{\text{a}}\ \text{Observación} = 94^\circ 24' 28''$$
$$\text{Meridiano verd.} = 76^\circ 37' 26''\ 70$$
$$\text{corrección} = 17^\circ 47' 02''\ 30 \text{ al Oeste}$$

*Ejemplo* 2.°—Latitud $\varphi = - 32^\circ 53'$ día 2 de Agosto.

1.° Promedios observados á las $9^h 43' 50''$ de la mañana
2.° » » » » $2^h 57' 30''$ » » tarde

$$\text{intérvalo } (T' - T)\ 5^h 13' 40'' - 5^h 228$$
$$\text{medio intérvalo} = t = 2^h 36' 50'' = 39^\circ 15'$$
$$\text{incremento horario declinación; } \delta' \Delta = - 39''\ 83$$
$$\text{corrección } \delta\,\Delta = 5^h 223 \times - 39''\ 83 = 208''\ 33$$

$$\log. 208, 33 \ldots\ldots\ 2.31973$$
$$\left.\begin{matrix}\log. \cos \Delta = 9.92416 \\ \log. \operatorname{sen} t = 9.80120\end{matrix}\right\} - 9.72536$$
$$2.59437$$
$$\text{corr.} = - 393''\ 00$$
$$= - 6'\ 33''$$

1.ª Observación Azimut Magn. ☉ = 29° 11′ 20″ al Este
2.ª » » » ☉ = 56° 03′ 40″ al Oeste

(A′ — A) = 85° 15′ 00″
— ½ corrección = + 03′ 15″ 15

ángulo doble = 85° 18′ 15″ 15

Azimut verdadero = 42° 39′ 07″ 57
1er. Azimut Magn. = 29° 11′ 20″

Variación Magn. = 13° 27′ 47″ 57

Es siempre preferible hacer uso de la observación de estrellas, en cuyo caso el resultado es siempre exacto.

**Por la mayor elongación de una Estrella.**

El ejemplo de las estrellas circumpolares para la determinación del meridiano de un punto, proporciona el método más exacto ó por lo menos, que se presta á mayores verificaciones.

Estas estrellas, pueden ser observadas á su paso por el meridiano y en el momento de su *mayor elongación* (cuando más apartado se encuentra del meridiano hacia el Este ú el Oeste, sea cuando pasan por el vertical primero).

La hora en que se efectúan éstos pasos se encuentra indicada en el Anuario del Observatorio de La Plata y puede también obtenerse por la fórmula que da el ángulo horario sidereo.

$$\cos t. = \frac{\text{tang. } \varphi}{\text{tang. } \delta}$$

en función de la latitud del lugar y de la declinación de la estrella.

Observado el instante de la mayor elongación de la estrella y, anotada la lectura azimutal magnética ó referida á un punto determinado, se calculará el azimut verdadero de la estrella por la fórmula

$$\text{sen A.} = \frac{\cos.\ \delta}{\cos.\ \varphi}$$

en función de la declinación del astro y Latitud local.

Con ese resultado se obtendrá la dirección del meridiano, y la variación magnética ó azimut del punto determinado.

Como verificación puede luego observarse el paso de la misma estrella ú otra por el meridiano así determinado pudiéndose hacer todas éstas observaciones con la mayor exactitud empleándose un teodolito.

Se reconoce el instante de la mayor elongación, cuando al seguirse, con los hilos del retículo, los dos movimientos ascensional y azimutal, se nota la suspensión de éste en un sentido para empezarlo nuevamente en sentido inverso. Es el instante en que esa estrella más se aparta hacia el Este ó el Oeste.

En la observación del paso por el meridiano fácil será notar el instante en que cesa el movimiento ascensional del astro para emprender el descenso, entonces pasará por el meridiano.

Cuando se note el paso de la estrella por el meridiano el anteojo se encontrará en ese plano y podrá fijarse un jalón en su disección.

Una serie de observaciones proporcionarán la disección verdadera del meridiano.

*Ejemplo.*—Día 7 de Agosto 1898. Lat. $= -32^o\ 53'$ Longitud $\omega. = 0.^h\ 41'\ 34''$ O. la Plata.

Estrella observada $\beta$ de Centauro

Asc. rect. $\alpha = 13^h\ 56'\ 40''$ hor. sid. á 0. h La Plata $= 9^h\ 04'\ 45'', 20$

decl. $\delta = 59^o\ 52'\ 42''$ dif. long. $\omega$. t. s. $-$ $7''$

t. s. local. $\theta^o = 9^h\ 04'\ 38'', 20$

| hora | alt. h. | Azim. M. |
|---|---|---|
| $9^h\ 16'\ 30''$ | $39^o\ 56'$ | $201^o\ 40'$ |
| 9 20 30 | 39 25 | 201 41 |
| 9 23 20 | 39 01 | 201 41 |
| — | — | — |
| 9 25 30 | 38 46 | 201 41 |
| 28 30 | 38 24 | 201 41 |
| 32 30 | 37 54 | 201 40 |
| 36 30 | 37 23 | 201 39 |

$$\text{sen } h = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \delta}$$

$\varphi = 32^o\ 53'$ ..... long sen $= 9.73474$

$\delta = 59^o\ 52'\ 42''$ ...long sen $= 9.93695$

long sen h $= 9.79779$

$h = 38^o\ 53'$

$$\text{Sen A} = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$$

$\delta = 59^o\ 52'\ 42''$ long. cos $= 9.70056$

$\varphi = 32\ \ 53$ long. cos $-\ 9.92416$

log. sen A $= 9.77640$

$A = 36^o\ 41'\ 50''$

long. tang. $\varphi = 9.81058$

long. tang. $\delta = 0.23648$

long. cos $t = 9.57416$

$= 67^o\ 58'\ \ 7''$

$= 4^h\ \ 32'\ 52''$

$+ \alpha = 13\ \ 56\ \ 40$

$18\ \ 29'\ 32''$

$\theta^o = 9\ \ \ 4\ \ 38$

t. s. $9\ \ 24\ \ 54$

corr. $0\ \ 32$

t. m. $9\ \ 22\ \ 22$

A. desde S $= 36^o\ 41'\ 50''$

180

$216.\ 41'\ 50''$

Az. obser. $201.\ 41'$

Var. Magn. $= 15^o\ 00'\ 50''$

**Por la altura de un astro**

Hecha una observación de altura de un astro cualquiera, de declinación conocida, se obtienen los elementos del triángulo de posición P Z S de cuya resolución se deducirá el ángulo azimutal P Z S.

Para la resolución puede emplearse una de las dos fórmulas siguientes:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen } (s - l) \text{ sen } (s - z)}{\text{sen } s. \text{ sen } (s - \Delta)}} \quad (1)$$

en la cual figuran los complementos de latitud $l$, de altura $z$ y de declinación $\Delta$, teniéndose:

$$S = \frac{l + z + \Delta}{2}$$

La otra fórmula llamada de *Borda* es:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos p \cos (p - \Delta)}{\cos \varphi \cos h}} \quad (2)$$

en la que $p = \frac{h + \Delta + \varphi}{2}$ entrando la altura observada, la latitud y complemento declinación que será $\Delta = 90 + \delta$ si la latitud es del mismo signo que $\delta$ y $\Delta = 90 + \delta$ si $\varphi$ es de signo contrario á $\delta$.

También puede resolverse el problema empleando la siguiente fórmula deducida de la fundamental y calculable por los logaritmos de adición y sustracción.

$$\cos A = \text{tang } h \text{ tang } \varphi - \text{sen } \delta \sec h \sec \varphi \quad (3)$$

Las condiciones más favorables para esta observación es cuando el astro se encuentra próximo al vertical primero ó bien en el caso de una mayor elongación.

*Ejemplo.* Día 4 Marzo. Latitud $= + 18^\circ 30'$, long. $\omega =$ $- 2^h 13' 18''$ O. París alt. verd. sol $= 39^\circ 20' 23''$, hora obser. $3^h 11'$ t. m. local. hora reducida á París $= 0^\circ 57' 42''$, declinación $= -$ $6^\circ 6' 47''$, como la latitud es $+$ y la declinación $-$, resulta para $\Delta = 90 + \delta = 96^\circ 6' 47''$

Empleo de la fórmula 1:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Latitud} = 18^\circ 30' & l = & 71^\circ 30' \\
\text{altura} \ = 39^\circ 20' 23'' & z = & 50^\circ 39' 37'' \\
\text{declin.} \ = 6^\circ \ 6' 47'' & \Delta = & 96^\circ \ 6' 46'' \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
2\,S = & 218^\circ 16' 23'' & \\
S = & 109^\circ \ 8' 11''.50 \ldots\ldots & \text{C log sen} = 0.02469 \\
S - \Delta = & 13^\circ \ 1' 25''.50 \ldots\ldots & \text{C log sen} = 0.64714 \\
S - l = & 37^\circ 38' 11''.30 \ldots\ldots & \text{log sen} = 9.78579 \\
S - Z = & 58^\circ 28' 34'' \ \ldots\ldots & \text{log sen} = 9.93066 \\
 & & \overline{0.38828} \\
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}$ A $= 114^\circ 47' 58''$ desde el N. log tang $\frac{1}{2}$ A $= 0.19414$

$65^\circ 12' \ 1''$ desde el S. $\frac{1}{2}$ A $= 57^\circ 23' 59''$

Empleo de la fórmula 2:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Latitud} = & 18^\circ 30' & \\
\text{altura} = & 39^\circ 20' 23'' & \\
\text{declin.} = & 96^\circ \ 6' 47'' \ \ 4 & \\
2\,S = & 153^\circ 57' 10'' \ \ 4 & \\
S = & 76^\circ 28' 35'' 20 \ldots\ldots & \text{C log cos} = 0.64714 \\
S - \varphi = & 58^\circ 28' 35'' 20 \ldots\ldots & \text{log sen} = 9.93065 \\
S - h = & 37^\circ 38' 12'' 20 \ldots\ldots & \text{log sen} = 9.78579 \\
S - \Delta = & 19^\circ \ 8' 12'' 20 \ldots\ldots & \text{C log cos} = 0.02469 \\
 & & \overline{0.38827} \\
 & & \text{log tang } \tfrac{1}{2} \text{ A} = 0.19413 \\
\end{array}
$$

A $= 140^\circ 47' 58''$ $\frac{1}{2}$ A $= 57^\circ 23' 59''$

$$S = 76^\circ\ 28'\ 35'' \ldots\ldots \log\cos = \ldots\ldots 9.35286$$

$$S - \Delta = 19^\circ\ \ 8'\ 12'' \ldots\ldots \log\cos = \ldots\ldots 9.97534$$

$$\varphi = 18^\circ\ 30'\ 00'' \ldots\ldots C\log\cos = \ldots\ldots 0.02304$$

$$h = 39^\circ\ 20'\ 23'' \ldots\ldots C\log\cos = \ldots\ldots 0.11151$$

$$9.46275$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = 9.73135$$

$$\tfrac{1}{2}A = 57^\circ\ 23'\ 59''$$

lo mismo es $S - \Delta$ que $\Delta - S$ pues $\cos(S - \Delta) = \cos(\Delta - S)$

Empleo de la fórmula 3:

$$\log\tan g\, h = 39^\circ\ 20'\ 23'' = 9.9136379$$

$$\log\tan g\, \varphi = 18^\circ\ 30' = 9.5245198$$

$$9.4381477$$

$$9.1619580$$

$$\text{add.} = 0.2761897$$

$$\log\operatorname{sen}\delta = \ 6^\circ\ \ 6'\ 47'' = 9.0273193$$

$$\log\sec h = 39^\circ\ 20'\ 23'' = 0.1115953$$

$$\log\sec\varphi = 18^\circ\ 30' = 0.0230434$$

$$9.1619580$$

$$\text{Argu.} = 0.4607199$$

$$\log\cos A = 9.6226779$$

$$A = 65^\circ\ 12'\ 01''$$

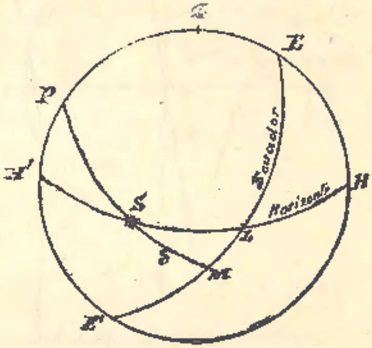
$$180^\circ - 65^\circ\ 11'\ 01'' = 114^\circ\ 47'\ 59''$$

## Por la Amplitud del Sol

Se obtiene observando el sol cuando se halla sobre el horizonte ya al salir ó al ponerse (el instante indicado es cuando tiene aun sobre el horizonte las $\frac{2}{3}$ partes de su disco).

Para hacer la observación se mide el ángulo horizontal ó azimutal que hace el sol en ese instante, ya con la meridiana magnética, ya con un objeto cualquiera cuyo azimut quiere determinarse.

Examinando la figura en la cual el sol se encuentra sobre el horizonte H H', se halla formado el triángulo rectángulo L M S, en el cual M S = declinación del astro conocido, así como el ángulo S L M = E L H que es el complemento de latitud del observador; con estos dos elementos y el ángulo recto, fácil es hallar el lado S L, que justamente es la amplitud.

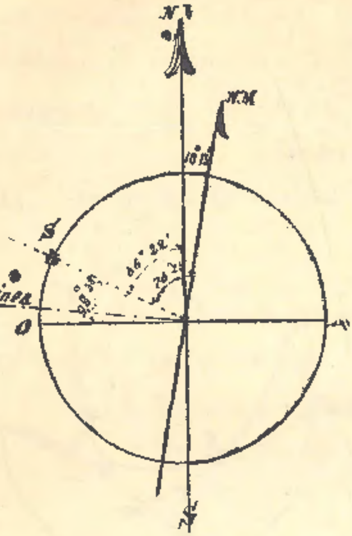



Se tiene pues:

$$\text{sen } L\,S = \frac{\text{sen } S\,M}{\text{sen } S\,L\,M} = \frac{\text{sen } \delta}{\cos \varphi}$$

*Ejemplo.*—22 de Julio. Se observa, hácia las 5 de la tarde, al ponerse el sol, una amplitud al N. 76° 35' O. magnético, y el rumbo de una línea al N. 88° 42' O. La latitud de estima es = 30° 50'. Se pide la amplitud verdadera y azimut de la línea.

Hallada la hora reducida y así la declinación correspondiente al instante de la observación sea $\delta = 20° 08'$, se tiene:




log sen $\delta$ = 20° 8' = 9.53682
log cos $\varphi$ = 30° 50' = 9.93382

log sen amplitud = 9.60300
Amplitud A = 23° 38'

Rumbo O. N. 76° 22 O.
Id. magnético N. 16° 35 O.

Variación mg. N. 10° 13 E.

Rumbo m. de la línea N. 88° 42 O.
Rumbos del Sol N. 76° 35 O.

ang. del sol á la línea N. 12° 7 O.
Rumbo verd del Sol N. 66° 22 O.

Rumbo de la línea N 78° 29 O.

También podría decirse:

Rumbo de la línea N. 88° 42 O.
Variación magnética 10° 13

Rumbo verd. línea = N. 78° 29 O.

*Ejemplo.*—10 Octubre 1897. Lat. Sud = – 56° 30' Long. 156° 20' Oeste de Greenwich, á eso de las 6ʰ 40' se relevó el Sol al ponerse á: S. 63°

| | | | |
|---|---|---|---|
| t. obser. = | 6ʰ 40' | declin á 0ʰ del dia 11 = | – 7° 13' 51'' |
| dif long = | + 10ʰ 25' 20'' | corr pr 56'', 5 × 6ʰ 90' – | 06' 30'' |
| t. m. Gr. = | 17ʰ 05' 20'' | decli. busc. $\delta$ = | – 7° 07' 21'' |
| compl á 24ʰ = | 6ʰ 90' | | |
| log sen $\delta$ = 7° 7' 21'' = | 9.09304 | ampl verd | O 12° 58 S |
| log cos $\varphi$ = 56° 30' = | 9.74189 | ampl mang = | O 27° 00' S |
| log sen Am = | 9.35115 | var mag | N 14° 02' E |
| Am = | 12° 58' | | |

**Cálculos del Azimut por alturas y Azimut magnético**

## Promedio de 5 observaciones:

alt ☉...27° 9' 30'' ; hora...$3^h$ 10' 46'' 5 P M azim. mag. 286° día 18 Abril

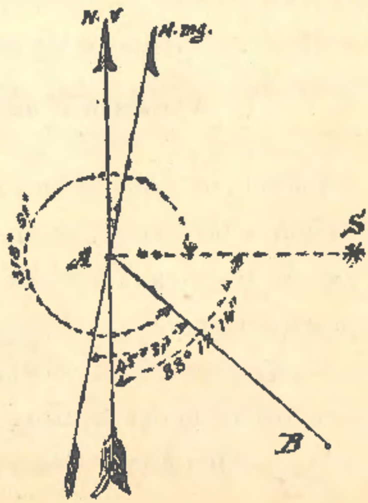
alt obs ☉ 27° 09' 30''
− (R − p) — 01' 46''
alt corr 27° 07' 44''

decl N ☉ = 11° 03' 59''
corr $8^h$ = + 02' 44''
11° 06' 43''
dis polar + 90°
101° 06' 43''

hora obser $3^h$ 10' 46'',50
atraso reloj + 26' 00''
dif de long + $4^h$ 20' 00''
hora en Greenwich $7^h$ 56' 46'',50

dist polar 101° 06' 43''
alt ☉ 27° 07' 44'' ... comp art de log cos = 0.050614
Lat 22° 12' 06'' ... comp art de log cos = 0.038454
Suma 150° 26' 33''
½ S + 74° 13' 16'' ... comp art de log cos = 9.406700
(Dip − ½ S) = 26° 53' 17'' ... comp art de log cos = 9.950298
19.441056

log seng ½ ang..... = 9.720528
½ sen ang..... = 31° 42'
azimut..... = 63° 24'
360° 00'
ang obser..... 286° 00'
74° 00'
azimut..... 63° 24'
varia..... 10° 36'




## Hallar el azimut de una línea A B; el día 1.° Abril 1894

Lat de estima = 34° 36' 38''
comp latitud = 55° 23' 30''
Long estim = 62° 2' 40'' O. de París
Long en h. = 4° 8' 10''

| Horas | alt ◎ | ángulo con línea |
|---|---|---|
| 7° 20' 12'' | A M — 20° 50' 40'' | 319° 16' 00'' |
| 7° 22' 36'' | 21° 20' 00'' | 318° 57' 20'' |
| 7° 24' 23'' | 21° 41' 40'' | 318° 41' 00'' |
| 7° 25' 50'' | 22° 00' 00'' | 318° 30' 00'' |
| 29° 33' 01'' | 85° 53' 20'' | 1275° 24' 20'' |
| 7° 23' 15'' | 21° 28' 20'' | 318° 51' 00'' |

alt $\overline{◎}$ = 21° 28' 20''
— (R + p) 2' 17''
21° 26' 03''
sem. dian. 16' 14''
alt ◎ 21° 09' 49''
cop alt = 68° 50' 11'' = h

Declin. día 1.° Abril
13° 11' 09''
var p 4h 8' — 0' 24''
13° 10' 45''
comp $\delta$ = 76° 49' 15''

hora reducida
observada 7° 23' 15''
dif long 4° 08' 11''
hora París 11° 31' 26'' A M
del día 1.°

C. h = z = 68° 50' 11''
C $\delta = \Delta$ = 76° 49' 15'
C $\varphi$ = l = 55° 23' 30''
2 p = 201° 02' 58'
p = 100° 01' 28'

log (p — $\Delta$) = 23° 42' 13''
log p — z = 31° 41' 17''
log (p — l) = 45° 07' 48''
log p = 100° 01' 28''

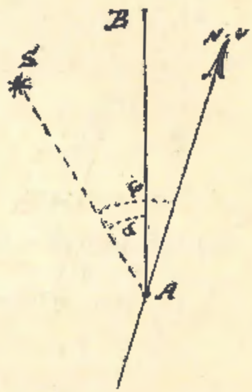
log tang $\frac{A}{2}$ = 44° 08' 37''
ángulo A = 88° 17' 14'

ángulo observado ◎
con línea A B = 318° 51'
comp = 41° 09'
azim verd = 88° 17'
áng línea = 41° 09'
azim línea = 47° 08'
azim mag = 35° 56'
declin mag = 11° 12' N E

## Variación ó declinación magnética

En toda mensura debe expresarse el rumbo verdadero de todas las líneas, á cuyo efecto hay que observar el ángulo que dicha línea forma con el meridiano en el punto de arranque.

La observación de ese ángulo ó rumbo puede efectuarse después de fijada la dirección del meridiano verdadero; pero también puede obtenerse: ya deduciendo de observaciones la variación magnética de la brújula con la que se opera, ya tomando el ángulo que dicha línea forme con el sol, observándose simultáneamente la altura del astro. En este caso la operación se reduce á calcular el azimut del sol para ese instante y con él deducir el de la línea.




Sea A B una línea establecida en el terreno y S el sol; si se toma la altura del astro á tal hora, así como el ángulo $\alpha$ formado por el sol y el punto B, y conociéndose la latitud y longitud de estima del punto A para deducir el valor de la declinación, se hallará por resolución del triángulo P Z A, el valor del azimut A y por deducción el rumbo de A B será A — $\alpha$.

Si la observación del sol se hace en su paso por el meridiano, habiendo préviamente puesto en cero el nonius del limbo horizontal del teodolito, en el momento de la observación, el eje del instrumento se hallará en el plano del meridiano y en este estado, todos los ángulos que se midan horizontalmente serán relacionados con el Norte verdadero.

Para nosotros la variación es siempre del Norte verdadero hacia el Este, esto es N. 10° 30' E.

*Hallar el Azimut de una línea*—En el Partido del Pilar á 15 de Junio de 1894 se observó

altura ☉ h = 19° 56', hora $9^h$ 20 (a. m.)
Latitud estimada = 35° 19' E. Longitud estimada $3^h$ 55' O. de G.


Angulo de la línea con el Sol, B A S = 242° 20'
delinación del Sol para ese día y hora
de observación

$\delta = + 23^\circ\ 20'\ 07''$ (N.)

co. decl. $\Delta = + \delta + 90 = 113^\circ\ 20'\ 07''$

alt. observ. $\odot = 19^\circ\ 56'$

Refr. — paral. $= -\quad 1'\ 40''$

$19^\circ\ 54'\ 20''$

Semi diám. $= + 15'\ 47''$

alt. verdad. $\odot = 20^\circ\ 10'\ 07''$

dist. zenit $Z = 69^\circ\ 49'\ 43''$

distancia polar $\Delta = 113^\circ\ 20'\ 07''$

co. latitud $l = 55^\circ\ 41'\ 00''$ ...... c. log. sen = 0.08306

co. altura $Z = 69^\circ\ 49'\ 53''$ ...... c. » sen = 0.02748

$2\ p = 238^\circ\ 51'\ 00''$

$p = 119^\circ\ 25'\ 30''$ ...... log. sen = 9.69122

$(p - \Delta) = 6^\circ\ 5'\ 23''$ ...... » sen = 9.02520

log. $\cos^2 \frac{A}{2}$ = 18 82696

log. $\cos \frac{A}{2}$ = 9.41348

$\frac{A}{2} = 74^\circ\ 59'$

$A = 149'\ 58'$

Azimut = 30° 02'

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 359° 60' | S A C = | 149° 58' |
| B A S = | 242° 20' | S A B = | 117° 40' |
| S A B = | 117° 40' | B A C = | S. 32° 18' E. |

## Determinación de la longitud

Siempre que se pueda determinar con bastante precisión la dirección del meridiano del punto de observación, será ésta la base más importante para la determinación de la longitud, por las observaciones que podrán hacerse del paso de astros ó del sol por dicho meridiano.

Como la diferencia de longitud representa la diferencia de horas entre dos puntos dados, se deduce de ahí que con un buen cronómetro que indique la hora de uno de ellos podrá hallarse la diferencia de su hora con la del segundo punto, deducida del paso de un astro por el meridiano ó por otro método.

Así pues, es de la mayor importancia, tener por lo menos un cronómetro cuya marcha sea bien conocida en las 24 horas.

Con él podrá obtenerse una primera diferencia de hora en el punto de observación y por nuevas observaciones llegar á un resultado satisfactorio.

### Determinación de la longitud por culminaciones lunares

El principio de este método consiste en observar directamente la ascensión recta de la luna por medio del anteojo meridiano, y calcular en seguida con las efemérides el tiempo medio correspondiente del primer meridiano, que por su combinación con el tiempo medio local de la observación dará á conocer la longitud.

Si en el mismo día, se hacen observaciones análogas en dos puntos diferentes siendo uno de ellos de posición determinada, la diferencia de horas siderales transcurrida entre los dos pasos por los meridianos respectivos, representa el arco de ascensión recta recorrida por la luna en ese tiempo.

Los almanaques náuticos (*La Connaissance des Temps*) dán el movimiento horario de la luna en ascensión recta con cuyos elementos podrá determinarse la diferencia de longitudes.

Como pocas veces se ofrece el caso de observaciones simultáneas en un observatorio y una estación indeterminada, es preciso adoptar las ascenciones rectas de la luna dadas en las Tablas.

Para mayor precisión en el resultado, se observa la diferencia de la ascensión recta entre la luna y varias estrellas de situación bien determinada, llamadas estrellas de culminación y dadas en las efemérides de la luna para cada día del año.

De estas observaciones se deducirá la verdadera ascensión recta de la luna al pasar por el meridiano del punto de observación.

Las tablas dan la longitud de los puntos por cuyos meridianos pasa la luna á cada hora, t. m. de París, así como los log. de las variaciones en A. R. y declinación por una variación de un minuto en longitud. Estas longitudes son dadas de $0^h$ á 24 y en el sentido del movimiento diurno. La ascensión deducida de la observación de la luna, por el meridiano caerá seguramente entre dos ascensiones dadas en las efemérides de la luna y por una interpolación se tendrá la longitud buscada.

*Ejemplo.*—En 13 Abril se ha observado el paso de la luna por el meridiano á $15^h\ 48'\ 13''$ ts.

En las efemérides de ese mes se vé que ésta ascensión recta de 15° 48' 13" corresponde á una observación hecha entre 3 y 4 horas tm. de París y que la duración del paso del diámetro de la luna por el meridiano es, á las $3^h$, de 1' 4".

La ascensión correspondiente al centro de la luna, será:

| | |
|---|---|
| Ascensión recta de la luna (limbo. O.)... | $15^h$ 48'13" |
| Duración del pasage del semi-diámetro | — 1'04" |
| Asc. Rec. aproximada del centro | = $15^h$ 47' 9" |

La Asc. Rec. ☾ á las $3^h$ = $15^h$ 46' 55".

Variación por 1' ese día es: 2", 04

y como la ascensión crece de 78" se tendrá para el tiempo aproximado de la observación:

$$3^h + \tfrac{1}{2}\left(1' \times \frac{78}{2.04}\right) = 3^h\ 38'\ 20''.$$

Con esta hora se determina la duración del pasage del semi-diámetro y la ascensión recta del centro de la luna en ese instante.

| | |
|---|---|
| Asc. recta ☾ (limbo O.)....... | $15^h$ 48' 13" 20 |
| Paso del semi-diámetro ....... | — 1' 5" 80 |
| Asc. recta del centro de la Luna.. | $15^h$ 47' 9" 40 |
| Efeméride para las $3^h$ ......... | $15^h$ 46' 54" 80 |
| diferencia.......... + | $0^h$ 0' 14" 60 |

Sumándose ésta diferencia dividida por la variación relativa á 1' de longitud, á la longitud de las efemérides $12^h$ 41' 51", 70 se tendrá la longitud buscada:

| | |
|---|---|
| log. dif. 14" 60........ | 1.16435 |
| log. variación á $3^h$ .... | 0.32319 |
| log. $\left(1' \times \frac{14''\ 60}{\text{variación}}\right)$ .. | 0.84116 |

Número correspondiente = 6'', 937.... 0h 6' 56'', 22
longitud á las 3 horas.............. 12h 41' 51'', 70
longitud pedida............... 12h 48' 47'', 92

**Determinación de la longitud por distancias lunares**

En las efemérides se encuentra para cada 3 horas t. m., la distancia entre el centro de la luna y el del sol, ó de los planetas ó de las estrellas, tal como vistas del centro de la tierra. A la par de esos datos se encuentra el logaritmo del intérvalo de 3 horas dividido por la variación media en 3 horas correspondiente á aquella distancia.

Así, pues, observada en cualquier punto la distancia entre la luna y el sol ó un astro, corregida esa observación de las diferencias correspondientes, basta buscar en las efemérides del día la distancia más próxima para ver entre qué horas se halla comprendida, de manera, que por una interpolación podrá deducirse la diferencia de horas ó longitud buscada.

Esta observación de distancia lunar es complicada, pero con el teodolito puede obtenerse un resultado satisfactorio, debiendo empezarse por medir la distancia entre los bordes de los astros y en seguida sus alturas respectivas, anotando al mismo tiempo la hora de cada observación.

*Ejemplo del cálculo.*—Reducción de la distancia observada á distancia verdadera: día 18 de Abril.

distancia ☉ ☾ = 83° 57' 34''
alt. apar. ☉ = 48° 27' 30''
alt. apar. ☾ = 27° 34' 00'' corregida = 28° 20' 27''

| | | | |
|---|---|---|---|
| distoncia apar. ◎ ☾ = | 83° 57' 30" | | |
| alt. apar. ☾ = | 27° 34' 00"... | comp log cos = | 0.0523345 |
| alt. apar. ◎ = | 48° 27' 30"... | de la tabla IX — | 0.0001200 |
| suma = | 159° 59' 00" | | |
| ½ suma = | 79° 59' 30"... | log. cos. = | 9.2400283 |
| distan. — ½ suma = | 3° 58' 00"... | log. cos. = | 9.9989584 |
| alt. verd. ☾ = | 28° 20' 27"... | log. cos. = | 9.9445514 |
| alt. verd. ◎ = | 48° 26' 39" | suma = | 9.2359926 |
| suma altura = | 76° 47' 06" | ½ suma = | 9.6179963 } 9.7238050 |
| ½ suma = | 38° 23' 33"... | log. cos. = | 9.8941913 } ang aux. |
| ang. auxiliar = | 31° 35' 00"... | log. cos. = | 9.9285723 |
| ½ distancia = | 41° 40' 00"... | log sen ½ dist = | 9.8227696 |
| doble verdadera = | 83° 21' 12" | | |

Buscando en la tabla para ese día, se encuentra:

á 18h .....83° 15' 35"

dist. obser.....83° 21' 12" $\quad \log.\frac{3h}{\text{dif.}} = 0\ 3116$

0° 05' 37" = 367", log = 2.5646

suma = 2.8792 = 752" = 12' 32"

hora apr en París....3h 00' 00"

verdadera diferencia de hora....3h 12' 32"

Como medio aproximativo de obtener una longitud de estima puede observarse una altura de la Luna y recordando que en la fórmula $x = \varphi'' + h'\varphi'$; en la cual $x$ es la hora observada:

$$\left.\begin{matrix}\alpha' \\ \alpha''\end{matrix}\right\}\ \text{la ascención recta} \left\{\begin{matrix}\text{sol} \\ \text{luna}\end{matrix}\right\}\ \text{para la hora reducida}$$

y $h'$ el horario de la luna, se tendrá:

$$\varphi'' = x + \varphi' - h' \qquad (2)$$

calculado el horario $h'$ de la luna para la altura observada:

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,h = \sqrt{\frac{\cos\delta\ \cos\,(S - z)}{\text{sen}\,\delta\ \cos l}}$$

en la que se expresan los elementos del triángulo de posición P Z A. Se hallará por la ecuación (2) la ascención recta correspondiente y buscando en las efemérides de la luna para ese mes, se hallará la hora en el observatorio de las tablas que le corresponde, y de ahí la longitud.

Sea el 4 de Noviembre:

altura ☾ corregida = 37° 51' Oriental

declinación + 16° 14' 19''

Latitud 35° 11' long estim = hora del cronómetro

com alt ☾ z = 52° 09'

com lat $l$ = 54° 49' ..... comp log cos = 0.08761

com declin S = 73° 46' ..... d° log sen = 0.01767

2 S = 180° 44'

S = 90° 44' ..... cos = 8.10717

( S − z ) = 38° 44' ..... cos = 9.89304

log sen ½ h² = 18.10549

h = 12° 58' log sen ½ h = 9.05274

= 0h 51' 36'' sen ½ h = 6° 29'

Cálculo de : $\varphi'' = \varphi' + x = h$

$\varphi'$ = Asc. rec. ◎ cor = 14h 41' 12''

x = tm 15h 27' 00'' dia 4

5h 08' 12'' dia 5

h' = 0h 51' 36''

$\alpha''$ Asc. rec. ☾ = 4h 16' 36''

En las efemerides la Asc. Rec. ☾ = 4h 16' 36'' corresponde á las 11h del meridiano de Paris, y como la hora de observación fué 6h 53m, la diferencia de hora entre ambos puntos será de 11h — 6h 53' = 4h 07'.

Existen á más otros medios para determinar la longitud de un punto, como, por ejemplo, el de los eclipses de los satélites de Júpiter, pero es complicado para hacer las observaciones correspondientes sin instrumentos adecuados y aun el resultado es tal vez más dudoso que muchos de los que quedan expuestos.

Los medios más exactos empleados hoy son: el de las ocultaciones de las estrellas por la luna y el empleo del telégrafo eléctrico.

El método de las ocultaciones de los estrellas, largamente detallado por el señor Beuf, Director del Observatorio de La Plata, consiste en observar el instante preciso de la inmersión ó emersión de una estrella conocida tras del disco de la luna, anotándose la hora exacta del punto de observación.

### Por ocultaciones de las estrellas

Observando la luna con un buen anteojo se la vé á menudo cerca de algunas estrellas que al poco rato oculta con su disco constituyendo una *ocultación*.

En las efemérides «La Conaissance des Temps» (C. des T.) y algunos otros almanaques náuticos, entre otros el del Observatorio de la Plata, éstas ocultaciones son previstas para todo el año y en las tablas se encuentran los elementos para los cálculos correspondientes. Partiendo del principio que una ocultación se asemeja á una señal luminosa instantánea que será observada simultáneamente del meridiano primero (el del almanaque) y del sitio del observador; luego conociéndose la hora de la primera y la hora exacta local, fácil es deducir la diferencia de horas y por lo tanto la longitud.

Para utilizar las efemérides, publicadas anualmente, de todas las estrellas de 1.ª á 6.ª magnitud que son ocultadas simultáneamente por la luna; la primera cosa es ver si los dos astros, el astro y la luna, serán visibles en la localidad de donde se quiere observar.

Para esto hay que ver: 1.° si el lugar está comprendido entre los límites de latitud inscripto en el catálogo; 2.° si el instante de la conjunción indicado en el almanaque corresponde á una hora de la noche; 3.° si la luna es visible para esa época.

El anuario de « La Plata » simplifica mucho los cálculos preliminares pues que en su catálogo sólo figuran las ocultaciones visibles en la Plata, con lo que será fácil suponer su visibilidad en cualquier punto de la República.

Con todo, conviene exponer el resúmen de los cálculos relativos á la predicción y cálculos definitivos según el método espiditivo de los señores Beuf y Perrin basado en la teoría general de Bessel; y haciendo sólo uso del anuario, C. des T.

*Predicción de la ocultación de $\alpha$ de Escorpión*

(Antarés), el 26 de Mayo 1896 para un punto A.

Elementos tomados de la C. des T.

$T_0$ Hora en París de la conjunción verdadera $13^h\,56'\,15''$

H. Angulo horario de la estrella en París.. $+\,28^\circ\,24'\,15''$

$\delta$ declinación de la estrella $-\,26^\circ\,12'\,19''$

p' variación horaria As. rec. luna por hora $+\,0.507$

$q_0$ diferencia en declinación Luna y Estrella $-\,0.384$

$q_1$ variación horaria de q.................. 0.090

Coordenadas local.

$$\text{latitud } \varphi = -\,34^\circ\,28'$$

$$\text{long. } \omega = \text{O. P.} = 60^\circ\ (+\,4^h)$$

*Cálculo preliminar*

$$H_0 = +\,28^\circ\,24'\,50''$$
$$\omega = -\,60^\circ$$
$$\text{horario local } h_0 = -\,31^\circ\,35'\,50''$$

**Cálculo de $u_0$ y la variación horaria $u'$**

$$u_0 = \cos\varphi \operatorname{sen} h_0 \qquad u' = K \cos h_0 \cos\varphi$$

$$\log.\ \text{constante } K = (\bar{1}.419) \text{ ó } (9.419)$$

| | |
|---|---|
| $\log.\cos\varphi = \bar{1}.916$ | $\log.\cos\varphi = \bar{1}.916$ |
| $\log.\operatorname{sen} h_0 = \bar{1}.719$ | $\log.\cos h_0 = \bar{1}.930$ |
| $\log.\ u_0 = \bar{1}.635$ neg. | $\log.\ K = \bar{1}.919$ |
| $u_0 = -\,0.432$ | $\log.\ u' = \bar{1}.285$ |
| | $u' = +\,0.189$ |

para el instante de la conjunción se tiene: $p = u$ ó sea $p_0 = o$, igualdad de las ascensiones rectas de la luna y la estrella.

Con esos elementos calcularemos:

$$x = -\frac{p_0 - u_0}{p' - u'} = -\frac{u_0}{p' - u'}$$

Como $p' - u'$, esencialmente positivo, se tendrá el mismo signo que *u*. x representa el tiempo en horas medias, que corre entre el momento de la conjunción verdadera $(T_0)$ y el de la conjunción aparente en el lugar, para convertirlo en arco se tiene $\log. x_0 = \log. x + 1.177$; luego con $x$ (en horas) y $x_0$ (en arco) se calculan

$$h_c = h_0 + x_0 \qquad q = q_0 + x\, q'$$

$$v = \operatorname{sen} \varphi \cos \delta - \cos \varphi \operatorname{sen} \delta \cos h_c$$

con la diferencia algebráica $(q - v)$ se ve si el valor absoluto de ella es inferior al radio K de la luna $= 0.273$.
$(q - v) < K$ para que la ocultación sea visible.

Este radio *K* corresponde al de la tierra $= 1$.

*u* y *v* son las coordenadas de la proyección del punto de observación, ó de la estrella en el plano que pasa por el centro de la tierra, perpendicular á la recta que une dicho centro á la estrella. Este plano de proyección es invariable: *p* y *q* son las coordenadas de la proyección del centro de la luna.

Haciendo los cálculos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log. u_0 =$ | $\bar{1}.635$ | $p' =$ | $+\ 0.597$ |
| $c. \log(p' - u') =$ | $0.384$ | $-u' =$ | $+\ 0.189$ |
| $\log. x =$ | $0.019 = (-1^h\ 045)$ | $(p' - u') =$ | $+\ 0.413$ |
| constante | $+\ 1.177$ | $\log(p' - u') =$ | $\bar{1}.616$ |
| $\log. x_0 =$ | $1.196$ | $c. \log(p' - u') =$ | $0.384$ |
| $x_0 =$ | $-\ 15^\circ\ 42'$ | | |

### *Cálculo de la hora de la conjunción aparente*

| | |
|---|---|
| $T_o$ (de Paris, conj. verdadera) = ....... | $13^h\,56'\,15''$ |
| $x = -\,1^h,045 =$ ....... | $-\,1^h\;3'$ |
| tiempo en Paris ....... | $12^h\,53'\,15''$ |
| Longitud aproximada. ...... | $-\,4$ |
| Hora local, conjunción aparente ....... | $8^h\,53'\,15''$ |

### *Cálculo de q. v. $h_c$.*

$$h_o = -\;31^\circ\,35'\,50''$$
$$x_o = -\;15^\circ\,42'\,00''$$
$$h_c = -\;47^\circ\,17'\,50''$$

$$\log.\ q' = (0.090) - \overline{2}.954$$
$$\log.\ x. - 0.019$$
$$\log.\ q'\,x. = + \overline{2}.973$$
$$q'\,x. = + 0.094$$
$$q_o - 0.384$$
$$q - 0.290$$

$$\log.\ \text{sen}\ \varphi = \overline{1}.753\ \text{neg.}$$
$$\log.\ \cos.\ \delta = \overline{1}.953$$
$$\log.\ (I) = \overline{1}.706\ \text{neg.}$$
$$(I) = 0.508$$

$$\log.\ \cos\ \varphi = \overline{1}.916$$
$$\log.\ \text{sen}\ \delta = \overline{1}.645\ \text{neg.}$$
$$\log.\ \cos\ h_c = \overline{1}.831$$
$$\log.\ II = \overline{1}.392\ \text{neg.}$$
$$(II) = -\,0.247$$

$$I = 0.508$$
$$-\,II = 0.257$$
$$v = 0.261$$

$$q = -\,0.290$$
$$-\,v = -\,0.261$$
$$(q - v) = -\,0.029 < 0.274$$

La ocultación es, pues, visible en el punto A pues que $(q - v)$ es menor que 0.274

*Cálculo definitivo*

Para calcular las horas de *inmersión* y *emersión* hay que completar el cálculo con una construcción gráfica.

Habrá, pues, que calcular varias coordenadas $(p-u)$, $(q-v)$, de modo de tenerlas $\frac{1}{2}$ hora ó una hora antes de la conjunción, por ejemplo:

| | |
|---|---|
| Siendo en Paris la hora T. = | $13^h\ 56'\ 15''$ |
| menos 1 hora | $1.\ 30'$ |
| nueva hora de Paris | $12^h\ 26'\ 15''$ |

anterior á la inmersión.

La segunda hora podría ser: $+\ 1^h = 13^h\ 26'\ 00''$.

Aplicando las mismas fórmulas anteriores

$$p' = -\ 0.597 \qquad q_0 = -\ 0.384$$
$$\frac{p'}{2} = -\ 0.299 \qquad -q' = +\ 0.090$$
$$\frac{q'}{2} = +\ 0.045 + 0.135$$
$$p_1 = -\ 0.896 \qquad q = -\ 0.249$$

Para formar el ángulo horario *t*,

| | |
|---|---|
| Una hora tiempo medio equivale á.. | $15^\circ\ 2'\ 18''$ |
| media hora..... | $7^\circ\ 31'\ 10''$ |
| 1 ½ hora. . | $-\ 22^\circ\ 33'\ 42''$ |
| á restar de $h_0$..... | $-\ 31^\circ\ 35'\ 30''$ |
| $h_1 \ldots =$ | $-\ 54^\circ\ 9'\ 12''$ |

$$u_1 = \cos\varphi \operatorname{sen} h_1$$

$$v_1 = \operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos h_1$$

$$\log.\ \cos\varphi = \bar{1}.916$$
$$\log.\ \operatorname{sen} h_1 = \bar{1}.909 \text{ neg.}$$
$$\log.\ u_1 = \bar{1}.825$$
$$u_1 = 0.668$$

$$p_1 = -\ 0.896$$
$$u_1 = -\ 0.668$$
$$p_1 - u_1 = -0.228$$

| | |
|---|---|
| $\log. \operatorname{sen} \varphi = \bar{1}.753$ neg. | $\log. \cos \varphi = \bar{1}.916$ |
| $\log. \cos \delta = \bar{1}.953$ | $\log. \operatorname{sen} \delta = \bar{1}.645$ neg. |
| $\log. (I) = \bar{1}.706$ | $\log. \cos h_1 = \bar{1}.768$ |
| $(I) = -0.508$ | $\log. (II) = \bar{1}.329$ neg |
| | $(II) = -0.213$ |

| | |
|---|---|
| $I = -0.508$ | $q_1 = -0.249$ |
| $II = -0.213$ | $-v_1 = -0.295$ |
| $v_1 = -0.295$ | $p_1 - q_1 = +0.046$ |

Para la segunda hora sea $13^h\,26'\,15''$ que corresponde á ½ hora antes de la hora de la conjunción se tendrá en este caso: $p_2 = \left(p_0 - \frac{p'}{2}\right) = -\frac{p'}{2} = 0 - 0.299$

$$q_2 = q_0 - \frac{q'}{2} = (-0.384 - 0.045) = -0.339$$

ángulo horario

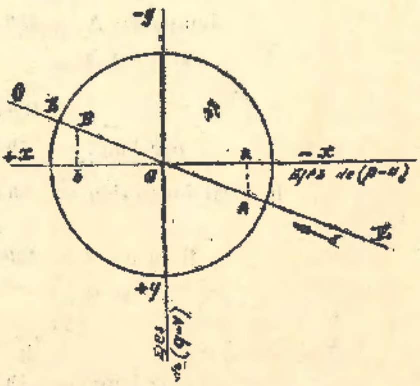
$$h_2 = h_0 - \text{media hora} = (-31^\circ\,35'\,30'' - 7^\circ\,31'\,14'') = h_2 = -39^\circ\,6'\,44''$$

$$\cos u_2 = \cos \varphi \operatorname{sen} h_2 \qquad v_2 = \operatorname{sen} \varphi \cos \delta - \cos \varphi \operatorname{sen} \delta \cos h_2$$

se obtiene $u_2 = -0.520 \qquad v_2 = -0.226$

$$(p_2 - u_2) = (-0.299 - 0.520) = +0.221$$

$$(q_2 - v_2) = (-0.339 - 0.226) = -0.113$$




A una escala cualquiera, sea $0.^m001 = 1$ centímetro, se describe un círculo con un radio de 27 centímetros sean á la escala 27 milímetros, éste, representa la luna en proporción al radio de la tierra adoptado por 100 y observando:

$(p_1 - u_1) = -0.0228$ (para $-x$)
$(q_1 - v_1) = +0.0046$ (para $+y$)
$(p^2 - u_2) = +0.0221$ (para $+x$)
$(q_2 - v_2) = -0.0113$ (para $-y$)

conj aparente
$p - u = +0.413$
$q - v = -0.029$

Se tiene

$O\,a = (p^1 - u^1)$ sean 22.8 m/m en 2º cte $-x$
$a\,A = (q_1 - v_1)$ sean 4.6 m/m en 3º cte $+y$
$O\,b = (p^2 - u^2)$ sean 22.1 m/m en 1º cte $+x$
$b\,B = (q^2 - v^2)$ sean 11.3 m/m en 1º cte $-y$

Trazando la línea A B se tiene la trayectoria de la estrella por el disco de la luna, pero hay que conocer la distancia A I y B E para saber el instante fijo de la inmersión y emersión; midiendo gráficamente.

A B = 1h = 60' = 47.50 m/m
A I = ............ 4.25 m/m
B E = ............ 3.50 m/m

$$A\,I = \frac{60 \times 4.25}{47.50} = 5',\ 22 \text{ antes de A}$$

$$B\,E = \frac{60 \times 3.50}{47.50} = 4',\ 34 \text{ después de A}$$

Luego corresponde al tiempo 1

tiempo en A = 12h 26' 15'' en París
» A I = 5' 22''
12h 20' 53''
por long. = 4h 00' 45''
h. local inmersión = 8h 20' 08''

hora en B = 13h 26' 15'' en París
» B E = 3' 47''
13h 30'' 02''
por long. = 4h 00' 45''
h. local emersión = 9h 29' 17''

### *Resúmen de las fórmulas*

De la C. des T. se saca:

$T_0$ hora de París para la conjunción verdadera
$H_0$ ángulo horario de la Estrella en París
$\delta$ declinación de la Estrella
$p'$ variación horaria de la Asc. recta de la Luna, por hora
$q_0$ dif. en declinación de la Luna y estrella
$q'$ variación horaria de $q^0$
$D$ = declinación de la Luna
$\Delta\,\delta$ = variación de la declinación
$h$ = horario local

$$h_0 = H_0 + \omega \quad ; \quad u_0 = \cos\varphi \operatorname{sen} h_0 \quad ; \quad u' = K \cos\varphi \cos h_0$$

$$\log. K = 9.419 \text{ ó } \bar{1}.419 \qquad x = \frac{-u_0}{p' - u'}$$

tiempo que trascurre entre la conjunción verdadera y la aparente en el lugar de observación para convertirle en arco

$$\log. x_0 = \log. x + 1.177 \; ; \; T_c = T_0 + x \; ; \; h_c = h_0 + x \; ; \; q' = q_0 + x\,q'$$

$$v = \operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos h_c$$

luego si $q - v > 0.274$ ocultación invisible
$q - v < 0.274$ ,, visible

### *Predición definitiva*

$T_n$ hora redonda más cercana de $T_0$
$h_n = h_0 + (T_n - T_0)$ en grados, ó $h_n = h_0 + (T_n - T_0)\,(1.177)$
$p_1 = p'(T_n - T_1)$ ; $q_1 = q_0 + q'(T_n - T_0)$
$u_1 = \cos\varphi \operatorname{sen} h_1$ ; $v_1 = \operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos h_n$

de igual manera se calcularán

$(p^2 - u_2)$ y $(q_2 - v_2)$ para la segunda hora $h_m$

También puede obtenerse el mismo resultado con éstas fórmulas

$$\text{tang. } N = \frac{p'}{q'}; \qquad n = p' \text{ cosec } \mathbf{N}\,; \qquad m' = \frac{1}{60} m \cos (M - N)$$

$$\text{tang. } M = \frac{p - u}{q - v}; \qquad m = (p - u) \text{ cosec } M; \qquad \log. \frac{1}{60} = 8.2219$$

$$\gamma = \frac{K - m}{m'}; \qquad \text{constante } K = 0.27264$$

$$\text{long. buscada } \omega_1 = \omega + \gamma \text{ en horas}$$

*Ejemplo.*—El 26 de Mayo 1896 en un punto cuya posición es latitud $= 37^{o}\ 48'\ 00''$ long. de estima $\omega = 73^{o}\ 20'$, se ha observado la inmersión de la estrella $\alpha$ de Escorpión (Antarés) á las $7^{h}\ 27'\ 5\ 77''$ tiempo medio ó sean $11^{h}\ 47'\ 18''\ 65$ tiempo sidereo.

Se pide la longitud exacta

$$\begin{aligned} \text{tiempo local } T' &= 7^{h}\ 27'\ \ 5''\ 77 \\ \text{dif. long. } \omega &= 4\ \ 53'\ 18''\ 23 \\ \hline T &= 12^{h}\ 20'\ 24'' \quad \text{en Paris el 26 de Mayo} \end{aligned}$$

Sacando los datos de la C. de T.

| Asc. Recta. | declinación |
|---|---|
| $\alpha = 16^{h}\ 18'\ 51''\ 45$ | $\delta = -26^{h}\ 26'\ 22''\ 4$ |
| $A = 16^{h}\ 23'\ \ 5''\ 21$ | $D = -26^{h}\ 12'\ 18''\ 7$ |
| $(\alpha - A) = -\ \ 0^{h}\ \ 4'\ 13''\ 76$ | $(\delta - D) = -\ \ 14'\ \ 3''\ 7$ |

ang. horario

$$\begin{aligned} \text{h sid } \theta &= 11^{h}\ 47'\ 18''\ 65 \\ -AR &= 16^{h}\ 23'\ \ 5''\ 21 \\ \hline t &= 19^{h}\ 24'\ 13''\ 44 \\ &= 291^{o}\ \ 3'\ 21''\ \ 6 \end{aligned}$$

$$
1 \begin{cases} p = \dfrac{(\alpha - A)\cos\delta}{\pi}\, a & \text{log a en las tablas} \\[2ex] q = \dfrac{(\delta - D)}{\pi}\, d + [5.5606]\, p \operatorname{sen} D\, (\alpha - A) & \text{log d en las tablas} \\[2ex] t = \theta - A \quad ; \quad \pi = \text{paralage ecuatorial luna.} \end{cases}
$$

| | |
|---|---|
| $\log(\alpha - A) = 2.40442$ neg | $\Delta\alpha = +\ 2''\,6459$ |
| $\log\cos\delta = 9.95202$ | $\Delta\delta = -\ 5''\,645$ |
| $c\log\pi = 6.44697$ | $\pi = 59^h\ 53''$ |
| $\log a = 1.17609$ | |
| $\log p = 9.97950$ neg | $\log$ const $= 5.5606$ |
| $p = 0.95390$ | $\log p = 9.9795$ |
| $\log(\delta - D) = 2.92619$ neg | $\log\alpha - A = 2.4644$ neg |
| $c\log\pi = 6.44697$ | $\log \operatorname{sen}\Delta = 9.6450$ neg |
| $\log d = +0.00002$ | $\log II = 7.5895$ neg |
| $\log I = 9.37318$ neg | |
| $I = -0.23616$ | tab. $\log = 0.0005580$ |
| $II = -0.00369$ | producto $= 0.0002148$ |
| $q = -0.24005$ | $\log Ng = 0.00077$ |

$u = Ng \cos\varphi \operatorname{sen} t$ Ng dado por las tablas

$v = Ng\,(1 - e^2) \operatorname{sen}\varphi \cos D - Ng \cos\varphi \operatorname{sen} D \cos t$

log constante $(1 - e^2) = 9.99702$

| | |
|---|---|
| $\log Ng = 0.00077$ | |
| $\log\cos\varphi = 9.89848$ | $\log Ng = 0.00077$ |
| $\log \operatorname{sen} D = 9.64501$ neg | $\log(1 - e^2) = 9.99702$ |
| $\log\cos t = 9.55534$ | $\log\operatorname{sen}\varphi = 9.78739$ neg |
| $\log II = 9.09883$ neg | $\log\cos D = 9.95290$ |
| $II = -0.12555$ | $\log I = 9.73808$ neg |
| | $I = -0.54711$ |

$$\left.\begin{array}{r} \log Ng = \quad 0.00077 \\ \log\cos\varphi = \quad 9.87771 \end{array}\right\} b$$

$$\log \text{sen } t = \quad 9.96699 \text{ neg}$$

$$\log u = \quad 9.86847 \text{ neg}$$

$$u = -0.73870$$

$$p = -0.95390$$

$$(p - u) = -0.21520$$

$$I - II = v = -0.42156$$

$$q = -0.24005$$

$$\text{tang } M = \frac{p-u}{q-v}; \qquad m = (p-u)\text{ cosec } M \qquad q - v = +0.18151$$

$$\log(p-u) = 9.33284 \text{ neg} \qquad \log.\ (p-u) = 9.33284$$

$$\log(q-v) = 9.25890 \qquad \log\text{cosec } M = 0.11669$$

$$\log\text{ tang } M = 0.07394 \qquad \log m = 9.44953$$

$$M = 310^{\circ}\ 8'\ 50'' \qquad m = 0.28153$$

$$N = 99^{\circ}\ 1'\ 40''$$

$$M - N = 211^{\circ}\ 7'\ 10'' \qquad m = \quad 0.28153$$

$$K = \quad 0.27264$$

$$\log\text{ tang }(M-N) = 9.7808 \qquad K - m = -0.00889$$

$$p' = \frac{900\ \Delta\ \alpha'\cos\delta_0}{\pi} \qquad \log 900 = 2.9542 \qquad \log 60 = 1.7782$$

$$q' = \frac{60\ \Delta\ \delta_0}{\pi} - \frac{\delta^0 - D}{\pi^2{}_0}\Delta\ \pi; \qquad \left(\frac{\delta_0 - D}{\pi^2{}_0}\right) \text{ dado por las tablas}$$

ó sinó
$$p' = \frac{900\ \Delta\ \alpha\cos\delta}{\pi}$$

$$q' = \frac{60\ \Delta\ \delta}{\pi} \qquad \text{tang. } N = \frac{p'}{q'} \qquad u = p'\text{ cosec } N$$

$$m' = \frac{1}{60}\ m\cos(M - N) \qquad \log.\frac{1}{60} = 8.2219$$

$$\gamma = \frac{K - m}{m'} \qquad K = 0.2726 \qquad \omega = \omega, + \gamma$$

$$\log.\cos.(M - N) = 9.9325 \text{ neg.}$$
$$\log.\frac{1}{60} = 8.2219$$
$$\log.\ n = 9.7812$$
$$\log.\ m' = \overline{7.9356} \text{ neg.}$$

$$\log.\ 900 = 2.9542$$
$$\log.\ \Delta\delta = 0.4226$$
$$= \overline{6.3990}$$
$$\log.\ p' = \overline{9.7758}$$
$$\log.\ q' = \overline{8.9769} \text{ neg.}$$
$$\log.\ \text{tang.}\ N = 0.7989$$
$$\log.\ \text{cosec}\ N = 0.0054$$
$$\log.\ n = 9.7812$$

$$\log.\ 60 = 1.7782$$
$$\log.\ \Delta\delta = 0.7517 \text{ neg.}$$
$$\text{c.}\log.\ \pi = \overline{6.4470}$$
$$\log.\ q' = 8.9769 \text{ neg.}$$
$$\log.\ (K - m) = 7.9489 \text{ neg.}$$
$$\log.\ m' = \overline{7.9355} \text{ neg.}$$
$$\log.\ \gamma = 0.0134$$
$$\gamma = +1^m 031$$

$$\omega = 4^h 53' 18'' 23 + 1' 11'' 90 = 4^h 54' 30'' \text{ long. buscada}$$

En el *Anuario del Observatorio de La Plata* figuran todas las ocultaciones *visibles* en dicho observatorio durante el año; es el resúmen de los cálculos de predicción y definitivos hechos para La Plata, por lo tanto, para hacer uso de esa tabla sólo habrá que reducir la hora del almanaque á la hora local.

La determinación de la longitud por el telégrafo eléctrico se reduce á conocer el tiempo empleado en la transmisión de un signo entre las dos estaciones telégraficas, y conocido el intérvalo, hacer la dicha transmisión en el instante de ser $T_o$ la hora local de una de las estaciones; en la estación de recepción se conoce exactamente la hora local y del conocimiento de esos dos tiempos y del intérvalo de transmisión se deducirá la diferencia de horas.

El método, que es muy exacto, aunque sencillo en su apariencia, requiere muchos detalles que están fuera del alcance de este trabajo.

Como ejemplo de la aplicación del telégrafo ó del teléfono, para la determinación de la longitud, se reproduce aquí la operación hecha entre La Plata y La Colonia (República Oriental).

«Se cambiaron 20 señales, 10 de cada estación á treinta »segundos de intérvalo, contando á alta voz los diez »últimos, de 20 á 30 y de 50 á 60. Poco antes del »segundo, 20'' ó 50'' se decía *Atención* y *top* al llegar al 30'' ó 60''.

tops. de la Plata.

| Reloj Colonia | H. La Plata | Diferencias |
|---|---|---|
| 0h 41' 11, 75 | 0h 36' 16'' 4 | 4' 55'' 35 |
| ,, 42, 00 | ,, 46 4 | ,, 60 |
| 42 11, 75 | 37 16 4 | ,, 35 |
| ,, 42, 00 | ,, 46 4 | ,, 60 |
| 43 11, 75 | 38 16 4 | ,, 35 |
| ,, 41, 75 | ,, 46 4 | ,, 35 |
| 44 11, 75 | 39 16 4 | ,, 35 |
| ,, 41, 75 | ,, 46 4 | ,, 35 |
| 45 11, 75 | 40 16 4 | ,, 35 |
| ,, 41, 75 | ,, 46 4 | ,, 35 |

media 4' 55'',40

tops. de la Colonia.

| Reloj Colonia | Reloj La Plata | Diferencias |
|---|---|---|
| 0h 49' 30'' | 0h 44' 34'' 7 | 4' 55'' 3 |
| 50 0 | 45 4, 8 | ,, 2 |
| ,, 30 | ,, 34, 7 | ,, 3 |
| 51 0 | 46 4 9 | ,, 1 |
| ,, 30 | 34, 7 | ,, 3 |
| 52 0 | 47 4, 9 | ,, 1 |
| ,, 30 | 34, 9 | ,, 1 |
| 53 00 | 48 4, 8 | ,, 2 |
| 54 00 | 49 4, 9 | ,, 1 |
| ,, 30 | 34, 7 | ,, 3 |

media = 4' 55'', 20

Señales de La Plata — promedio = 4' 55'' 40

,, ,, ,, Colonia ,, — 4' 55'' 20

promedio 4' 55'' 30

Promedio de la dif. de horas 4' 55'' , 30

Estado á medio día = — 4' 35'' , 00 }
corr. cronómetro = + 0'' , 15 } — 4' 34'' , 85

difer. de long. = ............ 0' 20'' , 45

| | |
|---|---|
| difer. de longitud La Plata al Oeste | $+ 0' \, 20'' , 45$ |
| Faro de la Colonia á 187m al Oeste | $- \quad 0. \; 48$ |
| | $+ 0' \, 19'' , 97$ |
| Long. de La Plata O. de Paris = | $4^h \, 1' \; 5'' , 30$ |
| dif. long. entre el faro = | $- 0' \, 19'' , 97$ |
| Longit. del Faro al O. de Paris... | $4^h \, 0' \, 45'' , 33$ |

# FÓRMULAS GENERALES ASTRONÓMICAS

## RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DEL HORIZONTE Y DEL ECUADOR


**Fórmulas fundamentales**

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\delta + \cos h \cos\delta \cos q$$

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A$$

| Conocido | hallar | Fórmulas para la resolución |
|---|---|---|
| | | $\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} h - \cos\varphi \cos h \cos A$ |
| | | $\operatorname{sen} t = \dfrac{\cos h \operatorname{sen} A}{\cos\delta}$ |
| | | $\operatorname{cotg} t = \operatorname{tang} h \cos\varphi \operatorname{cosec} A + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{cotg} A$ |
| h ó z. φ | t. δ | $\operatorname{tang}\delta = (\operatorname{tang} h \operatorname{sen}\varphi \operatorname{cosec} A - \cos\varphi \operatorname{cotg} A) \operatorname{sen} t$ |
| A | q | $\operatorname{tang} M = \operatorname{cotang} h \cos A \qquad \operatorname{tang} t = \dfrac{\operatorname{tang} A \operatorname{sen} M}{\cos(\varphi - M)}$ |
| | | $\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(\varphi - M) \cos t$ |
| | | $\operatorname{tang} G = \operatorname{tang}\varphi \sec A \qquad \operatorname{tang} q = \dfrac{\operatorname{tang} A \cos G}{\operatorname{sen}(h + G)}$ |
| | | $\operatorname{tang} M = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{cotg} A}; \qquad \operatorname{sen}(M - t) = \dfrac{\cos\varphi \operatorname{tang}\delta}{m}$ |
| φ. δ | h. t | $m = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} M}$ |
| A | q | $\operatorname{tang} N = \operatorname{cotang}\varphi \cos A; \qquad n = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos N}$ |
| | | $\operatorname{sen}(h - N) = \dfrac{\operatorname{sen}\delta}{n}$ |
| si $A = 90^\circ$ | ..... | $\cos t = \dfrac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\varphi}; \quad \operatorname{sen} h = \dfrac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\varphi}; \quad \operatorname{sen} q = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\delta}$ |
| | | ó también |
| | | $P = \sqrt{\operatorname{sen}(\delta + \varphi) \operatorname{sen}(\delta - \varphi)}$ |

| Conocido | hallar | Fórmulas para la resolución |
|---|---|---|
| $\varphi$. $\delta$ y $A = 90^{o}$ | h. t q | $\operatorname{sen} t = \dfrac{P}{\operatorname{sen} \varphi \cos \delta}$ <br> $\cos h = \dfrac{P}{\operatorname{sen} \varphi}$ $\qquad \cos q = \dfrac{P}{\cos \delta}$ <br> $\operatorname{tang} \frac{1}{2} t = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} (\varphi - \delta)}{\operatorname{sen} (\varphi + \delta)}}$ <br> $\operatorname{tang} \frac{1}{2} z = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\varphi - \delta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}}$ |
| $\varphi$. $\delta$ t | h. A q | $\operatorname{sen} A = \dfrac{\cos \delta \operatorname{sen} t}{\cos h}$ <br> $\operatorname{cotang} A = \dfrac{\operatorname{tang} \delta \cos \varphi}{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cotang} t$ <br> $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos$ <br> $\operatorname{tang} M = \dfrac{\operatorname{tang} \delta}{\cos t}$; $\qquad \operatorname{tang} A = \dfrac{\operatorname{tang} t \cos M}{\operatorname{sen} (\varphi - M}$ <br> $\cos h = \dfrac{\operatorname{tang} (\varphi - M)}{\cos A}$ <br> $\operatorname{tang} q = \dfrac{\operatorname{tang} t \operatorname{sen} N}{\cos (\delta + N)}$; $\qquad \operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \varphi \cos t$ |
| con $h = 0$ | ..... | $\cos A = - \dfrac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi}$; $\qquad \operatorname{sen} A = \dfrac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi}$ (una amplitud) |
| con $t = 90^{o} = 6^{h}$ | ..... | $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta$; $\qquad \operatorname{cotg} A = - \operatorname{tang} \delta \cos \varphi$ <br> (Los signos de $\varphi$ y $\delta$ deben ser iguales; caso contrario pasa bajo el horizonte). |
| con $q = 90^{o}$ | ..... | (Caso de una elongación) <br> $\cos t = \dfrac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \delta}$; $\quad \operatorname{sen} h = \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \delta}$; $\quad \operatorname{sen} A = \dfrac{\cos \varphi}{\cos}$ <br> Ó también <br> $\operatorname{sen} t = \dfrac{P}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi}$; $\quad \cos h = \dfrac{P}{\operatorname{sen} \delta}$; $\quad \cos A = \dfrac{P}{\cos \varphi}$ |
| con $t = 0^{o}$ | ..... | $\cos z = \cos (\varphi - \delta)$ (Caso del paso por el Meridiano) |

| Conocido | hallar | Fórmulas para la resolución |
|---|---|---|
| $\delta,\ \varphi$<br>$h$ | $t,\ A$<br>$q$ | $\cos A = \tan h \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{sen} \delta \sec h \sec \varphi$<br>$\cos t = \dfrac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$<br>$\operatorname{tang} \frac{1}{2} t = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(S-h)\cos S}{\operatorname{sen}(S-\varphi)\cos(S-\Delta)}}$<br>$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(S-\varphi)\operatorname{sen}(S-h)}{\cos S \cos(S-\Delta)}}$<br>$\operatorname{sen} \frac{1}{2} t = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(S-h)\cos S}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta}}$ Á $\varphi$ se le dará el mismo signo que á $\delta$.<br>$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\cos S \cos(S-\Delta)}{\cos \varphi \cos h}}$<br>$\cos \frac{1}{2} t = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(S-\varphi)\cos(S-\Delta)}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta}}$<br>$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(S-h)\operatorname{sen}(S-\varphi)}{\cos \varphi \cos h}}$<br>$\operatorname{sen} \frac{1}{2} q = \sqrt{\dfrac{\cos S \operatorname{sen}(S-\varphi)}{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta}}$<br>$\cos \frac{1}{2} q = \sqrt{\dfrac{\cos(S-\Delta)\operatorname{sen}(S-h)}{\cos h \operatorname{sen} \Delta}}$<br>$\operatorname{tang} \frac{1}{2} q = \sqrt{\dfrac{\cos S \operatorname{sen}(S-\varphi)}{\cos(S-\Delta)\operatorname{sen}(S-h)}}$<br>$\left(\begin{array}{l} \Delta = 90^\circ \pm \delta \\ S = \dfrac{h+\varphi+\Delta}{2} \end{array}\right)$ |
| $h,\ t$<br>$\delta$ | $\varphi$<br>$A$ | $\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} \delta \sec t$<br>$\cos(\varphi - M) = \operatorname{sen} h \operatorname{sen} M \operatorname{cosec} \delta$<br>$\varphi = (\varphi - M) + M$<br>$\operatorname{tang} A = \dfrac{\operatorname{sen} M \operatorname{tang} t}{\operatorname{sen}(\varphi - M)}$ |

# GEODESIA

La *geodesia*, al tratar de la medición de la esfera terrestre y de sus grandes divisiones, emplea para sus resultados los métodos de cálculos trigonométricos y astronómicos.

La manera de proceder en esas operaciones consiste en cubrir una cierta extensión de la superficie terrestre ó la de un territorio, con una red de triángulos establecidos en determinadas condiciones y con gran precisión; de la resolución de esos triágulos, para la cual hay que tomar en consideración la esferoicidad de la tierra, se deduce: ya la extensión de un arco de meridiano ó paralelo, ya la situación geográfica de los diferentes vértices de triángulos y puntos importantes de una región, de la cual se construirá la carta geográfica.

Las observaciones astronómicas se ligan á las geodésicas para la determinación de meridianos, latitudes y longitudes de determinados vértices y azimutes de los lados de los triángulos principales.

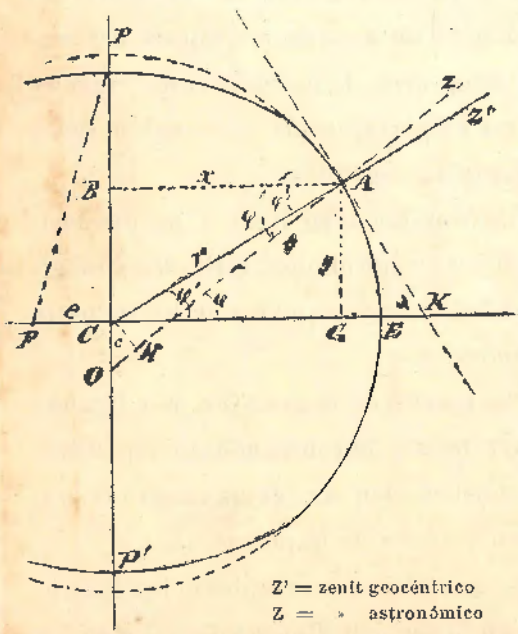
A estas dos partes esenciales de la geodesia, van ligadas otras, como ser la nivelación, el relevamiento topográfico, la proyección y construcción de cartas geográficas y otras de detalle que no carecen de importancia.

En las operaciones geodésicas se emplean los instrumentos ya detallados en la sección *Topografía* y á más *las* *reglas* con las cuales se miden *las bases* que sirven de base á los cálculos y formación de los triángulos y que por lo tanto requieren el mayor grado de exactitud.

### Figura de la tierra

De la medida de varios meridianos y paralelos se ha deducido que nuestro globo terrestre tiene la figura de un elipsoide de revolución; de donde se deduce que el diámetro ó eje de los polos es menor que el diámetro ecuatorial y que el radio de cada punto de un meridiano es variable según la latitud.

### Dimensiones y fórmulas del Elipsoide terrestre




Z' = zenit geocéntrico
Z = » astronómico

Siendo P A E P' el esferoide terrestre será:

C E = A = radio ecuatorial = 6.378.339m,

log. A = 6.804.707.

C P = b = radio polar = 6.356.515m,

log. b = 6.803.219.

F C = e = excentricidad del meridiano.

$e^2 = 0.006.832$,

log. $e^2 = 7.834.523$

C O = c = aplanamiento de la tierra.

$c = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{292}$

ó también $c = \sqrt{1 - e^2}$

c = 0.996.578,

log. c = 9.998.512.

C A = r = radio vector del lugar A,

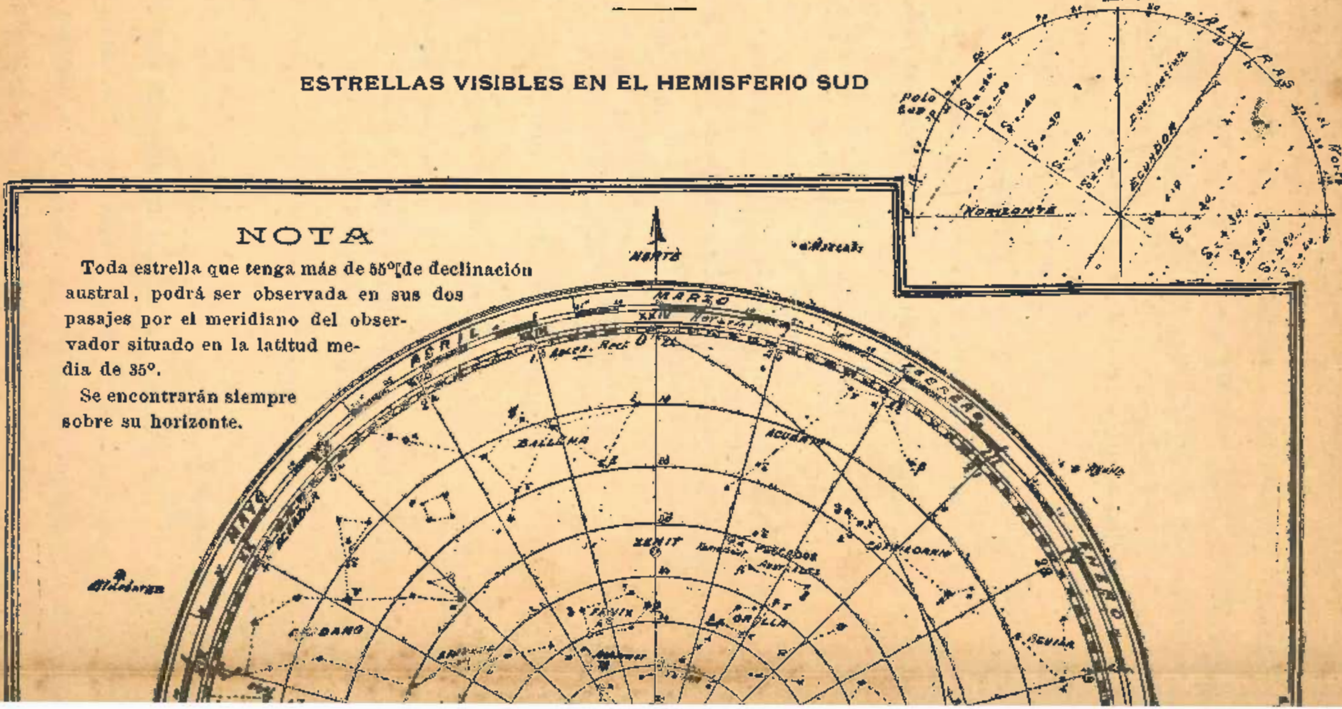
# MAPA CELESTE

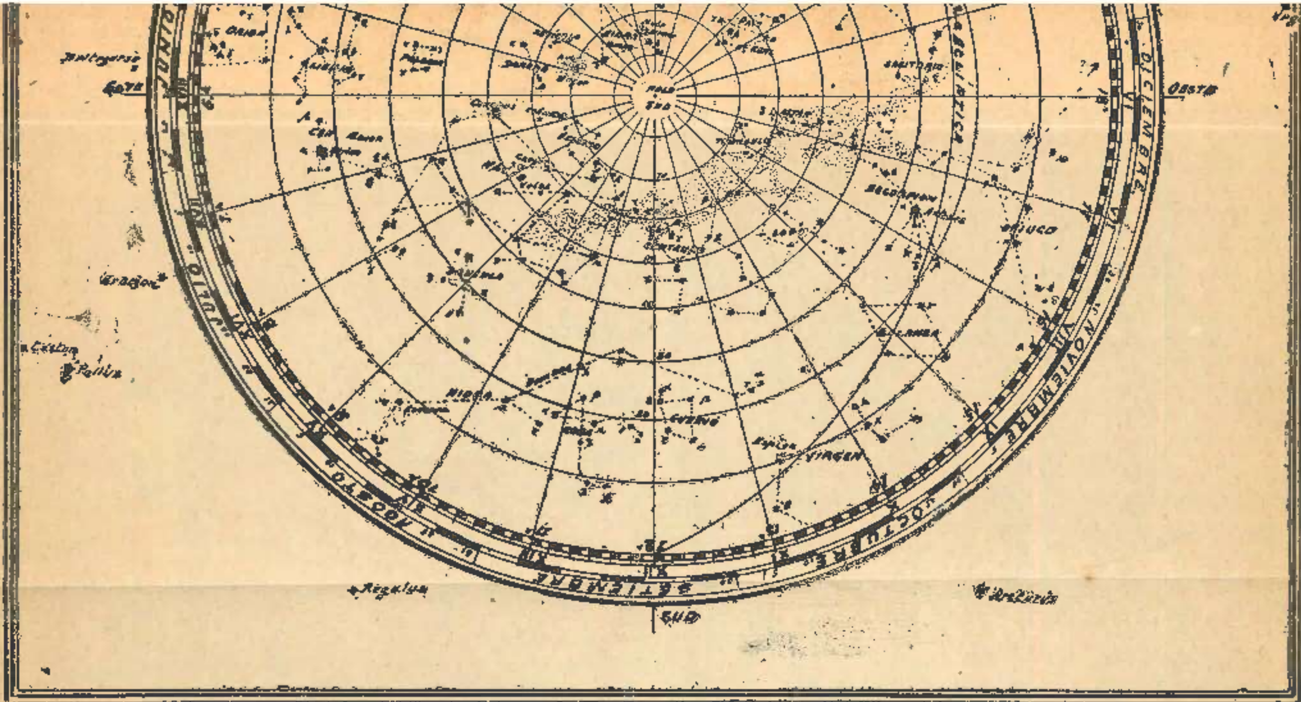
## ESTRELLAS VISIBLES EN EL HEMISFERIO SUD

### NOTA

Toda estrella que tenga más de 55° de declinación austral, podrá ser observada en sus dos pasajes por el meridiano del observador situado en la latitud media de 35°.

Se encontrarán siempre sobre su horizonte.






## HORA SIDÉREA $\theta$ A $0^h$ EN LA PLATA

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.° Marzo | = 22h 37' 53'' | 1.° Junio | = 4h 56' 22'' | 1.° Septiembre | = 10h 59' 05'' | 1.° Diciembre | = 16h 57' 19'' |
| 22 » | = 0h 01' 37'' | 15 » | = 5h 35' 45'' | 15 » | = 11h 38' 31'' | 15 » | = 17h 37' 17'' |
| 1.° Abril | = 0h 55' 52'' | 1.° Julio | = 6h 54' 29'' | 1.° Octubre | = 12h 57' 22'' | 1.° Enero | = 18h 45' 16'' |
| 15 » | = 1h 35' 17'' | 15 » | = 7h 34' 14'' | 15 » | = 13h 36' 30'' | 15 » | = 19h 40' 28'' |
| 1.° Mayo | = 2h 54' 08'' | 1.° Agosto | = 8h 56' 52'' | 1.° Noviembre | = 14h 59' 35'' | 1.° Febrero | = 21h 03' 15'' |
| 15 » | = 3h 33' 34'' | 15 » | = 9h 36' 17'' | 15 » | = 15h 39' 00'' | 15 » | = 22h 42' 41'' |

Se tiene también $1 - e^2 = 0.993.168$, log $= 9.997.023$

$a - b = 21824^m$ ......log $4.338934$

$\varphi'$ y $\varphi$ = latitud geocéntrica y astronómica del lugar A = arco A E.

$\psi$ = ángulo de la tangente en A con el ecuador.

C G = A B = x, abcisa del punto A y radio del paralelo A.

A G = B C = y, ordenada » A.

A O = N, normal mayor del punto A.

$$x = r \cos \varphi', \qquad y = r \operatorname{sen} \varphi'$$

$$\operatorname{tang.} \varphi' = \frac{y}{x} = (1 - e^2) \operatorname{tang.} \varphi$$

Teniendo presente la forma elipsoidal (triángulo A O B)

$$x = N \cos \varphi; \quad y = N (1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\cos \varphi' \sqrt{(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{a^2 + b^2 \sqrt{1 + m^2 + 2 m \cos 2 \varphi}}{a - b \sqrt{1 + n^2 + 2 n \cos 2 \varphi}}$$

en la cual se tiene

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a + b^2} = \frac{e^2}{2 - e^2}; \qquad n = \frac{a - b}{a + b} = \frac{c}{2 - c}$$

Puesta esta fórmula en forma logarítmica

$$\log. r = \log. \frac{2 - e^2}{2 - c} + M \left[ (m - n) \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2} (m^2 - n^2) \cos 4 \varphi ... \right]$$

(en partes del radio ecuatorial.)

$$\log. r = 9.9992576 + 0\,0007443 \cos 2 \varphi - 0.0000019 \cos 4 \varphi$$

sea, $\log. r = 9.9992576 + [6.87174] \cos 2 \varphi - [4.282] \cos 4 \varphi$

las cantidades entre [ ] son logaritmos constantes de las cantidades correspondientes.

*Latitud geocéntrica* $\operatorname{tang.} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tang.} \varphi = [9.997023] \operatorname{tang} \varphi$

Para la latitud astronómica de 45° se tiene:

para, $\log. \operatorname{tang.} \varphi' = 9{,}997036 = 44^\circ\, 48'\, 16''\, 06$ = lat. geocéntrica.

*Angulo vertical* C A O = ($\varphi - \varphi'$) de los triángulos C H O, C H D y D C O, se deducen las siguientes expresiones;

$$O\,H = C\,O \operatorname{sen}\varphi = N\,e^2 \operatorname{sen}^2\varphi; \qquad D\,H = C\,D \cos\varphi = N\,e^2 \cos^2\varphi$$

$$C\,H = C\,D \operatorname{sen}\varphi = N\,e^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi; \quad C\,O = C\,D \operatorname{tang.}\varphi = N^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$O\,D = \frac{C\,O}{\operatorname{sen}\varphi} = N\,e^2; \quad A\,H = N - O\,H = N - N\,e^2 \operatorname{sen}\varphi = N\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$C\,H = A\,H \operatorname{tang.}(\varphi - \varphi')$$

de donde

$$\operatorname{tang.}(\varphi - \varphi') = \frac{(e^2 \operatorname{sen}\varphi) \cos\varphi}{1 - (e^2 \operatorname{sen}\varphi) \operatorname{sen}\varphi}$$

fórmula que puede calcularse por los logaritmos de adición y sustracción, pero que desarrollada para los logaritmos vulgarés dá:

$$(\varphi - \varphi') = \left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right) \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{\operatorname{sen} 1''} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)^2 .$$
$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)^3 \frac{\operatorname{sen} 6\,\varphi}{\operatorname{sen} 1''} \cdots$$

despreciando el tercer miembro y sustituyendo las expresiones $\left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)$ por sus logaritmos puestos entre [ ]
se tiene:

$$(\varphi - \varphi') = [2.849404] \operatorname{sen} 2\,\varphi - [0.08335] \operatorname{sen} 4\,\varphi$$

fórmula que aplicada á la latitud de 45°, da

$$\log.(\varphi - \varphi') = 2.849\,404\,; \qquad y, \qquad \varphi - \varphi = 11'\ 46'', 97.$$

*Radios de curvatura* del meridiano haciéndolo = Q.

$$Q = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^3}}$$

en función de la normal N

$$Q = \frac{N^3}{a^2}\,(1 - e^2)$$

y el arco de 1' de meridiano será :

$$\text{arco } 1' = \frac{2\,\pi\,\rho}{21600} - \frac{\rho}{1437}$$

De la fórmula precedente se deducen las siguientes :

Radio de curvatura en el polo

$$= \frac{a^2}{b} = a\,(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Radio de curvatura en el ecuador $= \frac{b^2}{a} = a\,(1 - e^2)$

Radio de la curvatura de una sección perpendicular al meridiano

$$Q' = N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Radio de curvatura de una sección normal que corta al meridiano según

un ángulo conocido $A \ldots Q_n = \frac{Q\,Q'}{Q \operatorname{sen}^2 A + Q' \cos^2 A}$

Radio medio de curvatura de una porción de superficie terrestre ó curvatura media ..... $R = \sqrt{Q\,Q'} = \sqrt{N\,Q'}$

Longitud del radio de curvatura media $= \frac{1}{2}(\log N + \log Q)$

Radio del paralelo de latitud $\varphi$ ...$r = N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}}$

Arco elíptico $S$ de $\Delta \varphi''$

$$S = a\,(0.998289\, \Delta \varphi'' \operatorname{sen} 1'' - 0.005132 \cos 2\, \varphi_m \operatorname{sen} \Delta \varphi$$
$$+ 0.0000055 \cos 4\, \varphi \operatorname{sen} 2\, \Delta \varphi)$$

reducida á metros y restituidos los logaritmos constantes dentro de [ . ]

$$S = [\,1.480539\,]\, \Delta \varphi'' - [\,4.51504\,] \cos 2\, \varphi_m \operatorname{sen} \Delta \varphi$$
$$+ [\,1.545\,] \cos 4\, \varphi_m \operatorname{sen} 2\, \Delta \varphi$$

En estas fórmulas se tiene:

$$\varphi' - \varphi = \Delta \varphi\,; \quad y\,, \quad \varphi' - \varphi = 2\, \varphi_m$$

Llámase *triángulo geodésico* el triángulo curvilíneo formado por la reunión de tres puntos fijados sobre una superficie cualquiera del elipsoide terrestre; ó sea sobre la *esfera osculatriz* de su punto medio, engendrada por el radio medio, $R = \sqrt{NQ}$ cuyo centro se halla sobre el eje polar donde le corta la gran normal N.

El radio terrestre expresado en grados, minutos y segundos es:

$R^\circ = 57^\circ, 295779$ $\log R^\circ = 1.758123$

$R' = 3437', 74677$ $\log R' = 3.536274$

$R'' = 206264'', 806$ $\log R'' = 5.304425$

El largo de la ¼ parte del ecuador es de 10.018.985 m

El largo de la ¼ parte del meridiano es de 10.301.965 m

Un minuto de Ecuador vale....... 1.855 m 37

Un minuto de meridiano varía según la latitud, así que llamado Q el radio de curvatura de un punto cuya latitud es φ el arco de un minuto será expresado:

$$\text{arc } 1' = \frac{2\pi\rho}{21600} = \frac{Q}{3437.70}$$

Para un minuto de meridiano en el paralelo 45° resulta así ser de $1852^m$ 30.

La *legua marina* equivale á 3 minutos de meridiano medio y se compone de 3 *millas* marinas así que:

Una milla marina = $1852^m 30$ sea 1 minuto de mer. med.

» » » = 120 nudos y un nudo = $15^m, 436$

**Reducción de arcos de minutos en metros.**

Como se ha dicho, el largo de un arco de meridiano varía según la latitud, por esto se han construido tablas en función de la latitud, normal correspondiente y aplanamiento adoptado; en esas tablas aparece el largo de un grado ó de un minuto de meridiano y de paralelo, de manera que fácilmente pueden reducirse, valores de arcos en metros ó recíprocamente.

1 grado de meridiano entre los paralelos 35 y 36 mide, 110934 ms; 1 minuto será, pues:

$$\frac{110934}{60} = 1848^m,90$$

y 1 segundo $$\frac{1848.90}{60} = 30^m,81$$

valiéndose de las tablas que se acompañan; sea reducir á metros entre el paralelo 35 y 36 un arco de 27' 34'' = 27', 56

$$1.^m = 1848.90, \quad 27',56 = 1848.90 \times 27,56 = 50955^m,6840$$

$75300^m$. igual cuantos minutos?

$$x = \frac{75300}{1848.90} = 40'.72\,69 = 40'\,43'',106$$

## Arcos de Meridiano medidos

### ARCO ANGLO-FRANCES

| | Latitud | Amplitud | Largo en Toesas |
|---|---|---|---|
| de Saxaword | 69° 49' 38'', 6 | 22° 9' 42'', 5 | 1264645$^t$, 5 |
| á Formentera | 38° 39' 56'', 1 | | |

### ARCO RUSO-SUECO

| | | | |
|---|---|---|---|
| de Fuglenaes | 70° 40' 11'', 3 | 25° 20' 8'', 5 | 1447786, |
| á Neckassowka | 45° 20' 2'', 8 | | |

### ARCO DE PRUSIA

| | | | |
|---|---|---|---|
| de Memel | 55° 43' 40'', 4 | 1° 30' 28'', 9 | 86177 |
| á Trunz | 54° 13' 11'', 5 | | |

### ARCO DANÉS

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lyssabel | 55° 4' 10'', 4 | 7° 31' 53'', 4 | 87436 . 5 |
| Lauenburg | 53° 32' 17'', 0 | | |

### ARCO DE HANORRA

| | | | |
|---|---|---|---|
| Altona | 53° 32' 45'', 3 | 2° 0' 57'', 4 | 115163 . 7 |
| Göttingen | 51° 31' 47'', 9 | | |

### DE LAS INDIAS

| | | | |
|---|---|---|---|
| Shahpur | 32° 1' 34'', 1 | 23° 49' 23'', 7 | 1353210 , 9 |
| Kudankulam | 8° 12' 10'', 4 | | |

### DEL PERÚ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cotchesqui | 0° 2' 31'', 4 | 3° 7' 3'', 5 | 176875 , 5 |
| Tarqui | 3° 4' 32'', 3 | | |

### BUENA ESPERANZA

| | | | |
|---|---|---|---|
| North End | 29° 44' 17'', 7 | 4° 36' 48'', 6 | 262468 , 6 |
| Cope Point | 34° 21' 6'', 3 | | |

El metro legal = 443, 296 líneas

,, 36, 9413 pulgadas

,, 3, 0784 piés

,, O, 513074 Toesas, log. = 9.7101801

## Triangulación

Esta operación tiene siempre por objeto obtener los datos exactos para construir el plano de un país ó de una de sus partes.

También se emplea la triangulación para ligar entre sí dos puntos muy distantes, que pueden ser los extremos de un arco de meridiano, á fin de determinar el largo y dirección (azimut) de la línea que los reune.

Como lo indica su nombre, la triangulación consiste en cubrir el país, cuyo plano quiere levantarse, con una complicada red de triángulos, que se dividen según su magnitud en los de 1.°, de 2.° y 3.° órden, estableciéndose así una escala descendiente en extensión, dificultades y cálculos.

La forma más perfecta que corresponde á un triángulo geodésico, es *la equilateral*; es la que cubre mayor superficie, los errores se compensan estableciéndose una casi igualdad en la visión y refracción, sus vértices se hallan repartidos de tal manera que regularizan la subdivisión sucesiva de los demás triángulos; en una palabra, una red así establecida constituiría la *red típica*, el ideal al que debe procurarse llegar.

Constituyen la red de triángulos de *primer órden ó magnitud*, aquellos, que prévio estudio de la región en que se opera, se establecen con la figura más aproximada á la equilateral y cuyos lados varían de 30 á 60 kilómetros.

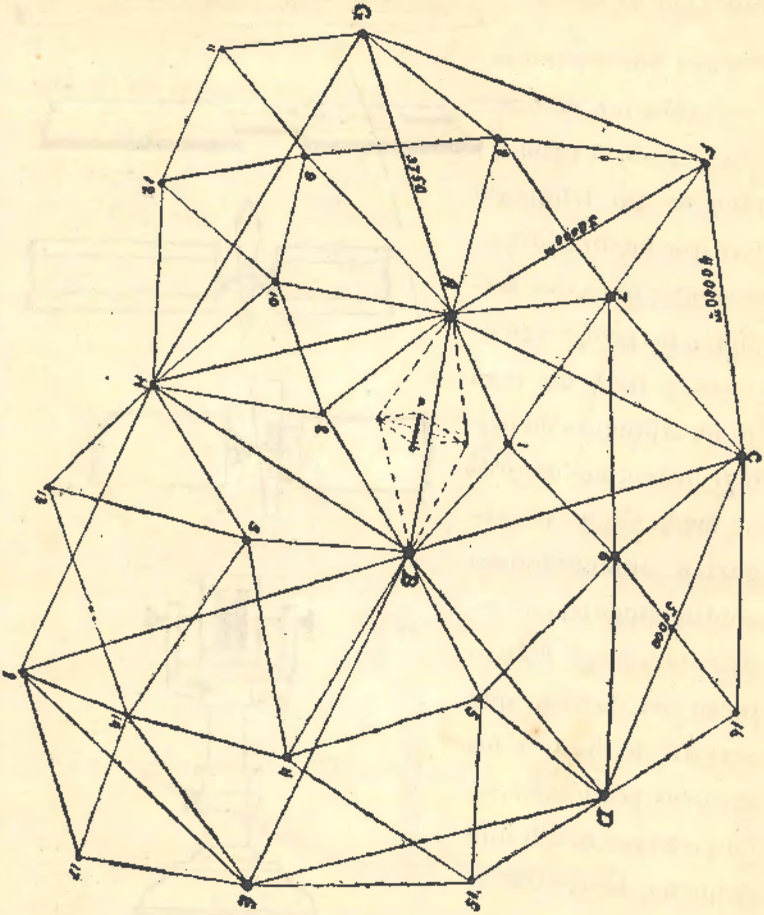
Considerada la forma esferoidal de la tierra y la relación existente entre la magnitud de los costados del triángulo y el radio terrestre, queda demostrado por muchos teoremas desarrollados en los cursos especiales de Geodesia, que en todo triángulo trazado sobre la superficie terrestre, los efectos de la esferoicidad son sensibles sólo en aquellos cuya magnitud de lados pasa de 17 kilómetros; en todos los demás casos, los triángulos de una red pueden ser considerados, ya como esféricos, ya como planos.

Los triángulos *de segundo órden* se apoyarán forzosamente sobre los de primera, sirviéndose de sus vértices y de uno que otro de sus lados de menor extensión; el largo de los lados de esos triángulos puede variar de 15 á 30 kilómetros, generalmente se procura limitarlos á una extensión de 25 kilómetros.

Es condición importante que la red de segundo órden así como la de primera, sea continua, apoyándose siempre un triángulo en los que lo rodean y sin solución de continuidad en toda la red.

Los triángulos de tercer órden, dependen principalmente de la disposición topográfica del interior de un triángulo de segundo órden. No conviene que el largo de sus costados sea mayor de 15 kilómetros. Estos triángulos á su vez servirán para apoyar en ellos los triángulos accesorios y de detalle que constituirán la red de cuarto órden.

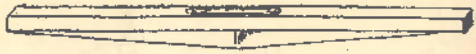
La siguiente figura representa parte de una triangulación efectuada, casi en las condiciones exigidas por la red típica; en ella se vé la regularidad de los triángulos de

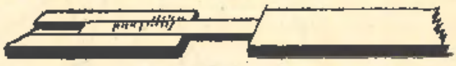


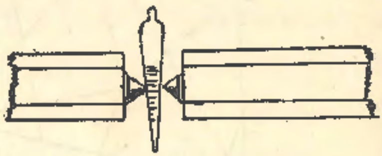

primer órden A B C, F A G, D B E... casi equilaterales y con sus lados no menores de 40 kilómetros, así como la sistemática repartición de los triángulos de segundo órden y el encadenamiento perfecto de las dos redes.

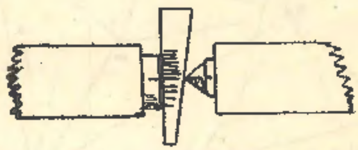
Pasemos ahora á los detalles de las operaciones.

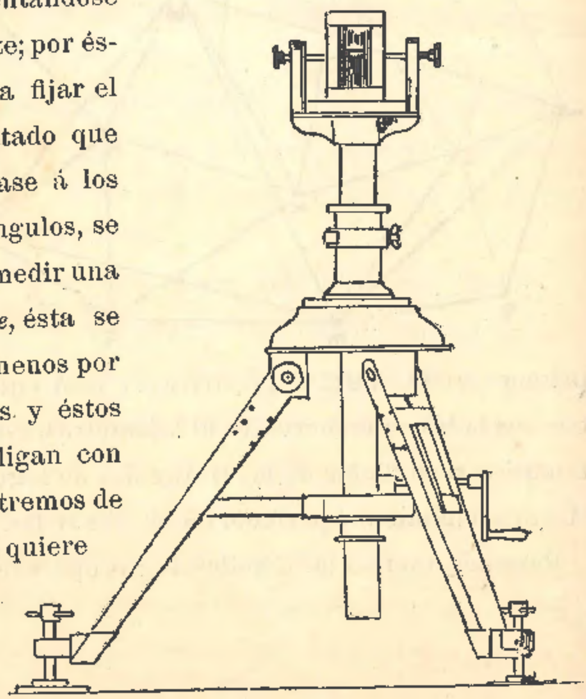
### Medición de Bases



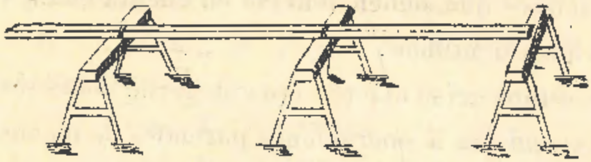


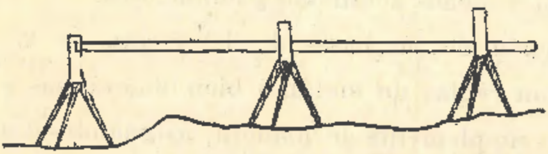


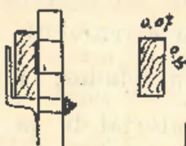


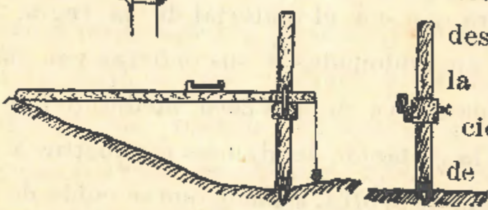


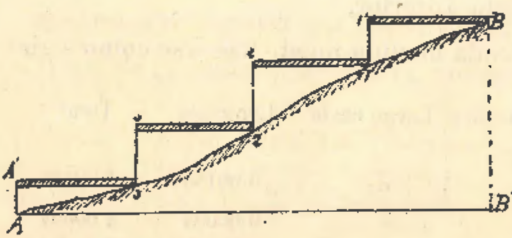
Para comenzar una triangulación, esto es, para tener el primer lado de un triángulo hay que medirlo directamente; pero esa medición no puede extenderse á todo un lado de un triángulo de primer orden, los errores de medición se propagarían aumentándose continuamente; por ésta razón, para fijar el largo del costado que servirá de base á los grandes triángulos, se empieza por medir una pequeña *base*, ésta se amplía á lo menos por dos triángulos y éstos á su vez se ligan con los puntos extremos de la base que se quiere adoptar; este proceder no tiene regla fija, todo varía segun las circunstancias, pero de todas maneras se desprende que la base á medirse es siempre menor que el lado que entra en el cálculo.












La operación de la medición de la base es muy complicada y minuciosa; puede dividirse en dos categorías; la primera destinada á las operaciones de alta geodesia, como ser la determinación del largo de un arco de meridiano ó de algún otro elemento del esferoide terrestre, así como para la triangulación de un Estado, para formar su carta geográfica.

En la segunda categoría entrarían las operaciones de menor importancia científica, aunque comprendiendo también la triangulación de una vasta zona.

En ambos casos, los procederes se diferenciarán sólo en detalles minuciosos que deben tenerse en cuenta cuando se persiguen fines científicos.

Podría aún establecerse una tercera categoría, como ser la que correspondería á operaciones parciales de menor importancia, aunque con una exactitud muy aceptable, por procedimientos menos detallados y minuciosos.

Para la medición de las bases de 1.° y aun de 2.° orden, se emplean reglas de metal, ó bien bimetálicas á compensación ó simplemente de madera, asignándoseles una longitud de 3 á 5 metros. Para operar se emplean 4 ó 5 reglas que se colocan sucesivamente sobre caballetes préviamente colocados y nivelados. (Figs. adjuntas.)

Cualquiera que sea el material de la regla, éstas son perfectamente etalonadas y sus cabezas van munidas ya de una *lengüeta*, ya de una *cuña*, mediante la cual puede apreciarse la distancia de algunos milímetros $x$ que separa una regla de la otra, espacio que se cuida de mantener para evitar todo choque ó movimiento que modifique la colocación de la regla anterior.

La anotación de cada medida puede hacerse como sigue:

| Regla | Temperatura | Largo regla | Lengüeta | Total |
|---|---|---|---|---|
| I | 36° | 4m. | 0.00183 | 4.00183 |
| II | ,, | 4 | -0.00094 | 4.00094 |
| III | 36° 50 | 4 | 0.00193 | 4.00193 |

Hay que aplicar á la medición las siguientes correcciones:

(*a*) Para tener en consideración la dilatación de las reglas, se tiene para el coeficiente K correspondiente á la dilatación de un cuerpo por la elevación de un grado de temperatura.

| | |
|---|---|
| Platina, K = 0.00000856 | Cobre rojo, K = 0.00001718 |
| Acero, K = 0.00001078 | Plata, K = 0.00001909 |
| Fierro forjado, K = 0.00001220 | Plomo, K = 0.00002173 |

Siendo $l$ el largo de la regla de 1 metro á $0^{\circ}$, $l'$ su largo á la temperatura de $t^{o}$ y $k$ el coeficiente de dilatación, se tendrá para el largo de la regla en ese instante

$$l' = l + t\,l\,\mathrm{k} \quad \text{ó bien} \quad l' = l\,(1 + t\,\mathrm{k})$$

lo que permite apreciar en cada caso el alargamiento de la regla.

(*b*) Se procurará siempre colocar horizontalmente las reglas sobre los caballetes, pero como en muchos casos esto no es posible y que siempre puede haber algún desnivel, hay que reducir el largo de una ó muchas reglas y aun toda la base á la horizontal. Conocida, pues, la inclinación de la regla, apreciada por el nivel especial ó por un tornillo micrométrico y, representando esa inclinación angular por λ, se tendrá, llamando $l'$ la longitud de la regla proyectada horizontalmente

$$l' = l \cos \lambda = l\left(1 - 2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

haciendo, $\mathrm{d} = \mathrm{l} - \mathrm{l}'$, diferencia entre el largo de la regla y su proyección se tiene

$$\mathrm{d} = (l - l') \cos \lambda = l\,(1 - \cos \lambda) = 2\,l \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda}{2}$$

Considerando que el ángulo λ será siempre muy pequeño, puede ponerse,

$$\sin^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{206265}\right)^2$$

y por consiguiente la fórmula práctica y reducida será

$$d = \frac{1}{2}\, l \left(\frac{\lambda}{206265}\right)^2$$

### Medición de bases por el sistema Jäderin

#### CINTAS DE ACERO

Consiste este método, muy recomendable y aceptado en muchos paises, en emplear una cinta de acero (de 20 ó 25 metros), suspendida libremente entre dos puntos fijos en vez de ser extendida sobre el suelo.

La operación se hace, colocando dos caballetes ó trípodes á distancia conveniente é igual al largo de la cinta y estirando ésta por sobre ellos con una tensión uniforme.

La cinta, asi estirada, como todo cuerpo flexible tendido horizontalmente, no llegará á representar la línea recta, describirá siempre una curva de pequeña flecha llamada *catenaria* y cuyo desarrollo se reduce fácilmente á la horizontal.

Para medir una base por este sistema se necesitan los siguientes aparatos:

1.º Una cinta de acero con graduación de milímetros (por lo menos en sus dos extremidades).

Es natural que la exactitud de esa cinta será verificada ó comparada con una buena medida normal ó padrón.

También habrá que determinar el peso ($\gamma$) de la unidad de la cinta, para conocer el de su totalidad.

2.° Dos dinamómetros, bien verificados, y destinados á someter la cinta á una tensión uniforme y determinada para hacerle afectar la *catenaria* que le es propia (estos dinamómetros pueden ser simples romanas).

3.° Cuatro trípodes y dos jalones.

La operación de medición de la base se reducirá á:

1.° Trazar la línea (con el teodolito); colocando jalones á distancias convenientes.

2.° Colocar los trípodes en esa línea y á distancias menores del largo de la cinta.

3.° Nivelar los puntos marcados (ó cabezas) de los trípodes.

4.° Medir la distancia entre los trípodes, esto es, la que dá la cinta estirada y contada entre las cuchillas ó señales especiales que lleva cada trípode en su cabeza.

5.° Calcular el largo de la línea reduciendo la catenaria á la horizontal.

Para calcular la distancia horizontal, esto es, reducir á la horizontal la catenaria medida, sumando las diferentes lecturas hechas directamente sobre la cinta, se han determinado fórmulas prácticas en las cuales entra: 1.° La tensión aplicada y determinada préviamente por una fórmula especial en la que figura el peso ($\gamma$) de la cinta y 2.° la diferencia de nivel entre las cabezas de los trípodes.

En vez de cinta pueden también emplearse hilos metálicos formados por uno de latón y otro de acero unidos en sus estremos á placas graduadas en milímetros. La medición con estos hilos es más delicada por las precauciones que deben tomarse para ser debidamente ejecutada y evitar cualquier torsión que haría perder á los hilos sus formas rectilíneas.

Por el método Jäderin, adoptado por diferentes estados europeos y en Norte América, para la medición de las bases en todos los trabajos topográficos de importancia y en los del Estado Mayor, puede obtenerse un resultado cuya exactitud varía de $\frac{1}{20.000}$ hasta $\frac{1}{200.000}$ según se haga el trabajo en buenas condiciones climatológicas y con prolijidad. Con los hilos se ha llegado á una exactitud de $\frac{1}{50.000}$ En la medición, aplicando la cinta sobre el suelo previamente preparado, la exactitud obtenida es de $\frac{1}{20.000}$

La fórmula general de la *catenaria* ó *chaînette* es:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{\frac{-x}{h}}\right)$$

En la cual $y$ é $x$ representan los ejes de coordenadas, pasando el de las $y$ por el punto más bajo de la curva

$h =$ ordenada del punto más bajo, para el cual: $y = h,\ x = 0$

Del estudio de esta fórmula se deduciría el valor de la proyección horizontal del largo de la medida entre los dos puntos de apoyo; pero basta al presente objeto indicar las correcciones que deben hacerse sufrir á la lectura del largo L de la cinta entre dichos puntos de apoyo.

Llamando $L,$ = la distancia leída sobre la cadena.

$d$ = diferencia de nivel entre los dos apoyos.

$l$ = la distancia horizontal entre los dos apoyos.

$\gamma$ = el peso de la unidad de la cinta y V, su total.

$\delta$ = el aumento de longitud por unidad debido á la tensión producida por una carga $\gamma$.

$T_o$ = la tensión ó fuerza aplicada á la cinta.

$n$ = diferencia teórica entre L y $l$.

Se deduce:

$$l = L - n = L - \frac{L^3 \gamma^2}{24 T^2}; \qquad n = \frac{L^3 \gamma^2}{24 T^2}$$

Pero L debe sufrir dos correcciones, la $n$ ocasionada por la curvatura de la catenaria y que, por lo tanto, es negativa; y la $c$ ocasionada por la tensión aplicada y que es positiva por el alargamiento que puede producir.

Esta corrección tiene por valor $\quad c = \dfrac{\delta\, T\, L}{\gamma}$

así, pues, se tendrá por valor definitivo de $l$

$$l = L - n + c = L - \frac{L^3 \gamma^2}{24 T^2} + \frac{\delta\, T\, L}{\gamma}$$

La tensión más conveniente y que debe ser aplicada á los dos extremos de la cinta para someterla á la tensión que responde á las fórmulas anteriores es: $\quad T^3 = \dfrac{L \gamma^2}{24\, \delta}$

$$T = \gamma \sqrt[3]{\frac{L^2}{24\, \delta}}$$

y si se pone el peso total V de la cinta

$$T = \frac{V}{\sqrt{24\,\delta\,L}}$$

Estas fórmulas responden al concepto de que los dos puntos de apoyo están á un mismo nivel; si esto no fuera así, y llamando $d =$ diferencia de nivel que no conviene exceda de $1^m$ sobre $10^m$, las fórmulas se modifican como sigue:

$$l = L - n + \left(\frac{d^2}{2\,L} + \frac{d^4}{8\,L^3}\right) + \frac{\delta\,T\,L}{\gamma}$$

ó simplemente

$$l = L - n + \frac{d^2}{2\,L} + \frac{\delta\,T\,L}{\gamma}$$

Las cintas de acero de la marca conocida de *Chesterman, Sheffield* han sido sometidas á pruebas especiales que han dado los siguientes valores:

$\delta = 0^m0000004$   $\gamma = 0.01151$ kil.;   $V = 0.23020$ kils.

$L = 20^m$   $T = 4{,}07$ kilos.

Con la aplicación de éstas constantes á las fórmulas precedentes se han construido las siguientes tablas:

| T | $n$ $\frac{L^3\,\gamma^2}{24\,T^2}$ | $c = \frac{\delta\,T\,L}{\gamma}$ en m/m. | Log. $\frac{L\,T}{\gamma}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.$^m$0442 | 0.7 m/m | 3.23996 |
| 2 | 0. 0110 | 1.4 » | 3.54099 |
| 3 | 0. 0049 | 2.1 » | 3.71708 |
| 4 | 0. 0028 | 2.8 » | 3.84202 |
| 5 | 0. 0017 | 3.5 » | 3.93893 |
| 6 | 0. 0012 | 4.3 » | 4.02811 |
| 7 | 0. 0009 | 4.9 » | 4.08506 |
| 8 | 0. 0008 | 5.6 » | 4.14305 |
| 9 | 0. 0005 | 6.3 » | 4.19420 |
| 10 | 0. 0004 | 7.0 » | 4.23996 |

| $d$ | $\frac{d^2}{2L}$ | $d$ | $\frac{d^2}{2L}$ | $d$ | $\frac{d^2}{2L}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | » m/m | 0.22 | 1.2 | 0.43 | 4.6 |
| 0.02 | » » | 0.23 | 1.3 | 0.44 | 4.8 |
| 0.03 | » » | 0.24 | 1.4 | 0.45 | 5.1 |
| 0.04 | » » | 0.25 | 1.6 | 0.46 | 5.3 |
| 0.05 | 0.1 » | 0.26 | 1.7 | 0.47 | 5.5 |
| 0.06 | 0.1 » | 0.27 | 1.8 | 0.48 | 5.8 |
| 0.07 | 0.1 » | 0.28 | 2.0 | 0.49 | 6.0 |
| 0.08 | 0.2 » | 0.29 | 2.1 | 0.50 | 6.3 |
| 0.09 | 0.2 » | 0.30 | 2.3 | 0.51 | 6.5 |
| 0.10 | 0.3 » | 0.31 | 2.4 | 0.52 | 6.8 |
| 0.11 | 0.3 » | 0.32 | 2.6 | 0.53 | 7.0 |
| 0.12 | 0.4 » | 0.33 | 2.7 | 0.54 | 7.3 |
| 0.13 | 0.4 » | 0.34 | 2.9 | 0.55 | 7.6 |
| 0.14 | 0.5 » | 0.35 | 3.1 | 0.56 | 7.8 |
| 0.15 | 0.6 » | 0.36 | 3.2 | 0.57 | 8.1 |
| 0.16 | 0.6 » | 0.37 | 3.4 | 0.58 | 8.4 |
| 0.17 | 0.7 » | 0.38 | 3.6 | 0.59 | 8.7 |
| 0.18 | 0.8 » | 0.39 | 3.8 | 0.60 | 9.0 |
| 0.19 | 0.9 » | 0.40 | 4.0 | | |
| 0.20 | 1.0 » | 0.41 | 4.2 | | |
| 0.21 | 1.1 » | 0.42 | 4.4 | | |

**Haciendo uso de las tablas. Se ha leído en la cinta $19^{m},8930$ hallándose al mismo nivel los caballetes.**

| | | |
|---|---|---|
| L = | 19,8930 | T = $4^{k}$ |
| — corrección n = | — 0.0028 | |
| | 19.8902 | |
| + corrección C = | 0.0028 | |
| L = | 198930 | |

**El mismo caso con una diferencia de nivel $d = 0.^{m}23$ entre los puntos de apoyo;**

| | | |
|---|---|---|
| $L =$ | | 19.8930 |
| corrección $n =$ | | |
| $n =$ | 0.002.8 | |
| $\frac{d^2}{2L} =$ | 0.001.3 | — 0.0043 |
| | | 19.8887 |
| corrección $C =$ | | 0028 |
| $L =$ | | 19.8915 |

Para la ejecución de la medición, bastan cuatro personas, dos para hacer las lecturas de la cinta sobre la señal situada en la cabeza del trípode, dos para mantener fija la tensión de la cinta por medio de los dinamómetros.

Para obtener la tensión conveniente una manera práctica de operar, consiste en que las dos personas encargadas de mantenerla, aseguren el dinamómetro entre la extremidad de la cinta y un jalón; entonces, clavando en tierra una de sus extremidades después de una simple tensión dada á la cinta, bastará inclinar el jalón para aumentar ésta hasta que el dinamómetro indique la tensión calculada.

### Largo de la Base

El *largo* de una base puede variar según la importancia de la triangulación y las condiciones topográficas de la localidad; así es que, teniendo presente la condición fundamental de formar triángulos equilaterales, debe procederse según los casos.

Si no puede medirse directamente el largo que conviene adoptar para la base, se procederá á la medición del largo que se pueda y luego formando pequeños triángulos, se *ampliará* hasta alcanzar próximamente la dimensión requerida.

De todas maneras, debe tenerse en cuenta que cualquiera que sea el largo de la base, debe procurarse que los ángulos formados en los estremos de ésta con los primeros vértices de triángulos, sean próximamente de 60°.

Como principio, se admite que el largo de una base no conviene que sea menor de la mitad del largo de un lado cualquiera del triángulo que se vá á resolver.

En todos los casos, una base deberá medirse dos veces cuando menos en sentido inverso para compartir las causas de error, y tomar el término medio.

Para operaciones topográficas la base puede ser medida directamente con una cinta de acero sobre un terreno plano y préviamente carpido; conviene en ese caso repetir varias veces la medición y hacer una prolija nivelación del terreno para la reducción á la horizontal.

### Reducción de la base al nivel del mar

La base medida es considerada como formando parte de un arco terrestre de radio R (radio esférico local en función de la latitud); pues como ese radio varía según la altitud de la localidad donde se midió la base, es necesario y conveniente reducir ésta al horizonte del mar; el no hacerlo así, traería seguramente una diferencia con la base de confrontación medida en el otro extremo de la triangulación y desacuerdos con los resultados obtenidos en una triangulación de un país vecino y cuya altitud sería diferente.

Llamando **B** la longitud de la base media, **b** la longitud de esa base reducida á la superficie del mar, **R** el radio terrestre correspondiente á la localidad incluyendo la altitud local **h** y **r** ese mismo radio al nivel del mar, se tendrá de

$$B : b :: R : r , \quad b = \frac{r}{R} B = \left( 1 - \frac{h}{r} \right) B$$

y finalmente la fórmula general $\qquad b = B - \frac{h}{r} B.$

Si como aplicación se hace

$$h = 800^{m} ; B = 10661^{m}, 8934 ; r = 6. 366,679_{m}$$

$$\frac{h}{r} B = 0. 00012565 \times 10661, 8934 = 1.^{m} 33966$$

de donde:

$$b = B - \left( \frac{h}{r} B \right) = 10661, 8934 - 1.^{m} 3396 = 10660^{m}, 5538$$

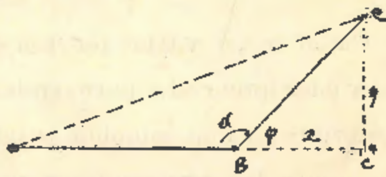
Como se ha dicho, la reducción de la base medida al nivel del mar, tiene por principal objeto uniformar los resultados de la triangulación, reduciéndolos al mismo plan de comparación; conviene así adoptar la altitud media de las planicias del país medido.

En operaciones hechas en país de poca altitud, como en la provincia de Buenos Aires la reducción podría evitarse, pero si se hicieran en la provincia de Córdoba cuya altitud media es de $417^{m}$ aquella sería necesaria.

### Bases compuestas

No siempre puede medirse sin obstáculos una base de una longitud conveniente, suele presentarse, pues, la conveniencia ó necesidad de medir bases quebradas, ó determinar ésta por una operación más complicada para obtener la base definitiva.

Se han medido las líneas A B y B C así como el ángulo $\alpha$ que forman entre sí, debiendo ser la base la línea A C




Del triángulo formado se calculará la proyección de B C sobre la prolongación de A B, teniéndose así el ángulo $\varphi = 180^o - \alpha$ y las proyecciones de B C

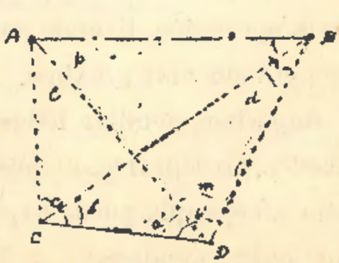
$$B\,c = x = B\,c \cos\varphi \quad y \quad C\,c = y = B\,c \operatorname{sen}\varphi$$

Luego queda formado el triángulo rectángulo A c C del cual se deduce;

$$\operatorname{tang.} a = \frac{C\,c}{A\,c} \quad y \; A\,C = \frac{A\,c}{\cos a}$$

ó también
$$A\,C = \frac{B\,C \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} a}$$

2.º *Ejemplo.*—Siendo A y B dos puntos elegidos para extremos de la base y no pudiéndose medir ésta directamente, puede determinarse midiendo la auxiliar C D y los ángulos correspondientes en cada extremo, sean:



$$ADC = a', \quad CDB = o, \quad BCD = b,$$

$$DCA = a, \quad ACB = e, \quad ABD = n \;\text{ y }\; CBD = d$$

se tendrá en el triángulo ACD con $c = 180 - (a + a')$

$$AD = \frac{CD \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \quad \text{y} \quad AC = \frac{CD \operatorname{sen} a'}{\operatorname{sen} c}$$

del triángulo CDB se deducirá $\qquad BD = \dfrac{CD \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} o}$

y del triángulo ADB en el cual $\qquad ADB = o - a' = r$

se tiene $\qquad AB = \dfrac{AD \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} n}$

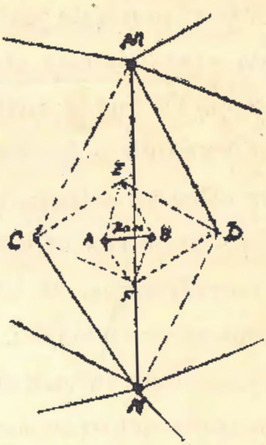
Como se vé, varias pueden ser las formas afectadas por una base quebrada, pero cada caso se prestará como los anteriores á una solución práctica, siempre que al operar se tomen las precauciones necesarias y se proceda con mucha escrupulosidad.

### Unión de la base á la red

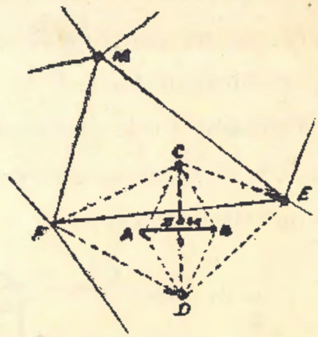
Una vez medida la base hay que proceder, con conocimiento de los accidentes topográficos y disposiciones adoptadas para la formación del primer triángulo, de la manera más acertada para sacar todo el partido posible de la operación, ligando convenientemente la *base* medida con el lado más próximo.

Imposible detallar todos los casos que en la práctica pueden presentarse, ni prescribir un método á seguirse; sólo un ejemplo puede exponerse para indicar la marcha que puede seguirse.

Sean C, D y M. los tres vértices del primer triángulo á establecerse y en los cuales se encuentran colocadas las señales convenidas; así mismo sea A B la base que se ha podido ó creído conveniente medir.




Formándose á cada lado un triángulo isósceles con ángulos en A y B de 60 á 70 grados, se llegará á determinar una nueva base E F, la que tal vez sea ya suficientemente larga para ser ligada por sus dos extremos á los vértices C y D.




Si así no fuera, se podría ampliarla aún siguiendo el mismo proceder, hasta llegar á asignarle un largo conveniente E F.

Por demás es decir, que todos los ángulos en cada vértice serán medidos directamente con toda proligidad.

### Forma y altura de las señales

A más de las señales que conviene dejar en los extremos de la base medida se hace necesario el empleo de otras para los mismos fines de la triangulación.

Para los extremos de la base pueden construirse, pequeños macizos de mampostería en cuyo centro se colocará

$$ADC = a', \quad CDB = o, \quad BCD = b,$$

$$DCA = a, \quad ACB = e, \quad ABD = n \quad y \quad CBD = d$$

se tendrá en el triángulo ACD con $c = 180 - (a + a')$

$$AD = \frac{CD \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \quad y \quad AC = \frac{CD \operatorname{sen} a'}{\operatorname{sen} c}$$

del triángulo CDB se deducirá $\quad BD = \dfrac{CD \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} o}$

y del triángulo ADB en el cual $\quad ADB = o - a' = r$

se tiene $\quad AB = \dfrac{AD \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} n}$

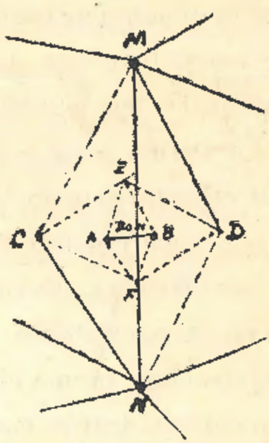
Como se vé, varias pueden ser las formas afectadas por una base quebrada, pero cada caso se prestará como los anteriores á una solución práctica, siempre que al operar se tomen las precauciones necesarias y se proceda con mucha escrupulosidad.

### Unión de la base á la red

Una vez medida la base hay que proceder, con conocimiento de los accidentes topográficos y disposiciones adoptadas para la formación del primer triángulo, de la manera más acertada para sacar todo el partido posible de la operación, ligando convenientemente la *base* medida con el lado más próximo.

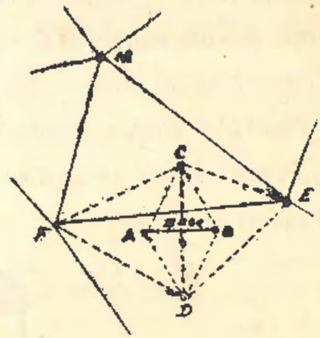
Imposible detallar todos los casos que en la práctica pueden presentarse, ni prescribir un método á seguirse; sólo un ejemplo puede exponerse para indicar la marcha que puede seguirse.

Sean C, D y M. los tres vértices del primer triángulo á establecerse y en los cuales se encuentran colocadas las señales convenidas; así mismo sea A B la base que se ha podido ó creído conveniente medir.




Formándose á cada lado un triángulo isósceles con ángulos en A y B de 60 á 70 grados, se llegará á determinar una nueva base E F, la que tal vez sea ya suficientemente larga para ser ligada por sus dos extremos á los vértices C y D.

Si así no fuera, se podría ampliarla aún siguiendo el mismo proceder, hasta llegar á asignarle un largo conveniente E F.




Por demás es decir, que todos los ángulos en cada vértice serán medidos directamente con toda proligidad.

### Forma y altura de las señales

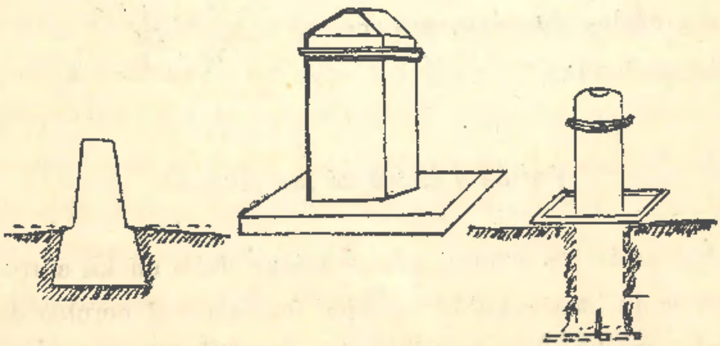
A más de las señales que conviene dejar en los extremos de la base medida se hace necesario el empleo de otras para los mismos fines de la triangulación.

Para los extremos de la base pueden construirse, pequeños macizos de mampostería en cuyo centro se colocará una piedra losa, en la cual dos diagonales grabadas, indicarán el punto de partida de la medición; también pueden colocarse toda otra clase de *mojón* ó señal según las consecuencias que se atribuya á la operación que se ejecuta.

En cuanto á las señales para la triangulación, son de dos especies principales: *fijas* é inamovibles, y transitorias ó mientras dure la operación.

Las primeras, situadas por lo general en sitios elevados, como cerros aislados, picos elevados en una serranía ó simplemente en una elevación notable en terrenos llanos, son construidos de mampostería, afectando la forma de un pilar, y reservándose en su centro un agujero en el cual pueda colocarse en momento oportuno, ya una bandera, ya un reflector ú cualquier otra señal que pueda apercibirse de lejos.

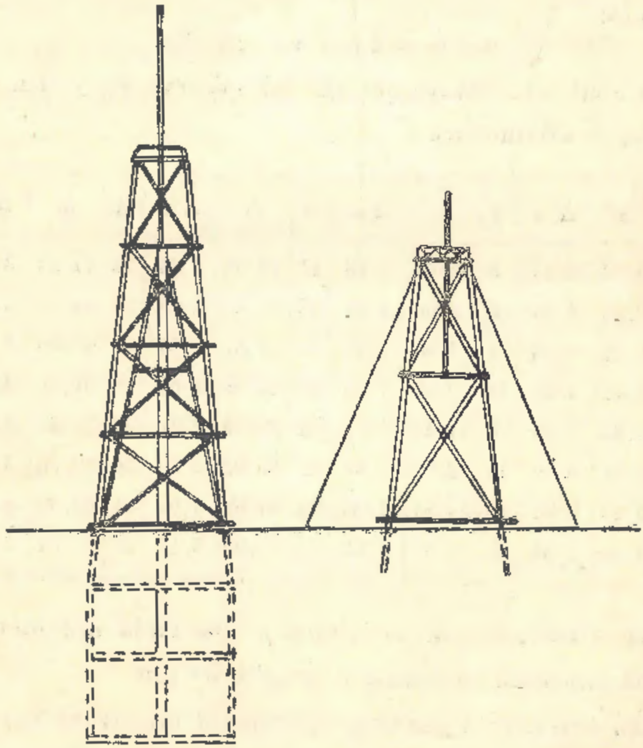
También suelen colocarse columnas huecas de fundición, hechas de acuerdo á un modelo conveniente y con la inscripción del caso.



Las presentes figuras, indican tipos económicos y comunmente empleados.

En todo caso sería prudente que estas señales ó mojones tuvieran una altura tal, que no impidieran la colocación del trípode á fin de que los ángulos observados lo fueran del mismo centro de la señal ó vértice.

Las señales transitorias ó accidentales son de construcción liviana, generalmente de madera, pues que necesitarán muchas veces ser trasladadas á otro sitio; con



todo, deben tener suficiente resistencia para soportar el peso de los observadores, evitar las trepidaciones ú oscilaciones y, finalmente, tener una altura proporcional al largo de las líneas para las cuales sirven de señal y aun de estación.

En estas figuras se indican los tipos más sencillos y usuales, pero seguramente éstos variarán según las localidades y exigencias de la operación que se efectúe.

Por lo que se refiere á la altura que debe tener una señal para ser vista desde la otra estación y recíprocamente para desde ella verse la otra, se puede aplicar la siguiente fórmula, para la cual se ha calculado la tabla adjunta:

$$\log m = 2 (\log d - 2.59036)$$

en la cual m = altura del ojo del observador y d = distancia en kilómetros.

| d | m | Δ m | d | m | Δ m | d | m | Δ m | d | m | Δ m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1k | 0.07 | 0.13 | 9 | 5.34 | 1.19 | 17 | 19.06 | 2.24 | 25 | 41.23 | 3.30 |
| 2 | 0.26 | 0.26 | 10 | 6.60 | 1.32 | 18 | 21.37 | 2.38 | 26 | 44.59 | 3.48 |
| 3 | 0.59 | 0.40 | 11 | 7.98 | 1.45 | 19 | 23.81 | 2.51 | 27 | 48.08 | 3.56 |
| 4 | 1.06 | 0.53 | 12 | 9.50 | 1.58 | 20 | 26.38 | 2.64 | 28 | 51.71 | 3.69 |
| 5 | 1.65 | 0.66 | 13 | 11.15 | 1.71 | 21 | 29.09 | 2.77 | 29 | 55.47 | 3.83 |
| 6 | 2.37 | 0.79 | 14 | 12.93 | 1.84 | 22 | 31.92 | 2.90 | 30 | 59.36 | 3.96 |
| 7 | 3.23 | 0.92 | 15 | 14.84 | 1.98 | 23 | 34.89 | 3.04 | 31 | 63.39 | 4.09 |
| 8 | 4.22 | 1.06 | 16 | 16.89 | 2.11 | 24 | 37.99 | 3.17 | 32 | 67.54 | 4.22 |

Δ m = variación de la altura m por cada mil metros, es una cantidad constante é igual á $0^m 132$.

Para obtener la parte proporcional de altura correspondiente á dos distancias de la tabla, sea entre las d, sea entre las m, y llamando $d_o$ y $m_o$ las de las tablas, se tendrá:

$$\text{para m,}\quad m = m_o + (d - d_o)\,\Delta m$$

$$\text{para d,}\quad d = d_o + \frac{m - m_o}{\Delta m}$$

Asignando á $d_0$ el valor de $25^k$ 825

$$d - d_0 = 0^k 825, \qquad m_0 = 41^m 23, \qquad \Delta\, m = 3.30 \text{ para } 25^k$$

$$m = 41.23 + (0.825)\, 3.30 = 41^m 23 + 2^m 723 = 43^m 953.$$

Asignando á $m = 44^m$, hallar la distancia d.

$$\text{para } m_0 = 41^m 23, \qquad d_0 = 25^k, \qquad \Delta\, m = 3.30$$

$$m - m_0 = 44^m - 41^m 23 = 2^m 77$$

$$d = 25^k + \frac{2.77}{3.30} = 25 + 0.809 = 25^k\ 839.$$

A la altura hallada m, conviene siempre aumentarle la altura del instrumento, sea 1.50 á 1.70.

## Medición de los ángulos

Colocado el teodolito perfectamente en la vertical que pasa por el vértice de la señal ó estación, se procederá á la medición del ángulo ó ángulos, ya por giros, ya por repetición.

Las causas de errores angulares, son:

1.° Error de graduación del limbo, ó defecto instrumental.

2.° Error de lectura.

3.° Error de colimación.

4.° Error dependiente del estado de la atmósfera.

Algunas de estas causas son atenuables por la rectificación del instrumento, así que sólo se consideran aquellas causas que están fuera del alcance del observador;

por otra parte, es un principio conocido para obtener la mayor aproximación de la verdad, que el término medio de un número de medidas es más exacto que una de ellas aislada.

De ahí proviene la conveniencia de repetir la medición de cada ángulo un crecido número de veces para tomar el término medio.

Dos son los procedimientos preconizados para la medición de los ángulos, *por giros* ó por *repetición*.

Cada uno tiene sus ventajas y sus inconvenientes, pero por su sencillez y disminución de lecturas, se recomienda generalmente más el de repetición.

Cualquiera que sea el procedimiento empleado, todos están contestes en la conveniencia de hacer un crecido número de mediciones del mismo ángulo, habiendo célebres observadores que recomiendan hacer 60 lecturas para un ángulo de una estación de primer órden, 20 para uno de segundo y 8 ó 10 para uno de tercero.

El método de *reiteración* consiste en medir directamente un mismo ángulo un cierto número de veces, cambiando cada vez el punto de partida en la colocación del nonius. Se hacen, pues, obligatorias dos lecturas ó dos anotaciones en cada observación.

En el método de *repetición*, puesto desde un principio el índice del nonius sobre el cero del limbo, se ha tomado el ángulo, haciendo una lectura de 58° 20′ 38″, se repite la operación, manteniendo esa graduación de manera que la nueva lectura debe indicar el doble de la primera; ha resultado: 116° 53' 20" así que el verdadero ángulo será $\frac{116° 53' 20''}{2} = 58° 26' 40''$; si fueran tres las lecturas se tendría $\frac{175° 19' 57'',81}{2} = 58° 26' 39'',27$.

En ambos métodos de observación conviene *conjugar* las lecturas, esto es, hacer la medición del ángulo una vez de izquierda á derecha, y otra vez en sentido inverso, de derecha á izquierda.

### Reducción del ángulo al centro de la Estación

No siempre es posible colocar el teodolito en la vertical del punto que constituye el vértice del triángulo, punto ya relevado desde otras estaciones y en el que debería haberse medido el ángulo.


Las causas son: ya la elevación de la señal establecida en el punto (el mojón), ya por ser la cruz de un campanario ó ya por cualquier otro inconveniente.

Varios casos pueden presentarse, los que podrán resolverse como los siguientes:

*Primer caso.* — A es el vértice de la estación, O es el punto donde se colocó el instrumento en la prolongación de la línea B A, uno de los costados, el ángulo á medirse es B A C, y sólo puede medirse el B O C.

Sea $AO = m$, distancia muy pequeña medida directamente con mucha exactitud, ángulo $BOC = \alpha$, $ACO = \theta$ y $OC = b$.

Suponiendo una paralela ideal $OE$ á $AC$

$$ACO = COE = \theta \quad \text{será } BAC = r + \theta$$

Del triángulo $COA$, $\operatorname{sen} \theta : m :: \operatorname{sen} \theta : AC = b$

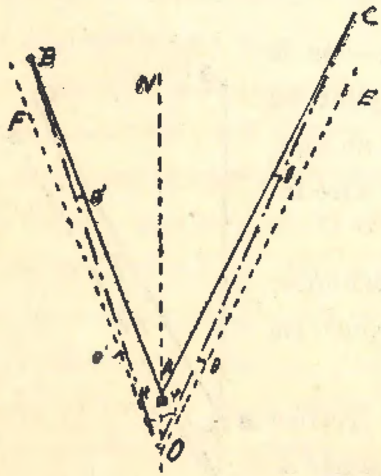
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b}$$

pero como *m* es muy pequeño con relación á *b* puede hacerse

$$\theta = \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''} \quad \text{(en segundos)}$$

con lo que se tendrá el ángulo buscado $BAC = \theta + \theta$.

*Segundo caso.*—Sea A el vértice de la estación del triángulo $BAC$, y $O$ el punto del instrumento á la distancia $OA = m$ del vértice y sin hallarse en prolongación de ninguno de los costados.




Supongamos dividido el ángulo $BOC$ en dos partes por la línea $OAN$ que pasa por el vértice, cada una de esas partes reducirá al problema anterior; así que haciendo: en $NOC$, $NOC = \theta$, $ACO = \theta = COE$

se tendrá $NAC = NOE = \alpha + \theta = \alpha + \dfrac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \sin 1''}$ (siendo $CO = b$)

En $BON$, $NAC = NOF = \alpha' + \theta' = \alpha' + \dfrac{m \operatorname{sen} \alpha'}{c \operatorname{sen} 1''}$ (donde $CO = c$)

luego $BAC = NOE + NOF = BOC + \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''} + \frac{m \operatorname{sen} \alpha'}{b \operatorname{sen} 1''}$

de donde resulta $BAC = BOC + \frac{m}{\sin 1''} \times \left(\frac{c \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \alpha'}{b\,c}\right)$

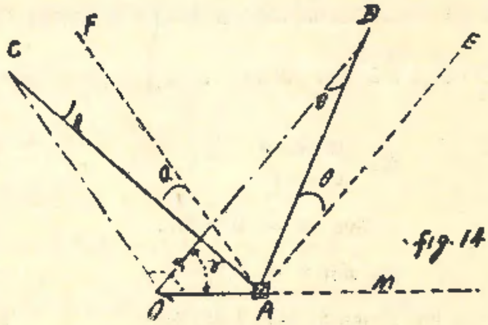
Al aplicar estas fórmulas del primero y segundo caso, debe tenerse presente que si el punto O se halla al interior del triángulo B A C, el ángulo $\theta$ de corrección será negativo y el ángulo $BAC = \alpha - \theta$.

*Tercer caso.*—El punto O del instrumento se encuentra á la derecha ú izquierda del vértice A.

Como se verá de la inspección de las figuras 14 y 15 la solución será la misma en ambos casos.

Sean los ángulos medidos $COA = \alpha$, $C\,o\,B = BOA - v$, y $m =$ la distancia O A.

Si por A se traza una paralela á O B, el ángulo B A M formado con la prolongación de O A tendrá por valor




siendo $OBA = BAE = \theta$ y $AB = L$

$BAM = v + \theta$ y $= \theta \; \frac{m \operatorname{sen} v}{l \operatorname{sen} 1''}$  $BAM = v + \frac{m \operatorname{sen} v}{l \operatorname{sen} 1''}$

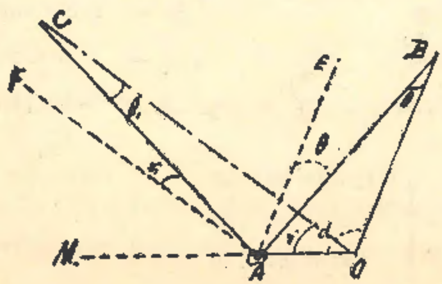



Figura 15.

Si por A se lleva A F' paralelo á O C, el ángulo C A M tendrá por valor, haciendo $ACO = CAF = \theta$, y $CA = b$

$$C A M = \alpha + \theta_{\prime} \quad y \quad \theta_{\prime} = \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''}$$

luego

$$C A M = \alpha + \frac{M \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''}$$

El ángulo corregido y buscado será pues, igual

$$C A B = C A M - B A M = \left( \alpha + \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''} \right) - \left( v + \frac{s n \operatorname{sen} v}{1 \operatorname{sen} 1''} \right)$$

Siguiendo el mismo proceder con la figura 15 se obtiene igual resultado.

*Ejemplo.*—Aplicable á la figura precedente:

A C = b = 7157m, 50, A B = b = 5770m, ángulos observados

C O A = $\alpha$ = 126° 13' 48'', B O A = 56° 37' 25'' = v, dist. m = 3m, 656

$$\theta_{\prime} - \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{sen} 1''} \qquad \theta_{n} = \frac{m \operatorname{sen} v}{1 \operatorname{sen} 1''}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| log. m = | 0.56301 | log. m = | 0.56301 |
| log. sen $\alpha$ = | 9.90673 | log. sen v = | 9.92184 |
| cop. log. (b sen 1'') = | 1.522723 | c lg (l sen 1'') = | 1.44965 |
| | 1.99246 | | 1.93440 |
| | 98'', 28 | | 85'', 98 |
| $\theta_{\prime}$ = | 1' 38'', 28 | $\theta_{n}$ = | 1' 25'', 98 |
| + $\theta$ = | 126° 1348 | + v = | 56° 3725 |
| | 126° 15' 26'', 28 | | 56° 38 50'', 98 |

$$C A B = \begin{cases} \phantom{-}126° \; 15' \; 26'', 28 \\ - \; 56° \; 48' \; 59'', 98 \\ \phantom{-}69° \; 36' \; 26'', 30 \end{cases}$$

4.° *Caso.*—Sea O el centro de la estación, el ángulo al centro que no puede medirse es A O B, (Figura 16).

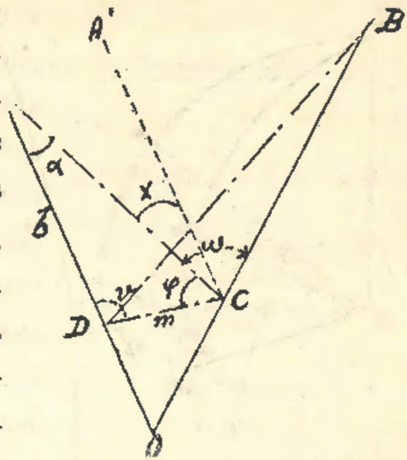



Fig. 16

Después de fijados dos puntos C y D en las líneas O A y O B , se miden los ángulos A D C y A D B = v, B C D y B C A = ω A C D = φ.

Se mide la distancia C D = m, y se calcula la distancia A D = b por resolución de los triángulos.

Luego, ideando por C una paralela C A' á D A se tendrá:

$$\text{por el triángulo } A\,C\,D\ ,\ \text{sen}\ \alpha = \frac{m\ \text{sen}\ \varphi}{b}$$

$$\text{sen}\ \varphi = \frac{m\ \text{sen}\ \varphi}{b\ \text{sen}\ 1''}$$

$$\text{ahora el ángulo } A\,O\,B = A'\,C\,B$$

$$\text{pero } A'\,C\,B = A\,C\,B - A\,C\,A' = \omega - \alpha$$

$$\text{luego el ángulo } A\,O\,B = \omega - \frac{m\ \text{sen}\ \varphi}{b\ \text{sen}\ 1''}$$

El punto O puede ser el centro de un campanario ó torre inaccesible, en la cual no puede subirse.

### Reducción de los ángulos al horizonte

Los ángulos medidos con un teodolito ó un círculo azimutal cuya horizontalidad se asegura antes de operar, da la medida exacta del ángulo diedro formado por los dos verticales que pasan por los puntos cuya medida angular quiere conocerse. Pero no sucede lo mismo, si el ángulo se tiene que medir con un sextante ó un círculo de reflexión, mucho más cuando los puntos observados, no hallándose al nivel del mar, tienen altitudes diferentes, por lo que la medida angular que resulta es tomada sobre un plano inclinado.

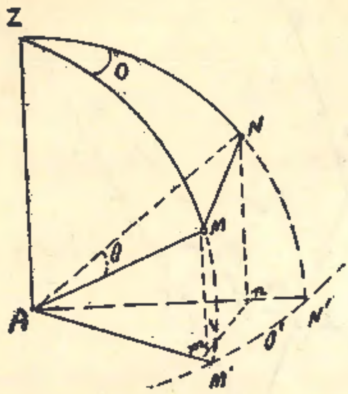


Fig. 17

Al ángulo así observado habrá que reducirlo al plan del horizonte.

Las alturas zenitales de los dos puntos ó señales M N observadas desde la estación A figura 17 serán medidas y llamándolas z y z', así como O el ángulo medido M A N y O' el ángulo reducido al horizonte, se tiene del triángulo esférico Z M N en el cual se conocen los tres lados, el valor del ángulo O' diedro M O N formado en el zenit Z.

$$\text{Sen}\ \frac{O'}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p - z)\ \text{sen}\,(p - z')}{\text{sen}\ z\quad \text{sen}\ z'}}$$

en cuya fórmula $\quad p = \dfrac{z + z' + o}{2} \quad$ (o = arco M N)

El duplo del valor hallado será, pues, el ángulo reducido que se busca.

Tambien puede resolverse el problema hallando el valor de la corrección x que debe aplicarse al ángulo medido para tener el ángulo reducido siendo este $O' = O + x$

Haciendo $h = 90^o - z$ y $h' = 90^o - z'$ se llega á la fórmula

$$x = \text{tang.} \frac{O}{2} \left( \frac{h + h'}{2} \right)^2 \text{sen } 1'' - \text{cotg } \frac{O}{2} \left( \frac{h - h'}{2} \right)^2 \text{sen } 1''$$

Esta fórmula es exacta para valores de $h$ y $h'$ inferiores á 3.°; en caso contrario es preferible la anterior.

*Ejemplo.*—

$h = 2^o\,23'\,25''$, $\quad \left(\frac{h + h_1}{2}\right) = 1^o\,51'\,30'' = 6690''$

$h' = 1^o\,19'\,35''$, $\quad \left(\frac{h - h_1}{2}\right) = 0^o\,31'\,55'' = 1915$

$O = 70^o\;7'\,40''$,

$\frac{O}{2}\;35^o\,03'\,50''$,

$$\begin{array}{rr}
\text{log. tang. } 35^o\,03'\,50'' = 9.84626 & \text{log. cotg. } 35^o\,03'\,50'' = 0.15374 \\
2.\text{ log. } 6690'' = 7.65086 & 2.\text{ log. } 1915'' = 6.56434 \\
\text{log. sen } 1'' = 4.68557 & \text{log. sen } 1'' = 4.68557 \\
\hline
2.18269 & 1.40365 \\
I = 152'',28 & II = 25'',33 \\
= 2'\;32'',28 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
I = & 2'\,32'',28 \\
II = & 0'\,25'',33 \\
\hline
x = & 2'\,06'',55 \\
\text{ángulo } O = & 70^o\,07'\,40'' \\
\hline
\text{ángulo reducido } O_1 = & 70^o\,29'\,46'',55
\end{array}$$

## Resolución de los triángulos.—Teorema Legendre.— Exceso esférico

Siendo los triángulos esféricos, trazados sobre la esfera terrestre, sensiblemente semejante á triángulos rectilíneos, por la pequeñez de sus lados con relación á las dimensiones del esferoide; los dos triángulos, así idealmente superpuestos ofrecerán sólo en sus ángulos, una pequeña diferencia resultando que la suma de los ángulos del esférico excederá á las de los del rectilíneo en una cantidad llamada *Exceso esférico.*

Como consecuencia de esa relación entre esos dos triángulos, Legendre ha demostrado el teorema que conserva su nombre y dice: que todo triángulo esférico (geodésico), puede ser tratado como rectilíneo deduciendo á cada uno de sus ángulos la tercera parte del Exceso esférico.

El exceso esférico $\varepsilon$ puede ser expresado por diversas fórmulas, se le da en principio en función á la superficie S del triángulo y del radio terrestre R.

$$\varepsilon = \frac{S}{R} = \frac{S}{R \operatorname{sen} 1''} \quad \text{valor expresado en segundos.}$$

Como la superficie es variable y el radio también según la latitud, la expresión $\frac{S}{R \operatorname{sen} 1''}$ puede sufrir otras transformaciones; así: en función á los dos lados *a, b* y el ángulo comprendido C, así como asignando al R el valor de 6.367.524 metros se tendrá:

$$\varepsilon = \frac{a, b \operatorname{sen} C}{2 R^2 \operatorname{tang.} 1''} = 206265'' \frac{a\ b \operatorname{sen} C}{2 R^2}$$

En función de los tres lados se tendría:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{S (S-a) (S-b) (S-c)}}{R^2 \operatorname{tang.} 1''} = 206265'' \frac{\sqrt{S (S-a) (S-b) (S-c)}}{R^2}$$

Fórmula de *L'Huiller:*

$$\operatorname{tang.} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} S \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} (S-a) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} (S-b) \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} (S-c)}$$

Si el triángulo fuera equilateral, la fórmula que precede se transformaría en:

$$\text{tang}\ \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\text{tang}\ \frac{3\ a}{4}\ \text{tang}^3\ \frac{a}{4}}$$

Sí, para darse una idea, de la importancia del exceso esférico se asigna, en un triángulo equilateral, al costado á un largo variable de 4, 20, 40 y 60 minutos geográficos sean, $7^k 522$, $37^k 110$, $74^k 221$, $111^k 330$, resultará ser el exceso esférico respectivamente de $\frac{1}{8}$, 3, 12, 27 segundos, ó en otros términos, 1", 2" ó 3" para lados de unos 24.000 32.000 y 40.000 metros.

Esto demuestra que sólo en muy grandes triángulos geodésicos puede tomarse en consideración el exceso esférico y que en los demás casos basta, para la resolución de los triángulos, considerarlos como triángulos rectilíneos afectando cada ángulo de la corrección $-\frac{1}{3}\varepsilon$.
siendo $\varepsilon = A + B + C - 180^o$

Así pues, para el cálculo de los lados de triángulos de 1er. orden la marcha á seguirse es:

Reducir los ángulos al centro de la Estación y al horizonte, si no han sido observados con un teodolito.

Hallar el exceso de la suma de los 3 ángulos sobre 180 grados y disminuir cada uno de los ángulos de la $\frac{1}{3}$ parte de ese exceso.

NOTA.—La aplicación de la fórmula de L'huillier para el exceso esférico y las que de ella se derivan para calcular los ángulos en función de los lados, puede servir de verificación á las observaciones hechas en el terreno y cálculos posteriores. (Véase Trigonometría esférica).

## Magnitud de los triángulos

Como se ha dicho anteriormente, los triángulos principales de una red de trigonometría, se clasifican en 3 órdenes ó magnitud asignándoles á sus respectivos lados una distancia variable:

Para los de 1er orden, entre 30 y 70.000 metros.
» » » 2.° » » 15 y 30.000 »
» » » 3er » hasta 15.000 metros.

Como se ha visto también, la magnitud de esos lados influye sobre la manera de calcularlos, pues que pasando un cierto límite los efectos de la esfericidad terrestre son bastante sensibles para tomarlos en consideración; en este orden de ideas los triángulos de 1er y 2.° orden deben ser tratados geodésicamente mientras que los de 3er orden pueden serlo para la trigonometría plana sin prévia corrección de esfericidad.

Considerando un circulo máximo de radio

$$R = 6.378.339^m$$

el valor de un arco en segundos, correspondiente á otro expresado en metros, tiene por representación

$$\text{arco } a'' = \frac{\text{arco } a_m}{R \operatorname{sen} 1''} = \frac{a_m}{6.378.339 \operatorname{sen} 1''}$$

luego, asignando á $a_m$ un término medio de $40.000^m$, resultará esta cantidad corresponder á un arco de unos 21' 20''; y para el máximun de $70.000^m$ á 37' 40'', lo que es bien poco con relación á la magnitud de dicho círculo máximo y al radio esférico; de ahí que en la mayoría de los casos puede substituirse el arco mismo á sus senos ó cosenos trigonométricos. Por otra parte, se podrá substituir al radio terrestre el radio de curvatura media, $\sqrt{\rho' \rho}$, variable para cada triángulo, y como ese mismo radio influye sobre el valor del exceso esférico de la suma de los tres ángulos del triángulo sobre 180°, siendo así que el exceso disminuye de valor cuanto más aumenta el radio de la esfera sobre la que se encuentra trazado el triángulo, resulta que todos los triángulos podrán ser tratados por la trigonometría plana como triángulos rectilíneos en los cuales se tiene en cuenta las dimensiones de la tierra.

Así, pues, todo triángulo geodésico será tratado como rectilíneo después de disminuir cada uno de los ángulos observados, de la tercera parte del exceso esférico, que varía á su vez en relación al radio, como lo indica su expresión más simple $\varepsilon = \frac{S}{R \text{ sen } 1''}$

en la que la superficie S del triángulo y el radio R son expresados en metros.

Con motivo de la reducción de los lados de un triángulo de metros á segundos ó recíprocamente, conviene tener presente las siguientes fórmulas:

$$d_{\text{(en segundos)}} = \frac{d_{\text{(en metros)}}}{N_{\text{(en metros)}} \text{ sen } 1''}$$

$$d_{\text{(en metros)}} = d_{\text{(segundos)}} N_{\text{(metros)}} \text{ sen } 1''$$

El valor de la normal N en metros, dado por la fórmula

$$N = \frac{R}{\sqrt{1 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

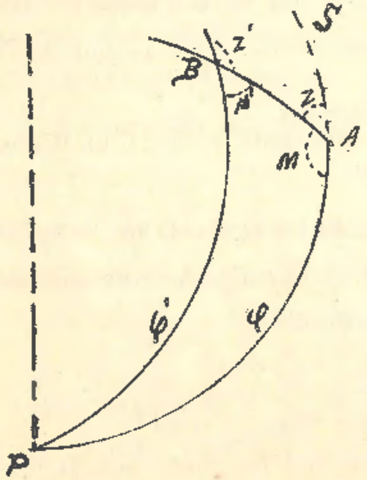
se halla dado bajo forma de tablas así como su logaritmo (tabla III), y en función de la latitud y del radio ecuatorial $R = 6.378.339^m 10$.

Sea $d$ (segundos) $= 31' \, 6'', 656$ el valor correspondiente de d en metros, en lat. $= 49°$

$$\begin{array}{rl}
\log a'' & = 3.2710638 \\
\left.\begin{array}{r}\log N = 0.0008485 \\ \log R = 6.8047076\end{array}\right\} & = 6.8055561 \\
\log \operatorname{sen} 1'' & = 4.6855749 \\
\log d_m & = 4.721948 \\
d_m & = 3.7835^m, 50
\end{array}$$

### Coordenadas geográficas de los vértices

Deducida la posición geográfica de uno de los vértices de la triangulación, se puede calcular la de los demás vértices, con lo que puede luego construirse el mapa general.




Sea A el punto de partida cuya latitud es $\varphi$ y longitud $\omega$. Sea A B un costado de un triángulo de primer órden cuya extensión es $AB = d_m$ (metros) y su azimut $SAB = Z$ visto sobre el horizonte de A; la diferencia de longitud entre los dos puntos será el ángulo $APB = P$.

Si se considera el triángulo esférico A P B trazado sobre una esfera, su resolución se obtendría por las siguientes fórmulas:

$$(1)\ \text{sen}\ \varphi_1 = \text{sen}\ \varphi \cos d'' + \cos\varphi\ \text{sen}\ d'' \cos\alpha; \qquad \alpha = 180^\circ - Z$$

$$(2)\ \text{sen}\ P = \text{sen}\ d\ \frac{\text{sen}\ M}{\cos\varphi_1}$$

$$(3)\ \text{tang.}\left(\frac{M + M'}{2}\right) = \text{cotg.}\ \frac{P}{2}\ \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\text{sen}\ \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)}$$

luego $\varphi - \varphi_1 = a; \qquad \varphi_1 = \varphi - a.$

Pero en atención á la relativa pequeñez de P, *d* y *a* con relación al radio de la esfera terrestre, pueden sustituirse los senos y cosenos de esos valores por sus arcos y efectuadas las transformaciones se tienen las siguientes fórmulas:

$$(a)\qquad \varphi - \varphi_1 = a = d\cos Z + \frac{1}{2} d^2\ \text{sen}\ 1''\ \text{sen}^2 Z\ \text{tang}\ \varphi - \frac{1}{6} d^3\ \text{sen}^2 1''\cos Z\ \text{sen}^2 Z\ (1 - 3\ \text{tang.}^2\varphi)$$

$$(b)\quad P = d\ \frac{\text{sen}\ Z}{\cos\varphi_1} + \frac{1}{6} a^3\ \text{sen}^2 1''\ \frac{\text{sen}\ Z\cos(Z + \varphi_1)\cos(Z - \varphi_1)}{\cos^2\varphi_1}$$

$$(c)\qquad Z' = 180^\circ + Z - P\ (\text{sen}\ \varphi - \cos\varphi\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a)$$

Como estas fórmulas han sido deducidas en el concepto de ser esférica la tierra, es necesario introducirles una corrección por el aplanamiento. La diferencia de latitudes hallada por las fórmulas, representa en la esfera el ángulo formado en su centro por los dos radios que concurren sobre el mismo meridiano, á los paralelos de A y B; pero en el *esferoide*, esa diferencia es la de las normales ó radios de curvatura del meridiano esférico y el del esferoide.

P A = P A'

B = Lat. Esférica

B' = ,, esferoidal

$\alpha$ = ángulo formado por las Normales

si $\varphi_1 < \varphi$; Lat. B' < Lat. B

si $\varphi_1 > \varphi$; ,, B' > ,, B

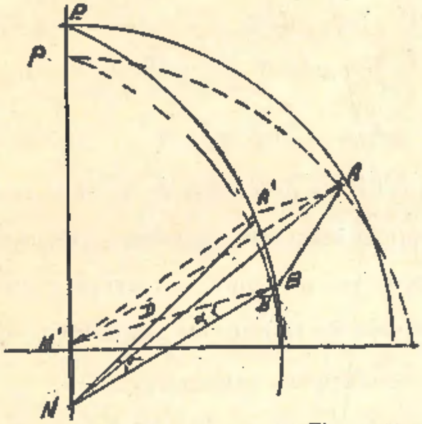



Figura 19.

B' B = h

Lat. A = Lat. A' = $\varphi$

Lat. B = ........... $\varphi_1$

P A B = P A B' = Z

A' N B' = D N B = $(\varphi - \varphi_1)$ = d

N' B' N = D B' N = $\alpha$

Este ángulo, como se vé en la figura 19 es N' B' N = D B' N = $\alpha$ y calculado su valor, se tendrá la siguiente série de fórmulas que resuelven el problema.

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right) a \cos^2 \varphi,$$

$$\text{y } B B' = h = \frac{6.400.000}{2} \times$$

$$\times e^2 \frac{\text{sen}^2 1'' \cos^2 \varphi \; a^2}{(1 - e^2) \text{sen}^2 \varphi}$$

$$(A B') - (A B) = \delta = h \alpha \text{ sen } 1''$$

En estas expresiones pueden sustituirse ciertos valores por sus logaritmos que figurarán como constantes.

$$\log. \left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right) = 7.8375$$

$$\log. (3.200.000 \; e^2 \text{sen}^2 1'') = (3.710 - 10)$$

(A)... $\alpha = [\,7.8375\,]\, a \cos^2 \varphi$ $\qquad h = [\,3.710 - 10\,]\, a^2 \dfrac{\cos^2 \varphi}{(1 - e^2)\, \text{sen}^2 \varphi}$

(B)... $\delta = h\, \alpha \text{ sen } 1''$

(C)... $(\varphi - \varphi') = a = d \cos Z + \frac{1}{2} d^2 \text{sen } 1'' \text{sen}^2 Z \text{ tang } \varphi$

$$- \frac{1}{6} d^3 \text{sen}^2 1'' \cos Z \text{ sen}^2 Z (1 + 3 \text{ tang}^2 \varphi)$$

(D)... $P = d \dfrac{\text{sen } Z}{\cos \varphi'} - \dfrac{1}{6} a^3 \text{sen}^2 1'' \dfrac{\text{sen } Z \cos (Z + \varphi') \cos (Z - \varphi')}{\cos^3 \varphi'}$

(E)... $Z' = 180 + Z - P (\text{sen } \varphi - \cos \varphi \text{ tang. } \frac{1}{2} a)$

ó también $Z' = 180 + Z - P\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi\,\tfrac{1}{2}\,a\,\text{sen}\,1'')$

$$\varphi_1 = \varphi - a\,; \qquad \varphi = \varphi_1 - \alpha$$

$$d\,(\text{en segundos}) = \frac{d_m\,(\text{en metros})}{N\,(\text{metros})\,\text{sen}\,1''}\,; \qquad N(\text{metros}) = \frac{6378339,}{\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi}}$$

Estas fórmulas con aplicación indicada para los triángulos de primer orden, pueden ser simplificadas para su aplicación á los triángulos de segundo orden y de tercero en los cuales siendo los lados sucesivamente de menor extensión, su resolución pertenece á la trigonometria rectilínea.

El costado d proyectado sobre la meridiana tiene por coordenadas $x = d\,\text{sen}\,Z, \quad y = d\cos Z$

pero, d sobre el elipsoide tiene por valor en segundos

$$d'' = \frac{d_m}{N_m\,\text{sen}\,1''}$$

se tendrá luego $$d\,\text{sen}\,z = \frac{x}{N\,\text{sen}\,1''}$$

(N en metros)

$$d\cos z = \frac{y}{N\,\text{sen}\,1''}$$

Substituyendo estos valores en la ecuación C, y teniendo presente que puede despreciarse el último término del segundo miembro, siempre que el punto B no diste más de 40 kilómetros del orígen A, la latitud del mencionado punto B con relación á la conocida de A, será dada por las siguientes fórmulas:

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} \varphi - \varphi_1 = a = \dfrac{y}{N\,\text{sen}\,1''} + \dfrac{x^2}{2\,N^2\,\text{sen}\,1''}\,\text{tang}\,\varphi \\[2ex] \alpha = [7.8375]\cos^2\varphi\,; \quad \varphi_1 = \varphi - a\,; \quad \varphi^1 = \varphi_1 - \alpha \end{array}\right.$$

en las cuales

$$\log N_m = \log.\ \text{radio ecuador (en metros)} + \log N\ (\text{de las tablas})$$

$$P = \frac{x}{N\,\text{sen}\,1''\cos\varphi_1}$$

$$z' = 180 + z - P\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a)$$

En las fórmulas que dan el valor del azimut z' del punto B con relación al orígen A, el último término se llama la convergencia de meridianos; su expresión es, pues,

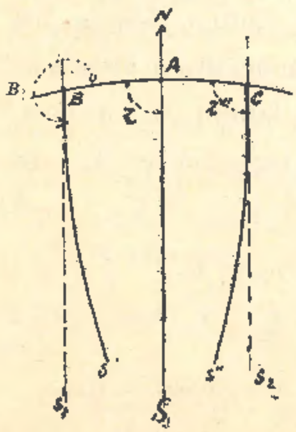
$$d\,z = P\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,a)$$

ó simplemente $$d\,z = P\,\sin\left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right)$$

Indica esta expresión que, no siendo los meridianos círculos paralelos entre sí, sino círculos máximos que convergen al polo, el azimut de una línea varía continuamente, y que en un punto cualquiera de su extensión será el del punto de partida más ó menos esa corrección d z, esto es: $\alpha' = \alpha \pm d\,z$.

La corrección d z se aplicará con el signo + si el segundo punto queda al Oeste del primero, y con el signo — en caso contrario; así mismo será nula en el Ecuador y aumenta con la latitud. Lo que precede es en el concepto de que el polo Sud sea tomado como orígen de los azimutes.

Sea N S la meridiana del punto orígen A de la B A C, cuyo azimut es S A B = z, en el punto B se tiene B $S_1$ línea paralela á N $S_1$, y B S', el meridiano verdadero; luego el azimut en B, será




$$S'\,B\,B' = S'\,B\,S_1 + S_1\,B\,B' = z + d\,z$$

Por lo contrario, en el punto C, trazados los dos meridianos C $S_2$ y C S'', el azimut verdadero será

$$S''\,C\,A = S_2\,A\,C - S''\,C\,S_2 = z - d\,z$$

Principalmente por la substitución de triángulos planos por los esféricos, varios pequeños errores se van cometiendo en la deducción de las coordenadas de los vértices, á medida que aumenta la distancia de ese punto ó vértice al de orígen; este error se hace sensible á la distancia de 150.000 metros y, con el fin de librarse de esos efectos, se admite generalmente como máximum de apartamiento para calcular directamente las coordenadas sobre el meridiano de partida y su perpendicular, la distancia de 75.000 metros. Pasada esa distancia conviene adoptar un nuevo meridiano, teniendo en cuenta la convergencia d z que le corresponde con relación al primero.

Si se limita á 40.000 metros la distancia máxima para el cálculo de ordenadas, puede emplearse el grupo H de fórmulas ya expuestas.

*Ejemplo.* —

Punto A. Latitud = — 49° 04' 25'', 54 Sud. Longitud 0° 41' 34'' Oeste de La Plata. Azimut $z = 125° 45' 20'', 90$. Lado A B $= d_m = 57.836^m 57$.


$$d'' = \frac{d_m}{N_m \operatorname{sen} 1''} = \log d_m + [8.5097175 - 10] - \log N$$

$$\begin{aligned}
\log d_m &= 4.7621950 \\
\log \text{constante} &= \underline{8.5097175} \\
& \phantom{=} 3.2719125 \\
\log N &= \underline{0.0008485} \\
\text{(en segundos) } \log d &= 3.2710640
\end{aligned}$$

*Cálculo de la fórmula C*

$$\begin{aligned}
\log d &= 3.2710640 \\
\log \cos z &= \underline{9.7666505} \text{ ng.} \\
\log 1^{er} \text{ térm.} &= \underline{3.0377236} \\
I &= -\ 18' \ 10'', 74'6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0.4771 \\
\log \operatorname{tang}^2 \varphi &= \underline{0.1239} \\
\log 3 \operatorname{tang}^2 \varphi &= 0.6010 \\
&= 3.9900 \\
1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi &= 4.9900 \\
\log &= 0.69810
\end{aligned}$$

**NOTA.**—El azimut de 125° 45' contado desde el polo Sud, cae en el segundo cuadrante; su coseno es, pues, negativo.

$\log \frac{1}{2} \text{ sen } 1'' = 4.3845$

$\log d^2 = 6.5421$

$\log \text{sen}^2 z = 9.8187$

$\log \text{tang } \varphi = 0.0620$

$\log 2.^{\circ} \text{ término} = 0.8072$

$\text{II} = +6'', 415$

$\log (1 + 3 \text{ tang}^2 \varphi) = 0.698$

$\log \frac{1}{6} \text{ sen}^2 1'' = 8.593$

$\log d^3 = 9.813$

$\log \cos z = 9.767 \text{ neg}$

$\log \text{sen}^2 z = 9.819$

$\log 3^{er} \text{ término} = 8.690 \text{ neg}$

$\text{III} = +0'', 049$

$$\begin{aligned}
\text{I} &= -0^{\circ}\ 18'\ 10''\ 746 \\
\text{II} &= \phantom{-0^{\circ}\ 18'\ }6''\ 415 \\
\text{III} &= -\phantom{0^{\circ}\ 18'\ }0''\ 049 \\
\hline
a &= -0^{\circ}\ 18'\ 04''\ 28 \\
&= 1084''\ 28
\end{aligned}$$

de E

$$\begin{aligned}
\varphi' = \varphi &= -49^{\circ}\ 04'\ 25'', 54 \\
-a &= -\phantom{49^{\circ}\ }18'\ 04'', 27 \\
\hline
\varphi_1 &= -48^{\circ}\ 46'\ 20'', 26 \\
-\alpha &= -\phantom{48^{\circ}\ 46'\ }3'', 31 \\
\hline
\text{Latitud } \varphi' &= -48^{\circ}\ 46'\ 17'', 05
\end{aligned}$$

de A

$\log a = 3.035 \text{ neg}$

$\log \cos^2 \varphi = 9.623$

$\log \text{const} = 7.838$

$\log \alpha = 0.506$

$\alpha = -3'', 21$

## *Cálculo de la longitud de B, (Fórmula D)*

$\log d = 3.2710640$

$\log \text{sen } z = 9.9092964$

$c \log \cos \varphi_1 = 0.1860729$

$\log 1^{er} \text{ término} = 3.3664333 = 2298'', 441$

$\text{I} = +0^{\circ}\ 38'\ 18'', 441$

$$\begin{aligned}
z &= 125^{\circ}\ 45' \\
\varphi_1 &= 48^{\circ}\ 46' \\
\hline
z + \varphi_1 &= 174^{\circ}\ 31' \\
z - \varphi_1 &= +\ 76^{\circ}\ 59'
\end{aligned}$$

$\log \frac{1}{6}\ d^3\ 1'' = 8.406$

$\log \text{sen } z = 9.909$

$\log \cos (z + \varphi_1) = 9.998 \text{ ng}$

$\log \cos (z - \varphi_1) = 9.352$

$c \log \cos^3 \varphi_1 = 0.532$

$\log 2.^{\circ} \text{ tér} = 8.197 \text{ ng}$

$-0.01574$

$$\begin{aligned}
\text{I tér} &= +0^{\circ}\ 38'\ 18'', 441 \\
-\text{II tér} &= -\phantom{0^{\circ}\ 38'\ 1}0'', 016 \\
\hline
\text{P} &= +0^{\circ}\ 38'\ 18'', 457 = 2298'',45 \\
\text{long A} &= \phantom{+}0^{\circ}\ 41'\ 34'' \\
\hline
\text{long de B} &= \phantom{+}1^{\circ}\ 19'\ 52'', 457
\end{aligned}$$

*Cálculo del Azimut de B (Fórmula E)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| log P (2298'', 457) = | 3.3614338 | log P = | 3.3614 |
| log sen φ (49° 4') = | 9.8782652 | log cos φ = | 9.8163 |
| log 1.er tér = | 3.2396990 | log ½ a = | 2.7341 neg |
| = | 1728'',617 | log sen 1'' = | 4.6856 |
| I = + | 28' 48'', 617 | log 2.° tér = | 0.5973 |
| — II = — | 3'', 956 | | 3.958 |
| — Conv de Merid = + | 28' 52', 573 | II = | — 3'', 958 |
| 180° + z = | 305° 45' 20'', 900 | | |
| z' = | 305° 16' 28'', 327 | | |

**Resúmen para B**

Lat φ' = — 48° 46' 20'', 26

Long ω = 1° 19' 52'', 46

Az z' = 305° 16' 28'', 327

Pueden también emplearse las siguientes fórmulas más sencillas que las anteriores y adoptadas por el Estado Mayor de Francia.

Para diferencia de latitud:

$$(1)\quad (\varphi' - \varphi) = \frac{x}{N \text{ sen } 1''} - \frac{\text{sen } 1''}{2}\left(\frac{x}{N \text{ sen } 1''}\right)^2 \text{tang. } \varphi$$

$$y = d_m \cos Z$$

$$x = d_m \text{ sen } Z$$

Para la diferencia de longitud:

$$(2)\quad (\omega' - \omega) = \left(\frac{x}{N' \text{ sen } 1''}\right)\left(\frac{1}{\cos \varphi'}\right)$$

Para la diferencia de Azimut:

$$(3)\quad Z' - Z = \pm 180° + (\omega' - \omega) \text{ sen } \left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)$$

Convergencia de meridianos:

$$d\,Z = (\omega' - \omega) \text{ sen } \left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right) = P \text{ sen } \left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)$$

**Aplicación:** $\varphi = 49^\circ\ 4'\ 25''\ 50$ $\quad \omega = 0^\circ$ $\quad Z = 125^\circ\ 45'\ 20''$

$y = 33795^m,16$ $\quad x = 46934^m,41$ $\quad d_m = 57835^m,57$

*Fórmula 1*

$$\log.\ y = 4.5288546$$
$$\log.\ \frac{1}{N\ \text{sen}\ 1''} = 8.5102384$$
$$\log.\ \frac{y}{N\ \sin\ 1''} = 3.0390930$$
$$\text{I. term.} = 1094''19''$$

$$\log.\ x = 4.6714914$$
$$\log.\ \frac{1}{N\ \sin\ 1''} = 3.5090350$$
$$\log.\ \frac{x}{N\ \sin\ 1''} = 3.1803254$$

$$2\ \log.\ \frac{x}{N\ \sin\ 1''} = 6.36105$$
$$\log.\ \tfrac{1}{2}\ \sin\ 1'' = 4.38454$$
$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = 0.06187$$
$$\log.\ \text{II term.} = 0.80756$$
$$\text{II} = 6.42$$

$$\text{I' term.} = +\ 1094''19$$
$$\text{II}\ \ \text{»}\ = -\ \ 6.42$$
$$\varphi' - \varphi = 1087''77 = 18'\ 7''77$$
$$\varphi = 49^\circ\ 4'\ 25''54$$
$$\varphi' = 49^\circ\ 22'\ 33''31$$

*Fórmula 2*

$$\log.\ \frac{x}{N\ \sin\ 1''} = 3.1805254$$
$$\text{c. log}\ \cos\ \varphi' = 0.1863568$$
$$\log.\ (\omega' - \omega) = 3.3668822$$
$$(\omega' - \omega) = 2327''\ 46 = 38'\ 47''\ 09$$

$$\omega = 0^\circ$$
$$\omega' = 0^\circ\ 38'\ 47''09$$

*Fórmula 3*

$$(\varphi + \varphi') = 98^\circ\ 26'\ 58''\ 85$$
$$\frac{(\varphi - \varphi')}{2} = 49^\circ\ 13'\ 29''\ 42$$
$$\log.\ (\omega' - \omega) = 3.3668822$$
$$\log.\ \text{sen}\ (\varphi'_2 + \varphi) = 9.8792555$$
$$\log.\ d\ Z = 3.2461377$$
$$d\ Z = 1762''\ 54$$
$$d\ Z = 29'\ 22''\ 54$$

$$Z' - Z = 180 + d\ Z = 180 + 29'\ 22\ 54'' = 180^\circ\ 29'\ 22''\ 54$$
$$+\ Z = 125^\circ\ 45'\ 20''$$
$$Z' = 306^\circ\ 14''\ 42''\ 54$$

## Coordenadas de los vértices de la Red

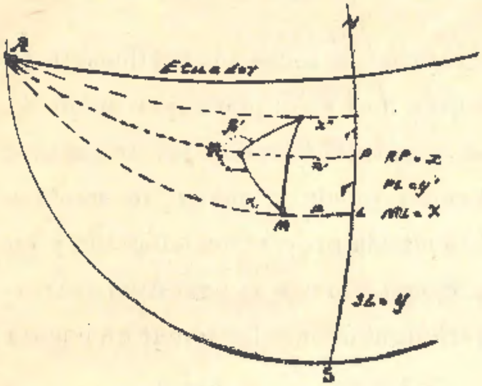
Las posiciones geográficas de todos los vértices de la red de triángulos, permiten fijar en el plano, por medio de la red de meridianos y paralelos todos los triángulos medidos; pero este sistema puede adolecer de muchas deficiencias, aun la de la misma proyección adoptada y en cuanto al cálculo para ejecutarlo con la exactitud correspondiente á una buena triangulación exige tomar en cuenta hasta las milésimas de segundos.

Con este motivo, se han adoptado otros sistemas de coordenadas esféricas, de los cuales el más generalmente adoptado es el de *coordenadas rectangulares*.

Para los efectos de este método se adopta como eje de abcisas el meridiano que pasa por el observatorio del país ó por uno de los vértices de la red; y para eje de ordenadas un círculo máximo que pasa por el punto adoptado como orígen normal, sea la perpendicular al meridiano.

Este meridiano y su perpendicular, proyectados al nivel adoptado para la triangulación, representan los ejes circulares de coordenadas sobre los cuales se proyectarán todos los vértices de la operación. Las abcisas serán partes del meridiano y se les califica de positivas ó negativas según se cuenten al Norte ó al Sud, del punto orígen.

Las ordenadas se miden sobre las perpendiculares al meridiano normal, forman pues, parte de círculos máximos que tienen su polo común en el ecuador á una distancia de 90.° del meridiano normal.




Si en la figura adjunta la línea N S representa el meridiano adoptado y línea R M un costado del triángulo para el cual se dá como conocida la ordenada M L = x que forma parte del arco A L perpendicular al meridiano, el problema consiste en hallar R P = x', ordenada del otro punto R y parte del arco A P. El arco P L será la abcisa de P con relación á L y será también la medida del ángulo en A.

En el triángulo M A R se tiene:

M R = d, ángulo A M R = $\alpha$ de dirección y el arco A M = 90.° — x. Ademas resultará del cálculo, A R = 90.° — x' ángulo de dirección A R M = 360° — $\alpha'$ y ángulo R A M = L P.

La resolución del triángulo se obtendrá por las fórmulas

1.ª $\quad \text{sen } x' = \cos d \text{ sen } x + \text{sen } d \cos x \cos \alpha$

2.ª $\quad \text{tang. } y = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos x \text{ cotg } d - \text{sen } x \cos \alpha}$

3.ª $\quad \text{cotang } \alpha' = \cos d \text{ cotg } \alpha - \dfrac{\text{sen } d \text{ tang } x}{\text{sen } \alpha}$

Estas fórmulas tienen el inconveniente en la práctica, de dar el valor de las ordenadas en grados, lo que es de consecuencia en los resultados, pues debe recordarse que para llegar á apreciar los centímetros del largo de los lados, hay que apreciar los milésimos de segundos, lo que no se consigue con los logaritmos usuales; efectivamente debe recordarse que al ángulo correctivo de un segundo corresponde un arco de 31,20 metros en la superficie terrestre, de lo que un arco de tres centímetros correspode á un ángulo de 0'', 001 segundo.

Es necesario, pues, hacer sufrir á esas fórmulas transformaciones que las conviertan en otras mediantes las cuales se asegure la exactitud del resultado; así se han obtenido las siguientes en las cuales, $m = d \operatorname{sen} \alpha$; $n = d \cos \alpha$

$$a \ldots \quad x' = x + n - \frac{m^2 x}{2 r^2} - \frac{m^2 n}{6 r^2}$$

$$b \ldots \quad y' = y + m + \frac{m x'^2}{2 r^2} - \frac{n^2 m}{6 r^2}$$

$$c \ldots \quad \alpha' = 180^\circ + \alpha + \frac{m . n}{2 r^2 \sin 1''} - \frac{m x}{r^2 \sin 1''}$$

Para facilitar el empleo de estas fórmulas se reproducen las constantes con sus logaritmos, adoptando por radio terrestre

$$r = 6.388173 , \quad \log r = 6.8053767$$

$$\log \frac{1}{2 r^2} = 0.0882166 - 14 ; \quad \log \frac{1}{2 r^2 \operatorname{sen} 1''} = 0.4026422 - 9$$

$$\log \frac{1}{6 r^2} = 0.6110952 - 15 ; \quad \log \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} 1''} = 0.7036722 - 9$$

Las fórmulas a b c dan las partes buscadas en metros, así es que, los valores de, d y x deben introducirse en metros y reducirse el resultado á segundos.

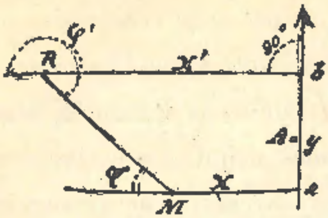



Fig 23

*Ejemplo.—*

punto M, coordenadas

ord. x = 32962m, 640

abc. y = 48294m, 720

azimut M R = $\alpha$ = 8° 15' 56'', 380

Lado M R = d = 75.734m 39

**Hallar para:** punto R, ord = x', abcisa = y' azimut $\alpha'$

$m = d \operatorname{sen} \alpha$ $\qquad\qquad$ $n = d \cos \alpha$

$\log d = 4.8792931$ $\qquad\qquad$ $\log d = 4.8742931$

$\log \operatorname{sen} \alpha = 9.1576475$ $\qquad\qquad$ $\log \cos \alpha = 9\,9954650$

$\log m = 4.0369406$ $\qquad\qquad$ $\log n = 4.8747581$

$m = +10887^m\ 810$ $\qquad\qquad$ $n = 74.947^m\ 670$

$$x' = x + n - \frac{m^2\ x}{2\ r^2} - \frac{m^2\ n}{6\ r^2}$$

$$\frac{m^2\ n}{6\ r^2}\left\{\begin{array}{rr} \log m^2 = & 8.0738812 \\ \log n = & 4.8747581 \\ \hline & 12.9486393 \\ \log \frac{1}{6\ r^2} = - & 0.6110952 \\ \hline & 13.5597345 \\ & -15 \\ \hline & 8.5597345 \\ & 0.03632 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rr} x = & 32.962^m,\ 640 \\ +\ n = & 74.947^m,\ 670 \\ \hline & 107.910^m,\ 310 \\ -\ \frac{m^2\ x}{2\ r^2} = & 0.048 \\ \hline & 262 \\ -\ \frac{m^2\ n}{6\ r^2} = & 0.036 \\ \hline x' = & 107.910^m,\ 226 \end{array}$$

$$\frac{m^2\ x}{2\ r^2}$$

$$\begin{array}{rr} \log m^2 = & 8.0738812 \\ \log x = & 4.5180220 \\ \hline & 12.5919032 \\ \log \frac{1}{2\ r^2} = - & 0.0882166 \\ \hline & 12.6801198 \\ & -14 \\ \hline & 8.6801198 \\ & 0.04787 \end{array}$$

$$y' = y + m + \frac{m'^2}{2\,r^2} - \frac{n^2\,m}{6\,r^2} \qquad \alpha' = 180 + \alpha - \frac{m\,n}{2\,r^2\,\text{sen}\,1''} + \frac{m\,x}{r\,\ \text{sen}\,1''}$$

$$\begin{aligned}
y &= +\ 48294{,}^{m}720 \\
+\ m &= +\ 10887^{m}{,}810 \\
+\ \frac{m\,x^2}{2\,r^2} &+ +\ 0{,}^{m}236 \\
& \overline{\phantom{+}\ 59182{,}^{m}765} \\
-\ \frac{n^2\,m}{6\,r^2} &= \phantom{+}\ 0{,}^{m}250 \\
y' &= +\ 59182{,}^{m}515
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& 180^{\circ} \\
\alpha &= \phantom{+}\ 8^{\circ}\ 15'\ 56'',\ 380 \\
+\ \frac{2\,r^2\text{sen}\,1''}{m\,n} &= +\ 2'',\ 062 \\
+\ \frac{m\,x}{r^2\ \text{sen}\,1''} &= -\ 1'',\ 814 \\
\alpha' &\ \ 188^{\circ}\ 15'\ 56'',\ 628
\end{aligned}$$

**Distancia entre dos puntos de posición geográfica conocida**

Este problema aplicado á los cálculos geodésicos de una triangulación, nunca tendrá una diferencia de longitud mayor de un grado; su resolución puede ser útil en muchos casos y aun puede servir para determinar el largo de una base.

Varios son los procedimientos aplicables á la resolución del problema, siendo todos ellos resultados de las fórmulas conocidas ya y aplicables al elipsoide.

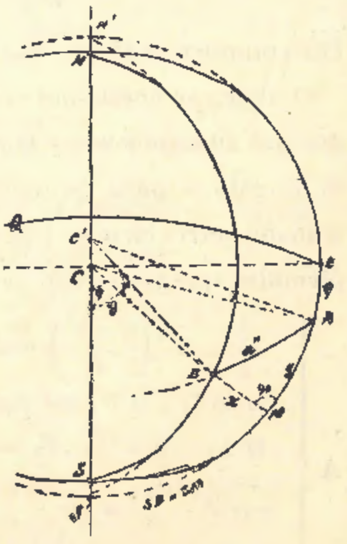


Figura 24

Si se observa la figura 24 se tiene, siendo A B $=$ d la incógnita, $\alpha =$ latitud de A, $\varphi' =$ latitud de B, la diferencia de longitud B S A $=$ P, la longitud de A puede ser cualquiera y si se le hace igual á cero, el meridiano que pasa por A será el adoptado como orígen de las proyecciones.

$B\,M = x$, arco perpendicular al meridiano A.

$A\,M = y$, abcisa meridiana de la línea A B. (reducida á segundos)

A más, $N$ = normal media del arco A B, $\alpha$ = ángulo de corrección para la latitud de B correspondiente á las normales del elipsoide y de la esfera, $\delta$ y $\delta'$ = latitudes geocéntricas de A y B.

Del pequeño triángulo B M A recto en M

$$x = d \operatorname{sen} z \qquad\qquad y = d \cos z$$

siendo $z = S\,A\,B$, azimut de B sobre el horizonte de A. del triángulo A S B, en el cual

$$S\,A = 90 - \delta; \quad S\,B = 90 - \delta'; \quad S\,A\,B = Z; \quad A\,S\,B = P$$

se tiene

$$\operatorname{sen} P : \operatorname{sen} d :: \operatorname{sen} Z : \cos \delta'$$

y sustituyendo los arcos por sus senos y cosenos

$$P = \frac{d'' \operatorname{sen} z}{\cos \delta}$$

Pero también se tiene $\operatorname{sen} \delta' = \operatorname{sen} d \cos d + \cos \delta \operatorname{sen} d \cos Z.$

Si ahora se combinan estas dos ecuaciones haciendo las debidas sustituciones y transformaciones, é introduciendo el ángulo $\alpha$ para la corrección de la latitud, para transformarla en $\varphi'$ se llega á formar el siguiente grupo de fórmulas que resuelven el problema.

$$\mathbf{A}\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\beta}{2} = e^2 \left(\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}\right) \cos^2 \left(\dfrac{\varphi + \varphi'}{2}\right) & \delta = \varphi - \dfrac{\beta}{2} \\
(M\,B) = x = P \cos \delta' \text{ (en segundos)} & \\
(M\,A) = y = (\delta \quad \delta') - \tfrac{1}{2} x^2 \operatorname{tang} \delta \operatorname{sen} 1'' & \delta' = \varphi + \dfrac{\beta}{2} \\
\operatorname{tang} Z = \dfrac{x}{y}, \quad d'' = -\dfrac{x}{\operatorname{sen} z}, \quad d'' = \dfrac{y}{\cos z} & \\
\text{en metros,} & \\
x_m = x\,N \operatorname{sen} 1'', \quad y_m = y\,N \operatorname{sen} 1'', \quad d_m = d\,N \operatorname{sen} 1'' &
\end{array}\right.$$

Por procedimientos análogos se han deducido los siguientes grupos de fórmulas que resuelven el mismo problema.

Conocida la latitud de cada punto A y B

B

$$(\varphi - \varphi') = d = \frac{\left[ - d \cos Z + \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \operatorname{tang} \varphi (d \operatorname{sen} Z)^2 \right]}{(1 + e^2 \cos^2 \varphi)}$$

$$(\omega - \omega') = P = \frac{d \operatorname{sen} z}{\cos \varphi'} ; \qquad d \operatorname{sen} Z = P \cos \varphi' \qquad (1)$$

$$d \cos Z = \frac{P}{(1 + e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)} + \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \operatorname{tang} \varphi ( d \operatorname{sen} Z)^2 \quad (2)$$

$$\tan Z = \frac{d \operatorname{sen} Z}{d \cos Z} ; \qquad d = \frac{(d \operatorname{sen} Z)}{\operatorname{sen} Z} N \operatorname{sen} 1'' \text{ (en metros.)}$$

Estas mismas fórmulas pueden también expresarse como sigue:

$$(\varphi - \varphi') = \frac{\left[ d \cos Z + \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \operatorname{tang} \varphi (d \operatorname{sen} Z)^2 \right]}{(1 + e^2 \cos^2 \varphi)} \qquad (1)$$

de ella se deduce

$$d \cos Z = \frac{\varphi - \varphi'}{1 + e^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \operatorname{tang} \varphi ( P \cos \varphi')^2 \qquad (2)$$

y dividiendo la primera por la segunda se obtiene

$$\operatorname{tang} Z = \frac{P \cos \varphi' (1 + e^2 \cos^2 \varphi)}{(\varphi - \varphi') - \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} (P \cos \varphi')^2 \operatorname{tang} \varphi (1 + e^2 \cos^2 \varphi)} \quad (a)$$

de lo cual

$$d_m = \frac{d N \cos \varphi \operatorname{sen} 1''}{\operatorname{sen} Z} \qquad (1)$$

La normal N se calculará para la latitud media

$$\left( \frac{\varphi + \varphi'}{2} \right)$$

Conocida la latitud y longitud de cada punto A y B

C

$$\alpha = (\varphi - \varphi') \cos^2 \varphi \ [\,7.838\,]$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{d}{a} = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) + \cos\varphi \cos\varphi' \operatorname{sen}^2 \frac{P}{2} \qquad (1)$$

Si la diferencia de longitud P, es inferior á 40 minutos, puede simplificarse la fórmula anterior que dirá así:

$$d^2 = (\varphi - \varphi')^2 + \cos\varphi \cos\varphi' P^2$$

$$d_m = d\, N \operatorname{sen} 1'' \quad \text{(en metros)}$$

Conociendo las latitudes de los puntos A y B y el azimut de B sobre el horizonte de A.

Si el polo dominante es el del Sud, Z = azimut de B desde A y Z' = 180 — Z.

D

$$\frac{\beta}{2} = e^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right); \quad \delta = \varphi - \frac{\beta}{2}; \quad \delta' = \varphi' + \frac{\beta}{2}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\operatorname{tang.} \delta}{\cos Z}; \qquad \operatorname{sen} (\gamma + d) = \frac{\operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen} \delta} \operatorname{sen} \gamma \qquad (a)$$

$$d = (\gamma + d) - \gamma; \qquad d_m = d\, N \operatorname{sen} 1''$$

Por otra deducción se tiene esta otra fórmula:

$$\operatorname{cotg.} d = \operatorname{sen} Z' \operatorname{cotg.} P \operatorname{secc.} \varphi + \operatorname{tang.} \varphi \cos Z' \qquad (b)$$

Conociéndose la latitud de A, el azimut de B sobre el horizonte de A y la diferencia de longitud P entre los puntos A y B.

E

$$\cos^2 \varphi = \cos^2 \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right); \qquad \varphi' = \varphi'' - \beta$$

siendo: $CB = 90^\circ - \varphi''$; $\quad CA = 90 - \varphi$

se tendrá en resumen:

$$\operatorname{tang.} \gamma = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang.} z; \qquad \operatorname{tang.} \varphi'' = \frac{\operatorname{tang.} \varphi \operatorname{sen} (\gamma - P)}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$$\beta = e^2 (\varphi - \varphi'') \cos^2 \left(\frac{\varphi + \varphi''}{2}\right)$$

$$\varphi' = \varphi'' - \beta; \qquad \delta = \varphi - \frac{\beta}{2} \qquad \delta' = \varphi' + \frac{\beta}{2}$$

$$d = -\frac{P \cos \delta'}{\operatorname{sen} Z}; \qquad d_m = d\, N \sin 1''$$

En estas fórmulas el azimut se cuenta del Norte hacia el Este, considerando positivas las longitudes al Este de A y negativos al Oeste.

Si se considera la tierra como esférica, la distancia ó arco A B = d, que une esos dos puntos, puede ser hallada por la simple resolución del triángulo esférico A S B, en el cual se conocen los lados S A = 90 — $\varphi = l$ y S B = 90° — $\varphi = l'$ y el ángulo polar igual á la diferencia de longitud $P = (\omega - \omega')$.

La resolución del triángulo A S B puede obtenerse por las siguientes fórmulas:

$$F \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \text{tang. } \beta = \text{tang. } l \cos P\,; \quad \text{tang. } A = \dfrac{\text{tang. } P \text{ sen } \beta}{\text{sen } (l' - \beta)} \quad (2) \\[2ex] (3) \quad \text{tang. } d = \dfrac{\text{tang. } (l' - \beta)}{\cos A} \qquad d_m = d \text{ N sen } 1'' \end{array} \right.$$

Si el ángulo P y la diferencia de latitud, fueran menores de tres grados, lo que sucede con mucha frecuencia, pueden emplearse las siguientes fórmulas:

$$G \left\{ \begin{array}{l} \text{tang. } \beta = \dfrac{P}{(\varphi + \varphi')} \cos \left( \dfrac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \\[2ex] d = \dfrac{\varphi - \varphi'}{\cos \beta} \end{array} \right.$$

Las cantidades $\varphi$, $\varphi'$, P se expresarán en minutos ó segundos.

APLICACIONES DE LAS FÓRMULAS A

Para punto A:

lat $\varphi$ = 49° 04' 25'', 54 , long $\omega$ = 5° 07' 59'', 63

Para punto B:

lat. $\varphi' = 49^\circ\ 22'\ 33'',\ 28$, long $\omega' = 5^\circ\ 46'\ 47'',\ 07$

$$P = \omega' - \omega = 0^\circ\ 38'\ 47'',\ 44 = 2.327'',\ 44$$

$$\varphi + \varphi' = 98^\circ\ 26'\ 58'',\ 82$$
$$\varphi - \varphi' = -\ 0^\circ\ 18'\ 07'',\ 74$$
$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = 49^\circ\ 13'\ 29'',\ 41$$
$$\frac{\varphi - \varphi'}{2} = -\ 0^\circ\ 09'\ 03'',\ 87$$
$$= 543'',\ 87$$

Cálculo de $\frac{\beta}{2}$

$$\log e^2 = 7.81085$$
$$\log \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') = 2.73549$$
$$2 \log \cos \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = 9.62994$$
$$\log \frac{\beta}{2} = 0.17628$$
$$\frac{\beta}{2} = 1'',\ 500$$

$$\varphi = 49^\circ\ 04'\ 25'',\ 54$$
$$-\frac{\beta}{2} = 1'',\ 50$$
$$\delta = 49^\circ\ 04'\ 24'',\ 04$$

$$\varphi' = 49^\circ\ 22'\ 33'',\ 28$$
$$-\frac{\beta}{2} = 1'',\ 50$$
$$\delta' = 49^\circ\ 22'\ 31'',\ 78$$

Cálculo de x

$$\log P = 3.3668785$$
$$\log \cos \delta' = 9.8136470$$
$$\log x = 3.1805255$$
$$x = 1515'',\ 36$$

Cálculo de y

$$\log \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} = 4.38454$$
$$2 \log x = 6.36105$$
$$\log \operatorname{tang} \delta = 0.06197$$
$$\log 2.^\circ \text{ térm.} = 0.80756$$
$$= 6'',\ 42$$

$$\mathrm{I}\ (\delta - \delta') = -\ 1084'',\ 74$$
$$-\ \mathrm{II}\qquad 6'',\ 42$$
$$y = -\ 1091'',\ 16$$
$$-\ 0^\circ\ 18'\ 11'',\ 16$$

$$\log x = 3.1805255$$
$$-\log y = 3.0378887$$
$$\log \operatorname{tang} z = 0.1426368$$
$$\operatorname{tang} z = 54^\circ\ 14'\ 39'',\ 10$$

$$\log x = 3.1805255$$
$$\log \operatorname{sen} z = 9.9092964$$
$$\log d'' = 3.2712291$$
$$d'' = 1867'',\ 33$$

$$\text{Cálculo de d en metros}\left\{\begin{array}{rl} \log d &= 3.2712291 \\ \log N &= 6.8053910 \\ \log \operatorname{sen} 1'' &= \underline{4.6855749} \\ \log d_m &= 4.7621950 \\ d_m &= 57835^m\,57 \end{array}\right.$$

## APLICACIÓN AL MISMO PROBLEMA DE LAS FÓRMULAS B

$$d \operatorname{sen} z = (\omega' - \omega) \cos \varphi'$$

$$\begin{array}{rl} \log (\omega' - \omega)\ (2327'', 44) &= 3.3668785 \\ \log \cos \varphi'\ (49^o\ 23'\ 33'') &= \underline{9.8136433} \\ \log d \operatorname{sen} z &= 3.1805218 \end{array}$$

Cálculo de d cos z (2)

$$\begin{array}{rl} \log (\varphi - \varphi') &= 3.0365251 \\ c. \log (1 + e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) &= \underline{9.9987960} \\ \log \text{I térm.} &= 3.0353211 \\ \text{I térm.} &= 1084'', 73 \\ \text{II térm.} &= \underline{\quad 6'', 42} \\ y = d \cos z &= 1091'', 15 \end{array}$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{d \operatorname{sen} z}{d \cos z}$$

$$\begin{array}{rl} \log (d \operatorname{sen} z) &= 3.1805218 \\ - \log (d \cos z) &= \underline{3.0378842}\ n. \\ \log \operatorname{tang} z &= 0.1426376 \\ \text{(Norte)} \operatorname{tang} z &= 54^o\,14'\,39'', 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \dfrac{\operatorname{sen} 1''}{2} &= 4.38454 \\ \log \operatorname{tang} \varphi &= 0.06197 \\ 2 \log (d \operatorname{sen} z) &= \underline{6.36104} \\ \log \text{II térm.} &= 0.80755 \\ \text{II térm.} &= 6'', 42 \end{array}$$

$$d = \frac{(d \operatorname{sen} z)}{\operatorname{sen} z} N \operatorname{sen} 1''$$

$$\begin{array}{rl} \log (\ d \operatorname{sen} z) &= 3.1805218 \\ - \log \operatorname{sen} z &= \underline{0.0907033} \\ \log d'' &= 3.2712251 \\ \log N \operatorname{sen} 1'' &= \underline{1.4909659} \\ \log d_m &= 4.7621980 \\ d_m &= 57835^m\,05 \end{array}$$

## APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS C

$$\alpha = (\varphi - \varphi') \cos^2 \varphi\ [7.838]$$

$$\begin{array}{rl} \log (\varphi - \varphi') &= 3.036\ n. \\ \log \cos^2 \varphi &= 9.633 \\ \log \text{const.} &= \underline{7.838} \\ \log \alpha &= 0.507 \\ \alpha &= -\ 3'', 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos \varphi &= 9.8162989 \\ \log \cos \varphi_1 &= 9.8136517 \\ 2 \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} P &= \underline{5.5025092} \\ \log \text{II térm.} &= 5.1324598 \\ \log \text{adicion.} &= \underline{0.1787548} \\ \log \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} d &= 5.3112146 \\ \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} d &= 7.6556073 \end{array}$$

$$\varphi - \varphi' = -\ 18'\ 07'',49$$
$$\alpha = -\ \ \ 3'',21$$
$$(\varphi - \varphi_1) = -\ 18'\ 04'',28$$
$$\left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right) = -\ 09'\ 02'',14$$

$$\log \text{ II térm.} = 5.1324598$$
$$2 \log \text{sen} \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_1) = 4.8393718 \text{ n.}$$
$$\text{arg. adicion.} = 0.2930880$$

$$\tfrac{1}{2} d = 15'\ 33'',327$$
$$d = 31'\ 06'',654$$
$$\log d = 3.2710648$$
$$\log \text{sen } 1'' = 4.6855749$$
$$\log N = 0.0008485$$
$$\log R = 6.8047076$$
$$\log d_m = 4.7621948$$
$$d_m = 57835^m 55$$

aplicando la fórmula

$$d^2 = (\varphi - \varphi_1)^2 + \cos\varphi \cos\varphi_1 P^2$$

$$(\varphi - \varphi_1) = 18'\ \ 4'',28$$
$$= 1084'',28$$
$$\log (\varphi - \varphi_1)^2 = 6.0702830$$
$$\text{I ter } (\varphi - \varphi)^2 = 1.175.663,_m 43$$

$$P = 38^\circ\ 46'',55 = 2326,55$$
$$\log P^2 = 6.7334248$$
$$\log \cos\varphi = 9.8162989$$
$$\log \cos\varphi_1 = 9.8136517$$
$$\log \text{II ter} = 6.3633754$$
$$\text{II ter} = 2.308740,95$$

$$1.^{er} \text{ ter} = 1.175663,43$$
$$2.^o\ ,, = 2.308740,95$$
$$d^2 = 3.484404,38$$
$$\log d^2 = 6.5421283$$
$$\log d = 3.2710641$$
$$\log N = 6.8055561$$
$$\log \text{sen } 1'' = 4.6855749$$
$$\log d_m = 4.7621951$$
$$d_m = 5.7835,53$$

APLICACIÓN FÓRMULAS D.

$$\varphi = 49^\circ\ 4'\ 25'',54, \quad \varphi' = 49^\circ\ 22'\ 32'',99,$$
$$\text{Az. de B sobre A } z = 126^\circ\ 45'\ 20'',90$$

como en los casos anteriores

$$z' = 54^\circ\ 14'\ 38'',10$$

$$\varphi = \varphi' = -\ 18'\ 7'',45,\ \alpha = 3'',21,\ \varphi_1 = 49^\circ\ 22'\ 29'',78,\ P = 38'\ 45'',55$$

con fórmula (b) con los log. de adi. y sustr.

$$\begin{array}{rlrl}
\log \operatorname{sen} z' = & 9.9092964 & \log \cos z' = & 9.7666596 \\
\log \sec \varphi = & 0.1837011 & \log \operatorname{tang} \varphi = & \underline{0.0619663} \\
\log \operatorname{cotg} P = & \underline{1.9476943} & & 9.8286259 \\
& 2.0406918 & \log \arg. = & \underline{2.2147229} \\
& \underline{9.8286259} & \log \operatorname{cotg} d = & 2.0443488 \\
\text{adición.} & 2.2120659 & & d = 31'\ 6'',552 = 1866'',652
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \operatorname{sen} d = & 7.9566335 \\
\log z' = & 9.9092964 \\
c \operatorname{tag} \operatorname{sen} P = & \underline{1.9477219} \\
\log \cos \varphi_1 = & 9.8136518 \\
\varphi_1 = & 49^{\circ}\ 22'\ 29'',28
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log d = & 3.2710645 \\
\log N = & 0.0008485 \\
c \log \operatorname{curt} = & \underline{1.4902825} \\
\log d_m = & 4.7621955 \qquad d_m = 57835_m,\ 60
\end{array}$$

FÓRMULA a DE D

$$\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{\varphi - \varphi^1}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\varphi - \varphi^1}{2}\right) = 1''\ 50; \quad \delta = 49^{\circ}\ 04'\ 24'',04,$$

$$\delta' = 49^{\circ}\ 22'\ 31'',18$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos z} \qquad \operatorname{sen}(\gamma + d) = \frac{\operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen} \delta} \operatorname{sen} \gamma;$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log \operatorname{tang} \delta = & 0.0619727 & \log \operatorname{sen} \delta' = & 9.8802377 \\
\log \cos z = & \underline{9.7666596} & \log \operatorname{sen} \gamma = & 9.9503895 \\
\log \operatorname{tang} \gamma = & 0.2953131 & c \log \operatorname{sen} \delta = & \underline{0.1217320} \\
\gamma = & +63^{\circ}\ 7'\ 55'',46 & \log \operatorname{sen}(\gamma + d) = & 9.9523592 \\
& & (\gamma + d) = & 63^{\circ}\ 39'\ 2'',88
\end{array}$$

$$z = 305^{\circ}\ 45'\ 20'',90$$

$$\gamma + d \;= 63^{o}\,39'\,02'',\,88$$
$$\gamma \;= 63^{o}\;\;7'\,55'',\,46$$
$$d'' = \;0^{o}\,31'\,07'',\,42$$
$$= 1867'',\,42 = 31'\,07'',\,42$$

$$\log d'' = 3.2712421$$
$$\log N \operatorname{sen} 1'' = 1.4909659$$
$$\operatorname{long} d_m = 4.7622080$$
$$= 57836_m\;29$$

$$\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \;0^{o}\;\;9'\;\;3'',\,87 = 543'',\,87$$
$$\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = 49^{o}\,13'\,29''.$$

$$\log e^2 = 7.81085$$
$$\log\left(\frac{\varphi - \varphi}{2}\right) = 2.73549 \text{ neg}$$
$$2 \log\left(\frac{\varphi + \varphi}{2}\right) = 9.62994$$
$$\log \frac{\alpha}{2} = 0.17628 \text{ neg}$$
$$\frac{\alpha}{2} = -\,1'\,50''$$

$$\delta = \alpha - \frac{\alpha}{2} = 49^{o}\;\;4'\,27'',\,04$$
$$\delta' = \alpha' + \frac{\alpha}{2} = 49^{o}\,22'\,31'',\,78$$

## APLICACIÓN FÓRMULAS E

$\varphi = 49^{o}\,4'\,25'',54$; $P = 0^{o}\,38'\,47'',\,44 = 2327''\,44$; $Z = 305^{o}\,44'\,20'',\,90$

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang} Z$$
$$\log \operatorname{sen} \varphi = \;9.8782650$$
$$\log \operatorname{tang} Z = \;0.1426468$$
$$\log \operatorname{tang} \gamma = \;9.0209018$$
$$\gamma = -\;46^{o}\,22'\,51'',\,66$$
$$P = \;38'\,47'',\,44$$
$$(\gamma - P) = -(47^{o}\;\;1'\,29'',10)$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \varphi \operatorname{sen}(\gamma - P)}{\operatorname{sen} \gamma}$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi = 0.0619663$$
$$\log \operatorname{sen}(\gamma - P) = 9.8143023$$
$$\text{c.} \log \operatorname{sen} \gamma = 0\;1403155$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi'' = 0.0165841$$
$$\varphi'' = 49^{o}\,22'\,30'',\,21$$

$$\varphi'' = \;49^{o}\;22'\;30'',\;21$$
$$\varphi = \;49^{o}\;04'\;25'',\;54$$
$$\varphi - \varphi'' = -\;0^{o}\;18'\;\;4'',\;67$$
$$\varphi + \varphi'' = \;98^{o}\;26'\;55'',\;75$$

$$\beta = e^2\;(\varphi - \varphi'')\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi''}{2}\right)$$

$$\log e^2 = 7.81085$$
$$\log (\varphi - \varphi'' = 3.03531$$
$$2 \log \cos \left(\frac{\varphi + \varphi''}{2}\right) = 9.62994$$
$$\log \beta = 0.47610$$
$$\beta = -2'', 99$$

$$\varphi'' = 49^o\ 22'\ 30'', 21$$
$$\beta = -\quad 2'', 99$$
$$\varphi' = (\varphi'' - \beta) = 49^o\ 22'\ 33'', 20$$

$$\varphi' = 49^o\ 22'\ 33'', 20$$
$$\frac{\beta}{2} = -\quad 1'', 49$$
$$\delta' = \left(\varphi' - \frac{\beta}{2}\right) = 49^o\ 22'\ 31'', 71$$

$$d_m = -\frac{P \cos \delta'}{\text{sen } Z} \qquad d_m = d\ N \text{ sen } 1''$$

$$\log P = 3.3668785$$
$$\log \cos \delta' = 9.8136471$$
$$c. \log \text{sen } Z = 0.5907036$$
$$\log d = 3.2712292$$

$$\log d = 3.2712292$$
$$\log N \text{ sen } 1'' = 1.4909659$$
$$\log d_m = 4.7621951$$
$$d_m = 57835^m,58$$

## APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS F

$$l = (90 - \varphi) = 40^o\ 37'\ 27''; \qquad l' = (90 - \varphi') = 40^o\ 55'\ 35'';$$
$$P = 0^o\ 38'\ 47''$$

**Fórmula 1**

$$\log \text{tang } l = 9.9334040$$
$$+ \log \cos P = 9.9999724$$
$$\log \text{tang } \beta = 9.9333764$$
$$\beta = 40^o\ 37'\ 20'', 50$$
$$(l' - \beta) = 0^o\ 18'\ 15''$$

**Fórmula 2**

$$\log \text{sen } \beta = 9.8136268$$
$$+ \log \text{tang } P = 8.0523897$$
$$17.8660165$$
$$- \log \text{sen } (l' - \beta) = 7.7249869$$
$$\log \text{tang } A = 0.1410296$$
$$A = 54^o\ 08'\ 36'', 85$$

**Fórmula 3**

$$\text{long tang } (l' - \beta) = 7.7249931$$
$$- \log \cos A = 9.7677171$$
$$\log \text{tang } d = 7.9572760$$
$$+ d = 0^o\ 31'\ 09'', 35$$
$$= 1869'', 35$$

$$\log d = 3.2719229$$
$$\log N \text{ sen } 1'' = 1.4909659$$
$$\log d_m = 4.7628882$$
$$d_m = 57928.06$$

APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS G

$$P = 0^\circ\ 38'\ 47'' = 2327''$$

$$\varphi - \varphi' = 0^\circ\ 18'\ 07'' = 1087''$$

$$\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) = 79^\circ\ 13'\ 29''$$

$$\log 2327'' = 3.36680$$

$$-\log 1087'' = \underline{3.03623}$$

$$0.33054$$

$$+\log \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) = \underline{9.81495}$$

$$\log \operatorname{tang} = \beta\ 0.14554$$

$$\beta\ 54^\circ\ 25'\ 30''$$

$$\log (\varphi - \varphi') = 3.03623$$

$$-\log \cos \beta = \underline{9.76475}$$

$$\log d'' = 3.27148$$

$$d'' = 1868{,}48 = 57929^{m}\,10$$

$$0^\circ\ 31'\ 08'',\ 48$$

En sustitución de la fórmula F, puede emplearse esta otra en la cual figura la latitud $\varphi$ y no su complemento $l$:

$$\cos d = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos P$$

que aplicada á los elementos de los anteriores casos, da:

$$\log \operatorname{sen} 49^\circ\ 04'\ 25'' = 9.8782642$$

$$\log \operatorname{sen} 49^\circ\ 22'\ 33'' = \underline{9.8802405}$$

$$9.7585047$$

$$\log \text{add.} = \underline{0.2414786}$$

$$\log \cos d = 9.9999833$$

$$d = 0^\circ\ 31'\ 10'' = 1870''$$

$$\log \cos 49^\circ\ 04'\ 25'' = 0.8163003$$

$$\log \cos 49^\circ\ 22'\ 33'' = \underline{9.8136432}$$

$$19.6299435$$

$$\log \cos 38'\ 47'' = \underline{9.9999724}$$

$$9.6299169$$

$$\underline{9.7585047}$$

$$\log \text{add.} = 0.1285878$$

## Trazado y medición de un arco de meridiano

La medición y trazado de un arco de meridiano puede responder especialmente á dos fines; ó debe servir de base á futuras operaciones y entonces necesita materializarse la operación colocando en el terreno señales visibles del trazado de este meridiano, ó toda la operación responde á fines científicos como ser: la determinación del largo exacto de un arco de meridiano, etc., etc.

Fijado el punto de partida para la medición y trazado de un arco de meridiano, se determinará desde él, por una série de operaciones astronómicas, su verdadera dirección, que al efecto se jaloneará con toda precaución, procurando que el último jalón que se coloque, se encuentre lo más lejos posible con relación al poder del anteojo del teodolito de operación y estado atmosférico y en una altura, á fin de que desde él pueda nuevamente prolongarse en buenas condiciones el trazado adoptado.

Cada 40 ó 50 kilómetros deberá verificarse el trazado hecho, con una série de nuevas observaciones astronómicas, á fin de salvar cualquier error cometido en la parte material de la operación de jaloneo, lo que no quiere decir, que esa verificación no deba hacerse á menor distancia siempre que haya oportunidad ó duda alguna.

La medición de ese arco, para colocar señales ó mojones á determinadas distancias, puede hacerse como la de cualquier otra línea, procurando, como es natural, hacerlo con la mayor prolijidad, observándose, al efecto, todo lo recomendado para que la línea medida esté á un mismo nivel. Si el trazado de un meridiano responde al propósito del fraccionamiento de la zona que atraviesa, sus mojones servirán de base á esa división y por lo tanto, sin entrar en operaciones, por demás científicas, la distancia que los separa deberá ser la horizontal deducida según los accidentes del terreno.

La medición del arco de meridiano podría también efectuarse por una red de triángulos, si la región atravesada fuera montañosa, por ejemplo: En este caso debería hacerse á la vez, el trazado del meridiano para colocar en él y á las distancias correspondientes, los mojones y la red de los triángulos, con los cuales se determinaría la distancia entre determinados jalones lo que permitiría completar el relevamiento topográfico y de detalle, así como colocar los mojones donde fuera debido.

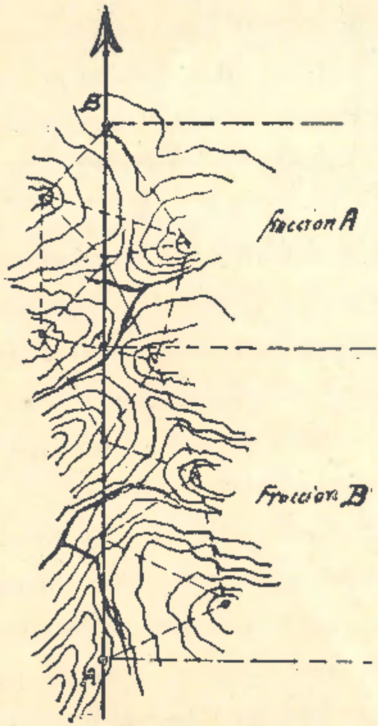


Fig. 24

Las distancias así obtenidas, se hallarán reducidas al plano horizontal del punto de partida, de manera, que las demás líneas del polígono que se quiera medir, apoyándose por uno de sus costados sobre el meridiano trazado, deberán reducirse al mismo plano, para que no resulten diferencias en la longitud de las líneas y que *cierre* el cálculo analítico de la figura medida.

La figura 24, da una idea de esa operación, la que se simplificará inmensamente si el meridiano y la división de los terrenos inmediatos se efectúa en las pampas.

Si el conocimiento del largo exacto de un arco de meridiano responde á fines científicos, éste será obtenido por el resultado de una triangulación efectuada con toda proligidad y según los preceptos ya indicados en los capítulos anteriores.

En esta figura se ve la dirección del meridiano en medio de la red de triángulos de 1.$^{er}$ orden, formados y relevados en el terreno; A es el punto de partida y W el último vértice de la triangulación; ambos puntos son deter-

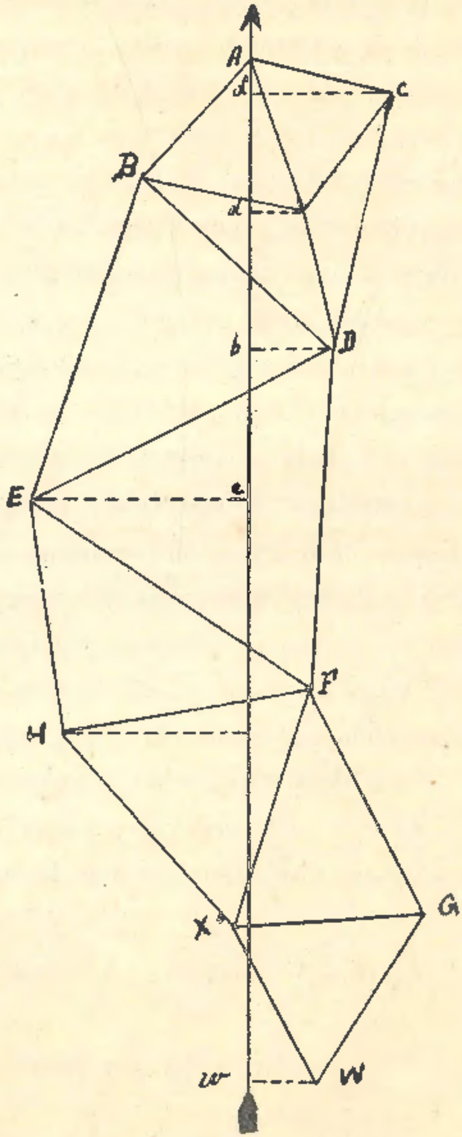



Fig. 25

minados, en el resultado final de la triangulación, por sus coordenadas geográficas, de manera, que se conoce la diferencia de latitud $(\varphi - \varphi') =$ A w sobre el meridiano y la diferencia de longitud $(\omega' - \omega) =$ ángulo w. P. W. formado en el polo próximo.

Por lo tanto, si haciendo uso de las coordenadas rectangulares esféricas, se calculan las proyecciones de los lados de la triangulación sobre el meridiano, la suma de las abcisas dará el largo de éste entre los puntos A y w.

No es posible, en la presente obra, seguir esta delicada operación en todas sus fases y detalles, solo puede indicarse la marcha de los cálculos que se deben efectuar y que como se ha dicho, consisten en calcular la proyección, sobre el meridiano, de los vértices de la triangulación.

El largo L de un arco de meridiano comprendido entre dos puntos de posición geográfica conocida, puede deducirse de las siguientes fórmulas, en las que se tiene

$R =$ Radio terrestre del paralelo medio $\varphi' - \varphi = \delta$;

$\omega =$ diferencia de longitud; $(\varphi + \varphi') = \Delta$

$$L = R\,(0.9982879\ \delta \operatorname{sen} 1'' - 0.0051383 \cos \Delta \operatorname{sen} \delta + 0.0000055 \cos 2\Delta \operatorname{sen} 2\delta)$$

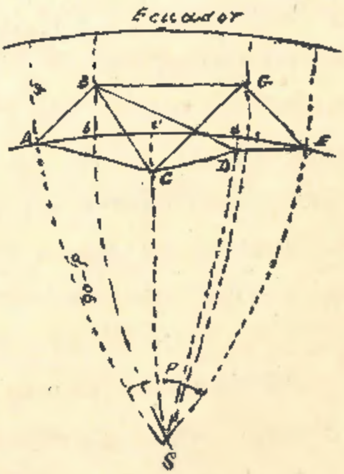
expresión que dará L en segundos; la siguiente lo dará en metros

$$L = R\ [1.4895420]\ \delta'' - [4.51553] \cos \Delta \operatorname{sen} \delta + [1.544] \cos 2\Delta \operatorname{sen} 2\delta$$

## Trazado de un arco de paralelo

Así como se ha dicho respecto al arco de meridiano, lo mismo puede enunciarse para el pararelo, esto es: que por lo menos de dos maneras distintas puede verificarse esa operación según el objeto sea: conocer el arco de paralelo $\varphi$ entre los meridianos $\omega'$ y $\omega$, fin puramente científico por ejemplo, ó bien el proposito de dejar señalado y amojonado sobre el terreno el dicho arco de paralelo.

Para el primer caso, á semejanza de la operación para el meridiano se cubrirá la región atravesada por el dicho paralelo, por una red de triángulos que correrá en su conjunto en el sentido, Este Oeste. Tanto por el encadenamiento de la red como por observaciones astronómicas, las posiciones geográficas de los extremos de la red se hallarán perfectamente determinadas, de manera que será fácil fijar en el plano la verdadera traza del paralelo sobre la red y luego obtener su largo calculando la proyección de los lados de la triangulación sobre dicho paralelo.




La proyección de los vértices se hará por la resolución de los triángulos esféricos formados por los arcos meridianos que pasan por dichos vértices y con polo común á la esfera osculatriz del dicho paralelo que distará del polo $90^{\circ} - \varphi$.

Como resultado del cálculo de la triangulación, las posiciones geográficas de todos los vértices serán conocidas, así como los azimutes de los costados de los triángulos;

así en el triángulo A S B, formado por los dos arcos de meridiano que pasan por A y B siendo A el punto de partida de la operación fijado en el paralelo $\varphi$ se tiene:

Para el radio correspondiente al paralelo

$$R = N \cos \varphi; \qquad (N = \text{normal para ese paralelo})$$

El ángulo en el Polo, $(\omega' - \omega) = P$, y siendo $\varphi'$ la latitud de B

$$\operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen} A\,B \operatorname{sen} z}{\cos \varphi'}$$

pero el arco $A\,B = d$, expresado en segundos puede ser reducido del d metros por

$$d'' = \frac{d\ (\text{metros})}{N_m \operatorname{sen} 1''}$$

entonces el valor del ángulo P podrá ser expresado por

$$P = \left(\frac{d_m}{N_m \operatorname{sen} 1''} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos \varphi'}\right) \tag{1}$$

$$+ \frac{d^3}{6 N^3 \operatorname{sen} 1''} \frac{\operatorname{sen} z \cos (z + \varphi') \cos (z - \varphi')}{\cos^3 \varphi'}$$

Como el largo de un arco de paralelo está en proporción al coseno de la latitud con relación al mismo arco en el ecuador, el largo del arco A b, proyección de A B, será dado en función del ángulo P y del radio del paralelo, teniendo por expresión en metros

$$A\,b = P \cos \varphi\, N_m \operatorname{sen} 1'' \tag{2}$$

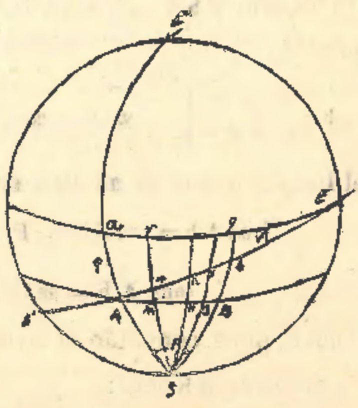
Así, pues, calculadas las proyecciones de todos los lados de la triangulación se conocerá el largo del arco A E del paralelo de latitud $\varphi$ y como verificación puede hacerse, teniendo $R =$ radio ecuatorial

$$A\,E = P \cos \varphi\, N_m \operatorname{sen} 1''$$

ó también $$A\,E = \frac{(\omega' - \omega) \cos \varphi \, R \operatorname{sen} 1''}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Si el caso fuera de trazar y amojonar un arco de paralelo, no siendo éste un círculo máximo, éste no puede establecerse y prolongarse como aquél; la línea trazada en el terreno como paralelo resultará ser una línea quebrada formada por una série de líneas de una longitud cualquiera (habitualmente se hacen todas iguales) y que forman en cada vértice un ángulo constante con el meridiano respectivo.

Como se comprende, posible es determinar el ángulo de cada vértice así como el de partida formado por el paralelo y el meridiano, de manera que puede establecerse esa poligonal sobre el terreno; pero, á fin de evitar los errores consiguientes á toda operación en el terreno ó por lo menos disminuirlos en lo posible, se dá la preferencia, para establecer un arco de paralelo al método de servirse de un arco de círculo máximo perpendicular al meridiano del punto de partida, fácil á prolongarse en línea recta y sobre el cual, después de medidas las distancias correspondientes, se levantan las ordenadas calculadas de antemano para colocar los mojones sobre el referido paralelo.



Así, pues, sea S A a y S B b q

los dos arcos de meridianos que pasan por los extremos del arco de paralelo A B que se quiere trazar y amojonar en el terreno; dicho arco tendrá su medida en el ángulo polar $A\,S\,B = P = (\omega' - \omega)$.

Si ahora se levanta en el punto A una perpendicular al meridiano S A a, se tendrá el arco de círculo máximo A E cuyo polo se encontrará en E sobre el ecuador, formando en dicho punto un ángulo $a\,E\,A = \varphi$ (á la latitud del punto A).

De esa construcción resultará formado el triángulo b S A de cuya resolución se obtendrán todos los elementos necesarios para ejecutar la operación. En este triángulo rectángulo en A se conoce $S\,A = 90 - \varphi$ (complemento latitud) y el ángulo $A\,S\,B = P = \frac{A\,B}{\cos\varphi}$; el lado S b (hipotenusa) será hallado por una de estas tres fórmulas.

$$\operatorname{sen} S\,b = \frac{\operatorname{sen} A\,b}{\operatorname{sen} P}; \qquad \operatorname{tang} S\,b = \frac{\operatorname{tang} S\,A}{\cos P} \quad (1)$$

$$\cos S\,b = \cos S\,A \operatorname{sen} P$$

El ángulo $S\,b\,A = b$ será dado por: $\operatorname{tang} S\,b\,A = \frac{\operatorname{cotg} P}{\cos S\,A}$ (1) ó por

$$\left[\operatorname{sen} b = \frac{\cos P}{\cos A\,b}\right], \quad [\cos b = \cos A\,S \operatorname{sen} P], \quad \left[\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} S\,A}{\operatorname{sen} A\,b}\right]$$

y el lado A b, que se medirá será dado por

$$[\operatorname{sen} A\,b = \operatorname{sen} S\,b \operatorname{sen} P]; \qquad \cos A\,b = \frac{\cos S\,b}{\cos S\,A},$$

ó

$$\operatorname{tang} A\,b = \operatorname{sen} S\,A \operatorname{tang} P \qquad (1)$$

Ahora, pues, conocido el arco S b, el valor de la ordenada á medirse B b será:

$$B\,b = S\,b - S\,A.$$

Los arcos así obtenidos en grados, minutos ó segundos deberán ser reducidos á metros, ya por las tablas respectivas (tabla I) ya por la fórmula siguiente, haciendo A b = d.

$$d_m = d\ (N\ S\ \text{sen}\ 1'') \qquad (1)$$

Si se deben colocar sobre el paralelo A B, un cierto número de mojones n equidistantes, habrá que deducir el espacio á medirse sobre la perpendicular á la meridiana y el largo de las ordenadas, así como los ángulos bajo los cuales han de medirse dichas ordenadas.

Siendo n el número de partes iguales á establecerse sobre el paralelo á cada una le corresponderá un ángulo polar:

$$\frac{P}{n} = d\ p$$

Así mismo, en el triángulo isósceles B S A, en el cual los lados B S = A S = 90° — φ, el ángulo en A y en B tendrá por valor:

$$S\,A\,B = S\,B\,A = B, \qquad \cos B = \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\ B\ A}{\text{tang}\ A\ S}; \qquad \text{ó, sen}\ B = \frac{\cos\ \frac{1}{2}\ P}{\cos\ \frac{1}{2}\ B\ A}$$

Luego, por cada uno de los n puntos, m, n, o... pasará un arco de meridiano, formándose así otros tantos triángulos semejantes, S A m', S A n', S A o'..... en los cuales se conocerá siempre el ángulo recto en A, el ángulo en P, $\left(d\ p = \frac{P}{n}\right)$ y el lado común $S\,A = 90 - \varphi$; la resolución de cada triángulo se hará:

para A m', $\quad \text{tang}\ A\ m' = \text{sen}\ S\ A\ \text{tang}\ d\ p$

para S m' A = C,

$$\cos C = \cos S\ A\ \text{sen}\ d\ p \qquad \text{ó} \qquad \text{tang}\ C = \frac{\text{tang}\ S\ A}{\text{sen}\ A\ m'}$$

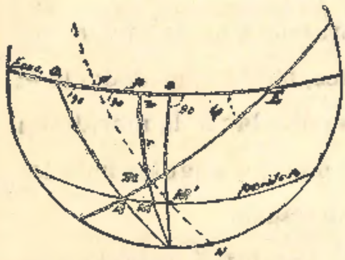
ó $$\text{tang}\ C = \frac{\text{cotang}\ P}{\cos S\ A}$$

para S m',

$$\text{tang S m}' = \frac{\text{tang S A}}{\text{cos d p}} \qquad \text{ó} \qquad \text{sen S m}' = \text{cos A m}' \text{ cos S A}$$

y se hallará $\quad \text{m m}' = \text{S m}' - \text{S m} = \text{S m}' - \text{S A}.$

De igual manera puede considerarse el triángulo A a E, y por su intermedio calcular los elementos necesarios á la resolución del problema. En efecto, en el triángulo A a E, se conoce:



S A a = meridiano del punto A, sobre el paralelo $\varphi$.

A m E = círculo máximo perpendicular al meridiano en el punto A.

p' m N = círculo máximo perpendicular á la perpendicular A m E.

A m = distancia medida en la perpendicular.

m M' = ordenada para fijar el punto M' sobre el paralelo.

A a = $\varphi$ (latitud), A E y a E arcos de 90°, y ángulo a E A = $\varphi$.

En el triángulo m p E hay que hallar

p m = c y p m E = $\beta$.

Se conocerá

E m = a = (90° — A m).

$$\text{sen c} = \text{sen a} \quad \text{sen } \varphi \; ; \qquad \text{cotang } \beta = \frac{\text{cos a}}{\text{cotang } \varphi}$$

$$\text{sen (p m)} = \text{sen (E m) sen (A E a)}$$

En el triángulo p' m p, se conoce:

$\text{p}' \text{ m p} = \text{p}' \text{ m E} - \text{p m E} = (90° - \beta) = \gamma \; ; \qquad \text{m p} = \text{c}.$

Hay que hallar

$$\text{m p}' \text{ p} = \psi \qquad \text{y} \qquad \text{m p}' = \text{b}$$

$$\cos \psi = \text{cos c sen } \gamma = \text{cos c sen } (90 - \beta)$$

$$\text{tang b} = \frac{\text{tang c}}{\cos \gamma} = \frac{\text{tang c}}{\cos (90 - \beta)}$$

En el triángulo M' p' s, se conoce:

$\text{M}' \text{ p}' \text{ s} = \psi, \qquad \text{M}' \text{ s p}' = 90°, \qquad \text{M}' \text{ s} = \varphi$ (latitud).

Hay que hallar, $\text{M}' \text{ p}' = \text{d}.$

$$\operatorname{sen} d = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi}; \qquad M' m = M' p' - m p.'$$

En cuanto á la distancia A M' de paralelo correspondiente á A m de la perpendicular, su valor se hallará por

$$\cos A M' = \cos A m \cos m M'.$$

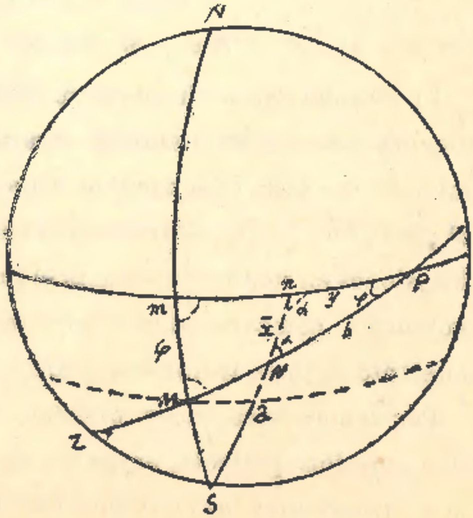
También calculando el ángulo que hace el paralelo con el meridiano en el punto A, y deduciéndolo de 90°, se tiene para el ángulo

$$m A M' = 90^{\circ} - M' A S = \alpha; \qquad \text{luego}$$

$$\operatorname{tang} A M' = \frac{\operatorname{tang} A m}{\cos \alpha}$$

### Perpendicular á la meridiana

El círculo máximo perpendicular á un meridiano en un punto M tiene su polo en el Ecuador, punto donde concurrirán todas las perpendiculares al mismo meridiano; sobre la esfera su trazado se aparta cada vez mas del paralelo de latitud que pasa por M y corta todos los demás meridianos bajo un ángulo variablemente decreciente.




Sea, s M m el arco

de meridiano que pasa por el punto M y Z M N P el círculo que le es perpendicular.

En el triángulo bi-rectángulo M m P se tiene:

$$P\,M\,m = 90^o = M\,m\,P\ ,\ m\,P\,M = \varphi \quad \text{(latitud medida por el arco M m)}$$

$$P\,M = P\,m = 90^o$$

Si ahora se mide sobre la perpendicular una distancia M N ¿cuál será la situación del punto N con relación al paralelo de M?

En el triángulo rectángulo P n N se tiene:

$$P\,n\,N = 90^o = \alpha$$

$$n\,P\,N = \varphi \quad , \quad P\,N = 90 - M\,N = b$$

Habrá que hallar el ángulo

$$n\,N\,P = \beta \quad , \quad \tan \beta = \frac{\cot \varphi}{\cos b}$$

y los lados $P\,n = y\ ,\ N\,n = x$

$$\tan y = \tan b \cos \varphi \quad , \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \varphi$$

ó $\tan x = \tan b \cos \beta$

luego $N\,a = M\,m - N\,n = \varphi - x$

El trazado de un círculo perpendicular al meridiano se efectua como el de cualquier otra línea.—Una vez determinada con toda exactitud, la dirección del meridiano en el punto de partida, se traza la perpendicular colocándose los jalones en su dirección hasta el punto más lejano donde volverá á colocarse el instrumento para prolongar más adelante la línea traída hasta ahí.

Por demás será hacer presente, que, para que exista una relación perfecta, entre la distancia medida sobre la perpendicular, las posiciones calculadas geodésicamente y la dirección establecida para la línea, debe hacerse especialmente la medida con toda proligidad reduciendo luego todo la medición á un plano paralelo al del nivel del mar.

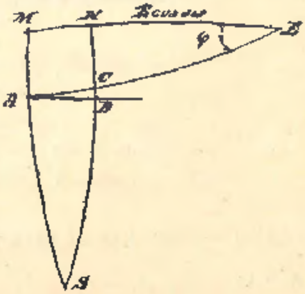
$$b = B - \frac{h}{r} B$$

En todas las operaciones que preceden, una vez deducidos por la esférica, los ángulos de los triángulos establecidos ó calculados para la resolución del problema, se puede aplicar el *Teorema Legendre* á los triángulos geodésicos y, después de corregidos los ángulos del exceso esférico, tratar la resolución de los triángulos de operación por la trigonometría rectilínea, pues los lados de esos triángulos son relativamente tan pequeños, comparados con el esferoide, que sus arcos se confunden con sus cuerdas.

### Aplicación

Hay que amojonar un arco del paralelo 36º en una extensión A D = $d_m$ 100.000 metros = 0º 53' 49'', 99 = 3229'', 99.

Reducidos á segundos los 100.000 metros habrá que calcular: el ángulo S A D = S D A que forma el paralelo 36 con los meridianos y el ángulo A S D = S, formado en el polo por los dos meridianos de los puntos A y D.




Según la fórmula geodésica que dice que un arco de paralelo es igual al arco de Ecuador (sea ángulo en el polo) por elc oseno de la latitud, se tendrá para S, de; $A\ D = S \cos \varphi$, $S = \dfrac{A\ D}{\cos \varphi}$ (1)

Así empezando por reducir á segundos el arco $A\ D = dm$.

$$d'' = \frac{dm}{N \text{ sen } 1''} = \frac{100.0000}{N \text{ sen } 1''}$$

$$S = \frac{A\ D}{\cos \varphi}$$

$$\log A\ D\ (3229'',99) = 3.5092019$$
$$-\log \cos 36^\circ = 9.9079576$$
$$\log S = 3.6012443$$
$$S = 3992'',478$$
$$= 1^\circ\ 06'\ 32'',48$$

| | |
|---|---|
| log N (36°)....... | 0.0005131 |
| log R...... | 6.8047076 |
| log sen 1''....... | 4.6855774 |
| log N sen 1''..... | 1.4907981 |
| c. log N sen 1''..... | 8.5092019 |
| log 100.000 = | 5.0000000 |
| log d'' = | 3.5092019 |
| d'' = | 3229'' 997 |
| = | 53' 49'' 99 |

## Comprobación por otras fórmulas.

$$\text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\ S) = \sqrt{\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\ (a+b)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}\ (a-b)}}$$

$$a = A\ S = 54^\circ$$
$$b = \frac{A\ D}{2} = 0^\circ\ 26'\ 54'',99$$
$$(a+b) = 54^\circ\ 26'\ 54'',99 \quad \tfrac{1}{2}\ (a+b) = 27^\circ\ 13'\ 27'',49$$
$$(a-b) = 53^\circ\ 33'\ 05'',01 \quad \tfrac{1}{2}\ (a-b) = 26^\circ\ 46'\ 32'',50$$
$$\log \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (a+b) = 9.7113545$$
$$-\log \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) = 9.7029480$$
$$0.0084065$$
$$\log \text{tang}\ (45 + \tfrac{1}{2}\ S) = 0.0042032$$
$$(45 + \tfrac{1}{2}\ S) = 45^\circ\ 16'\ 38'',12$$
$$\tfrac{1}{2}\ S = 0^\circ\ 16'\ 38''12$$
$$\tfrac{1}{2}\ \text{ángulo}\ A\ S\ D = S = 0^\circ\ 33'\ 16'',24$$
$$\text{ángulo}\ A\ S\ D = 1^\circ\ 06'\ 32'',48$$

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ S = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ (A\ D)}{\text{sen}\ A\ S}$$
$$A\ D = 53'\ 49'',\ 99$$
$$A\ S = 54^\circ$$
$$\log \text{sen}\ 26'\ 54'',\ 99 = 7.8977430$$
$$-\log \text{sen}\ 54^\circ = 9.9079576$$
$$\log \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ S = 7.9857854$$
$$\tfrac{1}{2}\ \text{áng.}\ A\ S\ D = S = 33'\ 16'',\ 24$$
$$\text{angulo}\ A\ S\ D = 1^\circ\ 06'\ 32''.\ 46$$

Para calcular el ángulo S A D de ese triángulo isósceles A S D.

$$\cos A = \frac{\tan g \frac{1}{2} A D}{\tan g A S}$$

A D = 53' 49'', 99

½ A D = 26 54'' ,99

log tang ½ 26' 54'', 99 = 7.8937563

— log tang 54° = 0.1387390

log cos A = 7.7550173

A = 89° 40' 26'' , 59

$$\tan g \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}}$$

a = 54°

b = 0° 26' 54'', 99

log sen (a − b) = 53° 33' 05'', 01 = 9 9054667

— log sen (a + b) = 54° 26' 54''. 99 = 9 9104079

9.9950588

log tang ½ A = 9.9975294

½ A = 44° 50' 13'' 33

A = 89° 40' 26'',66

Del triángulo A S C, se hallarán los elementos A C y C D.

tang A C = sen A S tang S

log sen A S = 54° = 9.9079576

log tang S = 1° 06' 32'',46 = 8.2870126

log tang A S = 8.1949702

A S = 0° 53' 50'',18 = 3230'', 15

$$\cos A\,C = \frac{\cos S\ C}{\cos S\ A}$$

cos 54° 0' 18'' = 9.7691654

cos 54° = 9.7692817

log cos A C = 9.9999467

A C = 53' 50'',15

$$\tan g\ S\,C = \frac{\tan g\ A\,S}{\cos\ S} = \frac{\tan g\ 54^\circ}{\cos 1^\circ 06' 32''}$$

log tang 54 = 0.1387390

— cos 1° 6' 32'' = 9.9999186

log tang S C = 0.1388204

S C = 54° 0' 18'',4

— S D = 54°

D C = 0° 0' 18'',40

ángulo A C S

$$\tan g\ A\,C\,S = \frac{\operatorname{cotag}\ S}{\cos\ S\,C}$$

log cotg 1° 06' 32'' = 1.7131806

— log cos 54° 0' 18'' = 9.7691665

log tang C = 1.9440141

tang A C S = 89° 20' 53'', 64

log 3230, 15 = 3.5092230

log N sen 1'' = 1.4907981

5.0000211

A C = $d_m$ = 10004, 85

log 18, 40 = 1.264818

log N sin 1'' = 1.490798

2.755616

$d_m$ = 569m 66

Conocidos los elementos del triángulo A C S y los de A S D se deducirán los del triángulo A C D el cual se tendrá:

| | |
|---|---|
| A D = 0° 53′ 49″, 99 = 100000$_m$ | ángulo C A D = 0° 19′ 33″, 40 |
| A C = 0° 53′ 50″, 18 = 100004.85 | » A C D = 89° 20′ 53″, 60 |
| C D = 0° 0′ 18″, 40 = 569.66 | » C D A = 90° 19′ 33″, 40 |
| | 180° 00′ 00″, 40 |

$$\varepsilon = 0'', 40$$

$$\tfrac{1}{3}\,\varepsilon = 0'', 133 \quad \text{(corrección)}$$

Siendo un triángulo inferior á 1 grado por costado puede ser tratado por el teorema de Legendre por la trigonometría rectilínea y así determinar los elementos para las ordenadas y abcisas que se medirán sobre la perpendicular A C á la meridiana.

También puede procederse de la siguiente manera por el triángulo esférico A S C; hay que colocar mojones sobre el paralelo cada 10.000$_m$, para ésto se tendrá el siguiente detalle:

d en metros

| | | |
|---|---|---|
| para d = 10.000 m | d = 20.000 | d = 30.000 |
| log d = 4.0000000 | log d = 4.3010300 | log d = 4.4771213 |
| los N sen 1″ = 1.4907981 | 1.4907981 | 1.4907981 |
| log d″ = 2.5092019 | 2.8102319 | 2.9863232 |
| 322″, 99 = 5′ 22″, 99 | 645″, 99 = 10′ 45″, 99 | 968″, 99 = 16′ 08″, 99 |

| | |
|---|---|
| d = 40.000 | d = 50.000 |
| d = 4.6020600 | d = 4.6990569 |
| 1.4907981 | 1.4907981 |
| 3.1112619 | 3.2082588 |
| 1291″, 99 = 21′ 31″, 99 | 1615″, 32 = 26′ 55″, 32 |

$$\text{cálculo de } S = \frac{d''}{\cos\ \varphi}$$

| | | |
|---|---|---|
| log d″ = 2.5092019 | log d = 2.8102319 | log d = 2.9863232 |
| — log cos 36° = 9.9079576 | 9.9079576 | — 9.9079576 |
| 2.6012443 | 2.9022743 | 3.0783656 |
| 399.25 | 798.49 | 1197.78 |
| $S_1$ = 6′ 39″, 25 | $S_2$ = 13′ 18″, 49 | $S_3$ = 19′ 57″, 78 |

| | |
|---|---|
| log d = 3.1112619 | log d = 3.2082588 |
| 9.9079576 | 9.9079576 |
| 3.2033043 | 3.3003012 |
| 1596.993 | 1996.65 |
| $S_4$ = 26' 36'', 99 | $S_5$ = 33' 16'',65 |

$$\text{con : tang S C} = \frac{\text{tang S A}}{\cos S}$$

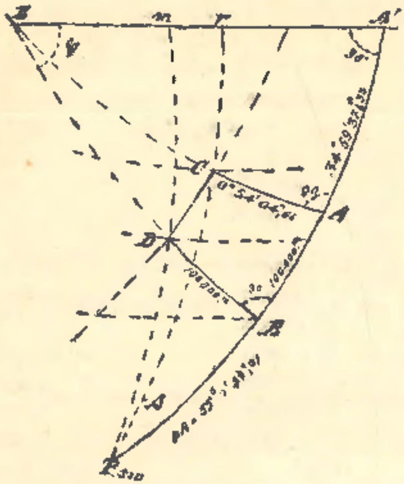
| | | |
|---|---|---|
| log tang 54° = 0.1387390 | 0.1387390 | 0.1387390 |
| log cos 6'39'',25 = 9.9999992 | 9.9999967 | 9.9999927 |
| log tang S C = 0.1387398 | 0.1387423 | 0.1387463 |
| 54° 0' 0'', 18 | 54° 0' 0'' 74 | 54° 0' 1''. 65 |
| log 0'', 18 = 9.255278 | 0.74 = 9.869232 | 1.65 = 0.217484 |
| log N sen 1'' = 1.490798 | 1.490798 | 1.490798 |
| 0.746071 | 1.260030 | 1.708282 |
| 5.572 | 18.19 | 51.08 |

| | |
|---|---|
| 0.1387390 | 0.1387390 |
| 9.9999870 | 9.9999797 |
| 0.1387520 | 0 1387593 |
| 54° 0' 2'', 91 | 54° 0' 4'', 35 |
| log 2.91 = 0.463893 | log 4'35 = 0.6384893 |
| 1.490798 | log N sen 1'' = 1.4907981 |
| 1.954691 | 2.1292874 |
| 90.09 | 134.68 |

| | |
|---|---|
| para $d_n$ = 80.000m | ángulo en S = 0° 53' 14'' |
| log tang S A = 54° = 0.1387390 | log 13, 76 = 1.138618 |
| log cos 0° 53' 14'' = 9.9999485 | log N sen 1'' = 1.490798 |
| log tang S C = 0.1387905 | log D C = 2.629416 |
| S C = 54° 0' 13'', 76 | $426_m$ 02 |

**Aplicación de las fórmulas á la medición de un cuadrado**

Desde el punto A y sobre el meridiano A' A B P, se trata: de medir la distancia A B = 100.000 metros, levantar en A y en B perpendiculares al meridiano con




C A y B D = 100.000m y cerrar ese cuadrado con la línea C D. Hecha así esa operación, deben estudiarse sus defectos y las condiciones de cada punto en posición geográfica y azimutes de los lados.

Siendo la latitud del punto A,

$$\varphi = 34^\circ\ 59'\ 37'',33$$

obtenida como término medio de una serie de observaciones, la latitud del punto B resultará de la suma del arco A B á la latitud de A.

Pero A B es igual á 100.000 metros, los que reducidos á minutos ó segundos dan: de la tabla I se tiene para el valor de 1'' entre los paralelos 35 y 36, el de $30_m\ 82$, luego la distancia $d_m$ reducida á segundos será

$$d'' = \frac{d_m}{30.82} = \frac{100000}{30.82} = 3244'',66 = 0^\circ\ 54'\ 04'',66$$

Luego las latitudes correspondientes serán para

A.... $\varphi\ 34^\circ\ 59'\ 37'',13$

B.... $\varphi'\ 35^\circ\ 53'\ 42'',00$

La medición de los $100.000_{ms}$ sobre las perpendiculares al meridiano A E y B E fijarán los puntos C y D, cuyas latitudes se hallarán por las siguientes fórmulas resolviendo el triángulo C r E y el D m E, rectos en m y en r y con el ángulo en E conocido.

Así: triángulo c E r ángulo en

$$E = \varphi = 34^\circ\ 59'\ 37'',33$$

$$E\ C = a = 90^\circ - 0^\circ\ 54'\ 04'',66 = 89^\circ\ 05'\ 55'',33$$

hallar: $C\ r = b$ en función de $a$ y $\varphi$

$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \varphi$

$$\log \operatorname{sen} 89^\circ\ 05'\ 55'',33 = 9.9999462$$
$$\log \operatorname{sen} 34^\circ\ 50'\ 37'',33 = 9.7585221$$
$$\log \operatorname{sen} b = 9.7584683$$
$$C\ r = b = 34^\circ\ 59'\ 19'',10$$
$$= \text{lat de } C$$

En triángulo D M E

$\operatorname{sen} b' = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \varphi'$

$$\log \operatorname{sen} 89^\circ\ 05'\ 55'',33 = 9.9999462$$
$$\log \operatorname{sen} 35^\circ\ 53'\ 42'', \quad = 9.7681182$$
$$\log \operatorname{sen} b' = 9.7680644$$
$$D\ m = b' = 35^\circ\ 53'\ 22'',50$$
$$= \text{lat de } D$$

Triángulo C E r, hallar ángulo en $C = E\ C\ r$.

$$\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{\cos a}$$

$$\log \operatorname{cotg} 34^\circ\ 59'\ 37'',33 = 0.1548750$$
$$\log \cos 89^\circ\ 05'\ 55'',33 = 8.1967717$$
$$\log \operatorname{tang} C = 1.9581033$$
$$\text{ang } E\ C\ r = C = 89^\circ\ 22'\ 08'',54$$

En el triángulo D E m.

$$\operatorname{tang} D = \frac{\operatorname{cotg} \varphi'}{\cos a}$$

$$\log \operatorname{cotg} 35^\circ\ 53'\ 22'',50 = 0.1405001$$
$$\log \cos 39^\circ\ 05'\ 55,''\ 33 = 8.1967712$$
$$\log \operatorname{tang} D = 1.9437289$$
$$\text{ang } E\ D\ m = D = 89^\circ 20' 52'',10$$

En el triángulo C E r, hallar lado $E\ r = c$

$\tan c = \operatorname{tang} a \cos \varphi$

$$\log \operatorname{tang} 89^\circ\ 05'\ 55'',33 = 1.8032153$$
$$\log \cos 34^\circ\ 59'\ 37'',33 = 9.9132984$$
$$\log \operatorname{tang} c = 1.7166137$$
$$c = 88^\circ\ 53'\ 59'',40$$

$$\begin{array}{rl} & 90^\circ \\ E\ r = & 88^\circ\ 53'\ 59'',\ 4 \\ \hline r\ A = & 1^\circ\ \ 6'\ 00'',\ 6 \end{array}$$

En el triángulo D E m hallar E m = c'

tang c' = tang a cos φ'

log tang 89° 05' 55'', 33 = 1.8032153

log cos 35° 53' 22'', 50 = 9.9085645

log tang c' = 1.7117798

c' = 88° 53' 15'', 10

90°

E m = 88° 53' 15'', 10

m A' = 1° 6' 44'', 90

COMPROBACIONES

En el triángulo A P C, en el que se conoce

P A = 90 — φ = 55° 00' 22'', 67 = c    A C = b = 0° 54' 04'', 66

hallar P C = a

cos a = cos b cos c

log cos 0° 54' 04'', 66 = 9.9999463

log cos 55° 00' 22'', 67 = 9.7585231

log cos a = 9.7584694

a = 55° 00' 40'', 50

90°

P C = 55° 00' 49'', 50

C r = 34° 59' 19'', 50

hallar el ángulo β en el polo P, en función de c y b

cotg β = sen c cotg b

log sen 55° 00' 22'', 67 = 9.9133980

log cotg 0° 54' 04'', 66 = 1.8032153

log cotg β = 1.7166133

C P A = β = 1° 06' 00'', 67

ang β = arco r A' = 1° 06' 00'', 67

Azimut. linea A C. sobre el horizonte de A,

Azimut A C = 0°, Oeste

Azimut linea de C A sobre el horizonte de C; = ángulo

A C P = E C r = S 89° 22' 08'' E.

Para hallar el largo de la línea C D comprendida entre las dos perpendiculares á la meridiana A P.

El triángulo isósceles D E C en el que se conocen los dos lados iguales y el ángulo en el vértice.

E C = E D = 90 — 0° 54' 04'', 66 = 89° 05' 55'', 34

áng D E C = E = 0° 54' 04'', 66

hallar lado C D = b

$$\text{sen b} = \text{sen a sen}\ \frac{E}{2}$$

log sen 89° 05' 55'', 34 = 9.9999462
log sen 27' 2'', 33 = 7.8957103
log sen b = 7.8956565
b = 27' 2'', 083
C D = 0° 54' 04'', 16

C D en metros;

54' 04'', 16 = 3244'', 16 + 30.82 = 99985$_m$ 01
faltan 14. 99
por los....100.000,00

hallar áng. D C E = C D E

cotang C = cos a tang ½ E

log cos 89° 05' 55'', 34 = 8.1966466
log tang 27' 2'', 33 = 7.8957239
log cotg C = 6.0923705
D C E = 89° 59' 33'', 90

Azimut de la línea C D sobre el horizonte de C

Del triángulo P C D en el que se conoce

P C = 90° $- \varphi_c$ = 90° — 34° 59' 19'',10 = 55° 00' 40'', 90
P D = 90° $- \varphi'_d$ = 90° — 35° 53' 22'',50 = 54° 06' 37'', 50
C D ................................ = 0° 54' 04'', 16
Angulo.....D P C = $\beta$ = E r — E m = 88° 53' 59'' 40
— 88° 53' 15'', 10 = 0° 0' 44'', 30


de

sen 0° 0'44'',30 : sen 0° 54'04'', 16 :: sen $\beta$ : sen 54° 06' 37'', 50

log sen 0° 0' 44'', 30 = 6.8322808
lon sen 54° 06' 37'', 50 = 9.9085645
16.2408453
log 0° 54' 04'', 16 = 8 1966592
log sen $\beta$ = 8.0441861
$\beta$ = P C D = 0° 38' 03'' 60

sea el rumbo de C D desde C;

S 0° 38' 03'', 60 O.

del mismo triángulo se deduce

Angulo C D P = 179° 21' 30'', 88; Rumbo N. 0° 38' 29'', 12 E.

De los cálculos que preceden se desprende: que admitiendo las dos perpendiculares al meridiano en los puntos


34

A y B, no se formará un cuadrado perfecto y que para ello se necesita alterar uno de esos ángulos para obtener la precisión matemática; que la misma línea A C tiene dos azimutes ó rumbos según se deduzca éste de uno ú otro de sus extremos; y que la línea C D, paralela al meridiano de partida A B, es parte de un círculo mínimo como los paralelos de la latitud con su azimut particular y distinto según sea observado de uno ú otro de los extremos de la línea.

También los ángulos materiales que resultan para el cuadrilátero así derminado, son:

en A....90

,, C....90° 00' 12'', 14

,, D....90° 00' 38'', 78

,, B....90°

Total...360° 00' 50'', 92

Cálculo de la convergencia de meridianos para el azimut de la línea B D sobre el horizonte de B por la fórmula

$$d\, z = 180^{\circ} + z + P\,(\text{sen}\ \varphi - \cos\ \varphi\ \tfrac{1}{2}\ a\ \text{sen}\ 1'')$$


| | |
|---|---|
| log P = 3.6026025 | log P = 3.6026 |
| log sen φ = 9.7681182 | log φ = 9.7681 |
| log P sen φ = 3.3707207 | log ½ a = 0.9777 |
| 2348'', 18 | log sen 1'' = 4.6856 |
| 1er = 39'08'',18 | 9.0330 |
| 2.° = — 0'',11 | 2 = 0'', 11 |
| 39'08'',07 | |

para

$$B,\ \varphi = 35^{o}\ 53'\ 42''$$
$$D,\ \varphi' = 35^{o}\ 53'\ 23''$$
$$a = 0'\ 19''$$
$$\tfrac{1}{2}\ a = 9'',50$$
$$P = 1^{o}\ 06'\ 45'' = 4005''$$

$$180 + z = 270$$
$$+\ 0^{o}\ 39'\ 08'',08$$
$$Z' = 270^{o}\ 39'\ 08'',08$$

Rumbo + S. $89^{o}\ 20'\ 51'',92$ E.

ángulo calculado

$$E\,D\,M = P\,D\,B = 89^{o}\ 20'\ 52''$$

## Nivelación Geodésica

De tres maneras puede obtenerse la diferencia de nivel que existe entre dos ó más puntos y de éstos con un plan general de comparación.

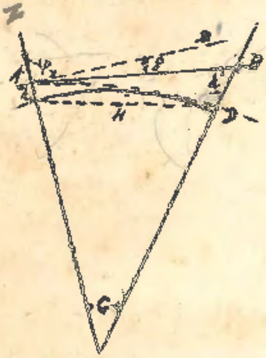
*Por nivelación Topográfica* que es: la más usual, la que permite obtener más detalles y la que se presta á las operaciónes comunes de estudios generales y construcciones.

*Por nivelación Barométrica* empleada especialmente para determinar la altura ó altitud de puntos elevados sobre el nivel del mar y cuyos resultados, si bien no revisten la precisión absoluta, son suficientes y muy apreciados para los fines de la geografía, estudio de una región, exploraciones, etc., etc.

*Por nivelación Geodésica* basada, en que la diferencia de nivel entre dos puntos es igual á la diferencia entre sus respectivas distancias zenitales. Esta es considerada de precisión, pero sólo puede determinar la diferencia de nivel entre esos puntos, sin fijar la altitud de ellos.

La determinación de la diferencia de nivel entre dos puntos puede obtenerse:

*Por una sola distancia zenital*, observada desde la estación A, de altitud ya conocida; siendo



Z A B la altura zenital del punto B, el cálculo sería sencillo sin los efectos de la refracción; así llamando: $\varphi$ = altura zenital observada, $\delta$ = el ángulo B' A B de refracción y $\varphi_0$ la distancia verdadera se tiene:

$$\varphi_0 = \varphi + \delta$$

La determinación del coeficiente de refracción, aunque fijado ya en tablas por prolijas observaciones, es aún susceptible de algunas correcciones debidas al estado de la atmósfera; esta causa es sensible y la experiencia ha demostrado que una diferencia de $\frac{1}{100}$ en ese coeficiente, puede ocasionar un error de $1^m50$ en la diferencia de nivel entre dos puntos distantes 30.000 metros.

Ahora llamando K = la distancia A B, costado de la triangulación y C = ángulo al centro de la tierra correspondiente al arco A B y con radio R de la esfera osculatriz correspondiente á la latitud de las estaciones A B.

La diferencia de nivel d, entre A y B será:

$$d = \frac{K \cos\left(\varphi + n\,C - \frac{C}{2}\right)}{\operatorname{sen}\,(\varphi + n\,C - C)} \quad (1)$$

en la cual

$C'' = \dfrac{K}{R \text{ sen } 1''}$ ; $n$ = coeficiente refracción = $\pm$ 0,08 á 0,125.

Esta fórmula (1) se deduce de las siguientes consideraciones:

La resolución del problema consiste en hallar el cateto B D en el triángulo A B D, en el que se conoce el lado $A\,B = K$ y la altura zenital $\varphi$.

Si préviamente se considera el triángulo isósceles A C B, se tiene; llamando A, los ángulos iguales en A y B.

$$2\,A + C = 180\,, \qquad A = \frac{180 - C}{2} = 90 - \frac{C}{2}$$

Luego en el triángulo A B D, se tendrán:

$$\text{ángulo } B\,A\,D = 180 - \left[\varphi + \left(\frac{180 - C}{2}\right)\right]$$

$$= 180 - \varphi - 90 + \frac{C}{2} = 90 - \varphi + \frac{C}{2}$$

$$\text{ángulo } A\,D\,B = 180 - \left(90 - \frac{C}{2}\right) = 180 - 90 + \frac{C}{2} = 90 + \frac{C}{2}$$

$$\text{ángulo } A\,B\,D = 180 - \left(90 - \varphi + \frac{C}{2}\right) + \left(90 + \frac{C}{2}\right)$$

$$= 180 - (180 - \varphi + C) = \varphi - C$$

Ahora de, $\text{sen } A\,B\,D : K :: \text{sen } B\,A\,D : B\,D$ se tendrá:

$$B\,D = \frac{K \text{ sen } B\,A\,D}{\text{sen } A\,B\,D} = K \frac{\text{sen}\left(90 - \varphi + \frac{C}{2}\right)}{\text{sen}\,(\varphi - C)} = K \frac{\cos\left(\varphi + \frac{C}{2}\right)}{\text{sen}\,(\varphi - C)}$$

en cuya expresión si se introduce el valor del coeficiente de refracción $n$ se tendrá la fórmula (1).

Pero el coeficiente de refracción á los efectos de ésta pueden calcularse directamente observándose las alturas zenitales en las dos estaciones como se expondrá más adelante y en ese caso se llegará con la fórmula (2) á deducir el valor del error $\delta$ cuya mitad es lo que debe restarse á la distancia observada para obtener la verdadera.

Así, sea el caso de haberse observado desde las estaciones A y B distantes entre sí, $K = 11283$, las distancias zenitales $\varphi = 89^\circ\ 26'\ 15''$ y $\varphi' = 90^\circ\ 38'\ 51''$, el error de refracción es, según la fórmula (2)

$$\delta = (180 + C) - (\varphi \pm \varphi')$$

el ángulo C resulta ser $\qquad C = 0^\circ\ 6'\ 5'',50$

$$\text{así que} \qquad \delta = (180 + 6'\ 5'',50) - (\varphi + \varphi') = \begin{array}{r} 180^\circ\ 06'\ 05''\ 50 \\ -\ 180^\circ\ 05'\ 06''\ 00 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta = \quad 0'\ 59'',50$$

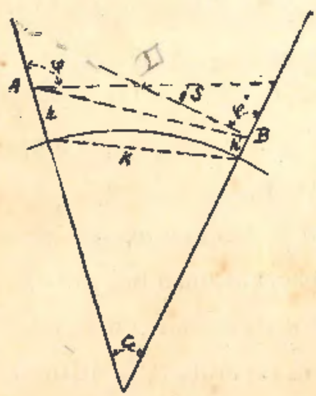
$$\tfrac{1}{2}\,\delta = \quad 0'\ 29'',75$$

Este mismo resultado justifica el valor asignado al coeficiente n. Haciéndolo $n = 0.08$.

pues siendo $\qquad C = 0^\circ\ 6'\ 5'',50 = 365'',50$

$$c\,n = 365'',50 \times 0.08 = 29'',25$$

*Por dos distancias zenitales.* — Observando recíprocamente ó simultáneamente la altura zenital de las dos estaciones A y B desde cada una de ellas, se llega á eliminar los efectos de la refracción ó por lo menos compensarlos para que desaparezcan.




Examinando la figura se ve que observando desde A, el punto B aparece en B' y desde B, el punto A en A', se nota la existencia del cuadrilátero A C B D en el cual la suma de los ángulos es:

$$(180 - \varphi) + (180 - \delta) + (180 - \varphi') + C = 360^\circ$$

de donde:

$$\varphi + \varphi' + \delta = 180^\circ + C \quad \text{y} \quad \delta = (180 + C) - (\varphi + \varphi') \quad (2)$$

Expresión que permite conocer el valor de la refracción sin auxilio de las tablas ni teoría.

Ahora en atención á que según lo expuesto en «la magnitud de los triángulos» difícilmente habrá un costado A B de una longitud mayor que la correspondiente á un arco de 22', puede confundirse la curva luminosa con la de su círculo osculador y entonces los ángulos A B D y B A D serán respectivamente iguales á $\frac{1}{2}\,\delta$ pues que tienen por medida la mitad del ángulo interceptado: así, pues, las alturas zenitales respectivas serán:

$$\left(\varphi + \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\varphi' + \frac{\delta}{2}\right)$$

Del triángulo A B C se deduce:

$$\operatorname{sen}\left(\varphi + \tfrac{1}{2}\,\delta\right) : \operatorname{sen}\left(\varphi' + \tfrac{1}{2}\,\delta\right) :: (R + h) : (R + h')$$

siendo $R =$ radio terrestre local y $h$, $h'$ las respectivas elevaciones de las estaciones A, B sobre el nivel del mar, ó del elipsoide terrestre. De esta proporción y su transformación, se llega á la fórmula general con la cual se consigue la diferencia de nivel buscada.

$$d = (h' - h) = (2\,R + h + h')\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,(\varphi - \varphi')\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,C \quad (3)$$

ó simplemente, despreciando el valor de $(h + h')$ con relación al radio R

$$d = (h' - h) = 2\,R\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,(\varphi - \varphi')\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,C \quad (4)$$

Cuando la distancia K no excede de 10 á 15.000 metros, la fórmula puede aún reducirse á ;

$$d = \frac{K \text{ sen } \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi + C} \quad (5) \qquad \text{ó sino;} \quad d = K \text{ tang } \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \quad (6)$$

pues que puede admitirse que $2 R \text{ tang } \frac{C}{2} = K.$

*Ejemplo.*—

En estación A, $h = 82^m, 70$, $\varphi = 89^\circ 26' 15'' = Z A B$

» » B, $h = 22^m, 50$, $\varphi' = 90^\circ 38' 51'' = Z' B A$

distancia A B = K = 11283 metros

**Fórmula 1**

$C = 6' 05'', 50;$ $n = 0.080$ $C n = 0' 29'', 24$

$\varphi = 89^\circ 26' 15''$ $\varphi + n C = 89^\circ 26' 44'',24$

$+ C n = 0^\circ 0' 29'' 24$ $- C = 6' 5'',50$

$89^\circ 26' 44'' 24$ $89^\circ 20' 38'',74$

$- \frac{1}{2} C = 0^\circ 3' 02'' 75$

$\log \cos = 89^\circ 23' 41'',49 = 8.024023$

$\log K = 4.052446$

$\text{c.} \log \text{sen } (\varphi + n C) = 0.000029$

$\log d = 2.076498$

$d = 119,393$

Cálculo de: $C = \frac{K}{R \text{ sen } 1''}$

$\log K = 4.05244$

$\text{c.} \log R = 3.19604$

$\text{c.} \log \text{sen } 1'' = 5.31443$

$\log C = 2.56291$

$C = 365'', 50 = 6' 05'', 30$

$\frac{1}{2} C = 3' 02'', 75$

**Fórmula 3**

$\log (2 R + h + h') = 7.10500$

$\text{g tang } \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = 8.02365$

$\log \text{tang } \frac{1}{2} C = 6.94564$

$\log \text{ tang } d = 2.07429$

$d = 118, 66$

**Fórmula 4**

$\log 2 = 0.30103$

$\log R = 6.80396$

$\log \text{ tang } \frac{1}{2} C = 6.94564$

$\log (2 R \text{ tang } \frac{1}{2} C) = 4.05063$

$\log \text{ tang } \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_{\prime}) = 8.02365$

$\log d = 2.07428$

$d = 118,66$

**Fórmula 5**

$\log K = 4.05244$

$\log \text{sen } \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) = 8.02368$

$\text{c.} \log \cos \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi + C) = 0.00003$

$\log d = 2.07515$

$d = 119^m 20$

**Fórmula 6**

$\log K = 4.05244$

$\text{tang}(\varphi - \varphi) \frac{1}{2}' = 8.02365$

$\log d = 2.07609$

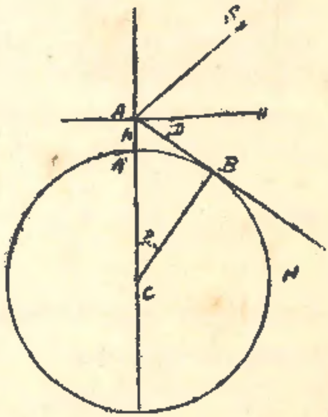
$d = 119^m 15$

Fórmula 7

$$(\varphi' - \varphi) = 1^{\circ}\,12'\,36'',70$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \quad 36'\,18'',35$$
$$\tfrac{1}{2}\,C = \quad 3'\;\;2'',75$$
$$\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi + C) = \quad 39'\,21'',10$$

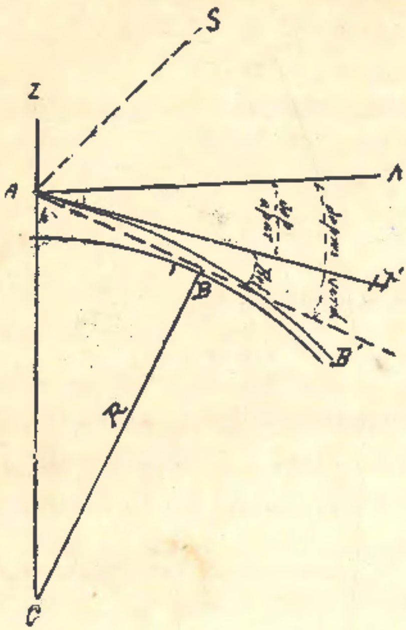
## Depresión del horizonte

Si de un punto A, situado á una altitud h, ya en tierra, ya en el mar, se observa la altura de un astro con un sestante ú otro instrumento, sirviéndose del horizonte de la mar, la altura medida deberá ser corregida de *depresión.*




Si S es el astro, la altura observada sobre el horizonte será S A B. Si al centro C de la tierra se observase esa misma altura el ángulo medido sería S' C N pues la visual S A se confundiría con la C S' en virtud de la pequeñez del radio con relación á la distancia al astro, así resultará, ángulo S' C N = S A H sobre el horizonte verdadero de A. La altura medida S A B, es pues, mayor que la verdadera de la medida del ángulo H A B que es *depresión del horizonte.*

El ángulo H A B depende de la altura del punto A sobre el horizonte; cuanto mayor es, mayor es la depresi




si el observador se hallara en A' sobre el mismo nivel del mar sería nula la depresión; así en las observaciones de alturas con un teodolito ú otro instrumento préviamente colocado en el plano horizontal no hay lugar á corrección de *depresión.*

Del triángulo rectángulo A C B, se tendrá para la depresión D:

$$\text{ángulo } ACB = OAB = D \,, \quad \text{tang } D = \frac{AB}{CA} = \frac{\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2}}{R + h}$$

de donde,

$$\text{tang } D = \sqrt{\frac{2Rh + h^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{2h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2}$$

ó simplemente, expresando al pequeño ángulo D por su arco y en segundos:

$$D = \frac{1}{\text{sen } 1''} \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

Adoptando para R el valor de 6.367.427m y siendo

$$\frac{1}{\text{sen } 1''} = 206264{,}8$$

la reducción de la precedente fórmula será:

$$D = 115'',601 \sqrt{h}$$

y

$$\log D = [2{,}062958] + \tfrac{1}{2} \log h$$

La depresión verdadera se divide en dos:

ángulo H A H' = depresión aparente = d
» H' A B = refracción atmosférica = $\gamma$
y el total » H A B = depresión verdadera = D

La refracción terrestre H' A B = $\gamma$ tiene por valor

$$\gamma = n\,C \qquad (2)$$

en el que C = ángulo formado al centro de la tierra por los radios C A y C B, n = coeficiente de refracción que se determina directamente observando de dos estaciones sus respectivas distancias zenitales (*capítulo anterior*) y para el cual se han adoptado diferentes valores, variables entre

$$n = 0.066; \quad n = 0{,}75; \quad n = 0.080.$$

La depresión aparente H A H' = d resulta tener por expresión:

$$d = \frac{1-n}{\text{sen } 1''}\sqrt{\frac{2\,h}{R}}$$

y con los valores asignados al radio y á $(1-n) = 0.92$ se convierte en:

$$d = 106'', 35\sqrt{h}$$

$$\log d = [\,2.026746\,] + \tfrac{1}{2}\log h \qquad (3)$$

también $\qquad d = D\,(-n) = D \times 0.92$

*La distancia del horizonte visible* A B' = K que es el largo del arco aparente A B, tiene por expresión la del ángulo al centro A C B' = C

$$C = \frac{1}{\text{sen } 1''}\sqrt{\frac{2\,h}{R\,(1-2\,n)}} \quad ; \quad \text{y,} \quad K = C \text{ sen } 1''\,R = \sqrt{\frac{2\,h\,R}{(1-2\,n)}}$$

y sustituyendo $\qquad \dfrac{2\,R}{(1-2\,n)}$

por su valor deducido de sus respectivas expresiones es

$$K = 3893_m 65 \sqrt{h}$$

$$\log K = [\ 3.590357\ ] + \tfrac{1}{2} \log h \qquad (4)$$

Si esta expresión dada en metros debiera expresarse en millas de 1852,21 metros, unidad de los cálculos marinos; se tiene

$$\log K \text{ (en millas)} = [\ 3.2676901\ ] + \tfrac{1}{2} \log h.$$

también puede obtenerse la distancia del horizonte por la siguiente fórmula en función de la altura zenital observada siendo así

$$K = \frac{(\varphi - 90^\circ)}{(1 - 2\,n)} R \operatorname{sen} 1'' \qquad (5)$$

Para determinar *la altitud* de un punto por la distancia zenital del horizonte de la mar ó también de la pampa, servirá la expresión

$$h = (\varphi - 90^\circ)^2 \frac{R \operatorname{sen}^2 1''}{2\,(1 - 2\,n)} \qquad (6)$$

en la cual se hará $n = 0.08$, Radio ecuatorial $R = 6.367.450$ m.

$$\log \frac{R \operatorname{sen}^2 1''}{2\,(1 - 2\,n)} = 5.94980 - 10.$$

1.er *Ejemplo.*—Hallar la altitud de un punto A, desde el cual se ha medido la distancia zenital $\varphi = 90^\circ\ 15'\ 25''$ al horizonte.

$$\log \text{ constante } \frac{R \operatorname{sen}^2 1''}{2\,(1 - 2\,n)} = 5.94980$$

$$2 \log (\varphi - 90^\circ) = 15'\ 25'' = 925'' = 5.93228$$

$$\log h = 1.88208$$

$$\text{altitud } h = 76^m, 20$$

2.° *Ejemplo.*—¿A qué distancia podrá verse una luz colocada á 30 metros de altura, hallándose el observador al nivel del mar?

De la fórmula (4) se tendrá:

$\log K = [3.59036] + \frac{1}{2} \log h$ expresado en metros

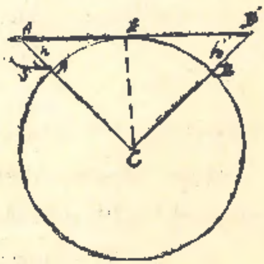
$\log K = [0.32267] + \frac{1}{2} \log h$ » en millas

$$\begin{aligned} \log \text{constante} &= 3.59036 \\ \tfrac{1}{2} \log 30 \text{ metros} &= \underline{0.73856} \\ \log K &= 4.32892 \\ K &= 21326^{m}\,04 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \text{constante} &= 0.32267 \\ \tfrac{1}{2} \log 30 &= \underline{0.73856} \\ \log K &= 1.06135 \\ K_m &= 11{,}51 \text{ millas} \end{aligned}$$

**Verificación**

$$\begin{aligned} \log K_m &= 1.06135 \\ \log 1852,22 &= \underline{3.26768} \\ \log K_m &= 4.32903 \\ \text{en metros} &= 21331^{m} \end{aligned}$$

3.^er^ *Ejemplo.*—El observador en A se halla á 10 metros sobre el nivel del mar; ¿á qué distancia podrá ver una luz colocada á 30 metros de altura?



En la adjunta figura, h' es la altura del observador, h la de la luz y E el punto de horizonte visible correspondiente á ambos puntos. La distancia ó arco A B se compondrá de

$$A\,B = A\,E + E\,B = 3893^{m}\,70 \sqrt{h} + 3893^{m}\,70 \sqrt{h'}$$

$$\begin{aligned} \log \text{constante} &= 3.59036 \\ \tfrac{1}{2} \log 10 &= \underline{0.50000} \\ \log K &= 4.09036 \\ A\,E &= 12312{,}70 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \text{constante} &= 3.59036 \\ \tfrac{1}{2} \log 30 &= \underline{0.73856} \\ \log K &= 4.32892 \\ E\,B &= 21326^{m}\,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\,E &= 12312,70 \\ E\,B &= \underline{21326,04} \\ A\,B &= 33638,74 \text{ metros} \end{aligned}$$

4.° *Ejemplo.*—¿A qué altura deberá colocarse la luz de un faro para poderse ver á 56 kilómetros de la costa, hallándose el observador á 10 metros sobre el nivel del mar?

de; $\log K = [3.59036] + \frac{1}{2} \log h$ se tiene $\log h = 2 (\log K - [3.59036])$; en metros

y de $\log K = [0.32267] + \frac{1}{2} \log h$ se tiene $\log h = 2 (\log K - [0.32267])$ en millas

la distancia $A\ B = K = [3.59036] \left(\sqrt{h} + \sqrt{h'}\right)$

solo h' es desconocida, luego

$$h' = \left(\frac{56000}{[3.59036]} - \sqrt{10}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\log 56000 &= 4.74819 \\
-\log \text{const.} &= 3.59036 \\
\log \text{I térm.} &= 1.15783 \qquad \tfrac{1}{2}\log 10 = 0.50000 \\
\text{I térm.} &= \ \ 14.38 \qquad \text{II térm.} = 3.16 \\
-\ \text{II térm.} &= \ \ \ 3.16 \\
\log.\ \text{de} \quad 11.22 &= 1.04999 \\
\log h' = 2 \log &= 2.09998 \\
h' &= 125.85
\end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned}
\log \text{constante} &= 3.59036 \\
\tfrac{1}{2} \log 10 &= 0.50000 \\
\log K &= 4.09036 \\
A\ E &= 12312{,}70
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \text{constante} &= 3.59036 \\
\tfrac{1}{2} \log 125{,}85 &= 1.04999 \\
\log K &= 4.64035 \\
E\ B &= 43687{,}18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\ E &= 12312{,}70 \\
E\ B &= 43687{,}18 \\
A\ B &= 55999{,}88 \text{ metros}
\end{aligned}$$

5.° *Ejemplo.* — ¿A qué distancia podrá verse la torre Eiffel, de 300 metros, suponiendo al observador y la torre al nivel del mar?

De $$K = [3.59036] \left(\sqrt{h} + \sqrt{h'}\right)$$

en la que $h = 0$, se tendrá la solución por

$$K = [3.59036] \sqrt{h'}$$

$$\begin{aligned} \log \text{constante} &= 3.59036 \\ \tfrac{1}{2} \log 300 &= 1.23858 \\ \hline \log K &= 4.82894 \\ K &= 67443^{m}\,32 \end{aligned}$$

## Superficie del triángulo Esférico terrestre

Suponiendo la tierra esférica, su superficie sería fácil calcular por las reglas y teoremas de la geometría;

$$S = 4 \pi R^2$$

Si se considera un triángulo esférico cuyos ángulos son $A, B, C,$ siendo $R$ el radio de la esfera se tendrá:

$$S = \pi R^2 \left[ \frac{A + B + C - 180^{o}}{180} \right]$$

siendo de observar que si el triángulo fuera muy pequeño con relación á la circunferencia terrestre (sea cuanto más un grado) puede considerársele por el teorema de Legendre y se tendría para la superficie:

$$S = \tfrac{1}{2}\, a\, b \operatorname{sen} C$$

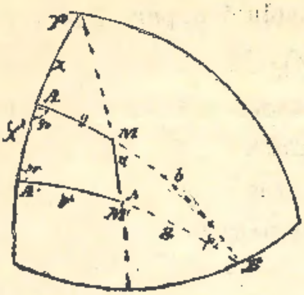
en función de los dos lados $a$ $b$ y del ángulo comprendido, ó cualquier otra de las fórmulas conocidas.

La superficie de una *zona* comprendida por dos paralelos de latitud $\varphi$ y $\varphi'$ tendrá por altura

$$h = R \operatorname{sen} \varphi' = R \operatorname{sen} \varphi$$

y por consiguiente la superficie será

$$S = 2 \pi R^2 (\operatorname{sen} \varphi' - \operatorname{sen} \varphi) = 4 \pi R^2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (\varphi' - \varphi) \cos \tfrac{1}{2} (\varphi' + \varphi)$$



La superficie de un trapecio formado por *un meridiano* P A A', dos *perpendiculares* á ese meridiano

A M E, A' M' E

(se sabe que las perpendiculares á un mismo meridiano tienen su polo común en un punto del Ecuador) y *el arco* de círculo máximo que liga los puntos M, M'

Llamando $\alpha$, $\beta$, $p$, los tres ángulos del triángulo M M' E y restando su superficie de la del triángulo A E A' birectángulo se tendrá para la superficie del trapecio esférico A M M' A'

$$S = \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{180^o - (\alpha + \beta}{18.^o}\right) \qquad (1)$$

Para conocer los ángulos $\alpha$ y $\beta$, $p$ es conocido por ser la medida del arco A A', se tendrá por las analogías de Neper y haciendo $M' E = a$, $M E = b$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} p$$

ó sea

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\ 180 - (\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} p \qquad (2)$$

Si se quiere hallar la misma superficie empleando las coordenadas esféricas rectangulares, llamando para el punto M

$$P A = x, \quad A M = y$$

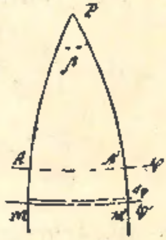
y para M', $P A' = x'$, $A' M' = y'$; se tiene: $a = 90 - y'$ $b = 90 - y$; ángulo $p = (x' - x)$, de donde la fórmula anterior (2) se transforma en:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \left(180^\circ - (\alpha + \beta)\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (y' + y)}{\cos \frac{1}{2} (y' - y)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (x' - x) \qquad (3)$$

Para aplicar las precedentes fórmulas al elipsoide terrestre basta substituir al radio R en la (1) por la normal adoptándose generalmente el valor de la que corresponde al punto céntrico de la figura A M M' A'; la fórmula aplicable será:

$$\text{Sup.} = \frac{\pi N^2}{2} \left( \frac{180 - (\alpha + \beta)}{180} \right) \qquad (4)$$

Para calcular la superficie trapezoidal formada por dos paralelas $\varphi$ y $\varphi'$ y dos meridianos que forman entre sí un ángulo polar $\beta$, se tendría: empezando por considerar una zona elemental de altura $d\,\varphi$ establecida sobre el paralelo $\varphi$ de radio




$$r = \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$$

siendo el otro radio $(r + d\,r)$

$$\text{Sup de la zona} = d\,s \times 2\,\pi \left(r + \tfrac{1}{2}\,d\,r\right) = 2\,\pi\,r\,d\,s$$

$d\,s$, = arco elemental del meridiano.

pero considerando de la zona, sólo la superficie del arco de paralelo M M', sea el ángulo $\beta$, se tendrá para la superficie elemental buscada

$$S = \frac{\beta}{180}\,\pi\,r\,dr$$

de donde $$d\,s = \frac{b^2\,d\varphi}{\sqrt{R\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^3}}\ ;$$

y llamando $d\,S$ la superficie elemental buscada

$$d\,S = \frac{\pi\, b^2 \cos\varphi\, d\,\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^2} \times \frac{\beta}{180} \qquad (5)$$

expresión que integrada entre $\varphi$ y $\varphi'$ da la superficie buscada.

Para facilitar los cálculos y evitar al empleo de logaritmos neperianos, es preferible integrar entre 0° y $\varphi$; entonces sustituyendo en el desarrollo $\varphi$ y $\varphi'$ se tendrán dos superficies cuya diferencia dará la superficie buscada.

Siendo b el radio polar, la fórmula (5) integrada entre 0° y $\varphi'$ ó entre 0° y $\varphi$, y desarrollada da:

$$S = \frac{\beta}{180} \times \pi\, b^2 \left[\operatorname{sen}\varphi + \tfrac{2}{3} e^2 \operatorname{sen}^3\varphi + \tfrac{3}{5} e^4 \operatorname{sen}^5\varphi \ldots\ldots\right] \qquad (6)$$

$$S' = \frac{\beta}{180} \times \pi\, b^2 \left[\operatorname{sen}\varphi' + \tfrac{2}{3} e^2 \operatorname{sen}^3\varphi' + \tfrac{3}{5} e^4 \operatorname{sen}^5\varphi' \ldots\ldots\right]$$

ó simplemente, $\quad S = \frac{\beta}{180} \times \pi\, b^2 \operatorname{sen}\varphi$

Superficie buscada, $\quad S_1 = S' = S$

Si en la fórmula (6) se hace $\quad \beta = 360°\ ,\ \varphi = 90°$ se obtendrá el área del elipsoide terrestre por:

$$S = 2\,\pi\, b^2 \left[1 + \tfrac{2}{3} e^2 + \tfrac{3}{5} e^4 \ldots\right]$$

## Ejemplo de cálculos

$$d\,(\log N) = -\,[4.9443 - 10]\ N^2 \operatorname{sen}^2\varphi \qquad \varphi = 65°$$

$$d\,(\log \rho) = -\,[5.4214 - 10]\ N^2 \operatorname{sen}^2\varphi + 0.0000177$$

y $\quad \log N_1 = \log N + de\,(\log N) \qquad \log \rho_1 = \log \rho + d\,(\log \rho)$

$$\log \text{cont} = 5.4214 \text{ neg}$$
$$\log N^2 = 0.0024$$
$$\log \text{sen}^2 \varphi = 9.9146$$
$$\log = 5.3384 \text{ neg}$$
$$\text{número} = -0.0000218$$
$$\log \text{cont} + 0.0000177$$
$$d(\log \rho) = +0.0000395$$
$$\log \rho = 0.0006887$$
$$\log \rho_1 = 0.0007282$$

$$\log \text{contg} = 4.9443 \text{ neg}$$
$$\log N^2 = 0.0024$$
(de las tablas)
$$\log \text{sen}^2 \varphi = 9.9146$$
$$\log [d(\log N)] = 4.8613 \text{ neg}$$
$$d \log N = -0.00000727$$
de la tabla $\log N = +0.00122194$
$$\log N_1 = 0.00121467$$

---

$$\text{lado a (en segundos)} = \frac{\text{a (en metros)}}{\text{N (en metros) sen } 1''}$$

ó en forma logarítmica

$$\log a \text{ (en seg)} = \log a_m + 8.5097175 - 10 - \log N$$

para $\varphi = 49^\circ\ 4'\ 25''$ y $a_m = 57835_m\ 57$

$$\log a_m = 4.7621950$$
$$\log \text{cont} = 8.5097175$$
$$3.2719125$$
$$\text{tabla} - \log N = 0.0008485$$
$$\text{en segundos } \log a = 3.2710640$$
$$a = 1866'', 630$$

---

$$d, S = [9.1438 - 10] \text{ sen } \varphi + [6.802 - 18] \text{ sen}^2 \varphi \qquad \varphi = 37^\circ$$

$$\log \text{const} = 9.1438 \ldots\ldots \ \ldots\ldots = 6.802$$
$$\log \text{sen } \varphi = 9.9806 \quad \log \text{sen}^2 \varphi = 9.942$$
$$9.1244 - 10 \qquad 6.744 - 10$$
$$1^{er} \text{ número} = 0.1331 \qquad \text{número} = 0.0006$$
$$2.^\circ \quad ,, \quad -0.0006$$
$$d\ S = 0.1337$$

$$d = a \cos z + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 1'' \, a^2 \operatorname{sen}^2 z \tang \varphi - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 1'' \, a^3 \cos z \operatorname{sen}^2 z \, (1 + 3 \tang^2 \varphi)$$

$a = 57835^m 57$

$\varphi = 49^\circ 4' 25'', 54$ $\qquad z = 125^\circ 45' 20'', 90$

$\log a = 3.2710640$

$\log \cos z = 9.7666596$ neg

$\log 1.^{er}$ termino $= 3.0377236$ neg

$1.^{er}$ termino $= - 18' 10'', 746$

$\log 3 = 0.4771$

$\log \tang^2 \varphi = 0.1239$

$0.6010$

$3 \tang^2 \varphi = 3.9900$

$(1 + 3 \tan^2 \varphi) = 4.9900$

$\log \frac{1}{2} \operatorname{sen} 1'' = 4.3845$

$\log a^2 = 6.5421$

$\log \operatorname{sen}^2 z = 9.8186$

$\log \tang \varphi = 0.0620$

$\log 2.^{\circ}$ término $= 0.8072$

$2.^{\circ}$ término $= + 6'', 415$

$\log (1 + 3 \tang^2 \varphi) = 0.698$

$\log \frac{1}{6} \operatorname{sen}^2 1'' = 8.593$

$\log a^2 = 9.813$

$\log \cos z = 9.767$ neg

$\log \operatorname{sen}^2 z = 9.818$

$\log 3.^{er}$ término $= 8.072$ neg

$III = 0'', 049$

Términos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | = — | 0° 18' 10'', 746 | |
| II | = + | 6.415 | |
| III | = — | 0.049 | |
| d | = — | 0° 18' 04'', 280 | |

$\varepsilon = \frac{1}{2} M \, l^2 \operatorname{sen} a \cos a$

$\log \frac{1}{2} M = 1.4044 - 10$

$2 \log l = 9.4922$

$\log \operatorname{sen} a = 9\,5462$

$\log \cos a = 9.9713 -$

$\log \varepsilon = 0.4141 -$

$\varepsilon = - 2'', 595$

$l = 55225^m 36$

$a = 159^\circ 24' 17'', 970$

$p = l \cos (a - E - \frac{2}{3} \varepsilon)$

$\log l = 4.746053$

$\log \cos (a - E - \frac{2}{3} \varepsilon) = 9.971327 -$

$\log p = 4.717380$

$p = - 52165.10$

$\log \frac{1}{2} M = 1.4044 - 10$

$\gamma = 39862^m 60$

$\varepsilon = - \;\; 2'', 595$

$\frac{2}{3} \varepsilon = - \;\; 1,730$

$E + \frac{2}{3} \varepsilon = - 12'', 284$

$a - E - \frac{2}{3} \varepsilon = 159^\circ 24' 29'', 970$

$E = M \gamma \, l \cos a$

$\log M = 1.7054 - 10$

$\log \gamma = 4.6006$

$\log l = 4.7461$

$\log \cos a = 9.9713 -$

$\log E = 1.0234 -$

$E = - 10'', 554$

# DETERMINACIÓN DE PUNTOS INACCESIBLES

## Problema de la carta ó de los segmentos capaces

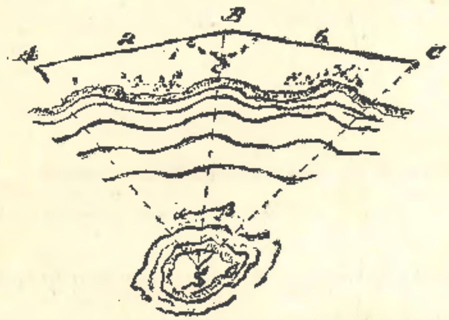
Suele presentarse en la práctica el caso de tener que fijar la posición de un punto, con relación á otros ya conocidos, sin poder medir ninguna distancia, ni dirijir visuales desde los puntos ya determinados.

Por ejemplo: para fijar la situación de una población hallándose en ella y viendo las banderas dejadas en los mojones del deslinde. También un buque que se encuentra á la vista de la costa firme y apercibe las torres, semáforos ó señales colocados en tierra y valiéndose de esos elementos quiere precisar su situación; finalmente, para efectuar el relevamiento topográfico de una zona, cuyo perímetro se haya ya determinado y en el cual se han dejado banderas ó señales.

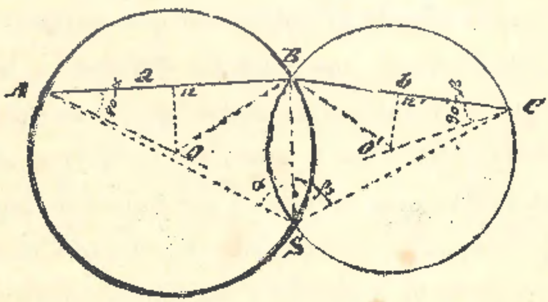
Este problema que á primera vista parece imposible, tiene su solución gráfica y analítica como pasamos á exponerla.

### Soluciones gráficas

Sean A B C, tres puntos de posición relativa ya conocida, esto es: se conoce el valor de A B, de B C y de A B C, y desde el punto S se observan los ángulos $ASB = \alpha$, $BSC = \beta$ deseándose conocer la distancia de S á cualquiera de los puntos A B C.



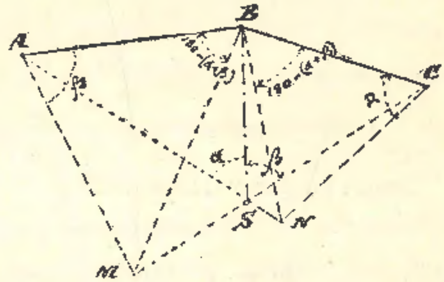
*1.er método.*—En A fórmase un ángulo $BAO = (90 - \varphi)$ prolongándose esa línea hasta su intersección con la perpendicular O n levantada en el medio de A B; desde O como centro, descríbase una circunferencia con el radio $OA = OB$.



En C tírese la línea C O' formando con C B un ángulo $BCO' = (90 - \beta)$ prolongándose esa línea hasta la intersección con O' n' perpendicular levantada sobre el medio de B C; trácese desde O' una circunferencia con un radio $CO' = BO'$.

El punto S de intersección de las dos circunferencias será el punto buscado desde el cual se habrán observado los ángulos $\alpha$ y $\beta$.

*2.º método.*—En A fórmese el ángulo $BAM = \beta$ y en B otro ángulo $ABM$ igual $180^\circ - (\alpha + \beta)$.



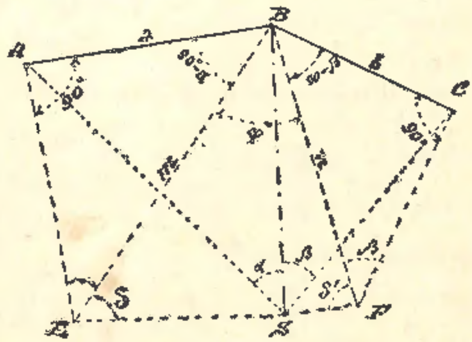
En C fórmese el ángulo

$$BCN = \alpha;$$

y en B otro ángulo $CBN = 180 - (\alpha + \beta)$.

Luego uniendo A con N y C con M, el punto donde se corten esas diagonales será el punto S buscado, ó sea, el desde donde se observaron los ángulos $\alpha$ y $\beta$.

*3.er método.*—En B, fórmese el ángulo: $ABE = (90 - \alpha)$ y $CBF = (90 - \beta)$; luego en los puntos extremos A y C levántense perpendiculares prolongadas hasta la intersección de las líneas BE y BF.



Únanse los puntos E y F y desde B, bájese una perpendicular sobre la línea EF; el punto S pié de la perpendicular bajada de B sobre EF será el punto desde el cual se midieron los ángulos $ASB = \alpha$ y $BSC = \beta$.

Esta resolución puede efectuarse por el siguiente proceder analítico:

en A B E, $\quad r : \sin \alpha :: m : A\,B = a, \quad m = \frac{a}{\sin \alpha}$

en B F C, $\quad n = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$

en triángulo E B F, conocidos m n:

$$\varphi = A\,B\,C - [180 - (\alpha + \beta)]$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90 - \frac{\varphi}{2}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = \frac{n - m}{m + m} \cot \frac{\varphi}{2}$$

Conocidos los valores de $\delta$ y $\delta'$, se hallará el valor de

$$E\,T = p:$$

$$\sin \varphi : p :: \sin \delta : n, \qquad p = \frac{n \sin \varphi}{\sin \delta}$$

Finalmente, la perpendicular B S sobre E F, será:

$$B\,S = m \sin \delta$$

ó también $\quad B\,S = n \sin \delta'.$

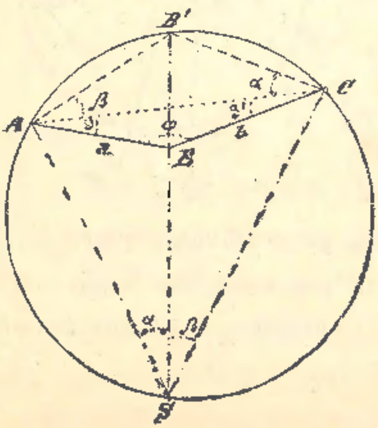
En A E S B, ángulo en A $= 90^{\circ}$

» » » » E $= (\alpha + \delta) = \gamma$

» » » » S $= 90^{\circ}$

» » » » B $= (360^{\circ} - 180 + \gamma) = 180 - r$

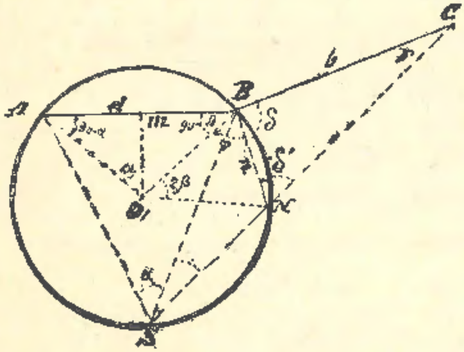
*4.º Método.*—Sean A B C, los tres puntos fijos sobre los cuales se dirigieron las visuales S C, S B y S A para medir los ángulos A S B $= \alpha$, B S C $= \beta$. Únanse los puntos A C; y en C se establecerá el ángulo A C B' $= \alpha$, así como en A el ángulo C A B' $= \beta$, prolongándose las líneas así establecidas hasta su intersección en B'.



Luego de describir una circunferencia que pase por los tres puntos A B' C, se trazará una línea reuniendo los puntos B' B, y su prolongación hasta cortar la circunferencia, fijará el punto S, cuya posición se deseaba conocer.

Si la posición de los puntos fuera la de A B' C, se procedería de la misma manera, fijando entonces el punto B en la intersección de las líneas establecidas como para B' en el caso anterior.

*5.º Método.*—Si el punto C estuviera muy lejos con relación á A y B, se procedería así: trácese la línea A B á la escala, en B se establece el ángulo A B O $= (90 - \beta)$ y en A, B A O $= (90 - \alpha)$; en mitad de A B levántese la perpendicular m o y el punto O de intersección de esas 3 líneas, será el centro de una circunferencia de radio O A = O B.




B O N = 2 C

A O = r        A B = d

$$1 : \sin a :: r : \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{d}{2 \operatorname{sen} a}$$

Sobre B O fórmese el ángulo B O N $= 2\,\beta$ y uniendo el punto N con el punto C, su prolongación al cortar la circunferencia fijará el punto de observación S que se deseaba conocer.

El largo del radio $\quad O\,B = \dfrac{\frac{1}{2}\,d}{\cos\,(90 - \beta)}$

En B O N el ángulo $O B N = O N B = \frac{180 - 2\beta}{2} = \varphi$

y la cuerda $B N = \frac{O B \sin 2 c}{\sin \varphi}$

en el triángulo $C B N$ , $B C = b$ , $B N = n$

$$(360^o - A B C) = \Delta$$

$$C B N = \Delta - (90^o - \beta + \varphi)$$

luego, de $\tan \frac{1}{2} (S + S') : \tan \frac{1}{2} (S - S') :: b + n : b - n$

$$\tan \frac{1}{2} (S - S') = \frac{(b - n) \tan \frac{1}{2} (S + S')}{(b + n)}$$

Conocido el ángulo $B C N = \gamma$ se tiene en el triángulo $S B C$, ángulo $B C S = \gamma$, ángulo $B S C = \beta$ y el ángulo $S B C = 180 - (\gamma + \beta)$, y, finalmente, de:

$$\sin \beta : b :: \operatorname{sen} \gamma : B S \ ; \ B S = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}$$

También se conoce en el triángulo $A S B$;

$B S$ y $A B$, ángulo $A S B = \alpha$,

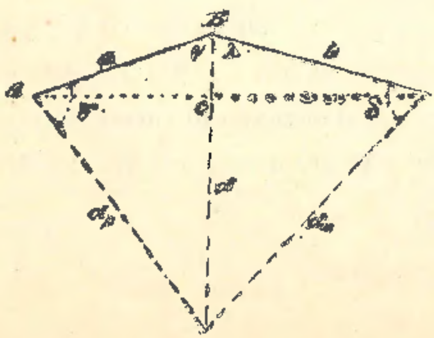
y ángulo $A B S = \Delta - (S B C) = \theta$;

luego $B A S = 180 - (\theta + \alpha) = \pi$,

de donde $\operatorname{sen} \theta : A S :: \operatorname{sen} \alpha : A B$,

y $A S = \frac{A B \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \alpha}$.

### Resolución analítica



Sean $A B C$ los tres puntos dados que representan como datos conocidos

$A B = a$, $B C = b$

y $A B C = B$;

observados desde S bajo los ángulos: $A S B = \alpha$

y $BSC = \beta$, hallar $SB = d$, $CS = d_n$ y $SA = d_q$.

Haciendo $\quad a = AB \qquad B = 106^\circ\ 24'\ 40''$

$b = BC \qquad \alpha = 62^\circ\ 04'\ 20''$

$d = SB \qquad \beta = 50^\circ\ 50'\ 04''$

De los triángulos $ASB$ y $BSC$, se saca:

$$a : \operatorname{sen} \alpha :: d : \operatorname{sen} \gamma ; \qquad b : \operatorname{sen} \beta :: d : \operatorname{sen} \delta$$

$$d = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad d = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$$

se deduce:

$$\frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}; \qquad \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b \operatorname{sen} \delta} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}; \qquad \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \delta} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}$$

Transformando según principio conocido:

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \delta} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha + a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \beta} \quad \text{(a)}$$

pero
$$\frac{\operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \delta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma + \delta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma - \delta)}$$

y dividiendo los términos del segundo miembro de (a) por $b \operatorname{sen} \alpha$, será:

$$= \frac{1 + \dfrac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}}{1 - \dfrac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}} \quad \text{pero haciendo} \quad \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{tang} \omega \qquad (1)$$

la ecuación quedará transformada en:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma + \delta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma - \delta)} = \frac{1 \operatorname{tang} \omega}{1 \operatorname{tang} \omega} = \operatorname{tang}(45 + \omega)$$

luego
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) \operatorname{cotg}(45 + \omega) \qquad (2)$$

por ser
$$\operatorname{tang}(45 - \omega) = - \operatorname{cotg}(45 + \omega).$$

Así, pues, calculado el valor de:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}$$

y determinado el valor de:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) = \tfrac{1}{2}(360^\circ - (\alpha + \beta + B) = M,$$

se hallará $\tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) = N$, por la fórmula (2) con lo que

$$\text{ángulo} > = M + N \qquad \text{y} \qquad \text{ángulo} < = M - N.$$

Conocido en el valor de los ángulos $\gamma$ y $\delta$ se tendrá para los valores de $d$, $d_n$, $d_p$, dos expresiones deducidas de los dos triángulos sirviéndose mutuamente de comprobación.

Los ángulos serán:

$$\text{triángulo } A\ B\ S,\ \alpha,\ \gamma,\ \psi = 180 - (\alpha + \gamma)$$
$$\text{,,} \qquad B\ S\ C,\ \beta,\ \delta,\ \lambda = 180 - (\beta + \delta)$$

luego

$$d_p = \frac{a \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad d_n = \frac{b \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$d = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad d = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$$

calculando el valor de $A\,C = c$ y deduciendo el valor de los ángulos

$$B\,A\,C = A, \quad B\,C\,A = C,$$

se tendría, considerando solo el triángulo $A\ S\ C$

$$d_p = \frac{c \operatorname{sen}(\gamma - A)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \qquad d_n = \frac{c \operatorname{sen}(\delta - C)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

### RESÚMEN

Las fórmulas á emplearse serán:

1.º $\operatorname{tang} \omega = \dfrac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}$; $\quad M = 180 - \tfrac{1}{2}(B + \alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$

2.º $\quad N = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) \operatorname{cotg}(45 + \omega)$

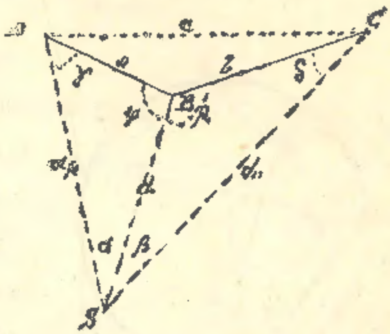
$\gamma = M + N$; $\quad \delta = M - N$; $\quad$ sea $< = M + N$; $\quad > = M - N$

$$d_p = \frac{a \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \alpha}; \quad d = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}; \quad d_n = \frac{b \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \beta}$$

N resultará afectado del + ó — según que el ángulo $(45 + \omega)$ caiga en el 1.º ó 2.º cuadrante.

La resolución del presente problema puede presentarse bajo otras formas que serían:

El vértice B se encuentra en posición inversa con relación á S y línea A C, que en el caso anterior.



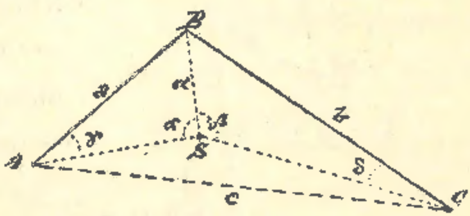
Pero las fórmulas (1) y (2) serán siempre aplicables con solo tener presente que el ángulo B figura como 360 — B, lo que dará en (3)

$$(\gamma + \delta) = 360 - [(\alpha + \beta) + (360 - A)]$$

Luego se tendrá como comprobación, prévio cálculo de c:

$$d_p = \frac{a \operatorname{sen} (\gamma + A)}{\operatorname{sen} \alpha + \beta} \quad ; \qquad d_p = \frac{c \operatorname{sen} (\delta + C)}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$$

El punto S resulta hallarse en el interior del triángulo formado por los tres puntos dados A, B, C.



Entonces $(\delta + \gamma) = 360^\circ - (\alpha + \beta + B)$

lo que mantiene siempre las fórmulas 1, 2, 3.

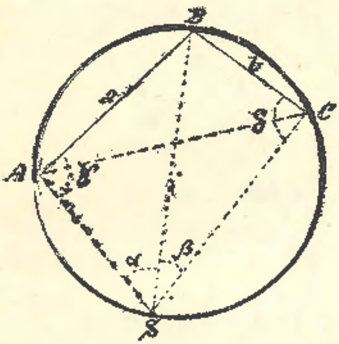
El punto S cae sobre la línea que reune A y B, entonces

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

luego $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$

Las fórmulas 1, 2 y 3 no serán, pues, aplicables y para hallar A S y C S se tendrá, previa resolución del triángulo A B C, lo que dará c y los ángulos en A y C

$$A\,S = \frac{a \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \alpha}; \qquad S\,C = \frac{b \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \beta}$$



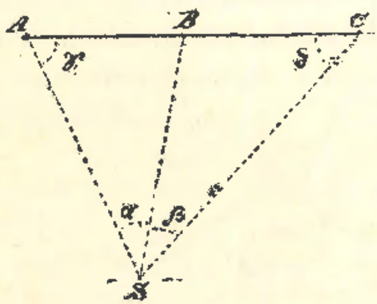

4.º El punto S cae en la circunferencia que pasa por los tres puntos A B C

En este caso como

$\gamma + \delta = 180, \quad \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \delta$

$\operatorname{tang} \omega = 1$ y $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\gamma + \delta) = \alpha$

Luego la solución será indeterminada.




5.º Los tres puntos A B C se hallan en una línea recta; no figurando el ángulo B más que para determinar el valor de $(\gamma + \delta)$ las fórmulas son aplicables, y se tendrá:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}$$

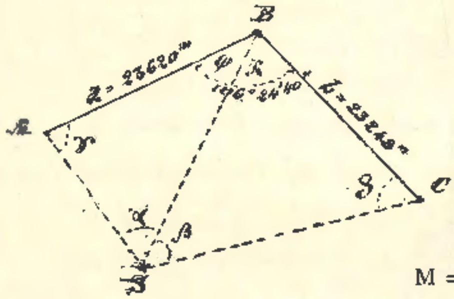
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\gamma - \delta) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\gamma + \delta) \operatorname{cotg} (45^\circ - \omega) = M$$

$$N = \tfrac{1}{2} (\gamma + \delta) = \tfrac{1}{2} (180 - (\alpha + \beta))$$

$$\gamma = N \pm M;$$

## Aplicación de las fórmulas

$$b = 23248.30$$




$$a = 23620.80$$
$$B = 106^\circ\ 24'\ 40''$$
$$\alpha = 62^\circ\ 04'\ 10''$$
$$\beta = 50^\circ\ 50'\ 40''$$
$$219^\circ\ 19'\ 30''$$
$$109^\circ\ 39'\ 45''$$
$$M = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) = 70^\circ\ 20'\ 15''$$

$$\text{tang}\ \omega = \frac{a\ \text{sen}\ \beta}{b\ \text{sen}\ \alpha}$$

$$\log a = 4.373286$$
$$\log \text{sen}\ \beta = 9.889545$$
$$c \log b = 5.633607$$
$$c \log \text{sen}\ \alpha = 0.053786$$
$$\log \text{tang}\ \omega = 9.950224$$
$$\omega = 41^\circ 43' 25'',40$$
$$\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = (45^\circ + \omega) = 86^\circ 43' 25'',40$$

$$\text{tang}\ N = \text{tang}\ M\ \text{cotg}\ (45 + \omega)$$
$$\log \text{tang}\ M - \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) = 0.446950$$
$$\log \text{cotg}\ (45 + \omega) = 8.757732$$
$$\log \text{tang}\ \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) = 9.204682$$
$$\tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) = N = 9^\circ\ 06'\ 06'',70$$

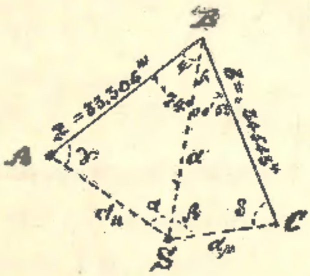
$$\gamma = M + N = 79^\circ 26' 21'',70$$
$$\delta = M + N = 61^\circ 14' 08'',30$$
$$\psi = 38^\circ 29' 28'',30$$
$$\lambda = 67^\circ 55' 11'',70$$

$$\log a = 4.373286$$
$$\log \text{sin}\ \psi = 9.794073$$
$$c \log \text{sen}\ \alpha = 0.053786$$
$$\log d_q = 4.221145$$
$$S\ A = 16639^m\ 68$$

$$\log a = 4.373286\ldots \qquad \log b = 4.366393$$
$$\log \sin \gamma = 9.992581\ldots \qquad \log \sin \delta = 9.942805$$
$$c \log \operatorname{sen} \alpha = 0.053786\ldots \qquad c \log \operatorname{sen} \beta = 0.110455$$
$$\log d = 4.419653\ldots \qquad \log d = 4.419653$$
$$S\,B = 26281_m\,86 \qquad S\,B = 26281_m\,86$$

*Ejemplo II.*—Datos conocidos:

$$\text{ángulo } B = 74^\circ\ 00'\ 58''$$
$$\text{»} \quad \alpha = 64^\circ\ 00'\ 10''$$
$$\text{»} \quad \beta = 72^\circ\ 12'\ 00''$$
$$\text{lado } A\,B = a = 33306{,}64 \quad \log a = 4.522525$$
$$\text{»} \quad B\,C = b = 34543{,}22 \quad \log b = 4.538362$$




$$B = 74^\circ\ 00'\ 58''$$
$$\alpha = 64^\circ\ 00'\ 10''$$
$$\beta = 72^\circ\ 12'\ 00''$$
$$S = 210^\circ\ 13'\ 08''$$
$$\tfrac{1}{2} S = 105^\circ\ 06'\ 34''$$
$$M = 74^\circ\ 53'\ 26''$$

$$M = 180 - \tfrac{1}{2} S = 74^\circ\ 53'\ 26''$$

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha} \qquad \operatorname{tang} N = \operatorname{tang} M \operatorname{cotg}(45^\circ + \omega)$$

$$\log a = 4.522525 \qquad \log \operatorname{tang} M = 0.568640$$
$$c \log b = 5.461638 \qquad \log \operatorname{cotg}(45^\circ + \omega) = 8.024446\text{n.}$$
$$\log \operatorname{sen} \beta = 9.978696 \qquad \log \operatorname{tang} N = 8.593086\text{n.}$$
$$c \log \operatorname{sen} \alpha = 0.046330 \qquad N = -\ 2^\circ\ 14'\ 37'',70$$
$$\log \operatorname{tang} \omega = 0.009189 \qquad M = +\ 74^\circ\ 53'\ 26'',00$$
$$\omega = 45^\circ\ 36'\ 22'' \qquad \gamma = M + (-N) = 72^\circ\ 33'\ 48'',30$$
$$\frac{\pi}{4} + \omega = 90^\circ\ 36'\ 22'' \qquad \delta = M - (-N) = 77^\circ\ 08'\ 03'',70$$

$$\psi = 180 - (\alpha + \gamma) = 43^\circ\ 21'\ 01'',7$$
$$\lambda = 180 - (\beta + \delta) = 30^\circ\ 39'\ 56'',3$$

$$P\,A = p_n = \frac{a \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad\qquad P\,B = p = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\begin{array}{rlcrl}
\log a & = 4.522525 & \qquad & \log a & = 4.522525 \\
c \log \operatorname{sen} \alpha & = 0.046330 & & c \log \operatorname{sen} \alpha & = 0.046330 \\
\log \operatorname{sen} \psi & = 9.836615 & & \log \operatorname{sen} \gamma & = 9.979770 \\
\hline
\log P\,A & = 4.405470 & & \log d & = 4.548625
\end{array}$$

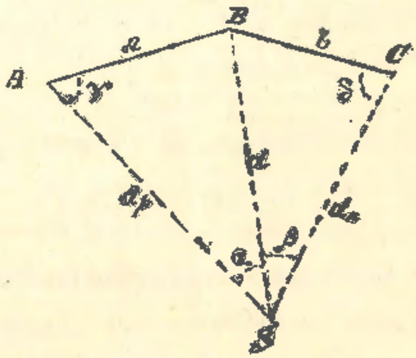
$$P\,A = 25437_m\,35 \qquad\qquad P\,B = 35369_m\,10$$

$$P\,C = \frac{b \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\begin{array}{rl}
\log b & = 4.538362 \\
c \log \operatorname{sen} \beta & = 0.021304 \\
\log \operatorname{sen} \lambda & = 9.707593 \\
\hline
\log d_p & = 4.267259
\end{array}$$

$$P\,C = 18503_m\,59$$

## Otra resolución analítica




Datos conocidos, a, b, ángulo B, ángulo α y β

En A B S

$$\operatorname{sen} \alpha : a :: \operatorname{sen} \gamma : d$$

$$d = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

En B C S

$$\operatorname{sen} \beta : b :: \operatorname{sen} \delta : d$$

$$d = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$$

luego $\dfrac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$ (1) y $\dfrac{a \operatorname{sen} \gamma}{b \operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta}$

$$\frac{a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = b \operatorname{sen} \delta$$

pero haciendo $p = \dfrac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$ se tiene: $a = \dfrac{p \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$

y sustituyendo ese valor en (1)

$$\frac{\text{sen } \gamma \left(\dfrac{p \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}\right)}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen } \delta}{\text{sen } \beta}\ ; \quad \text{multiplicando por sen } \beta$$

$$\frac{\text{sen } \gamma \text{ p sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} = b \text{ sen } \delta\ ; \qquad \text{luego } p \text{ sen } \gamma = b \text{ sen } \delta$$

de donde, $\text{sen } \gamma = \dfrac{b \text{ sen } \delta}{p}$ y $\dfrac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \delta} = \dfrac{b}{p}$

efectuando las transformaciones se llega á:

$$\frac{\text{sen } \gamma - \text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta} = \frac{b - p}{b + p} \text{ y } \text{sen } \gamma - \text{sen } \delta = \frac{(b - p) \text{ sen } \gamma + \text{sen } \delta}{b + p} \quad (2)$$

recordando que

$$\text{sen } \gamma - \text{sen } \delta = \text{tang } \frac{\gamma - \gamma}{2}\ , \quad \text{y sen } \delta + \text{sen } \delta = \text{tang } \frac{\delta + \delta}{2}$$

y sustituyendo esos valores en la ecuación (2)

$$\text{tang } \frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{(b - p) \text{ tang } \left(\dfrac{\delta + \gamma}{2}\right)}{b + p}$$

fórmula que dará la semi diferencia de $\gamma$ y $\delta$, cuya suma fácilmente se deduce de los datos del problema.

Así las fórmulas á aplicar al problema son:

1.ª $p = \dfrac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$ 2.ª $\text{tang } \dfrac{\gamma - \delta}{2} = \dfrac{(b - p) \text{ tang } \frac{1}{2} (\gamma + \delta)}{(b + p)}$

3.ª $\gamma = \frac{1}{2} (\gamma + \delta) \pm \frac{1}{2} (\gamma - \delta)$ 4.ª $d = \dfrac{b \text{ sen } \delta}{\text{sen } \beta} = \dfrac{a \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \alpha}$

La resolución del problema que precede y que suele llamarse «de la carta» ó de «Segmentos capaces», es de una aplicación muy frecuente á la par que muy útil.

En las operaciones de triangulaciones es muy común en la red de tercer orden y muy particularmente en el relevamiento de los detalles del interior de los triángulos, apoyando dichos relevamientos en los vértices de los triángulos ya establecidos.

De igual manera puede utilizarse esta resolución para el relevamiento de detalle de una región cualquiera en la cual existen puntos determinados, elevados y visibles de lejos, cuya posición es conocida.

También puede utilizarse en región montañosa para completar el relevamiento interno de una poligonal medida teniendo la precaución de dejar señales en los vértices.

Finalmente, si á las ventajas que ofrece este problema, especialmente como se ha dicho, para hacer un relevamiento de una región se combina el empleo del azimut verdadero ó magnético de las líneas y visuales, los resultados podrán ser más utilizables y rápidos.

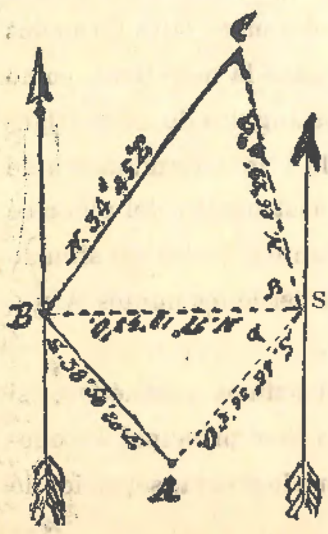
Efectivamente, si se emplea un buen compás prismático ó un teodolito con declinatoria, lo que facilita su orientación, á más de observarse los ángulos materiales formados por las visuales y las líneas, se tendrá la meridiana como auxiliar para determinar todos los ángulos de cada triángulo, reduciendo así el cálculo solo á la determinación de los catetos; por otra parte, la construcción del plano se habrá facilitado, pues que cada punto P, podrá ser situado en el plano trazando las visuales desde los puntos A B C por medio de su azimut.

Por otra parte, el empleo del azimut magnético, si bien no conviene adoptarse como base principal de operación, en trabajos de precisión, puede prestar servicios de mucha importancia para reconocimientos y relevamientos de detalle, mucho más, si diariamente se calcula la variación magnética para deducir los azimutes verdaderos y hacer uso de ellos, ó simplemente para constatar las variaciones que pudiera sufrir la aguja magnética.

Supóngase el caso en que tres puntos A, B, C de una poligonal se han ligado por las lineas A B, B C ya medidas y que apoyándose en esos tres puntos se quiera hacer un relevamiento de los accidentes topográficos de la región inmediata.

Para establecer una relación efectiva entre aquellos elementos y los nuevos datos que se van á buscar ó relevar con el compás prismático ó sea la meridiana magnética, se empezará por situarse en el punto B y relevar el azimut de las líneas B C y B A según la indicación del instrumento empleado.

Sea, pues, que haya resultado para B C




Azimut 34° 45'' = rumbo N. 34° 45, E

y para línea B C

Azimut 141° 09'40'' rumbo = 180 —

— Azimut = S. 38° 50' 20'' E.

Ahora, trasladándose al punto S se observan las visuales siguientes:

Aizmut S A = 220° 36' 02'',

Rumbo = A — 180 = S. 40° 36' 02'', O

Azimut S B = 282° 40' 12'',

Rumbo = 360 — A = N 77° 19' 48'', O

Azimut S C = 333° 30' 52'',

Rumbo = 360 — A = N 26° 29' 08'', O

Inmediatamente se deduce

Angulo $\delta = 61^{\circ}\ 29'\ 08''$, Angulo $\gamma = 79^{\circ}\ 26'\ 22''$

y por consiguiente

Angulo C B S $= 67^{\circ}\ 58'\ 11''$, Angulo A B S $= 38^{\circ}\ 29'\ 28''$

conocidos así todos los ángulos y los dos lados

$$A\,B = 2362^{m}\ 00 \qquad B\,C = 2324,\ 80$$

fácil será calcular los catetos S A, S B, S C por las fórmulas

$$A\,S = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad S\,B = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \beta} \qquad S\,C = \frac{b \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \beta}$$

Ya que se trata del relevamiento de la topografía del interior de un polígono establecido sobre el terreno, sea de una extensión de campo deslindada por una mensura, conviene hacer observar, que para este fin pueden emplearse muchos recursos que, si bien no podrían ser aplicados á una operación rigurosamente exacta, son sin embargo, de resultados seguros, con una aproximación muy suficiente y de una aplicación rápida.

En primer lugar podría citarse el empleo de la taquimetría, cuyos resultados muy satisfactorios, la colocan casi á la altura de las operaciones más sérias y de precisión; sin embargo, su aplicación es sencilla y cómoda pues que: de una sola estación convenientemente elegida y un par de hombres con sus respectivas miras, puede el operador hacer un extenso relevamiento de todo lo que su vista abarca en una revolución completa del círculo horizontal de su teodolito.

Debe recordarse que la gran ventaja de la taquimetría, la debe á que sus operaciones se basan: en la orientación magnética que se da al instrumento, convirtiendo los ángulos horizontales en azimutes magnéticos y en las ventajas de su anteojo analático.

Pero no siempre se dispone de un taquímetro y entonces se presenta el caso de tener que poner en práctica los recursos que ofrecen los conocimientos generales de los diferentes ramos de la Agrimensura.

Al uso del taquímetro puede sustituirse el empleo, desde una estación bien elegida, del *Compás prismático* y de un buen anteojo estadia ó micrométrico que solo requiere el empleo de una regla ó base de altura conocida, en sustitución de la mira; regla que en cualquier parte puede construirse y que un hombre transporta cómodamente á cada punto que conviene fijar. De esta observación se tendrá para cada punto el azimut y la distancia.

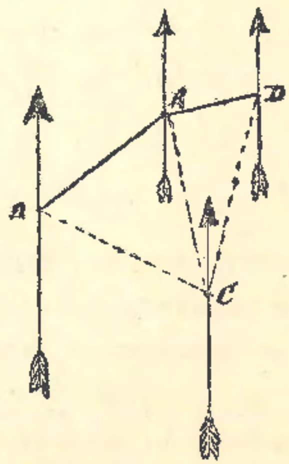
Otro recurso importante lo constituye el empleo metódico y racional de visuales dirigidas á todos los accidentes topográficos visibles, no solo de los vértices de la poligonal, pero de todos los puntos de su recorrido desde donde se presente un vasto horizonte. Una serie de visuales observadas con cuidado puede asimilarse á una triangulación de tercer orden y con ella pueden fijarse un sin número de puntos (en éstos pueden colocarse señales ó banderas especiales) principales, que á su vez servirán para tomar mayores detalles.

En seguida se presenta el caso de tomar mayores detalles apoyándose en los puntos fijados de la manera que precede, ó simplemente en los de la poligonal principal;

es la oportunidad de aplicar el problema de los *segmentos capaces,* pues en ese caso, el operador se sitúa en los puntos que quiere fijar y desde él dirije sus visuales á todos los puntos ya situados y determinados por operaciones anteriores.

Si, como se ha dicho, la base de estas observaciones es la orientación magnética, la construcción del plano correspondiente será rápida y muy simplificada, pues que, trazando en cada punto ó vértice tomado como base para las visuales dirigidas desde el punto á *fijar* ó *situar* la meridiana magnética, con solo trazar desde ellos las visuales con el azimut invertido, se obtendrán por intersección los puntos buscados.

Los puntos A y B son conocidos por pertenecer á una poligonal y, por lo tanto, se encuentran ya fijados en el plano. Desde el punto C, á situar, se dirigen las visuales, que resultan: C A con azimut = 267° 30'; C B con azimut = 331° 53'.




Trazando sobre el plano y en los puntos A y B la meridiana y midiendo en A un azimut de

$$267^{\circ}\ 30' - 180 = 87^{\circ}\ 30'$$

y en B otro azimut de

$$331^{\circ}\ 53' - 180 = 151^{\circ}\ 53'$$

las visuales trazadas bajo estos ángulos se cruzarán en C, fijando así ese punto. La posición de éste será asegurada con una tercer visual, por ejemplo, al punto D. De ahí que se recomienda siempre que todo punto sea fijado á lo menos por tres visuales.

# PROYECCIONES DE CARTAS GEOGRÁFICAS

La representación sobre un plano del todo ó parte de la superficie terrestre, indicando los contornos de sus continentes y posiciones geográficas de sus principales puntos, sería problema de fácil solución si no hubiera que tener en cuenta la esfericidad de la tierra, cuyo desarrollo sólo por aproximación puede obtenerse en una representación plana.

Con el propósito de solucionar el problema de una manera práctica y que satisfaga las exigencias pedidas á cada carta ó mapa, según su destino, se le ha encarado bajo dos faces distintas: ó se trata de representar un hemisferio completo, ó sólo una porción de él.

De ahí que se han establecido las dos grandes categorías de proyecciones, sean:

Las proyecciones por perspectiva.

Las proyecciones por desarrollo.

Para las proyecciones por perspectiva hay que adoptar: la región que debe proyectarse, el plano de proyección y el punto de vista; de manera, que según la posición que se resuelva dar al plano y al punto de vista, variará la forma de la figura proyectada y, por lo tanto, el nombre adoptado para distinguir una proyección de otra.

Las proyecciones por perspectiva, universalmente adoptadas para la construcción de mapas ó cartas geográficas, se dividen en las siguientes categorías:

1.ª *La proyección gnomónica ó central,* en la cual se considera el punto de vista (el observador), en el centro de la tierra.

2.ª *La proyección estereográfica,* con el punto de vista en un punto de la superficie esférica.

3.ª *La proyección ortográfica,* con el punto de vista fuera de la esfera y á una distancia *infinita* de su centro.

Esta última categoría se ha prestado á una variación ó proyección más, y es la *escenográfica,* en la cual se coloca el punto de vista á una distancia determinada.

Las proyecciones por desarrollo se fundan en que las superficies laterales del cono y del cilindro, pueden ser desarrolladas sin producir alteración alguna en las figuras geométricas que se encuentren dibujadas sobre dichas superficies planas.

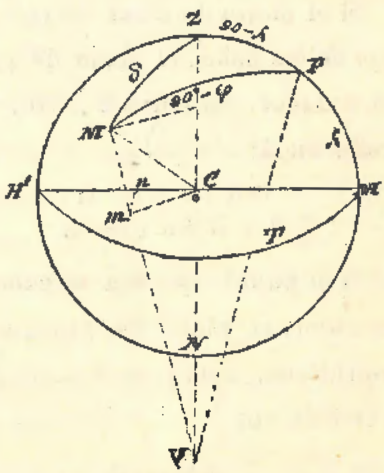
De ahí la tendencia, cuando se trata de la proyección de solo una parte del esferoide, de asimilar esa parte á la de un cilindro ó un cono que se confunda en lo posible con ella.

Es así como se han sentado las bases de las *proyecciones cónicas* y *proyecciones cilíndricas,* de cuyo estudio han sugerido varias teorías que constituyen sistemas particulares de proyecciones, como ser: la de *Mercatore,* la de *Flamsted,* la del *Estado Mayor* de Francia, la de *Bone,* las de *Lambert,* etc., etc., que se han calculado con el principal objeto de representar, con la menor alteración, la carta de una región reducida ó un Estado.

Las bases para el cálculo de los elementos necesarios á la construcción de una proyección cualquiera, y aún su construcción gráfica, pueden condensarse en los siguientes párrafos.

### Teoría general de las proyecciones por perspectiva

Sea Z P H N H' el plano del meridiano que pasa por el observador en Z, y V el punto de vista desde el cual se calculará la proyección del hemisferio H' Z H sobre el plano H' T H, con centro en C.




Llamando

$D = C\,V$, H H' eje de abcisas x

$\delta = M\,C\,Z$, Z N eje de ordenadas y

$\left.\begin{array}{l} C\,n = x \\ m\,n = y \end{array}\right\}$ proyección de M

$P\,H = \lambda =$ inclinación del eje de los polos sobre el plano de proyección.

$Z\,P = 90 - \lambda = Z\,C\,P.$

$R =$ radio terrestre $C\,P = C\,H.$

$M\,P = (90 - \varphi)$ distancia polar del punto considerado M.

$\omega =$ longitud del punto $M = Z\,P\,M.$

$M\,Z\,P = \psi$ ángulo zenital, M K paralela á m C.

De la consideración del triángulo C n m, se deduce:

$$x = \frac{D\ R\ \text{sen}\ \delta\ \cos\ \psi}{D + R\cos\delta}; \qquad y = \frac{D\ R\ \text{sen}\ \delta\ \text{sen}\ \psi}{D + R\cos\delta}$$

expresiones dadas en función de los ángulos $\delta$ y $\psi$, que trasformadas para ser expresadas en función de lalatitud $\varphi$ y longitud $\omega$, son:

$$x = \frac{D\ R\ (\text{sen}\ \lambda\cos\varphi\cos\omega - \cos\lambda\ \text{sen}\ \varphi)}{D + R\ (\cos\lambda\cos\varphi\cos\omega + \text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ \varphi)}$$

$$y = \frac{D\ R\cos\lambda\ \text{sen}\ \varphi}{D + R\ (\cos\lambda\cos\varphi\cos\omega + \text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ \varphi)}$$

Tales son las ecuaciones generales que determinan las coordenadas de la proyección de un punto de la esfera, en función de su latitud y longitud.

Si el punto de vista se coloca en la prolongación del eje de los polos, el plano de proyección se confunde con el ecuador, entonces $\lambda = 90°$, y las fórmulas generales se reducen á:

$$x = \frac{D\ R\cos\varphi\cos\omega}{D + R\ \text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ \omega}; \qquad y = \frac{D\ R\cos\varphi\ \text{sen}\ \omega}{D + R\ \text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ \varphi}$$

Si el punto de vista se coloca en la prolongación del ecuador, el plano de proyección se confundirá con el meridiano, entonces $\lambda = 0$ y las fundamentales se convertirán en:

$$x = \frac{D\ R\ \text{sen}\ \varphi}{D + R\cos\varphi\cos\omega} \qquad y = \frac{D\ R\cos\varphi\ \text{sen}\ \omega}{D + R\cos\varphi\cos\omega}$$

La ecuación general de los meridianos es la de una elipse que se obtiene de las fundamentales, eliminando en ellas la latitud $\varphi$

se obtendrá así

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\ \omega}{\text{sen}\ \lambda \cos\ \omega - \cos\ \lambda\ \text{tang}\ \varphi}$$

de donde

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{y\ \text{sen}\ \lambda \cos\ \omega - x\ \text{sen}\ \omega}{y \cos \lambda}$$

y finalmente la ecuación general

$$y^2 (D^2 - D^2\ \text{sen}^2\ \lambda)\ \text{sen}^2\ \omega - R^2 \cos^2 \omega)$$

$$+ x\ y\ (R^2 - D^2)\ \text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ 2\ \omega + x^2 (D^2 - R^2\ \text{sen}^2\ \lambda)\ \text{sen}^2\ \omega$$

$$+ D\ R^2\ y \cos \lambda\ \text{sen}\ 2\ \omega -$$

$$- R^2\ D\ x\ \text{sen}\ 2\ \lambda\ \text{sen}^2\ \omega - R^2\ D^2 \cos^2 \lambda\ \text{sen}^2\ \omega = 0$$

Los dos semi ejes A y B de esa elipse tienen por valor

$$A = \frac{R\ D}{\sqrt{D^2 - R^2 (1 - \cos^2 \lambda\ \text{sen}^2\ \omega)}} \quad ;$$

$$B = \frac{R\ D^2 \cos \lambda\ \text{sen}\ \omega}{D^2 - R^2 (1 - \cos^2 \lambda\ \text{sen}^2\ \omega)}$$

El ángulo que hace el eje mayor 2 A de esa elipse con el eje de las x tiene por expresión

$$\text{tang}\ 2\gamma = \frac{\text{sen}\ \lambda\ \text{sen}\ 2\ \omega}{\cos^2 \omega - \text{sen}^2\ \lambda\ \text{sen}^2\ \omega}$$

ó

$$\text{tang}\ \gamma = \text{sen}\ \lambda\ \text{tang}\ \omega$$

y las coordenadas correspondientes al centro de la elipse con relación á los ejes de proyección

$$\alpha = \frac{D\ R^2\ \text{sen}\ 2\ \lambda\ \text{sen}^2\ \omega}{2\ [D^2 - R^2 (1 - \cos^2 \lambda\ \text{sen}^2\ \omega)]} \quad ;$$

$$\beta = \frac{- D\ R^2 \cos \lambda\ \text{sen}\ 2\ \omega}{2\ [D^2 - R^2 (1 - \cos^2 \lambda\ \text{sen}^2\ \omega)]}$$

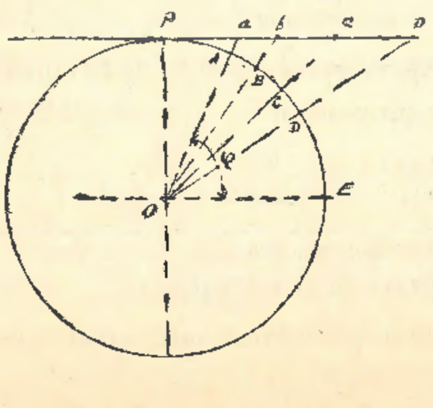
Todas estas ecuaciones fundamentales sufren transformaciones, según la posición que se adopte para el punto de vista y para el plano de proyección, constituyendo así las ecuaciones correspondientes á las proyecciones, central, Estereográfica ú Ortográfica como se expondrá más adelante.

## Proyecciones por perspectiva

*Proyección central.*—En esta proyección se considera el punto de vista (sea el observador), en el centro de la tierra y el plano de proyección tangente á la esfera terrestre, ya en el *polo*, ya en el *zenit*, en el *ecuador* ó en el horizonte.

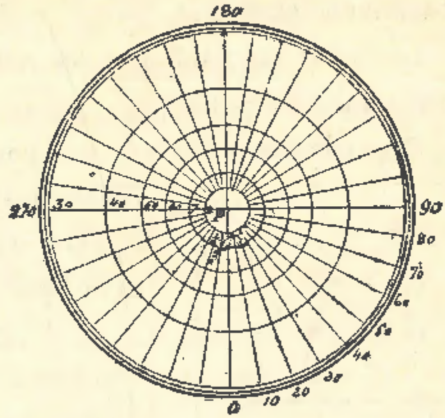
En cualquiera de los casos, la proyección se obtendrá por la intersección, sobre el plano, de los radios, prolongados hasta él y pasando por todos los puntos que se quieren proyectar.

*Proyección Polar.*—Plano tangente al polo y paralelo al Ecuador.




Los meridianos serán líneas rectas, convergentes al polo y equidistantes sobre la circunferencia del último paralelo.

Los paralelos serán representados por círculos concéntricos al polo, sus radios serán proporcionales al complemento de latitud y tendrán por expresión:




Para el paralelo de latitud φ, arco A E, cuya proyección es P a, el radio será:

$$P\,a = O\,P\ \mathrm{tang}\,(90 - \varphi)$$
$$= R\ \mathrm{tang}\,(90 - \varphi)$$
$$= R\ \mathrm{cotg}\,\varphi$$

En esta proyección no puede representarse más que una parte de la semiesfera.

*Proyección zenital.*—Si el plano se adopta tangente al zenit, la proyección y sus fórmulas serán iguales á la anterior.

*Proyección ecuatorial.*—Si el plano se adopta tangente al ecuador y paralelo así al eje de los polos, los meridianos se hallarán representados por líneas rectas paralelas entre sí y separadas en proporción á la tangente de la longitud, ó sea del ángulo formado por el meridiano central que pasa por el punto de tangencia del plano y el meridiano que se trata de proyectar.

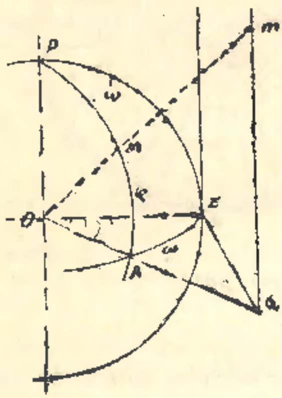
La distancia de un meridiano a sobre la carta correspondiente, al meridiano A que forma un ángulo ω con el meridiano central es:

$$E\,a = R\ \mathrm{tang}\ \omega.$$

Los meridianos resultarán simétricamente situados á cada lado del central.

Los paralelos resultarán ser representados por curvas que serán hipérbolas.

Si se considera la recta a m, como proyección del meridiano P M A, que forma un ángulo $\omega$ con el meridiano se tiene: para la distancia E a:




$$E\,a = R \operatorname{tang} \omega$$

y siendo M un paralelo de latitud $\varphi$, su proyección sobre el meridiano a m, será el punto m situado á la distancia y de la línea E a proyección del Ecuador.

$$O\,a = \frac{O\,E}{\cos \omega} = R \sec \omega$$

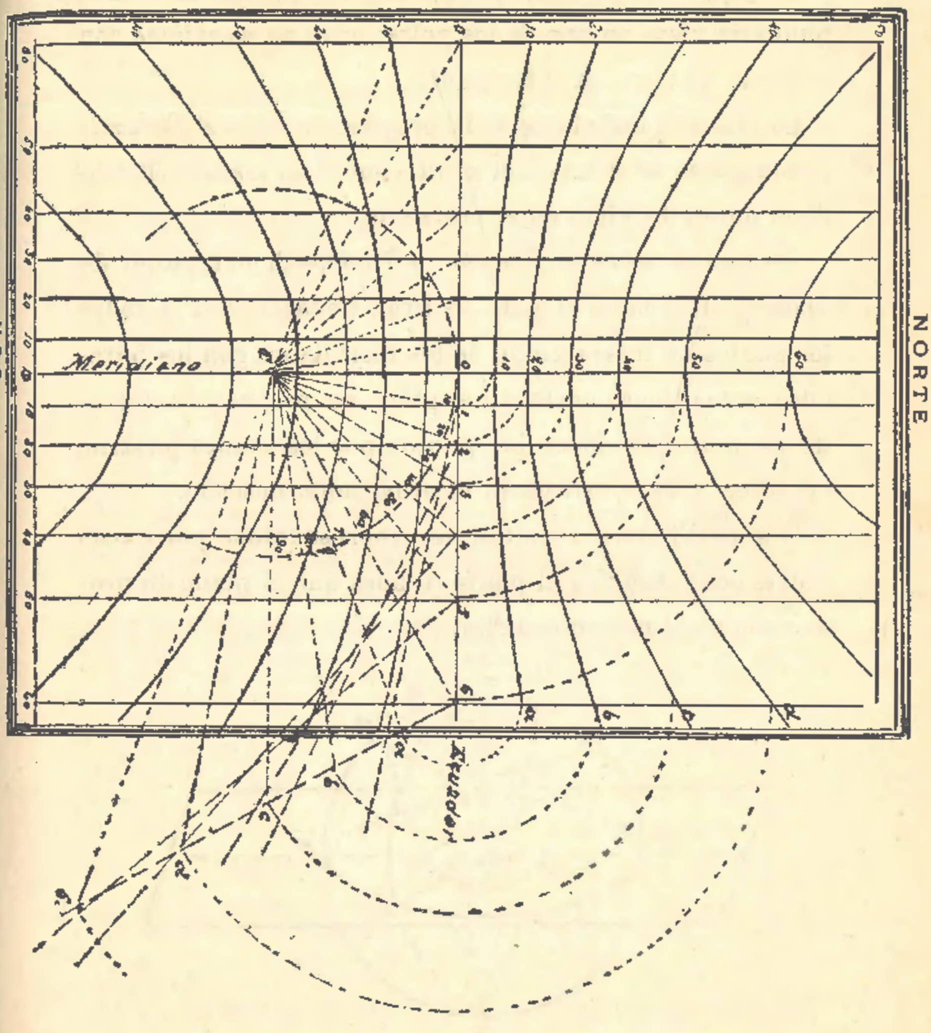
$$m\,a = y = O\,a \operatorname{tang} \varphi = R \sec \omega \operatorname{tang} \varphi.$$

Con estas fórmulas se fijarán cuantos puntos sean necesarios en los meridianos proyectados para trazar el paralelo M de latitud $\varphi$.

La proyección hecha sobre el plano tangente al horizonte es exactamente la misma que la precedente.

La construcción gráfica queda expuesta en la adjunta figura:

PROYECCIÓN ECUATORIAL



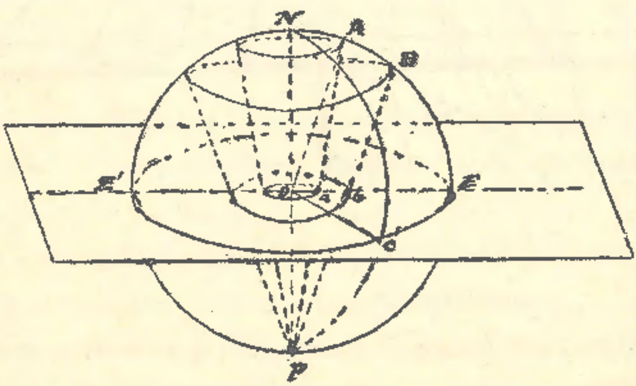

*Proyección estereográfica.*—El punto de vista se halla sobre la superficie terrestre y el plano de proyección pasa por el centro de la tierra; se representará el hemisferio opuesto al ocupado por el punto de vista.

La proyección se hace: *sobre el Ecuador* hallándose el punto de vista en uno de los polos; *sobre un meridiano* con el punto de vista en el Ecuador.

Lo mismo puede hacerse la proyección *sobre el horizonte* con el punto de vista en el zenit ó sobre *un vertical* situando el punto de vista en el horizonte.

*Proyección sobre el Ecuador ó Polar.*—Si del punto de vista P situado en el polo se tiran líneas rectas á todos los puntos de intersección de los meridianos con los paralelos, estas líneas cortarán el plano de proyección dejando así marcados todos los puntos por los cuales pasarán las líneas que constituirán la proyección buscada.

Los meridianos, resultan ser representados por líneas rectas convergentes al punto O, pues que el plano de proyección es el mismo ecuador.




Los paralelos serán representados por círculos concéntricos con el Ecuador; el radio o a de un paralelo cualquiera, tiene por expresión el valor que se retira del triángulo rectángulo a o P en el cual el ángulo

$$a\,P\,O = \tfrac{1}{2}\,A\,O\,E = \tfrac{1}{2}\,(90 - A\,O\,E) = \tfrac{1}{2}\,(90 - \varphi)$$

de donde

$$O\,a = O\,P \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(90 - \varphi) = R \operatorname{tang} \frac{z}{2} \quad ; \quad z = (90 - \varphi)$$

$$\text{sea;} \quad \text{radio } O\,a = \operatorname{tang}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) = R \operatorname{cotag} \frac{\varphi}{2}$$

Entrando en estas fórmulas el radio ecuatorial, que en el plano que se construya será representado á la escala adoptada, sea $R = n\,\frac{1}{m}$ , se desprende que los radios de los demás paralelos serán una fracción de dicho radio R; así tomando el radio ecuatorial como unidad, dicha relación entre él y los demás radios es como sigue:

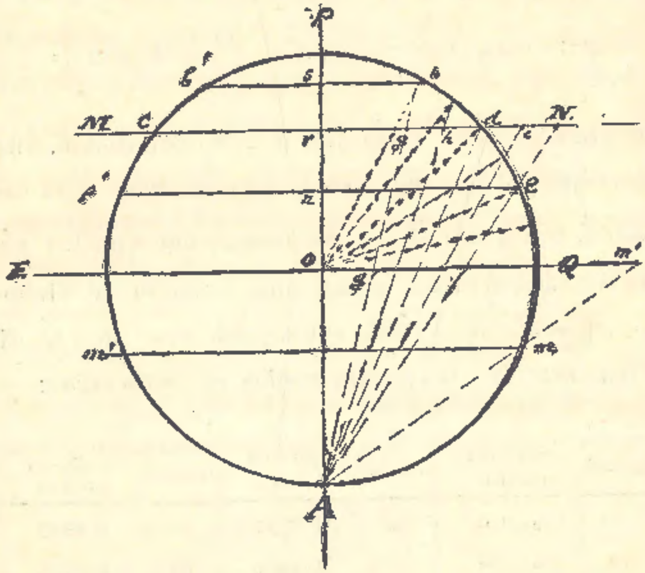
| Latitud | Radio del paralelo | Latitud | Radio del paralelo | Latitud | Radio del paralelo |
|---|---|---|---|---|---|
| 5º | 0.9163 | 35º | 0.5206 | 65º | 0.2217 |
| 10 | 0.8391 | 40 | 0.4663 | 70 | 0.1763 |
| 15 | 0.7673 | 45 | 0.4142 | 75 | 0.1317 |
| 20 | 0.7002 | 50 | 0.3640 | 80 | 0.0875 |
| 25 | 0.6371 | 55 | 0.3153 | 85 | 0.0437 |
| 30 | 0.5774 | 60 | 0.2679 | 90 | 0.0000 |

Esta proyección puede hacerse extensiva simultáneamente á parte del hemisferio inferior; efectivamente siendo m un paralelo del hemisferio inferior, su proyección sobre el plano del Ecuador será o m', observándose para ello los mismos principios fundamentales; el radio o m', tendrá por valor siendo la latitud la de (90 + Q m) y hay haciendo:

$$Q\,m = \lambda \quad \text{y latitud} \quad m' = 90^o + \lambda = \Delta$$

luego

$$O\,m = r = R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(90 + \lambda) = R \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\,(180 - \Delta).$$




Como se desprende, los radios de los paralelos del hemisferio inferior, serán mayores que el radio ecuatorial, sea la relación mayor de la unidad.

HEMISFERIO INFERIOR

| Latitud | Radio del paralelo | Latitud | Radio del paralelo | Latitud | Radio del paralelo |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 + 5 | 1.0933 | 90 + 20 | 1.4281 | 90 + 35 | 1.9210 |
| 90 + 10 | 1.1918 | 90 + 25 | 1.5697 | 90 + 40 | 2.1445 |
| 90 + 15 | 1.3032 | 90 + 30 | 1.7321 | 90 + 45 | 2.4142 |

Cuando se aplican los principios de la proyección Estereográfica ó la representación de un país que ocupa una zona de pocos paralelos, es preferible hacer pasar el *plano de proyección* por el paralelo medio de dicha zona; entonces, procediendo siempre de acuerdo á los principios fundamentales con el punto de vista en el polo A, sólo el valor de los radios de los paralelos variarán.

En efecto, si $b' b$ y $e' e$ representan los paralelos extremos y $c d$ el paralelo medio por el que pasa el plano $M N$ de proyección, el radio del paralelo $b' b$ proyectado sobre $c d$, será $r g'$ sobre el Ecuador.

El valor del radio de $c d$, sea $r d$, se deduce del triángulo $d r o$, $r d = R \sin (90 - \varphi) = R \cos$

y el radio proyectado de $b' b$, sea $s b$, será $r g$, cuyo valor se deduce de los siguientes triángulos:

Del $d r o$, $o r = R \cos (90 - \varphi) = R \operatorname{sen} \varphi$

del $g r o$, $r o = o r \operatorname{tang} (90 - \varphi) = R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang} (90 - \varphi)$

pero el ángulo $r o g = r A g$, sea $r A g = \frac{1}{2} r o g$

y como $r A g = \frac{1}{2} (90 - \varphi)$

luego del triángulo $r A g$

$$r g = (R + o r) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (90 - \varphi) = R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (90 - \varphi) + o r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (90 + \varphi)$$

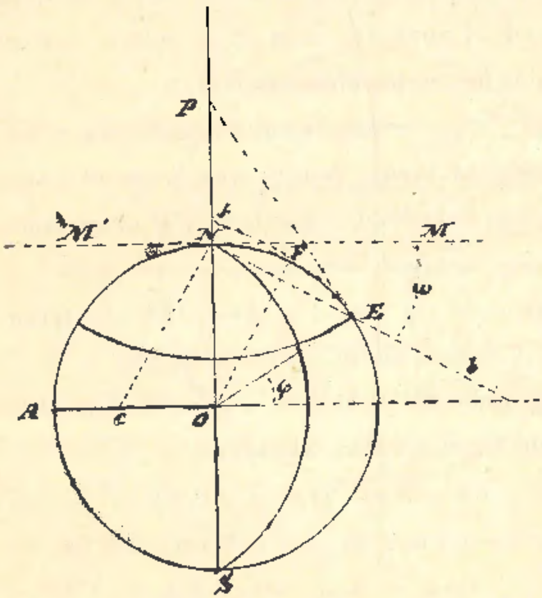
$$r g = R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (90 - \varphi) + R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (90 - \varphi)$$

Haciendo uso de esta fórmula se calcularán los radios de proyección de los diferentes paralelos comprendidos en la zona que se trata de proyectar sobre el plano del paralelo medio.

Los meridianos serán, como siempre, líneas rectas convergentes al polo central de la proyección.

En la *Proyección ecuatorial estereográfica,* el plano de proyección pasa por un meridiano y el punto de vista se halla sobre el Ecuador.

La proyección del meridiano central y del Ecuador resultan ser representados por líneas rectas perpendiculares entre sí. Los demás meridianos serán arcos de círculos que pasan por los polos y con su centro sobre el Ecuador, ó su prolongación. Los paralelos serán arcos de círculos que pasarán por los puntos que sobre la circunferencia del meridiano proyectado, representan la respectiva latitud y cuyos centros variarán para cada arco hallándose siempre en la línea prolongación del eje de los polos.




Si sobre la línea M' N M se forma un ángulo $M N b = \omega$ (longitud ó sea ángulo de un meridiano cualquiera y el central del mapa); así como la perpendicular C N á N b, se tendrá por la igualdad de los formados por los ángulos $M N b = C N O = \omega$ y llamando $d$ á la distancia O C

$$d = N\,O \operatorname{tang} \omega \qquad ó \qquad d = R \operatorname{tang} \omega \quad (1)$$

y así mismo, llamando r al radio C N

$$C\,N = r = \frac{N\,O}{\cos \omega} \quad ó \text{ sea } \quad r = R \sec \omega \quad (2)$$

Estas fórmulas 1 y 2 servirán para fijar el centro y el radio correspondiente á cada arco de meridiano que debe trazarse sobre el mapa.

Ahora si á cada radio O E, O F.... correspondiente á una latitud $\varphi$ fijada sobre la circunferencia del meridiano de proyección, se levanta una tangente E e, F f.... prolongada hasta cortar la prolongación del eje de los polos, se tendrá por el triángulo O E e, llamando: $\delta = O\,e$ del centro de la esfera al centro del arco de paralelo y $l = e\,E$, radio para trazar el paralelo de latitud de E

$$O\,e = \frac{O\,E}{\cos(90 - \varphi)} \quad ó \text{ sea } \quad \delta = \frac{R}{\operatorname{sen} \varphi} \quad (1)$$

$$E\,e = O\,E \operatorname{tang}(90 - \varphi) \quad ó \text{ sea } \quad \rho = R \operatorname{cotg} \varphi$$

fórmulas con las cuales se trazarán en el mapa los paralelos.

Adoptando en la construcción del mapa, el *radio ecuatorial* como unidad, la que á su vez será representada en tamaño por la escala $\frac{1}{n}$ adoptada, las fórmulas que preceden se transforman en:

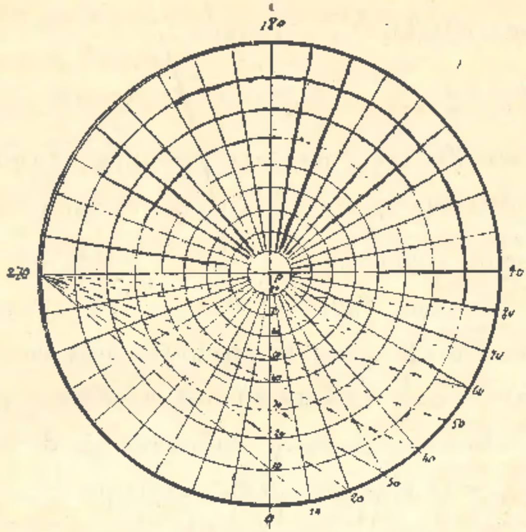
$$d = 1 \operatorname{cotg} \omega \qquad \delta = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$r = \sec \omega \qquad \rho = 1 \operatorname{cotg} \varphi$$

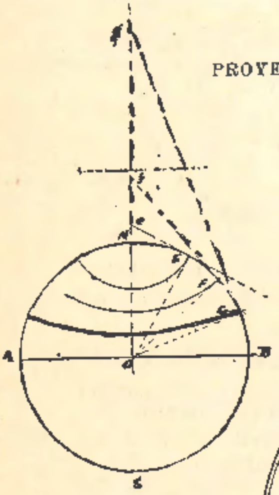
con cuyos valores se ha calculado la siguiente tabla que facilitará toda construcción:

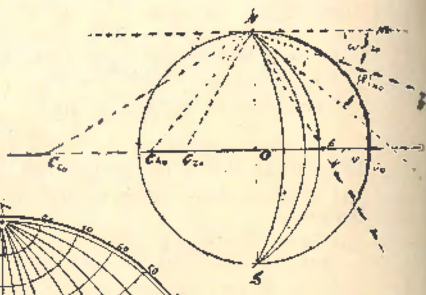
## PROYECCIÓN POLAR ESTEREOGRÁFICA

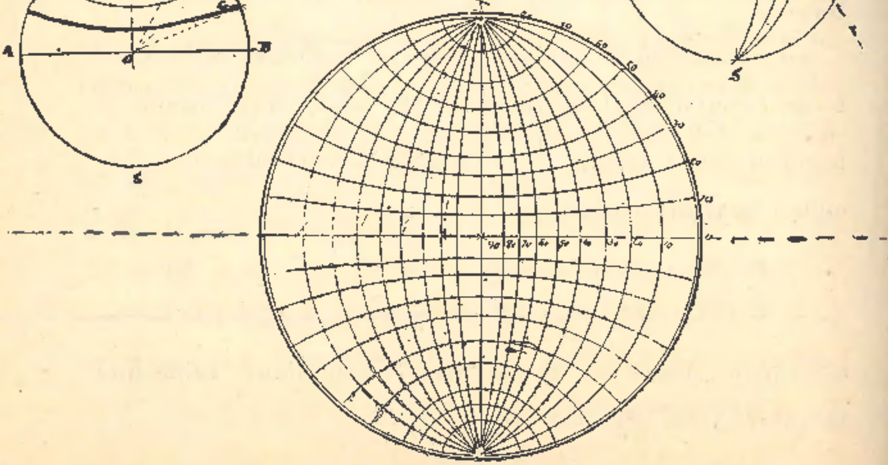
Lámina 2




## PROYECCIÓN ECUATORIAL ESTEREOGRÁFICA







| Latitud y Longitud | PARA MERIDIANOS | | PARA PARALELOS | |
|---|---|---|---|---|
| | d | r | δ | ρ |
| 5 | 11.4737 | 11.4300 | 0.0875 | 1.0038 |
| 10 | 5.7538 | 5.6713 | 0.1763 | 1.0154 |
| 15 | 3.8637 | 3.7321 | 0.2679 | 1.0353 |
| 20 | 2.9238 | 2.7475 | 0.3640 | 1.0642 |
| 25 | 2.3662 | 2.1445 | 0.4663 | 1.1033 |
| 30 | 2.0000 | 1.7321 | 0.5773 | 1.1547 |
| 35 | 1.7434 | 1.4282 | 0.7002 | 1.2208 |
| 40 | 1.5557 | 1.1917 | 0.8391 | 1.3054 |
| 45 | 1.4141 | 1.0000 | 1.0000 | 1.4142 |
| 50 | 1.3054 | 0.8391 | 1.1917 | 1.5557 |
| 55 | 1.2208 | 0.7002 | 1.4282 | 1.7454 |
| 60 | 1.1547 | 0.5774 | 1.7321 | 2.0000 |
| 65 | 1.1034 | 0.4663 | 2.1445 | 2..3662 |
| 70 | 1.0642 | 0.3640 | 2.8475 | 2.9238 |
| 75 | 1.0353 | 0.2680 | 3.7320 | 3.8637 |
| 80 | 1.0154 | 0.1763 | 5.6713 | 3.7587 |
| 85 | 1.0038 | 0.0875 | 11.4300 | 11.4737 |

Para la construcción gráfica véase la lámina 2

Proyección *estereográfica horizontal* con el punto de vista en el zenit y plano de proyección en el horizonte.

En esta proyección, conservando siempre la importancia del polo y sus respectivas coordenadas geográficas, se representa en la carta la proyección de dicho polo con relación al zenit ó polo de la proyección horizontal, los meridianos por arcos que irradian del polo y los paralelos por círculos cuyos centros se encontrarán siempre sobre el meridiano central (que pasa por el zenit y que se halla representado por una línea recta).

El meridiano central que pasa por el polo y el zenit es representado por una recta que pasa igualmente por el centro C de la carta ó sea de la circunferencia que representa la proyección del hemisferio. Este meridiano central y su perpendicular levantada por el centro de la distancia que separa sobre la proyección, los dos polos constituyen los ejes de coordenadas.

La construcción de esta proyección puede hacerse gráficamente con el compás ó por coordenadas fijando puntos para cada arco de círculo á trazar.

Las coordenadas á emplearse, llamando $\lambda$ la latitud del punto de vista (en este caso el zenit.) sea el arco N P y S P'

Para los paralelos, radios del círculo

$$R_p = \frac{R \cos \varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi + \lambda}{2} \cos \frac{\varphi - \lambda}{2}}$$

coordenadas del centro de ese círculo

$$\alpha_p = - \frac{R \cos \lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi + \lambda}{2} \cos \frac{\varphi - \lambda}{2}} \qquad \beta_p = 0$$

cada círculo de paralelo corta el meridiano central N S en dos puntos n n' siendo las distancias del centro de las coordenadas a n o' n'

$$c\,n = \delta = R \operatorname{tang} \frac{\varphi - \lambda}{2} \qquad c\,n' = \delta' = R \operatorname{cotg} \frac{\varphi + \lambda}{2}$$

Para el paralelo «Ecuador» siendo $\varphi = 0$

$$r_0 = R \operatorname{cosec} \lambda, \qquad \alpha_0 = - R \operatorname{cotg} \lambda, \qquad \delta_0 = - R \operatorname{tang} \lambda,$$

$$\delta' = R \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2}$$

Para los meridianos $\quad r_m = R \text{ sec. } \lambda \text{ cosec. } \omega$

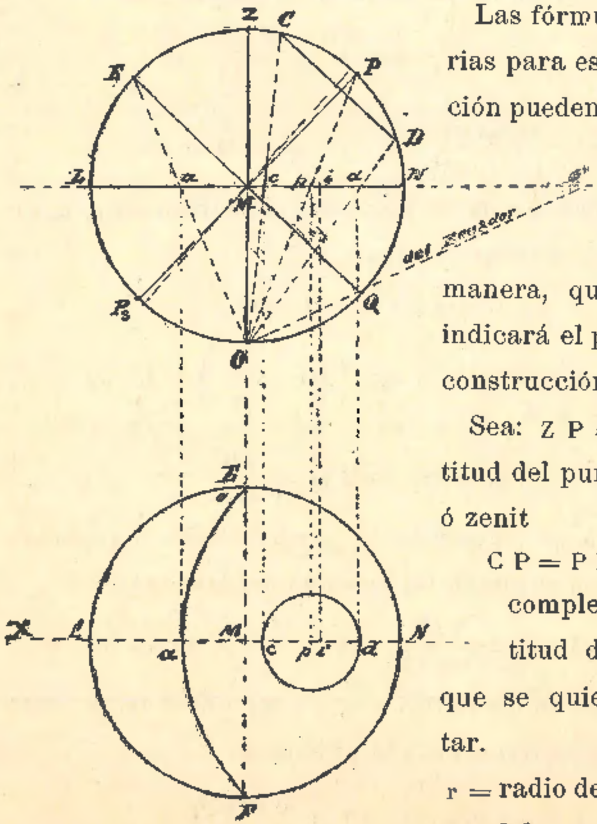
$$x_m = R \text{ tang } \lambda, \qquad \beta = -\frac{R \text{ cotg } \omega}{\cos \lambda}$$

todos los centros se hallarn sobre el eje de coordenadas perpendicular al meridiano central.

Las coordenadas que fijan la proyección de los polos P P' serán $\quad p = R \text{ tang } \frac{90 - \lambda}{2} \qquad p' = -R \text{ cotg } \frac{90 - \lambda}{2}$

y f distancia al centro de coordenadas. $\quad f = R \text{ tang } \lambda$

Para la construcción gráfica vean lámina adjunta.




Las fórmulas necesarias para esta construcción pueden igualmente deducirse de la siguiente manera, que á su vez indicará el proceder de construcción gráfica.

Sea: Z P = $\lambda$ = colatitud del punto de vista ó zenit

C P = P D = $\rho$ = complemento de latitud del paralelo que se quiere proyectar.

r = radio del círculo de paralelo proyectado $\frac{1}{2}$(c d)

$$M\,d = e, \qquad M\,c = e, \qquad M\,i = d.$$

$$Z\,D = \lambda + \rho, Z\,C = \lambda - \rho, Z\,O\,D = \tfrac{1}{2}(\lambda + \rho), Z\,O\,C = \tfrac{1}{2}(\lambda - \rho)$$

$$c\,i = i\,d, \qquad M\,i = d = M\,c + \frac{c\,d}{2} = \frac{M\,c + M\,d}{2}$$

$$M\,d = e = R \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda + \rho)$$

de donde

$$d = \frac{R}{2}\left[\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda + \rho) + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\lambda - \rho)\right]$$

expresión que transformada llega á

$$d = \frac{R \operatorname{sen} \lambda}{\cos \lambda + \cos \varphi} \quad (1)$$

el radio del círculo de paralelo en la proyección

$$c\,i = r = \frac{d}{2}\;\frac{M\,d - M\,c}{2}$$

de donde

$$r = \frac{R \operatorname{sen} \rho}{\cos \lambda + \cos \rho} \qquad (\rho = (90 - \varphi)$$

Las proyecciones de los polos se encuentran en $p$, $p_s$ sobre el eje $N\,L$ y se tiene para

$$M\,p = R \operatorname{tang} M\,O\,p_s = R \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}$$

$$M\,p_s = R \operatorname{tang} M\,O\,p_s = R \operatorname{tang}\left(90 + \frac{\lambda}{2}\right) = R \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2}$$

la distancia

$$p\,p_s = M\,p + M\,p_s = \frac{2\,R}{\operatorname{sen} \lambda}$$

y la distancia $p\,x$. al pié de la perpendicular $c\,x\,b$ sobre $L\,M$ las que constituyen los ejes de coordenadas

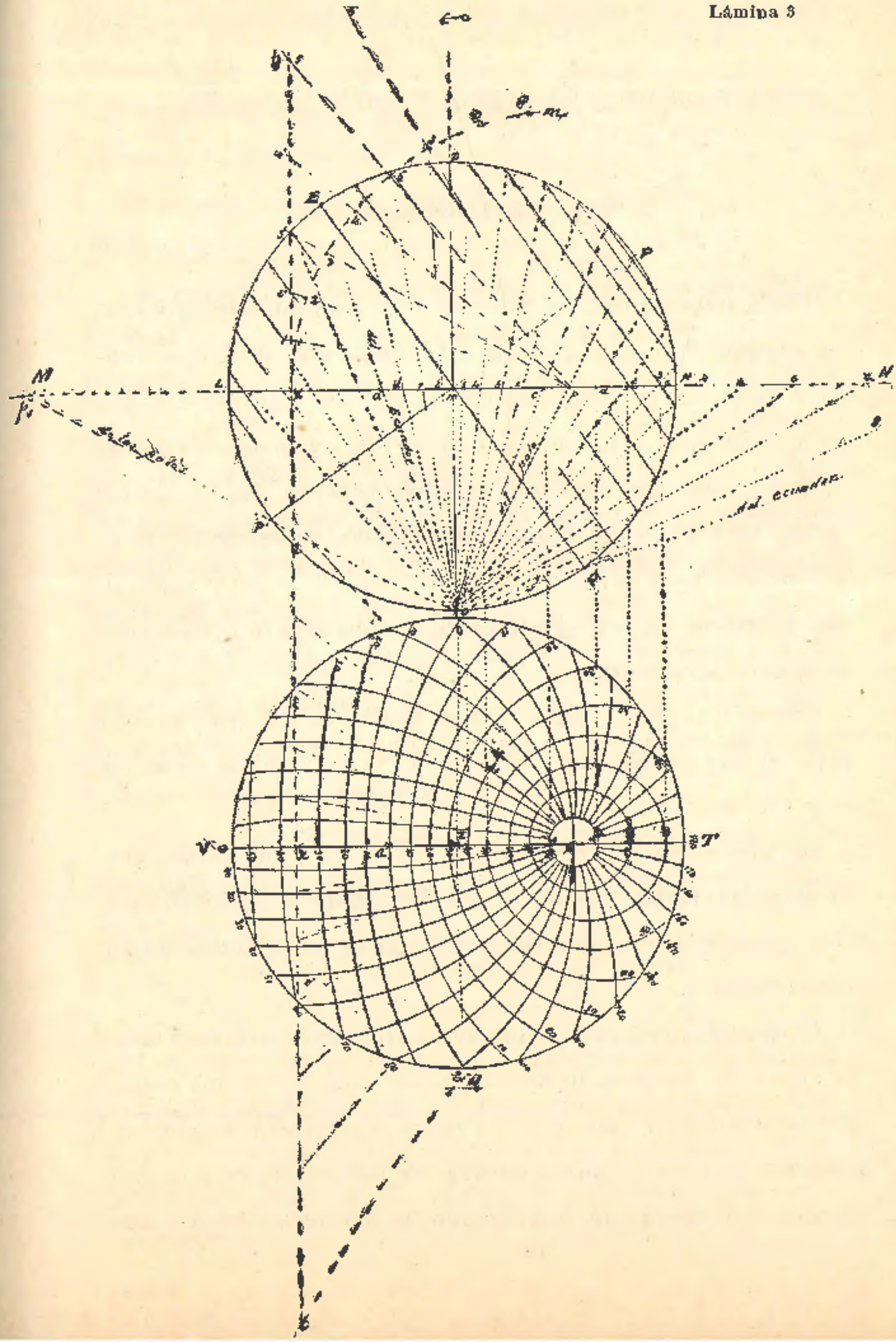
$$p\,x = \tfrac{1}{2}\,p\,p_s = \frac{2\,R}{\operatorname{sen} \lambda} \qquad \text{y} \qquad M\,x = R \operatorname{cotg} \lambda$$

Los centros de los radios $b\,p$, $e\,p$, se encuentran sobre el eje $c\,x\,b$ y se tiene para la ordenada $x\,b = y$

$$y = p\,x \operatorname{tang}(90 - \omega) = \frac{R \operatorname{cotg} \omega}{\operatorname{sen} \lambda}$$

## PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA HORIZONTAL

Lámina 3



y radio

$$b\,p = \gamma = \frac{R}{\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\omega}$$

Para la construcción gráfica véase la lámina 3.

## Proyecciones Ortográficas

En la proyección por perspectiva, llamada Ortográfica, se supone el punto de vista situado á una distancia infinita de la tierra y el plano de proyección pasando: ya por el Ecuador, originando la proyección *ortogonal ecuatorial* con el punto de vista en la prolongación del eje de los polos; ya por un meridiano, originando la proyección *ortogonal meridiana* con el punto de vista en la prolongación del Ecuador; ya por el horizonte siendo ésta la proyección *ortogonal horizontal.*

En cualquiera de estos casos el hemisferio proyectado será el que se supone vería el observador hallándose en el punto de vista.

La proyección ortogenal sólo puede ser empleada para la representación de un hemisferio entero, sus defectos son considerables y su única ventaja es la facilidad de su construcción.

*Proyección ortogonal ecuatorial.*—Hallándose en este caso el punto de vista en la prolongación del eje de los polos, fácil es concebir que el observador apercibirá la proyección del polo como punto central de la circunferencia que forma el Ecuador; la proyección de los meridianos como rectas partiendo del polo y los paralelos como circunferencias concéntricas, cuyo radio será como se desprende de la figura $r = R \operatorname{sen} \varphi$.

La construcción gráfica es simple y la inspección de la figura la indica claramente.

*Proyección ortogonal meridiana.*—El punto de vista se halla al infinito en la prolongación del Ecuador.

Los paralelos serán proyectados en líneas rectas paralelas al Ecuador y los meridianos por arcos elípticos.

El Ecuador será representado por una línea recta que servirá de diámetro á la proyección de la esfera, perpendicular á la línea de los polos N S, paralela al Ecuador y por los puntos de la división de la circunferencia que representa el meridiano orígen, los paralelos son representados por líneas rectas.

Los meridianos serán arcos elípticos que pasan por los polos N S y el punto del Ecuador correspondiente al pié de la perpendicular bajada desde el extremo del radio que señala el ángulo igual á la longitud.

Los ejes de coordenadas en el meridiano central y el Ecuador, las ecuaciones generales de la proyección ortogenal son:

$$x = R (\operatorname{sen} \lambda \cos \varphi \cos \omega - \cos \lambda \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = R \cos \varphi \operatorname{sen} \omega$$

Si en estas fórmulas se hace variar $\lambda$ que representa la latitud del punto central ó más bien la inclinación del Ecuador sobre el eje de coordenadas $y$, se tendrá para la proyección ortogenal meridiana $\lambda = 0^{\circ}$ y las ecuaciones se reducen á:

$$\left.\begin{array}{r} x = R \operatorname{sen} \varphi \\ y = R \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \end{array}\right\} \text{ que son las de los paralelos.}$$

La ecuación de los meridianos será:

$$x^2 \operatorname{sen}^2 \omega + y^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \omega$$

que representa un arco elíptico cuyo eje mayor sobre el eje de las $x$, es igual á $2\,R$, siendo el eje menor sobre el eje de las $y$, (ecuador) igual á $2\,R \operatorname{sen} \omega$.

La construcción gráfica se hace fácilmente observando la lámina III.

*Proyección ortogonal horizontal.*—El plano de proyección es un plano paralelo al horizonte del punto central cuya latitud es $\lambda$.

De la ecuación general se deduce para los paralelos

$$y^2 \operatorname{sen}^2 \lambda + x^2 + 2\,R\,x \cos \lambda \operatorname{sen} \varphi - R^2 \operatorname{sen}(\lambda + \varphi) \operatorname{sen}(\lambda - \varphi) = 0$$

ecuación de una elipse cuyo eje mayor $B'\,B$, es igual á $R \cos \varphi$, igual al radio del paralelo y el eje menor en $A'\,A$, igual á $R \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda$, las coordenadas del centro serán:

$$\alpha = R \cos \lambda \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad \beta = 0$$

La ecuación del Ecuador en la cual $\varphi = 0$

$$y^2 \operatorname{sen}^2 \lambda + x^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 \lambda = 0$$

ecuación de una elipse con su centro en el centro de la carta y cuyos ejes son dados por:

$$A'' = R \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad B'' = R$$

Los polos $p\ p'$ se encuentran, del centro de la carta á la distancia $\qquad o\,p = \pm\, R \cos \lambda.$

La ecuación de los meridianos es

$$y^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \lambda \operatorname{sen}^2 \omega) - x\,y \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} 2\,\omega + x^2 \operatorname{sen}^2 \omega -$$
$$- R^2 \cos^2 \lambda \operatorname{sen}^2 \omega = 0$$

ecuación de una elipse cuyo centro está en el orígen de las coordenadas. El semi eje mayor A es igual al radio de la esfera y el semi eje menor

$$B = R \cos \lambda \operatorname{sen} \omega$$

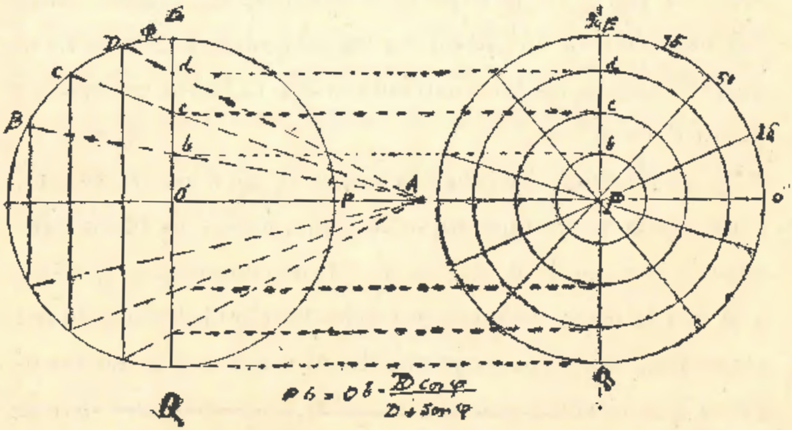
El ángulo $\gamma$ que hace el eje de las abcisas $x$ con el eje mayor A es igual á

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{sen} \lambda \operatorname{tang} \omega.$$

Esta construcción por puntos puede facilitarse por la construcción gráfica indicada en la lámina III.

*Proyección Escenográfica.*—En esta proyección el punto de vista se halla situado á una distancia determinada de la superficie terrestre y perpendicularmente al plano de proyección que pasa: por el ecuador, por el meridiano ó por el horizonte.

En la *proyección polar* en que el punto de vista se halla



$Pb = Ob \cdot \frac{D \cos \varphi}{D + \operatorname{sen} \varphi}$

$OA = D$

en la prolongación del eje de los polos, los paralelos son representados por círculos concéntricos cuyo radio es

$$r = \frac{D \cos \varphi}{D + \operatorname{sen} \varphi}$$

en la que D es la distancia del punto de vista al plano de preyección en este caso al Ecuador.

Las proyecciones *Escenográfica meridiano* y en la *horizontal*, tanto los paralelos como los meridianos son representados por elipses ó arcos elípticos.

Estas proyecciones están completamente en desuso.

Los meridianos son representados por rectas convergentes al polo.

## Proyecciones por desarrollo

Ya se ha dicho que tratándose de la representación de sólo una parte de la superficie esférica, las proyecciones por perspectiva no satisfacen las exigencias de exactitud que se buscan en la construcción de la carta geográfica de un Estado.

Se ha buscado de idear la esfera ó sólo parte de ella, proyectada sobre una superficie plana que le fuera tangente y que pudiera asimilarse, tanto como sea posible, una con la otra; obtenida esa asimilación el desarrollo del plano tangente representaría sin alteración alguna las figuras geométricas sobre él trazadas, conservando con toda exactitud las distancias, ángulos y superficies.

La resolución del problema está, pues, en encontrar el medio de obtener la asimilación de la superficie plana tangente á la esfera y la parte de ésta que se quiere representar.

Con este propósito es, que se ha supuesto á la esfera envuelta; ya por un cono, ya por un cilindro, haciendo sufrir á esa combinación varias modificaciones á fin de obtener mayor asimilación.

En las proyecciones cilíndricas, en que se supone á la esfera envuelta por un cilindro recto, el contacto puede hacerse en un punto ó sea en otros términos: el cilindro será tangente á una sola circunferencia, la que generalmente es el Ecuador, ó secante á la esfera aunque tangente siempre á un sólo paralelo que será el medio.

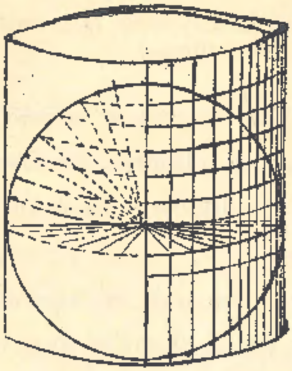
En las proyecciones cónicas por lo contrario la superficie de éste puede ser tangente á uno ó más paralelos y por lo tanto, el contacto se hace más íntimamente.

Las proyecciones cilíndricas han dado orígen á la llamada de «Mercatore» y otras más, fundadas en los mismos principios pero que han sufrido algunas modificaciones.

Las proyecciones cónicas, preferidas á las precedentes son las que más se han perfeccionado, modificándose en parte la proyección cónica pura.

## Proyecciones cilíndricas

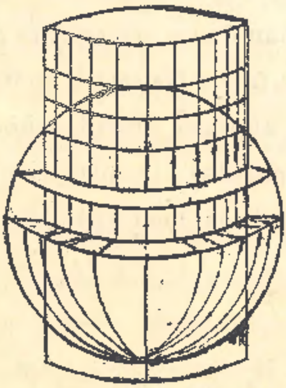
En la proyección cilíndrica pura se supone el cilindro tangente al Ecuador y circunscribiendo la esfera, de ma-



nera que los planos que la cortan dando orígen, ya á los círculos máximos ó meridianos, ya á los paralelos de latitud, son representados sobre el cilindro por líneas rectas.

De esta disposición se desprende: que sobre el desarrollo del cilindro los meridianos serán equidistantes, conservando en toda la extensión el tamaño de un grado de Ecuador y que los paralelos de latitud disminuirán su equidistancia á medida que se alejen del Ecuador.

Para atenuar esos defectos, se ha propuesto considerar el cilindro tangente á uno de los paralelos, per ejemplo, el



paralelo medio de la región ó del hemisferio que se quiere representar; en ese caso, el cilindro tendrá un diámetro inferior al del Ecuador y los grados de longitud, que conservarán en el mencionado paralelo su verdadera dimensión, serán demasiado grandes á la proximidad de los polos y demasiado chicos al llegar al Ecuador.

Se desprende, pues, que los únicos grados de longitud exactos serán los del círculo de tangencia ya sea éste el Ecuador ó el paralelo medio de la proyección.

Los paralelos á su vez se encuentran representados en una proporción inversa á la verdadera, pues que en la proyección su espacio disminuye á medida que se aleja del círculo de tangencia hacia el polo.


En efecto, un grado de latitud B E se encuentra proyectado sobre el cilindro por la distancia E g inferior al arco B E que tiene por valor, considerando esférica la tierra $\quad B\,E = \frac{2\,\pi}{360}\,R$

El radio del paralelo de B ó de E es, $r = R \cos \varphi = C\,A$ $r' = R \cos \varphi' = C\,F$ y su proyección $E\,g = E\,F - B\,A$ se deducirá de $\quad E\,F = R \operatorname{sen} \varphi', \quad B\,A = R \operatorname{sen} \varphi =$

luego $\quad \bar{E}g = R\,(\operatorname{sen} \varphi, - \operatorname{sen} \varphi)$

Lo que indica que el espacio entre dos paralelos consecutivos disminuirá en relación al aumento del seno de sus respectivas latitudes y que la diferencia, entre un grado de longitud de un paralelo cualquiera y el del círculo de tangencia, aumentará en relación á la diferencia de los cosenos de las respectivas latitudes.

La representación de las coordenadas terrestres sobre el cilindro se verificará. pues, por una série de paralelógramos rectangulares, de ahí el nombre de *cartas chatas paralelográmicas* dado á las de estas proyecciones.

A pesar de los defectos de la proyección cilíndrica pura, esta es muy útil en determinados casos y por esto es, que, adoptándola en principio, se han introducido varias modificaciones en su aplicación, dando origen así á varias proyecciones que llevan el nombre del matemático que las estableció. Las principales proyecciones cilíndricas empleadas son: la de Mercator, la de Cassini y las de Lambert.

La primera se calcula sobre el cilindro tangente al Ecuador ó al paralelo medio, dando á los grados de latitud un aumento determinado á medida que se acerca á los polos.

La segunda se calcula sobre el cilindro tangente al meridiano central de la región y los paralelos son *perpendiculares* al meridiano y no arcos de latitud.

La tercera, llamada también *Ortomorfa de Lambert*, se calcula sobre el cilindro tangente al meridiano central, asignando á los grados sus verdaderas dimensiones y representando á los paralelos con la curvatura correspondiente.

### Proyección de Mercator ó de latitudes crecientes

Los meridianos son representados por rectas equidistantes, manteniendo el tamaño de un grado del círculo de tangencia, sea el Ecuador que es generalmente adoptado como base de los cálculos. Los paralelos son también representados por rectas perpendiculares á los meridianos paralelas entre sí y al Ecuador, pero el espacio que las separa va aumentando hacia los polos, esto es, á medida que se aparta del Ecuador.

De esta construcción resulta, que los ángulos formados por dos elementos de curvas sobre la esfera son conservados iguales sobre la proyección, esto es, el ángulo formado por un meridiano y otro círculo máximo cualquiera puede representarse sobre el plano proyectado sin alteración.

De esta propiedad resulta: la notable ventaja de estas cartas para la navegación, sobre ellas puede trazarse la loxodromia ó ruta seguida ó á seguirse por un buque, pues que una línea trazada sobre el mapa, en la intersección de un meridiano, indica el rumbo que puede seguir el navegante y así mismo fijada sobre el mapa la situación de dos puntos, la recta que los une indica el rumbo á seguir para llegar del uno al otro.

Llamando A = á un grado de Ecuador, a = un grado del paralelo de latitud $\varphi$ se tiene por la relación del coseno de $\varphi$:

$$a : A :: \cos \varphi : 1 \qquad \frac{a}{A} = \frac{\cos \varphi}{1} = \frac{1}{\text{secante } \varphi}$$

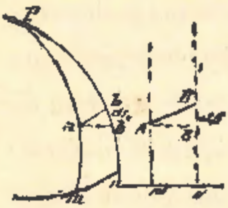
de donde:

$$a = A \cos \varphi \qquad A = \frac{a}{\cos \varphi} = a \text{ secc } \varphi$$

Así un grado de paralelo de latitud $\varphi$ es igual á un grado de Ecuador por el coseno de la latitud $\varphi$.

De la misma manera se tendrá: un grado del meridiano es igual á un grado del paralelo por la secante de la latitud. Se desprende que haciendo sobre el plano de proyección, un minuto de paralelo igual á un minuto del Ecuador, el intérvalo entre dos pararelos consecutivos ó más bien un minuto de ese intérvalo será expresado por esta relación: *un minuto de meridiano = un minuto de Ecuador* $\times$ *secc* $\varphi$.

Fundados en los principios de esta proyección, esto es, en la respectiva perpendicularidad entre meridianos y paralelos, si se toma un pequeño elemento de meridiano terrestre $ds$ y otro del proyectado $dS$, así como su correspondiente proyección sobre el Ecuador se tendrá, según se vé por la figura adjunta:



$$B B' : b b' : : A B' : a b',$$

$$\text{sea } \frac{dS}{ds} = \frac{MN}{ab'} = \frac{a}{r}$$

siendo $a =$ radio ecuatorial y $r =$ radio del paralelo considerado $\varphi$

También puede ponerse,

$$dS = \frac{a\,(1 - e^2)\,d\varphi}{\cos\varphi\,(1 - e^2)\operatorname{sen}^2\varphi}$$

Desarrollada esa igualdad é integrada entre los límites $\varphi = 0$ y $\varphi$ se obtendrá el arco de meridiano del Ecuador al punto de latitud $\varphi$ en función del arco $MN$ de longitud desde el meridiano central.

Así se obtiene la fórmula general.

$$S = 7915', 70446 \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) -$$

$$- 3487', 700\ (e^2 \operatorname{sen}\varphi + \left(\frac{e^4 \operatorname{sen}^3\varphi}{3}\right)$$

ó bien sustituyendo los coeficientes por sus logaritmos

$$S = [\,3.398489\,] \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) -$$

$$- [\,1.370800\,] \operatorname{sen}\varphi - [\,8.728 - 10\,] \operatorname{sen}^3\varphi$$

En casi todos los casos basta emplear la primera parte, sea:

$$S = [\,3.398489\,] \text{ long tang } \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Es con esta fórmula que se ha calculado tablas de *Latitudes crecientes*, parte de las cuales se reproducen al final de este libro y que sirven para la construcción de la proyección.

La base de los cálculos y de la escala del plano, como ya se ha dicho es el minuto de Ecuador, es pues, en esa medida que se obtiene la proyección de un arco de meridiano de $\varphi$ grados de latitud (contados desde el Ecuador).

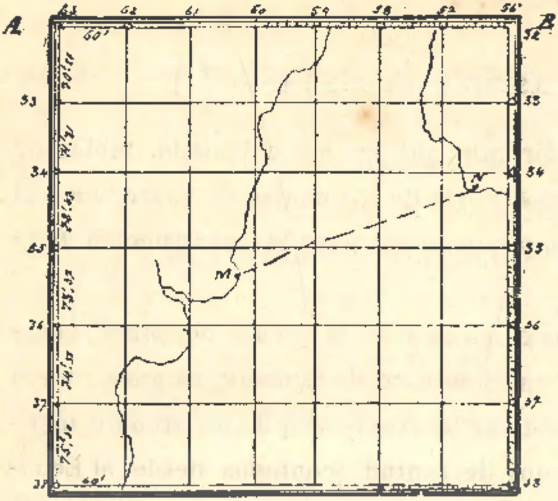
Fijado que sea el largo $m$ en milímetros que se asigna á un minuto de Ecuador como escala del plano, se tomará de las tablas de latitudes corrientes, el *factor* por el cual debe multiplicarse esa cantidad para tener el minuto correspondiente á la latitud $\varphi$.

Así, para calcular el largo del arco de meridiano entre las latitudes 27° y 26° se tendrá según la tabla:

| | |
|---|---|
| Arco de 27° de | = 1672',850 |
| „ „ 26° „ | = 1606',173 |
| proyección del grado = | 66',677 |

cantidad que multiplicada por $m$, dará en milímetros el largo que debe tener ese grado sobre el mapa.

Para construir una proyección de latitudes crecientes, despues de trazada la línea A B que representará; ya el Ecuador, ya el paralelo extremo de la carta y más próximo




al Ecuador, se divide A B en el número de partes iguales correspondientes al número de meridianos que deben establecerse siendo cada parte igual á $60' \times m$.

Sobre cada punto de división del Ecuador sea de grado en grado ó fracción de éste, se levantan las perpendiculares sobre los cuales se miden los arcos que corresponden á la diferencia de dos latitudes $\varphi$ y $\varphi'$ contados desde el Ecuador.

Así, sea 35° el paralelo Sud medio de la región que se representará y los paralelos extremos el 38 y el 32.

Dividido A B = paralelo 35 en cinco partes iguales á

$$60' = 111322_{m},\ 8 \times m \quad \left(m \text{ puede ser } \frac{1}{100.000}\right)$$

y levantadas las perpendiculares se tendrá para establecer el largo de un grado de latitud sobre el meridiano:

Arco de latitud de

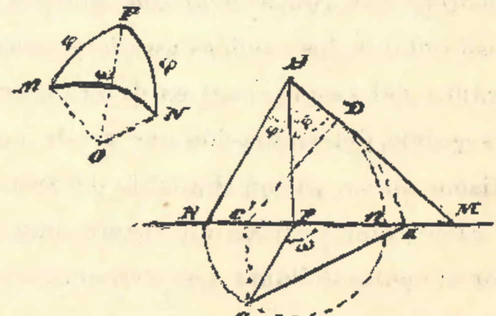
38°....2453' 789 dif. = 75' 304 × m = largo sobre el plano
37°....2378' 485 — „ = 74' 312 × „ = „
36°....2304' 173 — „ = 73' 377 × „ = „
35°....2230' 806 — „ = 72' 468 × „ = „
34°....2158' 338 — „ = 71' 614 × „ = „
33°....2086' 727 — „ = 70' 797 × „ = „
32°....2015' 930

Fijados con esas cantidades los puntos por donde deben trazarse los paralelos se establecerán estos paralelamente á la línea A B.

La escala del mapa *proyección Mercator,* es como se ha dicho el minuto de la línea base A B — equivalente á un minuto de Ecuador sea *una milla* = 1852m. Ahora si se conoce la posición geográfica de los puntos M y N y se quiere deducir la distacia que los separa, y el rumbo de la línea que los une, basta trazarlas al lapiz y medirla sobre la escala de la línea A B.

Así mismo, al medir con el trasportador el ángulo que hace la linea M N con uno de los meridianos, se conocerá el rumbo á seguir en la travesía.

También puede resolverse este problema de la siguiente manera. Conocidas las posiciones geográficas de los puntos M y N se conocerá sus complementos ó colatitudes y el angulo polar de la diferencia de longitud; así en el triángulo esférico M P N se conoce:




la colatitud de M = $\varphi$ y la de N = $\varphi'$, como la diferencia de longitud $\omega$.

Luego si sobre la línea M N se levanta una perpendicular P O y desde el punto O se reforma el ángulo

$$N\,O\,P = \varphi'; \quad y \quad P\,O\,M = \varphi$$

Se procederá á la siguiente construcción:

De P con radio igual á N P descríbase la semicircunferencia N C n. Esta construcción servirá para toda la travesía pues es la base inalterable. Sobre P M hágase en P un ángulo igual á la diferencia de longitud M P C $= \omega$, ángulo que puede variar cada dia ó cada instante.

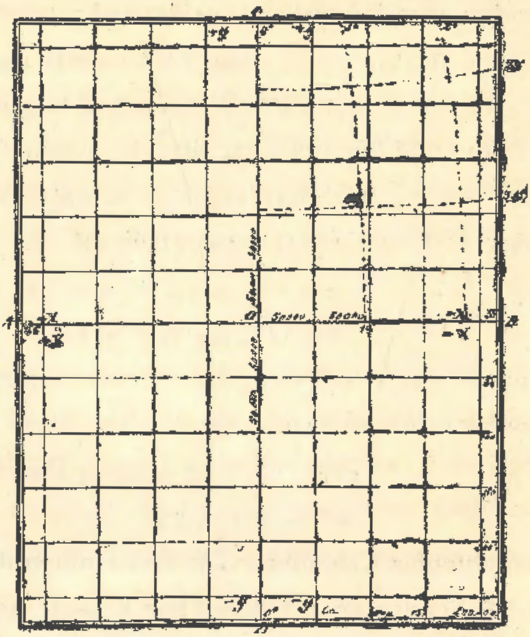
Del punto C levántese una perpendicular C c' y del punto c' otra perpendicular c' D sobre O M, luego desde c' con un radio igual á c' D descríbase el arco D E y trácese la línea C E que representa la dirección á seguirse; así que: midiendo con el trasportador el ángulo N E C se tendrá el rumbo que debe mantenerse para llegar al punto deseado.

Por demás es entrar en mayores detalles sobre el uso de ésta proyección en su aplicación á la navegación, basta recordar que con aplicar diariamente sobre el plano los resultados de los cálculos que determinan la posición geográfica del buque, fácil es determinar el nuevo rumbo á seguirse, determinación que puede hacerse, ya sobre el mismo mapa, ya con el auxilio del triángulo N O M.

El derrotero ó línea que representa el camino andado por el buque se llama *Loxodromia*.

## Proyección Cassini

La proyección imaginada por Cassini y que aplicó á la construcción de la carta de Francia, consiste en adoptar el meridiano central, como círculo de tangencia del cilindro de proyección y sus perpendiculares como círculos máximos que sustituyen los paralelos de latitud. Resulta de ahí que los demás meridianos son considerados como simples círculos paralelos al central y se encuentran representados en la proyección por líneas rectas equidistantes y paralelas al meridiano central.



Esta proyección responde satisfactoriamente á la construcción de un relevamiento geodésico ó trigonométrico de una determinada región, pues que en esas operaciones se establece siempre el meridiano central del punto de partida ó de referencia y sobre él se fijan las perpendiculares que servirán de ejes de proyección.

Si sobre esta proyección se quiere, como complemento, trazar las coordenadas geográficas, basta calcular la relación entre ambos sistemas y deducir las coordenadas de cada punto de intersección de aquellas con relación á los primeros.

Adoptando el meridiano como eje de las y y la perpendicular para las x si se considera el punto M se tendrá:

$$y = O\,A' = \varphi - \varphi_0 \text{ siendo } \varphi \text{ la latitud del punto de orígen } O$$

$$x = A'\,M = \omega \text{ siendo } \omega \text{ la diferencia de longitud.}$$

Pero en el triángulo rectángulo A N M formado por los arcos de círculo máximo N A y N M y el de perpendicular A M, se tiene la otra relación:

$$\text{tang } x = \cos(\varphi_0 + y) \text{ tang } \omega$$

$$\text{sen } \omega = \text{sen}(\varphi_0 + y) \cos x$$

ó mejor aún si se quiere determinar el punto M para pequeños intérvalos como ser de 10 en 10 minutos.

$$\text{cotang}(\varphi_0 + y) = \text{cotang } \varphi \cos \omega$$

$$\text{sen } x = \cos \varphi \text{ sen } \omega$$

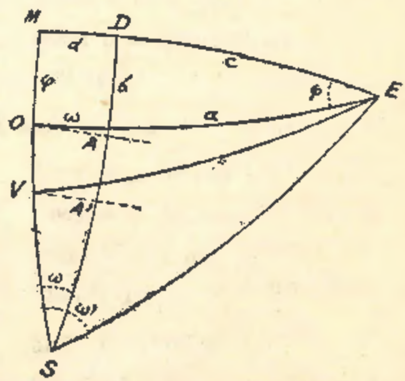
Reducidos á segundos los arcos obtenidos para x é y y multiplicados esos valores por R sen 1'' se tendrá en metros reducida aquella expresión.

Por lo tanto, para construir una carta por la proyección de Cassini, se traza la línea que representa el meridiano central y que será el eje de las y; á partir del punto O céntrico y que corresponde á la latitud media $\varphi_0$ de la carta se, levanta la perpendicular, eje de las x; luego dividiendo el meridiano en cantidades iguales, ya arbitrarias ya iguales á un grado de latitud, se traza por cada uno de esos puntos paralelas á la línea O x.

Repitiendo igual operación sobre la perpendicular se tendrá así dividida la proyección en cuadrados ó cuadriláteros que representarán un sistema de coordenadas rectangulares afectados de sus correspondientes signos, según al cuadrante á que pertenezcan con relación al punto O.

Es evidente que así mismo esta proyección no puede extenderse mucho en grados de longitud á uno y otro lado del punto O, porque el error de paralelismo entre las perpendiculares á la meridiana se haría demasiado sensible por causa de la convergencia de los círculos máximos.

La fijación de los puntos de intersección de meridianos y paralelos relacionados con las perpendiculares al meridiano, también puede hacerse por las consideraciones establecidas en el capítulo «*Perpendiculares á la meridiana*» de la Geodesia. En efecto, como las perpendiculares se reunen en su polo sobre el Ecuador, se forma en cada latitud del meridiano central un triángulo rectángulo E O M cuyo ángulo polar $E = \varphi$ es la latitud. Considerando ahora un nuevo meridiano distante uno ó más grado del central E A D se tiene llamando: $a = E\,A$; $b = A\,a$, $c = E\,D$ áng. $D E A = \varphi$ (latitud)




$$\text{sen } b = \text{sen } a \text{ sen } \varphi,$$

en la que

$$a = (90 - O\,A)$$

De ahí se desprende la distancia $y$, hasta el paralelo; $y = \varphi - b$.

Pero de $\text{tang } c = \text{tang } a \cos \varphi$, se deduce, $\text{tang } a = \dfrac{\text{tang } c}{\cos \varphi}$

siendo $c = (90^\circ - \varphi)$. De esta manera se tendrá: $x = (90^\circ - a)$ ó sea la distancia desde el meridiano central.

### APLICACIÓN

$\varphi_0 = 35^\circ$, $\omega = 2^\circ$; calcular los paralelos $36^\circ\ 10'$..... $37^\circ$ sobre el meridiano 2.º.

$$\omega = 2^\circ$$

$$\mathrm{cotg}\,(\varphi_0 + y) = \mathrm{cotg}\ 36^\circ\ 10'\ \cos\ 2^\circ$$

| | | |
|---|---|---|
| cotg 36º 10' = 0.13608......... | 36º 20' = | 0.13344 |
| cos 2º = 9.99974......... | | 9.99974 |
| log cotg = 0.13682......... | | 0.13318 |
| 36º 11' 00'' | | 36º 21' 03'' |
| cotg 36º 30' = 0.13079......... | 36º 40' = | 0.12815 |
| cos 2º = 9.99974......... | | 9.99974 |
| log cotg = 0.13053......... | | 0.12789 |
| 36º 31' 00'' | | 36º 41' 00'' |
| cotg 36º 50' = 0.12552......... | 37º 00' = | 0,12289 |
| cos 2º = 9.99974......... | | 9.99974 |
| log cotg = 0.12526......... | | 0.12263 |
| 36º 51' 03'' | | 37º 01' 03'' |

$$\mathrm{sen}\ x = \cos\ 36^\circ\ 10'\ \mathrm{sen}\ 2^\circ$$

| | | |
|---|---|---|
| cos 36º 10' = 9.90704......... | 36º 20' = | 9.90611 |
| sen 2º = 8.54282......... | | 8.54282 |
| sen x = 8.44986......... | | 8.44893 |
| 1º 36' 52'' | | 1º 36' 38'' |
| cos 36º 30' = 9.90518......... | 36º 40' = | 9.90424 |
| sen 2º = 8.54282......... | | 8.54282 |
| sen x = 8.44800......... | | 8.44706 |
| 1º 36' 28'' | | 1º 36' 14'' |

$\cos 36^\circ 50' = 9.99330 \ldots\ldots\ldots 37^\circ 00' = 9.90235$

$\text{sen } 2^\circ = 8.54282 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.54282$

$\text{sen } x = 8.44612 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.44517$

$1^\circ 36' 03'' \qquad 1^\circ 35' 48''$

$$\omega = 3^\circ$$

$$\text{cotg } (\varphi + y) = \text{cotg } 36^\circ 10' \cos 2^\circ$$

$\text{cotg } 36^\circ 10' = 0.13608 \ldots\ldots\ldots 36^\circ 20' = 0.13344$

$\cos 3^\circ = 9.99940 \ldots\ldots\ldots \qquad 9.99940$

$\log \text{cotg} = 0.13548 \ldots\ldots\ldots \qquad 0.13284$

$36^\circ 13' 16'' \qquad 36^\circ 23' 19''$

$\text{cotg } 36^\circ 30' = 0.13079 \ldots\ldots\ldots 36^\circ 40' = 0.12815$

$\cos 3^\circ = 9.99940 \ldots\ldots\ldots \qquad 9.99940$

$\log \text{cotg} = 0.13019 \ldots\ldots\ldots \qquad 0.12755$

$36^\circ 33' 42'' \qquad 36^\circ 43' 43''$

$\text{cotg } 36^\circ 50' = 0.12552 \ldots\ldots\ldots 37^\circ 00' = 0.12289$

$\cos 3^\circ = 9.99940 \ldots\ldots\ldots \qquad 9.99940$

$\log \text{cotg} = 0.12492 \ldots\ldots\ldots \qquad 0.12229$

$36^\circ 53' 43'' \qquad 37^\circ 03' 43''$

$$\text{sen } x = \cos 36^\circ 10' \text{ sen } 2^\circ$$

$\cos 36^\circ 10' = 9.90704 \ldots\ldots\ldots 36^\circ 20' = 9.90611$

$\text{sen } 3^\circ = 8.71880 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.71880$

$\text{sen } x = 8.62584 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.62491$

$2^\circ 25' 18'' \qquad 2^\circ 24' 55''$

$\cos 36^\circ 30' = 9.90518 \ldots\ldots\ldots 36^\circ 40' = 9.90424$

$\text{sen } 3^\circ = 8.71880 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.71880$

$\text{sen } x = 8.62398 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.62304$

$2^\circ 24' 39'' \qquad 2^\circ 24' 21''$

$\cos 36^\circ 50' = 9.90330 \ldots\ldots\ldots 37^\circ 00' = 9.90235$

$\text{sen } 3^\circ = 8.71880 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.71880$

$\text{sen } x = 8.62210 \ldots\ldots\ldots \qquad 8.62115$

$2^\circ 24' 02'' \qquad 2^\circ 23' 43''$

$$\varphi = 35\,,\ \omega = 2^\circ$$

| | |
|---|---|
| cotg 35° = 0.15477 | cos 35° = 9.91338 |
| cos 2° = 9.99974 | sen 2° = 8.54282 |
| cotg = 0.15451 | sen = 8.45620 |
| 35° 01' 02'' | 1° 38' 18'' |

Calculadas así las coordenadas de cada punto de un paralelo, y reducidas las diferencias de segundos á metros por, $a_m = a'' \text{ N sin } 1''$, puede formarse un cuadro de coordenadas como el siguiente, que es para el meridiano 2.°:

| | y | x | diferencia |
|---|---|---|---|
| Para 35° 00' | 35° 01' 00'' | 1° 38' 00'' | |
| » 36° 10' | 36° 11' 00'' | 1° 36' 52'' | 0° 1' 18'' = 68'' = 2108m |
| » 36° 20' | 36° 21' 03'' | 1° 36' 38'' | 0° 1' 22'' = 88'' = 2728m |
| » 36° 30' | 36° 31' 00'' | 1° 36' 28'' | 0° 1' 32'' = 92'' = 2852m |
| » 36° 40' | 36° 41' 00'' | 1° 36' 14'' | 0° 1' 46'' = 106'' = 3286m |
| » 36° 50' | 36° 51' 03'' | 1° 36' 03'' | 0° 1' 57'' = 117'' = 3427m |
| » 37° 00' | 37° 01' 03'' | 1° 35' 48'' | 0° 2' 12'' = 132'' = 4092m |

### Proyección cilíndrica ortomorfa «Lambert»

En esta proyección se adopta el meridiano central como círculo de tangencia del cilindro. En su consecuencia el dicho meridiano se encontrará desarrollado en línea recta y sus divisiones serán iguales á las de la esfera. En cuanto á los paralelos de latitud serán representados por arcos de círculos que se fijarán por sus coordenadas.

Por su condición de conservar á las figuras sus ángulos y similitud, esta proyección se hace muy recomendable para la representación de un país que ocupa mucha extensión de Norte á Sud sobre el meridiano y pocos grados de longitud á uno y otro lado del central.

Para la construcción del mapa se traza una línea recta que represente el meridiano central y otra línea perpendicular á la anterior representando el Ecuador ó una línea paralela á él pasando por el punto de latitud extrema del mapa (sea la latitud más próxima del Ecuador). La primera será el eje de las $y$, y se dividirá en partes iguales á la extensión de los correspondientes grados de latitud; la segunda será el eje de las $x$. Todas las $y$ son contadas, como senos de latitud, desde el Ecuador. Para el trazado de los arcos de paralelo, como no puede hacerse uso del radio, que siempre resulta muy largo, hay que calcular las coordenadas de los puntos de intersección de cada paralelo con los meridianos y fracciones de ellos, para luego reunir por una línea contínua los puntos así marcados.

La proyección siendo simétrica con relación al meridiano central, las coordenadas calculadas para puntos al Este, serán iguales para los puntos al Oeste.

Las fórmulas aplicables á estos cálculos de coordenadas son

$$x = \frac{a}{2\,M} \log. \frac{1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\varphi \operatorname{sen}\omega} = E\ [0.0611857]\ \log \frac{1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}$$

$$y = \frac{E}{R^{o}} \text{ arco tang } \frac{\tan\varphi}{\cos\omega}$$

$E$ representa el radio de curvatura de la región media de la proyección y se halla determinado en función de la normal media $\sqrt{\rho\rho'}$ y al radio terrestre a de manera que multiplicando su valor por el coeficiente de la escala adoptada por el mapa

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{500.000}, = \frac{1}{100.000}$$

se tendrá su valor reducido á la escala; será pues

$$E = \frac{a \sqrt{\rho\rho'}}{n}$$

La cantidad entre paréntesis es una constante logarítmica que representa

$$\log \frac{1}{2\,M}$$

El radio de curvatura de los paralelos que deben trazarse sobre el plano tiene por expresión

$$R = E \operatorname{cotg} \varphi$$

Como ejemplo de cálculo puede aplicarse lo que precede á la construcción de la proyección de un mapa de la Argentina adoptando como en el *plano Catastral,* el meridiano 5° como Central y el paralelo 35 como medio, siendo sus extremos el 22° y el 56°

Siendo el paralelo extremo Norte del mencionado plano el 22°, se tendrá, aplicando las precedentes fórmulas, para ese paralelo medio y meridiano central.

Cálculo de E y $\frac{E}{R_0}$ para los paralelos 22° y 35° siendo la escala del plano $\frac{1}{500.000} = \frac{1}{n}$ y adoptando para

| | | |
|---|---|---|
| a (radio ecuatorial) | 6.378.339m, | log = 6.804.707 |
| R° » » en grados | = 57°,2958 | log = 1.758.123 |

$$E = \frac{\sqrt{\rho\rho'}\,a}{n}$$

| Para el 22° | Para el 35° |
| --- | --- |
| $\log \sqrt{\rho\rho'} = 9.999127$ | $9.999489$ |
| $+ \log a = 6.804707$ | $\log a = 6.804707$ |
| $6.803834$ | $6.804196$ |
| $- \log n = 5.698970$ | $+ \log n = 5.698970$ |
| $\log E = 1.104864$ | $\log E = 1.105226$ |
| radio $E = 12^m\,731$ | $-$ radio $E = 12^m\,741$ |
| $\log E = 1.104864$ | $\log E = 1.105226$ |
| $- \log R_o = 1.758115$ | $- \log R_o = 1.758115$ |
| $\log \frac{E}{R^o} = 9.346749$ | $\log \frac{E}{R_o} = 9.347111$ |

Radio del plano

$$
\begin{aligned}
R &= E \cot g\, \varphi \\
\log E &= 1.105226 \\
\log \cot g\, 35^o &= 0.154773 \\
&\overline{1.259999} \\
R &= 18,197
\end{aligned}
$$

la imposibilidad de emplear en el dibujo, un tal radio, demuestra la necesidad de fijar por coordenadas los paralelos, calculando estas por fracciones de grado.

Cálculo de la fórmula $x = E\,[0.061186]\ \log \dfrac{1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{1 - \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}$ para el ángulo $\omega = 1.^o, 2.^o, 3.^o$ y $4.^o$ y paralelo $\varphi = 35^o$.

$$
\begin{aligned}
\log \cos\varphi &= 9.913364 \\
\log \operatorname{sen}\omega\ 1.^o &= 8.241855 \\
\log \text{número} &= 8.155219 \\
\cos\varphi \operatorname{sen}\omega &= 0.01429
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1 + \cos\omega \operatorname{sen}\varphi) &= 1.01429 \ldots\ \log = 0.006162 \\
-(1 - \cos\varphi \operatorname{sen}\omega) &= 0.98571 \ldots\ \log = 9.993749 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{0.012413}
\end{aligned}
$$

$$\log \cos \varphi = 9.913364$$
$$\log \text{sen } 2.^{\circ} = \underline{8.542819}$$
$$\log \text{número} = 8.456183$$

$$\cos \varphi \text{ sen } \omega = 0.028588$$
$$(1 + \cos \varphi \text{ sen } \omega) = 1.02859 \ldots .\ 0.012242$$
$$-(1 - \cos \varphi \text{ son } \omega) = 0.97141 \ldots .\ \underline{9.987403}$$
$$0.024839$$

| | |
|---|---|
| $\log 0.012413 = 8.093877$ | $\log 0.024839 = 8.395134$ |
| $+ \log \text{constante} = 0.061186$ | $+ \log \text{constante} = 0.061186$ |
| $+ \log E_{35} = 1.105226$ | $+ \log E = 1.105226$ |
| $\log x = 9.260289$ | $\log x = 9.561546$ |
| $x = 0^{m},18209$ | $x = 0^{m},36437$ |
| con $\omega = 3.^{\circ}$ resulta | con $\omega = 4.^{\circ}$ resulta |
| $x = 0^{m},\ 54656$ | $x = 0^{m},\ 72921$ |

Calculados los valores de $x$ para el paralelo 22° resulta la siguiente comparación con el 35°:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x = 22^{\circ}$ ..... | $x_1 = 0.20624$ ... | $x_2 = 0.41238$ ... | $x_3 = 0.61852$ .. | $x_4 = 0.82468$ |
| $x = 35^{\circ}$ ..... | $x_1 = 0.18209$ .. | $x_2 = 0.36437$ ... | $x_3 = 0.54656$ ... | $x_4 = 0.72921$ |
| | 0 02415 | 0.04801 | 0.07196 | 0.09547 |

Diferencias que se miden sobre la perpendicular al meridiano y que combinadas con el valor de las $y$ fijan los puntos de intersección de los paralelos y meridianos.

Cálculo de la fórmula $\quad y = \dfrac{E}{R_0} \text{ arco tang} \left( \dfrac{\text{tang } \varphi}{\cos \ \omega} \right)$

para el paralelo 22° con $\omega = 1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}$ y $4^{\circ}$

y ,, ,, ,, 35° con $\omega = 1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}$ y $4^{\circ}$

| para el 22° | para el 35° |
|---|---|
| $\log \text{tang } 22^{\circ} = 9.606409$ | $\log \text{tang } 35^{\circ} = 9.845227$ |
| $-\log \cos 1^{\circ} = 9.999934$ | $-\text{los} \cos 1^{\circ} = 9.999934$ |
| $\log \text{tang} = 9.606475$ | $\log \text{tang} = 9.845293$ |
| $\text{arco} = 22^{\circ}0'16'' = 22^{\circ},0044$ | $\text{arco} = 35^{\circ}0'14'' = 35,0038$ |
| $\log 22^{\circ},0044 = 1.342502$ | $\log 35,0038 = 1.544117$ |
| $+\log \dfrac{E}{R_0} = 9.346749$ | $\log \dfrac{E}{R} = 9.347111$ |
| $\log y = 0.689251$ | $\log y = 0.891229$ |
| $y_1 = \ \ 4.8893$ | $y_1 = 7.7844$ |

$\log \tan 22^\circ = 9.606409$
$-\log \cos 2^\circ = 9.999735$
$\log \tan = 9.606674$
$\text{arco} = 22^\circ 0'55'' = 22^\circ, 0152$
$\log 22^\circ, 0152 = 1.342719$
$\log \frac{E}{R} = 9.346749$
$\log y = 0.689468$
$y_2 = 4.8918$

$\log \tan 22^\circ = 9.606409$
$-\log \cos 3^\circ = 9.999404$
$\log \tan = 9.607005$
$\text{arco} = 22^\circ 01'33'' = 22^\circ, 0256$
$\log 22^\circ, 0256 = 1.342916$
$\log \frac{E}{R} = 9.346749$
$\log y = 0.689665$
$y_3 = 4.8948$

$\log \tan 22^\circ = 9.606409$
$-\log \cos 4^\circ = 9.998941$
$\log \tan = 9.607468$
$\text{arco} = 22^\circ 02'55'' = 22, 0485$
$\log 22^\circ, 0485 = 1.343369$
$\log \frac{E}{R} = 9.346749$
$\log y = 0.690118$
$y = 4.8990$

$\log \tan 35^\circ = 9.845227$
$-\log \cos 2^\circ = 9.999735$
$\log \tan = 9.845492$
$\text{arco} = 35^\circ\ 0'\ 57''$
$\log 35,0157 = 1.544266$
$\log \frac{E}{R} = 9.347111$
$\log y = 0.891377$
$y_2 = 7.7871$

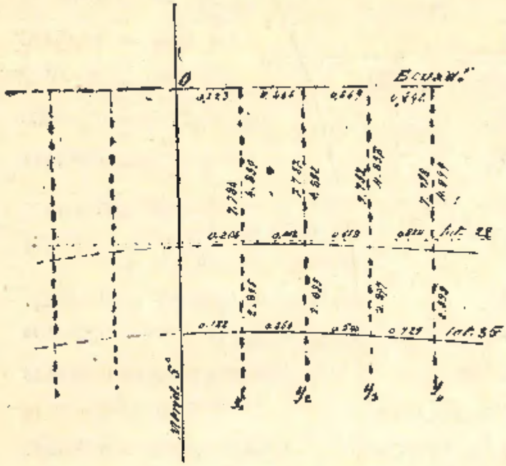
$\log \tan 35^\circ = 9.845227$
$-\log \cos 3^\circ = 9.999404$
$\log \tan = 9.845823$
$\text{arco} = 35^\circ\ 2'\ 15''$
$\log 35,0374 = 1.544527$
$\log \frac{E}{R} = 9.347111$
$\log y = 0.891638$
$y_3 = 7.7918$

$\log \tan 35^\circ = 9.845227$
$\log \cos 4^\circ = 9.998941$
$-\log \tan = 9.846286$
$\text{arco} = 35^\circ\ 3'\ 56''$
$\log 35,0653 = 1.544874$
$\log \frac{E}{R} = 9.347111$
$\log y = 0.891985$
$y_4 = 7.7980$

Diferencia entre los valores de y para 22° y para 35°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| para $35^\circ = y_0$ | $y_1 = 7.784$ | $y_2 = 7.787$ | $y_3 = 7.792$ | $y_4 = 7.798$ |
| » $22^\circ = y_0$ | $y_1 = 4.889$ | $y_2 = 4.892$ | $y_3 = 4.895$ | $y_4 = 4.899$ |
| | $y_1' = 2.895$ | $y_2' = 2.895$ | $y_3' = 2.897$ | $y_4' = 2.899$ |

Como se vé en el principio del cálculo que precede, el plano á construirse tendrá como paralelo medio el 35° y como paralelo límite Norte el 22°; así pues, el cálculo da



para $y$ la distancia que desde el Ecuador debe contarse, de manera que para fijar los puntos de cada paralelo habrá que restar del valor de $y_{35}$, el de $y$ del paralelo que se establece al Norte del del medio y para los del Sud restar el valor de $y_{35}$ del de $y$ del paralelo á establecer. Se conocerá así el espacio entre cada paralelo.

Para trazar la red de meridianos y paralelos, en el plano, se empezará pues, por trazar el meridiano central y señalar sobre éste, á la escala adoptada, al largo de cada grado de latitud; luego se trazan por esos puntos líneas perpendiculares al meridiano y empezando por la que corresponde al paralelo extremo (en este caso es el 22°) se miden las $x$ y las $y$ calculadas para cada paralelo trazándose estos por los puntos marcados.

Máximos de deformación:

$$\text{aumento de superficie.... } m^2 = \frac{1}{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \omega}$$

$$\text{» lineal........ } m = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \omega}}$$

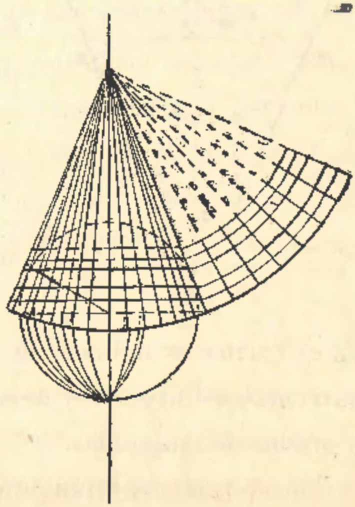
Los ángulos son conservados en su verdadero valor.

## Proyecciones Cónicas

Si en vez de un cilindro, se imagina un *cono recto* tangente al esferoide, en el paralelo medio de la zona que se quiere representar en proyección sobre un plano, se obtendrá un resultado más exacto que con las proyecciones cilíndricas.

Adoptado el paralelo central de la zona que debe representarse en proyección imaginaremos una tangente á ese paralelo la que prolongada hasta encontrar el eje de los polos servirá, en esa posición, de generatriz al cono tangente á la esfera, y sobre el cual se calculará la proyección de los meridianos y paralelos.

En esta proyección los meridianos resultarán ser representados por líneas rectas equidistantes y convergentes al vértice S del cono, en cuanto á los paralelos, serán arcos concéntricos trazados con el radio S A del vértice al paralelo.

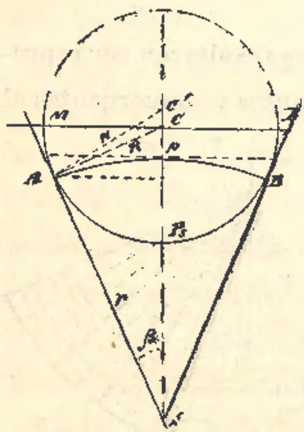


Generalmente el mapa que se debe construir comprende solo una zona determinada por un corto número de meridianos y paralelos, así que será fácil establecer la relación existente entre el desarrollo de esa parte de la superficie terrestre y su proyección sobre el cono.

Sea n el número de grados de longitud que debe abarcar la proyección y A B el paralelo central ó de tangencia. El meridiano central S C P será representado por una línea recta que servirá de base á toda la construcción.

El desarrollo del arco A B que comprende n grados, deberá tener á la escala adoptada, el mismo número de metros ó largo que tiene efectivamente sobre la esfera, así que los puntos por los cuales pasarán los meridianos serán equidistantes.

Los paralelos serán arcos descritos desde el vértice S con un radio S A que variará según la latitud y que tendrá por expresión fundamental.



$$R = S\,A = N \cot \varphi, \qquad ó$$

$$N \operatorname{tang} (90 - \varphi).$$

Sea A B el arco del paralelo central ó de tangencia, cuya latitud $\varphi =$ arco M A.

A C = radio terrestre que pasa por el paralelo.

A C' = N, normal del paralelo en A.

A S B será el ángulo formado en el vértice S del cono de proyección, por las tangentes extremas del arco A B de n grados, ó sea el desarrollo de n grados de longitud $\omega$.

Considerando el triángulo rectángulo C' A S se deduce

$$1 : \tan (90 - \varphi) :: N : A\,S$$

de donde

$$A\,S = N \tan (90 - \varphi)$$

ó sea la expresión general

$$r = A\,S = N \operatorname{cotang} \varphi$$

El desarrollo del arco A B de n grados dará la medida del ángulo A S B, empleándose solo su mitad $\beta$ por la simetría de la construcción. Esta será expresada por

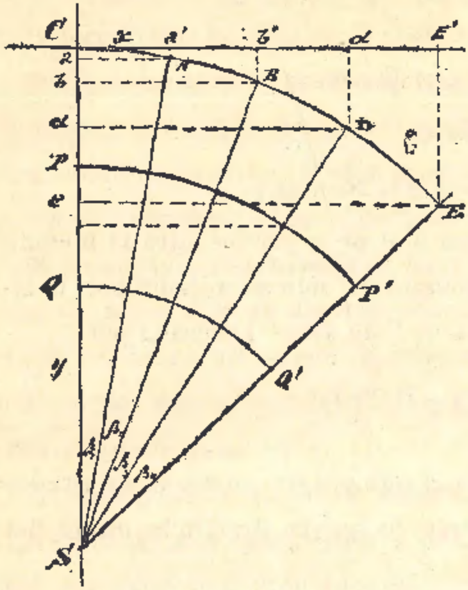
$$\beta = \frac{N \cos \varphi}{r} n$$

en la que n representa el número de partes (sean grados ó medios grados) en que se quiere dividir la mitad del arco A B.

Como es fácil comprender, cualquiera que sea la escala adoptada para el plano, el radio S A será demasiado grande para hacer uso de él en el trazado de los arcos de paralelo, habrá, pues, que calcular las coordenadas de las intersecciones de meridianos y paralelos tomando como ejes de coordenadas, el meridiano central y la perpendicular trazada por el punto p donde el meridiano corta al paralelo central A B. Deducidas estas coordenadas del triángulo rectángulo con el ángulo $\beta$ tendrán por expresión

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen} \beta \\ y = r \cos \beta \end{array}\right\} 1$$

Sea C A B D E el arco de paralelo 35° dividido en 4 partes ó grados, tratándose ahora de calcular las coordenadas x, y para construir en el plano la respectiva



curva, cuyo radio es

$$r = N \cot \varphi = 6.384401 \cot 35^\circ$$

Este radio varía según la latitud, ó simplemente sumando ó restando al radio central r, el número de metros que corresponda á la distancia C P, C Q, etc., según el arco se encuentre respectivamente al Norte ó al Sud del paralelo central.

El valor del ángulo β será según corresponda á la división C A, C B, C D ó C E. Teniendo el valor de

$$r = N \cot \varphi = \log 6.384401 + \log \cot 35^\circ = 9.117.868 \text{ metros}$$
$$r = 9.117.868 \text{ metros}$$

y calculando préviamente la parte constante

$$\log \left(\frac{N \cos \varphi}{r}\right) = \log 6.384401 + \log \cos 35^\circ + \text{c.} \log 9.117868 = \log m = 9.7585913$$

se tiene

$$\beta_1 = \log m + \log 1 = 9.7585913 + 0.0000000 = 9.7585913 = 0{,}5735 = 0^\circ\ 34'\ 25''$$
$$\beta_2 = \log m + \log 2 = 0.7585913 + 0.3010300 = 0.0596213 = 1{,}1471 = 1^\circ\ 08'\ 56''$$
$$\beta_3 = \log m + \log 3 = 9.7585913 + 0.4771212 = 0.2357125 = 1{,}7207 = 1^\circ\ 43'\ 15''$$
$$\beta_4 = \log m + \log 4 = 9.7585913 + 0.6020599 = 0.3606512 = 2{,}2943 = 2^\circ\ 17'\ 40''$$

Cálculo de $x = r \operatorname{sen} \beta$

$$x_1 = \log 9.117868 + \log \operatorname{sen} 0^\circ\ 34'\ 25'' = 89.203^m$$
$$x_2 = \log 9.117868 + \log \operatorname{sen} 1^\circ\ 08'\ 54'' = 182.553^m$$
$$x_3 = \log 9.117868 + \log \operatorname{sen} 1^\circ\ 43'\ 15'' = 273.807^m$$
$$x_4 = \log 9.117868 + \log \operatorname{sen} 2^\circ\ 17'\ 40'' = 365.035^m$$

Cálculo de $y = r \cos \beta$

$$y_1 = \log 9.117868 + \log \cos 0^\circ\ 34'\ 25'' = 9.117401$$

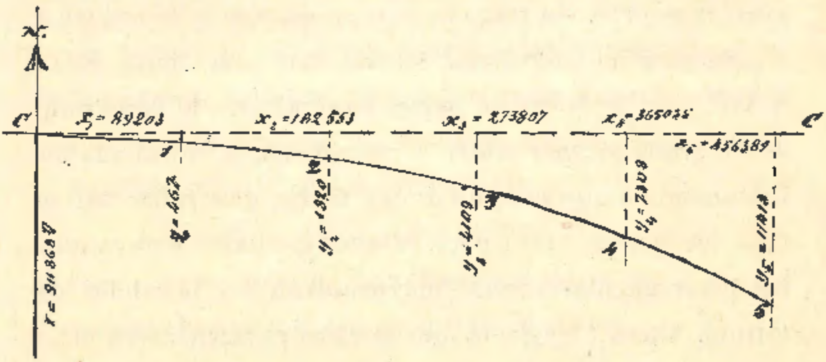
$$y_2 = \log 9.117868 + \log \cos 1^\circ\ 08'\ 25'' = 9.116042$$

$$y_3 = \log 9.117868 + \log \cos 1^\circ\ 43'\ 15'' = 9.103759$$

$$y_4 = \log 9.117868 + \log \cos 2^\circ\ 17'\ 40'' = 9.110560$$

siendo $$y_0 = r = 9.117868.$$

Siguiendo este mismo orden, se calculará para cada uno de los paralelos las coordenadas de las referidas intersecciones, y luego las de las fracciones de grado si se quiere hacer figurar la división de 20 en 20 minutos ú otra, lo que á su vez facilitará el trazado de la curva que debe representar el paralelo.




En las tablas que acompañan casi todos los tratados de Geodesia se hallan en metros el valor de los minutos ó grados de cada paralelo ó meridiano, lo que á su vez facilitará los cálculos en general.

Esta proyección es la que se ha adoptado en el Estado Mayor de Francia para la construcción del mapa general.

La fijación de las localidades, estaciones trigonométricas etc., sobre el mapa puede hacerse: ya por la simple intersección de sus coordenadas geográficas, ya calculando las coordenadas rectangulares x y por las fórmulas anteriores, considerando cada punto como se ha considerado una intersección de meridiano y paralelo, pues que para cada localidad se conoce la latitud y la longitud, ó sean los elementos para deducir el ángulo β.

## Proyección de Flamsteed

Es esta proyección la primera modificación de la proyección cónica. Su trazado es muy sencillo y se reduce á representar el meridiano central por una línea recta S A B, que se divide en partes equivalentes al desarrollo de un grado de meridiano, y cantidad que se calcula directamente ó que se toma de las tablas generales; así se fijan los puntos r s t p q... desde los cuales se levantan las perpendiculares que representarán los paralelos de latitud. Ahora bien, cada uno de estos paralelos será dividido en partes iguales al desarrollo de un grado correspondiente á esa latitud, cantidad que también se calcula ó se toma de las tablas, y así se fijan los puntos a b c d e f... de cada paralelo, ó los puntos a m n o... de cada meridiano sobre los paralelos sucesivos, de manera que ligando después los puntos a m n o... por una curva que pasará por ellos, se tienen trazados los meridianos simétricamente distanciados del meridiano central. Esta construcción es, pues, la más sencilla. Debido á la curvatura que afecta cada meridiano en esta proyección, se le suele llamar también *Sinusoidal*.

En su orígen esta proyección fué calculada tomando por ejes de coordenadas el Ecuador y meridiano central; partiendo de esa base, puede adoptarse un grado de Ecuador como unidad, dividiéndole, por ejemplo, en 1.000 partes iguales, lo que servirá de escala; de igual manera podrán deducirse las coordenadas de cada intersección de meridiano y paralelo por estas fórmulas:

$$y = \frac{\pi}{180} R \sin \varphi, \qquad \text{ó más bien} \qquad y = \frac{\pi}{180} N \sin \varphi$$

$$x = \frac{\pi\, \omega}{360} R \cos \varphi, \qquad \text{ó sea} \qquad x = \frac{\pi\, \omega}{360} N \cos \varphi.$$

La diferencia entre dos coordenadas consecutivas relacionadas al Ecuador, dará la distancia á fijarse sobre el plano para dos intersecciones consecutivas.

También resulta de los cálculos que:

$$1 \text{ grado de paralelo} = 1 \text{ grado de Ecuador} \times \cos \varphi.$$

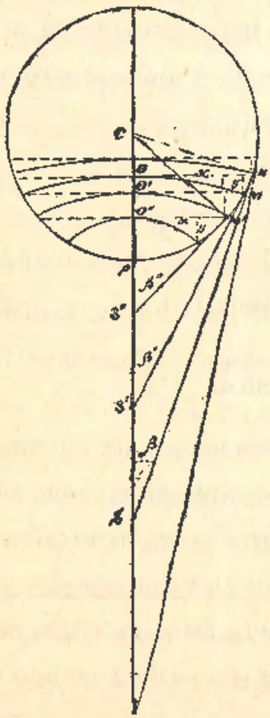
Esta proyeccción no conviene adoptarse para mapas que comprendan muchos grados de longitud.

## Proyecciones Policónicas

Esta proyección, que es la adoptada por la Oficina Hidrográfica de los Estados Unidos, es aplicable, como todas las proyecciones cónicas, á la representación de países ó estados que midan muchos grados de latitud y pocos de longitud. Para mantener la más exacta relación entre las dimensiones de los arcos de meridiano ó de paralelo y los ángulos que hacen entre ellos, se considera la tangencia del cono en varios paralelos, y aun en cada uno, de manera que para cada paralelo representado por un arco de círculo, el radio varía en relación á la cotangente de la latitud $\varphi$. Se trata, pues, de una sucesión de conos que tienen todos su vértice sobre el meridiano central.

Por lo tanto, establecidos los paralelos y sobre cada uno de ellos el desarrollo de cada grado de longitud, quedarán asi fijados los puntos de un mismo meridiano, que una vez trazado sobre el plano será representado por una línea curva.

Llamando M un punto del paralelo de latitud $\varphi$, cuya longitud, ó más bien, distancia al meridiano central es $\omega$, se tendrá para el radio $S\,A = r$ y ángulo $\beta$ del vértice en función de la normal N del paralelo.



arco $O\,M = \omega\ N \cos\varphi = \beta\ N \operatorname{cotang}\varphi$

ángulo $\beta = \omega \operatorname{sen}\varphi$, $\quad r = N \operatorname{cotg}\varphi$.

Así mismo las coordenadas rectangulares de cada punto M serán dadas por las fórmulas

$$O\,M = x = \frac{N \operatorname{cotg}\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen}\beta$$

$$N\,M = y = \frac{2\,N \operatorname{cotg}\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

Conocidos estos elementos, puede procederse á la construcción del mapa, trazando en primer lugar el meridiano central, sobre el cual se miden los grados en su verdadera dimensión. Por cada punto de división se levantarán las perpendiculares sobre las cuales deben medirse las ordenadas de los puntos de intersección correspondientes á ese paralelo, y los meridianos que lo cortan. Por demás será recordar que esas coordenadas son simétricas con relación al meridiano central.

En la proyección policónica rectangular, el primer meridiano y el Ecuador son representados por dos rectas perpendiculares, divididas respectivamente al tamaño natural de los grados que representan. Cada paralelo es representado por un arco de círculo cuyo centro se halla sobre la prolongación del meridiano central y su radio es el de la generatriz del cono circunscrito según dicho paralelo.

Si ahora se divide cada paralelo por el valor respectivo de sus grados, el trazado de los meridianos responderá á líneas ortogonales ligando dichos puntos.

En la proyección policónica ordinaria, el primer meridiano se desarrolla en tamaño verdadero según una línea recta. Los paralelos y demás meridianos se trazan como en la anterior.

Para el trazado de cada paralelo sobre el mapa debe recordarse que el radio es: $R = N \operatorname{cotg} \varphi \qquad (1)$

Pero como, según la escala adoptada, ese radio no podrá emplearse para la construcción gráfica, conviene calcular las coordenadas de cada punto á situarse, ó intersección de meridianos en el paralelo á trazarse.

Considerando, pues, la abcisa X medida sobre la perpendicular al meridiano central ya trazada en el plano, y llamando Y la ordenada que deberá medirse en el extremo de la X, se tiene para sus valores:

$$X = R \operatorname{sen} \theta$$

$$Y = 2\ R \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta \quad \text{(medido en dirección al polo del mapa).}$$

En estas fórmulas se tiene:

R = radio de curvatura del paralelo á trazarse y determinado por la fórmula (1).

θ = ángulo formado en el vértice del cono por el arco n, que representa la distancia en grados ó minutos desde el punto hasta el meridiano central, ó también la diferencia de longitud del meridiano central á un meridiano á fijar.

El ángulo tiene por valor:

$$\theta = n \operatorname{sen} \varphi.$$

Con estas fórmulas se han calculado tablas especiales para la construcción de esta proyección policónica, siendo la más completa de ellas la publicada por *U. S. coast and Geodetic Survey.*

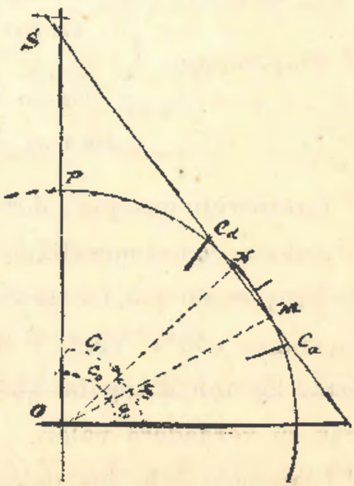
Disponiendo de estas tablas, la construcción de la red geográfica sobre el mapa es operación muy sencilla. Trazado el meridiano central, se le divide, según la escala, en partes iguales al tamaño natural de cada grado meridiano; luego, en cada uno de esos puntos se levantan perpendiculares sobre las cuales se miden los valores sucesivos de X, dados por las tablas, y en cada punto señalado sobre las diferentes perpendiculares, se miden las ordenadas Y. Finalmente, se ligan entre sí: primero los puntos fijados para cada paralelo, los que por su proximidad demarcarán la curvatura del paralelo, y en segundo lugar los puntos que determinan los meridianos, que sufrirán una ligera curvatura convergente hacia el vértice del cono.

### Proyección cónica ortomorfa de Lambert

En este sistema se han modificado un poco las fórmulas generales que anteceden, consiguiéndose conservar la semejanza de las figuras, y por consiguiente, la igualdad de los ángulos.

Para esta proyección, es preferible considerar el cono secante á la esfera, cortándola por dos paralelos equidistantes del central adoptado y dividiendo así el espacio comprendido entre los paralelos extremos del mapa que se quiere construir en tres partes iguales.

En el desarrollo de la proyección, los meridianos se hallan representados por líneas rectas convergentes al vértice S, y los paralelos por arcos de círculos con su centro en el mismo vértice S.



*Elementos del cálculo*

M y N paralelos por los cuales pasa la secante.

$C_0$ y $C_1$ = colatitudes de $\varphi_0$ y $\varphi_1$.

$C_0'$ y $C_1'$ = distancia al polo corregida del aplanamiento.

$C_a$ y $C_d$ = paralelos extremos del mapa
S = extensión en metros del arco $C_a$ $C_d$ del meridiano
b = exponente de la proyección
R = radio del mapa para cada paralelo
n = denominador de la escala del plano

En la proyección cónica el exponente b, relación constante entre la longitud de la proyección y las del original, debe ser inferior á la unidad, sea $b < 1$.

*Ecuaciones de la proyección*

$$(1) \quad C' = C_0 + \frac{e^2}{1 - e^2} \; \frac{\operatorname{sen} 2\,C}{\operatorname{sen} 1''} \qquad (2) \quad R = K \operatorname{tang}^b \frac{C'}{2}$$

$$(3) \quad K = \frac{S}{n \left( \operatorname{tang}^b \frac{C'_a}{2} - \operatorname{tang}^b \frac{C'_d}{2} \right)};$$

ó simplemente

$$K = \frac{1}{\operatorname{sen} \left( \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)}$$

$$b = \frac{\log \operatorname{sen} C_1 - \frac{1}{2} \log (1 - e^2 \cos C_1) - \log \operatorname{sen} C_0 + \frac{1}{2} \log (1 - e^2 \cos^2 C_0)}{\log \operatorname{tang} \frac{C_1'}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{C_0'}{2}}$$

ó simplemente

$$b = \frac{\log \operatorname{sen} C_1 - \log \operatorname{sen} C_0}{\log \operatorname{tang} \frac{C_1}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{C_0}{2}}$$

Los meridianos que sobre la esfera forman en el polo ángulos $\omega$ con el meridiano central, son representados en la proyección por rectas convergentes en el vértice S, y formando con la recta S A ángulos iguales á $b\,\omega$: son estos los únicos ángulos que en la proyección no conservan su verdadero valor.

Llamando R $R_1$ los radios de los paralelos de latitud

$\varphi\ \varphi_1$ ó de colatitud $C = 90 - \varphi$, $C = 90 - \varphi_1$, se tendrá para valor de ese radio:

$$R = \text{tang}^b \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) = \text{tang}^b \left(\frac{C}{2}\right)$$

ó también

$$R = K \ \text{tang}^b \left(\frac{C}{2}\right)$$

siendo K el coeficiente que fija la escala del plano, dada arbitrariamente ó llenando una condición determinada.

Llamando $\alpha$ el ángulo formado en S por los meridianos extremos de la carta, los radios correspondientes á las latitudes $\varphi$ y $\varphi'$ serán respectivamente:

$$\frac{R\ \pi\ \alpha}{180} = 2\ R\ \pi \ \text{sen}\ C$$

$$\frac{R_1\ \pi\ \alpha}{180} = 2\ R\ \pi \ \text{sen}\ C_1$$

Dividiendo estos dos valores término á término, resulta:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\text{sen}\ C}{\text{sen}\ C_1}$$

y substituyendo R y $R_1$ por sus respectivos valores

$$\frac{\text{sen}\ C}{\text{sen}\ C_1} = \frac{\text{tang}^b \left(\frac{C}{2}\right)}{\text{tang}^b \left(\frac{C_1}{2}\right)} = \left(\frac{\text{tang}\ \frac{C}{2}}{\text{tang}\ \frac{C_1}{2}}\right)^b$$

y bajo forma logarítmica

$$\log \text{sen}\ C - \log \text{sen}\ C_1 = b\ (\log \text{tang}\ \frac{C}{2} - \log \text{tang}\ \frac{C_1}{2}$$

sea

$$b = \frac{\log \text{sen}\ C - \log \text{sen}\ C_1}{\log \text{tang}\ \frac{C}{2} - \log \text{tang}\ \frac{C_1}{2}} \qquad (a)$$

Introduciendo en esta fórmula los elementos necesarios para reducirla al esferoide, aquella se convertirá en la siguiente:

$$b = \frac{\log \text{sen}^2\ C_1 - \frac{1}{2} \log (1 - e^2 \cos C_1) - \log \text{sen}\ C + \frac{1}{2} \log (1 - e^2 \cos C)}{\log \text{tang}\ \frac{C_1'}{2} - \log \text{tang}\ \frac{C'}{2}}$$

El valor del exponente b es arbitrario y se determina de manera á satisfacer otra condición; así el valor dado por la fórmula (a) satisface á la condición de mantener entre los grados de los dos paralelos

$$\varphi = 90 - C \quad y \quad \varphi_1 = 90 - C_1$$

la misma relación que sobre la esfera.

Suponiendo que los paralelos extremos fueran

$$\varphi_1 = 30^o \quad y \quad \varphi = 70$$

sería $\qquad C = 20^o,\ C_1 = 60^o$

y resultaría $\qquad b = 0.78327$

lo que indica que el ángulo formado en el polo por los meridianos, extremos, sea 1° 10° serían sobre el plano representados por

$$b\ \omega = 10^o \times 0{,}78 = 7^o\ 48'$$

También se puede determinar b para satisfacer á la condición de que el agrandamiento *sea mínimo* para todos los puntos de un paralelo de latitud $\varphi = 90 - C$, se tendrá

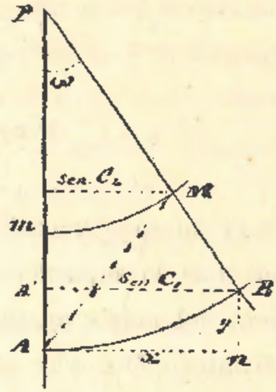
$$b = \cos C = \operatorname{sen} \varphi$$

tomando para $\varphi$ el paralelo medio de la proyección.

Haciendo $k = 1$ sea el radio del Ecuador de la carta tomado por unidad y la tierra esférica, se obtiene para b los siguientes valores con $C = 90^o - \varphi$

| | C | $b = \frac{1}{3}$ | $b = \frac{1}{2}$ | $b = \frac{2}{3}$ | $b = \frac{3}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi = 60$ | 30° | 0.645 | 0.518 | 0.416 | 0.3724 |
| 50 | 40° | 0.714 | 0.603 | 0.510 | 0.4686 |
| 40 | 50° | 0.776 | 0.683 | 0.601 | 0.5643 |
| 30 | 60° | 0.833 | 0.760 | 0.693 | 0.6623 |
| 20 | 70° | 0.888 | 0.837 | 0.788 | 0.7655 |
| 10 | 80° | 0.943 | 0.916 | 0.890 | 0.8767 |

Con las fórmulas que preceden podrán calcularse todos los elementos para el trazado de la red de coordenadas geográficas, manteniendo la igualdad de sus ángulos mediante la introducción del coeficiente b.




Como el trazado de los paralelos con el radio R, es impracticable en el dibujo, hay que calcular las coordenadas x y rectangulares, adoptando como ejes el meridiano y su perpendicular en el punto del paralelo extremo del plano.

$$P\,A = R = K \text{ tang}^b \frac{C'}{2} \qquad A\,n = x = R_1 \text{ sen } (b\ \omega)$$

$$B\,n = y = R_1 - P\,A' = R_1 - R_1 \cos (b\ \omega) = 2\ R_1 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}\ (b\ \omega)$$

Fórmulas que darán todos los puntos del paralelo de colatitud $C_1$, con sólo hacer variar $\omega$.

Ahora para el paralelo de colatitud $C_2$ estas fórmulas se transforman, así como para los sucesivos paralelos en:

$$R_2 = (\,K \text{ tang}^b\,) \frac{C_2}{2}\ ;$$

la distancia A m que separa los dos paralelos de colatitud $C_1$ $C_2$ equivalente á la que dan las tablas para arcos de meridianos, será también expresada por $R_1 - R_2$

Trasladando el orígen de las x al nuevo punto m, las coordenadas del paralelo de $C'_2$ son:

$$x_2 = R_2 \text{ sen } (b\ \omega)$$
$$y_2 = 2\ R_2 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}\ (b\ \omega)$$

Si se conservara el mismo orígen para las $x$, sea punto A, A las $y$ del paralelo de $C_2$ serían:

$$y_2 = y_1 + 2\,R_2\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,(b\,\omega)$$

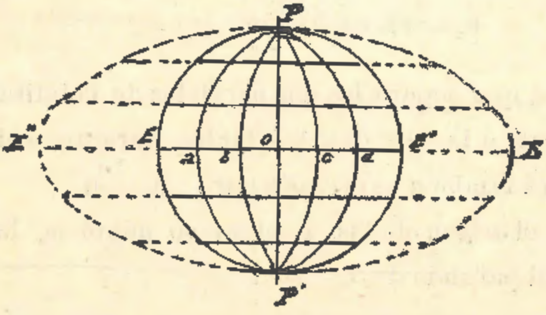
## Proyecciones equivalentes

El objeto principal de estas proyecciones es representar en ellas la superficie de la zona terrestre que hace el objeto del mapa; en su consecuencia, la superficie del cuadrilátero formado sobre el esferóide por dos paralelos y dos meridianos, ha de ser igual á la que encierre el cuadrilátero formado por las mismas líneas proyectadas.

Para la representación de un hemisferio, fácil es, en efecto, trazar un círculo de superficie igual á la de la semi esfera, pues, llamando: $r$ = radio del círculo, $R$ = radio de la esfera, se tiene $\pi r^2 = 2\pi R$, de donde

$$r = R\sqrt{2} = R\,(1.4142).$$

Ahora, si sobre ese círculo se traza el meridiano central P' P y el Ecuador E E', se divide el Ecuador en un número de partes iguales que representen uno ó más grados de longitud, y que por esos puntos

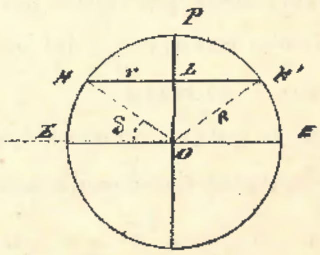



a b c... y los polos P P' se hacen pasar elipses que tienen por eje menor a o d, b o c... y por eje mayor P P', se tendrán establecidos los meridianos de la proyección. En cuanto á los paralelos, serán representados por rectas paralelas al Ecuador y separadas por una determinada proporción que mantenga en el plano las áreas de la esfera.

Esta proyección es la conocida por *«de Babinet»*, aunque fué Mollweide que fijó la relación que debía existir entre los paralelos para satisfacer á aquella condición de equivalencia.

La teoría de los meridianos elípticos se funda en el teorema, de que el área de un elipse es á la área engendrada por su eje mayor en la proporción de su eje menor al mayor, por lo que resulta que la superficie del círculo P E P' E' se encontrará dividida en tantas partes iguales como su radio E O, y que cada una de esas partes tendrá igual superficie que su correspondiente huso esférico de radio R

Si se hace sobre la proyección: $H O E = \delta$; representando P H el complemento de la latitud




$\varphi$, $l = 90^\circ - \varphi$, H L H'

un paralelo de latitud, se tendrá,

$H L = R \sqrt{2} \cos \delta$, $O L = R \sqrt{2} \operatorname{sen} \delta$

y la superficie de la zona H H' E E' tendrá por valor

Sup. H H' E E' = triang. H O H' + 2 sects. H O E = $R^2$ (sen $2\delta + 2\delta$)

Siendo $\varphi$ latitud correspondiente á H H', la superficie de la zona esférica correspondiente á

$$H H' E E' \text{ es: } 2 \pi R^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Luego se tiene

$$\operatorname{sen} 2\delta + 2\delta = \pi \operatorname{sen} \varphi$$

ecuación que se resolverá asignando á $\delta$ valores arbitrarios que harán conocer el valor correspondiente de $\varphi$, poniéndola precisamente bajo la forma,

$$\pi \operatorname{sen} \varphi = 2\delta \frac{180^\circ}{\pi} + \operatorname{sen} 2\delta$$

Conviene en cada caso construir una tabla con el resultado de esa fórmula.

## Proyección cilíndrica equivalente de Lambert

Trazadas dos rectas perpendiculares entre sí y representando una el Ecuador y la otra el meridiano central, se miden sobre el meridiano distancias correspondientes al valor de $R \operatorname{sen} \varphi$ y por los puntos así fijados se trazan rectas paralelas al Ecuador, para representar cada una los paralelos de latitud. En cuanto á los meridianos se representarán por rectas paralelas al meridiano y separadas entre sí por el largo del grado del Ecuador ó del paralelo central del mapa.

Si se quiere tomar en consideración la forma esferoidal de la tierra se reemplazará la fórmula $y = R \operatorname{sen} \varphi$,

por $y = R \operatorname{sen} \varphi - R e^2 \operatorname{sen} \varphi \left(1 + \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 \varphi\right)$

También pueden calcularse las coordenadas de cualquier punto de posición geográfica conocida ó de intersección de meridiano y paralelo, por las siguientes fórmulas:

$$x = R \operatorname{sen} \omega \cos \varphi$$

$$y = R \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\operatorname{tag} \varphi}{\cos \omega}$$

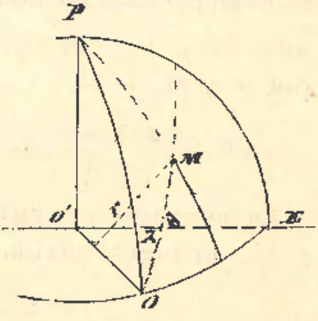
ω, representará la diferencia de longitud entre el punto á determinar y el meridiano central; también debe tenerse presente que la proyección es simétrica con respecto al meridiano y paralelo centrales.

Este sistema de proyección es muy aplicable para mapas de territorios que tienen gran extensión de Norte á Sud y pocos de Este á Oeste.

### Proyección zenital equivalente

En esta proyección que tiene por centro un punto elegido arbitrariamente, cada punto se situará con relación á su azimut sobre la esfera con relación al centro adoptado y á la distancia de ese centro igual á la cuerda del arco que liga ambos puntos.

Adoptando el polo de la esfera por centro y situando éste sobre el plano del Ecuador se tiene: Los paralelos representados por círculos concéntricos cuyo radio será para cada uno la cuerda del complemento de latitud $l = 90 - \varphi$




$$r = 2 \, R \sin \frac{l}{2}$$

Los meridianos serán líneas rectas que partiendo del centro forman ángulos iguales á la longitud.

Si el centro de la proyección se tomara sobre el Ecuador el plano de proyección sería el de un meridiano perpendicular á él, luego la distancia angular $l$, sería equivalente al complemento de latitud de la fórmula anterior y el radio de proyección el mismo. Considerando un punto M sobre la esfera y conociendo el azimut de ese punto ó arco O M, la proyección de ese punto sobre el plano será dada por la misma fórmula:

$$r = 2 \text{ R sen } \frac{l}{2}$$

Para relacionar los valores de 2 y de $r$ en función de la latitud $\varphi$ y longitud $\omega$ del punto M, se tiene;

$$\cos r = \cos \omega \cos \varphi \qquad\qquad \tan z = \text{sen } \omega \text{ cotang } \varphi$$

Tomando ahora el zenit como centro, el plano de proyección será el del horizonte, así que manteniendo las mismas notaciones de $z =$ azimut, $\theta =$ distancia angular O M sobre la esfera, $r =$ proyección de O M sobre la carta, se tiene para las fórmulas transformadas que dan los valores de $z$ y $\theta$ en función de la latitud $\varphi$ y de la longitud $\omega$ y M.

$$\cos \theta = \frac{\text{sen } (\varphi + \lambda)}{\cos \lambda} \text{ sen } \alpha \qquad\qquad \text{sen } z + \frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \theta} \cos \varphi$$

En las cuales $\varphi =$ latitud del zenit tomado como centro y $\lambda =$ un ángulo auxiliar cuyo valor es:

$$\text{tang } \lambda = \cos \omega \text{ cotang } \alpha$$

La distancia d, del punto considerado, al centro de la carta, sea el radio de cada almicantarat es siempre:

$$d = 2 \text{ R sen } \frac{\theta}{2}$$

Conociéndose, pues, los valores de $z$, $\theta$ y d, de cada punto M, su situación sobre el plano será fácil estableciendo el ángulo $z$, con el meridiano central desde su centro y midiendo en esa dirección $OM = d$.

Para todas estas proyecciones, generalmente poco empleadas en las cartas parciales, se construyen tablas que facilitan los cálculos de las fórmulas ya expresadas.

# LA TAQUIMETRÍA

La taquimetría representa en sí, la simplificación de las operaciones necesarias para un relevamiento topográfico, así como la mayor economía de tiempo empleado en el campo para aquellas operaciones.

Por el problema resuelto y que aún será mejorado, se ha conseguido suprimir el cadeneo, la nivelación ordinariamente efectuada y las poligonales de relevamiento, sustituyéndolas por una serie de observaciones hechas desde puntos ó estaciones ligadas entre sí como una red trigonométrica y con la cual se cubre la superficie de la zona á relevar.

De cada una de esas estaciones irradian una serie de visuales dirigidas á todos los accidentes del terreno ó á todo punto que se quiere hacer aparecer sobre el plano; por las lecturas hechas en el instrumento para cada una de estas visuales se determinará para cada punto: su distancia horizontal, su altitud con relación á la del punto de la estación y su ángulo azimutal, ó si se quiere, el ángulo que su visual hace con la dirigida á un punto ya fijado.

A semejanza de lo que sucede en una nivelación, cada nuevo punto de estación será ligado con el de la anterior á fin de conservar en toda la operación la más extricta correlación entre los elementos de cálculo.

Para realizar este propósito, se han introducido en el teodolito común ciertas modificaciones y hasta se ha construído un instrumento especial «El Cleps» que debido á una hábil combinación reune en sí, bajo el menor volúmen, las condiciones necesarias para proporcionar al observador todos los elementos de sus cálculos.

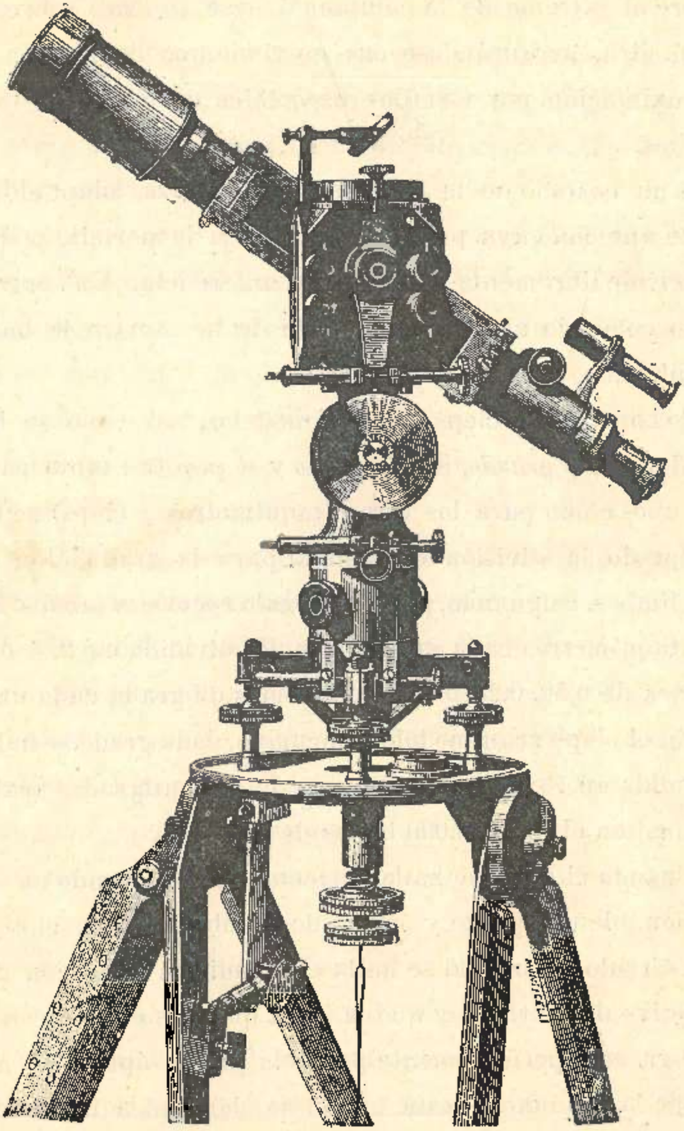
No es posible, en este capitulo, entrar á ocuparse de los detalles particulares de esos instrumentos, pero una ligera descripción de su conjunto podrá dar á conocer sus principales piezas y uso.

*El Taquímetro* (modelo inglés), puede decirse que no es más que un teodolito de tránsito con anteojo céntrico, cuyos detalles son conocidos de todos los que se ocupan de operaciones geodésicas; la principal modificación introducida para el taquímetro consiste en el anteojo tanto por su mayor poder, cuanto por la disposición de sus lentes y su retículo; de ambas modificaciones se tratará más adelante.

*El Cleps*, por lo contrario, es de una construcción diferente á la del teodolito, de manera que, aunque sea á la ligera conviene describir sus partes principales.

Se compone, en su parte esencial, de una pequeña cámara metálica, colocada en parte superior de una columna ó zócalo del instrumento y en la cual se encuentran colocados: el limbo horizontal y el vertical.

En esa cámara penetra la luz por una combinación de prismas, y la lectura de los ángulos se hace por *microscopios* especiales á hilos fijos.



CLEPS — GRAN MODELO

La cámara, como se ha dicho, se encuentra colocada sobre el extremo de la columna ó base central, sobre la cual gira, asegurándose sus movimientos de fijación ó aproximación por tornillos especiales como en los teodolitos.

A un costado de la cámara se encuentra adaptado el gran anteojo, cuya posición excéntrica le permite poder describir libremente toda una circunferencia. Un contrapeso colocado al costado opuesto de la cámara le hace equilibrio.

Se construyen cleps de tres modelos, así como en los teodolitos, *el grande*, *el meridiano* y *el pequeño*; tanto para los unos como para los otros (taquímetros y cleps) se ha adoptado la división centesimal para la graduación de sus limbos, asignando, pues, al ángulo recto *cien gradas*. En los taquímetros cada grada se halla dividida en 2, 4 ó 5 partes de 0,50, 0,25 ó 0,20 centésimos de grada cada una.

En el cleps gran modelo y mediano, cada grada se halla dividida en 10 partes, cada una de 10 centígradas (existen así en el limbo 4.000 líneas de división).

Cuando el cleps se halla perfectamente colocado en estación, bien nivelado y orientado, se observa que el cero del círculo horizontal se halla en la misma dirección del objetivo del anteojo, y que la línea que une el cero con el 200 gr. está perfectamente paralela al eje óptico del anteojo; la graduación está hecha de derecha á izquierda, esto es, en sentido inverso al de la marcha de las agujas de un reloj, de manera que el verdadero modo de hacer girar el anteojo y medir los ángulos, es también en el mismo sentido.

En el círculo vertical se observa que el cero está en dirección al zenit, de manera que los ángulos leídos en él serán *distancias zenitales* ó *apozenit*, como han sido tituladas por Porro.

LA ORIENTACIÓN puede consistir: ya en adoptar un punto determinado como cero ú origen de las visuales horizontales, ya, como es bastante general, adoptando la orientación magnética, lo que se consigue con una declinatoria colocada en un tubo especial bajo la cámara, y cuya dirección precisa se observa por medio de los micrómetros que existen en aquélla.

Es sobre esta orientación que se calculará la proyección de cada punto relevado.

Como queda dicho, á cada limbo corresponde un microscopio colocado frente al cero; el microscopio tiene un hilo vertical que se ve proyectado sobre el limbo, de manera que la lectura se hace con suma facilidad y con gran exactitud, pudiendo apreciar, mediante alguna práctica, los centésimos de grada en una división de las de á 10.

Como se ve, el cleps tiene los mismos elementos que el teodolito ó taquímetro, con la diferencia de que sus limbos se encuentran escondidos en la cámara, lo que ha constituído el origen de su nombre, derivado de las palabras griegas ΚμΚλοξ círculo y Κλεψ oculto.

En el taquímetro, como en el teodolito, los limbos son visibles y la lectura se hace con el nonius y sus microscopios, mientras que la brújula ocupa la parte central del círculo horizontal.

El apéndice indispensable en taquimetría para el uso de esos instrumentos, es la *mira* ó *estadía*, cuya división es objeto de un especial cuidado y aun de algunas modificaciones que serán expuestas más adelante.

### Fórmulas fundamentales

Fijados así estos puntos de partida sobre disposición de estos instrumentos, se puede proceder á la ejecución de las observaciones y siguientes operaciones.

Puesto en estación el instrumento, se dirije una visual al punto A, donde previamente se ha mandado colocar la *mira*, y asegurados los tornillos correspondientes para que la situación no sea alterada, se procede á las tres lecturas siguientes :

1.ª El ángulo zenital $\varphi$, leído en el círculo vertical.

2.ª » » azimutal $\theta$, leído en el círculo horizontal.

3.ª La cantidad S, leída sobre la mira, y que es la que sobre ella abarcan los hilos horizontales del retículo.

Con estas tres lecturas, que serán anotadas con todo cuidado en las libretas, se hallarán todos los elementos necesarios para fijar sobre el plano el punto A, con indicación de su altitud, empleando las siguientes fórmulas:

$$\text{Distancia } D = S \operatorname{sen}^2 \varphi$$

ó también $$D = \frac{S}{2} - \frac{S}{2} \cos 2\varphi$$

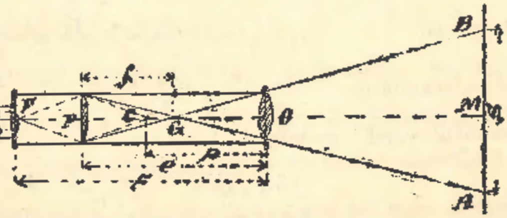
$$\text{coordenadas } x = D \operatorname{sen} \theta; \qquad y = D \cos \theta$$

$$\text{altitud ó diferencia de nivel } Z = D \cot \varphi - h \quad \text{ó} \quad z = t + (h - m)$$

De las fórmulas fundamentales que preceden, fácil es comprender que la exactitud del resultado depende esencialmente de la justa apreciación de la cantidad D, distancia horizontal del punto de observación al observado, apreciación que depende á su vez especialmente del anteojo y retículo, de cuya descripción hay que ocuparse.

### De los anteojos

En los anteojos destinados á la apreciación de distancias, se ha introducido una lente P, entre el retículo y el objetivo, con el propósito de mantener constante el *ángulo diastimométrico* (invariable).




Sea :

a y b = hilos del retículo.

$e = O\,P =$ distancia entre los lentes O y P, calculada para que el foco de la lente P caiga en C.

$C =$ centro del anteojo, punto al cual se deben referir las distancias y el vértice del ángulo *diastimométrico* $\omega = B\,C\,A$.

$p = O\,C =$ distancia del objetivo al centro C.

$f = P\,G =$ distancia focal de la lente P.

$F = O\,F =$ distancia focal del objetivo.

$S =$ distancia sobre la mira.

Por principio de óptica se tiene $\frac{1}{F} = \frac{1}{D} - \frac{1}{d}$

se tiene también $\frac{1}{F} = \frac{1}{(e-f)} - \frac{1}{p}$

de la cual se deduce $e = \frac{p\,(F-f) + F\,f}{p+f}$ (1)

Introduciendo el ángulo $\omega$ y desarrollando, se tendrá

$$D = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\,\omega}\,S \qquad (A)$$

fórmula que servirá para determinar la distancia D en función de la cantidad S, medida sobre la mira, siempre que el ángulo $\omega$ sea constante. Como comprobación y consecuencia, se tiene:

del triángulo $a''\,C\,b''$ $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\,\omega = \frac{a''\,b''}{2\,p}$

de los triángulos $a'\,b'\,G$ y $a''\,b''\,G$

$$a''\,b'' : a'\,b' :: (e-f) : f$$

de la cual $a''\,b'' = \frac{e\,(e-f)}{f}$

de la fórmula (1) $p = \frac{F\,(e-f)}{F+f-e}$

y substituyendo, se tendrá:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\omega = \frac{e\,(F+f-e)}{2\,F\,f} \qquad (2)$$

Resulta de esta relación que el ángulo diastimométrico es constante, por estar expresado su valor en función de cantidades determinadas é invariables.

De la misma relación se deduce también que el valor del ángulo $\omega$, depende: de e, de la distancia a entre los hilos del micrómetro y de f, distancia focal de la lente P, aunque e es función de f. El valor atribuído á estas cantidades e y f son hasta cierto punto arbitrarios, de manera que puede hacerse la construcción de tal modo, que la relación sea, por ejemplo:

$$K = \frac{1}{2 \tan \frac{1}{2} \omega}$$

convirtiendo así la fórmula A en $D = K S$, en la cual expresando S en metros, se obtendrá D también en metros.

K se llama *coeficiente diastimométrico,* y su valor, que en la práctica debe ser conocido, se hace generalmente igual á 25, 40, 50, 100, 125, 200 y 250... Esto es, se ha hecho, por ejemplo:

$$2 \tan \tfrac{1}{2} \omega = 0^m 005 = \frac{0.01}{2}$$

lo que significa que, puesta una mira á dos metros del instrumento (del punto C del anteojo), los hilos del retículo abarcarán sobre la mira un espacio de 10 centímetros, y que á los 100 metros, ese espacio, que es el llamado S, será de $0^m 50$.

La relación diastimométrica K, será, pues, de $\frac{1}{200}$ de la distancia horizontal D.

Si ahora se colocan en el retículo una série de hilos paralelos y equidistantes dos á dos del hilo central, formando así *pares,* podrá establecerse para el mismo anteojo varios coeficientes que servirán, según las circunstancias, para apreciar distancias más ó menos largas.

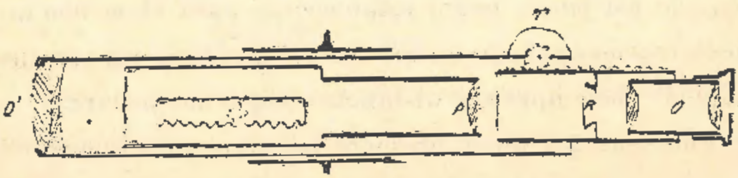
Conviene así tener presente las siguientes relaciones:

Si á 1m los hilos abarcan 0,01 , á 100m abarcan 1m y $K = \frac{1}{100}$ D
» » 1m » » » 0,02 , » 100m » 2m » $K = \frac{1}{50}$ D
» » 1m » » » 0,001 , » 100m » 0m 10 » $K = \frac{1}{1000}$ D
» » 1m » » » 0,002 , » 100m » 0m 20 » $K = \frac{1}{500}$ D
» » 1m » » » 0,004 , » 100m » 0m 40 » $K = \frac{1}{250}$ D
» » 1m » » » 0,008 , » 100m » 0m 80 » $K = \frac{1}{125}$ D
» » 1m » » » 0,005 , » 100m » 0m 50 » $K = \frac{1}{200}$ D
» » 1m » » » 0,0025, » 100m » 0m 25 » $K = \frac{1}{400}$ D

De la interpretación de lo que sigue se desprende el alcance máximo de las distancias que pueden apreciarse con la mira común de cuatro metros.

| Con el retículo que dá | A 100m se abarcan | La distancia D máxima |
|---|---|---|
| $K = \frac{1}{50}$ | 2m | 180 á 200 |
| $» = \frac{1}{100}$ | 1m | 380 » 400 |
| $» = \frac{1}{125}$ | 0m 80 | 460 » 500 |
| $» = \frac{1}{200}$ | 0m 50 | 760 » 800 |
| $» = \frac{1}{250}$ | 0m 40 | 980 » 1000 |
| $» = \frac{1}{500}$ | 0m 20 | 1980 » 2000 |

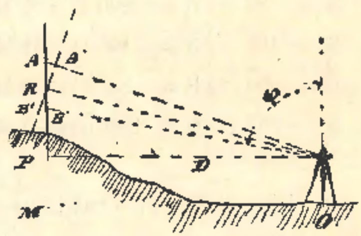
Las dos últimas expresiones son casi ilusorias, especialmente la última.




Anteojo del Taquímetro

## Observaciones

Aunque las miras son generalmente divididas en metros y centímetros, se puede, á fin de evitar la multiplicación de K por S, hacer la división de tal manera que manteniendo la relación $\frac{1}{K}$, cada división represente un metro de distancia horizontal y la cantidad S represente distancia D, con su simple lectura.




Pocas veces se presentará en la práctica, el caso de que la mira se encuentre al mismo nivel que el instrumento, ésto es: que la visual sea horizontal; por lo general, el ángulo zenital φ será siempre mayor ó menor que un recto (100 grados) y se comprende que resultará un error e en el cálculo de la distancia D debido precisamente á la falsa lectura de S, (A B en vez de A' B').

La fórmula (A) que da la distancia

$$D = \frac{1}{2 \tan \frac{1}{2} \omega} S = K S,$$

tendrá que ser modificada para ser reducida al mismo tiempo á la horizontal; llegando así á tener por expresión $D = (K S) \operatorname{sen}^2 \varphi$ (B) y en cuanto al error cometido en la apreciación de D, tanto por defectos en los instrumentos como en la observación, llega á ser representado por:

$$e = \frac{D}{4 K^2 \tan^2 \varphi - 1}$$

Se deduce de estas expresiones que el error $e$ será tanto mayor, cuanto menor sea $\varphi$ y mayor sea D. Si para formar un juicio sobre estas consecuencias se asignan á aquellos elementos los valores máximos en la practica, esto es, á $\varphi$ el mínimo valor sea 40°, á D el máximum consentido por el coeficiente K y ángulo $\omega$, puede formarse el siguiente cuadro:

| Coeficiente | Distancia D | Distancia D horizontal | Error máximo |
|---|---|---|---|
| K = 25 | O R = 100 | D = O M = O R sen 40 = 58.78 | e = 0.0447 |
| K = 50 | O R = 200 | D = O M = O R sen 40 = 117.58 | e = 0.0213 |
| K = 100 | O R = 400 | D = O M = O R sen 40 = 235.12 | e = 0.0111 |
| K = 200 | O R = 800 | D = O M = O R sen 40 = 470.24 | e = 0.0056 |
| K = 250 | O R = 1000 | D = O M = O R sen 40 = 587.80 | e = 0.0045 |

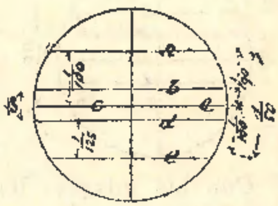
Se han calculado tablas especiales para obtener el valor de la distancia reducida á horizontal, así como la diferencia de nivel $t = D \cot g\, \varphi$, y por lo tanto, las coordenadas $x\ y$. En ellas se ha sustituido el ángulo $\varphi$ leido directamente por su duplo, con el solo propósito de dar á la tabla mayor extensión reduciendo al mismo tiempo su volúmen.

Esta modificación en nada altera el resultado de las fórmulas quedando éstas puestas bajo la siguiente forma:

$$D = \frac{S}{2} - \frac{S}{2} \cos \varphi \quad \text{y} \quad z = \frac{S}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + (h - m) = t + (h - m)$$

También se emplea con gran éxito y se considera casi como indispensable al proceder taquimétrico, la *regla logarítmica* que por un simple movimiento entre sus piezas da la expresión del valor de las fórmulas con una aproximación aceptada como muy suficiente á las exigencias del método de operación.

*Retículo ó micrómetro.*—Se compone como los en uso en los teodolitos de varios hilos, colocados paralelamente entre sí y equidistantes del hilo central. Estos hilos forman pares y están separados de manera á conservar la relación de uno ó más coeficientes K ya indicados.



En los primeros *taquímetros ingleses,* la disposición de los 5 hilos que forman el retículo, es como lo indica la adjunta figura; con los hilos a e se tiene el coeficiente $K = 50$ (lo que significa que á 50 metros los hilos abarcarán un metro sobre la mira). Con los hilos a c, ó c e, el coeficiente es $\frac{1}{100}$. Con los hilos b d, se tiene, $K = \frac{1}{250}$ y con los: a b y c d, $K = \frac{1}{125}$.

Sean las siguientes lecturas hechas con los 5 hilos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.º | e = 0.20 ..... | se tiene; (e — a) | $= (2.20 - 0.20) \times 50 = 100^m$ |
| 2.º | d = 1.00 ..... | (c — e) ó (a — c) | $= (1.20 - 0.20) \times 100 = 100^m$ |
| 3.º | c = 1.20 ..... | (d — e) | $= (1.00 - 0.20) \times 1.250 = 100^m$ |
| 4.º | b = 1.40 ..... | (a — b) | $= (2.20 - 1.40) \times 1.250 = 100^m$ |
| 5.º | a = 2.20 ..... | (b — d) | $= (1.40 - 1.00) \times 2.500 = 100^m$ |

Si se hiciera uso de la mira dividida en unidad de *estadia,* sea de 4 centímetros, la operación de cálculo consistiría en multiplicar por 4 y dividir por 100 la diferencia de lectura, así se tendría $(a - c)$ 4. Para el término medio de la lectura normal de una mira ordinaria se tendría: $\frac{a + d + b + e}{4}$; mientras que con la mira de 4 centímetros por unidad sería simplemente $a + d + b + e$.

En el modelo reciente de los taqueómetros ingleses de Trougton y Simms, los 5 hilos del retículo se encuentran equidistanciados y establecen la siguiente relación, con los hilos:


a b la relación es: $K = \frac{1}{50} = \frac{4}{200}$

a d » » » $K = \frac{1}{666} = \frac{3}{200}$

a m » » » $K = \frac{1}{100} = \frac{2}{200}$

a c » » » $K = \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$

Con las mismas lecturas se tendría:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 2.20$ | se tiene | | $(a - b) = (2.20 - 0.20) \times 50 = 100$ |
| $c = 1.70$ | » | $(c - b)$ ó | $(a - d) = (1.70 - 0.20) \times 666 = 100$ |
| $m = 1.20$ | » | $(m - b)$ ó | $(a - m) = (1.20 - 0.20) \times 100 = 100$ |
| $d = 0.70$ | » | $(d - b)$ ó | $(a - c) = (0.70 - 0.20) \times 200 = 100$ |
| $b = 0.20$ | | | |

Estos taqueómetros, modelo italiano y en los cleps mediano y pequeño se usan las mismas disposiciones de los 5 hilos que en los dos retículos antes mencionados; pero se ha establecido la siguiente relación. En los 5 hilos equidistantes, los hilos $a\ d$ y $c\ b$ dan $K = \frac{1}{100}$, esto es 1 : 100 y cada división $a\ c$, $c\ m$ y $m\ d$, es de $\frac{1}{500}$.

Siendo las lecturas en mira centesimal:

| | |
|---|---|
| $a = 1.40$ | $(a - d) = (1.40 - 0.40) \times 100 = 100^{m}$ |
| $c = 1.20$ | $(c - b( = (1.20 - 0.20) \times 100 = 100^{m}$ |
| $m = 0.80$ | |
| $d = 0.40$ | $(a - c) = (1.40 - 1.20) \times 100 = 100^{m}$ |
| $b = 0.20$ | |

Haciendo la lectura en unidades en Estadía, igual á 4 centímetros, para:

$b = 5$ de donde, $c - b = (30 - 5) = 25 \times 4 = 100\ \text{m}$
$d = 10$ » $a - d = (35 - 10) = 25 \times 4 = 100\ \text{m}$
$m = 20$
$c = 30$ » $a - b = (35 - 30) = 5 \times 20 = 100\ \text{m}$
$a = 35$

Si se hiciera uso para mayor exactitud del término medio de la lectura de los 4 hilos se tendría:

En el primer caso:

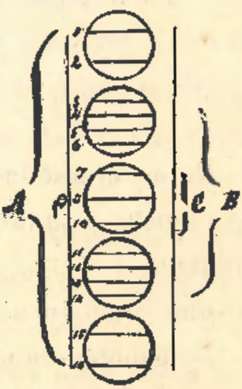
$$[(a - d) + (c - b)] =$$
$$= \left[\frac{(1.40 - 0.40) + (1.20 - 0.20)}{2}\right] \times 100 = \frac{2}{2} \times 100 = 100\ \text{m}$$

En el segundo;

$$(c - b) + (a - d) = [(30 - 5) + (35 - 10)] \times 2 = (25 + 25) \times 2 = 100$$

Esta última es más rapidamente hecha.

El retículo de los cleps gran modelo, es de 16 hilos dispuestos como sigue.




La *lectura normal* A se hace con los hilos 1, 2, 15 y 16.

La lectura se hace alternada y el coeficiente $\frac{1}{50}$, 15 − 1 y 16 − 2, siendo el factor 2; esto es, haciendo uso de la mira con división de estadía (4 cents.)

Sean las lecturas hechas:

| En unidad de estadía | | En centímetros |
|---|---|---|
| 1 — 60 | | 1 .... 2.40 |
| 15 — 10 | $50 \times \frac{4}{100} = 2$ | 15 .... 0.40 |
| 2 — 55 | | 2 .... 2.20 |
| 16 — 5 | | 16 .... 0.20 |

$(1 - 15) \times 2 = (60 - 10) \times 2 = 100\ \text{m}$ $\qquad (2.40 - 0.40) \times 50 = 100\ \text{m}$

$$(55 - 5) + (60 - 10) = 100\ \text{m}$$

La operación se hace, pues, con estos dos pares de hilos con el coeficiente 50 ó 2, según la unidad de la mira.

En la *lectura intermediaria* B, hecha con los hilos 3, 4, 5, 6 y 11, 12, 13, 14, el coeficiente es $\frac{1}{100}$ ó 4, según la unidad de mira empleada.

Sean estas lecturas:

| En unidades de Estadía (4 cents.) | En centímetros |
|---|---|
| 3 .... 35 el factor es 4 | 3 .... 1.40 el factor es 100 |
| 4 .... 33 | 4 .... 1.32 |
| 5 .... 32 | 5 .... 1.28 |
| 6 .... 30 $(30 - 5) \times 4 = 100$ m | 6 .... 1.20 $(1.20 - 0.20)\ 100 = 100$ |
| 11 ... 10 $(33 - 8) \times 4 = 100$ m | 11 ... 0.40 |
| 12 .... 8 | 12 ... 0.32 |
| 13 .... 7 | 13 ... 0.28 |
| 14 .... 5 | 14 ... 0.20 |

$(30 \ldots 5) + (32 - 7) + (33 - 8) + (35 - 10) = 100$

$(6 - 14) \ldots 1.20 - 0.20 = 1.00$

$(5 - 15) \ldots 1.28 \quad 0.28 = 1.00$

$(4 - 12) \ldots 1.32 - 0.33 = 1.00$

$(3 - 11) \ldots 1.40 - 0.40 = 1.00$

$4.00 \times 25 = 100$

No es forzoso hacer la lectura de los 8 hilos, pero tampoco debe aceptarse la lectura sólo de los 4 hilos de un retículo (3, 4, 5, 6) ó (11, 12, 13, 14) deben siempre ser salteados como queda dicho 3, 11, 4, 12 ó 5, 13, .... 6, 14.

No habiéndose podido obtener; por ejemplo, más que la lectura de los hilos 3, 4, 13, 14, la distancia se obtiene haciendo:

$$[(4 - 14) + (3 - 13)] \times \frac{25}{28} \times 2$$

sea: $$[(33 - 5) + (35 - 7)]\, 2 \times \frac{25}{28} = 100^{\,m}$$

en unidades de estadía.

En la lectura central C, con los hilos 7, c, 10, el coeficiente K es de $\frac{1}{250}$.

Con lo que precede se podrá siempre determinar la distancia conociéndose las lecturas y el coeficiente.

*Práctica.*—Haciendo uso del cleps, las lecturas comunes se hacen con la série A, *la normal* y con la B, *término medio*, la 1.ª para las distancias principales y la 2.ª para los detalles y empleando conjuntamente la mira á unidad de 4 centímetros.

La determinación de los elementos de cálculo, extraídos de la libreta de apuntes dá, por ejemplo:

| MICROMETRO | | Diferencia |
|---|---|---|
| hilo inf. | hilo sup. | |
| 43.70 | 18.42 | 25.28 |
| 40.62 | 15.36 | 25.26 |
| | | $\frac{S}{2} = 25.27$ |

Este ejemplo demuestra lo simple que es el deducir el término $\frac{S}{2}$ y aún la suma $S = 50.54$; es el proceder observado para trabajar con las tablas especiales.

Habiéndose hecho uso de la série B, la deducción de $\frac{S}{2}$ no ofrece mayor dificultad y habrá economizado una operación, pues que precede á la determinación de S.

| MICROMETRO | | Diferencia |
|---|---|---|
| hilo inf. | Hilo sup. | |
| 39.36 | 24.06 | 15.30 |
| 36.31 | 21.00 | 15.31 |
| | | $\frac{S}{2} = 30.61$ |
| | | $S = 61.22$ |

Lectura de 4 hilos. Série B.

Con el taqueómetro cuya lectura se hace con un sólo par de hilos, si la mira es la común en centímetros, la operación se hace como sigue:

### CÁLCULO DE D CON LA EXPRESIÓN S

Lectura hilo inferior a = 305.00
» superior b = 23.30
Suma = 328.30
$\frac{1}{2}$ suma = 164.15

térm. medio m = 164.20

dif. = 271.70
S = 140.85

### CÁLCULO DE D CON LA EXPRESIÓN $\frac{S}{2}$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Lectura hilo inferior } a = 305.00 \\ \text{» medio } m = 164.20 \\ \text{» superior } b = 23.30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dif.} = 140.80 \\ \text{dif.} = 140.90 \end{array} \quad \frac{S}{2} = 70.425$$

Pero operando con una mira que tenga por unidad la de 2 cent., como son las á propósito para operar en los detalles

$$\left.\begin{array}{r} a = 152.50 \\ m = 82.10 \\ b = 11.65 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dif.} = 70.40 \\ \text{dif.} = 70.45 \end{array} \quad \frac{S}{2} = 70.425$$

### MODELO PARA LIBRETA DE TAQUÍMETRO

| Pun.s | Micróm.° | $D = \frac{S}{2} - KS$ | $\varphi$ | $\theta$ | $z = t + (h - m)$ | $\delta$ O | D cos $\delta$ O | Observ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a = <br> m = <br> b = | dif. = <br> dif. = | I= <br> II= <br> med= | $\Delta\theta$= <br> $\theta$= | t = <br> h − m = <br> z = | | | |
| | | $\frac{S}{2}$ = <br> K S = <br> D = | | | | | | |
| | a = <br> m = <br> b = | | | | | | | |

MODELO PARA CLEPS

| Estima | Coefic. K | Hilo infer. | Hilo super. | $D = \frac{S}{2} - KS$ | $\varphi$ | $\theta$ | $z = t + (h-m)$ | $\delta O$ | $D \cos \delta O$ | Observ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | median | | | dif. = | I= | | t= | | | |
| | | | | » = | | | | | | |
| | | | | » = | | | | | | |
| | | | | » = | II= | | (h−m)= | | | |
| | | | | $\frac{S}{2}$ = | md. | | z= | | | |
| | | | | K S = | ε= | | | | | |
| | | | | D = | φ= | | | | | |
| 2 | normal | | | dif. = | | | | | | |
| | A | | | » = | | | | | | |
| | | | | » = | | | | | | |
| | | | | » = | | | | | | |
| | | | | $\frac{S}{2}$ = | | | | | | |
| | | | | K S = | | | | | | |
| | | | | D = | | | | | | |

## Operaciones

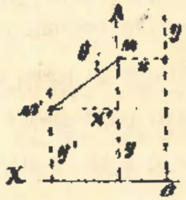
**Conocidas las coordenadas de dos puntos M y M', determinar el azimut de la línea M M' y su distancia.**

La diferencia de las ordenadas de M y M', será:

$$\delta y = y - y'$$

la diferencia de las abcisas, será:

$$\delta x = x - x'$$



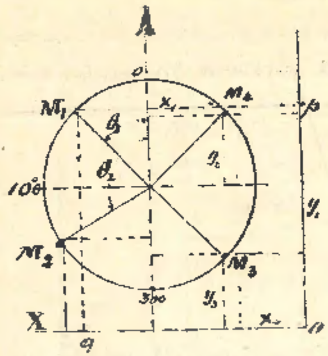

de donde $\quad \operatorname{Tang} \theta = \dfrac{\delta x}{\delta y}$

y $\quad M\,M' = D = \dfrac{\delta x}{\operatorname{sen} \theta} = \dfrac{\delta y}{\cos \theta}$

*Clasificación de las coordenadas por cuadrante*

$\theta_1$ de 0° á 100°, 1.er cuadrante

se tiene: $\quad + x \; + y$, coord. de $M_1$




$\theta_2$ de 0º á 200º, 2.º cuadrante

se tiene: $+x - y$, coord. de $M_2$

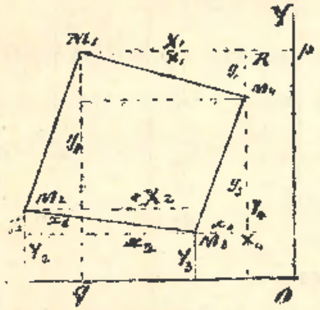
$\theta_3$ de 0º á 300º, 3.er cuadrante

se tiene: $-x - y$, coord. de $M_3$

$\theta_4$ de 0º á 400º, 4.º cuadrante

se tiene: $-x + y$, coord. de $M_4$

Si se asigna á $M_1$ las coordenadas definitivas $X_1$ $Y_1$ referidas á los ejes del punto O, admitido como orígen de toda la operación, se tiene:




Para

$M_1 \ldots + X_1; + Y_1; X_1 = M_1\,p,\ Y_1 = O\,q;\ X_1 = x_1 + R$

$M_2 \ldots + X_1 + x_2 = + X_2;\ + Y_1 - y_1 = Y_2$

$M_3 \ldots\ X_3 = X_2 - x_2 = X_3;\ Y_3 = -Y_2 - y_2 = Y_3$

$M_4 \ldots\ X_4 = X_3 + x_3 + = X_4;\ Y_4 = -Y_3 + y_3 = +Y_4$

Este cálculo de coordenadas definitivas, así como todas las demás operaciones y deducciones que de ellas se efectúan y deducen, son la repetición de lo dicho en el capítulo «Cálculo analítico».

*Operación.*—Como se ha dicho, en cada estación deben hacerse para cada punto á determinar las 3 lecturas de sus *cantidades ó números generadores,* éstos son: ángulos θ φ y la cantidad S; los que se anotarán con todo cuidado en la cartera.

Terminadas las observaciones, conviene proceder desde la Estación A á la lectura de los números correspondientes á la próxima estación B, y, luego de instalado el instrumento en B, tomar ante todo las lecturas correspondientes á la anterior estación A; procediendo así se tiene una inmediata comprobación de la operación, pues, que los ángulos azimutales deben ser reciprocos esto es:

$$\theta_1 + \theta_2 = 200^\circ$$

y que la distancia A B, así como la diferencia de nivel z deben tener igual resultado desde que se tiene:

distancia A B, vista desde $A = S_b \operatorname{sen}^2 \varphi_b = d_b$

diferencia de nivel desde $A = z_b = h_a + (d_b \cot g \varphi_b - m)$

distancia A B, vista desde $B = S_a \operatorname{sen}^2 \varphi_a = d_a$

diferencia de nivel desde $B = z_a = h_b + (d_a \cot g \varphi_a - m)$

Ahora, siendo casi imposible en la práctica, especialmente haciendo uso de la orientación magnética, llegar á la exacta reciprocidad de los ángulos azimutales $\theta_1$ y $\theta_2$ habrá que tener en cuenta la diferencia $\varepsilon$ deducida de una ú otra manera, según el caso y considerar el nuevo ángulo $\theta_2$ como $\theta_2 \pm \varepsilon$.

*Orientación.*—La orientación ó sea más bien la línea de operación desde la cual se contarán los ángulos azimutales y sobre la cual se deben calcular inmediatamente las coordenadas ó proyección de las líneas visuales que se dirigen á los puntos ó detalles que se quieren fijar y relevar, tiene su gran importancia como es fácil comprender.

Lo más rápido y comodo es valerse de la orientación magnética, pero, como ésta no puede admitirse en el cambio de estación como absolutamente constante y que, sin embargo, es de la *mayor importancia* de que estas líneas de orientación conserven entre sí el *más estricto* paralelismo;

parece conveniente que al tratarse de operaciones constituidas por la reunión de los resultados de varias estaciones, fijar la orientación en una estación, estableciendo directamente el ángulo azimutal recíproco al de la estación precedente, tomando nota de la diferencia ε que resulte entre esa orientación y la magnética.

Será éste el procedimiento más simple á adoptarse, pues que el que resultaría de seguir la operación á semejanza de la observada en una poligonal, esto es, tomar como punto de orientación, la estación precedente, traería una série de complicaciones y correcciones en todos los ángulos azimutales para relacionarlos á la orientación definitiva.

Para la ejecución de todas las operaciones, cálculos y deducciones por la taquimetría, el operador debe posesionarse de los principios expuestos en el «Cálculo analítico» especialmente del sistema de coordenadas tituladas «*Latitudes* y *Apartamientos*», convenciéndose que la ejecución de la operación que tiene entre manos tiene por base establecer de una manera real (con 1 jalón por lo menos) la línea *meridiana* de aquel sistema.

La inmediata ventaja que le ofrece, el proceder por la taquimetría, es la supresión del *cadeneo*, lo que le permite ser mucho más escrupuloso en relevar el mayor número de puntos de detalle y *fijar al mismo tiempo su diferencia de nivel*, ventajas de grandísima importancia y que tienen su notable aplicación en trabajos topográficos, en estudios de carreteras, canales, ferro-carriles, irrigación, etc., donde se necesita un conjunto de detalles.

Como conjunto de una operación taquimétrica, véase el plano siguiente.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Esta operación ha sido hecha solo con dos estaciones en A y B elegidas convenientemente y ligadas por la línea A B de 196m50.

Para la construcción del plano no se emplea el transportador, pues que cada punto tiene sus coordenadas deducidas inmediatamente por

$$x = D \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad y = D \cos \theta$$

y que con estas parciales se deduce por simple suma ó resta, según el signo de la coordenada, las absolutas reducidas á los ejes X Y, este es para el punto 5,

$$X = O\ M = 125^m \quad Y = O\ n = 32^m$$

Como se comprende, si el presente caso tratara de la mensura de un terreno, de lo que hubiera que dar cuenta, habría que determinar el largo de las líneas 7, 6, 6, 5, 5, 4... del perímetro, así como los ángulos internos de cada vértice. Esto se consigue fácilmente, sí, procediendo sistemáticamente: 1.º á formar una planilla parcial colocando en sus columnas respectivas las coordenadas de cada visual con sus signos; 2.º deducir con ellas las absolutas referidas á un sistema de ejes que pase, ya por uno de los vértices (el más apartado á la derecha), ya por un punto O dado arbitrariamente, en cuyo caso habrá que tener en cuenta las coordenadas absolutas que haya que adoptar para el punto de partida.

3.º Una vez calculadas las coordenadas absolutas de los vértices del polígono, se construye una nueva planilla de la cual se deducirán, por simple operación aritmética las coordenadas de cada línea ó costado del polígono, así:

$$\text{línea } 5.\ 4,\ x = 5\ r \qquad y = 4\ r.$$

$$\text{línea } 4.\ 3,\ x = 4\ s \qquad y = 3\ s.$$

4.º Luego de conocidas estas se tiene

$$\text{ángulo } 4\ 5\ r = 5;\ \text{tang } 5 = \frac{r.\ 4}{5.\ r} \qquad \text{línea } 4.\ 5. = \frac{4.\ r}{\text{sen } 5}$$

$$\text{ángulo } 3\ 4\ S = 4;\ \text{tang } 4 = \frac{3.\ s}{4.\ s} \qquad \text{línea } 4.\ 3. = \frac{3.\ S}{\text{sen } 4}$$

5.º Deducidos así todos esos elementos, será fácil deducir los ángulos internos y por lo tanto, hacer la planilla definitiva para el cálculo de superficie.

## Resúmen de las observaciones

1.º—El procedimiento taquimétrico consiste en determinar sobre el terreno los elementos para las coordenadas polares (referidas á la Estación), haciendo al efecto la lectura de los ángulos $\varphi$ $\theta$ y parte S de mira comprendida por los hilos del retículo.

2.º—La medida de los ángulos $\varphi$ y $\theta$ se hace con los círculos vertical y horizontal del instrumento; el primero es el ángulo zenital comprendido del zenit al eje óptico del anteojo dirigido sobre la mira; el segundo dá la medida del ángulo horizontal ó azimutal comprendido entre el punto de orientación y la mira.

En el cálculo de la diferencia de nivel $z$, entre el punto de estación y el de la mira, debe tenerse presente que el cálculo se referirá al centro del anteojo y que, por lo tanto, habrá que tener en cuenta la altura $h$ del ocular sobre el suelo, así como la altura $m$, medida sobre la mira, desde el terreno hasta el punto de lectura indicado por el eje óptico del anteojo (término medio de las lecturas) ó sea la del hilo central.

3.º—La deducción de la distancia horizontal se hace por medio de la altura de mira leida con el anteojo y comprendida entre los hilos del retículo.

De los principios en que se funda la teoría del cálculo de una distancia por medio del anteojo y la mira ó estadía debe recordarse.

1.°—Que el anteojo debe tener una lente analítica.

2.°—Que el *retículo ó micrómetro* debe tener un hilo vertical y por lo menos 3 hilos horizontales, uno central y los otros dos equidistantes del anterior.

3.°—Que, siendo $S$ la cantidad leida en la mira (diferencia de la lectura entre el hilo inferior y el superior) y conocido el coeficiente diastimométrico $K$ correspondiente al par de hilos $a\ b$, la distancia $d$ á la mira será expresada por $d = KS$, y la proyección horizontal $d = KS \operatorname{sen}^2 \varphi$ ó si se quiere representar por $s$ el producto $KS$, $d = s \operatorname{sen}^2 \varphi$.

Si el coeficiente $K = 50$ como lo es generalmente para el par de hilos $a\ b$ más apartados del central, y siendo $a$ la lectura del hilo superior y $b$ la del inferior leidos sobre una mira común de división centesimal, la distancia será $d = 50 (a - b \operatorname{sen} \varphi$ y la horizontal $d = 50 (a - b) \operatorname{sen}^2 \varphi$ si la diferencia es expresada en metros y fracción; si la diferencia va expresada en centímetros la expresión será $d = \frac{1}{2} (a - b) \operatorname{sen} \varphi$ y $d = \frac{1}{2} (a - b) \operatorname{sen}^2 \varphi$; siendo esta última expresión más rápida en su ejecución las miras llevan la numeración en centímetros.

4.°—Las fórmulas fundamentales quedan así reducidas, una vez conocidas las cantidades $\varphi$, $\theta$, $S$, $h$ y $m$, llamadas también *números ó cantidades generadoras*, á las siguientes expresiones:

distancia $d = K\,S\,\text{sen}^2\,\varphi$ ó sea $s\,\text{sen}^2\,\varphi$

ordenada $x = d\,\text{sen}\,\theta$, abcisa $y = d\cos\theta$

diferencia nivel $z = d\,\text{cotg}\,\varphi - h$ ó sea $z = t + (h - m)$

5.°—En el cálculo de las coordenadas debe tenerse presente la magnitud del ángulo $\theta$ para conocer el cuadrante en que cae la visual á fin de dar á éstas su correspondiente signo.

6.°—La resolución de las cuatro fórmulas fundamentales puede hacerse en campaña é inmediatamente de hechas las lecturas, empleando la regla logarítmica, especialmente construida para estos cálculos, (reglas de Richer Moinot) y que contiene una série de escalas. El resultado del cálculo se obtiene inmediatamente y con exactitud suficiente sólo con el empleo de dicha regla.

La regla logarítmica mide 40 centímetros de largo por unos 3 de ancho; y contiene una série de escalas de números y sus logaritmos, de logaritmos de senos, cosenos y tangentes, senos cuadrados, las que, dispuestas ya en la regla principal, ya sobre las corredizas, permiten efectuar los cálculos con gran simplicidad y prontitud así que se haya adquirido alguna experiencia en su manejo. Su empleo es otro de los motivos de la adopción de la división centesimal en los limbos.

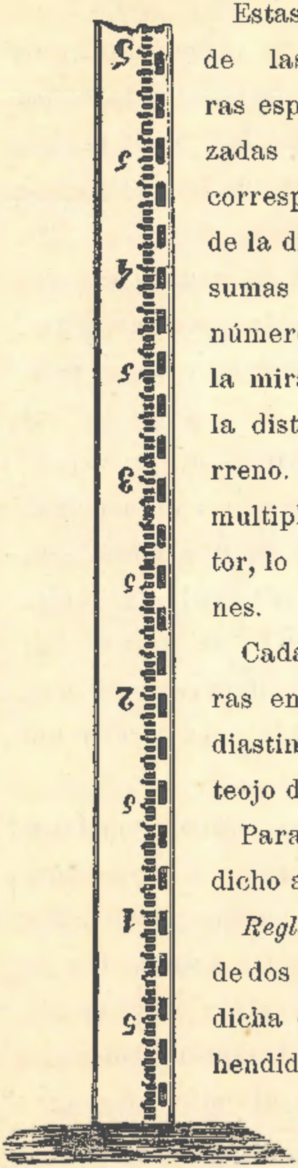
7.°—El transportador constituye el complemento del material del operador en campaña, pudiendo así construir inmediatamente un croquis exacto de sus relevamientos y darse cuenta de la marcha que le conviene observar para el mejor éxito de su propósito. La construcción simultánea de este croquis completará también el conjunto de las anotaciones de la cartera. La división de estos transportadores debe ser también centesimal y los hay de talco, de metal y de papel grueso, los que son preferibles por su limpieza y baratura.

*Miras.—Las miras ó estadías* construidas especialmente para estas operaciones, solo presentan diferencia con las usadas en la nivelación común, en la manera como se ha efectuado el trazado de la división centesimal.

En vez de dar á cada división de un color, el mismo espesor que el vacío inmediato, se ha procurado darle, por lo contrario, el menor espesor, procurando así imitar la división que aparece en las escalas métricas ó dobles centímetros comunmente empleados.

En las operaciones se hace uso de un juego de dos miras que reunen tres tipos de división; una de ellas mide 4,40 metros de altura y lleva las escalas 1 y 2 del modelo adjunto, la otra solo tiene dos metros y lleva las divisiones 2 y 3 destinadas á la apreciación de distancias menores.

La unidad de las miras, adoptadas por Porro y hoy muy generalizadas, es de 4 centímetros; esto es 4 centímetros = 1 unidad, esta se halla dividida en 2 partes en las escalas número 1, en 5 en la número 2 y en 10 en la número 3; midiendo cada división 2 centímetros, 8 milímetros y 4 milímetros respectivamente. (Véase página 561).



Estas divisiones ó magnitud de las divisiones en las miras especiales, conviene sean trazadas de modo que una unidad corresponda á una parte alícuota de la distancia, de manera que las sumas ó restas efectuadas con los números leidos directamente sobre la mira, den un número que sea la distancia buscada sobre el terreno. De no ser así, habrá que multiplicar el resultado por el factor, lo que aumenta las operaciones.

Cada constructor dispone sus miras en relación con los ángulos diastimométricos que tiene el anteojo de sus taquímetros.

Para mayores detalles, véase lo dicho al tratar de los retículos.

*Regla logarítmica.* Se compone de dos partes; la regla propiamente dicha en cuyo centro existe, una hendidura para la reglita corrediza y la regla corrediza.

Sobre la regla fija se encuentran á cada lado de la hendidura una escala de los números, son iguales entre sí y permiten hacer dos cálculos á un tiempo.

En una de las caras de la corrediza se encuentra: en una de sus aristas la escala de *las tangentes* y la de los *senos cuadrados* y *partes iguales* ocupan la otra arista.

En la cara opuesta se encuentran en una arista la escala de los senos y en la otra una de números.

*Escalas fijas de los números*; están formadas cada una en tres grupos numerados y divididos de 10 á 20, de 20 á 40, y de 40 á 100; la una lleva esta numeración y la otra la de 100 á 200, 200 á 400 y 400 á 1.000.

1.° *Escala movible de los senos* cuadrados, correspondiendo éstos á la dedución de la distancia y no debiendo en la práctica ser el ángulo $\varphi$ menor de 40 gradas, esta escala solo se extiende de 40 á 100 gradas; se halla formada de cuatro grupos que son: 1.° de 40 á 60 con intérvalos de 0,2; 2.° de 60 á 80 con intérvalos de 0,50; 3.° de 80 á 90 con intérvalos de 1 grada y 4.° de 90 á 100 con intérvalos de 2 gradas.

Hay sobre la regla 2 escalas de $\text{sen}^2$ ; la una con su orígen á la izquierda y la otra con su origen á la derecha. La que tiene su orígen á la izquierda permite calcular por un solo movimiento las distancias y las alturas. Por la operación de hallar la distancia, el origen de la escala de senos se halla colocado sobre la distancia leída en la escala inferior de los números. En el mismo instante, una de las características de la escala de las tagentes se encuentra bajo la lectura de la misma distancia leída en la escala superior de los números, esto es, en posición para dar la altura indicada por el orígen.

La escala que tiene su orígen á la derecha parece preferible para calcular solo las distancias; el orígen colocado sobre el número generador S, la distancia se lee bajo el ángulo.

Las escalas de senos[2] comprenden 60 gradas llevando dos numeraciones, la primera corresponde á los ángulos del 1.er cuadrante y la segunda á los del 2.° cuadrante.

2.° *Escala de senos*, de característica 8 y 9 se hallan divididas en 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grupos | de | 0 á 2 | grados | con | intérvalos | de | 0.01 |
| » | » | 2 á 4 | » | » | » | » | 0.02 |
| » | » | 4 á 10 | » | » | » | » | 0.05 |
| » | » | 10 á 20 | » | » | » | » | 0.10 |
| » | » | 20 á 40 | » | » | » | » | 0.20 |
| » | » | 40 á 60 | » | » | » | » | 0.50 |
| » | » | 60 á 90 | » | » | » | » | 1.00 |
| » | » | 90 á 100 | » | » | » | » | 5.00 |

llevan 2 numeraciones, la superior va de izquierda á derecha indicando los senos de los ángulos del 1.er cuadrante; la inferior va de derecha á izquierda indicando los ángulos del 2.° cuadrante.

Los cosenos de un cuadrante siendo iguales á los senos del mismo ángulo en el cuadrante inmediato; ésta doble numeración indica los senos y cosenos de los 2 primeros cuadrantes. Así el coseno de 65° del 1.er cuadrante, igual al seno de 165° en el segundo; así mismo el seno y coseno de 365° es igual al 4.°, al seno de 65 con su signo y al coseno de 165 con su signo. Esta disposición en la escala permite hallar con una sola colocación de las reglas el valor de las coordenadas $x$, $y$.

La división sexagesimal no se prestaría á esa combinación.

3.° *La escala de las tangentes* con solo las características de 8 y 9, están divididas en 5 grupos iguales en un todo á los 5 grupos de la escala de los senos, pero llegando el 5.° hasta 50 gradas.

La disposición de las numeraciones es igual á la de la escala precedente y la relación entre la tangente y cotangente igual á la del seno y coseno.

Si llegara á emplearse un ángulo menor de 50", es necesario para la tangente restar del largo del radio, sea de la distancia contada sobre la escala de los números, la parte de la escala de las tangentes comprendidas entre el ángulo y su extremo derecho marcado 50°; para la cotangente esta misma distancia debe sumarse.

4.° *Escala de partes iguales*, tiene el largo de una unidad ó característica y se halla dividida en $^4/_{10}$ de milímetro; lleva dos hileras de cifras la superior de izquierda á derecha indica los logaritmos; la de derecha á izquierda indica los complementos aritméticos.

*Uso de la regla.* Llamando: $o$ el orígen de una de las escalas $\varphi =$ el ángulo $S =$ el número generador $d =$ distancia para $\varphi = 94°$ $S = 104^m$

Se hace: para colocar una distancia $d = S \operatorname{sen}^2 \varphi$

$$\text{dis} \quad \begin{array}{l} \text{Corrediza} \\ \text{Regla....} \end{array} \quad \frac{o}{d} \qquad \frac{\varphi}{S} \ \text{(disposición)}$$

Esto es, colocando la división 94° de la escala senos², frente á la división 103ᵐ de la escala de los números, el índice o de la 1.ᵉʳ escala se hallará frente á la división correspondiente á d, esto es 104ᵐ.

En esta posición de las escalas, puede observarse que una de las características (la 9) de la escala de las tangentes, está igualmente frente á la división 104 de la escala superior de los números, de manera, que haciendo la lectura de la cantidad indicada por el orígen o de la escala de tangentes $\frac{3}{95}$ se leerá 9.84 que es el valor de la tangente.

El ángulo $\varphi$ siendo inferior á 100 gradas, la lectura se ha hecho en la fila superior de las cifras de la escala; si hubiera sido mayor la lectura, se habría hecho sobre la fila inferior.

Para hacer el cálculo con la 2.ª escala de los senos² que tiene su orígen á la derecha se pone

$$\text{posición} \quad \frac{\text{Corrediza } \varphi}{\text{Regla} \ldots \ d} \quad \frac{0}{S} \qquad \text{figura 3}$$

siendo

$$\varphi = 120^{\circ} \quad \text{y} \quad S = 95,$$

se lée 85.90 para d en la escala de los números frente á 120°; la misma cifra 85.90 corresponde al ángulo de 80 gradas sobre la inscripción superior lo que indica que la operación sería la misma, si el ángulo fuera inferior á 100°.

*Cálculo de la altura.*—Sea $\varphi = 94^{\circ}$ y $d = 104^{m}$ (fig. 4).

Colocando la característica 9 de la escala tangente sobre la división 104 de la segunda escala de números (la que tiene su orígen á la izquierda) y frente á la división de 94° (en la numeración de derecha á izquierda), se lee la cantidad 9.84 que corresponde á la altura buscada.

Si el ángulo fuera de 106° con la misma distancia 104, la operación dá el mismo resultado, pues que en la escala se tiene $\frac{94}{106}$, pero el resultado daría signo contrario al anterior, pues que la indicación del ángulo 106° demuestra que la altura es sustractiva, bajo la horizontal del anteojo.

Si el ángulo es inferior, por ejemplo, 0°.637, se asigna al ángulo un valor 10,100 á veces mayor, para poder hacer uso de la característica 8. El resultado será igualmente 10,100 á veces mayor.

Cálculo de las fórmulas $x = D \operatorname{sen} \theta$ $y = D \cos \theta$ sea $D = 255^m$ y $\theta = 35°60$ (figura 6).

Se coloca el extremo derecho de la escala de senos (señalada 100), frente á la división 255 de la escala de números y frente á la división 35°60 que se encuentra escrita, en la numeración que va de izquierda á derecha se encuentra la división de $135^m50$. Sin mover la corrediza se leerá frente á la división 135°60 de los senos la división correspondiente en la escala de los números, hallando entonces 216,20 que corresponde al valor de $y$.

La distancia $D = 255^m$ ángulo $\theta = 335°60$. El ángulo 335°60 es como el ángulo 135°60. Colocando el extremo derecho de la escala de senos frente á 255 de la segunda escala de números y fijándose en la división correspondiente al ángulo 135°60, se ve que cae frente á 216,20 que corresponde á $x$, mientras que frente á 35°60 se lee 135,00 que corresponderá á $y$.

Para hallar el cuarto término de una proporción a : b :: c : x hay que emplear la corrediza con la escala de los números (figura 9) y se tiene

$\frac{b}{a}$ $\frac{x}{c}$ ó también $\frac{x}{c}$ $\frac{b}{a}$ como disposición sea 2.500 : 1 :: 110 : x.

Colocando la división 100 de la corrediza, la que también corresponde á 1 frente á 250 que corresponde igualmente á 2.500 y luego frente á la división 110 de la escala se lee 44 en la escala de la corrediza.

*Escala de partes iguales.*—Si se coloca el 0 ó 100 de la escala de partes iguales de la corrediza sobre el orígen izquierdo de la regla de los números, (fig. 1) con esta posición se leerán los logaritmos de todos los números y podrá extraerse toda raiz.

Hallar el logaritmo de 871.084, frente á la división que indica el número 87.1 se lee en la corrediza 940 que será la mantiza del logaritmo buscado, la característica correspondiente, siendo cinco el logaritmo buscado, es pues, 5,940.

Hallar la raíz cúbica de 871.084, hallado su logaritmo como queda expuesto y divididos por 3 que corresponde á $\frac{1}{3}$ 5.940 se halla 1.980, leyendo luego en la escala de partes iguales la división que se halla en frente en la escala de los números se halla 955 y como la característica es 1 la raíz cúbica buscada, es pues, 95,50.

La adjunta copia de la escala logarítmica y sus corredizas puede ser utilizada, sustituyendo el movimiento de las corredizas con tomar con el compás las distancias en en estas y aplicarlas convenientemente sobre las escalas de la regla fija.

### División centesimal de la circunferencia

No sólo para uniformar el método de cálculos sino aún para facilitar la apreciación de la lectura, conviene la división centesimal.

El ángulo recto que en el sistema sexagesimal representa 90 grados, en el centesimal tiene 100 gradas, la circunferencia, tiene pues, 400 gradas.

Siguiendo la subdivisión centesimal, se tiene:

| | | |
|---|---|---|
| 1 recto = 100 (gradas) | ........ | 1 recto = 90° |
| 1 grada = 100' (minutos) | ........ | 1° = 60' |
| 1 minuto = 0° 01" = 100" (segundos) | ........ | 1' = 60" |
| 1 grada = 10.000" (segundos) | ........ | 1 grada = 3600" |

Resulta de lo que precede:

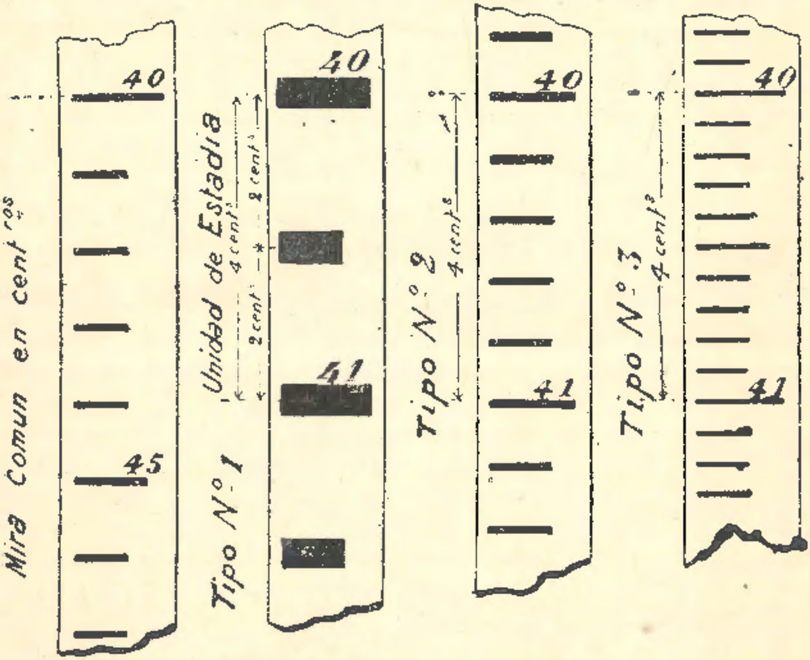
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 grada = 0° 54' | ....... | 1° = 1 gr. 11' 11" | |
| 1 minuto = 0° 00' 32",40 | ....... | 1' = 0 gr. 01' 85' | = 0 gr. 0185 |
| 1 segundo = 0° 00' 00",324 | ....... | 1" = 0 gr 00' 03",08 | = 0 gr. 000308 |

Los limbos centesimales tienen el grado dividido generalmente en 10 partes representando cada una 10 minutos, lo que permite apreciar un ángulo con unidades de minuto, esto es, una parte de una de estas divisiones de 10 minutos.

Así: un ángulo que mide $42^g\ 67'$ y que representa una parte del ángulo recto igual á $\frac{4.267}{10.000}$, tiene por expresión en minutos sexagesimales

$$10.000 : (90 \times 60 = 5.400') :: 4.267 : x' = 38^\circ\ 24'\ 10'',80$$

Por esta proporción puede hacerse cualquier reducción.



## MODELO DE LA HOJA DE UNA

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ESTACIONES | Altura del instrumento | Número de los puntos | ÁNGULOS<br>Horizontal | <br>Vertical | Lectura de los hilos | Número generador | Altura visual hilo [illegible] | [illegible]tancia [illegible]izonta[illegible] |
| Estación en 1 | 1.35 | P. 1 | | | | | | |
| 12 Junio, a. m.<br>Buen tiempo | | P. 2 | 383° 98 | 101,94 | 589,0<br>300,0 | 289,0 | [illegible] | 288,8 |
| | | a | 266° 30 | 105.70 | 754,0<br>600,0 | 154,0 | [illegible] | 153,0 |
| | | b | 191° 10 | 100,70 | 165,0<br>100,0 | 65,0 | [illegible] | 65,0 |
| | | c | 310° 10 | 106,70 | 735,0<br>600,0 | 135.0 | [illegible] | 133,5 |
| | | | | | | | | |
| Estación en 2 | 1.31 | P. 2 | | | | | | |
| | | P. 1 | 183,88 | 97,90 | 388,0<br>100,0 | 288,0 | [illegible] | 287,8 |
| | | P. 3 | 385,42 | 100,91 | 725,0<br>200,0 | 525,0 | [illegible] | 525,0 |
| | | 1 | 143,70 | 93,20 | 161,0<br>100,0 | 61,0 | [illegible] | 60,3 |
| | | 2 | 32,70 | 95,30 | 287,0<br>200,0 | 87,0 | [illegible] | 86,5 |
| | | 3 | 12,90 | 97,70 | 405,0<br>200,0 | 205,0 | [illegible] | 204,7 |
| | | | | | | | | |
| Estación en 3 | 1.35 | P. 3 | | | | | | |
| | | P. 2 | 186.12 | 98,13 | 625,0<br>100,0 | 525.0 | [illegible] | 525,0 |
| | | P. 4 | 389,82 | 98,82 | 642,0<br>300,0 | 342,0 | [illegible] | 342.0 |
| | | a | 81,80 | 88.70 | 226,0<br>100,0 | 126,0 | [illegible] | 122,10 |

## LA HOJA DE UNA CARTERA

| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Al[illegible] visual hilo [illegible] | [illegible]tancia [illegible]izontal | DIFERENCIAS DE NIVEL | | Cotas de la mira | Cotas finales | OBSERVACIONES |
| | | Subiendo | Bajando | | | |
| | | | | (96,29) | 94,94 | La división horizontal es 0º á la izquierda, 100º al punto y 200º á la derecha. |
| [illegible] | [illegible]88,8 | | 8,30 | 87,49<br>2,22 | 85,27 | |
| [illegible] | [illegible]53,0 | | 13,71 | 82,58<br>3,38 | 79,20 | |
| [illegible] | [illegible]55,0 | | 0,72 | 95,57<br>0,66 | 94,91 | |
| [illegible] | [illegible]33,5 | | 14,10 | 82,19<br>3,34 | 78,85 | |
| | | | | | | |
| | | | | (86,62) | 85,31 | $\begin{array}{r}86,58\\+\ 0,04\\\hline 86,62\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}85,27\\+\ 0,04\\\hline 85,31\end{array}$ |
| [illegible] | [illegible]87,8 | 9,49 | | 96,07<br>1,22 | 94,94<br>94,85 | Dif. $\frac{0,09}{2} = 0,04$ |
| 468,5 | 525,0 | | 7,50 | 79,12<br>2,31 | 76,81 | |
| [illegible] | [illegible]0,3 | 6,47 | | 93,09<br>0,65 | 92,44 | |
| 245,5 | [illegible]36,5 | 6,40 | | 93,02<br>1,22 | 91,80 | |
| 302,5 | 204,7 | 7,40 | | 94,02<br>1,51 | 92,51 | |
| | | | | | | |
| | | | | (78,23)<br>1,35 | 76,88 | $\begin{array}{r}78,16\\+\ 0,07\\\hline 78,23\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}76,81\\+\ 0,07\\\hline 76,88\end{array}$ |
| [illegible] | 625,0 | 8,82 | | 86,98<br>1,81 | 85,31<br>85,17 | Dif. $\frac{0,14}{2} = 0,07$ |
| [illegible] | 342,0 | 6,34 | | 84,57<br>2,35 | 82,22 | |
| [illegible] | [illegible]22,10 | 21,90 | | 100,13<br>0,81 | 99,32 | |

# GEODESIA EXPEDITIVA

Las exploraciones geográficas ofrecen al Agrimensor ó Ingeniero Geógrafo un vasto campo para poner en práctica sus conocimientos generales, siendo el caso de aprovechar todos los métodos conocidos para hacer grandes relevamientos en el menor tiempo. En estas funciones de topógrafo ó geógrafo el mejor resultado será obtenido por el que tenga más posesión de los medios de que puede disponer para la fijación de puntos y más pronta concepción para darse cuenta de la topografía que se le presenta en su horizonte y del partido que puede sacar de ella.

También debe tener presente especialmente dos principios propios á las expediciones de este género, que por lo general se hacen en regiones desconocidas, donde la marcha es difícil y en la cual debe hacerse el mayor recorrido empleando el menor tiempo; estos son: 1.º Todo exceso de comodidad se traduce en convoy pesado y por lo tanto, necesita más gente y medios de trasporte y más tiempo de viage. 2.º El objeto de la expedición, el propósito que quiere realizar, debe ser su única preocupación, para lo cual debe concebir anticipadamente su plan, modificarlo según las circunstancias de «los imprevistos» evitando en lo posible las contramarchas que le harán *perder tiempo* y la hilación de su trabajo.

La organización de una expedición exploradora debe comprender las siguientes partidas: 1.° reunión y clasificación de los planos, datos geográficos, detalles, etc., que existan, ya de la región que se recorrerá, ya de las circunvecinas, son los antecedentes; 2.° el material de trabajo compuesto de los instrumentos que debe llevar para la realización de su propósito; 3.° la organización de la expedición, comprendiendo: acomodo del equipaje, elección del personal, adquisición de los medios de transporte y los de alimentación, etc., etc.

Cada una de estas partidas tiene su importancia vital para el éxito de la expedición, y debe preocupar sériamente al explorador. Como punto de partida se agregará al final de este capítulo un extracto de la composición habitual de cada una de estas dos últimas partidas.

Organizada la expedición y llegado el momento de acción en la región que se va á explorar, empieza lo imprevisto y de antemano sólo puede fijarse el procedimiento metódico que se seguirá en las observaciones en general y los procedimientos predominantes para la operación del *relevamiento topográfico,* esto es: por determinaciones geográficas, por triangulación, por rodeo, etc., etc.

La base de todo relevamiento topográfico de una zona, es seguramente la triangulación. En el modo de ejecutarla reside la diferencia de la geodesia expeditiva y la geodesia, propiamente dicho, en la primera no puede medirse una base con la exactitud reclamada en la segunda, no pueden construirse señales ni puede muchas veces llevarse la red de triángulos con la regularidad necesaria; hay circunstancias que la hacen interrumpir, teniendo entonces que valerse de otros medios para fijar la situación relativa de un nuevo punto (problema de los tres puntos), desde el cual se empezará una nueva cadena de triángulos, por fin, en la expeditiva son aplicables hasta los métodos aproximativos.

Hay, pues, que basarse en general en los accidentes naturales y partir, siempre que sea posible, de un punto ya determinado por sus coordenadas geográficas.

Generalmente se clasifican los puntos fijados y á fijarse en *principales* y *secundarios*.

Los principales son aquellos que por su posición y condiciones ventajosas sirven de estaciones principales, prestándose á que se determine su situación geográfica y á practicar en ellos todas las observaciones fundamentales, como la dirección de visuales, vistas fotográficas, anotaciones barométricas y termométricas, etc., etc.

En la misma categoría de principales, se encuentran también los puntos muy visibles, como ser picos de cerros altos, que quedarán fijados por visuales tomadas con cuidado (con el teodolito) y que á su vez servirán para la determinación de otros puntos secundarios. No será posible en la mayor parte de los casos y hasta sería innecesario estacionar en todos los puntos principales.

*Los secundarios* son los que se fijan en estacionamientos más rápidos, por medio de visuales á los principales; desde ellos se determinarán también otros del mismo orden constituyéndose así los triángulos de 2.° orden.

Como se comprende, el azimut verdadero y magnético desempeñan un rol importantísimo; el primero servirá para la orientación general y dar á conocer la declinación magnética de los demás instrumentos; el segundo facilitará la situación de infinidad de puntos intermediarios por medio de tres ó más visuales dirigidas á puntos ya determinados.

A más de los apuntes especiales correspondientes á la fijación de los puntos de 1.er y 2.° orden; debe llevarse una cartera de croquis en papel cuadriculado, adoptando al efecto una escala; en ese croquis se dibujará la topografía de una determinada zona, apreciando las distancias y fijando los azimutes tomados con el compás prismático; conviene acompañar este croquis con vistas de diferentes puntos del horizonte en las cuales se indicarán con letras ú otros signos, los puntos principales y secundarios; así como los accidentes que convenga tener presente á la memoria cuando se construya el plano definitivo.

Como se ve por esta breve reseña, el explorador estará contínuamente ocupado y preocupado, el trabajo, la marcha, las observaciones, cálculos y construcción del borrador del mapa general le acordarán poco descanso.

**Medición de la base**

Como no es posible pretender en operaciones de *geodesia expeditiva*, medir bases de precisión por los métodos expuestos en el capitulo correspondiente, hay que buscar los medios fáciles, rápidos y seguros que pueden emplearse en tales circunstancias.

Conviene, pues, tener presente los siguientes métodos, muy generalmente adoptados y suceptibles, algunos de suficiente exactitud para proporcionar resultados generales muy satisfactorios.

1.º—Medida con la cinta de acero por un terreno llano y previamente carpido en la alineación más adaptable á la localidad.

Para la longitud de esa base conviene tener presente los preceptos ya indicados, repetir la medición varias vaces en sentido inverso para adoptar el término medio y sí ha habido que adoptar una línea quebrada, reducirla á la recta.

Este método parece ser el más seguro de todos los que se pueden emplear en tales circunstancias, pero requiere que se tomen todas las precauciones para hacer la medición exactamente.

2.º—En una de las estaciones ó extremos de la base, puede dejarse un jalón, ó una mira, ó un palo cualquiera. Con el objeto de presentar de una manera bien aparente y *definida*, á esa señal se le da una altura h, de 2, 4 ó más metros; luego si desde la otra estación ó extremo de la base, se mide el ángulo vertical $\varphi$, formado por los dos extremos de la altura h, la distancia horizontal entre las dos estaciones será dada por la fórmula deducida de:

$$1 : \tan \varphi :: D : h$$

de donde

$$D = \frac{h}{\tan \varphi}$$

Para medir el ángulo $\varphi$, se procederá por repetición varias veces, habiendo colocado en cero el círculo vertical y dirigido en tal estado la visual á uno de los extremos h. Siendo $S^o$ la lectura final y n el número de repeticiones hechas, se tendrá:

$$\varphi = \frac{S^o}{n}$$

Lo más acertado en este caso es hacer uso de un anteojo micrométrico siempre que la distancia D lo permita ó que se asigne á h, una altura de consideración.

3.°—Si en las dos estaciones A y B, extremos de la base á determinar se dispara casi simultáneamente un tiro de fusil, por ejemplo, y que en ambos puntos se anota con toda exactitud: el instante en que se ha visto la luz ó fogonazo y percibido el ruido, se tendrá el tiempo empleado por el sonido en recorrer el espacio entre A y B; el termino medio de una série de observaciones pares dará con bastante exactitud ese tiempo t''.

Luego, como la velocidad del sonido, en un aire seco y á la temperatura media de 15 grados es de $341^m$, 30 en un segundo, la distancia D buscada será dada por

$$D = t'' \times 341^{m},30$$

Fundándose en este principio se ha construido el *Phono-telémetro* de Thouvenin, aplicado á un reloj de bolsillo; consiste en la adaptación de una segunda esfera en la parte opuesta á la de las horas, esfera que se halla dividida en 15 partes ó segundos y cada segundo en 10 partes, lo que permite apreciar décimos de segundos y aun centésimos por la repetición. La aguja ó minutero que recorre esa esfera hace cuatro vueltas en un minuto lo que implica á decir que por esa combinación puede leerse en el mismo reloj, la hora, los minutos, segundos y fracciones con toda facilidad y exactitud.

Para mayor exactitud hay que corregir la distancia hallada de los errores provenientes del estado atmosférico; en su consecuencia, llamando $t$ y $t'$ el número de segundos anotados por cada observador, $\varphi$ y $\varphi'$ la temperatura en cada una de las estaciones y $f$ $f'$ la tensión del vapor de agua contenida en la atmósfera supuesta inferior á 35 milímetros (si el aire fuera muy seco, puede despreciarse ese último término), se tendría para la velocidad real y corregida

$$v' = 341^{m},30 + 0.6058\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} - 15\right) + 0.085\left(\frac{f - f'}{2}\right)$$

y finalmente para la distancia corregida

$$D = \left(\frac{t + t'}{2}\right) v'$$

Sirviéndose de un higrómetro á condensación se tienen los siguientes valores para el coeficiente $f$.

| Temperatura en Centígrados | Coeficiente ∫ en milímetros | Temperatura en Centígrados | Coeficiente ∫ en milímetros |
|---|---|---|---|
| — 20° | 1.30 | 15° | 13.00 |
| — 10° | 2.60 | 20° | 17.30 |
| — 5° | 3.70 | 25° | 23.00 |
| — 0° | 5.00 | 30° | 30.10 |
| + 5° | 7.00 | 35° | 40.40 |
| + 10° | 9.50 | 40° | 53.00 |

4.°—También puede fijarse el largo de una base por observaciones Astronómicas, determinando la posición geográfica de los dos extremos de la base.

Es un método muy adecuado á ciertas localidades donde materialmente se hace imposible medir bases con la cinta.

Como las causas de errores serán independientes del largo de la base, es preferible dar á esta mucha extensión y siempre que sea posible establecerla en el sentido del meridiano, pues en semejante caso, solo habrá que hallar la diferencia de latitud de los dos estremos, operación relativamente fácil y exacta.

Conviene también recordar que en el presente caso, *la diferencia de longitud* que interesa conocer, es puramente local, refiriéndose á los extremos de la base; podrá, pues, obtenerse, transportando por el cronómetro ó el reloj de uno de los extremos al otro, la hora hallada y deduciendo luego la diferencia buscada con la hora local.

La determinación de la distancia entre los puntos A y B, sea la base buscada, puede dar lugar á cálculos más ó menos largos según la situación respectiva de los puntos y la distancia estimada.

La apreciación puede clasificarse en dos grupos: 1.º si los dos extremos se hallan próximamente sobre un mismo paralelo ó mismo meridiano; 2.º si cada uno tiene una posición diferente.

En el 1er caso, sea en A, la latitud $\varphi = 32^\circ$ y longitud

$$\omega = 5^\circ \text{ 0 de B. A.}$$

en B, la latitud $\varphi' = 31^\circ\ 43'\ 13''$ y longitud $\omega' = 5^\circ\ 2'$
diferencia

$$(\varphi - \varphi') = 0^\circ\ 16'\ 47''$$

Buscando en la tabla correspondiente el largo de un segundo de meridiano entre las latitudes 31 y 32 se tiene: $30^m,79$ luego la base A B tendrá por extensión:

$$D = 30^m,79 \times 1007'' = 31005^m,53$$

Los puntos A y B están próximamente en la misma latitud 31°25' y la diferencia de longitud hallada es de 8' 32''.

La tabla da para 1'' en esa latitud: $1'' = 26^m43$ luego

$$A\ B = D = 26^\circ,43 \times 512'' = 13.532,16 \text{ metros}$$

En el segundo caso son conocidas las coordenadas geográficas de ambos puntos, pero como por lo general la base á calcular no excederá de 15 á 20.000 metros, la resolución del problema podrá hacerse directamente por la trigonometría esférica sustituyendo al radio terrestre, la normal correspondiente á la latitud media de los puntos, ó más simplemente emplear las siguientes fórmulas:

$$\text{tang } \beta = \frac{P}{(\varphi - \varphi')} \cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right); \qquad d = \frac{\varphi - \varphi'}{\cos \beta}$$

En la que $\varphi$, $\varphi'$ indican las respectivas latitudes expresadas en segundos y, P la diferencia de longitud también en segundos.

5.º—También puede determinarse la base empleando el Taquímetro, el anteojo micrométrico, el telémetro con los cuales, como es sabido, fácil es apreciar distancias que no excedan de mil metros.

La determinación de bases por medio de estos instrumentos no necesita mayores explicaciones.

En esta clase de trabajos es conveniente medir varias bases en diferentes puntos, servirán de confrontación y para corregir cualquier error cometido ó acumulado.

## Formación de triángulos

Conocida la base y fijada en extensión y azimut, se continúa la operación dirigiendo de cada uno de los extremos de la base definitiva, visuales á todos los objetos notables y especialmente á las cimas de los cerros más elevados, debiendo anotarse los que por alguna particularidad puedan ser reconocidos más fácilmente desde otras estaciones.

En la serie de ángulos azimutales observados en cada estación, deberán distinguirse por su anotación especial, aquellos que correspondan á los futuros vértices de los triángulos principales, pero en los cuales no se podrá hacer estación, y aquellos donde la estación sea posible; así mismo se procurará clasificar los demás puntos observados.

Al proceder en este órden de trabajo, debe siempre tenerse presente que esa triangulación se hace en condiciones incompletas, que no solo hay ausencia completa de señales trigonométricas sino que la mayor parte de los triángulos serán formados solo por visuales y que cuanto más, tendrán solo dos ángulos medidos.

También convendrá fijar cada uno de esos puntos principales y fáciles de ser reconocidos, por el mayor número posible de visuales, como así mismo todos aquellos que á su vez puedan servir de puntos secundarios.

Muchas veces habrá que situar puntos aislados, no comprendidos en los fijados por visuales, entonces podrá resolverse el problema, tomando los ángulos azimutales con tres puntos ya determinados de una manera segura. La aplicación del problema, llamado generalmente de los *tres puntos* ó *de la carta*, es sacarlo muy frecuente y muy útil en la geodesia expeditiva así como en la Hidrografía; conviene tenerlo presente en sus diferentes faces para utilizarlo con provecho.

Finalmente de cada estación conviene fijar la topografía inmediata, á cuyo efecto se hace primeramente un croquis marcando los principales accidentes del terreno y luego se dirige á ellos visuales, anotándose el ángulo azimutal y apreciando la distancia á cada uno de ellos ya con el anteojo, estadía ó micrométrico, ya con el anteojo analático del teodolito si lo tiene, ó con el taquímetro si es el instrumento de que se dispone.

Adelantando de esta manera, metódicamente se habrá hecho en poco tiempo mucho trabajo útil.

Este trabajo de relevamiento lleva un gran auxiliar en el azimut magnético, y para mayor exactitud del todo, convendrá deducir diariamente la declinación magnética para conocer el estado de la brújula y poder emplear el azimut verdadero.

Para el cálculo de los lados de los triángulos se aplicará en general la trigonometría rectilínea, pues aún en los casos de haberse podido medir los 3 ángulos, con rebajar el tercio del exceso esférico á cada ángulo se podrá aplicar el *teorema de Legendre.*

### Coordenadas

Conocidos los lados de los triángulos y aún el azimut de las visuales dirigidas á los puntos de segundo orden y de detalle, se calcularán las coordenadas rectangulares de cada vértice sobre el meridiano adoptado, que puede ser el que pasa por el punto de partida ó sea principio del trabajo.

Las coordenadas de cada linea en función de su extensión y de su azimut serán dadas por las fórmulas:

abcisa sobre el meridiano $x = a \cos \alpha$

ordenada sobre el meridiano $y = a \operatorname{sen} \alpha$

siendo a la extensión en metros y $\alpha$ el azimut de la línea. Luego, para tener las coordenadas absolutas sobre el meridiano de proyección, basta hacer la suma algebráica de las parciales con el cróquis á la vista.

*Coordenadas geográficas.*—Siempre que sea posible determinar la posición geográfica de una estación por observaciones astronómicas, será preciso hacerlo porque constituyen medios de verificación del trabajo en general ó por lo menos de comparación. Las determinaciones de latitudes y azimutes y tiempo local pueden ser hechas por los métodos expuestos en el correspondiente capítulo de la geodesia, fácilmente pueden hacerse varias veces al día y á cualquier hora, no sucediendo lo mismo con la determinación de la longitud; pero podría obtenerse con bastante aproximación si las circunstancias se prestan á ello, por el sistema de ocultaciones de estrellas por la Luna. Obtenida la longitud de uno ó más puntos con una aproximación satisfactoria y aún de estima, deduciéndola de la relación entre la estación y una localidad de posición conocida, convendrá determinar la hora local de esa estación y mantener un reloj arreglado á esa hora ó tener anotada la diferencia, entonces al determinar la hora local de cualquier otro punto, podrá deducirse la diferencia de longitud parcial entre estas dos estaciones, dato importante para el éxito del trabajo que se ejecuta.

El conocimiento de la longitud absoluta de uno ó más puntos de la triangulación es importante como dato geográfico porque permitirá situar toda la zona relevada, pero para la ejecución del trabajo lo que interesa más conocer es la diferencia de longitud parcial entre los diferentes vértices de la triangulación.

Conocidos los elementos P = diferencia de longitud entre dos puntos y, $(\varphi - \varphi')$ = diferencia de latitud de los mismos, fácil será deducir el largo de la línea que los liga así como su azimut y de ello deducir sus coordenadas al meridiano.

Haciendo:

$$l = 90 - \varphi, \text{ complemento de latitud del punto A}$$

y $$l' = 90 - \varphi', \text{ complemento de latitud del punto B}$$

se tendrá

$$\tan\beta = \tan l \cos P \quad , \quad \tan d = \frac{\tan(l' - \beta)}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{\tan P \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(l' - \beta)}$$

fórmulas que darán la distancia A B y el azimut de A B sobre el horizonte de A.

O más simplemente aún: si P ó $(\varphi - \varphi')$ no llegan á 3 grados lo que muy raras veces sucederá:

$$\tan\beta = \frac{P}{(\varphi - \varphi')} \cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) \quad ; \quad d = \frac{\varphi - \varphi'}{\cos\beta}$$

(expresión dada en segundos)

$$\operatorname{sen} A = \frac{\cos\varphi' \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} d}$$

$$x = d \cos A \quad , \quad y = d \operatorname{sen} A$$

## Altimetría

Las alturas relativas de los vértices principales pueden obtenerse, ya por la observación de su altura zenital, ya por las observaciones barométricas ó ipsométricas.

En cuanto á las del relevamiento de detalle se obtendrán, ya por los mismos procedimientos, ya por el empleo del taquímetro.

Las fórmulas aplicables y el procedimiento, queda expuesto en la primera parte de este tomo al tratar de los instrumentos.

*La Fotografía.*—El empleo de la fotografía constituye un gran auxiliar del geógrafo para su trabajo de relevamiento; empleando el fotográmetro ó fototeodolito se obtendrán vistas matemáticas del panorama visto desde la estación. Estas fotografías, en las cuales aparece la línea del horizonte del teodolito y el punto central cuyo azimut se ha observado, y para la cual se conoce la distancia focal del aparato fotográfico, permiten ser proyectadas sobre el plano, manteniendo las respectivas posiciones de los puntos reproducidos ó visibles.

La combinacion de estas vistas, tomadas sistemáticamente de diferentes estaciones y en las cuales se distinguen puntos notables y señalados, permiten llenar todos los espacios comprendidos por los costados de los triángulos y al mismo tiempo completar la topografía de detalle.

De las mismas fotografías se deducirán también las alturas relativas de los accidentes del terreno y de ahí se deducirá la altitud de ellos por su combinación con los puntos de altitud conocida.

El empleo y detalles de este procedimiento se encuentra en la primera parte de este tomo en el capítulo de los instrumentos.

*Expedición.*—Como complemento de lo que precede, parece conveniente recordar los elementos principales que debe tener el geógrafo en una expedición de relevamiento y formación de la carta geográfica de una vasta zona desconocida y tal vez desprovista de todos los recursos necesarios para la vida.

El jefe de la expedición debe, pues, preveer á las siguientes partidas: 1.° su material de trabajo; 2.° sus medios de transporte; 3.° su personal; 4.° sus recursos de alimentación y de comodidades para la vida.

Para satisfacer á la primer partida fácil es enumerar los instrumentos cuya nómina puede ser como sigue:

Un teodolito de tránsito ó un taquímetro, ó el mismo teodolito con anteojo analático.

1 compás prismático, 1 barómetro de mercurio, 2 barómetros aneroide, 1 hipsómetro, 2 ó 3 termómetros, 2 pares anteojos gemelos, 2 buenos relojes, 1 cinta de acero de 25 ó 50 metros, 1 anteojo micrométrico ó un anteojo estadía ó 1 telémetro, 1 fotográmetro ú otro cualquier aparato fotográfico arreglado al efecto con limbo horizontal, etc., etc.

Reglas, escuadras, transportadores y demás útiles de dibujo, así como papel cuadriculado, libretas, etc., etc.

Tablas de logaritmos, un anuario como ser la «Connaissance des temps», el de La Plata ú otro, y una colección de tablas geodésicas. Estos instrumentos son los indispensables y como consecuencia, cada explorador podrá aumentarle aquello que crea de un uso más práctico.

En cuanto á los medios de transporte dependerán seguramente de la región que debe recorrerse, de manera que si no fuera posible llevar un pequeño carro, lo que raras veces sucederá, deben tomarse las disposiciones necesarias para hacer uso de mulas de carga, calculando su número en proporción al material que se llevará.

Por lo que hace al personal puramente de expedición, basta con cuatro hombres para el trabajo y un arriero por cada cuatro mulas.

La cuarta partida quedará satisfecha llevando, una carpa para el explorador, otra para el personal ó simplemente lonas grandes, con las cuales se improvisan carpas y se tapará la carga en tiempos lluviosos; deben llevarse camas abrigadas, sea un pequeño colchón, frazadas y una buena lona impermeable para envolver el todo.

Los víveres deberán ser elegidos entre aquellos de menos bulto y mayor alimentación, sobre todo deberá cuidarse de los medios de tener agua potable. Todas estas disposiciones varían según la localidad y puede encontrarse gente experta y conocedora de la región á recorrer, que dé consejos especiales que deben aprovecharse.

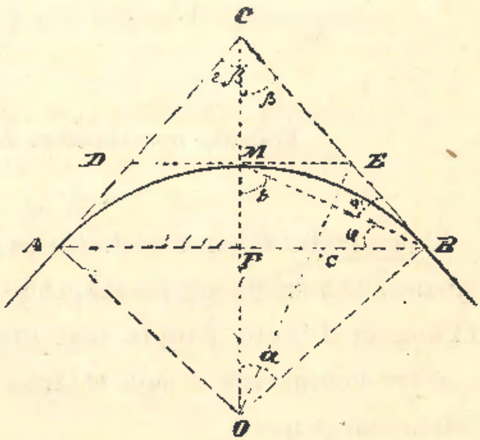
# TRAZADO DE CURVAS

### Trazado del círculo ó de un arco

En el plano se traza con el compás y si el radio es muy grande, con la regla á la cual se aplica el tiralínea especialmente preparado al efecto.

En el terreno, el trazado de un arco de círculo puede hacerse de diferentes maneras, sin contar con el trazado directo, con una cinta de acero, un alambre y un cordel si el radio no es muy grande.

Trazar un arco de círculo A B siendo conocidas las direcciones de las tangentes B C y A C = l' así como el ángulo que forma en C, A C B = 2 β




En el triángulo rectángulo O B C se conoce: B C = t y O C B = β

luego $$O B = r = t \tang \beta$$

Si por lo contrario se conociera el radio O B = r y el ángulo β, el largo de la tangente C B sería;

$$t = \frac{r}{\text{tang } \beta}$$

Angulo $C\,O\,B = a = 90^o - \beta$

» $M\,B\,O = B\,M\,O = b = \frac{1}{2}(90 - a)$

» $M\,B\,P = \varphi = 90 - b = 90 - \frac{1}{2}(90 - a),$

$$\varphi' = (90 - \beta) - \varphi$$

Flecha $M\,P = F = c \text{ tang } \varphi$

Angulo $C\,M\,B = 180^o - (\beta + \varphi') = \delta$

$$\text{Cuerda } M\,B = \frac{t \text{ sen}\beta}{\text{sen } \delta}$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ Cuerda } P\,B = C = t \text{ sen } \beta = r \text{ tang } a$$

$$A\,B = 2\,C = 2\,(t \text{ sen } \beta) = 2\,r \text{ tang } a$$

$$C\,O = \frac{l}{\cos\beta}\,, \quad C\,M = C\,o - r$$

$$\text{Arco } A\,B = \frac{2\,\pi\,r\,a}{180^o}$$

**Trazado por secantes sucesivas**

El desarrollo del arco se divide en un número de partes iguales, de manera que las tangentes $A\,b = l$ sean iguales. El ángulo al centro para la tangente ó arco $l$ será $a$.

Sobre la tangente se mide el largo $l$ y se levanta la perpendicular $b\,B = y$

$$y = b\,B = A\,P = r\,(1 - \cos a)$$

fijado el punto B de la curva y trazada la línea secante $A\,B\,c$ se mide $B\,c = l$ y se levanta la perpendicular $c\,C = 2\,y$ para fijar el punto C de la curva. Este punto

C se liga con B para trazar la nueva secante B C d con C d = $l$ y la ordenada d D = 2 y.

Así se prosigue hasta llegar al punto B empleando siempre las distancias $l$ y la ordenada y.

La teoría de este sistema está fundada en que el ángulo b A B de la tangente y la secante tiene por medida la mitad del arco A B; mientras que el ángulo c B C formado por las dos secantes miden

$$\tfrac{1}{2}\,(A\ C) = A\ B = l$$

Este método es simple y rápido operando con distancias $l$ que no pasen de 50 metros; no es, sin embargo, el más exacto.

### Trazado por tangentes sucesivas

El desarrollo de la curva se dividirá también en partes iguales A B = $l$, y ángulos a al centro iguales.

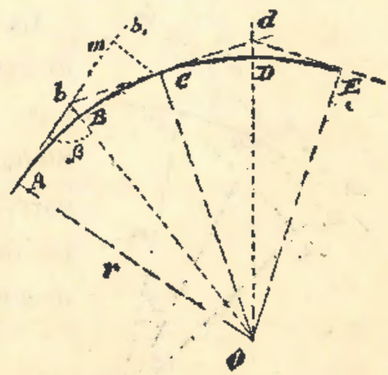
Luego, considerando el arco A C, correspondiente dos ángulos a, y sus tangentes A b, b C d. Se tendrá:

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(180 - 2\,a)$$

$$\text{tang A b} = t = \frac{r}{\text{tang } \beta}$$

bisectriz

$$b\,B = r\left(\frac{1}{\cos a} - 1\right) = f$$




Estos valores son dados por tablas calculadas al efecto para un radio igual á la unidad.

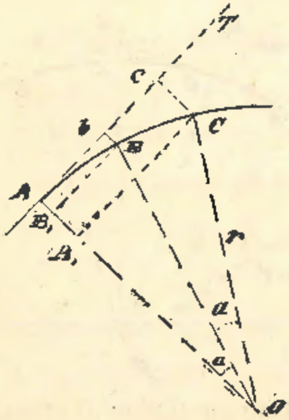
Conocidos estos dos valores, t y f, se mide t sobre la tangente de A á b y formando el ángulo A b B $= \beta$, se mide b B $=$ f para fijar el punto B. Luego formando el ángulo A b C $= 2\ \beta$ ó el punto $b_1$ b C $=$ A O C $= 2$ a, se mide: b C $=$ t para fijar el punto C y luego C d $=$ t, formando asi la línea b C d.

El punto d sirve como el punto b para el trazado de la nueva tangente d E y bisectriz d D.

Como verificación de los puntos C, E, etc., ete., pueden calcularse las coordenadas sobre la tangente; en efecto en el triángulo C b m se conoce b C $=$ t y ángulo C b m $= 2$ a, se tendrá:

$$y = t \text{ sen } 2\ a, \quad x = t \cos 2\ a$$

## Por coordenadas sobre la tangente

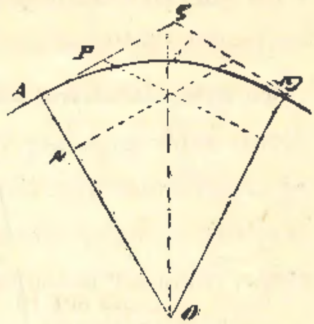



La tangente A T sirve para eje de las abcisas x y el radio A O para eje de las ordenadas y. Siendo a el ángulo al centro que corresponde á las divisiones iguales del arco total á trazarse y conocido el radio A O $=$ r, se tiene:

$$A\ b = B\ B_1 = x = r \text{ sen } a$$

$$b\ B = A\ O - B_1\ O = r - (r \cos a) = r\ (1 - \cos a)$$

Este método es rápido y exacto, conviene darle la preferencia cada vez que el terreno se presta á su empleo.



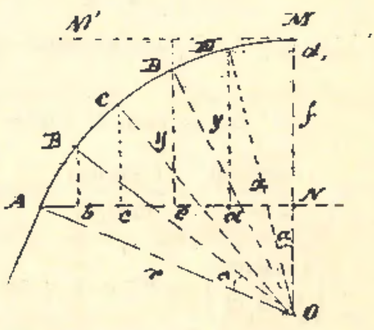

Todas las coordenadas calculadas sobre A P para trazar el medio arco A M, sirven para la otra mitad medida sobre D P'.

### Por coordenadas rectangulares sobre la cuerda del arco ó la tangente paralela á aquella

A M = mitad del arco á trazarse y dividido en partes iguales A B, B C...= l.

$\beta$ = medio ángulo al centro dividido también en otras tantas partes iguales,

D O M = a




A N = mitad de la cuerda y M M' = tangente al punto M, paralela á A N.

$$M\ N = \text{flecha} = r - (r \cos \beta) = r\ (1 \cos \beta)$$

$$O\ N = r - \text{flecha} = \Delta \text{ (constante)}$$

$$D\ d = y = d_1\ O - \Delta = (r \cos a) - \Delta$$

$$D\ d_1 = N\ d = x = r \text{ sen } a$$

$$C\ c = (r \cos 2\ a) - \Delta \quad ; \quad N\ C = r \text{ sen } 2\ a$$

y así sucesivamente se calcularán todas las coordenadas correspondientes al arco A M.

En todos los casos, como conviene piquetear la curva á cortos intérvalos, por lo menos de 10 en 10 metros, fácil es comprender que, siempre que sea posible, es preferible emplear aquellos métodos que eliminan las causas de error, como ser la sucesión de ángulos para las tangentes ó secantes sucesivas.

Existen varias tablas para el trazado de curvas, siendo una de las más recomendables la de «Gaunin»; se encuentran en ellas todos los elementos necesarios.

Para hallar el ángulo al centro correspondiente á un arco cuyo desarrollo de n metros es dado, así como el radio r, de la curva, se tiene:

$$\text{desarrollo arco} = n \left(\frac{1.290.000''}{2\,\pi\,r}\right)$$

Con un radio de $1.000^m$ y siendo $n = 100^m$

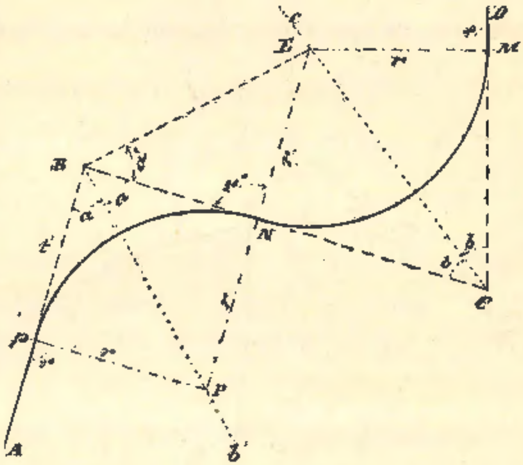
$$\frac{1.290.000}{2\,\pi\,r} = \frac{1.290.000}{6283,12} = 206,2648 \text{ (corresponde á } 1^m)$$

$$n\left(\frac{1.290.000}{6283,12}\right) = 206,2648 \times 100 = 20624'', 48 = 5^o\,43'\,44'', 48$$

Angulo al centro

| | | | |
|---|---|---|---|
| Para radios, | 1.000 | 1.500 | 2.000 |
| ángulos | para 1 m = 0°3'26"26 ; | para 1 m = 0°2'16",12 ; | para 1 m = 0°1'42",56 |

### Trazado de dos curvas sucesivas de igual radio




Se conocen las líneas A B, B C, C D y los ángulos formados en B y en C. Trácense las bisectrices C c y B b y hágase el ángulo E B c = C B b, esto es a' = a; el punto de intersección E será un centro de la curva M N y si desde el se traza una perpendicular á B C hasta la bisectriz B b, el punto P será el otro centro.

Luego solo resta trazar las perpendiculares E M á C D y P p ó A B para tener el largo de las tangentes C M = t B p = t'.

En el triángulo B E C se tiene B C = d y los semi ángulos a' y b conocidos; luego puede hallarse C E = e ángulo en E, $\varphi = 180^o - (a' + b)$

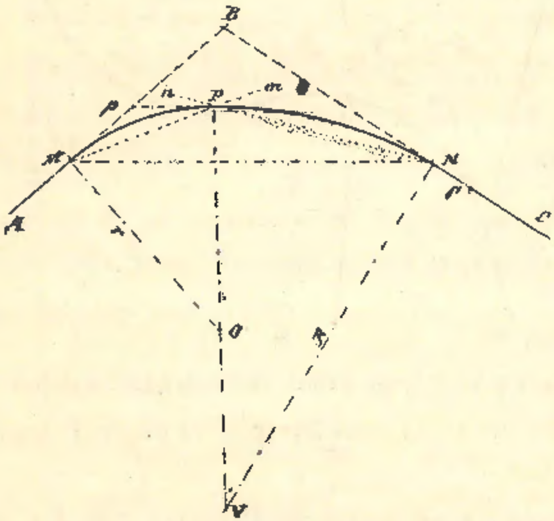
$$C\,E = e = \frac{d \text{ sen } a}{\text{sen } \varphi}$$

conocido C E sus proyecciones sobre B C darán el radio r de las curvas y la tangente M C = N C

radio $r = e \text{ sen } b$, tang $t = e \cos b$

La tangente B N puede calcularse de la misma manera por medio de la proyección de B E, ó simplemente por deducción pues: B N = tang en B = B C — N C = d — t.

### Trazado de dos curvas sucutivas con tangentes desiguales



Se conocen las direcciones A B y B C, así como el ángulo en B, pero las tangentes tienen que ser desiguales y se tienen representadas por B M y B N.

Trazándose la cuerda M N y estableciéndose las bisectrices de los ángulos B M N y B N M, se cortarán en P que será un punto de la curva.

Por P trácese una paralela á M N y una perpendicular á ella; luego levantando en M y en N perpendiculares á A B y C B estas cortarán la perpendicular P V en O y en V que serán los centros de las respectivas curvas P M y P C los radios serán pues O M para la primera y V N para la segunda.

Haciendo M N = M, distancia conocida

$$\begin{array}{llll} \text{Angulo medido} & B\,N\,M = \alpha, & P\,N\,M = \tfrac{1}{2}\,\alpha = \alpha' \\ \text{»} \quad \text{»} & B\,M\,N = \beta, & P\,M\,N = \tfrac{1}{2}\,\beta = \beta' \\ \text{» deducido} & N\,P\,V = P\,N\,V = (90^{o} - \alpha') = \theta \\ & N\,P\,M = 180^{o} - (\alpha' + \beta') = \varphi \end{array}$$

$$P\,N = 2\,x = \frac{m \operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen} \varphi}, \qquad x = \frac{m \operatorname{sen} \beta'}{2 \operatorname{sen} \varphi}; \quad \text{según triángulo } M\,P\,N$$

y del triángulo isósceles P V N, siendo P V = r

$$r = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{\dfrac{m \operatorname{sen} \beta'}{2 \operatorname{sen} \varphi}}{\cos \theta} = \frac{m \operatorname{sen} \beta \cos \theta}{2 \operatorname{sen} \varphi'}$$

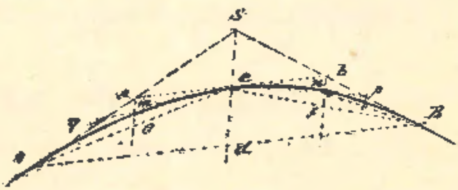
que será el valor de uno de los radios; la misma fórmula servirá para el otro M O sustituyendo los valores.

### Trazado de un arco de parábola para ligar dos líneas

Las tangentes pueden ser iguales ó no.

Ligados los puntos de tangencia A B y conocida su longitud se fija el punto

$d = \frac{1}{2}$ A B,




la línea S d es pues, la bisectriz del ángulo A S B.

El punto c mitad de S d, es un punto de la curva; línea a b paralela A B fija los puntos a y b sobre S A y S B formando así nuevos triángulos c b B, c a A, así que fijando los puntos f y e mitad de c B y c A y la mitad n y m de las bisectrices b f, a e se tendrán en n y m nuevos puntos de la curva. Trazando por n y m paralelas á c B y c A, se fijarán los nuevos vértices p y q desde los cuales se repetirá la operación considerando los triángulos n p B y m q A.

Las líneas S d, b f, a e, resultarán todas paralelas entre sí.

En el triángulo A S B se conoce A B = 2 m y los ángulos $\alpha$ y $\beta$, luego ángulo A S B $= \varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; y $\varphi' = \frac{1}{2}\varphi$

$$S\,d = x = \frac{m \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varphi'} \qquad c\,d = \tfrac{1}{2}\,x$$

ángulo d c B $= Z = 180^\circ - (\gamma + \frac{1}{2}\,\alpha)$, pues $\gamma = 180 - (\alpha + \varphi')$

En el triángulo c b B, ángulo b c B $= \gamma' = 180 - (\gamma + Z)$

$$c\,B = 2\,n; \qquad 2\,n = \frac{m \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} Z}; \quad f\,B = n$$

$$c\,b\,B = 180 - (\gamma' + \tfrac{1}{2}\,\alpha) = \delta \qquad \delta' = \tfrac{1}{2}\,\delta$$

$$b\,n = \frac{n \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,\alpha}{\operatorname{sen} \delta'}$$

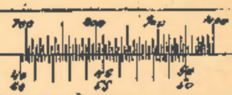


Fig 5.

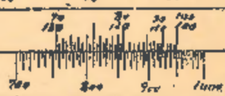


Fig 3.

Fig 2.

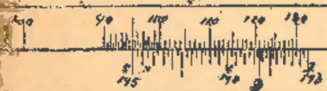


Fig 8.

# DIBUJO TOPOGRÁFICO

El dibujo topográfico se divide en dos partes, la una destinada á la representación gráfica de las operaciones geométricas ó geodésicas y la otra á la de los accidentes del terreno ó región en la cual se ha operado.

La representación de las operaciones geométricas consiste en trazar sobre el papel, *los ángulos* medidos sobre el terreno y *las líneas* medidas ó calculadas, adoptando al efecto una *escala* proporcional al largo de las líneas, detalles que deberá tener el plano y tamaño del papel que quiera emplearse.

Para la parte de dibujo, propiamente dicho, se han adoptado una série de signos convencionales para representar los accidentes del terreno basándose para ello en la combinación de la representación fiel de los objetos y de los principios de la perspectiva.

*Escalas.*—Si para representar sobre el papel una cierta extensión lineal, sean 1.000 metros, se conviene en tomar un centímetro; se podrá escribir $0^m 01 = 1.000^m$, y se deducirá que, $0^m 10 = 10.000^m$ y $1^m = 10.000^m$, lo que se escribirá:

$$\text{escala de } \frac{1}{100.000}$$

De lo que precede se deduce que al verse la indicación de:

escala de $\frac{1}{500.000}$, $\frac{1}{80.000}$, $\frac{1}{33.000}$, etc., etc.

Significa ésta que, $1^{m} = 500.000^{m}$, $1^{m} = 80.000^{m}$ y que por lo tanto cada centímetro representará: $5.000^{m}$ para el $1^{er.}$ caso, $800^{m}$ para el $2.^{o}$ y $330^{m}$ para el $3.^{o}$.

Adoptada la unidad de la escala, hay que construir ésta, dando á cada división una expresión unitaria, como ser 10, 100, 1.000, etc., entonces, por ejemplo, en la escala de $\frac{1}{500.000}$, se tendrá, $1.000^{m}$ representados por $2^{m}/_{m}$, pues:

$$5.000^{m} : 10^{m}/_{m} :: 1.000 : 2^{m}/_{m}$$

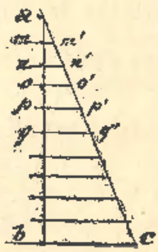
en la de $\frac{1}{80.000}$, se tendrá:

$$800^{m} : 10^{m}/_{m} :: 1.000 : 12'5^{m}/_{m}, \text{ etc., etc.}$$

Para construir la escala, sea de $\frac{1}{80.000}$, se trazará una línea sobre la cual se medirá con el compás tantas veces 12 ½ milímetros cuan larga se quiere hacer la escala.


La primera parte á la izquierda se divide á su vez en 10 partes representando cada una $100^{m}$. La presente escala simple medirá pues $1.000^{m}$. Si ahora se quiere apreciar el largo de una línea que figura en un plano á la escala de $\frac{1}{80.000}$, sea la que precede, se toma su extensión con el compás y aplicando una de sus puntas en cualquiera de las divisiones, sea la 5.ª, de manera que la otra caiga en la 1.ª parte subdividida, sea sobre la subdivisión 6.ª resultará así que la distancia es de $5.600^{m}$, también puede apreciarse la parte proporcional de una subdivisión para las decenas y llegar á dar á la distancia medida á la escala 5.620m.

También puede construirse la misma escala para un resultado más exacto, fundándose en el principio de la proporcionalidad de los triángulos: así sea c b el largo asignado en la escala á la cantidad menor, sea 1, 10, ó 100 metros. etc., etc.




a b una distancia arbitraria que se dividirá en 10 partes iguales por otras tantas paralelas á c b.

Si ahora se traza la hipotenusa a c se habrán formado 10 triángulos rectángulos que tendrán sus catetos paralelos á c b y proporcionales á las de a b.

Así:

$$ab : bc :: am : mm' :: an : nn' :: aq : qq'$$

de manera que, siendo:

$$cb = 10^m \quad y \quad am = \frac{ab}{10}$$

se tiene: $ab : 10^m :: am : mm'$

sea: $10 : 10^m :: 1 : mm' = \frac{10}{10} = 1^m$

ó también: $ab : 10^m :: aq : qq'$

sea: $10 \text{ (partes)} : 10^m :: 5 \text{ (partes)} : qq' = \frac{5 \times 10}{10} = 5^m$

Luego, pues, cada una de las 10 líneas paralelas á b c será una ó más décimas partes de ella según sea su distancia del punto a.

Por lo tanto, para construir una escala de diezmos, se empieza por trazar 11 líneas paralelas y equidistantes, luego señalándose sobre una de ellas el largo de una unidad, (como en el caso anterior de 12 y ½ milímetros por cada 1.000 metros á la escala de $\frac{1}{80.000}$) se levantan las perpendiculares correspondientes al número de divisiones que se quiere hacer.

La primera de la izquierda se divide en diez partes iguales y todo el cuadrilátero a b c d por diez líneas paralelas inclinadas, de manera que la primer línea parta del punto a hasta el punto de primer división.

Escala de $\frac{1}{50.000}$

0,01 = 500 m

0,02 = 1.000 m

Para tomar en la escala la distancia de 3.870 metros, se pondrá una punta del compás en la intersección de la 7.ª línea horizontal con la de 3.000$^{m}$ A, y la otra en la misma horizontal al llegar á la 8.ª línea oblicua punto B; leyendo con atención se verá que el compás abarca tres divisiones de 1.000, 8 de 100 y una de 70, luego 3.870$^{m}$.

Si se tuviera 75 bastaría con aplicar las puntas del compás en una línea imaginaria que dividiera el espacio entre la 7.ª y la 8.ª en dos iguales, lo que implica decir, que con experiencia puede apreciarse en una escala bien hecha hasta las unidades.

Pueden adoptarse otras formas de escalas, pero todas se hallarán fundadas en estos mismos principios.

*Angulos.*—Para trazar un ángulo sobre el papel se emplea el transportador que por lo general es un semicírculo dividido en grados y minutos como cualquier limbo de un instrumento, esto es, con subdivisiones de medio grado ó de 20 minutos.

Los hay de infinidad de formas, de diferentes materiales y de mucha precisión; los más generalmente usados son de talco que por su transparencia permiten ser aplicados sobre el papel haciendo coincidir la línea del transportador con la línea del dibujo y el punto céntrico con el punto donde debe formarse el ángulo.

Los de metal, aunque de igual uso, suelen proyectar una sombra que incomoda para apreciar y señalar el ángulo sobre el papel.

Los hay también entre los metálicos, de círculo entero y nonius, de manera, que los ángulos pueden ser reproducidos exactamente como los que se han leído en el limbo del teodolito.

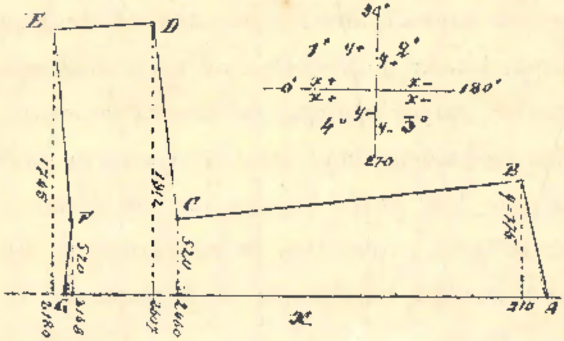
Para fijar determinados objetos en el interior de un polígono medido, se han tomado en el terreno *visuales* á dichos objetos desde ciertos puntos del perímetro. Para reproducirlos en el plano, se empezará por señalar en el perímetro dibujado, los puntos desde los cuales se han tomado las visuales, luego se aplica el transportador haciendo coincidir exactamente la línea y punto con el centro y línea del transportador y en este estado se señalan los ángulos leídos, teniendo gran cuidado de no alterar su posición; luego de señaladas todas las visuales observadas desde diferentes puntos se trazan las líneas correspondientes á cada estación y la intersección de ellas darán la situación del objeto que para ser bien determinado deberá serlo á lo menos por tres visuales.

A pesar de toda la exactitud que puede admitirse en el uso del transportador, su empleo debe en lo posible limitarse á las operaciones secundarias y á las de verificación, pues es preferible construir los ángulos del perímetro por las coordenadas de sus vértices, las que siempre se hallarán calculadas y presentadas en forma de planilla cuando se trate de una operación séria.

La construcción del polígono ó de los ángulos por este proceder es sumamente sencillo y al abrigo de toda equivocación, así, teniendo á la vista una planilla como la de la página 182, donde figuran las coordenadas acumuladas y recordando los principios fundamentales de esos cálculos especialmente la especificación de los *cuadrantes*, se empieza por trazar la línea, base que será la línea A G (primera y última estación que figura en la planilla) y se mide sobre ella la extensión de $3.178^{m}$ que le corresponde.

El punto A estará siempre al extremo derecho. El primer vértice á determinar es el B que figura en el primer cuadrante, su abcisa x es positiva, luego se mide sobre la línea A G, desde A á la izquierda sus $310^{m},12$ y en su terminación se levanta una perpendicular para medir la abcisa y de $775^{m}$ así quedará fijado el vértice B y se podrá trazar la línea A B.

Es el momento de hacer observar que: si la planilla viene con las coordenadas acumuladas, como en la planilla citada, la construcción de la figura se hará con solo medir desde A y hacia G las distancias marcadas en la columna x, y levantando una perpendicular en cada uno de ellos se medirán sobre éstas el valor de cada y con lo que se determinarán los vértices del polígono. Así:



Si no vienen calculadas las coordenadas acumuladas conviene calcularlas antes de construir el plano, ó si se prefiere, se puede construir sucesivamente el triángulo de cada línea, llevando préviamente por el último vértice las paralelas á los dos ejes de coordenadas.

Con esta breve reseña y lo expuesto en los capítulos que preceden, será fácil construir cualquier poligonal medida en el terreno, así como fijar por las visuales todos los objetos ó puntos relevados desde dicha poligonal.

Por lo que hace la parte dibujo en sí mismo, queda reducida como se ha dicho á la aplicación de signos convencionales y algunas reglas fijas que se expondrán enseguida.

Para sombrear los trazos se harán siempre normales á la curva inferior.

La luz se adoptará siempre como viniendo de la izquierda y á 45 grados sobre el horizonte.

Cuando en un plano acotado y con curvas de nivel se quiere sombrearlo á pluma debe tenerse presente: que todos los trazos que constituyen las sombras son líneas *normales* á la curva inferior; que para realizar el efecto de sombreo, á más de hacerlas un poco más gruesas en los puntos de mayor sombra, se adopta generalmente el separarlas de una cantidad igual á la cuarta parte de la distancia que hay entre las dos curvas consecutivas y como la distancia entre éstas es proporcional á la inclinación del terreno, resulta que se obtiene así el efecto deseado.

También se emplea la acuarela para sombrear las curvas de nivel, en este caso el color se aplica en la curva superior para hacerla desvanecer al llegar á la curva inferior; á más, del lado oscuro se pasará dos ó más veces el color hasta dar al dibujo el tono que se desea.

En los planos topográficos, á más de la corrección del dibujo, tiene gran importancia el tipo de letra que se emplee.

Los tipos que más apropiados se muestran para un plano esmerado es la letra bastón ya recta, ya inclinada PLANO, ***PLANO,*** y de un tamaño proporcional ya á la extensión que corresponde, ya al punto que representa; viene en seguida la letra itálica ya pareja, ya con perfiles, *plano*, *plano*, *Río*, muy especialmente indicada para los nombres de ríos, lagunas y otros accidentes.

Finalmente el tipo de letra A. C. debe ser reservado para indicar los vértices de un polígono, estaciones ú otros puntos aislados y de referencia.

Todas estas letras pueden hacerse con más ó menos fantasía COMO esta etc., evitando en cuanto sea posible caer en el extremo de hacer perder al plano su debida seriedad.

### Reducción de planos

Con frecuencia se presenta el caso de tener que reproducir un plano ya terminado, á una escala mayor ó menor.

Varios son los métodos que al efecto pueden ser empleados.

1.º—La construcción directa con los datos y elementos que figuran en el plano, memoria ó planilla.

2.º—Reducción por medio del cuadriculado.

3.º—Reducción por medio del pantógrafo.

En el 1.er caso se trata de establecer la nueva escala en la relación deseada, sea por ejemplo, reducir el plano á la mitad, hoy no se emplean más que escalas métricas, fácil es establecer la relación pedida.

Sea un plano á la escala de $\frac{1}{50\,000}$ lo que significa que 1 cent. representará $500^m$; para que el plano sea la mitad más chico, el mismo centímetro, que es la unidad de comparación, deberá representar el doble; esto es, se tendrá:

$$1^{c}/_{m} = 1.000^m \quad \text{y la escala será} \quad \frac{1}{100.000}$$

Sea, por lo contrario, aumentar un plano á la escala de $\frac{1}{50.000}$ de una cuarta parte; como en el plano que se debe aumentar, 1 cent. $=$ 500$^{m}$, ya que el nuevo plano deberá ser mayor, la unidad de la escala deberá representar menos metros, se tendrá entonces:

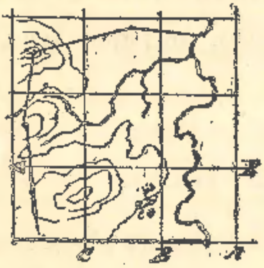
$$01 = 500^{m} - \tfrac{1}{4}(500) = 500 - 125 = 375^{m}$$

y la nueva escala será $\frac{1}{37.500}$.

Si se tratara de duplicar la escala se tendría:

$$0{,}01 = \frac{500}{2} = 250 \qquad \text{luego} \quad \frac{1}{50.000}$$

En el 2.º caso, se construye sobre el plano un cuadriculado en el cual el costado de cada cuadrado representa



una determinada cantidad medida á la escala, sea:

$$\text{p e} : \text{A B} = 2.000^{m}$$

á la escala de $\frac{1}{10.000}$ luego se construye aparte otro cuadriculado a b c d e en el cual cada costado a b representará también $\text{a b} = 2.000^{m}$ tomados á la escala mitad de la anterior: sea $\frac{1}{20.000}$.

Construido así el cuadriculado, se hará uso del compás de reducción ó de cualquier otro medio para colocar en cada cuadro reducido los detalles que existen en el original, conservando entre ellos y las esquinas del cuadrado, la misma proporción existente en el original.

En el 3.$^{er}$ caso, haciendo uso del pantógrafo, basta establecer entre los brazos del instrumento la proporción conveniente y que se encuentra marcada en el mismo; luego, con la punta seca ó *decalcador,* se sigue todo el detalle del plano á reducir mientras que la punta indicadora que lleva un lápiz, reproduce en el papel los mismos detalles á la escala adoptada.

### Reproducción de planos

Siempre que se trate de la reproducción de un plano hecho sobre *tela transparente* ó aún en papel transparente puede hacerse su reproducción sirviéndose de él como de un negativo fotográfico y exponiéndolo en un *chasis* ó bastidor al Sol después de aplicarlo sobre un papel sensibilizado.

#### LINEAS AZULES SOBRE FONDO BLANCO

En la oscuridad se dará á un papel de buena clase, un lavado, hecho con pincel fino ó esponja fina, del siguiente baño:

| | | |
|---|---|---|
| Percloruro de fierro........... | 10 | gramos |
| Acido cítrico ó tártrico......... | 5 | » |
| Agua destilada................ | 10 | » |

Una vez seco, se expone al Sol, bajo el plano á reproducir en un chasis con vidrio y cuando el papel ha tomado el color *anaranjado* oscuro, la exposición ha terminado.

Entonces se pone el papel en un baño compuesto de:

| | | |
|---|---|---|
| Prusiato amarillo de potasa... | 24 | gramos |
| Agua destilada............... | 100 | » |

Después de una completa revelación en ese baño, se lava bien en otro baño compuesto de:

| | | |
|---|---|---|
| Acido clorídrico | 10 | gramos |
| Agua destilada | 100 | » |

Este baño sirve para vigorizar el color azul y blanquear el fondo.

Si en vez de servirse del *prusiato amarillo* se emplea el *prusiato rojo,* se conseguirá un resultado inverso; esto es, líneas *blancas* sobre fondo *azul.*

*Otro procedimiento* con líneas blancas fondo azul:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Baño A*— | Citrato de fierro y amoniaco | 10 | gramos |
| | Agua destilada | 50 | » |
| *Baño B*— | Ferro-cianuro de potasio | 8 | gramos |
| | Agua destilada | 50 | » |

Las dos soluciones se hacen y filtran por separado y se las mezcla al momento de usarlas. Conservadas separadamente en frascos amarillos oscuros y al abrigo de la luz se conservan por mucho tiempo Para sensibilizar el papel se procede en la oscuridad (con luz roja), pintando ó lavando una de las caras del papel, préviamente estirado sobre la plancheta, con la mezcla de los baños A y B. Una vez secado en la oscuridad, puede emplearse. Su color es amarillo azulado. La exposición á la luz puede durar de 6 á 8 minutos, pero se considera suficiente cuando las líneas blancas han casi desaparecido y que el fondo ha tomado un color verde pardo, casi gris.

Retirado el papel sensibilizado del chasís, se le lava bien en agua limpia y puede perfeccionarse la prueba pasándola en otro baño compuesto de:

| | |
|---|---|
| Acido clorídrico............. | 10 gramos |
| Agua....................... | 200 » |

Después del baño se lava nuevamente en mucha agua.

También pueden emplearse estos baños de otra manera, ya para días nublados, ya para trabajos más finamente con poca luz.

El papel se sensibiliza sólo con el *baño A*, y se hace la exposición de ese papel una vez seco. Hecha la exposición que puede durar de 15 á 30 segundos, se hace la revelación en el *baño B* y sacado de él en oportunidad, se termina la operación como en el caso anterior.

### FONDO BLANCO—LÍNEAS NEGRAS

Sobre un papel de buena clase se extiende con un pincel suave (blaireau) ó una esponja fina la siguiente solución:

| | | |
|---|---|---|
| A | Agua............. | 400 gms. cts. cúbs. |
| | Gelatina.......... | 10 » |
| | Cloruro férrico.... | 22 » |
| | Acido tartárico.... | 10 » |
| | Sulfato de zinc.... | 10 » |

Cuando seco se expone bajo el dibujo á reproducir dentro del chasís y la exposición durará hasta que el color amarillento del papel se ponga blanco. Retirado del chasís se pasa por el siguiente baño revelador:

| | | |
|---|---|---|
| B | Acido gálico.............. | 2 gramos |
| | Alcohol................. | 7 » |
| | Agua................... | 100 » |

En 3 ó 4 minutos las líneas aparecen perfectamente negras sobre fondo blanco; entonces se lava en mucha agua y se deja secar.

Si ha habido poca exposición, el fondo quedará más ó menos teñido.

Si ha habido demasiada, las líneas aparecen grises.

### IMPRESIÓN CON PRENSA—(*Fotocolografía*)

Se sumerge una hoja de *pergamino gelatinado*, por dos minutos, en el siguiente baño:

| | | |
|---|---|---|
| Bicromato de potasa......... | 20 | gramos |
| Agua destilada............. | 1000 | » |

Una vez seco, en la oscuridad, se expone bajo un negativo á la luz del día, hasta que los detalles aparezcan de un color gris sobre fondo amarillo claro. Después se lava en agua corriente hasta que el color amarillo desaparezca.

Después de seco se ablanda nuevamente el pergamino en el agua y se estira sobre una plancheta ó en la prensa del autocopista y se le pasa la siguiente preparación:

| | | |
|---|---|---|
| Glicerina..................... | 100 | gramos |
| Amoniaco.................... | 50 | » |
| Agua filtrada................. | 50 | » |

Se seca el pergamino con un trapo de hilo fino y se le dá tinta con un rodillo en todas direcciones, pasando luego otro rodillo para igualar y sacar el exceso.

Para imprimir se coloca sobre el pergamino la hoja de papel y cubriendo el todo con un fieltro se pasa á la prensa.

Pueden, de este modo, sacarse cuantas pruebas se quiera.

Secas las pruebas, puede dárseles brillo frotándolas con talco en polvo.

Para emplear los planos sobre tela ó papel vegetal, se aplica la parte dibujada sobre el pergamino.

# LOGARITMOS DE LA NORMAL N

RADIO DE CURVATURA Q Y RADIO DE CURVATURA MEDIA $\sqrt{Q\,Q'} = \sqrt{N\,Q}$

Siendo 1 el radio del Ecuador

| φ | Log. N | Var. 1' | Log. Q | Var. 1'' | Log $\sqrt{Q\,Q'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20° 00' | 0.0001746 | 2.77 | 9.9975437 | 8.33 | 9.9988587 |
| 30' | 1820 | 2.83 | 5689 | 8.50 | 8754 |
| 21° 00' | 1906 | 2.89 | 5947 | 8.67 | 8926 |
| 30' | 1993 | 2.95 | 6209 | 8.84 | 9101 |
| 22° 00 | 2082 | 3.00 | 6477 | 9.00 | 9279 |
| 30' | 2173 | 3.05 | 6749 | 9.16 | 9461 |
| 23° 00' | 2266 | 3.11 | 7026 | 9.32 | 9640 |
| 30' | 2360 | 3.16 | 7309 | 9.48 | 9832 |
| 24° 00' | 2455 | 3.21 | 7595 | 9.63 | 9.9990025 |
| 30' | 2552 | 3.26 | 7886 | 9.78 | 0219 |
| 25° 00' | 2651 | 3.31 | 8182 | 9.93 | 0417 |
| 30' | 2751 | 3.36 | 8482 | 10.07 | 0616 |
| 26° 00' | 2852 | 3.41 | 8786 | 10.21 | 0819 |
| 30' | 2955 | 3.45 | 9095 | 10.35 | 1025 |
| 27° 00' | 3059 | 3.49 | 9408 | 10.48 | 1238 |
| 30' | 3165 | 3.54 | 9724 | 10.62 | 1444 |
| 28° 00' | 3272 | 3.58 | 9.9980045 | 10.75 | 1658 |
| 30' | 3380 | 3.62 | 0369 | 10.87 | 1874 |
| 29° 00' | 3489 | 3.66 | 0697 | 10.99 | 2093 |
| 30' | 3600 | 3.70 | 1029 | 11.11 | 2314 |
| 30° 00' | 3711 | 3.74 | 1364 | 11.23 | 2538 |
| 30' | 3824 | 3.78 | 1703 | 11.34 | 2763 |
| 31° 00' | 3938 | 3.81 | 2044 | 11.45 | 2991 |
| 30' | 4053 | 3.85 | 2390 | 11.56 | 3221 |
| 32° 00' | 4169 | 3.88 | 2738 | 11.66 | 3453 |
| 30' | 4286 | 3.91 | 3089 | 11.75 | 3687 |
| 33° 00' | 4404 | 3.95 | 3443 | 11.85 | 3923 |
| 30' | 4523 | 3.98 | 3800 | 11.94 | 4161 |
| 34° 00' | 4643 | 4.00 | 4160 | 12.03 | 4401 |
| 30' | 4764 | 4.03 | 4522 | 12.11 | 4643 |
| 35° 00' | 4885 | 4.06 | 4886 | 12.19 | 4886 |
| 30' | 5008 | 4.08 | 5253 | 12.27 | 5130 |
| 36° 00' | 5131 | 4.11 | 5622 | 12.34 | 5376 |
| 30' | 5255 | 4.13 | 5994 | 12.41 | 5624 |
| 37° 00' | 5379 | 4.15 | 6367 | 12.47 | 5873 |
| 30' | 5504 | 4.17 | 6742 | 12.53 | 6123 |
| 38° 00' | 5630 | 4.19 | 7119 | 12.59 | 6374 |
| 30' | 5756 | 4.21 | 7498 | 12.65 | 6627 |
| 39° 00' | 5883 | 4.23 | 7878 | 12.70 | 6880 |
| 30' | 6010 | 4.24 | 8259 | 12.74 | 7134 |

| φ | Log. N | Var. 1' | Log. Q | Var. 1'' | Log $\sqrt{Q\,Q'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 40° 00' | 0.0006138 | 4.26 | 9.9988642 | 12.78 | 9.9997390 |
| 30' | 6266 | 4.27 | 9027 | 12.83 | 7466 |
| 41° 00' | 6394 | 4.29 | 9412 | 12.85 | 7953 |
| 30' | 6523 | 4.30 | 9798 | 12.89 | 8660 |
| 42° 00' | 6652 | 4.30 | 9.9990185 | 12.91 | 8418 |
| 30' | 6781 | 4.31 | 0573 | 12.94 | 8677 |
| 43° 00' | 6910 | 4.32 | 0961 | 12.95 | 8935 |
| 30' | 7040 | 4.32 | 1350 | 12.97 | 9195 |
| 44° 00' | 7170 | 4.33 | 1739 | 12.98 | 9454 |
| 30' | 7300 | 4.33 | 2128 | 12.99 | 9714 |
| 45° 00' | 7430 | 4.33 | 2519 | 12.99 | 9975 |
| 30' | 7559 | 4.33 | 2908 | 12.99 | 0.0000233 |
| 46° 00' | 7689 | 4.33 | 3298 | 12.98 | 0493 |
| 30' | 7819 | 4.32 | 3687 | 12.97 | 0753 |
| 47° 00' | 7949 | 4.32 | 4076 | 12.96 | 1012 |
| 30' | 8078 | 4.31 | 4465 | 12.94 | 1271 |
| 48° 00' | 8208 | 4.31 | 4853 | 12.92 | 1530 |
| 30' | 8337 | 4.30 | 5240 | 12.90 | 1788 |
| 49° 00' | 8466 | 4.29 | 5627 | 12.87 | 2046 |
| 30' | 8594 | 4.28 | 6012 | 12.84 | 2303 |
| 50° 00' | 8722 | 4.27 | 6397 | 12.80 | 0.0002560 |
| 30' | 8850 | 4.25 | 6780 | 12.76 | 2815 |
| 51° 00' | 8978 | 4.24 | 7162 | 12.71 | 3070 |
| 30' | 9104 | 4.22 | 7543 | 12.66 | 3323 |
| 52° 00' | 9231 | 4.20 | 7922 | 12.61 | 3576 |
| 30' | 9357 | 4.19 | 8300 | 12.56 | 3828 |
| 53° 00' | 9482 | 4.17 | 8676 | 12.50 | 4079 |
| 30' | 9607 | 4.14 | 9050 | 12.43 | 4328 |
| 54° 00' | 9731 | 4.12 | 9422 | 12.36 | 4576 |
| 30' | 9854 | 4.10 | 9792 | 12.30 | 4823 |
| 55° 00' | 9977 | 4.08 | 0.0000160 | 12.22 | 5069 |
| 30' | 0.0010098 | 4.05 | 0525 | 12.14 | 5311 |
| 56° 00' | 0219 | 4.02 | 0888 | 12.06 | 5553 |
| 30' | 0340 | 3.99 | 1249 | 11.97 | 5794 |
| 57° 00' | 0459 | 3.96 | 1607 | 11.88 | 6033 |
| 30' | 0577 | 3.93 | 1962 | 11.79 | 6269 |
| 58° 00' | 0695 | 3.90 | 2314 | 11.69 | 6504 |
| 30' | 0811 | 3.86 | 2663 | 11.59 | 6737 |
| 59° 00' | 0927 | 3.83 | 3009 | 11.49 | 6968 |
| 30' | 1041 | 3.79 | 3352 | 11.38 | 7196 |

Para tener el valor de log N, log Q, log $\sqrt{Q\,Q'}$ en metros, súmesele el log a = 6.8047076. — Véase página 331.

# Tabla del valor de segundos, minutos y grados de meridianos y paralelos

| Latitud | Valor de un arco de meridiano | | | Valor de un arco de paralelo | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1° | 1' | 1'' | 1° | 1' | 1'' |
| 23° 00' | 110.730.00 | 1.845.50 | 30.75 | 102.510.60 | 1.708.51 | 28.47 |
| 30' | 737.20 | 62 | 76 | 124.80 | 02.08 | 40 |
| 24° 00' | 745.40 | 74 | 76 | 101.740.80 | 1.695.68 | 26 |
| 30' | 752.20 | 87 | 76 | 340.00 | 89.00 | 15 |
| 25° 00' | 760.00 | 1.846.00 | 76 | 100.938.60 | 82.31 | 03 |
| 30' | 764.20 | 07 | 76 | 522.20 | 75.37 | 27.92 |
| 26° 00' | 768.40 | 14 | 76 | 106.40 | 68.44 | 80 |
| 30' | 779.20 | 32 | 77 | 99.674.40 | 61.24 | 68 |
| 27° 00' | 790.00 | 50 | 77 | 243.00 | 54.05 | 56 |
| 30' | 797.80 | 63 | 77 | 98.796.60 | 46.61 | 44 |
| 28° 00' | 806.80 | 78 | 77 | 350.20 | 39.17 | 31 |
| 30 | 814.60 | 91 | 78 | 97.888.80 | 31.48 | 17 |
| 29° 00' | 823.00 | 1.847.05 | 78 | 427.40 | 23.79 | 06 |
| 30' | 829.00 | 15 | 78 | 96.953.40 | 15.89 | 26.93 |
| 30° 00' | 835.00 | 25 | 78 | 480.00 | 08.00 | 80 |
| 30' | 846.40 | 44 | 79 | 95.904.00 | 1.598.40 | 64 |
| 31° 00' | 858.40 | 64 | 79 | 493.00 | 91.55 | 52 |
| 30' | 867.40 | 79 | 79 | 94.987.20 | 83.12 | 38 |
| 32° 00' | 876.40 | 94 | 79 | 482.00 | 74.70 | 24 |
| 30' | 884.20 | 1.848.07 | 80 | 93.961.80 | 66.03 | 10 |
| 33° 00' | 892.00 | 20 | 80 | 462.80 | 57.38 | 25.95 |
| 30' | 901.60 | 36 | 80 | 92.908.20 | 48.47 | 80 |
| 34° 00' | 911.20 | 52 | 80 | 374.20 | 39.57 | 65 |
| 30' | 919.60 | 66 | 81 | 91.825.20 | 30.42 | 50 |
| 35° 00' | 928.00 | 80 | 81 | 277.40 | 21.29 | 35 |
| 30' | 938.00 | 95 | 82 | 90.718.60 | 11.98 | 20 |
| 36° 00' | 947.20 | 1.849.15 | 82 | 152.90 | 02.65 | 04 |
| 30' | 956.40 | 25 | 82 | 89.580.40 | 1.493.01 | 24.88 |
| 37° 00' | 965.80 | 40 | 82 | 001.00 | 83.35 | 72 |
| 30' | 975.20 | 60 | 83 | 88.414.90 | 73.58 | 56 |
| 38° 00' | 984.60 | 75 | 83 | 87.821.90 | 63.70 | 40 |
| 30' | 994.00 | 90 | 83 | 222.30 | 53.71 | 23 |
| 39° 00' | 111.003.50 | 1.850.10 | 84 | 86.616.00 | 43.60 | 06 |
| 30' | 013.00 | 20 | 84 | 003.10 | 33.39 | 23.89 |

Tabla del valor de segundos, minutos y grados de meridianos y paralelos — *(Conclusión)*

| Latitud | Valor de un arco de meridiano | | | Valor de un arco de paralelo | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1° | 1' | 1'' | 1° | 1' | 1'' |
| 40° 00' | 111.022.60 | 1.850.40 | 30 84 | 85.383.60 | 1.423.06 | 23.72 |
| 30' | 032.20 | 55 | 84 | 84.757.60 | 12.63 | 54 |
| 41° 00' | 041.80 | 70 | 85 | 125.10 | 02.09 | 37 |
| 30' | 051.40 | 85 | 85 | 83.486.10 | 1.391.44 | 19 |
| 42° 00' | 061.20 | 1.851.00 | 85 | 82.840.80 | 80.68 | 01 |
| 30' | 070.90 | 20 | 85 | 189.10 | 69 82 | 22.83 |
| 43° 00' | 080.50 | 35 | 86 | 81.531.10 | 58.85 | 65 |
| 30' | 090.20 | 50 | 86 | 80.866.90 | 47.78 | 46 |
| 44° 00' | 099.90 | 70 | 86 | 196.50 | 36.61 | 28 |
| 30' | 109.70 | 80 | 86 | 79.518.90 | 25.32 | 09 |
| 45° 00' | 119.50 | 1.852.00 | 87 | 78.837.30 | 13.96 | 21.90 |
| 30' | 129.20 | 15 | 87 | 148.60 | 02.48 | 71 |
| 46° 00' | 138.90 | 30 | 87 | 77.453.90 | 1.290.90 | 52 |
| 30' | 148.70 | 50 | 88 | 76.753.30 | 79.22 | 32 |
| 47° 00' | 158.30 | 70 | 88 | 046.80 | 67.45 | 12 |
| 30' | 169.80 | 83 | 88 | 75.331.20 | 55.52 | 20.92 |
| 48° 00' | 178.30 | 98 | 88 | 74.616.60 | 43.61 | 72 |
| 30' | 189.60 | 16 | 88 | 73.889.40 | 31.49 | 52 |
| 49° 00' | 201.00 | 1.853.35 | 88 | 163.40 | 19.39 | 32 |
| 30' | 210.60 | 51 | 89 | 72.424.80 | 07.08 | 11 |
| 50° 00' | 219.60 | 66 | 89 | 71.686.80 | 1.194.78 | 19.91 |
| 30' | 228.60 | 81 | 89 | 70.936.80 | 82.28 | 70 |
| 51° 00' | 238.80 | 98 | 89 | 183.00 | 69.80 | 49 |
| 30' | 248.40 | 1.854.14 | 90 | 69.828.40 | 57.14 | 28 |
| 52° 00' | 259.20 | 32 | 90 | 68.668.80 | 44.48 | 07 |
| 30' | 268.80 | 48 | 90 | 67.898.40 | 31.64 | 18.86 |
| 53° 00' | 279.00 | 65 | 91 | 128.00 | 18.80 | 64 |
| 30' | 288.00 | 80 | 91 | 66.344.40 | 05.74 | 42 |
| 54° 00' | 299.92 | 97 | 91 | 65.566.80 | 1.092.78 | 18.21 |
| 30' | 307 20 | 12 | 91 | 64.773.60 | 79.56 | 17.99 |
| 55° 00' | 111.316.80 | 1.855.28 | 30.92 | 63.985.20 | 1.066.42 | 17.77 |

Véase página 332.

# TABLAS DEL COEFICIENTE K

## PARA LA CORRECCIÓN DE LA REDUCCIÓN AL MERIDIANO Ó ALTURAS CIRCUNMERIDIANAS

### ARGUMENTO u POSITIVO

| u ó u + d E | Log. K ó Log. K' | u ó u + d E | Log. K ó Log. K' |
|---|---|---|---|
| 1" | 9.999989 | 16" | 9.999839 |
| 2 | 979 | 17 | 829 |
| 3 | 969 | 18 | 819 |
| 4 | 959 | 19 | 809 |
| 5 | 949 | 20 | 799 |
| 6 | 939 | 21 | 788 |
| 7 | 929 | 22 | 778 |
| 8 | 919 | 23 | 768 |
| 9 | 909 | 24 | 758 |
| 10 | 899 | 25 | 748 |
| 11 | 889 | 26 | 738 |
| 12 | 879 | 27 | 728 |
| 13 | 869 | 28 | 718 |
| 14 | 859 | 29 | 708 |
| 15 | 849 | 30 | 698 |

### ARGUMENTO u NEGATIVO

| u ó u + d E | Log. K ó Log. K' | u ó u + d E | Log. K ó Log. K' |
|---|---|---|---|
| 1" | 0.000010 | 16" | 0.000160 |
| 2 | 020 | 17 | 170 |
| 3 | 030 | 18 | 180 |
| 4 | 040 | 19 | 191 |
| 5 | 050 | 20 | 201 |
| 6 | 060 | 21 | 211 |
| 7 | 070 | 22 | 221 |
| 8 | 080 | 23 | 231 |
| 9 | 090 | 24 | 241 |
| 10 | 100 | 25 | 251 |
| 11 | 110 | 26 | 261 |
| 12 | 120 | 27 | 271 |
| 13 | 130 | 28 | 281 |
| 14 | 140 | 29 | 291 |
| 15 | 150 | 30 | 301 |

d E = diferencia entre las dos ecuaciones de tiempo consecutivas á la fecha dada.—Véase página 262.

## ÁNGULO HORARIO LÍMITE PARA ALTURAS CIRCUNMERIDIANAS Ó REDUCCIÓN AL MERIDIANO

| LATITUD | Latitud y declinación del mismo signo | | | | | | | | | Latitud y declinación de signo contrario | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 80° | 70° | 60° | 50° | 40° | 30° | 20° | 10° | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° |
| 0° | 135' | 90' | 67' | 51' | 40' | 29' | 20' | 11' | 0' | 11' | 20' | 29' | 40' | 51' | 67' | 90' | 135' |
| 5 | 132 | 86 | 63 | 47 | 36 | 25 | 16 | 5 | 5 | 16 | 24 | 33 | 43 | 56 | 71 | 93 | |
| 10 | 128 | 82 | 59 | 43 | 32 | 21 | 11 | 0 | 11 | 20 | 28 | 37 | 47 | 59 | 75 | 96 | |
| 15 | 123 | 77 | 55 | 39 | 24 | 16 | 5 | 6 | 16 | 25 | 32 | 42 | 51 | 63 | 78 | | |
| 20 | 118 | 73 | 51 | 35 | 23 | 12 | 0 | 12 | 21 | 29 | 37 | 46 | 55 | 67 | 82 | | |
| 25 | 113 | 69 | 47 | 30 | 18 | 6 | 6 | 16 | 25 | 33 | 42 | 50 | 60 | 71 | | | |
| 30 | 107 | 64 | 42 | 26 | 14 | 0 | 12 | 21 | 29 | 37 | 46 | 55 | 64 | 75 | | | |
| 35 | 101 | 59 | 37 | 21 | 7 | 7 | 17 | 26 | 34 | 42 | 51 | 59 | 69 | | | | |
| 40 | 95 | 54 | 32 | 16 | 0 | 14 | 23 | 32 | 40 | 47 | 56 | 64 | 73 | | | | |
| 45 | 89 | 48 | 25 | 8 | 8 | 20 | 29 | 37 | 45 | 53 | 61 | 69 | | | | | |
| 50 | 82 | 42 | 19 | 0 | 16 | 26 | 35 | 43 | 51 | 59 | 67 | 75 | | | | | |
| 55 | 75 | 34 | 9 | 9 | 24 | 34 | 43 | 51 | 59 | 67 | 74 | | | | | | |
| 60 | 67 | 27 | 0 | 19 | 32 | 42 | 51 | 59 | 67 | 75 | 82 | | | | | | |
| 65 | 56 | 13 | 13 | 31 | 43 | 53 | 62 | 70 | 78 | 82 | | | | | | | |
| 70 | 45 | 0 | 27 | 42 | 54 | 64 | 73 | 82 | 90 | 90 | | | | | | | |

# SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

## RELACIÓN CON LAS DEMÁS MEDIDAS

El METRO es la UNIDAD del sistema

| MEDIDAS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| DE LONGITUD | | DE SUPERFICIE | | DE VOLUMEN | |
| 1 Miriámetro ....... = | 10.000 Metros | 1 Hectárea......... = | 10.000 Metros$^2$ | 1 Metro$^3$ ............ = | 1.000 Decím$^3$ |
| 1 Kilómetro ........ = | 1.000 » | 1 Área ............. = | 100 » | 1 » ........... = | 1.000.000 Centím$^3$ |
| 1 Hectómetro ...... = | 100 » | 1 Centiárea ........ = | 1 Metro$^2$ | 1 Gramo .... ....... = | 1 Centím$^3$ |
| 1 Decámetro ....... = | 10 » | 1 Decímetro$^2$ ...... = | 0.01 » | 1 Hectógramo....... = | 100 » |
| 1 METRO........... = | 1 Metro | 1 Centímetro$^2$ ..... = | 0.0001 » | 1 Kilógramo ........ = | 1.000 » |
| 1 Decímetro ....... = | 0.1 » | 1 Milímetro$^2$ ...... = | 0.000001 » | 1 Litro............... = | 1 Decím$^3$ |
| 1 Centímetro ....... = | 0.01 » | 1 Decímetro$^3$...... = | 0.001 Metro$^3$ | 1 » ........... .. = | 1.000 Gramos |
| 1 Milímetro ........ = | 0.001 » | 1 Centímetro$^3$ ..... = | 0.000001 » | 1 Quintal............ = | 100 Kilóg. |
| | | 1 Milímetro$^3$ ...... = | 0.00000001 » | 1 Tonelada.......... = | 1.000 » |
| 1 Metro............ = | 0.513 Toesas | 1 Metro$^2$... ...... = | 0.263244 Toesas$^2$ | 1 Metro$^3$............ = | 0.135064 Toesas$^3$ |
| 1 Toesa............ = | 1.949 Metros | 1 Toesa$^2$...... .... = | 3.798743 Metros$^2$ | 1 Toesa$^3$............ = | 7.403.890 Metros$^3$ |
| 1 Pulgada inglesa.. = | 2.540 Centím. | 1 Yarda$^2$....... ... = | 0.8360 » | 1 Libra....... ...... = | 453.5926 Gramos |
| 1 Pie inglés........ = | 30.479 » | 1 Acre.............. = | 0.4046 Hectár. | 1 Quintal...... ..... = | 50.802 Kilóg. |
| 1 Yarda.. ......... = | 0.9144 » | 1 Pulgada$^2$ ........ = | 6.451600 Centím$^2$ | 1 Tonelada.......... = | 1016.05 » |
| 1 Milla ............. = | 1.609.315 Metros | 1 Pie$^2$ ............. = | 928.969441 » | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 Milla geográfica (15 por grado de Ecuador) | = | 7.422 Metros |
| 1 » marina (60 » » » Meridiano) | = | 1.852 » |
| 1 Legua geográfica (20 » » » » | = | 5.557 » |
| 1 Nudo, $\frac{1}{120}$ de 1 Milla........................ | = | 15.435 » |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | nudos | por | minuto, | equivalen | á la | marcha | de | 1 | milla | por | hora |
| 8 | » | » | » | » | » » | » | » | 4 | » | » | » |
| 18 | » | » | » | » | » » | » | » | 9 | » | » | » |
| 40 | » | » | » | » | » » | » | » | 20 | » | » | » |

Una marcha de 20 millas por hora, equivale á 37 kilómetros.

## Día 8

*Línea* A B, *desde A hacia el S. E.*

1 + 2 + 8m, un mojón = (200 + 40 + 8) ..... = 248m
+ 8 + 3 á 5m. á la derecha, otro mojón.... 363m
2 + 5. el camino á.............................. 500m
3
4 + 2 + 17, el cerco del potrero................ 857m
5 + 8 + 12,60, el mojón esquina B.

A B = 1.612m, 60.

Ángulo A B C = 92° 27' 13"

*Estación en B*

| | |
|---|---|
| Estancia (mirador).............. | 73° 12' |
| Semáforo Estación .............. | 87° 52' |
| Bandera C........................ | 92° 27' |
| Cerro pelado. .................. | 123° 53' |

*Línea* B C

0 + 5 + 3,60, el camino estación.
1
2 + 4 + 7, línea a b con ángulo B a b = 98° 50' para salvar laguna; se midió a b = 347m.

a b c = 37° 46'

Ángulo b c a = 61° 01'

c a =

Desde c:

A los 1 + 3 + 17, el camino.
» 2 + 8 + 3, la vía férrea, primer cerco.
+ 8 + 16. el riel izquierdo.
+ 9 + 9, el otro cerco.
3
4 + 0 + 3, un mojón.
5 + 7 + 23,60, el esquinero C.

Ángulo B C D = 101° 13' 27"

*Estación en C*

| | |
|---|---|
| Estación (semáforo)....... ..... | 45° 13' |
| Mirador estancia......... ....... | 68° 27' |
| Bandera D........................ | 107° 13' |
| Puesto Pedro .................... | 163° 28' |
| El cerro pelado.................. | 273° 27' |

# MEDIDAS LINEALES EN USO Ó USADAS

### Buenos Aires

La vara de $0^m,866$ ............... Oficial

La cuadra de $129^m,9$.............. = 150 varas

La legua de $5.196^m$ .............. = 6.000 varas

La legua$^2$.... = 36.000.000 varas$^2$ = $2.699^h$ $84^a$ $16^c$

La cuadra$^2$... = 22.500 varas$^2$ = $1^h$ $68^a$ $74^c$

### Santa Fe

La vara de $0^m,866$ es la oficial

» » castellana................ = $0^m,8357$

» » titulada de Bustinza ...... = $0^m,834$

### Córdoba

La vara de $0^m,867$................ Oficial

La legua de 6.000 varas.......... = $5.202^m$

La cuadra de 150 varas .......... = $130^m,05$

La legua cuadrada................ = $2.706^h$ $08^a$ $04^c$

### San Luis

La vara de $0^m,866$................ Oficial

La cuadra de 150 varas.......... = $129^m,90$

La legua de 6.000 varas.......... = $5.196^m$

### Santiago

| | | |
|---|---|---|
| La vara de $0^{m},866$ | | Oficial |
| La legua de 5.000 varas | = | $4.330^{m}$ |
| La vara primitiva era de | | $0^{m},8673$ |
| de donde la legua era de 5.000 vs. | = | $4.335^{m},50$ |

### Tucumán

| | | |
|---|---|---|
| La vara de $0^{m},866$ es la oficial | | |
| » » actual | = | $0^{m},8625$ |
| La legua es de 5.000 varas | = | $4.312^{m},68$ |
| » » tiene 30 cuadras de | | $166\frac{2}{3}$ varas |
| La cuadra de $166\frac{2}{3}$ varas | = | $143^{m},756$ |

### Mendoza, San Juan y Entre Ríos

| | | |
|---|---|---|
| La vara es de | | $0^{m},866$ |

### República del Uruguay

| | | |
|---|---|---|
| 1 vara | = | $0^{m},859$ |
| 1 cuadra = 100 varas | = | $85^{m},90$ |
| 1 legua = 6.000 varas | = | $5.154^{m}$ |
| 1 legua cuadrada | = | $2.656^{h}\ 37^{a}\ 16^{c}$ |
| 1 cuadra cuadrada | = | $7.378^{m^2},81$ |
| 1 vara cuadrada | = | $0^{m^2},73788$ |

---

### MEDIDAS USADAS ANTIGUAMENTE

| | | |
|---|---|---|
| 1 vara | = | $0^{m},8361$ |
| 1 cuadra | = | $125^{m},415$ |
| 1 legua | = | $5.016^{m},600$ |
| 1 vara cuadrada | = | $0^{m^2},699063$ |
| 1 cuadra cuadrada | = | $1^{h}\ 57^{a}\ 28^{c},92$ |
| 1 legua cuadrada | = | $2.516^{h}\ 62^{a}\ 75^{c},00$ |

# ERRATAS

## TOMO I

| PÁGINA | LÍNEA | DONDE DICE | DEBE SER |
|---|---|---|---|
| 151 | 1.ª | $ABC = m$ | $ABC = t$ |
| » | 1.ª figura | ángulo $\varphi$ | angulo t |
| » | 2.ª » | » $\varphi$ | » m |
| » | 2.ª » | » $\gamma$ | » t |

## TOMO II

| PÁGINA | LÍNEA | DONDE DICE | DEBE SER |
|---|---|---|---|
| 136 | 14 | con el plano | en el plano |
| 241 | 24 | $\alpha$ | $\varphi$ |
| 251 | 26 | $\theta = (\varphi + t)$ | $(\alpha + t)$ |
| 269 | 10 | fi | $\varphi$ |
| 269 | última | fi | $\varphi$ |
| 272 | 9 | (fi — M) | $(\varphi - M)$ |
| 272 | 10 | (fi — M) | $(\varphi - M)$ |
| 325 | 8 | $\cos\varphi \cos\delta \cos$ | $\cos\varphi \cos\delta \cos t$ |
| 325 | 13 fórmula | $\cos A = \frac{\cos\varphi}{\cos}$ | $\cos A = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$ |
| 409 | 12 | A S | A C |
| 409 | 13 | A S | A C |
| 457 | última | M K | M Z |
| 467 | 2.ª | ó la | á la |
| 467 | 13 | $= R \cos$ | $= R \cos\varphi$ |
| 468 | penúltima | de los formados | de los *triángulos* formados |
| 468 | figura | vértice P | vértice e |
| 469 | 13 | $l = e E$ | $\rho = e E$ |
| 469 | 22 | $d = 1 \cot g\, \omega$ | $d = 1 \tan g\, \omega$ |

# ÍNDICE DEL TOMO SEGUNDO

## TOPOGRAFÍA


| | PÁGINAS |
|---|---|
| *Levantamiento de planos ó ejecución de las mensuras.*— Trazado y medición de líneas | 5 |
| Trazado de líneas largas | 14 |
| *Levantamiento de planos en general* | 17 |
| Levantamiento por la poligonal ó rodeo | 19 |
| » » triangulación | 20 |
| » con estadía y brújula | 21 |
| *Relevamiento de ríos y arroyos* | 22 |
| *Cálculo gráfico superficial* | 29 |


### INSTRUMENTOS


| | |
|---|---|
| Partes principales | 34 |
| *Instrumentos de Reflexión*— | |
| Teoría | 37 |
| Sextante | 39 |
| » de bolsillo | 40 |
| Escuadra óptica | 41 |
| *Pantómetro* | 42 |
| *Teodolito* | 43 |
| *Rectificaciones del Teodolito*— | |
| 1.º Horizontalidad del círculo azimutal | 44 |
| 2.º Horizontalidad del eje de rotación del anteojo | 44 |
| 3.º Error de colimación | 45 |

PÁGINAS

4.º Hilos del retículo........................... 45
5.º Coincidencia del nonius vertical.............. 46
6.º Paralaje del anteojo.................. ........ 46
*Brújula*........ ........................................ 47
*Compás prismático*.................. .................. 48
*Medida sin cadena*.—La Estadía.—Anteojo micrométrico.......... 49
Micrómetro Lugeol.......................................... 50
Aplicación al Teodolito.............................. ......... 51
*Taquímetro ó Taqueómetro*........................................ 52
*Anteojos*....................... .................. ..... 52
Teoría del anteojo.............................................. 55
*Instrumentos de medir.* —Cadena y cinta........................ 59
*Niveles.*—Nivel de albañil........................................ 61
Nivel de agua................................... ......... 61
Nivel de aire............................................. 61
*Sensibilidad de los niveles*.......................................... 63
*Nivel «Egault»*.. .......... ..............................
» *de Bardaloue*............................................ 68
» *inglés ó de Throughton*.................................... 68
» *colimador (de Goulier)*...................................... 70
*Medición de alturas con el Barómetro ó Nivelación Barométrica.*—
Barómetro.................................................. 71
*Ipsómetro ó Termobarómetro*........................................ 79
*Miras.*—Mira parlante..... ......................:....... 82
*Fototeodolito ó Fotogrametro*........................................ 84
*Plancheta*.................... .......................... 90
*Instrumentos de dibujo*......................................... 95
Pantógrafo.................................................. 97
Planimetro .................................................. 97
Teoría abreviada del planimetro.................................. 100
*Líneas con obstáculos.*—Su trazado y medición.—Aplicaciones varias 106

PÁGINAS

Levantar el plano de un camino.............................. 110
Aplicaciones.............................................. 111

NIVELACIÓN

Nivelación................................................ 118
Aplicaciones de la nivelación.............................. 125
Nivelación de una superficie y trazado de curvas de nivel........ 130
Planos acotados............................................ 136

DIVISIÓN DE TERRENOS

División analítica y gráfica................................ 139
Aplicaciones de las fórmulas anteriores..................... 152
División proporcional....................................... 156
1.er problema.............................................. 160
2.º problema............................................... 164
3.º problema............................................... 165
*Cálculo analítico del polígono y su superficie*.............. 168
Teorema 1.º................................................ 170
Teorema 2.º................................................ 171
Teorema 3.º................................................ 173
Regla general para el cálculo de los ángulos de proyección...... 175
Teorema 4.º................................................ 177
Planilla por coordenadas.................................... 182
*Sistema de latitudes y apartamientos*........................ 187
Planilla por latitudes y apartamientos....................... 192
Problemas.................................................. 194
Corrección de las coordenadas............................... 197
Cálculo de la superficie en función de las coordenadas absolutas.. 190
Cálculo de la superficie por deducción de las superficies extra-
poligonales................................................ 202

## COSMOGRAFÍA

PÁGINAS

Coordenadas esféricas y celestes, varios sistemas.............. 205
Resúmen de las coordenadas adoptadas....................... 209
Latitud y meridiano terrestres............................. 211
*Medida del tiempo*............................................. 212
Conversión de tiempo civil en astronómico y vice-versa......... 214
Relación entre el tiempo sidereo, la ascensión recta y el meridiano observador.................................... 215
Uso de las Efemérides.......................................... 218
Diferencia de longitud.—Hora reducida....................... 221
*Determinación de la declinación y del ángulo horario del sol*. ..... 225
*Correcciones de paralage.—Refracción y semi-diámetro*............ 228
*Depresión del horizonte*........................................ 231
Sizigios, cuadraturas, conjunción, oposición.................. 234
Triángulo de posición.......................................... 235
Determinación del tiempo.—Cálculo de la hora................ 235
Cálculo de la hora por alturas correspondientes............... 239
» » » » » » iguales....................... 244
» » » » » una sola altura....................... 248
*Determinación de la latitud—*
Por altura meridiana........................... 255
» alturas circumeridianas.................... 270
» » correspondientes.................... 270
» » iguales de dos astros y el intérvalo de tiempo........................... 272
Por dos alturas y el intérvalo de tiempo.......... 275
» una altura y el conocimiento del tiempo....... 281
» reducción al Meridiano....................... 284
» distancias zenitales de las estrellas circumpolares 285
*Determinaciones del Azimut y Meridianos*........................ 287

PÁGINAS

Por alturas correspondientes........ .. ...... 288
» la mayor elongación de una estrella......... 291
» la altura de un astro........................ 294
» la amplitud del sol............ ........ ...... 296
Cálculo del azimut por alturas y azimut magnético........... 299
Variación ó declinación magnética.......................... 300
*Determinación de la longitud*............ ...... ......... 302
Por culminaciones lunares.... .. .. ... ... .. 303
» distancias lunares.......................... 306
» ocultaciones de las estrellas................. 309
*Fórmulas generales astronómicas*..... ......... ........... 324

## GEODESIA

Definiciones............................................. 327
Figura de la tierra........... ....... ...................... 328
Dimensiones y fórmulas del elipsoide terrestre............. .. 328
Reducción de arcos de minuto en metros..................... 332
Arcos de meridiano medidos...... ......................... 333
Triangulación............................................ 335
Medición de bases por el sistema Jäderin.—Cintas de acero...... 342
Largo de la base ........................................ 348
Reducción de la base al nivel del mar...................... 349
Bases compuestas ............ ......... ................. 351
Unión de la base á la red................................ 352
Forma y altura de las señales............... ......... 353
Medición de los ángulos................................. 357
Reducción del ángulo al centro de la estación................. 359
Reducción de los ángulos al horizonte...................... 363
Resolución de los triángulos.—Teorema de Legendre.—Exceso esférico ....................................... 365
Magnitud de los triángulos................................ 368

PÁGINAS

Coordenadas geográficas de los vértices.......................... 370
Coordenadas de los vértices de la red.......................... 379
Distancia entre dos puntos de posición geográfica conocida....... 383
Varios grupos de fórmulas y sus aplicaciones................... 384
Trazado y medición de un arco de meridiano.................... 394
Trazado de un arco de paralelo............................... 398
Perpendicular á la meridiana................................ 405
Aplicación y comprobación.................................. 407
Aplicación de las fórmulas á la medición de un cuadrado........ 411

NIVELACIÓN GEODÉSICA

Nivelación geodésica........................................ 417
Depresión del horizonte..................................... 423
Superficie del triángulo esférico terrestre..................... 429
Ejemplos de cálculos........................................ 432
Empleo del azimut magnético para relevamientos............... 449
Empleo del compás prismático y Estadía para relevamientos..... 452

CARTAS GEOGRÁFICAS

Proyecciones en general..................................... 455
Teoría de las *proyecciones* por *perspectiva*.................. 457
Proyección central.......................................... 460
» polar............................................ 460
» zenital........................................... 462
*Proyecciones estereográficas*—
Proyecciones sobre el Ecuador ó polar............. 464
» » el Meridiano ó Ecuatorial...... 469
» » el Horizonte ó zenital.......... 471
*Proyecciones ortográficas*—
Ortogonal ecuatorial............................ 476
» meridiana............................ 477
» horizontal........................... 478

PÁGINAS

*Proyecciones Escenográficas—*

Polar.......... 479

Meridiana.......... 480

Horizontal.......... 480

PROYECCIONES POR DESARROLLO.......... 480

*Proyecciones cilíndricas*.......... 481

Proyección de Mercator ó de latitudes crecientes.......... 484

» Cassini.......... 490

» cilíndrica ortomorfa de «Lambert».......... 496

*Proyecciones cónicas*.......... 501

Proyección de Flamsteed.......... 508

Proyecciones policónicas..........

PROYECCIÓN CÓNICA ORTOMORFA DE LAMBERT.......... 513

Ecuaciones de la proyección.......... 514

PROYECCIONES EQUIVALENTES.......... 518

Proyección cilíndrica equivalente de Lambert.......... 520

» zenital equivalente.......... 521

## TAQUIMETRÍA

El Taquímetro.......... 526

El Cleps.......... 526

ORIENTACIÓN.......... 529

Fórmulas fundamentales.......... 530

De los anteojos.......... 531

*Observaciones*.......... 535

Retículo ó micrómetro.......... 537

Lectura normal.......... 539

» intermediaria.......... 540

Práctica.......... 541

CÁLCULOS.......... 542

Modelo para libreta de Taquímetro.......... 542

PÁGINAS

Modelo para Cleps.......... 543
Operaciones.......... 543
*Clasificación de las coordenadas por cuadrante*.......... 543
Orientación.......... 545
Aplicación práctica.......... 547
Resúmen de las observaciones.......... 549
Miras.......... 552
Regla logarítmica.......... 553
Uso de la regla.......... 556
Cálculo de la altura.......... 557
Escala de partes iguales.......... 559
División centesimal de la circunferencia.......... 560
Modelo de la hoja de una cartera.......... 562

GEODESIA EXPEDITIVA

Medición de la base.......... 569
Formación de triángulos.......... 574
COORDENADAS.......... 576
Coordenadas geográficas.......... 577
*Altimetría.*—La Fotografía.......... 579
Expedición.......... 580

## TRAZADO DE CURVAS

Trazado del círculo ó de un arco.......... 583
» por secantes sucesivas.......... 584
» » tangentes sucesivas.......... 585
Por coordenadas sobre la tangente.......... 586
» » rectangulares sobre la cuerda del arco ó la tangente paralela á aquella.......... 587
Trazado de dos curvas sucesivas de igual radio.......... 589
» » » sucesivas con tangentes desiguales.......... 590

PÁGINAS

Trazado de un arco de parábola para ligar dos líneas.......... ... 591

## DIBUJO TOPOGRÁFICO

Escalas.......................................................... 593

Angulos y transportadores................. ............... 596

Construcción de planos con transportador y por coordenadas.... 597

Dibujo del plano....... ................................... 599

Reducción de planos........... ........................ 602

*Reproducción de planos*....................................... 604

Líneas azules sobre fondo blanco.......... ................. 604

Fondo blanco—Líneas negras................................. 606

Impresión con prensa (Fotocolografía)....................... 607

## TABLAS

Logaritmos de la normal N y radio de curvatura............. 609

Tabla del valor de segundos, minutos y grados de meridianos y paralelos............................................ 611

» del coeficiente K........................................... 613

Angulo horario, límite para alturas circunmeridianas ó reducción al meridiano...................... ................ 614

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL..................... ............. 615

Hojas de cartera de apuntes................................. 616

Medidas lineales en uso ó usadas............................ 617

FIN DEL TOMO SEGUNDO