

Ing. Eduardo O. Di Lorenzo

# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Sistemas de Representación

2da. Edición

 nueva  
librería

Tomo I



GEOMETRIA DESCRIPTIVA Di Lorenzo

# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

 nueva  
librería

ISBN 950-9088-73-0



9 789509 088733

NL 073



# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Sistemas de Representación

Pag 30  
Pag 37  
Pag 40  
Pag 46  
Pag 53  
Pag 59

Tomo I



Ing. Eduardo O. Di Lorenzo

# GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Sistemas de Representación

2da. Edición

Tomo I

**nl** nueva  
librería



Di Lorenzo, Eduardo O.  
Geometría Descriptiva. Sistemas de representación - 2da ed. -  
Buenos Aires : Nueva Librería, 2015.  
296 págs. : 21 x 15 cm.

ISBN 978-950-9088-73-3

1. Geometría descriptiva. I. Título  
CDD 516.3

Colaboró Rodolfo Emilio Del Pozo

© Nueva Librería SRL  
Estados Unidos 301  
(1101) Buenos Aires, Argentina  
Tel.: (54-11) 4362.9266

libros@nuevalibreria.com.ar  
www.nuevalibreria.com.ar

Sexta reimpresión

ISBN 950-9088-72-2 Obra completa

ISBN 950-9088-73-0 Tomo I

ISBN 950-9088-74-9 Tomo II

Hecho el depósito que marca la ley 11.723

Todos los derechos reservados, no se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, sea este electrónico, mecánico, por fotocopia, por grabación u otros métodos, sin el permiso previo por escrito de los editores. Su infracción está penada por las leyes 11.723 y 25.446.

Impreso en Argentina - Printed in Argentina

## Tabla de Contenidos

### Introducción

|                                                  |   |
|--------------------------------------------------|---|
| Geometría Descriptiva: su objeto .....           | 3 |
| Importancia de su aplicación en la técnica ..... | 5 |

### Capítulo 1 - Elementos y Sistemas de Representación

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Elementos de representación .....                    | 7  |
| Principales sistemas de representación .....         | 8  |
| Sistema de Representación Cónico o Central .....     | 8  |
| Sistema de Representación en Perspectiva .....       | 9  |
| Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo .... | 12 |
| Sistema de Proyecciones Acotadas .....               | 13 |
| Sistema Monge o Proyección Diédrica .....            | 14 |
| Sistema Axonométrico .....                           | 16 |
| Sistema de Perspectiva Caballera .....               | 19 |

### Sistema de Proyección Diédrica o de Monge

### Capítulo 2 - Punto, Recta y Plano

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| Elementos de representación .....               | 23 |
| Representación del punto .....                  | 23 |
| Posiciones particulares del punto .....         | 24 |
| Representación de la recta .....                | 29 |
| Condición de pertenencia de punto y recta ..... | 30 |
| Rectas que se cortan .....                      | 30 |
| Rectas paralelas .....                          | 31 |
| Trazas de la recta .....                        | 31 |
| Posiciones particulares de la recta .....       | 33 |
| Representación del plano .....                  | 36 |
| Condición de pertenencia de recta y plano ..... | 37 |



|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| Condición de pertenencia de punto y plano ..... | 40 |
| Posiciones particulares del plano .....         | 42 |
| Plano de tercera proyección .....               | 46 |
| Planos paralelos .....                          | 52 |
| Intersección de planos .....                    | 53 |
| Intersección de recta y plano .....             | 59 |
| Rectas y planos perpendiculares .....           | 61 |

### Capítulo 3 - Desplazamientos

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| Nociones .....                                | 65 |
| Método de los cambios de planos de proyección |    |
| Concepto. ....                                | 65 |
| Cambio del plano vertical .....               | 66 |
| Cambio del plano horizontal .....             | 68 |
| Cambio de los dos planos de proyección .....  | 68 |

#### Giros

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| Concepto .....                             | 69 |
| Giro de un punto en torno de un eje .....  | 69 |
| Giro de una recta en torno de un eje ..... | 70 |
| Giro de un plano en torno de un eje .....  | 72 |

#### Abatimientos

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| Conceptos .....                           | 73 |
| Abatimiento de un punto de un plano ..... | 75 |

### Capítulo 4 - Problemas de magnitud

#### Distancias

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| Distancia entre dos puntos .....        | 79 |
| Distancia de un punto a un plano .....  | 80 |
| Distancia de un punto a una recta ..... | 84 |
| Distancia entre rectas paralelas .....  | 86 |
| Distancia entre planos paralelos .....  | 87 |

#### Angulos

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Angulo de una recta con los planos de proyección ... | 88 |
| Angulo de dos rectas .....                           | 89 |
| Angulo de una recta y un plano .....                 | 91 |
| Angulo de dos planos .....                           | 92 |
| Angulo de un plano con los de proyección .....       | 93 |

### Capítulo 5 - Homología

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Figuras perspectivas ..... | 95 |
|----------------------------|----|

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Figuras homológicas .....                            | 97  |
| La homología como proyección de figuras perspectivas | 98  |
| Homologías particulares .....                        | 103 |
| Las cónicas como homológicas de la circunferencia .. | 104 |

### Capítulo 6 - Figuras planas

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| Procedimiento general .....               | 113 |
| Representación de un polígono .....       | 114 |
| Representación de la circunferencia ..... | 116 |
| Casos particulares en la representación   |     |
| de la circunferencia .....                | 120 |

### Capítulo 7 - Representación de cuerpos

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Procedimiento general .....                           | 123 |
| Representar un prisma recto de base pentagonal .....  | 125 |
| Representar un tetraedro regular .....                | 125 |
| Representar un cubo apoyado en plano cualquiera ..... | 125 |
| Representación del cono recto .....                   | 127 |
| Representación del cilindro recto .....               | 129 |
| Secciones Planas .....                                | 129 |
| Principios de sombras .....                           | 141 |
| Sombra propia y proyectada .....                      | 141 |
| Planos tangentes a superficies cónicas y cilíndricas  | 144 |
| Planos tangentes a las superficies cónicas            |     |
| desde un punto exterior .....                         | 146 |

### Sistema de Proyecciones Acotadas

### Capítulo 8 - Punto, Recta y Plano

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Nociones .....                                        | 153 |
| Elementos de representación .....                     | 154 |
| Representación del punto .....                        | 155 |
| Representación de la recta .....                      | 155 |
| Inclinación, pendiente e intervalo de una recta ..... | 158 |
| Posiciones particulares de la recta .....             | 160 |
| Rectas paralelas .....                                | 161 |
| Rectas concurrentes .....                             | 161 |
| Representación del plano .....                        | 162 |
| Planos paralelos .....                                | 163 |



|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| Intersección de planos .....          | 164 |
| Intersección de recta y plano .....   | 164 |
| Rectas y planos perpendiculares ..... | 165 |

## Capítulo 9 - Magnitudes

### Abatimientos

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| Abatimiento de un punto del plano ..... | 167 |
|-----------------------------------------|-----|

### Distancias

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| Distancia entre dos puntos .....        | 168 |
| Distancia de un punto al plano .....    | 169 |
| Distancia de un punto a una recta ..... | 170 |

### Angulos

|                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Angulo de una recta con el plano de comparación ....                                                                          | 172 |
| Angulo de un plano con el plano de comparación ....                                                                           | 172 |
| Angulo comprendido entre dos rectas, dadas por sus proyecciones graduadas .....                                               | 172 |
| Dado un plano, trazar en él una recta que pase por uno de sus puntos y forme un ángulo dado con el plano de comparación ..... | 174 |
| Dada una recta, trazar por ella un plano que forme un ángulo dado con el plano de comparación .....                           | 175 |

## Capítulo 10 - Figuras Planas y Cuerpos

### Figuras Planas

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| Representación de la circunferencia ..... | 179 |
|-------------------------------------------|-----|

### Cuerpos

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| Representación del cono ..... | 180 |
|-------------------------------|-----|

## Capítulo 11 - Superficies Topográficas

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Nociones generales y definiciones .....                                                         | 185 |
| Sección Plana de una superficie topográfica .....                                               | 188 |
| Perfiles .....                                                                                  | 189 |
| Trazar entre dos puntos de una superficie topográfica una quebrada de pendiente constante ..... | 191 |
| Proyecto de plataforma horizontal en una superficie topográfica .....                           | 192 |

## Sistema de Representación en Perspectiva

### Capítulo 12 - La Proyección Central y la Perspectiva

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| Nociones sobre Proyección Central ..... | 199 |
| Representación de la recta .....        | 200 |
| Representación del punto .....          | 201 |
| Representación del plano .....          | 201 |
| Perspectiva: definiciones .....         | 203 |
| Campo visual .....                      | 205 |
| Representación de los elementos .....   | 211 |
| Representación de la recta .....        | 212 |
| Representación del punto .....          | 216 |
| Representación del plano .....          | 217 |

### Capítulo 13 - Figuras Planas en el Geometral

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Perspectiva de figuras por abatimiento del geometral.                                                                            |     |
| Método de los puntos de distancia .....                                                                                          | 222 |
| Perspectiva de una circunferencia                                                                                                |     |
| Método de los ocho puntos .....                                                                                                  | 225 |
| Abatimiento del geometral alrededor de una frental cualquiera .....                                                              | 228 |
| Trazado de la perspectiva en el geometral, sin utilizar su abatimiento empleando la figura original, que se tiene en hoja aparte | 229 |
| Ejemplo de aplicación utilizando las normales al cuadro y rectas a 45° .....                                                     | 230 |
| Método de las dominantes y de los puntos de fuga accidentales .....                                                              | 232 |
| Operaciones reducidas .....                                                                                                      | 236 |
| Ampliación del cuadro .....                                                                                                      | 240 |

### Capítulo 14 - Representación de Cuerpos Apoyados en el Geometral

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Puntos en altura .....     | 244 |
| Escala de alturas .....    | 245 |
| Perspectiva del cubo ..... | 247 |
| Cilindro de rotación ..... | 250 |



## Capítulo 15 - Construcciones Auxiliares

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| División de un segmento de recta .....                                                   | 253 |
| Trazar por puntos dados paralelas a una recta<br>cuyo punto de fuga es inaccesible ..... | 254 |
| Método de las guías .....                                                                | 256 |
| Regla Y .....                                                                            | 257 |
| Escalas divergentes .....                                                                | 258 |
| Método de la cuadrícula .....                                                            | 261 |

## Apéndice - Sistema de Proyección Diédrica (Monge)

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| Problemas de posición .....                | 263 |
| Puntos y rectas de un plano .....          | 265 |
| Visibilidad de las caras de un plano ..... | 268 |
| Rectas y planos paralelos .....            | 269 |
| Intersección de planos .....               | 270 |
| Intersección de recta y plano .....        | 273 |
| Visibilidad de rectas .....                | 275 |
| Visibilidad de rectas y planos .....       | 276 |
| Visibilidad entre planos .....             | 276 |
| Rectas y planos perpendiculares .....      | 277 |

# Prólogo de la Primera Edición

El presente texto, que nos complacemos en poner al alcance de nuestros compañeros, ha sido redactado originariamente por el compañero Rodolfo Emilio del Pozo, quien, en base a los apuntes que tomara de las clases del Ing. Eduardo O. Di Lorenzo, les dio su actual ordenamiento temático y los complementó con ejercicios resueltos.

Para obtener un texto correcto y que se adaptara al desarrollo del curso durante este año y los sucesivos, solicitamos la colaboración del citado Profesor, Ing. Eduardo O. Di Lorenzo, quien accedió amablemente a nuestro requerimiento, tomando a su cargo la pesada tarea de corregir este apunte. El empeño puesto en esta tarea por el mencionado Profesor, lo llevó no sólo a corregir todo el texto, sino a redactar nuevamente muchos capítulos, dándole a cada tema la claridad expositiva que puede apreciar el lector, que es el fruto de los muchos años de experiencia docente del Ing. Eduardo O. Di Lorenzo, como así de su reconocida capacidad pedagógica.

Por todo ello, queremos expresar nuestro agradecimiento al citado Profesor, y sobre todo destacar que la enorme tarea que ha realizado fue hecha sin otro interés que el de favorecer el desarrollo de los cursos de Geometría I de la Facultad de Ingeniería, poniendo al alcance de los estudiantes la bibliografía seria y ajustada a los programas en vigencia, de lo que hasta el momento se carecía.

Es también un deber agradecer al compañero Rodolfo Emilio del Pozo, su inestimable dedicación para que este texto fuera una realidad, ya que durante casi un año ocupó sus mejores horas y brindó sus mejores esfuerzos para su realización. Hacemos extensivo nuestro agradecimiento al compañero Norberto Osvaldo del Pozo, que realizó las ilustraciones del texto.

De esta forma, el C.E.I., libre agremiación de los estudiantes de Ingeniería, cumpliendo con su larga tarea gremial, pone en circulación esta publicación, que sabemos, ha de satisfacer a sus lectores.

C.E.I. "L.L.R."

abril de 1960



# Introducción

1.- Geometría Descriptiva: su objeto..- La Geometría Descriptiva es la ciencia que, mediante el dibujo lineal, resuelve gráficamente problemas de carácter analítico.

Si se desea realizar un estudio sistemático de esta ciencia, es menester distinguir dos aspectos: teórico y práctico. Por razones de método, la presente obra trata ambas fases simultáneamente, de modo que el lector en forma insensible ha de adquirir los conocimientos teóricos necesarios que le permitirán conocer estructuralmente el método científico de que se vale la Geometría Descriptiva, a la par que, en la faz práctica, se abocará a la resolución de innumerables problemas propios de la misma.

La Geometría Descriptiva no es una ciencia autónoma, hallándose en relación de dependencia con otras, por cuanto integra un capítulo, por cierto importante, de las ciencias matemáticas. Su método y fundamentos, profundamente arraigados en la Geometría Euclidiana, como asimismo el campo de estudio en el cual se desarrolla, están estrechamente ligados a los procesos matemáticos, con la particularidad de que prescinde, en lo posible, del riguroso lenguaje que caracteriza a los mismos. En este último aspecto, la principal y casi única fuente de recursos de que se vale la Geometría Descriptiva en sus estudios, es el dibujo lineal, fuente esta por otra parte propia del método gráfico.

Aunque más no sea sintéticamente y a los efectos de una mayor ilustración haremos, a continuación una breve reseña histórica de la evolución de esta rama del conocimiento científico.



El origen de la Geometría Descriptiva como ciencia es consecuencia de ese gran movimiento intelectual y renovador, llamado Renacimiento, que significó una reacción contra los métodos y sistemas hasta aquel entonces imperantes.

Merced al Renacimiento, la investigación científica, inspirada principalmente en las ideas del filósofo inglés R. BACON (1210-1294 d.J.C.), se transformó evolucionando en forma inusitada. Es así entonces que, en particular, las ciencias matemáticas se multiplicaron, desarrollándose ramas, como la Geometría Analítica, hasta entonces sólo estudiadas en forma incipiente por las civilizaciones antiguas (principalmente egipcia y griega), y surgiendo nuevas, como el Cálculo Diferencial e Integral, que se erigieron en inapreciables auxiliares de las ciencias físico-naturales, entonces también en profunda evolución.

La Geometría Analítica, cuyos estudios adquieren inusitado esplendor a partir de los trabajos realizados por R. DESCARTES (1596-1650 d.J.C.), y el Cálculo Diferencial e Integral, de quien I. NEWTON (1643-1727) y G. LEIBNITZ (1646-1716) fueron sus principales precursores, solucionaron en forma analítica problemas hasta entonces desconocidos y de gran importancia práctica, contribuyendo así al progreso de las ciencias físico-naturales y del conocimiento científico y técnico; pero, al llevarse a la práctica estas soluciones se apreció la necesidad imperiosa de idear un método que, en forma rápida, gráfica y expeditiva, resultara eficaz para la solución de tales problemas, necesidad que también se manifestó en el campo artístico, que paralelamente había experimentado una sensible evolución. Así, por ejemplo, los artistas -especialmente los pintores- al tener que representar una forma cualquier tridimensional -como ser una figura humana- sobre un plano -que solamente posee dos dimensiones- encontraban grandes dificultades técnicas de representación; pero, a fin de obviar estos inconvenientes, idearon un sistema de representación, llamado perspectiva, que les facilitó esa tarea.

Primitivamente, la perspectiva se realizaba colocando un vidrio entre el ojo del observador y el objeto a representar; entonces, unidos cada punto de éste y el ojo del observador era posible obtener líneas rectas que, al interceptar el vidrio interpuesto, determinaban así puntos imágenes de aquellas formas, que unidos entre sí daban por resultado la representación buscada de la forma objeto dada.

Paulatinamente se determinaron relaciones entre las formas objeto y sus imágenes; pronto fue posible extraer conclusiones sin tener aquellas presentes, más como los resultados obtenidos resultaban complicados y como no siempre era posible representar en perspectiva formas de difícil contorno, como ser una pieza de máquina, un edificio, o en general cuerpos de dimensiones irregulares, se pensó en idear otros métodos de representación que facilitaran la relación entre objeto e imagen. Surgieron así diversos métodos de representación que contribuyeron a sistematizar esta ciencia y que, en detalle, se estudian en la presente obra. Ello no obstante y a modo de presentación en el capítulo siguiente, se analiza en forma elemental el contenido de los principales métodos de representación utilizados por la Geometría Descriptiva. Sin embargo, ha correspondido al célebre matemático francés GASPAR MONGE (1746-1812) idear un método de representación de las formas y cuerpos, basado en reglas matemáticas gráficas, que hizo posible representar las mismas en un plano, cualesquiera fueran sus dimensiones, y además reunir todos los conocimientos dispersos, por aquel entonces, formar con ellos un verdadero cuerpo de doctrina y crear la Geometría Descriptiva tal cual se estudia en los tiempos modernos.

Ya anteriormente, DESARGUES, CAVALLIERI, CATALAN y FRENET, entre otros, habían demostrado la completa armonía existente entre las reglas del método gráfico y los principios de la Geometría, ahora era MONGE quien hacía posible que la Geometría Descriptiva alcanzara el rango de ciencia autónoma.

2. Importancia de la aplicación de la técnica. Los conocimientos que la Geometría Descriptiva le proporciona al técnico determinan que sea esta ciencia un elemento de incalculable valor y auxiliarpreciado para el mismo. La Geometría Descriptiva tiene por objeto representar sobre un plano formas tridimensionales; es decir, reunir en una figura plana todos los elementos necesarios para hacer conocer la forma y posición en el espacio de una figura de tres dimensiones. Es evidente entonces que todas las operaciones que se hagan sobre esta especie de imagen, responderán a la que se hubiera ejecutado sobre la figura de tres dimensiones en el espacio. De aquí la inmensa ventaja de poder resolver los problemas de tres dimensiones por medio de operaciones en un plano, sobre una simple hoja de papel.



Desde este punto de vista, puede asegurarse que la Geometría Descriptiva ha existido desde los tiempos más remotos, pues siempre en cualquier época, los ingenieros, arquitectos, carpinteros y cuantos deben construir, han tenido que representar sus obras -de tres dimensiones en general- sobre una superficie plana.

La Geometría Descriptiva se limita a ejecutar, o mejor dicho a traducir en su lenguaje propio, las operaciones que la Geometría indica para la resolución de un problema; es por decirlo así, la escritura del geómetra y, en tal sentido, la utiliza el ingeniero, el constructor en general, para definir de una manera clara y precisa sus proyectos. En una palabra ejecuta pero no crea.

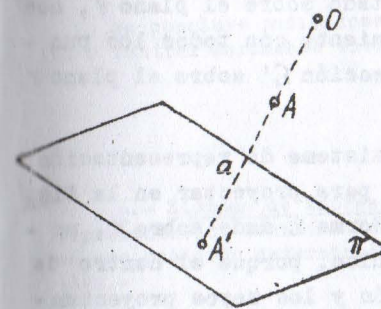
Las ideas o proyectos del técnico, antes de ser realidad, deben representarse sobre un plano y transportarse de allí al espacio. En todas estas operaciones, insensiblemente el técnico se vale de los conocimientos que le proporciona la Geometría Descriptiva. Por otra parte, la representación de las más diversas formas; los estudios sobre líneas; y superficies determinan que sea ilustrativo no sólo para el técnico, sino también para el científico y el artista utilizar los conocimientos propios de la Geometría Descriptiva.

Como disciplina de estudio, la Geometría Descriptiva, al valerse del dibujo lineal, educa la vista y el pulso, ordena ideas, ilustra por su método y le proporciona al hombre una serie de conocimientos nada despreciables para la vida; de allí entonces también que merezca destacarse su importancia como materia educativa.

## Capítulo 1

# Elementos y Sistemas de Representación

**3.- Elementos de representación.-** Se dice que una forma cualquiera se proyecta desde un punto y sobre un plano, cuando se hallan las intersecciones con este plano de las rectas determinadas por dicho punto y cada uno de los de la forma.-



Sea (figura 1) un punto A cualquiera del espacio a quien se proyecta sobre un plano  $\pi$ , siendo O el centro de proyección; la recta  $a$ , determinada por los puntos O y A, al cortar al plano  $\pi$ , permite obtener el punto A', proyección del punto A dado.-

El punto A se llama punto objetivo; el punto O recibe el nombre de centro de proyección; la recta  $a$  llámase rayo proyectante y el plano  $\pi$  se llama plano de proyección o

- figura 1 -

cuadro. Si el punto O fuese el ojo del observador, tendríamos: para O punto de vista, para  $a$  rayo visual y para A' imagen.-



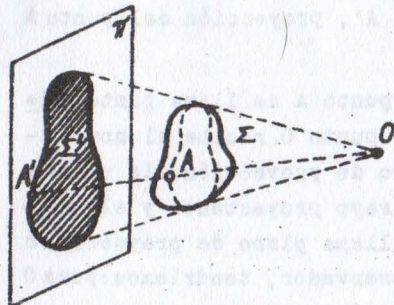
Análogamente, si en lugar de un punto se da una forma cualquiera, será posible obtener sobre el plano de proyección una figura plana que será su proyección o imagen, con sólo hallar sobre éstas las intersecciones de las rectas determinadas por el centro de proyección y cada uno de los puntos de la forma considerada.-

El punto objetivo, el centro de proyección o punto de vista, el rayo proyectante o rayo visual y el plano de proyección o plano del cuadro son los elementos de representación fundamentales que utiliza la **GEOMETRÍA DESCRIPTIVA** para representar formas y dimensiones.

4.- Principales sistemas de representación.- Los principales sistemas de representación de que se vale la **GEOMETRÍA DESCRIPTIVA** son: a) Sistema de Representación Cónico o Central, y b) Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo.-

En los párrafos siguientes de este capítulo, muy genéricamente se analizan los mencionados sistemas de representación y los distintos métodos derivados de los mismos.-

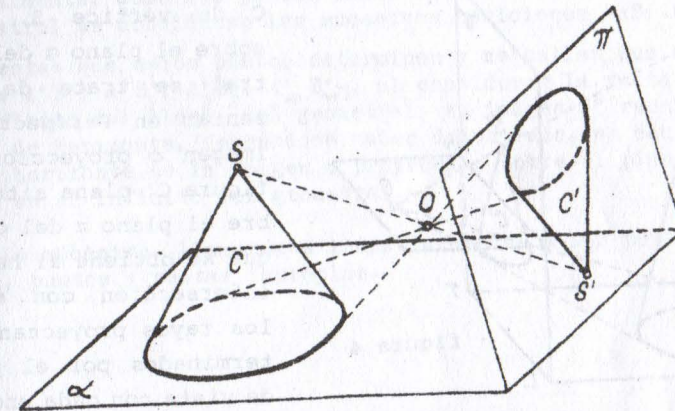
5.- Sistema de Representación Cónico o Central.- Sea (figura 2) una forma  $\Sigma$  cualquiera ubicada en el espacio, donde también se ha fijado el centro  $O$  de proyección y el plano  $\pi$  de proyección. Un punto  $A$  cualquiera de la forma  $\Sigma$  dada, proyectado sobre el plano  $\pi$ , nos da el punto  $A'$ . Efectuado el mismo procedimiento con todos los puntos de la forma  $\Sigma$  dada, se obtiene su proyección  $\Sigma'$  sobre el plano  $\pi$  de proyección.-



- figura 2 -

Se observa que en este sistema la posición relativa entre el cuadro, el centro de proyección y la

forma dada puede ser cualesquiera. En efecto, en la figura 3 ubicado el centro  $O$  de proyección y un cono  $C$  de vértice  $S$  sobre el plano  $\pi$ , es posible hallar, mediante el procedimiento indicado, su imagen -que resulta un cono  $C'$  de vértice  $S'$ - sobre el plano del cuadro, sin tomar en consideración la posición relativa de los elementos de representación.-



- figura 3 -

En síntesis: geoméricamente es posible hallar sobre un plano la imagen de una forma cualquiera ubicada en el espacio con sólo llevar la intersección de los rayos formados por cada uno de los puntos de la figura dada y el ojo del observador, sobre el plano del cuadro.-

Se concluye pudiéndose afirmar que: el sistema de Representación Cónico o Central meramente tiene carácter geométrico de representación.-

6.- Sistema de Representación en Perspectiva.- Cuando en el Sistema de Representación Cónico o Central se consideran los elementos de representación en una posición determinada, resulta el Método de Representación en Perspectiva.-

En este último sistema, las formas se suponen apoyadas sobre un plano -generalmente horizontal- que es la tierra y el que se llama plano del geometral. Por su parte, el ojo del observador se sitúa frente a la forma y al plano del cuadro, el que, en consecuencia, se ubica entre la forma objeto y el ojo del observador.-

Finalmente, la intersección del plano del geometral y el plano del cuadro, el quema línea de tierra o traza del cuadro, simbóli-



zándose con la notación LT. El punto O -que es centro de proyección- se llama ahora punto de vista, y por último, la intersección del cuadro y el plano que contiene al punto de vista, se llama línea de horizonte y se indica mediante la notación HH.

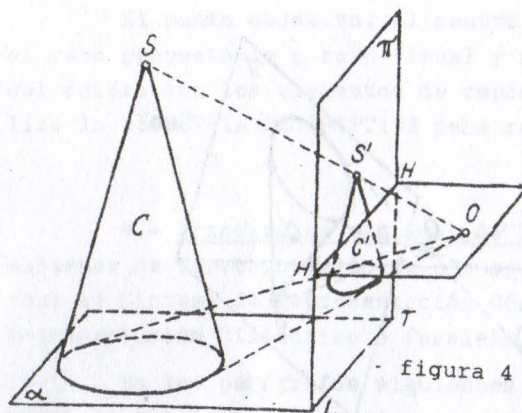


figura 4

Entonces: para hallar la imagen del vértice S bastará unirlo al punto O de vista, determinándose así el rayo OS proyectante, cuya intersección con el plano  $\pi$  del cuadro nos da la imagen  $S'$  buscada.

Ahora bien, resulta conveniente saber que la línea de horizonte es la imagen o proyección sobre el cuadro de la recta impropia del geometral.

En efecto: sea (figura 5) A un punto situado sobre la línea de tierra, su imagen  $A'$  resulta determinando el rayo proyectante y hallando su intersección con el plano  $\pi$  del cuadro. Pero como en la posición indicada en la figura 5, el punto A dado se halla sobre la línea de tierra -que es intersección de los planos del cuadro  $\pi$  y geometral  $\alpha$ -, su imagen  $A'$  coincide con aquél.

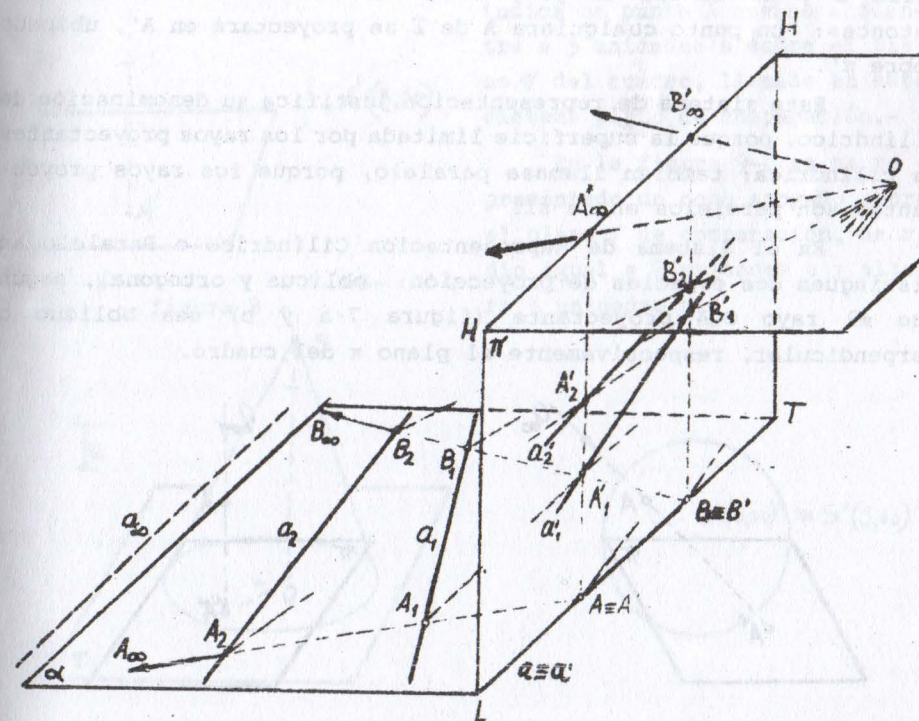
Si sobre al plano  $\alpha$  del geometral y más alejado de la línea de tierra se considera el punto objetivo en nueva posición  $A_1$ , obtenida determinando el rayo  $OA_1$  proyectante y hallando su intersección con el plano  $\pi$  del cuadro, se situará en éste a mayor distancia de la línea de tierra. Repitiendo el procedimiento para una tercera posición, en  $A_2$ , del punto objetivo -aún más alejada que la anterior sobre el plano  $\alpha$  del geometral-, su imagen  $A'_2$  se situará sobre el plano  $\pi$  del cuadro y a mayor distancia aún de la línea de tierra. Si pensamos en el  $A_\infty$  como punto objetivo, su imagen  $A'_\infty$  resulta

rá proyectándolo desde O sobre  $\pi$ ; es decir, será la intersección de  $OA_\infty$ , paralela a  $AA_\infty$ , con  $\pi$ .

Repetido el procedimiento que se acaba de analizar para un segundo punto B objetivo resulta que, cuando éste se sitúa en el infinito, en  $B_\infty$ , su imagen  $B'_\infty$  también se sitúa sobre la línea de horizonte.

Finalmente, como dos puntos determinan una recta, si sobre el plano  $\alpha$  del geometral se consideran las sucesivas posiciones -AB;  $A_1B_1$ ;  $A_2B_2$ ;  $A_\infty B_\infty$ - de las rectas que estos puntos determinan y se hallan sus imágenes -respectivamente  $A'B'$ ;  $A'_1B'_1$ ;  $A'_2B'_2$ ;  $A'_\infty B'_\infty$ -, al considerar la recta  $A_\infty B_\infty \equiv a_\infty$  formada en el infinito del plano del geometral, su imagen  $a'$  resulta ser entonces la línea de horizonte, lográndose haber demostrado, en consecuencia, que la línea de horizonte es la imagen o proyección sobre el plano  $\pi$  del cuadro de la recta en el infinito del geometral.

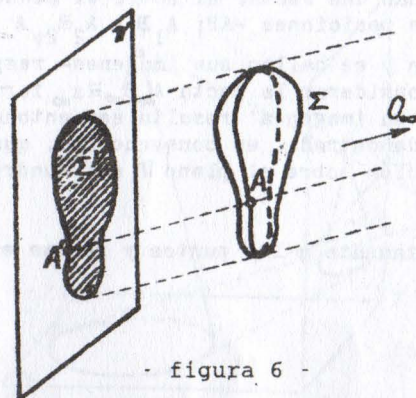
En lo sucesivo, llamaremos indistintamente a los puntos y rectas en el infinito, puntos y rectas impropias.



- figura 5 -



2.- Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo. En el Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo la imagen de una forma cualquiera se obtiene de manera similar a la estudiada en el Sistema de Representación Cónico o Central (ver parágrafo 5).



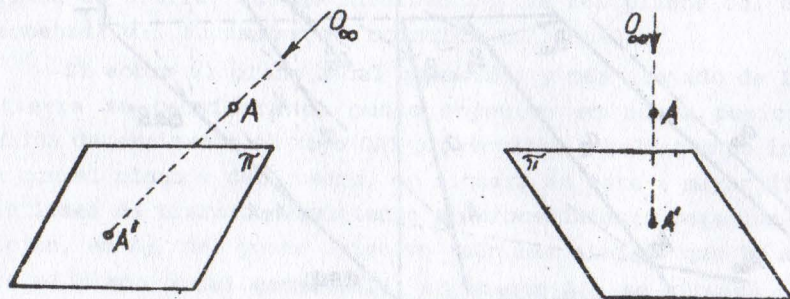
- figura 6 -

En el Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo, el centro de proyección o punto de vista se sitúa en el infinito, es decir que, a diferencia del Sistema Cónico o Central donde éste es propio, resulta ahora impropio.

Sea (figura 6) una forma  $\Sigma$  cualquiera. Para proyectarla desde un punto impropio  $O_\infty$  y sobre un plano  $\pi$ , bastará hallar las intersecciones con éste de las rectas determinadas por cada punto de la forma  $\Sigma$  y el centro de proyección  $O_\infty$  ubicado en el infinito. Entonces: un punto cualquiera  $A$  de  $\Sigma$  se proyectará en  $A'$ , ubicado sobre  $\pi$ .

Este sistema de representación justifica su denominación de cilíndrico, porque la superficie limitada por los rayos proyectantes es cilíndrica; también llámase paralelo, porque los rayos proyectantes son paralelos entre sí.

En el Sistema de Representación Cilíndrico o Paralelo se distinguen dos especies de proyección: oblicua y ortogonal, según que el rayo  $O_\infty A$  proyectante (figura 7-a y b) sea oblicuo o perpendicular, respectivamente al plano  $\pi$  del cuadro.



-a-

-b-

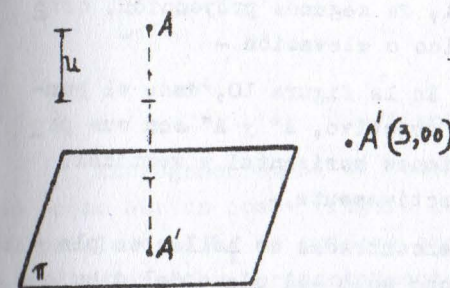
- figura 7 -

De las variantes indicadas, el Sistema de Representación Cilíndrico Ortogonal es el más usado en la práctica y será el que des~~arrollaremos~~ en el curso.-

Refiriéndonos específicamente a este tipo de representación se observa que dado el punto  $A$  se determina fácilmente su proyección  $A'$ ; pero, en cambio, conocida la proyección  $A'$  de un punto este no queda identificado pues todos los del rayo  $O_\infty A$  proyectante tienen la misma imagen  $A'$ , tal como se aprecia en la figura 7-b.-

La solución de esta indeterminación da origen a los sistemas de representación que, en líneas generales, pasamos a estudiar.-

8.- Sistema de Proyecciones Acotadas.- En este sistema, dada la proyección  $A'$  de un punto  $A$ , éste queda ubicado agregando al primero un número, llamado "cota", que expresa la distancia  $AA'$  la que se mide en una cierta escala.-



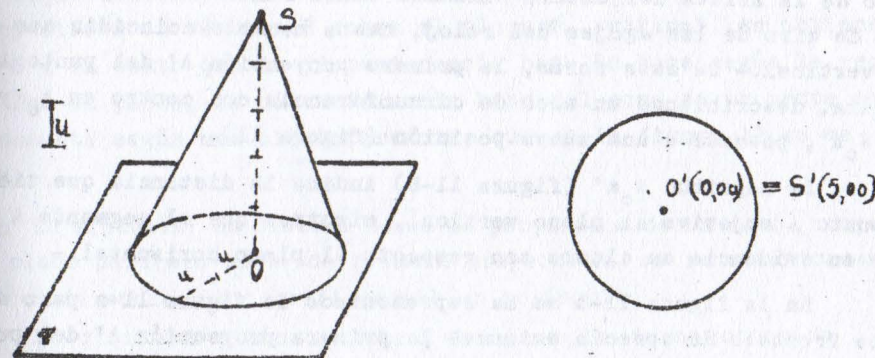
-a-

-b-

- figura 8 -

En la figura 8-b,  $A'(3,00)$  indica un punto  $A$  que se encuentra a 3 unidades  $u$  sobre el plano  $\pi$  del cuadro, llamado en este sistema plano de comparación.-

En la figura 9-b se ha representado un cono apoyado sobre el plano  $\pi$  de comparación, de radio igual a 2 unidades  $u$  y altura 5 unidades  $u$ .-



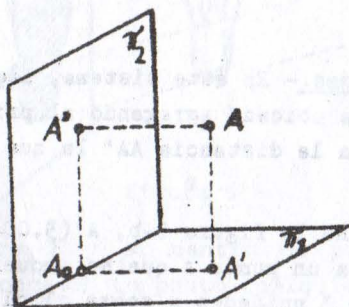
-a-

-b-

- figura 9 -



9.- Sistema Monge o Proyección Diédrica. En este sistema, la distancia  $AA'$ , entre el punto A objetivo y su proyección  $A'$ , queda magnificada por una nueva proyección de aquél sobre un segundo plano  $\pi_2$ , perpendicular al  $\pi_1$ , tal como se aprecia en la figura 10. La existencia del diedro recto de referencia -formado por los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ - le da el nombre al sistema de proyección, el que también es conocido, por el nombre de su creador, el matemático francés GASPAR MONGE.-



- figura 10 -

Dado que las dos proyecciones encontradas se hallan en planos diferentes, para obtenerlas sobre uno sólo -el plano del dibujo-, se realiza el giro de uno de ellos, por ejemplo el  $\pi_1$  horizontal, en torno de la arista del diedro -llamada línea fundamental- y en el sentido de giro de las agujas del reloj, hasta hacerlo coincidir con el  $\pi_2$  vertical.- De esta forma, la primera proyección  $A'$  del punto A da de gira, describiendo un arco de circunferencia con centro en  $A_0$  y radio  $A_0A'$ , pasando a una nueva posición (figura 11).-

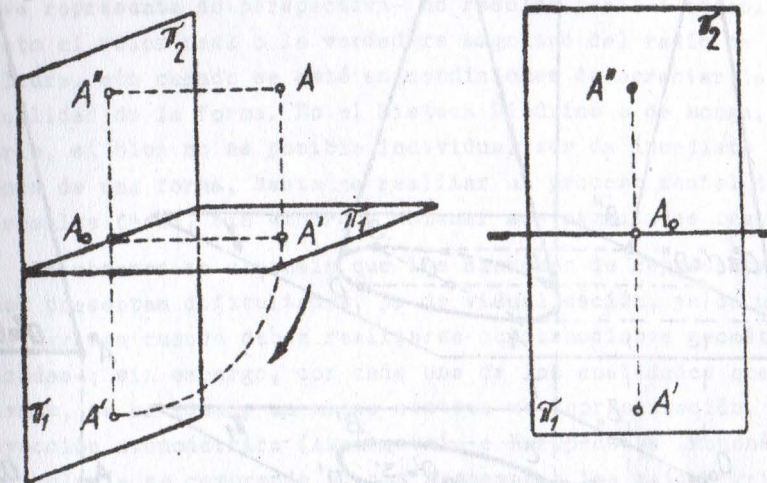
La magnitud  $A_0A'$  (figura 11-b) indica la distancia que tiene el punto A objetivo al plano vertical, mientras que el segmento  $A_0A''$  pone en evidencia su altura con respecto al plano horizontal.-

En la figura 11-b se ha representado la figura 11-a pero en vista frontal. Se aprecia entonces la primera proyección  $A'$  del punto A objetivo, bajo la línea fundamental, mientras que la segunda proyección  $A''$  del mismo, ubícase sobre ésta, luego: para situar al pun-

En consecuencia una forma cualquiera tiene dos proyecciones: horizontal, primera proyección o icnográfica sobre el plano  $\pi_1$ , llamado, por tal razón, plano horizontal, de primera proyección, icnográfico o planta, y vertical, segunda proyección u ortográfica sobre el plano  $\pi_2$ , llamado, entonces, plano vertical, de segunda proyección, ortográfico o elevación.-

En la figura 10, dado el punto A objetivo,  $A'$  y  $A''$  son sus proyecciones horizontal y vertical, respectivamente.-

to A dado en el espacio hay que levantar el plano  $\pi_1$  horizontal hasta colocarlo perpendicular respecto del  $\pi_2$  vertical. El punto se ubica entonces sobre una perpendicular por  $A'$  y a una altura  $A_0A''$  del plano  $\pi_2$  vertical.-



-a-

-b-

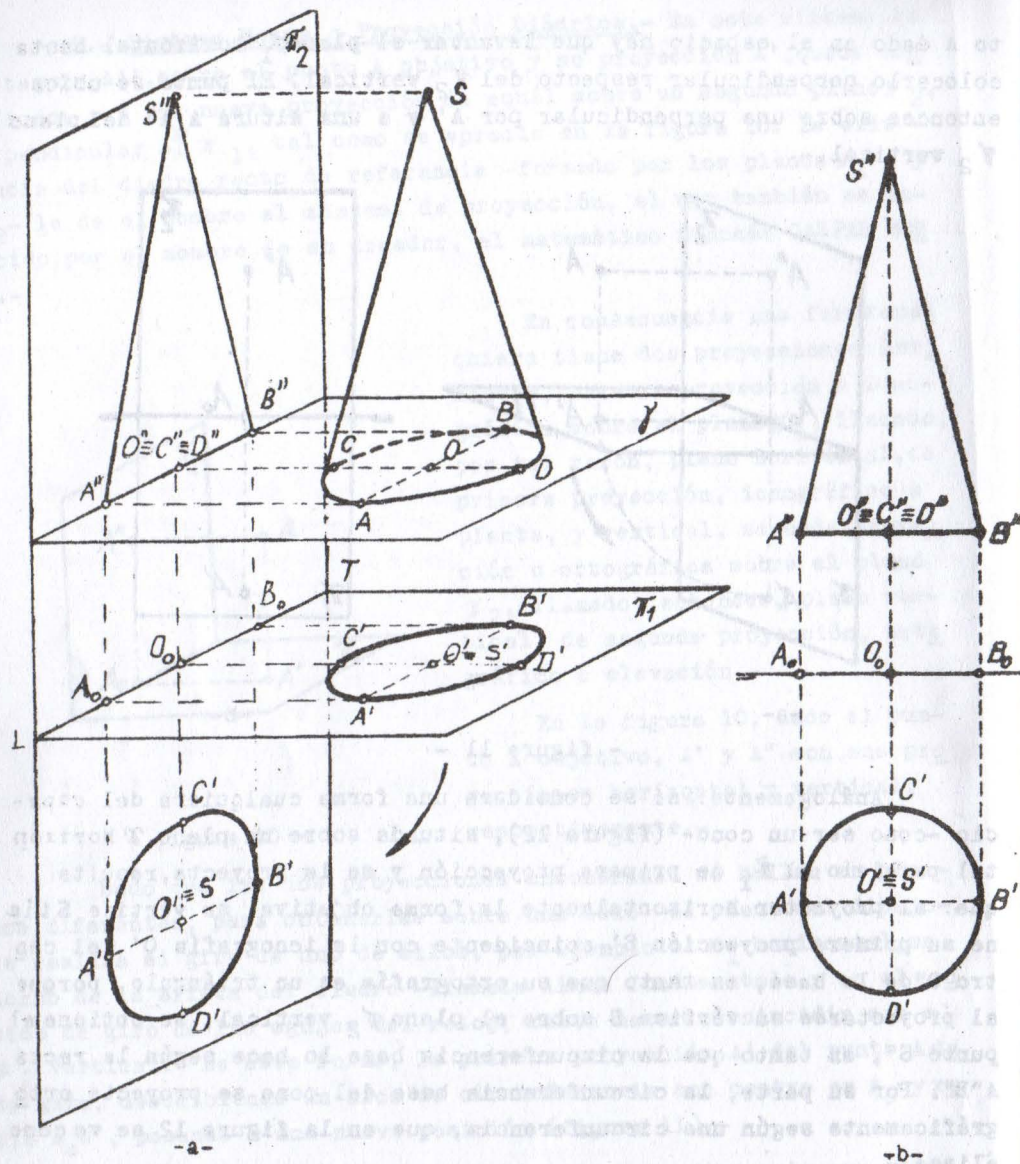
- figura 11 -

Análogamente: si se considera una forma cualquiera del espacio -como ser un cono- (figura 12), situada sobre un plano  $\gamma$  horizontal paralelo al  $\pi_1$  de primera proyección y se la proyecta, resulta que: al proyectar horizontalmente la forma objetiva, su vértice  $S$  tiene su primera proyección  $S'$  coincidente con la icnografía  $O'$  del centro  $O$  de la base, en tanto que su ortografía es un triángulo, porque al proyectarse su vértice  $S$  sobre el plano  $\pi_2$  vertical, se obtiene el punto  $S''$ , en tanto que la circunferencia base lo hace según la recta  $A''B''$ . Por su parte, la circunferencia base del cono se proyecta ortográficamente según una circunferencia, que en la figura 12 se ve como elipse.-

En síntesis: en Sistema Monge la proyección de un cono, apoyado en un plano paralelo al  $\pi_1$  de primera proyección, es icnográficamente una circunferencia y ortográficamente un triángulo.

Al girar el plano  $\pi_1$  sobre el  $\pi_2$  en la forma conocida, las proyecciones de la forma objetiva quedan tal como se aprecia en la figura 12-b.





- figura 12 -

10.- Sistema Axonométrico. Cuando se emplea el Sistema de Representación Cónico o Central resulta posible individualizar de una forma cualquiera sus tres dimensiones, pero existe dificultad para medir sus magnitudes, pues al obtener su imagen sobre el plano del cuadro, las magnitudes se deforman y, en definitiva, no son reales.-

Así, por ejemplo, si consideramos un cono y hallamos su perspectiva es posible individualizar sus tres dimensiones pero existe dificultad para determinar la verdadera magnitud del radio de su base o la altura. En efecto: observando la fotografía de un cono -que en definitiva representa su perspectiva- no resulta posible establecer de inmediato el valor real o la verdadera magnitud del radio de su base o la altura, aún cuando se esté en condiciones de apreciar la tridimensionalidad de la forma. En el Sistema Diédrico o de Monge, por el contrario, si bien no es posible individualizar de inmediato las dimensiones de una forma, hasta no realizar un proceso mental determinado, resulta fácil, sin embargo, obtener sus magnitudes reales.-

Se observa en síntesis que los sistemas de representación explicados presentan dificultades, ya de visualización, ya de medida -que se agravan cuando deben realizarse construcciones geométricas complicadas-; sin embargo, con cada una de las cualidades que poseen los mismos, se ha ideado un nuevo sistema de representación, llamado de Proyección Axonométrica (Axonometría o Perspectiva Axonométrica), cuya etimología se comprende si nos atenemos a las raíces griegas que lo forman (axo = eje; metro = medida).-

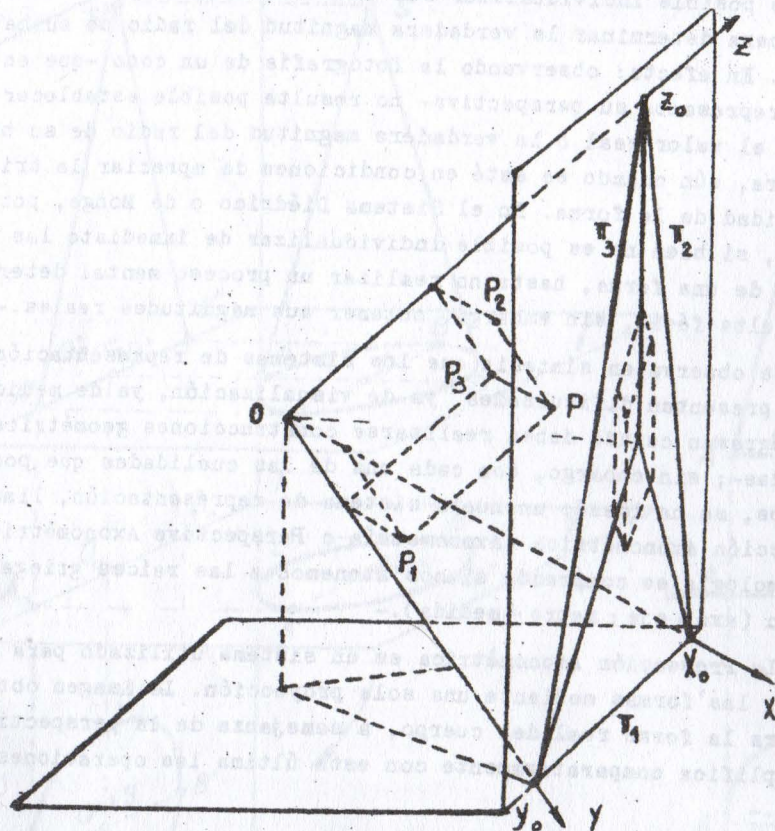
La Proyección Axonométrica es un sistema utilizado para representar las formas mediante una sola proyección. La imagen obtenida muestra la forma real del cuerpo, a semejanza de la perspectiva, pero simplifica comparativamente con esta última las operaciones para medir.-

La representación de las formas se vinculan a tres ejes coordenados que, formando entre sí un triedro tri-rectángulo, individualizarse con las notaciones  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , y determinándose tres planos:  $zOx$ ,  $yOx$ ,  $zOy$ , llamados planos coordenados.-

Sea (figura 13) un punto  $P$  cualquiera y un triedro tri-rectángulo. Proyectemos ortogonalmente al conjunto dado sobre el plano  $\pi$  del cuadro; entonces: los puntos en que las aristas del triedro cortan al cuadro -que llamamos  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ - determinan el triángulo  $X_0Y_0Z_0$  de las trazas, mientras que las proyecciones de sus aristas constituyen los ejes axonométricos.-

De esta manera el plano  $xOy$  intercede al del cuadro según una recta  $\pi_1$ ; el plano  $xOz$  lo hace según una nueva recta  $\pi_2$ ; y finalmente el  $yOz$  según una tercer recta  $\pi_3$ . Sobre el plano  $\pi$  del cuadro se aprecia la proyección ortogonal del punto  $P$  dado.-

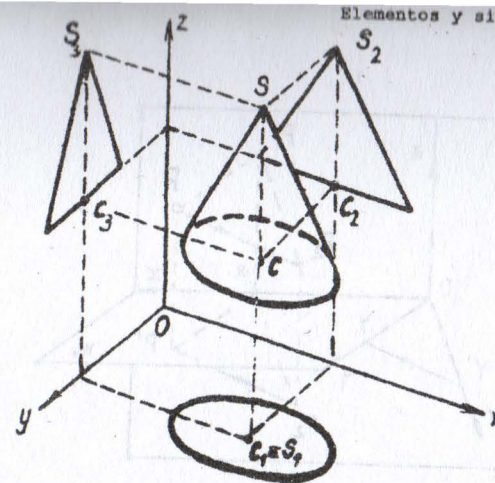




- figura 13 -

Dados (figura 14) los ejes axonómétricos  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , y un cono de vértice  $S$  apoyado en un plano paralelo al  $xOy$ , su proyección sobre los planos que ellos determinan permite obtener, sobre el  $xOy$  citado, una circunferencia porque el centro  $C$  de la base y el vértice  $S$  del cono se confunden en un solo punto  $C_1 \equiv S_1$  que al proyectarse ortogonalmente sobre el cuadro se ve elipse; y sobre los planos  $zOx$  y  $zOy$ , triángulos porque la circunferencia base del cono se proyecta según una recta, mientras que el contorno de su superficie lo hace según dos planos.

Las proyecciones ortogonales del centro  $O$  y vértice  $S$  del cono dado, sobre los planos  $z)x$  y  $z)y$ , respectivamente, son los puntos  $C_2$ ,  $S_2$ , y  $C_3$ ,  $S_3$ .



- figura 14 -

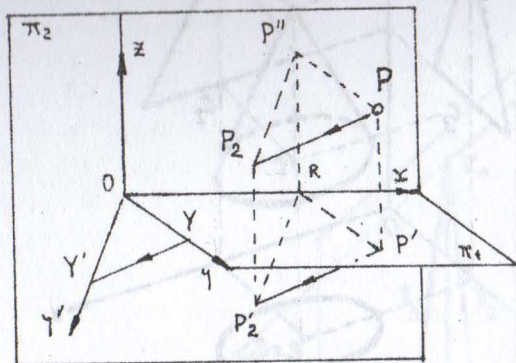
11.- Sistema de Perspectiva Caballera.— La tridimensionalidad de una forma también es posible observarla en una sola proyección si se modifica la posición del observador, efectuando de la misma una representación oblicua, en lugar de ortogonal, como se hizo en el sistema de Perspectiva Axonométrica. Entonces (figura 15), los ejes  $Ox$  y  $Oz$  se sitúan sobre el pla-

no del cuadro, mientras que el eje  $Oy$  lo hace sobre una oblicua  $Oy'$  inclinada. Se aprecia además que, con respecto al Sistema Axonométrico, se han variado las direcciones de proyección.

Elijamos (figura 15) al plano del papel como cuadro; los ejes  $Ox$  y  $Oz$  se proyectan coincidiendo con el cuadro y perpendiculares entre sí, y el eje  $Oy$  lo intercepta en el punto  $O$ ; luego será necesario conocer la proyección  $Y'$  de otro punto  $Y$  perteneciente a  $Oy$ , para determinar su proyección. Esta proyección  $Y'$  del punto  $Y$  es inclinada, de acuerdo a la dirección oblicua con respecto al cuadro que se adopte para proyectar sobre el mismo (cuadro) todos los puntos del espacio, y entonces, unidos los puntos  $O$  e  $Y'$  resulta la proyección  $Oy'$  oblicua del eje  $Oy$ .

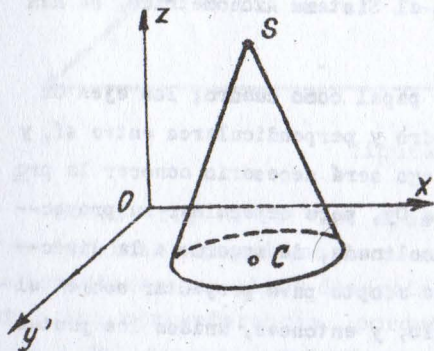
En estas condiciones, todo punto  $P$  del espacio se proyecta, sobre el plano  $\pi_2$  del cuadro, en  $P_2$  y según una dirección arbitraria, indicada en la figura 15 por una flecha; pero como esta proyección no basta para determinarle, se agrega la imagen  $P'$  de su proyección sobre un plano  $\pi_1$  horizontal. A su vez la proyección del punto  $P$  dado sobre el plano  $\pi_2$  del cuadro se obtiene por medio de los segmentos  $P'H$ ,  $PI'$  y  $P_2P'$  (los primeros paralelos entre sí).





- figura 15 -

En síntesis: para representar al punto  $P$  se determinan sus proyecciones  $P'$  y  $P_2$ , respectivamente sobre el plano  $\pi_1$  horizontal y del cuadro  $\pi_2$ ; trazando luego por  $P'$  una paralela al eje  $Oy$  se determina un punto  $R$ , al cortar la recta de intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  dados, cuya perpendicular a  $\pi_1$ , en su intersección con la trazada por  $P$  y paralela al eje  $Oy$ , permite obtener el punto  $P''$ , proyección del punto  $P$  dado.-



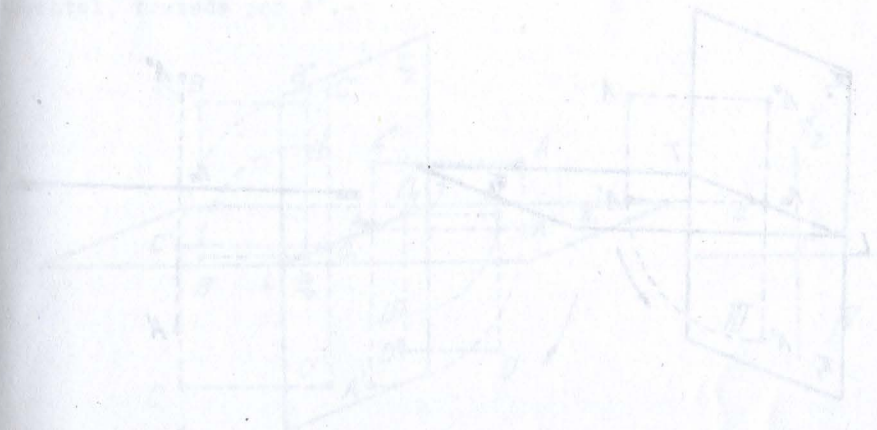
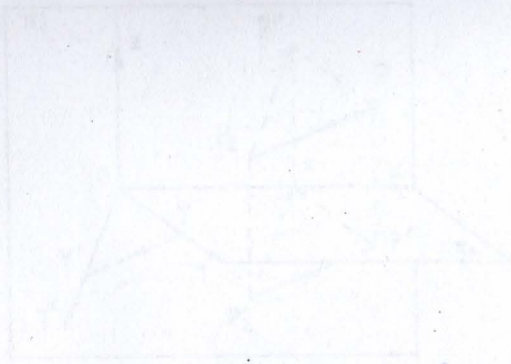
- figura 16 -

Así, por ejemplo (figura 16), si de un cono de vértice  $S$  se desea hallar su proyección oblicua, resulta sobre el eje  $Ox$  la proyección del radio círculo base; sobre el  $Oy$  la proyección del radio reducido y sobre el  $Oz$  la proyección de su altura.-

## Sistema de Proyección Diédrica o Monge



# Punto, Recta y Plano



12.- Elementos de representación.- Los elementos de representación del Sistema Diédrico o de Monge son dos planos: uno horizontal -tal, de primera proyección o icnográfico -se simboliza con la nota -ción  $\pi_1$ - y otro vertical, de segunda proyección u ortográfico -se simboliza con la notación  $\pi_2$ -; ambos, perpendiculares entre sí, forman un diedro recto, cuya arista es la línea de tierra o fundamental -se simboliza con la notación LT.-

En consecuencia: dada una forma cualquiera resultan dos proyecciones: horizontal, primera proyección o icnográfica -sobre el plano  $\pi_1$ - y vertical, segunda proyección u ortográfica -sobre el plano  $\pi_2$ -.

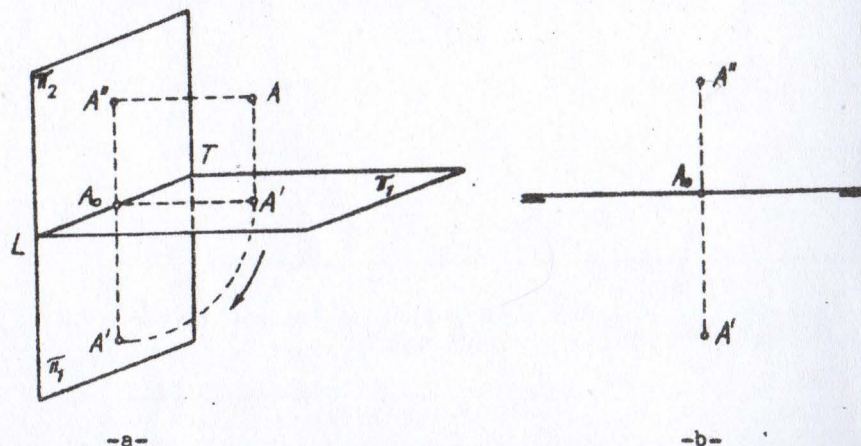
También el plano horizontal se llama planta y el vertical elevación.-

13.- Representación del punto.- En Sistema Monge todo punto A del espacio se representa por dos proyecciones, A' y A'', respectivamente situadas sobre los planos horizontal y vertical (figura 17).

Dado que las dos proyecciones A' y A'' se hallan situadas en planos diferentes, para obtenerlas sobre uno sólo -el plano del dibujo-, se realiza el giro de uno de ellos, por ejemplo el  $\pi_1$ , horizon -



tal, en torno de la línea fundamental y en el sentido de giro de las agujas del reloj, hasta hacerlo coincidir con el  $\pi_2$  vertical. De esta forma (figura 17-b), la primera proyección  $A'$  del punto A dado gira, describiendo un arco de circunferencia con centro en  $A_0$  y radio  $A_0A'$ , pasando a una nueva posición.-



- figura 17 -

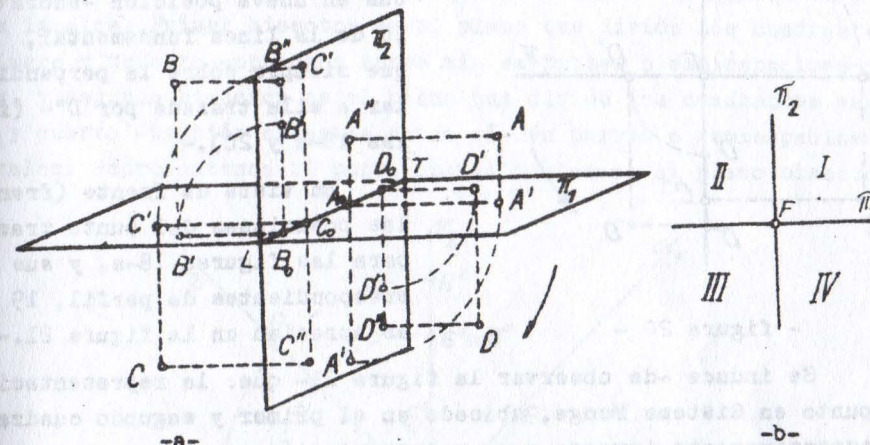
Luego: la representación de un punto A cualquiera se realiza trazando (figura 17-b) una recta perpendicular a la línea fundamental y considerando -sobre la misma- sus proyecciones,  $A'$  y  $A''$ . Para ubicar al punto A dado en el espacio se sabe que la magnitud  $A_0A''$  indica su altura del plano horizontal, y el segmento  $A_0A'$  su distancia al plano vertical.-

14.- Posiciones particulares del punto.- En rigor (figura 18-a): se observa que los planos  $\pi_1$  horizontal y  $\pi_2$  vertical dividen el espacio en cuatro regiones -llamadas cuadrantes- que se numeran como indica la figura 18-b; pudiendo, en consecuencia, ubicarse el punto en cualesquiera de las mismas.-

En la figura 18-b se ha dibujado un perfil de los planos de proyección,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , trazándose dos rectas perpendiculares cuya intersección -punto F- representa la línea fundamental.-

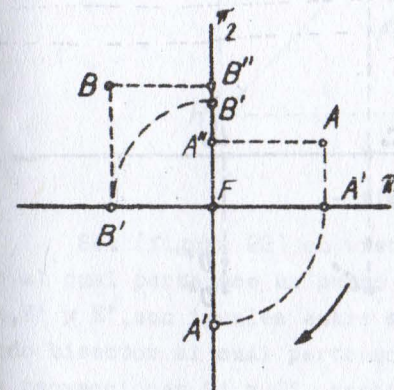
Cuando el punto A dado se ubica en el primer cuadrante, sus proyecciones  $A'$  y  $A''$  se sitúan como lo indica la figura 19, en vista de perfil. Al abatir en el sentido de marcha de las agujas del reloj

(sistema horario) al plano  $\pi_1$  horizontal hasta hacerlo coincidir con el  $\pi_2$  vertical, la primera proyección  $A'$  del punto A también gira describiendo un arco de circunferencia -con centro en F y radio  $FA'$ -, ubicándose en nueva posición, sobre la perpendicular a la fundamental, trazada por  $A''$ .-



- figura 18 -

Cuando el punto B dado se sitúa en el segundo cuadrante, sus proyecciones,  $B'$  y  $B''$ , se sitúan como lo indica la figura 19. Efectuado el abatimiento del plano  $\pi_1$  horizontal, la proyección  $B'$  del punto B dado gira describiendo un



- figura 19 -

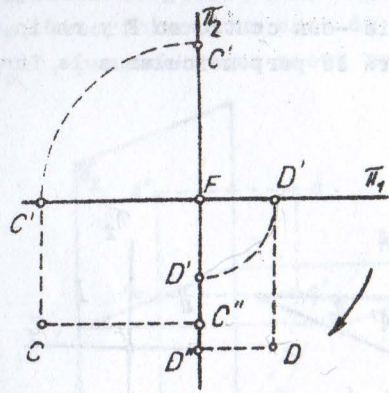
arco de circunferencia -con centro en F y radio  $FB'$ -, situándose en nueva posición -ahora sobre la línea fundamental, aunque siempre sobre la perpendicular a ella trazada por  $B''$ - (figuras 18-a y 19).-

Si el punto C dado se sitúa en el tercer cuadrante, sus proyecciones,  $C'$  y  $C''$ , se sitúan como lo indica la figura 20. Efectuado el abatimiento del plano  $\pi_1$  horizontal, la proyección  $C'$  del

punto C dado gira describiendo un arco de circunferencia -con centro en F y radio  $FC'$ - situándose en nueva posición -también sobre la línea fundamental, pero siempre sobre la perpendicular a ella trazada por  $C''$ - (figuras 18-a y 20).-

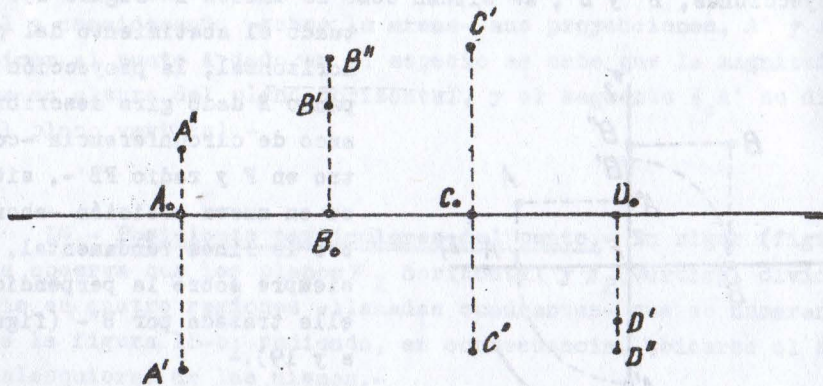


Finalmente, si el punto D dado se ubica en el cuarto cuadrante, sus proyecciones,  $D'$  y  $D''$ , se sitúan como lo indica la figura 20,



- figura 20 -

Se induce -de observar la figura 21- que: la representación del punto en Sistema Monge, ubicado en el primer y segundo cuadrantes, es respectivamente inversa a su representación en el tercer y cuarto cuadrantes.-



- figura 21 -

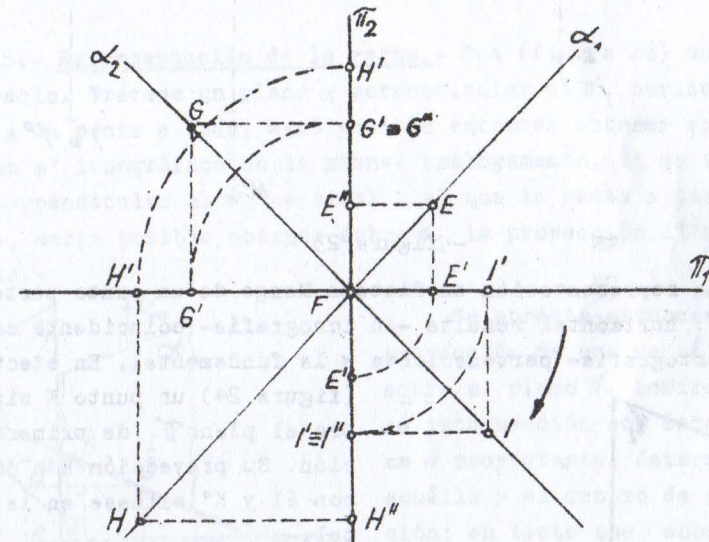
En efecto: mientras para el primer cuadrante las proyecciones: horizontal y vertical del punto dado, respectivamente se sitúan debajo y sobre la línea fundamental; en el tercer cuadrante, aquélla lo hace sobre la misma, y ésta bajo la fundamental; es decir que ambas

y abatido el plano  $\pi_1$  horizontal, el punto  $D'$ , habiendo descrito -un arco de circunferencia -con centro en F y radio  $FD'$ -, se sitúa en nueva posición -ahora debajo de la línea fundamental, aunque siempre sobre la perpendicular a ella trazada por  $D''$ - (figuras 18-a y 20).-

En vista de frente (frental), las posiciones del punto trazadas para las figuras 18-a, y sus correspondientes de perfil, 19 y 20, se aprecian en la figura 21.-

son inversas. Análogamente: mientras en el segundo cuadrante las proyecciones: horizontal y vertical del punto dado, se sitúan sobre la línea fundamental, inversamente en el cuarto cuadrante lo hacen debajo de la misma.-

Llámanse bisector al plano que divide los cuadrantes en partes iguales. Primer bisector es el plano que divide los cuadrantes -primero y tercero -opuestos entre sí- en partes o semiespacios iguales, y segundo bisector es el plano que divide los cuadrantes segundo y cuarto -también opuestos entre sí- en partes o semiespacios iguales. Representemos al punto cuando pertenece al plano bisector.-

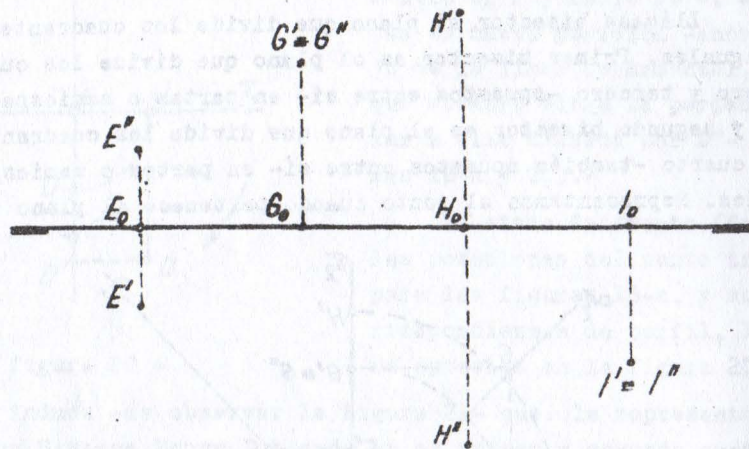


- figura 22 -

Sea (figura 22) en vista de perfil un plano  $\alpha_1$  primer bisector al cual pertenece un punto E del primer cuadrante. Sus proyecciones,  $E'$  y  $E''$ , son iguales entre sí. Análogamente: sea un plano  $\alpha_2$  segundo bisector al cual pertenece un punto G del segundo cuadrante. - Sus proyecciones,  $G'$  y  $G''$ , también son iguales entre sí. Como en el tercer y cuarto cuadrantes -según se ha visto- la representación del punto es respectivamente inversa a la de los cuadrantes primero y segundo; puntos H e I de los bisectores  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  -respectivamente pertenecientes a los cuadrantes tercero y cuarto-, tendrán sus proyecciones  $H'$ ,  $H''$  e  $I'$ ,  $I''$  iguales entre sí.-

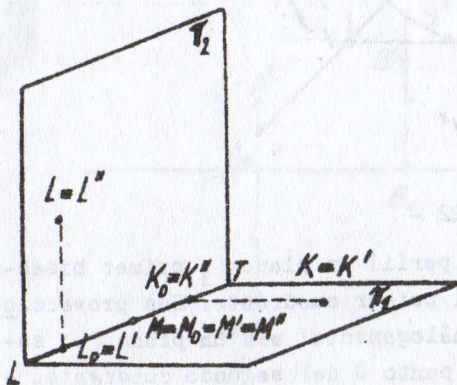


Si en vista frontal (figura 23) se considera la representación de la figura 22 surge que: cuando el punto pertenece al plano bisector, sus proyecciones -horizontal y vertical- se sitúan a igual distancia de la línea fundamental. En particular para el plano  $\alpha_2$  segundo bisector resultan coincidentes ( $G \equiv G''$  e  $I \equiv I''$ ).-



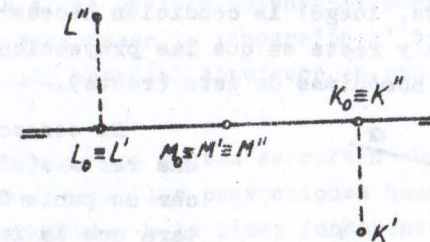
- figura 23 -

La representación en Sistema Monge de un punto perteneciente al plano  $\pi_1$  horizontal resulta -en icnografía- coincidente con el mismo y -en ortografía- perteneciente a la fundamental. En efecto: sea (figura 24) un punto K situado sobre el plano  $\pi_1$  de primera proyección. Su proyección K' coincide con él y K'' sitúase en la fundamental.

- figura 24 -  
y L'', en la forma indicada.-

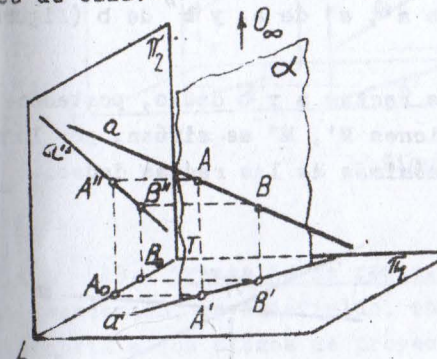
Finalmente, la representación en Sistema Monge de un punto M (figura 24), perteneciente a la línea fundamental, resulta con sus proyecciones, M' y M'', coincidentes entre sí y con el punto dado.-

En la figura 25 se considera la representación de la figura 24 en vista frontal.-



- figura 25 -

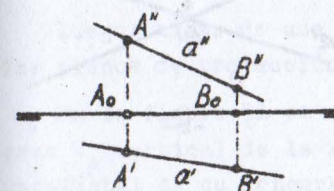
15.- Representación de la recta.- Sea (figura 26) una recta  $a$  del espacio. Trácese un plano  $\alpha$  perpendicular al  $\pi_1$  horizontal que contenga a la recta a dada; será posible entonces obtener sobre  $\pi_1$  la proyección a' icnográfica de la misma. Análogamente, si se trazara un plano  $\beta$  perpendicular al  $\pi_2$  vertical y al que la recta a también perteneciera, sería posible obtener sobre  $\pi_2$  la proyección a'' ortográfica de ella.-



- figura 26 -

Se aprecia entonces que la proyección de una recta a dada, sobre el plano  $\pi_1$  horizontal, es la intersección con éste del plano  $\alpha$  proyectante, determinado por aquella y el centro de proyección; en tanto que, sobre el plano  $\pi_2$  vertical, es la intersección con éste del plano  $\beta$  proyectante, determinada por la recta a dada y el centro de proyección.

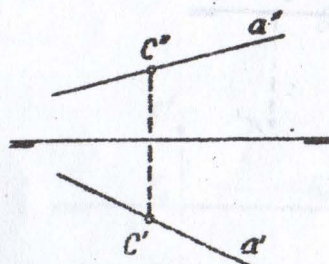
Abatido el plano  $\pi_1$  de primera proyección, en torno de la línea fundamental y en el sentido de marcha de las agujas del reloj, hasta que coincide con el plano  $\pi_2$  de segunda proyección, la recta se dispone en una posición tal como lo indica la figura 27, en vista frontal.-



- figura 27 -



**16.- Condición de pertenencia de punto y recta.-** De la figura 26 se observa que las proyecciones:  $A'$  horizontal y  $A''$  vertical de un punto  $A$ , perteneciente a la recta  $a$ , se sitúan sobre las homónimas,  $a'$  y  $a''$ , de ésta, luego: la condición necesaria y suficiente de pertenencia de punto y recta es que las proyecciones de aquél (punto) se sitúen sobre las homónimas de ésta (recta).-



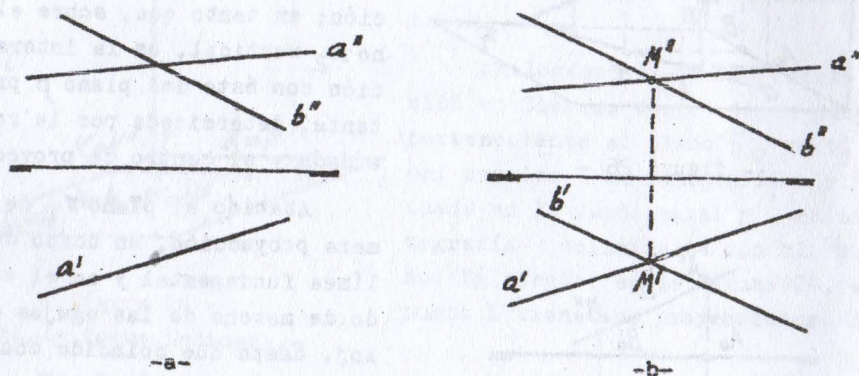
- figura 28 -

En consecuencia: si sobre una recta  $a(a', a'')$  deseamos ubicar un punto  $C$  (figura 28), bastará que la icnografía  $C'$  de éste se sitúe sobre  $a'$  y la ortografía  $C''$  sobre  $a''$ , pudiéndosela hallar en la intersección con  $a''$  de la perpendicular a la fundamental trazada desde  $C'$ .-

**17.- Rectas que se cortan.-** Dos rectas que se cortan determinan un punto.-

Sean (figura 29)  $a$  y  $b$  rectas que se cortan en un punto  $M$  y de las que poseemos las proyecciones  $a', a''$  de  $a$ , y  $b', b''$  de  $b$  (figura 29-a).-

Siendo  $M$  intersección de las rectas  $a$  y  $b$  dadas, pertenece a éstas; en consecuencia, sus proyecciones  $M', M''$  se sitúan, por lo visto en el párrafo 16, sobre las homónimas de las rectas dadas.-



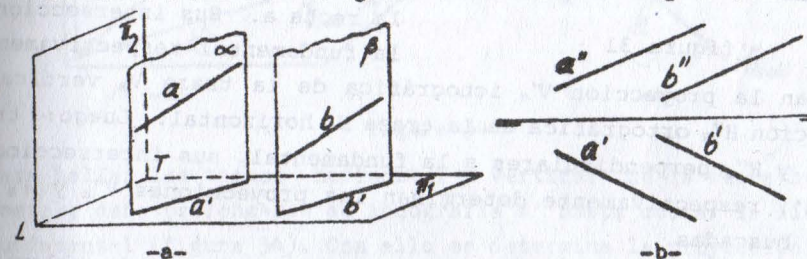
- figura 29 -

Así entonces (figura 29-b),  $M''$  es intersección de  $a''$  y  $b''$ . Si por  $M''$  trazamos una perpendicular a la fundamental hasta encontrar a la icnografía  $a'$  de  $a$ , es posible obtener la proyección  $M'$  de  $M$ , por donde forzosamente debe pasar la icnografía  $b'$  de  $b$ , que por no cumplir ninguna condición especial dibujamos en una dirección cualquiera.-

En consecuencia: dos rectas se cortan cuando la recta que une los puntos en que se cortan las proyecciones homónimas de las rectas dadas resulta perpendicular a la línea fundamental.-

**18.- Rectas paralelas.-** Puede considerarse como caso particular del anterior; es decir el  $M$  es  $M_\infty$  siendo, en consecuencia,  $M'_\infty$  y  $M''_\infty$ , y por lo tanto, las proyecciones homónimas resultan paralelas (figura 30-b).-

Al mismo resultado llegamos observando la figura 30-a.-



- figura 30 -

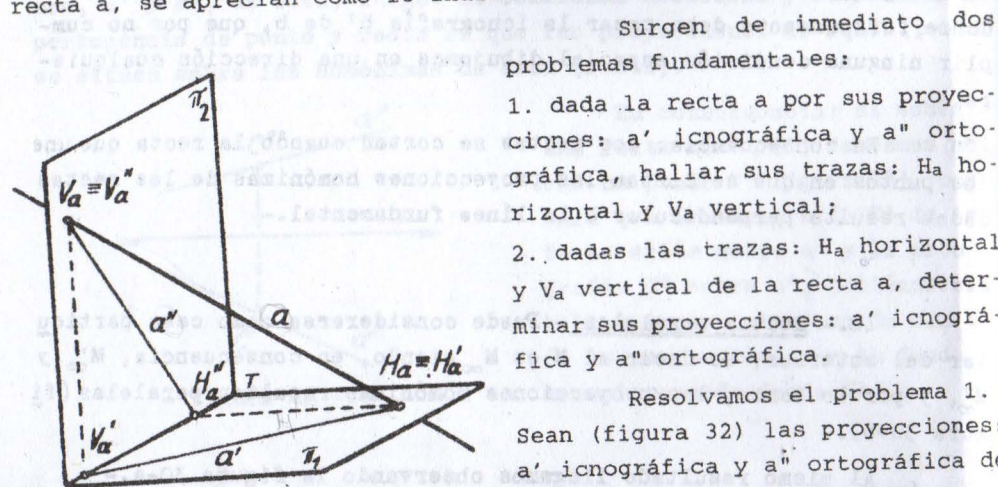
**19.- Trazas de la recta.-** La recta, considerada como elemento geométrico, es indefinida; en consecuencia, toda recta del espacio corta a los planos de proyección -horizontal y vertical-, respectivamente en dos puntos que -individualizados con la notación  $H_a$  y  $V_a$  para una recta  $a$ -, se llaman trazas horizontal y vertical de la misma.-

Luego: traza de una recta es el punto de intersección de ella con los planos de proyección.-

En la figura 31 se aprecia que la proyección  $V'_a$  horizontal de la traza  $V_a$  vertical de la recta  $a$ , se sitúa en la intersección con la fundamental de su icnografía  $a'$ . Análogamente, la proyección  $H''_a$  -vertical de la traza  $H_a$  horizontal de la recta  $a$ , se sitúa en la intersección con la fundamental de su ortografía  $a''$ .-

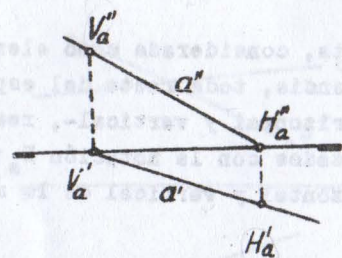


En vista frontal, las proyecciones icnográficas y ortográficas ( $H'_a$ ,  $V'_a$  y  $H''_a$ ,  $V''_a$ ) de las trazas  $H_a$  horizontal y  $V_a$  vertical de una recta  $a$ , se aprecian como lo indica la figura 32.



- figura 31 -

terminan la proyección  $V'_a$  icnográfica de la traza  $V_a$  vertical y la proyección  $H''_a$  ortográfica de la traza  $H_a$  horizontal. Luego: trazando por  $V'_a$  y  $H''_a$  perpendiculares a la fundamental, sus intersecciones con  $a''$  y  $a'$ , respectivamente determinan las proyecciones  $V''_a$  y  $H'_a$  de las trazas buscadas.



- figura 32 -

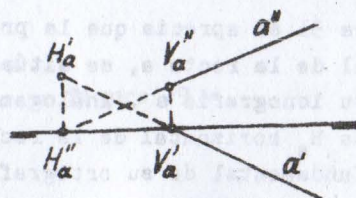
Surgen de inmediato dos problemas fundamentales:

1. dada la recta  $a$  por sus proyecciones:  $a'$  icnográfica y  $a''$  ortográfica, hallar sus trazas:  $H_a$  horizontal y  $V_a$  vertical;
2. dadas las trazas:  $H_a$  horizontal y  $V_a$  vertical de la recta  $a$ , determinar sus proyecciones:  $a'$  icnográfica y  $a''$  ortográfica.

Resolvamos el problema 1.

Sean (figura 32) las proyecciones:  $a'$  icnográfica y  $a''$  ortográfica de la recta  $a$ . Sus intersecciones con la fundamental respectivamente de-

Resolvamos el problema 2. Sean (figura 33) las trazas  $H'_a$  horizontal y  $V''_a$  vertical. Trazando por ellas perpendiculares a la fundamental, respectivamente sobre ésta se determinan sus proyecciones  $H''_a$  ortográfica y  $V'_a$  icnográfica. Unidos  $H'_a$  con  $V'_a$  resulta la icnografía  $a'$  de la recta  $a$  buscada, mientras que su ortografía  $a''$  resulta de unir  $H''_a$  con  $V''_a$ .



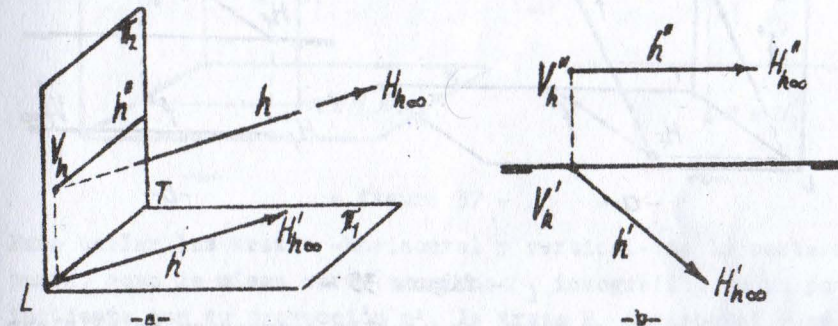
- figura 33 -

2C.- Posiciones particulares de la recta.- En el espacio, la recta puede tener una serie de distintas posiciones, pero de ellas y entre otras, solamente nos interesan las siguientes:

- a) horizontal. Se dice que la recta es horizontal cuando es paralela al plano  $\pi_1$  de primera proyección.-

Sea (figura 34)  $h$  una recta horizontal de proyecciones  $h'$ ,  $h''$ .-

Por ser la distancia de  $h$  al plano  $\pi_1$  de primera proyección constante, su ortografía  $h''$  es paralela a la línea fundamental, y en consecuencia: la recta  $h$  horizontal tiene su proyección  $h''$  ortográfica paralela a la línea fundamental.-



- figura 34 -

Para hallar las trazas -horizontal y vertical- de la recta  $h$  horizontal, debe prolongarse su icnografía  $h'$  hasta cortar la línea fundamental (figura 34). Con ello se determina la proyección  $V'_h$  horizontal de la traza  $V_h$  vertical. Su proyección  $V''_h$  se obtiene trazando por  $V'_h$  una perpendicular a la fundamental y en su intersección con  $h''$ . Las proyecciones: horizontal  $H'_h$  y vertical  $H''_h$  de la traza  $H_h$  horizontal se sitúan en el infinito ( $H'_{h\infty}$ ,  $H''_{h\infty}$ ) por ser la recta  $h$  paralela al plano  $\pi_1$  icnográfico, dado que ambos (recta y plano) tienen un punto común en el infinito.-

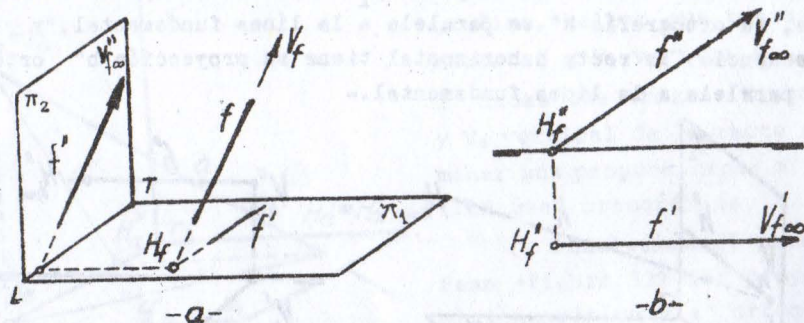
- b) frontal. Se dice que la recta es frontal cuando es paralela al plano  $\pi_2$  de segunda proyección.-

Sea (figura 35)  $f$  una recta frontal de proyecciones  $f'$ ,  $f''$ . Por ser la distancia de  $f$  al plano  $\pi_2$  de segunda proyección constante, su icnografía  $f'$  es paralela a la línea fundamental, y en consecuencia: la recta  $f$  frontal tiene su proyección  $f'$  icnográfica paralela a la línea fundamental.-

Para hallar las trazas -horizontal y vertical- de la recta  $f$  frontal, debe prolongarse su ortografía  $f''$  hasta cortar la línea fundamental (figura 35). Con ello se determina la proyección  $H''_f$  ortográfica



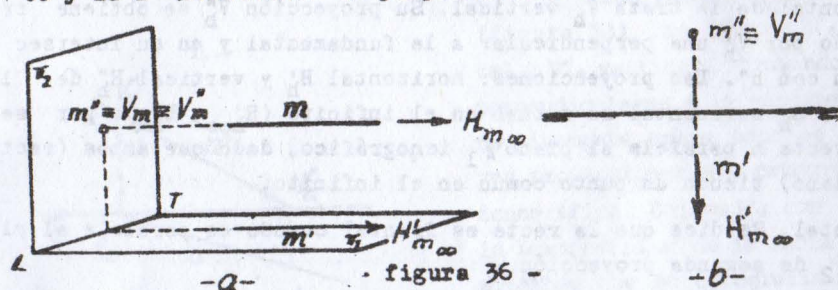
gráfica de la traza  $H_f$  horizontal. Su proyección  $H_f'$  icnográfica se obtiene trazando por  $H_f'$  una perpendicular a la fundamental y en su intersección con  $f'$ . Las proyecciones: horizontal  $V_f'$  y vertical  $V_f''$  de la traza  $V_f$  vertical se sitúan en el infinito ( $V_{f\infty}'$ ,  $V_{f\infty}''$ ) por ser la recta  $f$  paralela al plano  $\pi_2$  ortográfico, dado que ambos (recta y plano) tienen un punto común en el infinito.-



- figura 35 -

c) de punta. Recta de punta es aquella perpendicular al plano  $\pi_2$  de segunda proyección.-

Sea (figura 36)  $m(m', m'')$  una recta perpendicular al plano  $\pi_2$  de segunda proyección; su proyección  $m''$  vertical se reduce a un punto y la  $m'$  horizontal es perpendicular a la fundamental.-

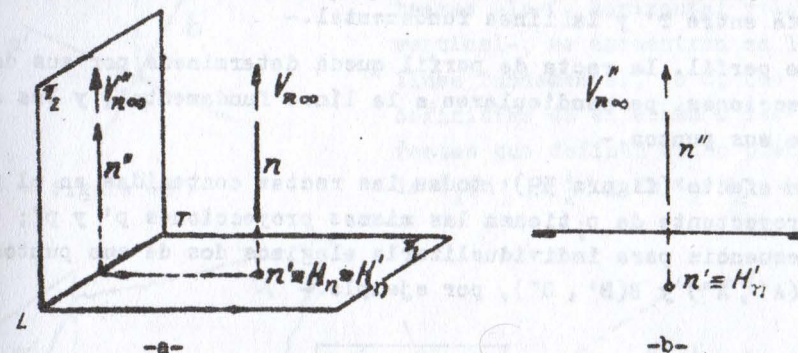


- figura 36 -

Para hallar las trazas -horizontal y vertical- de la recta  $m$  de punta, como la misma corta al plano  $\pi_2$  ortográfico en un punto coincidente con su proyección  $m''$ , la traza  $V_m$  vertical y su ortografía  $V_m''$  coinciden con ésta; mientras que, por ser la distancia de  $m$  al plano  $\pi_1$  icnográfico constante, su traza  $H_m$  horizontal y su proyección  $H_m'$  icnográfica, se sitúan en el infinito. Finalmente, las proyecciones  $V_m'$  y  $H_m''$  coincidentes, se sitúan en la intersección de  $m'$  y la fundamental.-

d) vertical. Recta vertical es aquella perpendicular al plano  $\pi_1$  de primera proyección.-

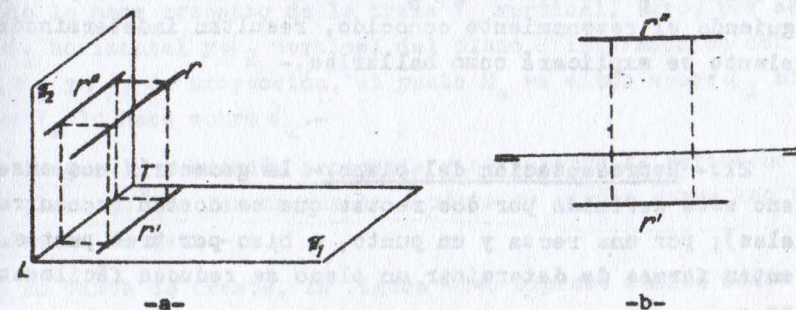
Sea (figura 37)  $n(n', n'')$  una recta perpendicular al plano  $\pi_1$  de primera proyección; su proyección  $n'$  horizontal se reduce a un punto y la  $n''$  vertical es perpendicular a la fundamental.-



- figura 37 -

Para hallar las trazas -horizontal y vertical- de la recta  $n$  de punta, como la misma corta al plano  $\pi_1$  icnográfico en un punto coincidente con su proyección  $n'$ , la traza  $H_n$  horizontal y su ortografía  $H_n''$  coinciden con ésta; mientras que, por ser la distancia de  $n$  al plano  $\pi_2$  ortográfico constante, su traza  $V_n$  vertical y su proyección  $V_n''$  ortográfica, se sitúan en el infinito. Finalmente, las proyecciones  $H_n'$  y  $V_n''$  coincidentes, se sitúan en la intersección de  $n''$  y la línea fundamental.-

e) paralela a la línea fundamental. Se dice (figura 38) que la recta  $r$  es paralela a la línea fundamental, cuando sus proyecciones  $r'$  horizontal y  $r''$  vertical también lo son.-



- figura 38 -

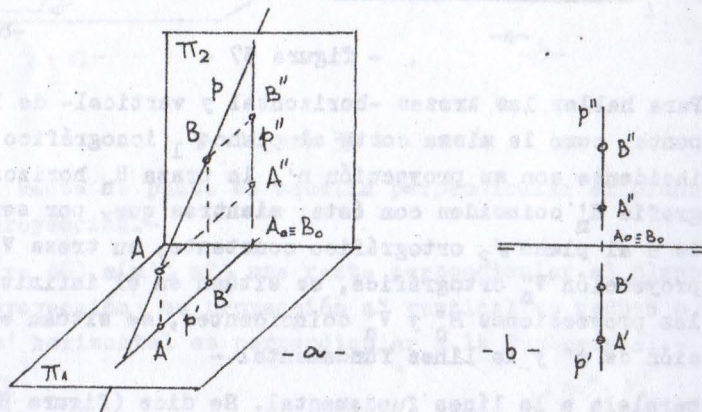
Como la recta  $r$  dada es paralela a la línea fundamental y, en consecuencia, a los planos de proyección, sus trazas:  $H_r$  horizontal y  $V_r$  vertical son puntos impropios, ubicándose en el infinito.-



La noción de la posición de la recta  $r$ , paralela a la línea fundamental, se adquiere en el espacio, si se considera sobre un plano perpendicular al del papel por  $r''$ , una distancia igual a la que existe entre  $r'$  y la línea fundamental.-

f) de perfil. La recta de perfil queda determinada por sus dos proyecciones, perpendiculares a la línea fundamental, y las de dos de sus puntos.-

En efecto (figura 39): todas las rectas contenidas en el plano proyectante de  $p$  tienen las mismas proyecciones  $p'$  y  $p''$ ; en consecuencia para individualizarla elegimos dos de sus puntos, el  $A(A', A'')$  y  $B(B', B'')$ , por ejemplo.-

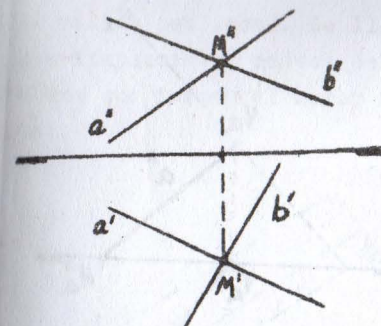


- figura 39 -

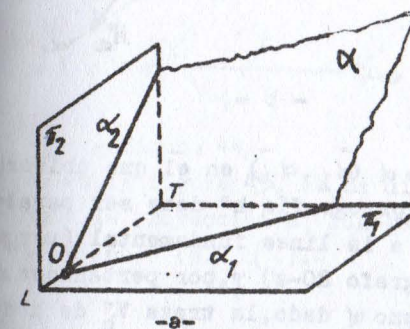
Las trazas  $H_p$  horizontal y  $V_p$  vertical de una recta  $p$  de perfil, siguiendo el razonamiento conocido, resultan indeterminadas. Más adelante se explicará como hallarlas.-

21.- Representación del plano.- La geometría nos enseña que un plano está definido por dos rectas que se cortan (concurrentes o paralelas); por una recta y un punto, o bien por tres puntos. Estas diferentes formas de determinar un plano se reducen fácilmente a la primera.-

En Geometría Descriptiva, un plano será, en consecuencia, representado por las proyecciones de dos rectas que se cortan, las  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$ , tal como se aprecia en la figura 40.-

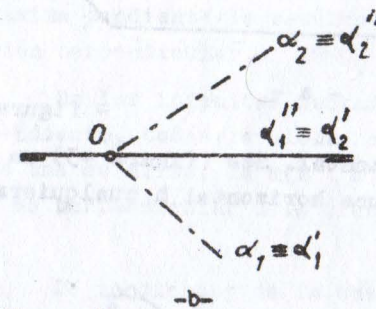


- figura 40 -



- figura 41 -

Se llaman trazas (figura 41 de un plano las rectas según las cuales el plano corta a los de - proyección:  $\pi_1$  horizontal y  $\pi_2$  vertical. En consecuencia: las dos trazas - la  $\alpha_1$  horizontal y la  $\alpha_2$  vertical -, se encuentran en la línea fundamental, en O, que en definitiva es el común a las dos rectas que definen dicho plano: la  $\alpha_1(\alpha'_1, \alpha''_1)$  y la  $\alpha_2(\alpha'_2, \alpha''_2)$ .



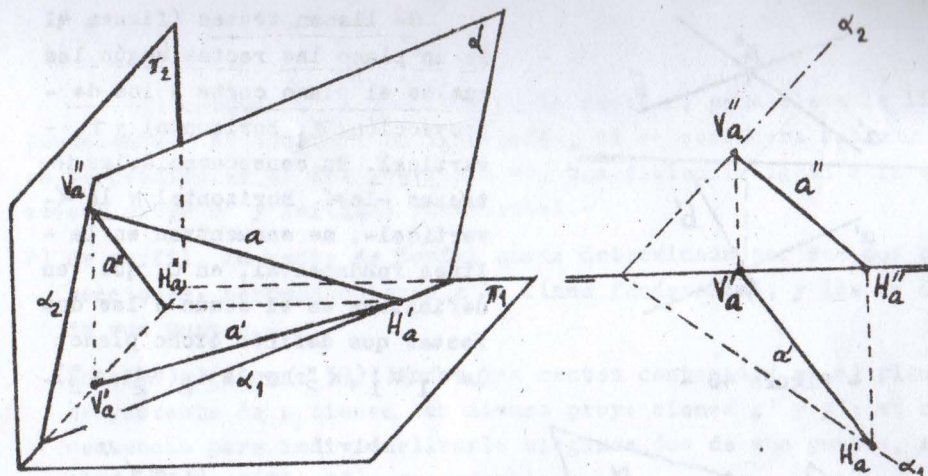
22.- Condición de pertenencia de recta y plano.- Sea (figura 42) una recta  $a(a', a'')$  del plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ . La intersección de  $a$  con el plano  $\pi_1$  icnográfico determina la posición de la traza  $H_a$  horizontal de la recta, mientras que su intersección con el plano  $\pi_2$  ortográfico lo hace respecto de la traza  $V_a$  vertical. Pero, por ser las trazas  $\alpha_1$  horizontal y  $\alpha_2$  vertical del plano  $\alpha$  intersección con los planos,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , de proyección, el punto  $H_a$  se sitúa sobre  $\alpha_1$  mientras que  $V_a$  lo hace sobre  $\alpha_2$ .

Luego: la condición necesaria y suficiente de pertenencia de recta y plano es que las trazas de aquella se sitúen sobre las trazas homónimas de éste.-

En vista de frente, la figura 42-b expresa cuando hemos dicho.-

Resultan de interés, por su aplicación ulterior, la representación de las horizontales, frontales y de máxima pendiente del plano.-



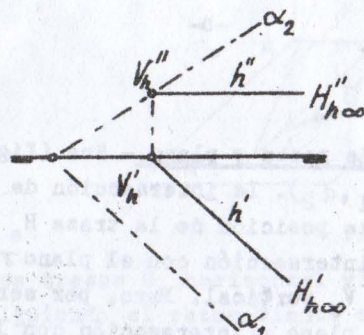


- a -

- b -

- figura 42 -

a) horizontal. Sea (figura 43) un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) en el que ubicaremos una horizontal  $h$  cualquiera. La ortografía  $h''$  debe ser paralela a la línea fundamental (ver párrafo 20-a) y, por pertenecer al plano  $\alpha$  dado, la traza  $V_h''$  de  $h$  debe estar sobre la homónima  $\alpha_2$  de aquél. La icnografía  $h'$  pasará por  $V_h'$  y será paralela a  $\alpha_1$ , pues, siendo  $h$  una horizontal, su intersección con el plano  $\pi_1$  de primera proyección es impropia y encontrará a  $\alpha_1$  en el infinito.-

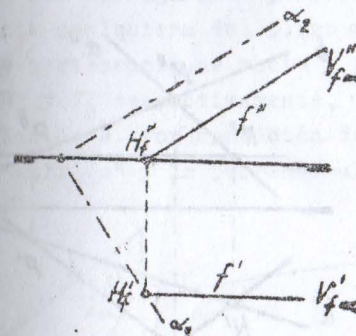


- figura 43 -

Se han determinado las proyecciones  $h'$  y  $h''$  de la horizontal  $h$  del plano  $\alpha$ .-

b) frontal. Sea (figura 44) un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) en el que ubicaremos una frontal  $f$  cualquiera. La icnografía  $f'$  debe ser paralela a la línea fundamental (ver párrafo 20-b) y, por pertenecer al plano  $\alpha$  dado, la traza  $H_f'$  de  $f$  debe estar sobre la homónima  $\alpha_1$  de aquél. La ortografía  $f''$  pasará por  $H_f''$  y será paralela a  $\alpha_2$ , pues, siendo  $f$  una frontal, su intersección con el plano  $\pi_2$  de segunda proyección es impropia y encontrará a  $\alpha_2$  en el infinito.- Se han determinado las proyecciones  $f'$  y  $f''$  de la frontal  $f$  del plano  $\alpha$ .-

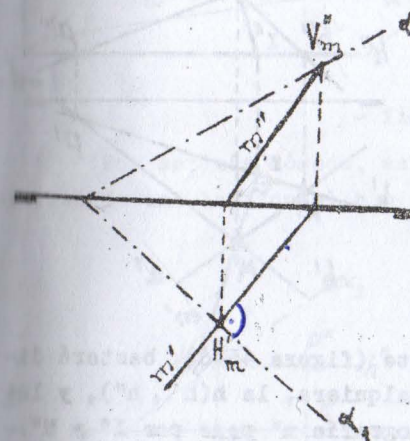
c) de máxima pendiente. Se llaman rectas de máxima pendiente o bien, más simplemente, rectas de pendiente de un plano, las rectas del mismo que forman el mayor ángulo posible con el plano  $\pi_1$  horizontal.-



- figura 44 -

Siendo la traza de un plano, una horizontal del mismo, la de máxima pendiente le resulta también perpendicular.-

De las infinitas rectas de pendiente, todas paralelas entre sí, en la figura 45, se ha dibujado una de ellas, la  $m(m', m'')$ , - donde la proyección  $m'$  icnográfica es perpendicular a la traza  $\alpha_1$  del plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ).-



- figura 45 -

De lo dicho y de la observación de la figura anterior podemos decir que: una recta de pendiente es suficiente para determinar un plano.-

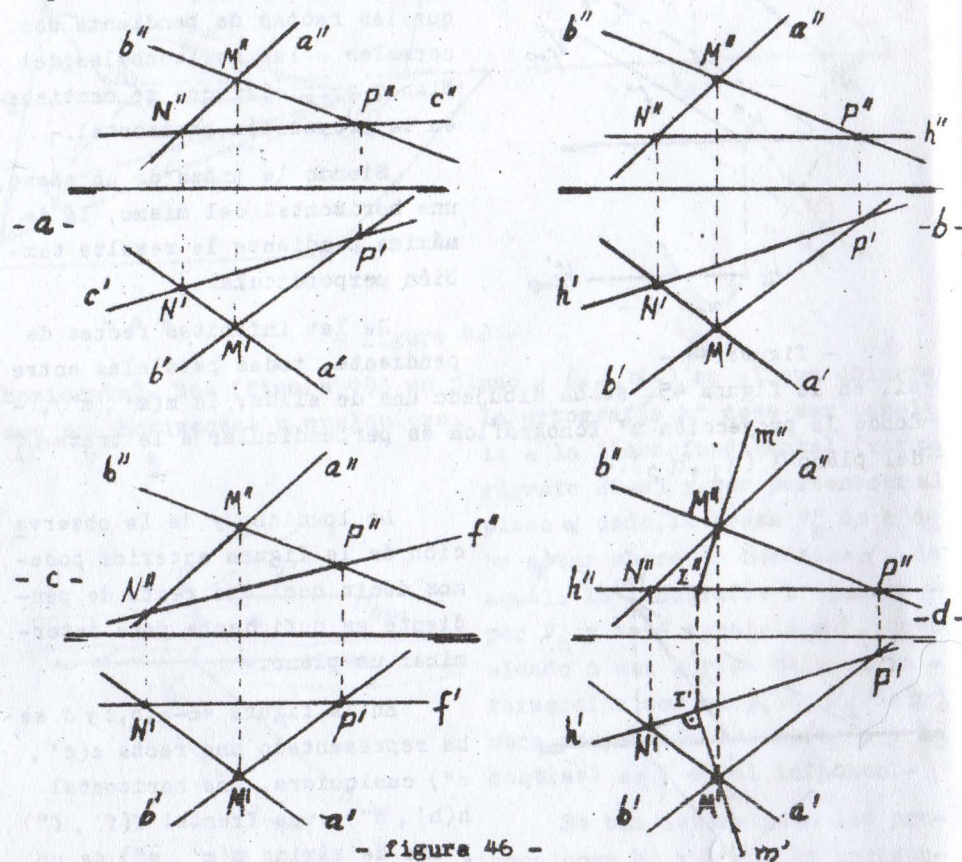
En la figura 46-a, b, c y d se ha representado una recta  $c(c', c'')$  cualquiera, una horizontal  $h(h', h'')$ , una frontal  $f(f', f'')$  y una de máxima  $m(m', m'')$  de un cierto plano  $\alpha$  cuando éste se da en su forma genérica, es decir - por dos rectas  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$  que se cortan en un punto  $M(M', M'')$ .-

En la figura 46-a al dibujar la proyección  $c'$  y estar  $c$  contenida en el plano  $\alpha$  ( $a, b$ ), quedan determinadas las proyecciones  $N'$  y  $P'$ . Por pertenencia de punto y recta resultan  $N''$  y  $P''$ , y consiguientemente la proyección  $c''$ .-



Para la horizontal  $h$  de la figura 46-b se procede en igual forma dibujando en primer lugar la proyección  $h''$ , paralela a la línea fundamental, y al obtener  $N''$  y  $P''$ , también por pertenencia de punto y recta, quedan fijados  $N'$  y  $P'$  que unidos dan la proyección  $h'$ .

Excusamos la explicación para el frontal (figura 46-c), pues se repite lo explicado anteriormente.



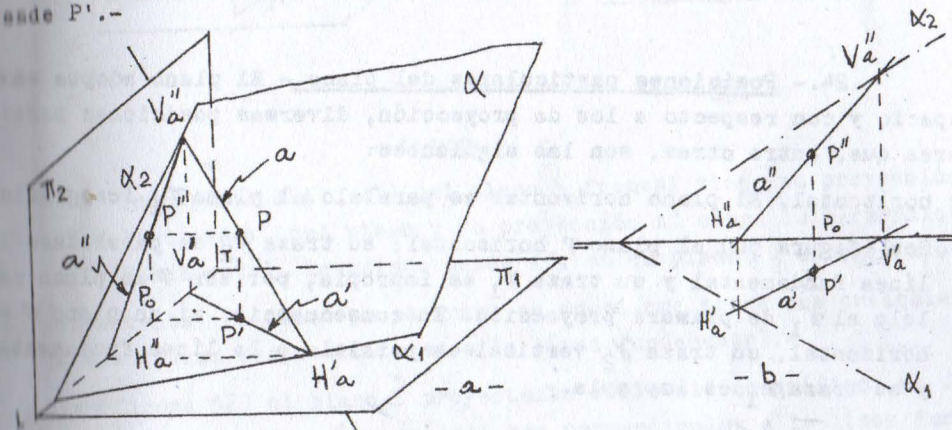
- figura 46 -

En cuanto a la recta de pendiente (figura 46-d), bastará dibujar en primer lugar una horizontal cualquiera, la  $h(h', h'')$ , y luego la proyección  $m'$  normal a  $h'$ . En ortografía  $m''$  pase por  $I''$  y  $M''$ .

23.- Condición de pertenencia de punto y plano.- Sea (figura 47-a) una recta  $a(a', a'')$  perteneciente a un plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ . Considérese sobre la recta  $a$  dada un punto  $P$ ; su proyección  $P'$  horizontal se sitúa sobre la icnografía  $a'$  de la recta  $a$ , mientras que la ortografía  $P''$  lo hace sobre la homónima  $a''$  de  $a$ . Es evidente que, en estas condiciones, el punto  $P$  considerado pertenece al plano  $\alpha$  dado, -

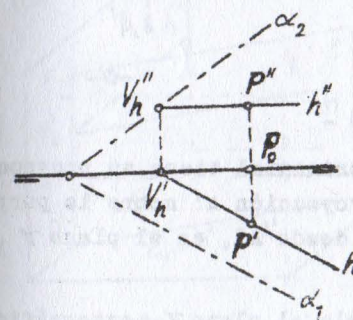
Resolvamos el siguiente problema: dado (figura 47-b) un plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$  y una de las proyecciones de un punto  $P$  que le pertenece, hallar la otra proyección.-

Sea en figura la proyección  $P'$  la conocida; bastará trazar una recta cualquiera del plano  $\alpha'$ , la  $a'$  que pase por  $P'$ . Por condición de pertenencia de recta y plano, los puntos  $H'_a$  y  $V'_a$ , permiten obtener  $H''_a$  y  $V''_a$  respectivamente, que unidos dibujan la proyección  $a''$  ortográfica de  $a$ . Por condición de pertenencia de punto y recta, el  $P''$  estará sobre  $a''$  y la perpendicular a la línea fundamental levantada desde  $P'$ .



- figura 47 -

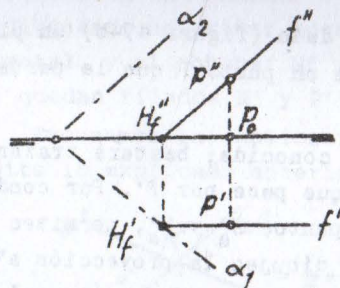
Por ser más cómodo, este problema se resuelve habitualmente utilizando una horizontal  $h$  o una frontal  $f$  del plano  $\alpha'$  dado.-



- figura 48 -

En la figura 48 se ha empleado una horizontal  $h$ : fijada  $P'$ , se traza  $h'$  paralela a  $\alpha_1$ , cuya intersección con la fundamental da  $V'_h$  y, por consiguiente, la traza  $V''_h$  resulta inmediata. Por este último punto se traza la proyección  $h''$ , paralela a la línea fundamental, sobre la cual determinamos el  $P''$  buscado, en la perpendicular a la fundamental levantada desde  $P'$ .





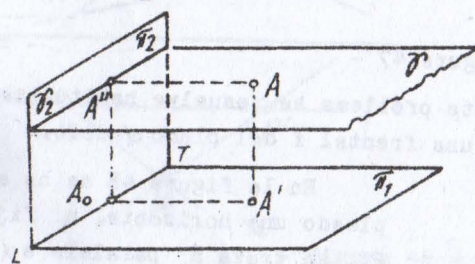
- figura 49 -

En la figura 49 se ha empleado una frontal  $f$ : fijado  $P''$ , se traza  $f''$  paralela a  $\alpha_2$ , cuya intersección con la fundamental da  $H_f''$  y, por consiguiente, la traza  $H_f'$  resulta inmediata. Por este último punto se traza la proyección  $f'$ , paralela a la línea fundamental, sobre la cual determinamos el  $P'$  buscado, en la perpendicular a la fundamental levantada desde  $P''$ .

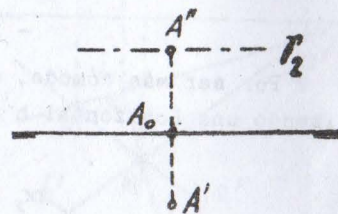
24.- Posiciones particulares del plano.- El plano adopta en el espacio y con respecto a los de proyección, diversas posiciones particulares que, entre otras, son las siguientes:

a) horizontal. El plano horizontal es paralelo al plano  $\pi_1$  icnográfico.

Sea (figura 50) el plano  $\gamma$  horizontal; su traza  $\gamma_2$  es paralela a la línea fundamental y su traza  $\gamma_1$  es impropia, por ser  $\gamma$  un plano paralelo al  $\pi_1$  de primera proyección. En consecuencia: si un plano  $\gamma$  es horizontal, su traza  $\gamma_2$  vertical es paralela a la línea fundamental y su traza  $\gamma_1$  es impropia.-



-a-



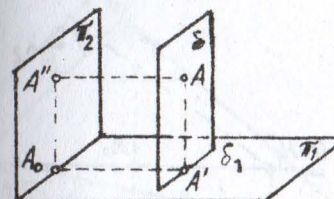
-b-

- figura 50 -

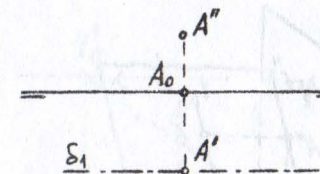
Todo punto  $A(A'', A')$  del plano  $\gamma$  horizontal tiene su proyección  $A''$  sobre la traza  $\gamma_2$  del mismo y su proyección  $A'$  sobre la perpendicular a la línea fundamental, bajada desde  $A''$ , en el plano  $\pi_1$  icnográfico (figura 50).-

b) frontal. El plano frontal es paralelo al plano  $\pi_2$  ortográfico.-

Sea (figura 51) el plano  $\delta$  frontal; su traza  $\delta_1$  es paralela a la línea fundamental y su traza  $\delta_2$  es impropia, por ser  $\delta$  un plano paralelo al  $\pi_2$  de segunda proyección. En consecuencia: si un plano  $\delta$  es frontal, su traza  $\delta_1$  horizontal es paralela a la línea fundamental y su traza  $\delta_2$  es impropia.-



-a-



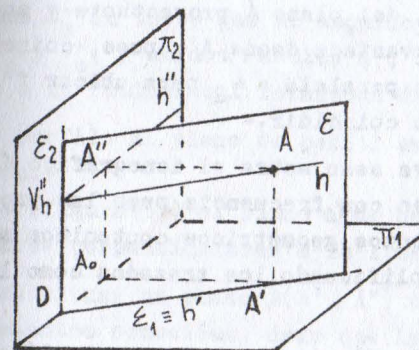
-b-

- figura 51 -

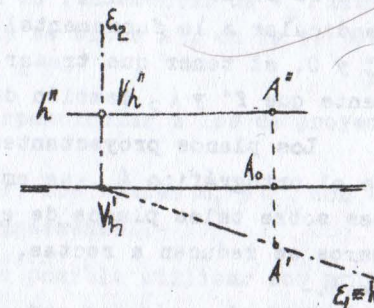
Todo punto  $A(A', A'')$  del plano  $\delta$  frontal tiene su proyección  $A'$  sobre la traza  $\delta_1$  del mismo y su proyección  $A''$  sobre la perpendicular a la fundamental, levantada desde  $A'$ , en el plano  $\pi_2$  ortográfico.-

c) proyectante. El plano proyectante es aquel que tiene una cualquiera de sus trazas perpendiculares a la línea fundamental.-

Sea (figura 52) el plano  $\epsilon$  proyectante sobre el icnográfico, es decir tal que su traza  $\epsilon_2$  vertical sea perpendicular a la línea fundamental; su traza  $\epsilon_1$  horizontal entonces adopta una posición arbitraria con respecto a aquella.-



-a-



-b-

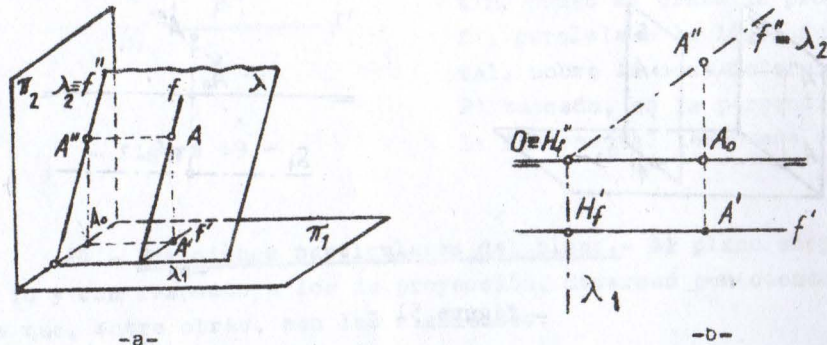
- figura 52 -

En la figura 52 se aprecia que el punto  $A(A', A'')$  pertenece al plano  $\epsilon$  proyectante sobre el icnográfico, habiéndose utilizado el pro-



cedimiento empleado en el parágrafo 23 para la figura 48.-

Sea (figura 53) el plano  $\lambda$  proyectante sobre el ortográfico, es decir tal que su traza  $\lambda_1$  horizontal sea perpendicular a la línea fundamental; su traza  $\lambda_2$  vertical entonces adopta una posición arbitraria con respecto a aquélla.-



- figura 53 -

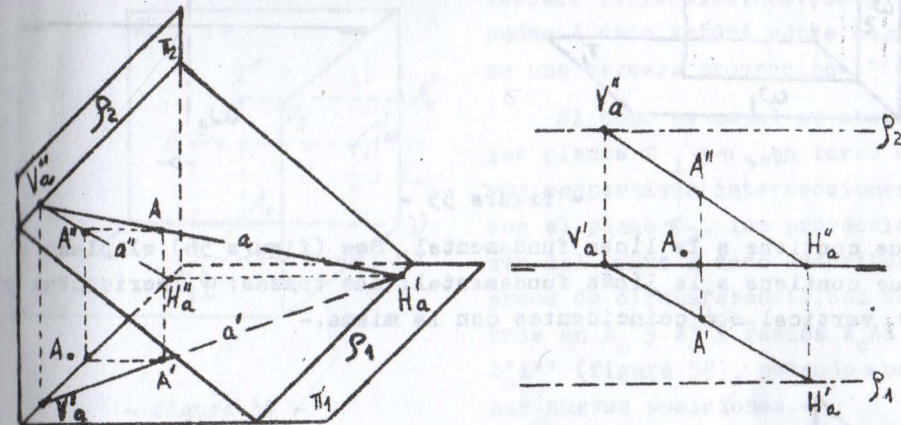
Las proyecciones de un punto  $A(A', A'')$  cualesquiera se ubican así: elegida arbitrariamente la icnografía  $A'$  del mismo, es necesario considerar una recta  $f$  frantal por  $A$ , para situar la proyección  $A''$  ortográfica del punto  $A$ .-

Entonces:  $f'$  pasa por  $A'$  y es paralela a la línea fundamental, determinando en su intersección con la traza  $\lambda_1$  el punto  $H'_f$ , cuya ortografía  $H''_f$  se sitúa sobre la fundamental. Coincidiendo  $H'_f H''_f$  y  $\lambda_2$  por ser perpendiculares a la fundamental, la ortografía  $A''$  del punto  $A$  se sitúa sobre la traza  $\lambda_2$  del plano  $\lambda$  proyectante y en la perpendicular a la fundamental, levantada desde  $A'$ ; pues, coincidiendo  $H'_f$  y  $O$ , al tener que trazar una paralela a  $\lambda_2$  para ubicar  $f''$ , es evidente que  $f''$  y  $\lambda_2$  también deben coincidir.-

Los planos proyectantes, ya sean sobre el icnográfico  $\xi$ , o sobre el ortográfico  $\lambda$ , se emplean con frecuencia pues las proyecciones sobre tales planos de elementos geométricos contenidos en los primeros se reducen a rectas, simplificando los trazados como luego se verá.-

d) paralelo a la línea fundamental. El plano paralelo a la línea fundamental tiene sus trazas -horizontal y vertical- también paralelas a la misma.-

Sea (figura 54) el plano  $\varrho$  paralelo a la línea fundamental; sus trazas:  $\varrho_1$  horizontal y  $\varrho_2$  vertical también son paralelas a la línea fundamental y, en el caso particular de que sus distancias a esta línea sean iguales, el plano  $\varrho$  considerado tiene una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a los de proyección.-



- figura 54 -

Las proyecciones de un punto  $A(A', A'')$  del plano  $\varrho$  paralelo a la línea fundamental, se ubican así: elegida arbitrariamente una cualquiera de sus proyecciones -por ejemplo la icnográfica  $A'$ -, debe trazarse una recta auxiliar que lo contenga, para situar entonces la otra proyección (en nuestro caso la ortográfica  $A''$ ).-

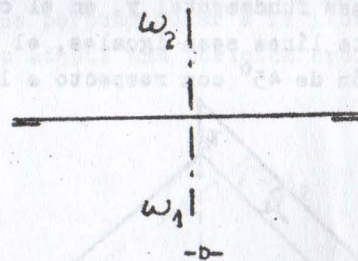
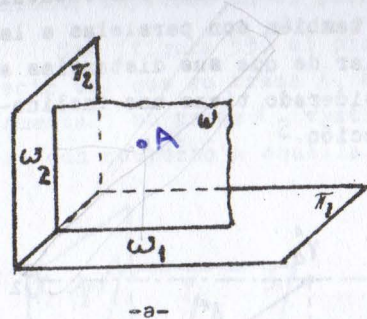
Entonces:  $A'$  pertenece a  $a'$ , que en su intersección con  $\varrho_1$  termina  $H'_a$  en tanto que al hacerlo con la fundamental da  $V'_a$ . Trazados  $H'_a$  y  $V'_a$ , y unidos resulta  $a''$ , donde se sitúa  $A''$ , en la perpendicular a la fundamental levantada desde  $A'$ .-

e) de perfil. El plano de perfil es perpendicular a los de proyección.-

Sea (figura 55) el plano  $\omega$  de perfil; sus trazas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son entonces perpendiculares a la línea fundamental.-

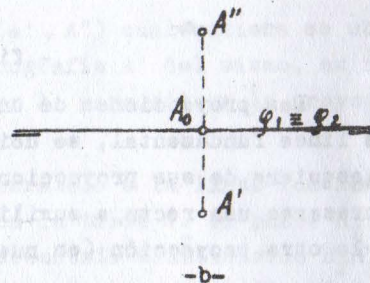
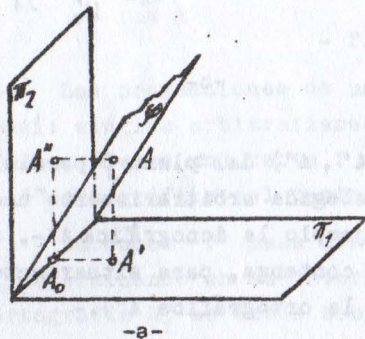
Para situar un punto  $A(A', A'')$  no es posible utilizar los procedimientos conocidos, dado que las rectas del plano de perfil tienen sus proyecciones coincidentes, sino que es necesario emplear, como elemento auxiliar de referencia, el tercer plano de proyección (ver parágrafo 25).-





- figura 55 -

f) que contiene a la línea fundamental. Sea (figura 56) el plano  $\varphi$  que contiene a la línea fundamental; sus trazas:  $\varphi_1$  horizontal y  $\varphi_2$  vertical son coincidentes con la misma.-

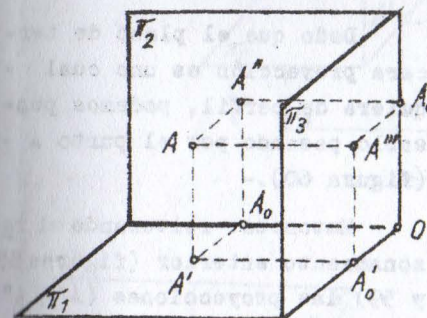


- figura 56 -

Para definir este plano en el espacio es necesario considerar las proyecciones  $A'$ ,  $A''$  de un punto  $A$  del mismo, porque un plano queda determinado cuando se conoce una recta y un punto del mismo que no pertenece a aquélla.-

25.- Plano de tercera proyección.- En algunos casos resultan insuficientes las dos proyecciones hasta ahora conocidas para determinar todos los elementos geométricos de una forma cualquiera, en cuyo caso se recurre a un nuevo plano de proyección -plano de tercera proyección- que se elige normal a la línea fundamental resultando, en consecuencia, un plano de perfil.-

Sea (figura 57) un punto  $A$ , ubicado en el primer cuadrante y referido a los planos  $\pi_1$  icnográfico y  $\pi_2$  ortográfico; tendrá dos proyecciones:  $A'$  sobre  $\pi_1$  y  $A''$  sobre  $\pi_2$ .-

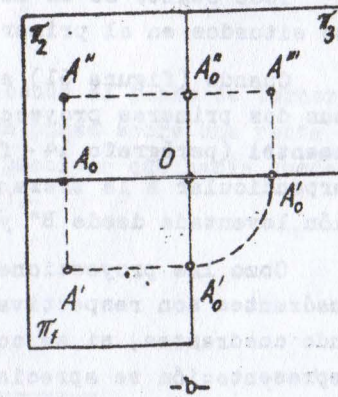
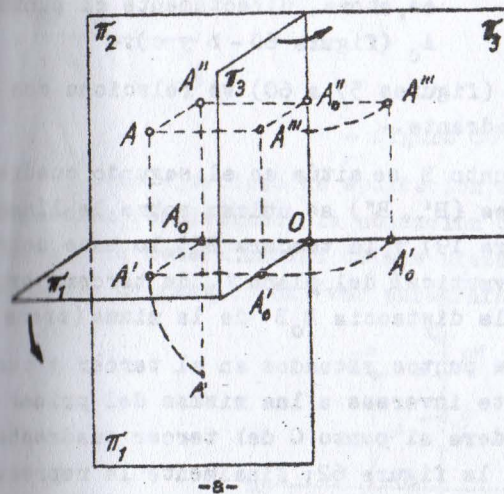


- figura 57 -

Considérese un plano  $\pi_3$  de tercera proyección; entonces el punto  $A$  dado tendrá sobre el mismo una tercera proyección  $A'''$ .-

Si como es usual se abaten los planos  $\pi_1$  y  $\pi_3$  en torno a sus respectivas intersecciones con el plano  $\pi_2$ , las proyecciones del punto  $A$  dado describen arcos de circunferencia, con centros en  $A_0$  y  $A_0''$  y radios  $A_0A'$  y  $A_0''A'''$  (figura 58), pasando a ocupar nuevas posiciones.-

En la figura 58-b se ha representado en vista de frente las tres proyecciones ( $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ ) del punto  $A$  dado y el plano  $\pi_3$  de tercera proyección.-

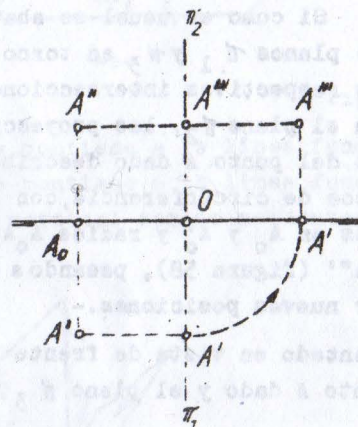


- figura 58 -

En definitiva: la tercera proyección  $A'''$  del punto  $A$  dado se ubica sobre una paralela a la línea fundamental, que pasa por  $A''$ , y a una distancia  $A_0''A'''$  del eje de giro, igual al alejamiento  $A_0A'$ .



del A, y que gráficamente se obtiene proyectando  $A'$  en  $A_0$  y girando con centro en  $O$ , y en el sentido contrario a las agujas del reloj, - con radio  $OA_0$  hasta encontrar a la línea fundamental. La perpendicular a la línea fundamental, en su intersección con la paralela a ella, nos da el punto  $A''$  (figura 59).-



- figura 59 -

Todo cuanto se ha dicho (figuras 57 a 60) se relaciona con puntos situados en el primer cuadrante.-

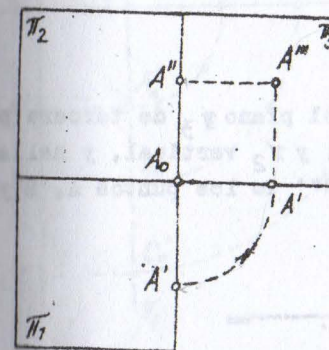
Cuando (figura 61) el punto B se sitúa en el segundo cuadrante, sus dos primeras proyecciones ( $B'$ ,  $B''$ ) se ubican sobre la línea fundamental (párrafo 14 - figura 19) y la tercera  $B'''$ , lo hace sobre la perpendicular a la traza  $\pi_2$  vertical del plano  $\pi_3$  de tercera proyección, levantada desde  $B''$  y a la distancia  $B_0B'$  de la misma (traza).

Como las proyecciones de puntos situados en el tercer y cuarto cuadrantes son respectivamente inversas a las mismas del primer y segundo cuadrantes, si se considera al punto C del tercer cuadrante, su representación se aprecia en la figura 62; finalmente la representación del punto D del cuarto cuadrante se ha realizado en la figura 63.-

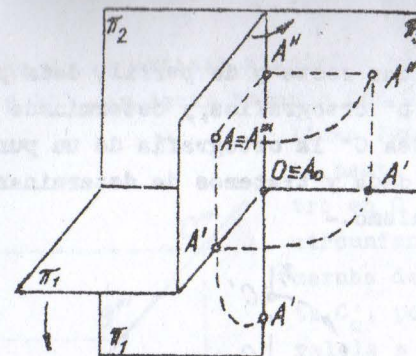
Observando las figuras 57 a 63 inclusive se aprecia que el sentido de giro del plano  $\pi_3$  de tercera proyección siempre es el mismo y contrario al de marcha de agujas del reloj.-

Dado que el plano de tercera proyección es uno cualquiera de perfil, podemos pensarlo pasando por el punto A - (figura 60).-

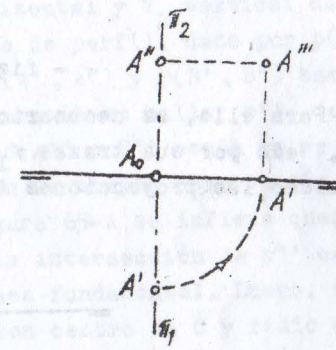
Entonces: reiterando el razonamiento anterior (figuras 58 y 59) las proyecciones ( $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ ) del punto A dado no varían, pero al abatir los planos  $\pi_1$  de primera y  $\pi_3$  tercera proyección en torno a sus respectivas intersecciones con el plano  $\pi_2$  de segunda proyección y hasta coincidir con él, el centro de giros, ahora, directamente el punto  $A_0$  (figura 60-b y c).-



- b -



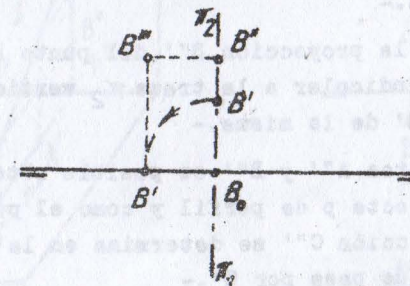
- a -



- c -

- figura 60 -

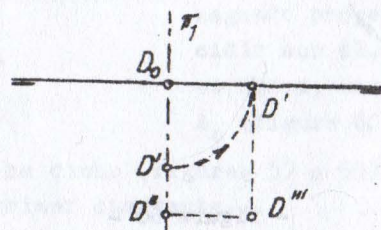
Como ejercicio de aplicación, empleando el plano de tercera proyección, resolveremos la ubicación de un punto sobre una recta de perfil y la determinación de sus trazas, problema que había quedado pendiente de resolución (ver párrafo 24).-



- figura 61 -



Para ello, es necesario utilizar el plano  $\pi_3$  de tercera proyección, dado por sus trazas  $\pi_1$  horizontal y  $\pi_2$  vertical, y hallar, sobre el mismo, las proyecciones  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$  de los puntos A, B y C dados.-

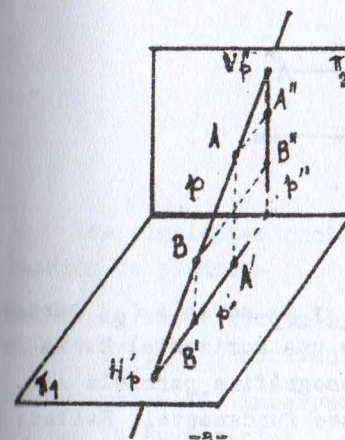


La proyección  $A''$  del punto A se sitúa en la intersección de la perpendicular a la traza  $\pi_2$  vertical levantada por  $A''$  y a la distancia  $OA'$  de la misma.-

Análogamente, la proyección  $B''$  del punto B se sitúa en la intersección de la perpendicular a la traza  $\pi_2$  vertical levantada por  $B''$  y a la distancia  $OB'$  de la misma.-

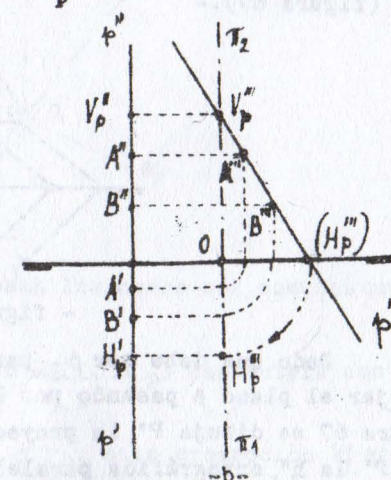
Unidos los puntos A'' y B'' es posible obtener entonces la proyección p'' de la recta p de perfil y como el punto C pertenece a ella, su tercera proyección C'' se determina en la intersección con p'' de la horizontal que pasa por C''.-

103, obtenemos  $H_p''$  y, por consiguiente,  $H_p'$ , traza horizontal de p.-



línea fundamental; desde este punto hasta O como radio, con centro en O se describe un arco de circunferencia, en el sentido de marcha de agujas del reloj, hasta  $O_0$ , por donde dibujamos una paralela a la línea fundamental hasta cortar a  $p'$  en el punto  $C'$  buscado.-

En cuanto a las trazas  $H_p$  horizontal y  $V_p$  vertical de una recta de perfil, dada por  $p(p', p'')$ ,  $A(A', A'')$  y  $B(B', B'')$  bastará (figura 65-b) hallar  $p'''$ , determinando  $A'''$  y  $B'''$  según ya se explicó. De la simple observación de la figura 65-a se infiere que  $(H_p''')$  es la intersección de  $p'''$  con la línea fundamental. Luego, trazando con centro en  $O$  y radio  $O(H_p''')$  un arco de circunferencia en el sentido de marcha de agujas del re-



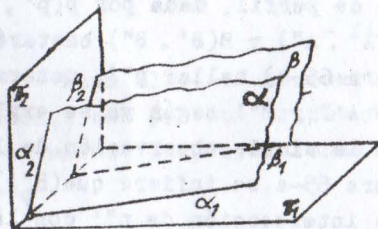
- figura 65 -



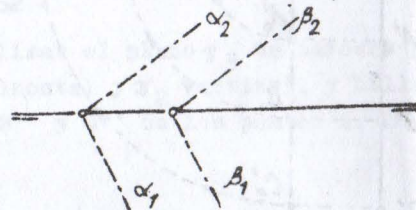
Para hallar la traza  $V''$  vertical de la recta  $p$  de perfil bastará dibujar por  $V''$  -intersección de  $p''$  con  $\pi_2$ - una paralela a la línea fundamental hasta encontrar a  $p''$ .-

26.- Planos paralelos.- Los planos paralelos tienen sus trazas homónimas paralelas.-

En efecto (figura 66-a): si los planos  $\alpha$  y  $\beta$  son paralelos, al ser cortados por un tercer plano -el  $\pi_1$  de primera proyección o el  $\pi_2$  de segunda proyección-, se obtienen rectas paralelas:  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , y  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , respectivamente.-



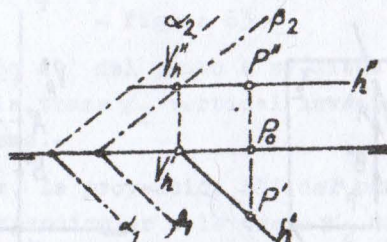
-a-



-b-

- figura 66 -

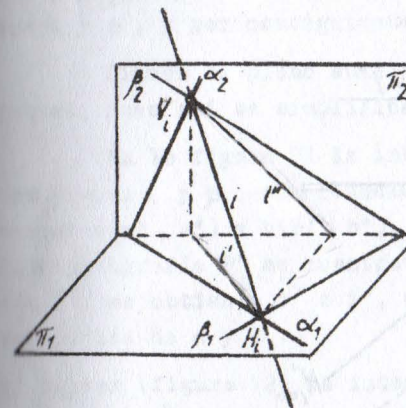
Como ejercicio resolveremos el siguiente problema: por un punto  $P(P', P'')$ , dibujar un plano  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) paralelo a otro  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) dado (figura 67).-



- figura 67 -

Dado que debe ser  $\beta_1$  paralela a  $\alpha_1$  y  $\beta_2$  serlo a  $\alpha_2$ , bastará dibujar el plano  $\beta$  pasando por  $P$ , mediante una horizontal  $h$ . En la figura 67 se dibuja  $P'$  la proyección  $h'$  icnográfica, paralela a  $\alpha_1$ , y por  $P''$  la  $h''$ , ortográfica paralela a la línea fundamental. Hallada la traza  $V''$  vertical de la horizontal  $h$  se completa el problema trazando  $\beta_2$  paralela a  $\alpha_2$  y  $\beta_1$  paralela a  $\alpha_1$ .

27.- Intersección de planos.- Dados (figuras 68 y 69) los planos  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ), hallemos las proyecciones  $i'$  icnográfica e  $i''$  ortográfica de la recta  $i$  de intersección de los mismos.-



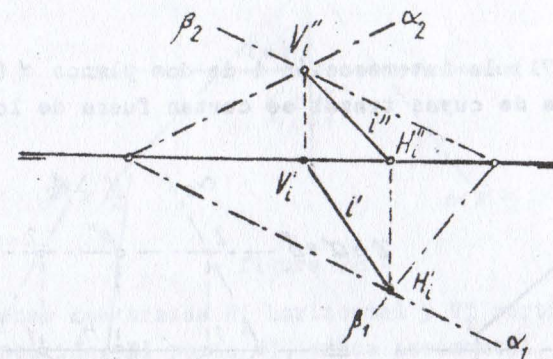
- figura 68 -

Como la recta  $i$  de intersección pertenece a los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados, su traza  $H'_1$  horizontal es intersección de las trazas  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  homónimas de los mismos, mientras que su traza  $V'_1$  vertical lo es de las trazas  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  de ellos.-

Trazando por  $H'_1$  y  $V'_1$  perpendiculares a la línea fundamental respectivamente se determinan sus proyecciones  $H''_1$  y  $V''_1$ .-

Finalmente unidos  $H'_1$  y  $V'_1$  es posible obtener la icnografía  $i'$

de la recta de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados, en tanto que su ortografía  $i''$  se obtiene unidos  $V''_1$  con  $H''_1$ .-



- figura 69 -

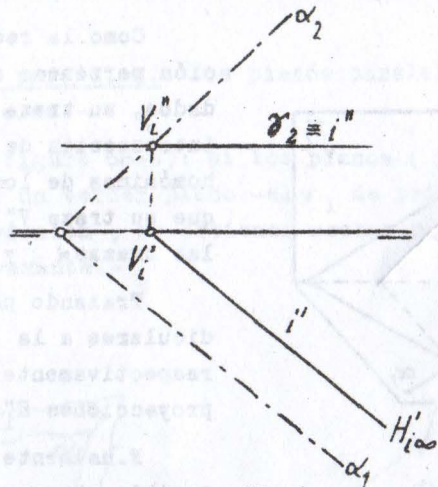
Los siguientes problemas expresan los casos más comunes de intersección de planos.-

a) hallar la intersección  $i$  de un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) cualquiera con otro  $\gamma$  ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) horizontal (figura 70).-

Se determina  $V''_1$ , intersección de  $\alpha_2$  y  $\gamma_2$ , cuya proyección  $V'_1$  se sitúa en la fundamental. La traza  $H'_1$  es un punto impropio porque el plano  $\gamma$  tiene la traza  $\gamma_1$  también impropia.-



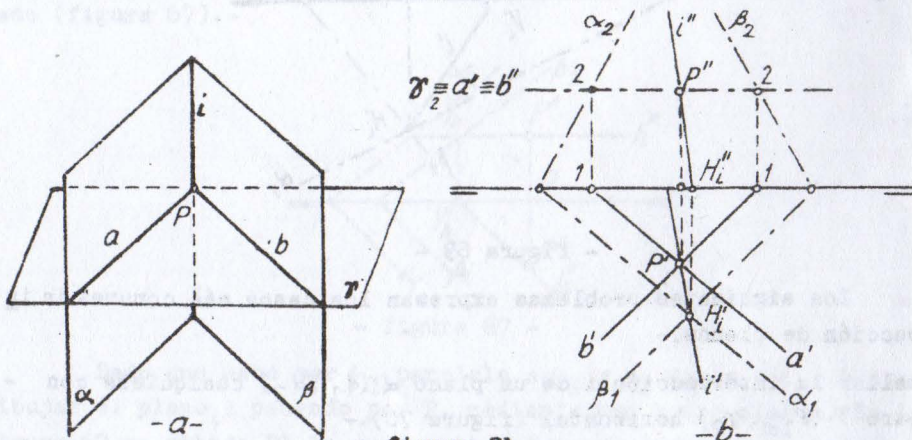
Unidos  $H_1'$  con  $V_1'$  resulta la proyección  $i'$  icnográfica de la recta  $i$  de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , en tanto que la  $i''$  ortográfica resulta de unir  $V_1''$  con  $H_1''$ .-



- figura 70 -

Se observa que  $i'$  es paralela a la traza  $\alpha_1$  horizontal del plano  $\alpha$  y que  $i''$  lo es a la fundamental, es decir es una horizontal del plano  $\alpha$ .-

b) hallar (figura 71) la intersección  $i$  de dos planos  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ), dos de cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.-



- figura 71 -

En el caso de la figura 71, dado que  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , son las que no se cortan dentro del dibujo, resulta que de la recta  $i$  solamente co-

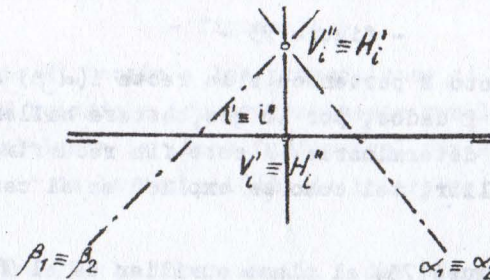
nocemos un punto: el  $H_1'$ ; para trazarla bastará hallar otro punto de la misma.-

A este fin, se recurre a un tercer plano auxiliar, el  $\gamma$  cualquiera (figura 71-a). Las rectas  $a$  y  $b$ , comunes al plano auxiliar  $\gamma$  con  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente dan el punto  $P$  que pertenece a los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , y por consiguiente a la recta  $i$  de intersección.-

Siendo el plano auxiliar cualquiera, conviene elegirlo horizontal, pues así se simplifican las construcciones.-

En la figura 71 la intersección del plano  $\gamma$  horizontal con los planos  $\alpha$  y  $\beta$  queda reducida al caso anterior, obteniéndose las rectas  $a$  ( $a', a''$ ) y  $b$  ( $b', b''$ ). Las proyecciones  $a'$  y  $b'$  determinan  $P'$ , cuya ortografía  $P''$  se encuentra sobre  $a'' \equiv b''$ . Uniendo  $H_1'$  con  $P'$  y  $H_1''$  con  $P''$ , se obtienen  $i'$  e  $i''$ , proyecciones de la recta  $i$  buscada, intersección de  $\alpha$  y  $\beta$ .-

c) hallar (figura 72) la intersección  $i$  de dos planos  $\alpha$  ( $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1 \equiv \beta_2$ ) de trazas coincidentes.-



- figura 72 -

Determinense las trazas  $H_1'$  horizontal y  $V_1''$  vertical de la recta  $i$  de intersección. El punto  $H_1'$ , traza horizontal, es intersección de  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . Análogamente el punto  $V_1''$ , traza vertical, también es intersección de  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ . Trazando por  $H_1'$  y  $V_1''$ , perpendiculares a las líneas fundamental, se determinan sus proyecciones que, respectivamente son los puntos  $H_1''$  y  $V_1'$ .-

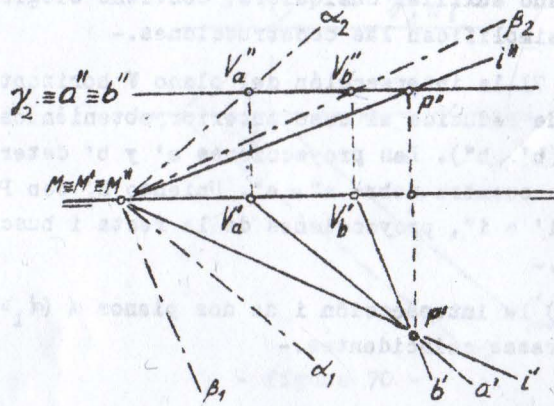
Unidos  $H_1'$  con  $V_1'$  se determina la icnografía  $i'$  de la recta  $i$  de intersección buscada, en tanto que su ortografía  $i''$  resulta de unir  $V_1''$  con  $H_1''$ .-

Como las trazas de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados coinciden, los puntos  $H_1'$  y  $V_1''$  así como también sus proyecciones, resultan también coin-



cidentes, por lo que, en consecuencia: las proyecciones  $i'$  icnográfica e  $i''$  ortográfica de la recta  $i$  de intersección son, finalmente, coincidentes, resultando  $i$  una recta de perfil.-

- d) hallar (figura 73) la intersección  $i$  de dos planos  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) cuyas trazas se cortan en un punto  $M \equiv (M' \equiv M'')$  perteneciente a la línea fundamental.-



- figura 73 -

Desde luego el punto  $M$  pertenece a la recta  $i$  ( $\alpha \beta$ ) de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados, por lo que, bastará hallar otro punto  $P$  de la misma, para determinarla. A este fin recurrimos a emplear un tercer plano auxiliar, tal como se explicó en el caso de la figura 71-a.-

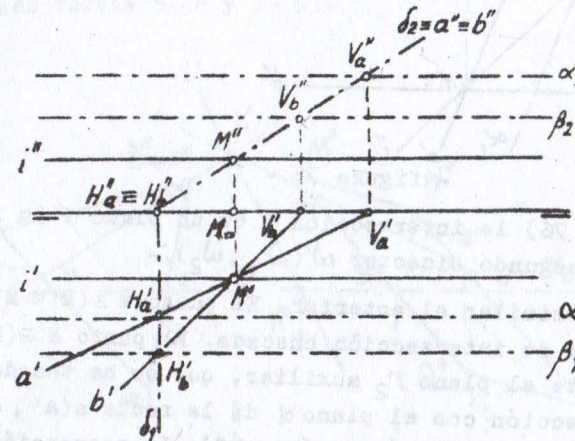
En proyección (figura 73) el plano auxiliar es el  $\pi$  ( $\pi_1, \pi_2$ ) horizontal. Sus intersecciones con  $\alpha$  y  $\beta$  dan respectivamente las rectas  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$ . El punto común a las proyecciones  $a'$  y  $b'$  icnográficas de las rectas  $a$  y  $b$ , da la proyección  $P'$  horizontal del punto  $P$ , y consiguientemente resulta la proyección  $P''$  vertical del mismo. Las rectas  $M'P'$  y  $M''P''$  dan  $i'$  e  $i''$ , proyecciones de la recta  $i$  buscada, común a los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .-

- e) hallar (figura 74) la intersección  $i$  de dos planos  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) paralelos a la línea fundamental.-

En este caso la intersección  $i$  resulta ser una recta paralela a la línea fundamental; en consecuencia, si determinamos un punto de ella, el problema queda solucionado.-

A este efecto utilizamos también un plano auxiliar: el  $\delta$ , que elegimos proyectante sobre el ortográfico, por ejemplo, y buscamos -

sus intersecciones  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$  con los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. Determinadas  $H_a(H'_a, H''_a)$ ,  $H_b(H'_b, H''_b)$  y  $V_a(V'_a, V''_a)$ ,  $V_b(V'_b, V''_b)$ ,  $a'$  resulta de unir  $H'_a$  con  $V'_a$ , y  $b'$  de serlo  $H'_b$  con  $V'_b$ ; en tanto que  $a''$  y  $b''$ , coincidentes entre sí y con  $\delta_2$ , se obtienen de unir  $H''_a$  con  $V''_a$  y  $H''_b$  con  $V''_b$ , respectivamente.-



- figura 74 -

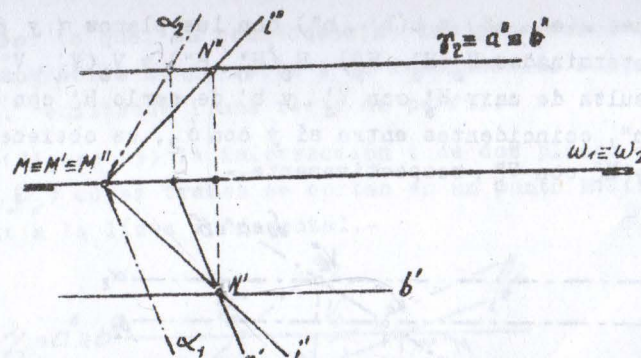
El punto  $M'$ , común a las proyecciones  $a'$  y  $b'$ , es la icnografía del punto  $M$  buscado y consiguientemente resulta  $M''$  sobre  $a'' \equiv b''$ . Las rectas paralelas a la línea fundamental, por  $M'$  y  $M''$ , son las proyecciones  $i'$  e  $i''$  de la recta  $i$  ( $\alpha \beta$ ) de intersección de los planos dados.-

- f) hallar (figura 75) la intersección  $i$  del plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) cualquier con el primer bisector  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2$ ).-

De la recta  $i$  de intersección buscada conocemos desde ya el punto  $M \equiv (M' \equiv M'')$ .-

Para hallar otro punto, el  $N(N', N'')$  de la figura, se procede tal como hemos actuado en los casos anteriores. El plano auxiliar es el  $\pi_2$  horizontal, cuya intersección con el plano  $\alpha$  es  $a', a''$ , que resulta desde luego una horizontal del mismo, mientras que con el primer plano bisector es  $b', b''$ , siendo  $b''$  coincidente con  $\pi_2$  y  $b'$  situada debajo de la línea fundamental a una distancia igual a la que existe entre  $b''$  y esta última. El punto común a las proyecciones  $a'$  y  $b'$  da la proyección  $N'$  de la cual se deduce  $N''$ . Uniendo  $M'N'$  obtenemos  $i'$  y  $M''N''$  da  $i''$ , rectas proyecciones de la  $i$  común a los planos  $\alpha$  y  $\omega$  dados.-

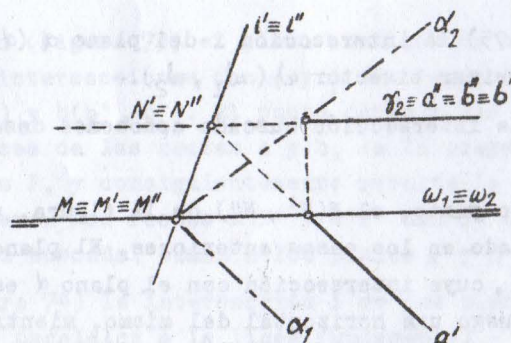




- figura 75 -

g) hallar (figura 76) la intersección  $i$  de un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) cualquiera con el segundo bisector  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2$ ).-

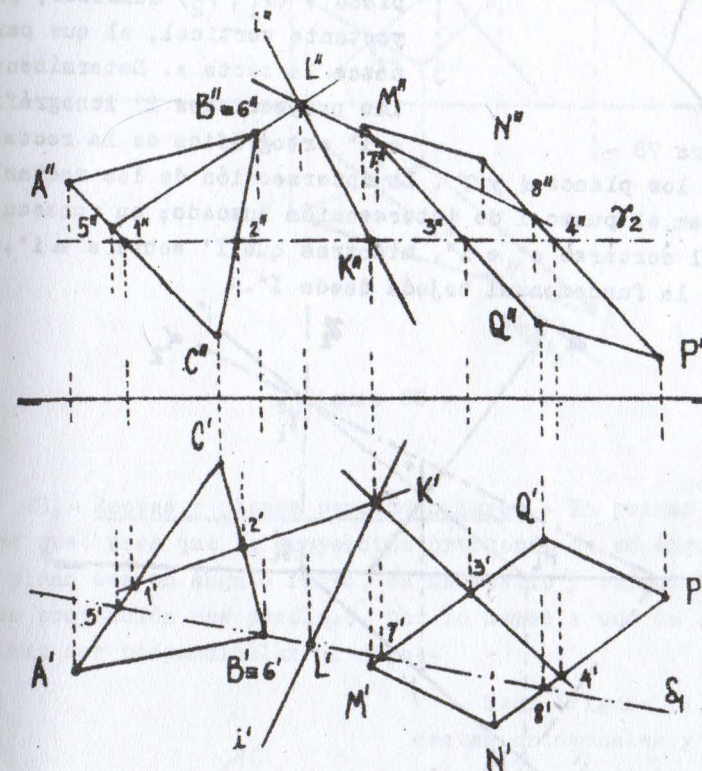
El problema es similar al anterior. El punto  $M \equiv (M' \equiv M'')$  pertenece a la recta  $i$  de intersección buscada. El punto  $N \equiv (N' \equiv N'')$  se obtiene mediante el plano  $\gamma_2$  auxiliar, que se ha tomado horizontal. Su intersección con el plano  $\alpha$  da la recta  $a(a', a'')$  y con el segundo plano bisector  $\omega$  la  $b(b', b'')$ . La proyección  $N'$  icnográfica, común a  $a'$  y  $b'$ , nos permite obtener  $N''$  sobre  $a'' \equiv b''$ , siendo  $M'$  y  $N''$  coincidentes, resultado previsible, pues el punto  $n$  es un punto del segundo plano bisector. La recta  $i(i' \equiv i'')$  da la solución final.-



- figura 76 -

h) hallar (figura 77) la intersección  $i$  de dos planos, dados uno de ellos por tres puntos, el  $\alpha$  ( $ABC$ ), y el otro por dos rectas paralelas, el  $\beta$  ( $MN \parallel PQ$ ).-

Mediante el plano auxiliar  $\gamma_2$  horizontal obtenemos las intersecciones  $1-2$  y  $3-4$  con los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, cuyo punto común  $K(K', K'')$  pertenece a la recta  $i$  de intersección de  $\alpha$  y  $\beta$  que buscamos. El otro punto, el  $L(L', L'')$ , que unido con el  $K(K', K'')$  la determina, se halla merced al plano auxiliar  $\delta_1$  proyectante vertical, que da las rectas  $5-6$  y  $7-8$ .-

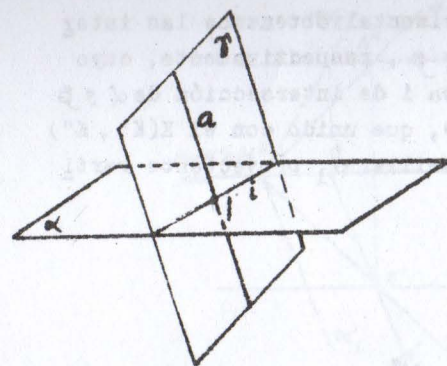


- figura 77 -

28.- Intersección de recta y plano.- Dados (figura 78) el plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y la recta  $a(a', a'')$ , la intersección  $I(I', I'')$  de la recta y el plano considerados, se determina trazando un plano  $\gamma$  auxiliar, cuya recta  $i$  de intersección con  $\alpha$  al cortar la recta  $a$  dada, permite obtener el punto  $I$  buscado.-

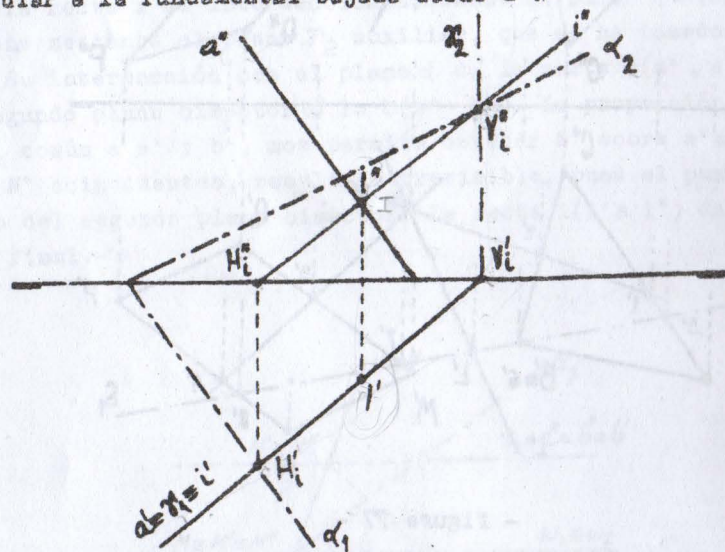
Habitualmente, por ser más cómodo y simplificar las construcciones, se utiliza como plano auxiliar alguno de los proyectantes de la recta.-





- figura 78 -

intersección de los planos  $\alpha$  y  $\gamma$ . La intersección de las rectas  $a$  e  $i$  permite obtener el punto  $I$  de intersección buscado; en consecuencia  $I''$  se obtiene al cortarse  $a''$  e  $i''$ , mientras que  $I'$  sobre  $a' \equiv i'$ , en la perpendicular a la fundamental bajada desde  $I''$ .

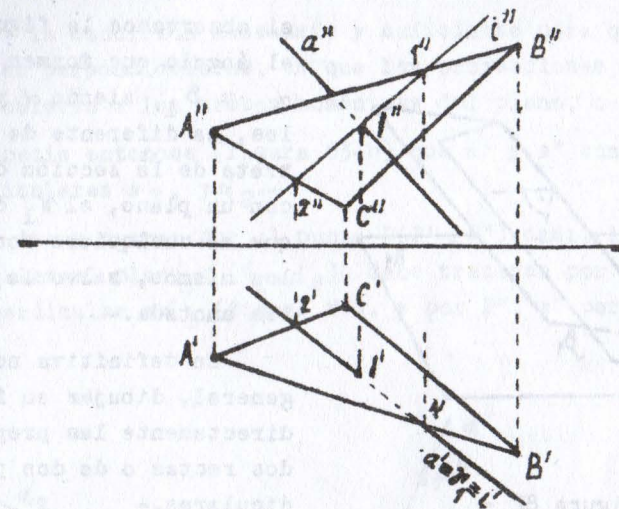


- figura 79 -

Sea (figura 80) hallar la intersección del plano  $\alpha$  dado por tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y la recta  $a(a', a'')$ .

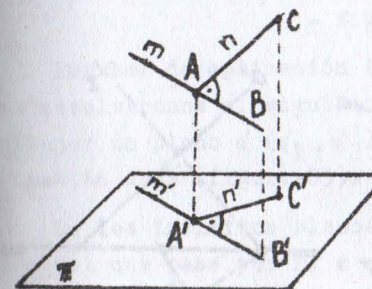
El plano auxiliar elegido que contiene a la recta es el proyectante vertical del que solamente se ha dibujado su traza  $\gamma_1 \equiv a'$ . Su intersección con las rectas  $AB$  y  $AC$  dan las icnografías  $1'$  y  $2'$  que unidos dibujan  $i'$ , siendo  $a' \equiv \gamma_1 \equiv i'$ . Las respectivas ortografías  $1''$  y  $2''$  dan la proyección  $i''$ . El punto común a esta última

se y a la proyección  $a''$  soluciona el problema, pues  $I''$  y su respectiva icnografía  $I'$ , son las proyecciones del punto  $I$  de intersección de la recta y el plano dados.



- figura 80 -

29.- Rectas y planos perpendiculares. - En primer lugar demostraremos que: para que la proyección ortogonal de un ángulo recto sobre un plano sea un ángulo recto, es necesario y suficiente que el plano de proyección sea paralelo, por lo menos, a uno de los lados del ángulo sin ser perpendicular al otro.



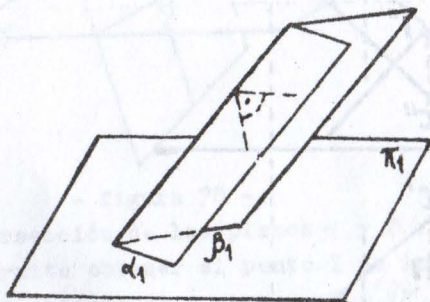
- figura 81 -

Sean (figura 81)  $m$  y  $n$  dos rectas ortogonales y  $m'$ , proyección de  $m$ , paralela a ésta. Bastará probar que  $n'$  es perpendicular a  $m'$ . En efecto: la proyectante  $AA'$  y la  $n$ , perpendiculares a  $m$ , determinan el plano  $ACC'A'$  que es perpendicular a  $m$  y, por consiguiente, a su paralela  $m'$ . Como la  $n'$  pertenece a dicho plano, resulta  $n'$  normal a  $m'$ .

En segundo término observemos que las trazas sobre un mismo plano de proyección de dos pla-



nos perpendiculares, no son perpendiculares, salvo el caso en que uno de los planos dados sea ortogonal al plano de proyección.

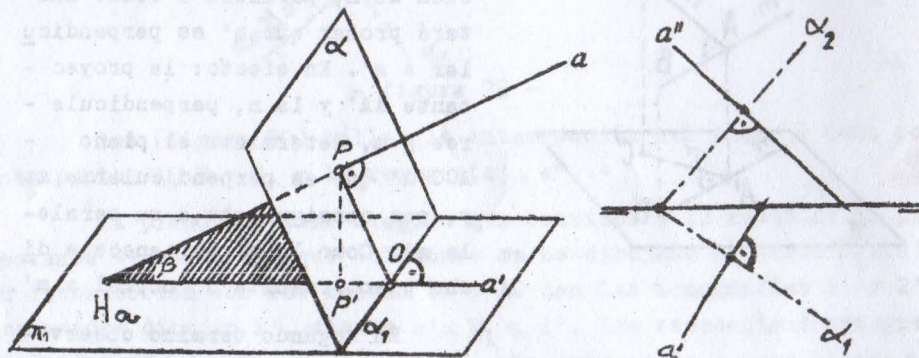


- figura 82 -

Por el contrario resulta sencillo establecer la condición de perpendicularidad entre una recta y un plano, cuando se trabaja con sus proyecciones.-

Sea (figura 83) el plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y la recta  $a$  ( $a', a''$ ), perpendicular al mismo.-

Para determinar la condición de perpendicularidad entre la recta y el plano dados, trácese el plano  $\beta$ , formado por  $a$  y su proyección  $a'$  icnográfica (figura 83-a). Este, resulta entonces perpendicular a los planos  $\pi_1$  de primera proyección y  $\alpha$ , siendo  $a'$  en consecuencia perpendicular a  $\alpha_1$ .-



- figura 83 -

Esto es fácil de comprender si observamos la figura 82, pues el ángulo que forman las trazas  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  ortogonales, es diferente de  $90^\circ$ , pues se trata de la sección de un diedro con un plano, el  $\pi_1$  de proyección, que es cualquiera con referencias los mismos, salvo la excepción antes anotada.-

En definitiva no podemos, en general, dibujar en forma simple o directamente las proyecciones de dos rectas o de dos planos perpendiculares.-

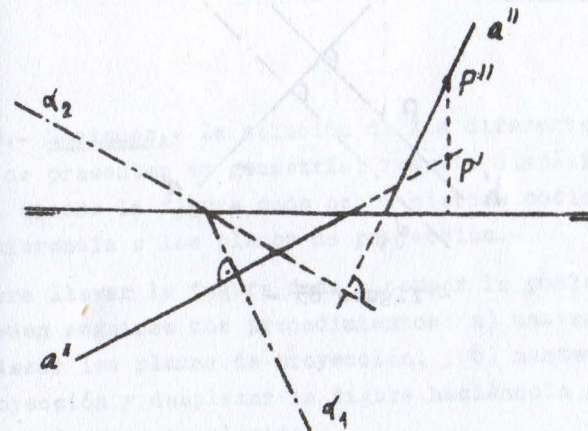
-b-

El razonamiento precedente también es válido para el plano  $\pi_2$  vertical.-

Luego: la condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean perpendiculares, es que las proyecciones de la recta sean perpendiculares a las trazas homónimas del plano, o viceversa.-

Se aprecia entonces (figura 83-b) que  $a'$  y  $a''$  son respectivamente perpendiculares a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .-

Si se desea trazar por el punto  $P(P', P'')$  dado, la recta  $a$  ( $a', a''$ ) perpendicular al plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ), debe trazarse por  $P'$  la proyección  $a'$ , perpendicular a  $\alpha_1$  (figura 84), y por  $P''$ ,  $a''$  perpendicular a  $\alpha_2$ .-



- figura 84 -

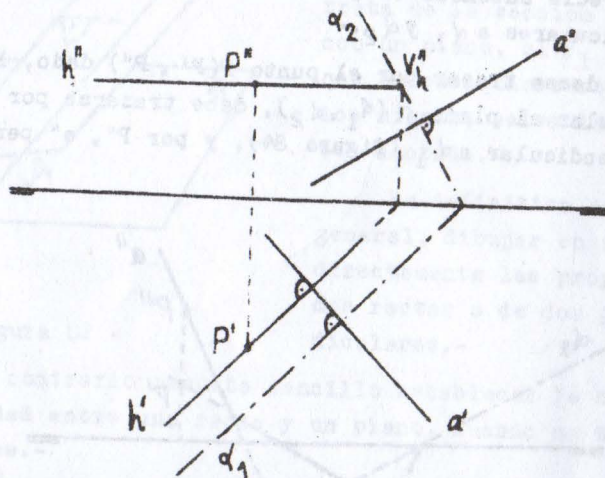
Por ser de aplicación frecuente en la solución de diversos problemas resolveremos el siguiente ejercicio: por un punto  $P(P', P'')$  dado, dibujar un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) que sea perpendicular a una recta  $a$  ( $a', a''$ ), también dada (figura 85).-

De los infinitos planos normales a la recta dada habrá que dibujar aquél que pase por  $P$ , a cuyo efecto bastará buscar una recta de ese plano que pertenezca a dicho punto.-

En la figura, la recta considerada es una horizontal  $h$  ( $h', h''$ ) del plano  $\alpha$ ; por lo tanto  $h'$  pasará por  $P'$  y será perpendicular a  $a'$ , ya que  $\alpha_1$  también lo es. La proyección  $h''$  ortográfica de esa horizontal  $h$  es paralela a la línea fundamental y pasa por  $P''$ . Halladas las



trazas de la horizontal  $h$  bastará dibujar por  $V_h''$  la traza  $\alpha_2$  vertical del plano  $\alpha$ , perpendicular a  $a''$ , y por donde ésta corte a la línea fundamental la traza  $\alpha_1$  horizontal del mismo, perpendicular a  $a'$  o bien paralela a  $h'$ . El plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) soluciona el problema, pues pasa por  $P$ , por contener a la recta  $h$  horizontal, y es perpendicular a  $a$ , por condición conocida de perpendicularidad entre recta y plano.



- figura 85 -

## Desplazamientos

30.- Nociones.- La solución de los diferentes problemas gráficos que se presentan en geometría, resulta simplificada y a veces inmediata, cuando la figura dada ocupa ciertas posiciones particulares con referencia a los planos de proyección.-

Para llevar la figura dada a ocupar la posición más conveniente pueden seguirse dos procedimientos: a) mantener fija la figura y desplazar los planos de proyección, y b) mantener fijos los planos de proyección y desplazar la figura haciéndola girar alrededor de un eje convenientemente elegido.-

De aquí surgen los dos métodos que, merced a trazados diferentes, permiten llevar la figura y planos de proyección a posiciones relativas predeterminadas:

1. el método de los cambios de planos de proyección;
2. el método de las rotaciones o giros y, como caso particular, el de los abatimientos.-

### 1) MÉTODO DE LOS CAMBIOS DE PLANOS DE PROYECCIÓN.-

31.- Concepto.- El problema a resolver es el siguiente: dadas las proyecciones de una figura sobre los planos  $\pi_1$  horizontal y  $\pi_2$  vertical, encontrar la proyección de la misma sobre un tercer plano, perpendicular a alguno de los dos primeros.-



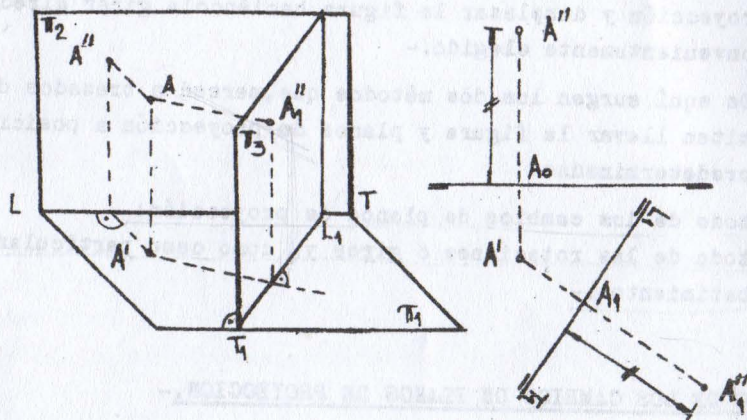
Si el nuevo plano de proyección es perpendicular al  $\pi_1$ , horizontal se habrá efectuado un cambio del plano vertical, o bien una proyección vertical auxiliar. En cambio, si el nuevo plano es perpendicular al  $\pi_2$  vertical, se habrá realizado un cambio del plano horizontal, o bien una proyección horizontal auxiliar. La traza del nuevo plano sobre el que permanece fijo constituye la nueva línea de tierra o fundamental.-

Examinemos algunos de estos problemas.-

32.- Cambio del plano vertical.- Las construcciones relativas al cambio de plano vertical están basadas sobre la siguiente y evidente observación: cuando se cambia el plano vertical, la proyección horizontal de la figura no cambia y las cotas o alturas (ortografías) quedan invariables.-

En la figura 86 el nuevo plano vertical elegido es el  $\pi_3$  y su abatimiento se ha hecho hacia la derecha de la nueva línea  $L_1T_1$  fundamental. Dado que el plano horizontal no se ha movido, las primeras proyecciones quedarán inalterables.-

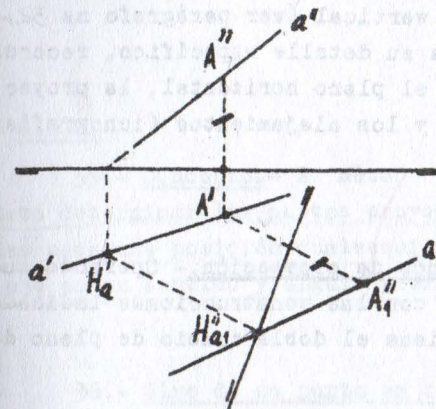
Para el punto  $A(A', A'')$ , la nueva ortografía  $A_1''$  pertenecerá a la perpendicular, trazada por  $A'$ , a la nueva línea fundamental y como la altura de  $A$  sobre  $\pi_1$  no ha cambiado, resultará  $A_1A_1'' = A_0A''$ ; es decir que  $A'$  y  $A_1''$  serán las proyecciones de  $A$  en relación a los nuevos planos de proyección.-



-8-

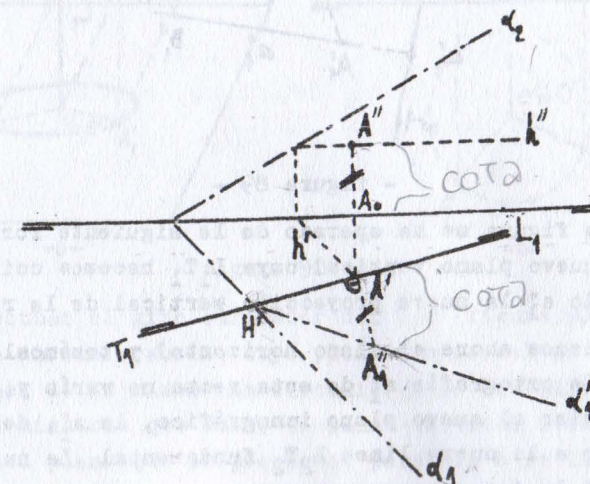
- figura 86 -

Si se tratara de hallar la nueva ortografía de una recta  $a$  ( $a', a''$ ), bastará operar con los puntos. En la figura 87 se ha considerado la traza  $H_2$  horizontal y un punto cualquiera, el  $A(A', A'')$ .-



- figura 87 -

En el caso de tratarse de un plano  $\alpha$  (figura 88), dado por sus trazas  $\alpha_1$  horizontal y  $\alpha_2$  vertical, su traza sobre un nuevo plano vertical se determina así: un punto es, desde ya, el común a  $\alpha_1$  y a la nueva línea  $L_1T_1$  fundamental; este punto es el  $H'$  de la figura. Para hallar un segundo punto, bastará observar que la proyección horizontal de la nueva traza vertical es coincidente con la nueva línea  $L_1T_1$  fundamental. Elegimos entonces el  $A'$  sobre  $L_1T_1$ , como la icnografía de un punto  $A$  del plano  $\alpha$ , cuya ortografía  $A''$  resulta de inmediato merced a la horizontal  $h(h', h'')$ . Midiendo  $A'A_1'' = A_0A''$  obtenemos el  $A_1''$  que, unido con el  $H'$ , dibujan la nueva traza  $\alpha_1''$  buscada.-



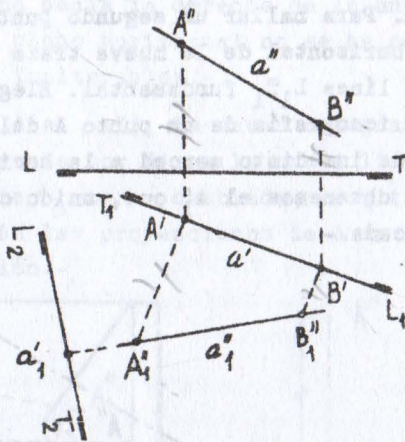
- figura 88 -



33.- Cambio del plano horizontal.- Las construcciones relativas al cambio de plano horizontal son análogas a las que terminamos de realizar en el cambio del plano vertical (ver parágrafo na 32 - figuras 86 a 88), por lo que omitimos su detalle específico, recordando solamente que: cuando se cambia el plano horizontal, la proyección vertical permanece invariable y los alejamientos (icnografías) se mantienen.-

34.- Cambio de los dos planos de proyección.- Operando sucesivamente y en un orden cualquiera con las construcciones indicadas en los dos casos anteriores se obtiene el doble cambio de plano de proyección.-

Como ejercicio resolveremos el siguiente problema: dada (figura 89) una recta  $a(a', a'')$  cualquiera, cambiar los planos de manera que la recta resulte perpendicular al nuevo plano horizontal.-



- figura 89 -

En la figura se ha operado de la siguiente forma: se ha considerado un nuevo plano vertical cuya  $L_1T_1$  hacemos coincidente con  $a'$ , resultando  $a''_1$  la nueva proyección vertical de la recta  $a$ .-

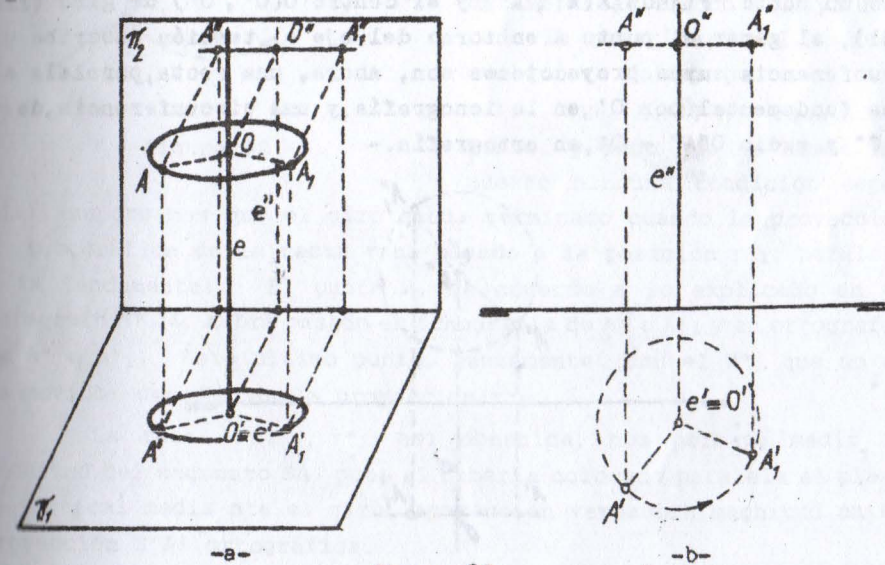
Cambiamos ahora el plano horizontal y tomémoslo perpendicular a la  $a$ . La ortografía  $a''_1$  de esta recta no varía y, siendo la recta perpendicular al nuevo plano icnográfico, la  $a''_1$  debe resultar perpendicular a la nueva línea  $L_2T_2$  fundamental. La nueva icnografía de la recta dada degenera en un punto, que pertenece a la misma  $a''_1$  y coincide con  $L_2T_2$ , por no haber variado el plano vertical elegido y pasar éste por  $a$ .-

La nueva fundamental  $L_2T_2$  resuelve el problema y las proyecciones de la recta  $a$  sobre los nuevos planos de proyección, son  $a'_1$  y  $a''_1$ .-

## II) GIROS.-

35.- Concepto.- El método de los giros o rotaciones tiene por objeto determinar las nuevas proyecciones de un cuerpo cuando, conocidas para una posición cualesquiera, se lo hace girar alrededor de un eje en un sentido y ángulo prefijados.-

36.- Giro de un punto en torno de un eje.- Sea (figura 90) un eje  $e$  vertical, de proyecciones  $e'$  icnográfica y  $e''$  ortográfica, y  $A(A', A'')$  un punto cualesquiera no perteneciente al eje  $e$ ; procedamos a girar el punto en torno del eje.-



- figura 90 -

Al efectuar el giro alrededor del eje (figura 90-a) el punto  $A$  describe una circunferencia, cuyo plano es normal al eje, siendo las proyecciones de la misma una circunferencia de radio  $O'A' = OA$  en icnografía, mientras que sobre el plano vertical resulta ser una recta, traza del plano que la proyecta, paralela a la línea fundamental.-

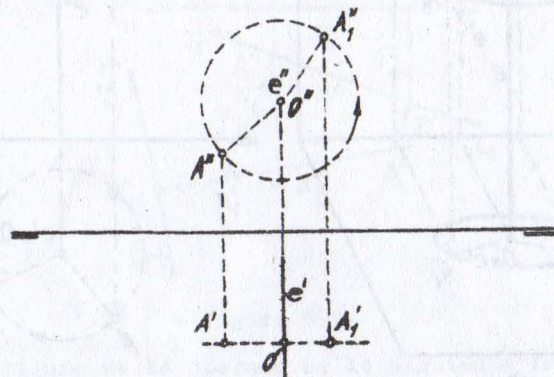


Para una posición cualquiera del punto móvil, el  $A_1$  por ejemplo, tendremos sus proyecciones  $A'_1$  y  $A''_1$  sobre la circunferencia del plano  $\pi_1$  y sobre la horizontal por  $O''$  respectivamente.-

En vista de frente (figura 90-b), la icnografía  $e'$  del eje  $e$  vertical es un punto y su ortografía  $e''$  es una recta perpendicular a la línea fundamental. Fijado  $A(A', A'')$  y el centro  $O(O', O'')$  de giro, la icnografía de la circunferencia descrita al girar el punto  $A$  en torno del eje  $e$  vertical, también es una circunferencia de centro  $O' = e'$  y radio  $O'A'$ , y su ortografía es una recta paralela a la línea fundamental por  $A''$ .-

Las proyecciones de  $A_1$ , después de un cierto giro del punto  $A$ , dado por el ángulo  $\angle A'OA'_1$ , resultan ser  $A'_1$  y  $A''_1$  cuya ubicación resulta de la simple observación de la figura.-

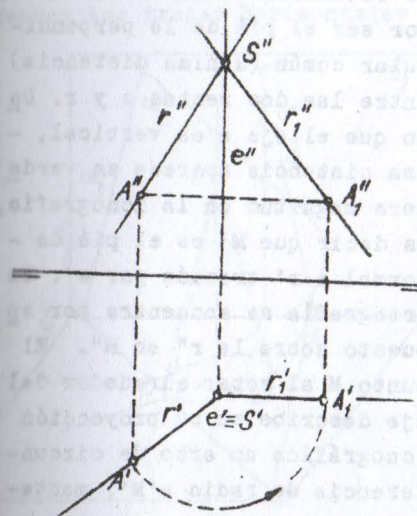
Si el eje  $e$  es horizontal, su icnografía  $e'$  es ahora una recta perpendicular a la línea fundamental, mientras que su ortografía  $e''$  es un punto. Fijado  $A(A', A'')$  y el centro  $O(O', O'')$  de giro (figura 91), al girar el punto  $A$  en torno del eje  $e$ , también describe una circunferencia cuyas proyecciones son, ahora, una recta, paralela a la línea fundamental por  $O'$ , en la icnografía, y una circunferencia, de centro  $O''$  y radio  $O''A'' = OA$ , en ortografía.-



- figura 91 -

37.- Giro de una recta en torno de un eje.- Sea una recta  $r$  cualesquiera y un eje  $e$ . Al girar la recta  $r$  en torno del eje  $e$  puede suceder que corte al eje, o que no lo corte. Si lo corta, lo hará en un punto  $S$  y entonces la recta y el eje son coplanares. Inversamente: si no lo corta no se halla en un mismo plano con el eje, y en-

tonces no es coplanar con él. En este último caso se dice que la recta y el eje son alabeados.



- figura 92 -

Dados (figura 92) la recta  $r(r', r'')$  y el eje  $e(e', e'')$  vertical, analicemos el giro de la recta en torno del eje cuando ambos (recta y eje) son coplanares, siendo  $S(S', S'')$  su punto de intersección.

Por de pronto este último punto, el  $S$ , al realizar el giro de la recta, permanece fijo por pertenecer al eje de rotación. En consecuencia las nuevas proyecciones de la recta  $r$ , después de realizado un giro, quedarán determinadas cuando se haya ubicado la posición final de otro cualquiera de sus puntos.

Sea  $A(A', A'')$  este nuevo punto, y dado que no hemos impuesto ninguna condición espe-

cial, supongamos que el giro queda terminado cuando la proyección  $r'$  icnográfica de la recta  $r$  ha pasado a la posición  $r'_1$ , paralela a la fundamental. El punto  $A$ , de acuerdo a lo explicado en el párrafo n° 36, habrá pasado en icnografía de  $A'$  a  $A'_1$  y en ortografía de  $A''$  a  $A''_1$ . Este último punto, juntamente con el  $S''$ , que no se ha movido, determinan la proyección  $r''_1$ .

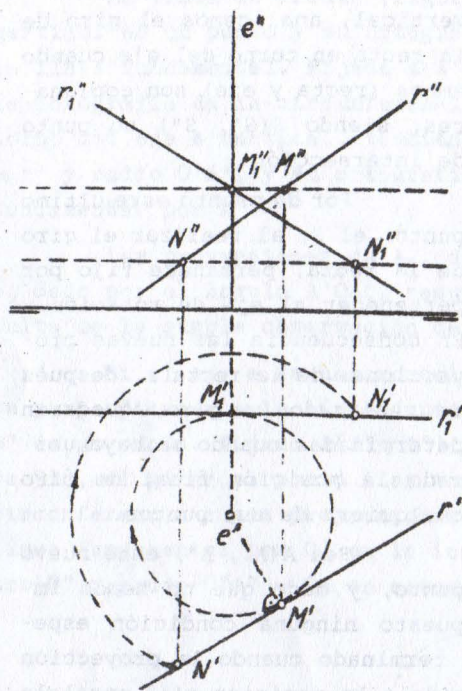
La recta  $r_1(r'_1, r''_1)$  así obtenida, nos permite medir la longitud del segmento  $SA$ , pues al haberla colocado paralela al plano  $\pi_2$  vertical mediante el giro, aparece en verdadera magnitud en su proyección  $S'A'$  ortográfica.

Dados (figura 93) la recta  $r(r', r'')$  y el eje  $e(e', e'')$  vertical, analicemos ahora el giro de la recta en torno del eje, cuando ambos (recta y eje) son alabeados.

A este fin bastará determinar la posición final de dos puntos de la recta cuando ésta haya concluido su giro, el que, a efectos de llegar a un resultado práctico, lo supondremos realizado,



cuando la proyección icnográfica de la misma resulta paralela a la línea fundamental.



- figura 93 -

La proyección  $M_1'$  ortográfica estará sobre la horizontal que pasa por  $M''$  y, en este caso, sobre  $e''$ .

El otro punto que tomamos en consideración es el  $N(N', N'')$ , cuya posición final es  $N_1(N_1', N_1'')$  como resultado de girar en el mismo sentido y con el mismo ángulo que el  $M$  acompañando a la recta  $r$  a la que pertenece.

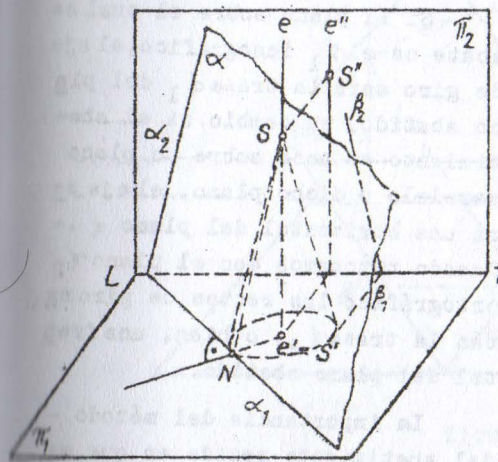
Finalmente la recta  $r_1$  girada tiene como proyecciones las  $r_1'$  y  $r_1''$ , y siendo paralelo al plano  $\pi_2$  vertical, el segmento  $M_1'N_1'$  mide la verdadera distancia entre ambos puntos.

38.- Ciro de un plano en torno de un eje.- Sea (figura 94) un eje  $e$  y un plano  $\alpha (\alpha_1, \alpha_2)$ . Al girar el plano  $\alpha$  en torno del eje  $e$ , la traza  $\alpha_1$  se sitúa en una posición  $\beta_1$  mientras que  $\alpha_2$  lo hace en  $\beta_2$  (figura 94-a), a quienes se trata de determinar.

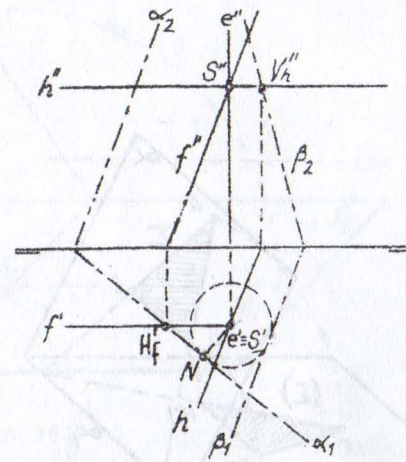
Uno de los puntos cuyo giro estudiaremos es el  $M(M', M'')$ , por ser el pie de la perpendicular común (mínima distancia) entre las dos rectas  $e$  y  $r$ . Dado que el eje  $e$  es vertical, esa distancia aparece en verdadera magnitud en la icnografía, es decir que  $M'$  es el pie de normal a  $r'$  trazada por  $e'$ . Su ortografía se encuentra por supuesto sobre la  $r''$  en  $M''$ . El punto  $M$  al rotar alrededor del eje describe en su proyección icnográfica un arco de circunferencia de radio  $e'M'$ , manteniéndosele la  $r'$  constantemente tangente durante el movimiento.

Supongamos entonces que la  $r'$  pase a la posición  $r_1'$ , tal como pensamos antes, paralela a la línea fundamental y el  $M'$  a  $M_1'$ .

Desde luego (figura 94-a) el punto  $S$ , intersección del plano  $\alpha$  con el eje  $e$ , permanece fijo durante el giro. Por otro lado observamos que el plano, en sus sucesivas posiciones, envuelve un cono recto, de vértice  $S$  y base la circunferencia de radio  $e'H$ , a la cual son tangentes las trazas horizontales ( $\alpha_1, \beta_1, \dots$ ) del plano móvil.



-a-



-b-

- figura 94 -

En virtud de estas consideraciones, dado el plano  $\alpha (\alpha_1, \alpha_2)$ , la nueva traza  $\beta_1$ , para un giro por ahora cualquiera del  $\alpha$ , será tangente a la circunferencia cuyo radio es  $e'N$ , siendo  $N$  el pie de la normal a  $\alpha_1$  dibujada por  $e'$  (figura 94-b). La traza  $\beta_2$  resulta de recordar que el punto  $S(S', S'')$  pertenece también al plano  $\beta$ , por lo cual recurrimos a su horizontal  $h(h', h'')$ , resultando dibujada dicha traza  $\beta_2$ . En cuanto al punto  $S$ , común a  $e$  y  $\alpha$ , es en icnografía  $S' = e'$  (por ser el eje  $e$  vertical) y en ortografía  $S''$ , intersección de  $e''$  con la  $f''$ , segunda proyección de la frontal  $f$  del plano  $\alpha$ .

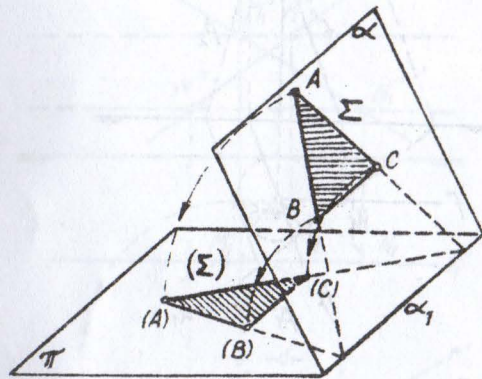
En conclusión: el plano  $\alpha (\alpha_1, \alpha_2)$  ha pasado a la nueva posición  $\beta (\beta_1, \beta_2)$ .

### III) ABATIMIENTOS.-

39.- Concepto.- En términos generales se dice que un plano se abate sobre otro, cuando se lo hace coincidir con este último, mediante un giro en un sentido u otro, alrededor de la recta común a ambos planos, la cual recibe el nombre de eje de giro.



Cuando el plano (figura 95) sobre el que se realiza el abatimiento es alguno de los de proyección, o bien paralelo a alguno de estos últimos, se consigue que la figura contenida en el plano abatido, una vez finalizada la operación, se proyecte en verdadera magnitud sobre dicho plano de proyección.-



- figura 95 -

los de proyección, todos los problemas que comúnmente se plantean en geometría plana, entre otros: medir distancias, ángulos, representar figuras, o bien en forma general: realizar sobre la misma, construcciones que no se mantienen a través de las proyecciones.-

Efectuadas tales construcciones, con una operación inversa al abatimiento, llamada relevamiento del plano, obtenemos las proyecciones del resultado.-

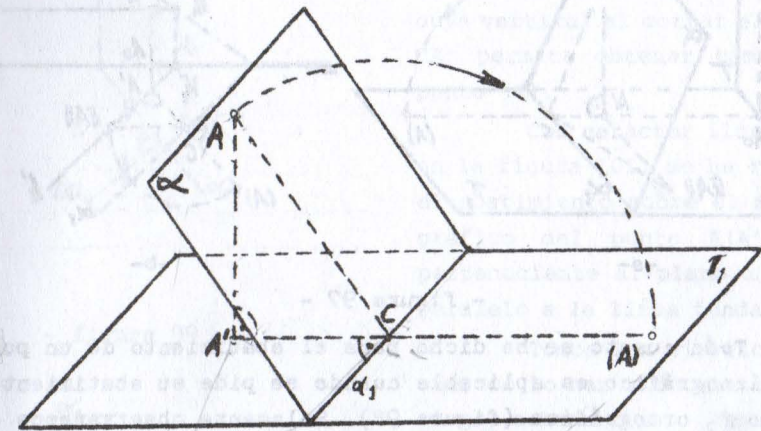
Conviene observar que el abatimiento es un caso particular de giros, donde el eje de giro es una recta paralela a alguno de los planos de proyección y la rotación del plano termina cuando éste se coloca también paralelo al primero. Los puntos de la figura describen arcos de circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje de rotación (figura 96).-

Finalmente dejaremos sentado que es siempre un plano el que se abate. Así cuando se diga abatir un punto, se entenderá abatir el plano determinado por dicho punto y el eje de giro elegido.-

Si el plano sobre el cual se abate es el  $\pi_1$  icnográfico, el eje de giro será la traza  $\alpha_1$  del plano abatido, en cambio si el abatimiento se hace sobre un plano paralelo a dicho plano, el eje será una horizontal del plano  $\alpha$ .- Cuando razonamos con el plano  $\pi_2$  ortográfico las rectas de giro serán la traza  $\alpha_2$ , o bien, una frontal del plano abatido.

La importancia del método - del abatimiento reside en que, mediante su aplicación, es posible resolver para un plano en posición cualquiera con referencia a

También se induce que para hallar el abatimiento de una figura habrá que determinar el abatimiento de cada uno de sus puntos.



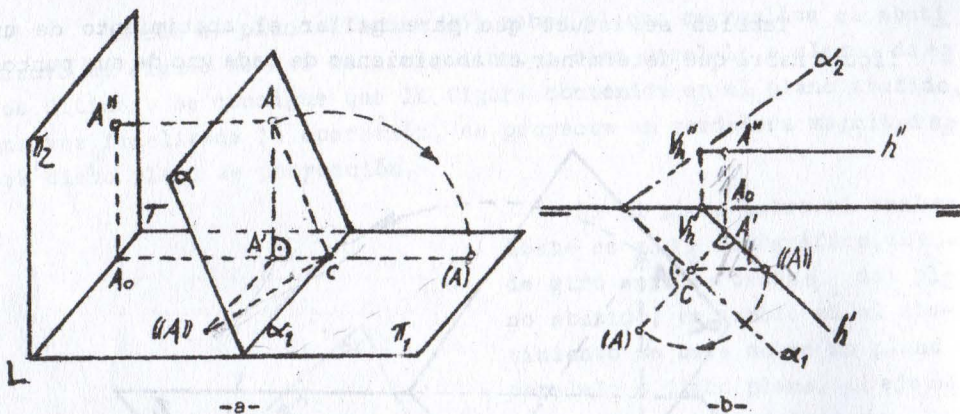
- figura 96 -

40.- Abatimiento de un punto de un plano. - Sea (figura 97) el A un punto de una figura contenida en un plano  $\alpha$ , cuyo abatimiento sobre el plano  $\pi_1$  icnográfico se desea encontrar.

De acuerdo con lo expuesto, al girar el plano, lo hará alrededor de una traza  $\alpha_1$  horizontal y el punto A se dispondrá sobre una perpendicular trazada por A' al eje  $\alpha_1$  de giro, y a una distancia de éste, igual a la hipotenusa CA de un triángulo rectángulo en A', en el que: un cateto es la distancia A'C, desde la icnografía A' de A al eje  $\alpha_1$  de giro, y el otro, la altura AA' del punto A sobre  $\pi_1$ , que viene dada por el segmento A<sub>0</sub>A". Es decir que el radio de giro será CA y el punto abatido caerá en (A).

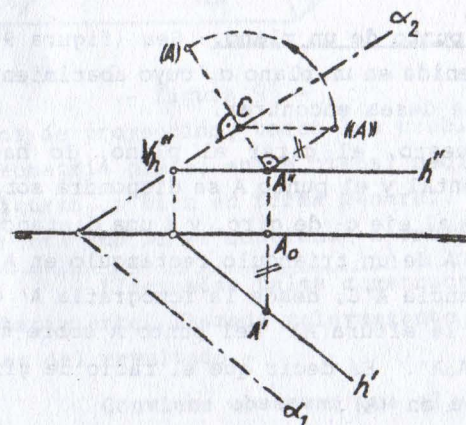
Cuando se dibuja en proyecciones (figura 97-b), siendo datos el plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$  y el punto A(A', A''), como el triángulo AA'C se proyecta según la recta CA, por estar en un plano vertical, para hallar el radio de giro CA, se hace otro abatimiento auxiliar del triángulo sobre el plano  $\pi_1$  icnográfico tal como se indica en la figura. El cateto A'((A)) normal a CA' es igual en magnitud al segmento A<sub>0</sub>A" y puede tomarse indistintamente de un lado u otro de la recta CA'.





- figura 97 -

Todo cuanto se ha dicho para el abatimiento de un punto sobre el icnográfico es aplicable cuando se pide su abatimiento sobre el plano  $\pi_2$  ortográfico (figura 98). Solamente observaremos que el valor del cateto  $A''(A)$  es igual a  $A_0A'$ , alejamiento del punto A.-



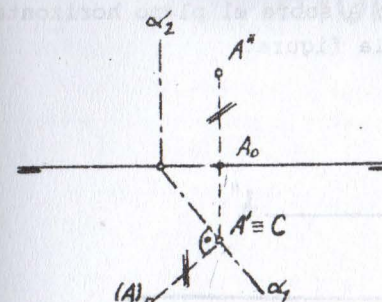
- figura 98 -

siendo también el plano abatido un plano proyectante vertical.-

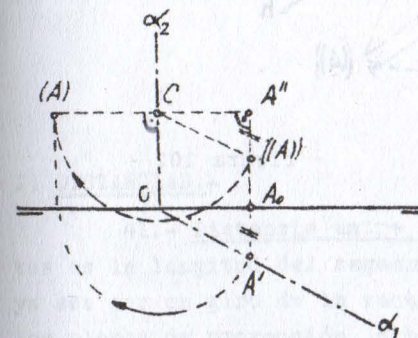
Esta construcción admite una simplificación, pues si observamos que son iguales los triángulos  $CA''(A)$  y  $OA_0A'$ , la hipotenusa  $OA'$  resulta también igual en valor al radio de giro. De aquí que

Cuando el plano que se abate sobre el  $\pi_1$  icnográfico es un proyectante vertical (figura 99), el abatimiento del punto A cae en (A), sobre la perpendicular a  $\alpha_1$ , siendo  $C(A) = A_0A''$ . En efecto: basta observar la figura 97-a para deducir de inmediato que, si el plano  $\alpha$  es perpendicular al  $\pi_1$  icnográfico, el cateto  $CA'$  se anula y la hipotenusa  $CA$  es igual a  $AA'$ , o sea igual a  $A_0A''$ .-

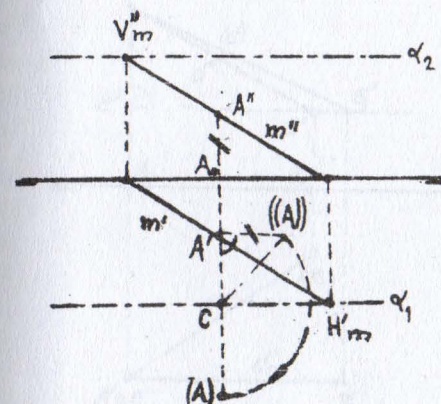
En la figura 100 se ha dibujado el abatimiento del punto A sobre el plano  $\pi_2$  ortográfico,



- figura 99 -



- figura 100 -



- figura 101 -

con la circunferencia de centro O y radio  $OA'$  se determine sobre la línea fundamental un punto cuya vertical al cortar el cateto  $CA''$  permita obtener también el punto (A).

Con carácter ilustrativo en la figura 101, se ha resuelto el abatimiento sobre el  $\pi_1$  icnográfico del punto  $A(A', A'')$ , perteneciente al plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ , paralelo a la línea fundamental.

Todos los ejercicios resueltos lo han sido abatiendo el plano sobre alguno de los de proyección.

Seguidamente abatiremos un punto sobre un plano paralelo al de proyección.

A este efecto, sea (figura 102) el punto  $A(A', A'')$  que abatiremos sobre un plano paralelo al  $\pi_1$  icnográfico.

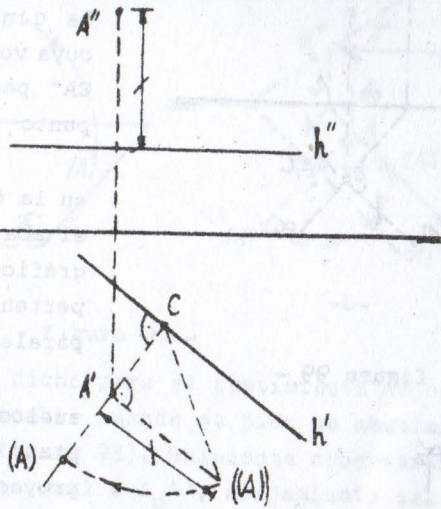
Según apuntamos al principio de este párrafo el eje de giro debía ser una recta horizontal paralela al plano  $\pi_1$  icnográfico, es decir una horizontal tal que, en la figura, la elegimos en  $h(h', h'')$ .

Esta recta y el punto A definen el plano que se abate.

Las construcciones, como puede observarse, son idénticas al caso general, por lo que excusamos su detalle, resultando



(A) el abatimiento pedido. Solamente agregaremos que el cateto  $A'((A))$  es igual a la altura del punto A sobre el plano horizontal que pasa por h, tal como se acota en la figura.

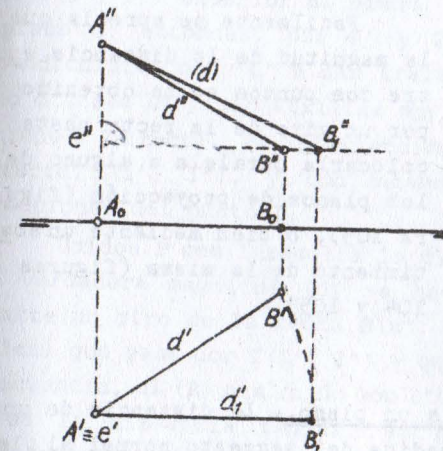


- figura 102 -

# Problemas de Magnitud

## 1) DISTANCIAS.-

41.- Distancia entre dos puntos.- La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une y su magnitud se obtiene ya sea por un giro de la recta hasta colocarla paralela a alguno de los planos de proyección, o bien mediante un abatimiento de la misma.

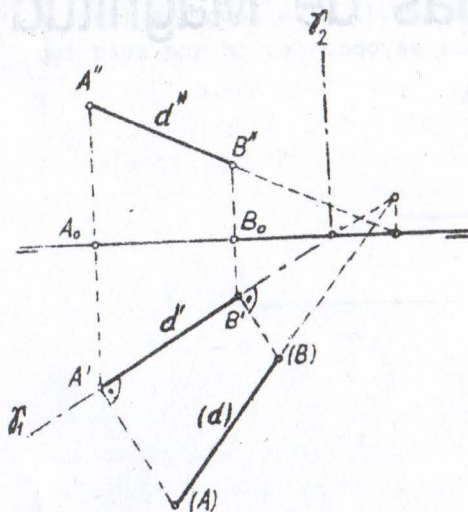


- figura 103 -

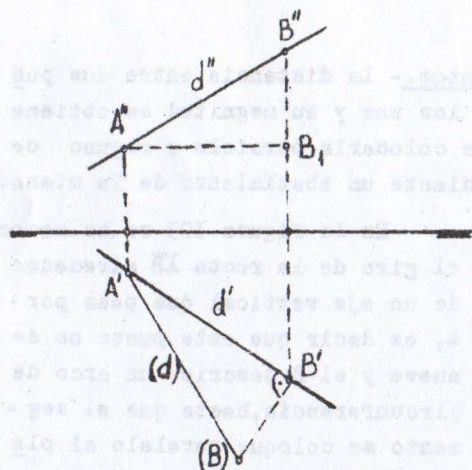
En la figura 103 se ha hecho el giro de la recta  $\overline{AB}$  alrededor de un eje vertical que pasa por A, es decir que este punto no se mueve y el B describe un arco de circunferencia, hasta que el segmento se coloque paralelo al plano  $\pi_2$  ortográfico en  $A'B'_1$ . La verdadera magnitud será  $(d) = A''B''$ .

El abatimiento del plano que proyecta a la recta  $\overline{AB}$  sobre el  $\pi_1$  icnográfico por ejemplo, permite también encontrar la distancia entre los puntos  $A(A', A'')$  y  $B(B', B'')$  dados.-





- figura 104 -



- figura 105 -

Recordando el abatimiento de un plano proyectante (ver párrafo 40 - figura 99), el de la recta  $d$  (figura 104) quedará determinado trazando por  $A'$  y  $B'$  perpendiculares a  $d'$  y tomando sobre éstas, segmentos  $A'(A) = A_0A''$  y  $B'(B) = B_0B''$ .

La distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  dados será  $(d) = (A)(B)$ .

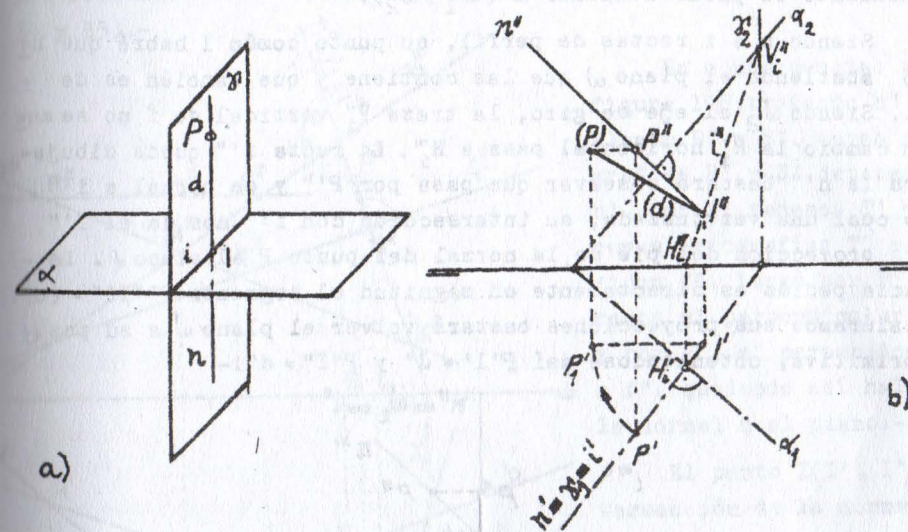
También la distancia entre los puntos  $A(A', A'')$  y  $B(B', B'')$  dados, cuando al realizar el abatimiento uno de los puntos cae fuera de los límites del dibujo. Supongamos que éste sea el punto  $(B)$  (figura 105).

Entonces debe tomarse en  $B'$  la diferencia de alturas de los puntos  $A$  y  $B$ , o sea la distancia  $B'(B) = B_1B''$ , siendo  $A'(B)$  también la distancia buscada entre los puntos  $A(A', A'')$  y  $B(B', B'')$  dados.

Facilmente se aprecia que la magnitud de la distancia entre dos puntos se ha obtenido por un giro de la recta hasta colocarla paralela a alguno de los planos de proyección (figura 103), o bien mediante un abatimiento de la misma (figuras 104 y 105).

42.- Distancia de un punto a un plano. - La distancia de un punto a un plano está dada por la medida del segmento normal al plano, comprendido entre el punto dado y el de intersección de la normal con el plano.

En efecto (figura 106-a): sea un plano  $\alpha$  y un  $P$  exterior al mismo. El problema se resuelve trazando por el punto  $P$  dada una normal al plano (ver párrafo 29), cuya intersección  $I$  se determina mediante un plano auxiliar y proyectante vertical (ver párrafo 28). La distancia  $PI$  que resuelve el problema queda determinada en verdadera magnitud aplicando lo estudiado en el párrafo anterior, es decir que es la distancia real entre dos puntos.



- figura 106 -

En vista de frente (figura 106-b), sea el plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$  y un punto  $P(P', P'')$  exterior al mismo. Trácese por  $P$  la perpendicular  $n$  al plano  $\alpha$ ; entonces, por  $P'$  y  $P''$ , respectivamente deben bajarse perpendiculares  $n'$  y  $n''$  a las trazas  $\alpha_1$  horizontal y  $\alpha_2$  vertical del plano  $\alpha$ . Sea el plano auxiliar  $\gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ , proyectante vertical, el que contiene a la recta. Su intersección con el plano  $\alpha$  nos permite hallar la recta  $i(i', i'')$ , y conjuntamente los puntos  $I''$  y luego  $I'$ , proyecciones del punto  $I$ .

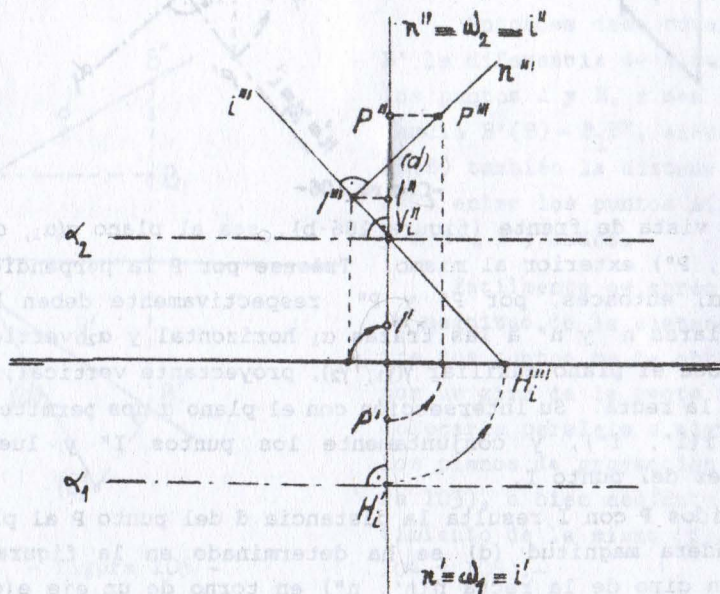
Unidos  $P$  con  $I$  resulta la distancia  $d$  del punto  $P$  al plano  $\alpha$ , cuya verdadera magnitud  $(d)$  se ha determinado en la figura 106-b mediante un giro de la recta  $n(n', n'')$  en torno de un eje  $e(e', e'')$  vertical que pase por  $I(I', I'')$  y que en figura omitimos dibujar. En consecuencia, el  $(P)$  que unido con  $I''$  - punto éste que permanece inmóvil - nos da la distancia pedida, se ha hallado trazando el arco de circunferencia de radio  $I'P'$  hasta encontrar en  $P'_1$  a la paralela a la línea fundamental por  $I'$ , la perpendicular a la línea fundamental por  $P'_1$  encuentra a la horizontal por  $P''$  en el punto  $(P)$ .



Como ejercicio, en la figura 107, se ha encontrado la distancia de un punto  $P(P', P'')$  a un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) paralelo a la línea fundamental.-

Dibujada por  $P'$  y  $P''$  la  $n'$  y  $n''$ , respectivamente perpendiculares a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , se ha hallado su intersección  $i(i', i'')$  con el plano  $\alpha$  mediante el plano auxiliar  $\omega$  ( $\omega_1, \omega_2$ ).-

Siendo  $n$  e  $i$  rectas de perfil, su punto común  $I$  habrá que hallarlo abatiendo el plano  $\omega$  que las contiene y que también es de perfil. Siendo  $\omega_2$  el eje de giro, la traza  $V_1''$  vertical de  $\omega$  no se mueve, en cambio la  $H_1'$  horizontal pasa a  $H_1''$ . La recta  $i''$  queda dibujada. Para la  $n''$  bastará observar que pasa por  $P''$  y es normal a  $i''$ , por lo cual una vez trazada, su intersección con  $i''$  nos da el  $I''$ , tercera proyección del pie de la normal del punto  $P$  al plano  $\alpha$ . La distancia pedida es directamente en magnitud el segmento  $P'I'' = d$ . Si quisiéramos sus proyecciones bastará volver el plano  $\omega$  a su posición primitiva, obteniéndose así  $P'I' = d'$  y  $P''I'' = d''$ .-

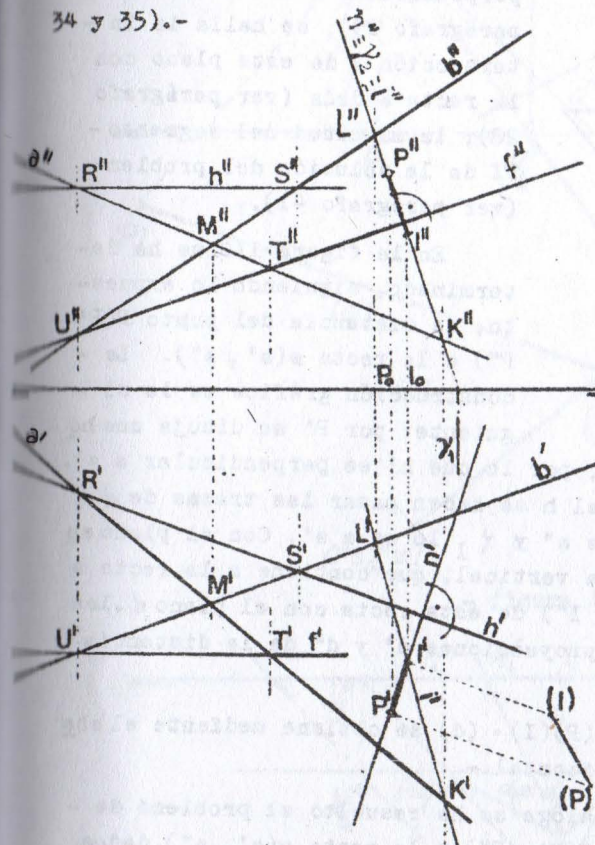


- figura 107 -

En la figura 108, se ha resuelto la distancia de un punto  $P(P', P'')$  a un plano  $\alpha$  dado por dos rectas  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$ , concurrentes en  $M(M', M'')$ .-

Si recordamos que la proyección  $h'$  icnográfica de una horizontal  $h$  de un plano es paralela a su traza  $\alpha_1$  y que la proyección  $f''$  ortográfica de una frontal  $f$  lo es a la traza  $\alpha_2$ , podrá dibujarse por el punto  $P$  dado la normal  $n$  al plano  $\alpha$  trazando  $n'$  perpendicular a  $h'$  y  $n''$  perpendicular a  $f''$ .-

Para hallar una horizontal  $h$  y una frontal  $f$  de este plano nos remitimos a lo explicado en los párrafos 20-a y 20-b (figuras 34 y 35).-



- figura 108 -

unir  $K'$  y  $L'$ , icnografías de los puntos  $K$  y  $L$ , cuyas ortografías  $K''$  y  $L''$  son las comunes a  $\gamma_2$  y  $a''$  y  $b''$ , respectivamente. La intersección de  $i'$  y  $n'$  da la proyección  $I'$  cuya segunda proyección es  $I''$ . Los segmentos  $P'I'$  y  $P''I''$  son las proyecciones  $d'$  y  $d''$  de la distancia buscada.

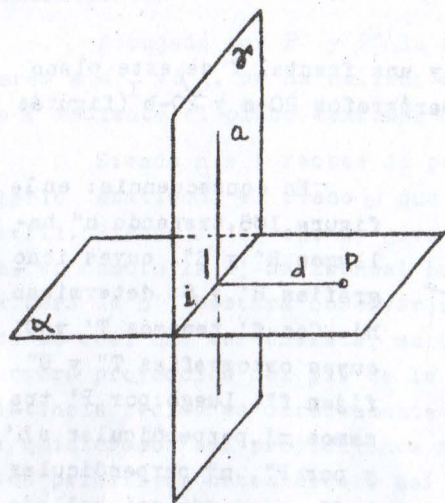
La verdadera magnitud  $(d)$  de este segmento, según se vio en el párrafo 41, es  $(P)(I)$ , siendo  $P'(P)$  e  $I'(I)$  normales a  $n'$  e iguales a  $P_0P''$  y  $I_0I''$  respectivamente.

En consecuencia: en la figura 108, trazando  $h''$  hallamos  $R''$  y  $S''$ , cuyas icnografías  $R'$  y  $S'$  determinan  $h'$ . Con  $f'$  tenemos  $T'$  y  $U'$ , cuyas ortografías  $T''$  y  $U''$  fijan  $f''$ . Luego: por  $P'$  trazamos  $n'$ , perpendicular a  $h'$ , y por  $P''$ ,  $n''$  perpendicular a  $f''$ , quedando así hallada la normal  $n$  al plano.-

El punto  $I(I', I'')$ , en intersección de la normal  $n$  con el plano  $\alpha$  dado, se ha determinado con la ayuda del plano auxiliar  $\gamma$  ( $\gamma_1, \gamma_2$ ), proyectante vertical, que contiene a la normal  $n$ . Por ser proyectante sobre el ortográfico, la intersección  $i$  de este plano con el  $\alpha$  es  $i'$ , coincidente con  $\gamma_2$  e  $i'$ , como resultado de



43.- Distancia de un punto a una recta.- La distancia de un punto a una recta se obtiene midiendo el segmento comprendido entre el punto dado y el pié de la normal a la recta trazada por el punto.



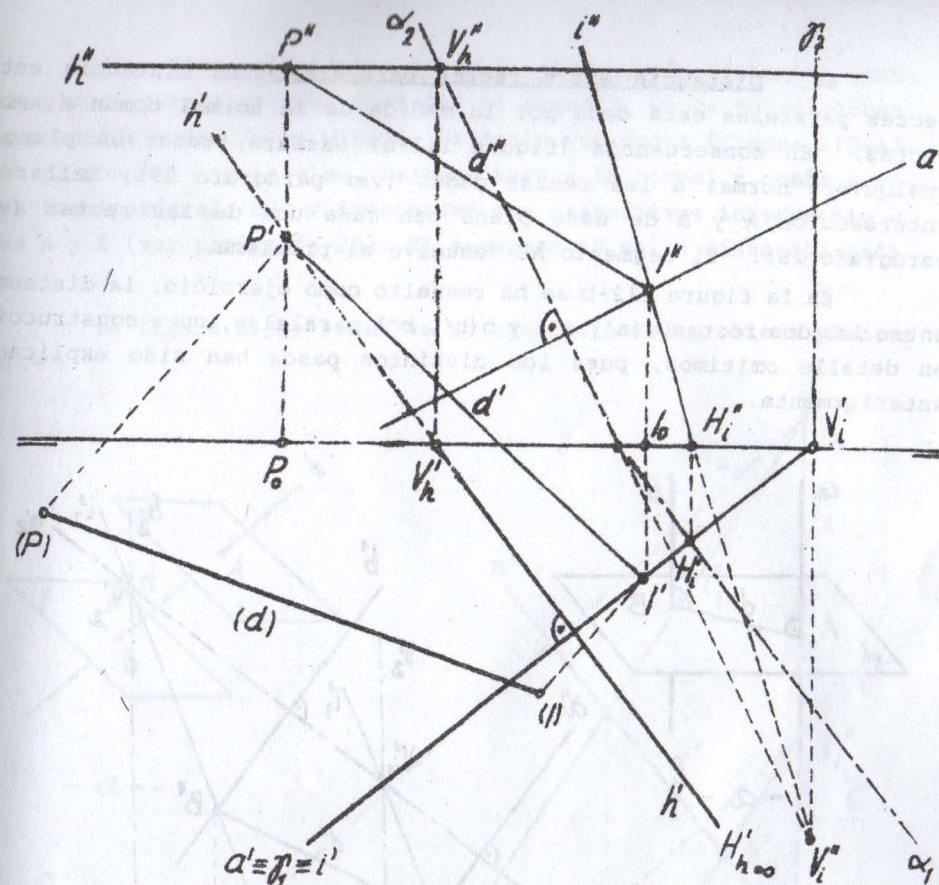
- figura 109 -

En la figura 110 se ha determinado, siguiendo lo expuesto, la distancia del punto  $P(P', P'')$  a la recta  $a(a', a'')$ . La construcción gráfica es la siguiente: por  $P'$  se dibuja una horizontal  $h$  del plano  $d$  buscado, por lo que  $h'$  es perpendicular a  $a'$ . Por las trazas de esa horizontal  $h$  se hacen pasar las trazas de  $d'$ ; entonces  $d_2$  es perpendicular a  $a''$  y  $d_1$  lo es a  $a'$ . Con el plano auxiliar  $T(T_1, T_2)$ , proyectante vertical, que contiene a la recta  $a$  se halla la intersección  $I(I', I'')$  de esta recta con el plano  $d$ . Los segmentos  $P'I'$  y  $P''I''$  son las proyecciones  $d'$  y  $d''$  de la distancia buscada, respectivamente.-

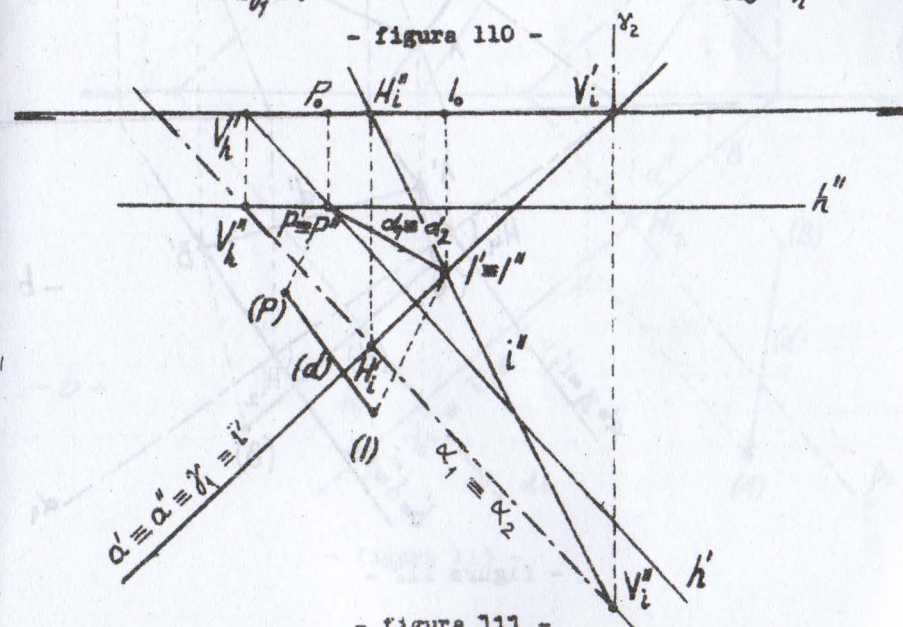
Su verdadera magnitud  $(P)(I) = (d)$  se obtiene mediante el abatimiento sobre el plano  $\pi_1$  horizontal.-

En forma totalmente análoga se ha resuelto el problema de la figura 111, donde el punto  $P(P', P'')$  y la recta  $a(a', a'')$  dados tienen proyecciones coincidentes; es decir donde  $P' \equiv P''$  y  $a' \equiv a''$ .-

Para este caso se observa que las proyecciones de la distancia también son coincidentes y que su verdadera magnitud  $(P)(I) = (d)$  también se obtiene mediante el abatimiento de aquéllas sobre el plano  $\pi_1$  horizontal.-



- figura 110 -

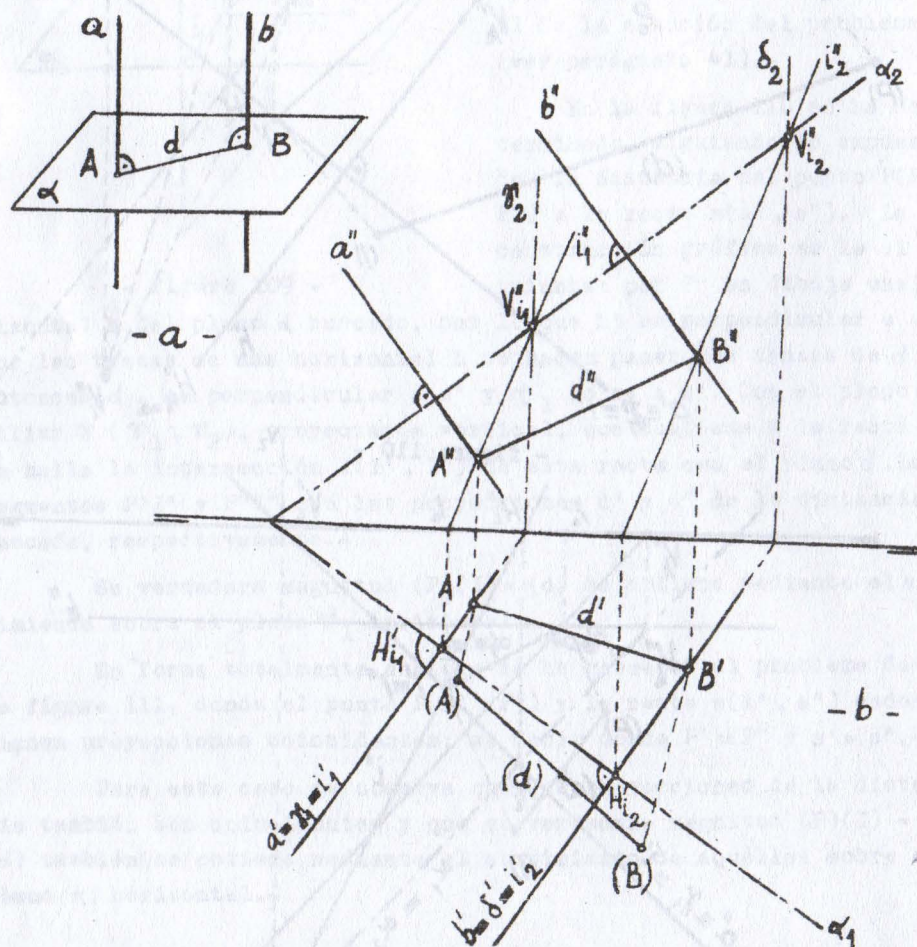


- figura 111 -



44.- Distancia entre rectas paralelas.- La distancia entre rectas paralelas está dada por la medida de la normal común a ambas rectas. En consecuencia (figura 112-a) bastará trazar un plano  $\alpha$  cualquiera normal a las rectas dadas (ver parágrafo 29); hallar la intersección A y B de este plano con cada una de las rectas (ver parágrafo 28). El segmento AB resuelve el problema.

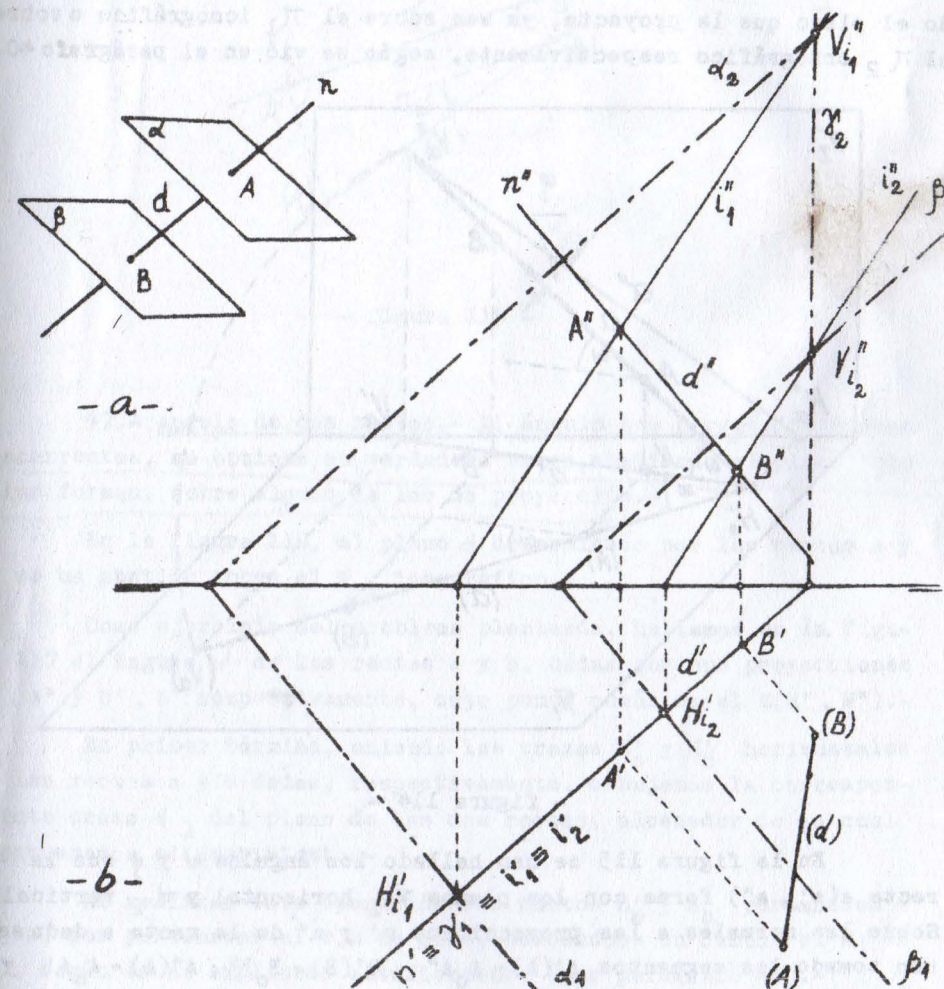
En la figura 112-b se ha resuelto como ejercicio, la distancia entre las dos rectas  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$  paralelas, cuya construcción en detalle omitimos, pues los distintos pasos han sido explicados anteriormente.



- figura 112 -

45.- Distancia entre planos paralelos.- La distancia entre dos planos paralelos está dada por el segmento de la normal común comprendida entre ambos planos. Es decir que dados (figura 113-a) los planos  $\alpha$  y  $\beta$  paralelos, bastará trazar la normal  $n$  común a ambos (ver parágrafo 29) y determinar sus respectivas intersecciones A y B (ver parágrafo 28). El segmento AB es la distancia pedida.-

La figura 113-b resuelve un ejercicio del problema planteado.-



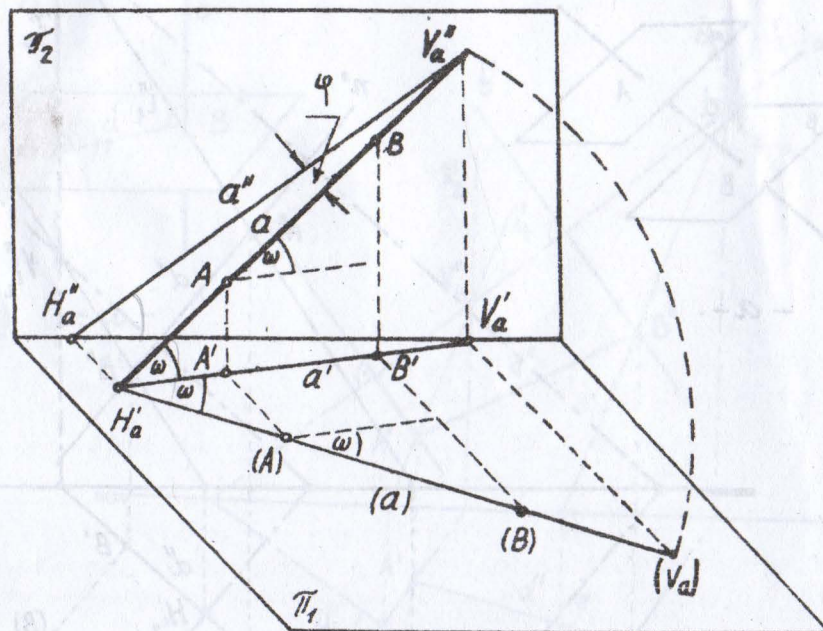
- figura 113 -



II) ANGULOS.-

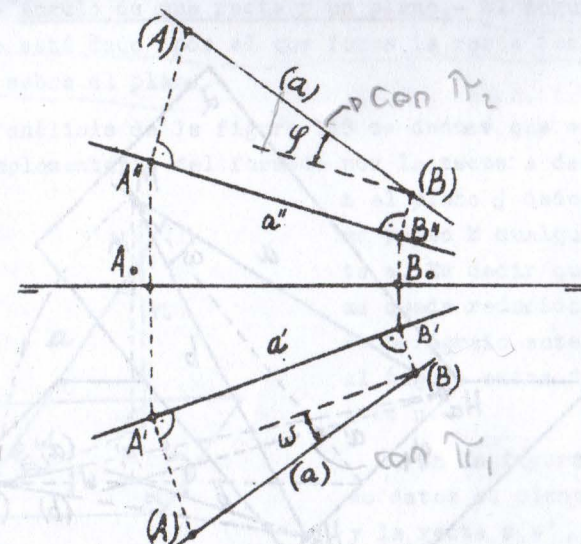
46.- Angulo de una recta con los planos de proyección.- El ángulo que forma una recta con cada uno de los planos de proyección está determinado por el que forma dicha recta con cada una de sus proyecciones, tal como puede verse claramente en la figura 114, donde  $\omega$  es el ángulo formado con el plano  $\pi_1$  horizontal y  $\varphi$  con el  $\pi_2$  vertical.-

Para hallar estos ángulos bastará abatir la recta, abatiendo el plano que la proyecta, ya sea sobre el  $\pi_1$  icnográfico o sobre el  $\pi_2$  ortográfico respectivamente, según se vió en el parágrafo 40.-



- figura 114 -

En la figura 115 se han hallado los ángulos  $\omega$  y  $\varphi$  que la recta  $a(a', a'')$  forma con los planos  $\pi_1$  horizontal y  $\pi_2$  vertical. Sobre las normales a las proyecciones  $a'$  y  $a''$  de la recta  $a$  dadase han tomado los segmentos  $A'(A) = A_0A''$ ;  $B'(B) = B_0B''$ ;  $A''(A) = A_0A'$  y  $B''(B) = B_0B'$ .-



- figura 115 -

47.- Angulo de dos rectas.- El ángulo que forman dos rectas concurrentes, se obtiene, en verdadero valor, abatiendo el plano que ellas forman, sobre alguno de los de proyección.-

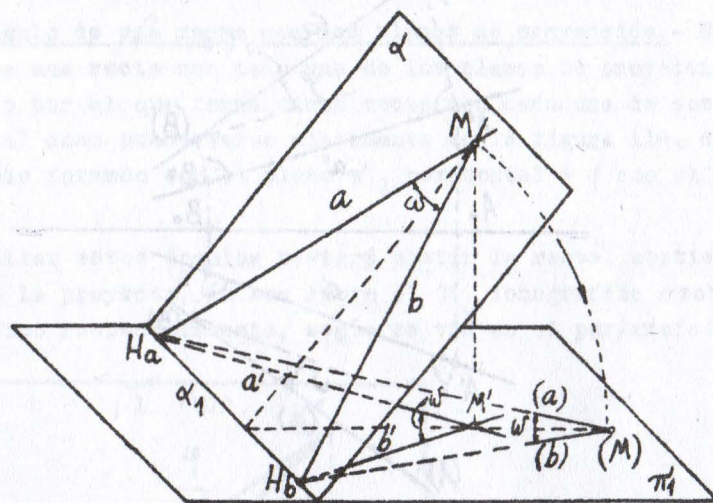
En la figura 116, el plano  $q$  determinado por las rectas  $a$  y  $b$ , se ha abatido sobre el  $\pi_1$  icnográfico.-

Como ejercicio del problema planteado, hallamos en la figura 117 el ángulo  $\omega$  de las rectas  $a$  y  $b$ , dadas por sus proyecciones  $a', a''$  y  $b', b''$  respectivamente, cuyo punto común es el  $M(M', M'')$ .-

En primer término, uniendo las trazas  $H_a'$  y  $H_b'$  horizontales de las rectas  $a$  y  $b$  dadas, respectivamente, dibujamos la correspondiente traza  $q_1$  del plano de las dos rectas, alrededor de la cual efectuaremos el abatimiento.-

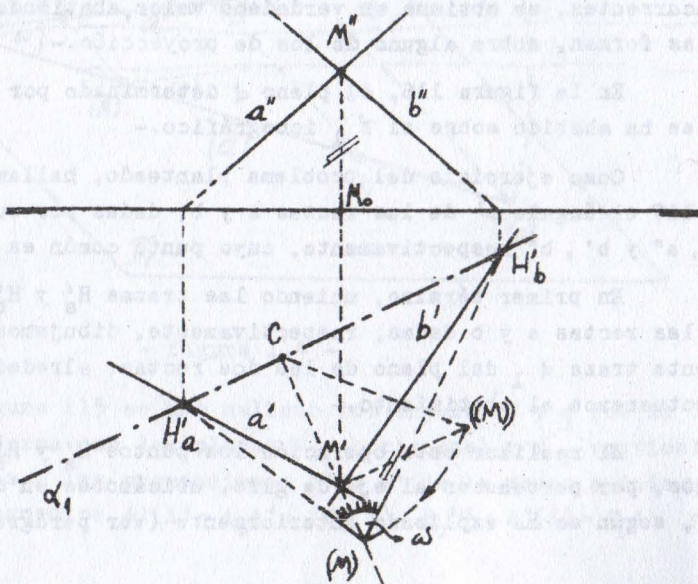
Al realizar esta operación los puntos  $H_a'$  y  $H_b'$  permanecen - fijos, por pertenecer al eje de giro, ubicándose en cambio el  $M$  en  $(M)$ , según se ha explicado anteriormente (ver parágrafo 40).-





- figura 116 -

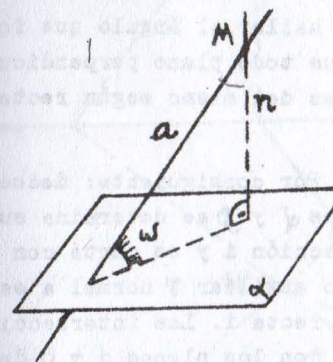
Finalmente, uniendo (M) con  $H'_a$  y  $H'_b$ , respectivamente obtenemos (a) y (b) que determinan el ángulo  $\omega$  buscado en verdadero valor.



- figura 117 -

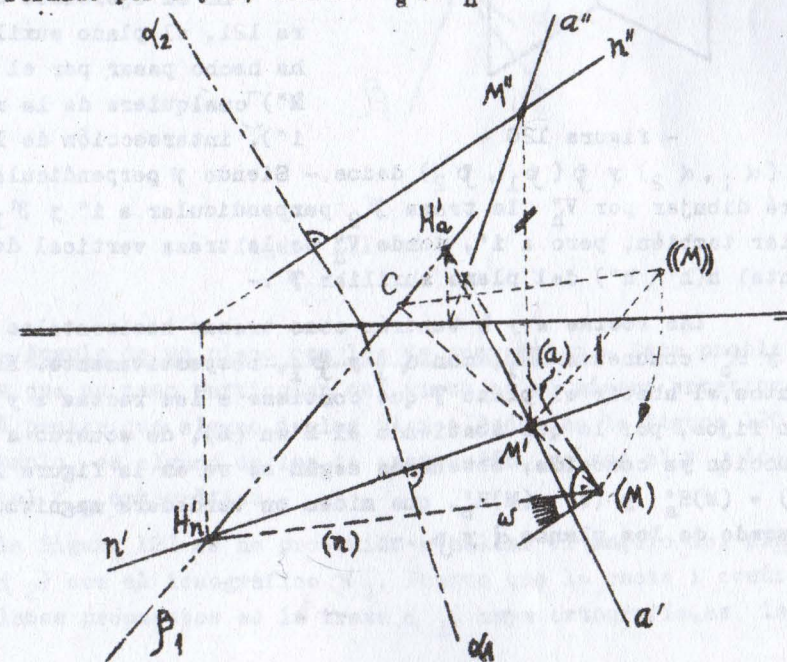
48.- Ángulo de una recta y un plano.- El ángulo de una recta con un plano está dado por el que forma la recta con su proyección ortográfica sobre el plano.-

Del análisis de la figura 118 se deduce que el ángulo buscado  $\omega$  es complementario del formado por la recta a dada y la normal n al plano  $\alpha$  dado, dibujada por un punto M cualquiera de la recta a. Es decir que este problema queda reducido al resuelto en el párrafo anterior, es decir al ángulo entre dos rectas: la a y la n.-



- figura 118 -

En la figura 119 se dan como datos el plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y la recta a ( $a', a''$ ). Siguiendo lo expuesto, por el punto M ( $M', M''$ ) cualquiera de la recta a se dibuja la recta n ( $n', n''$ ) normal al plano  $\alpha$  -es decir  $n'$  y  $n''$  respectivamente perpendiculares a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ -; se determina la traza  $\beta_1$  del plano formado por a y n, uniendo  $H'_a$  y  $H'_n$ .

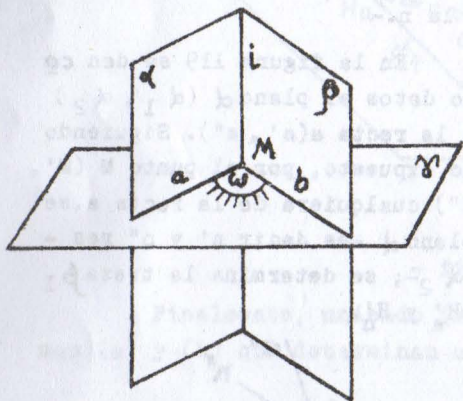


- figura 119 -



Luego, se abate el punto  $M$  alrededor de la traza  $\beta_1$  obteniéndose el  $(M)$  que unido a  $H'_a$  y  $H'_b$  -puntos fijos en el giro- determinan (e) y (n) respectivamente. Estas dos últimas rectas forman un ángulo cuyo complemento es el de la recta  $a$  y el plano  $\alpha$  dados.-

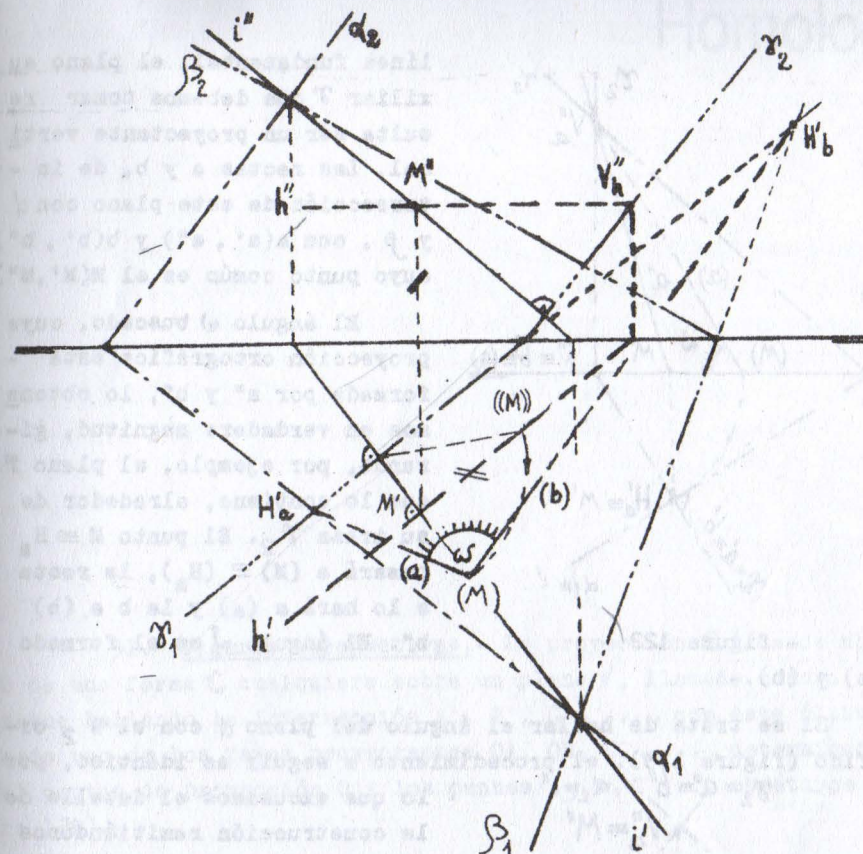
49.- Ángulo de dos planos.- Para hallar el ángulo que forman dos planos (figura 120) basta recordar que todo plano perpendicular a la arista de un diedro corta a las caras del mismo según rectas que forman el ángulo plano buscado.-



- figura 120 -

$\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) y  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) dados.- Siendo  $\gamma$  perpendicular a  $l$ , bastará dibujar por  $V''_h$  la traza  $\gamma_2$  perpendicular a  $l''$  y  $\gamma_1$  perpendicular también, pero a  $l'$ , donde  $V''_h$  es la traza vertical de la horizontal  $h(h', h'')$  del plano auxiliar  $\gamma$ .-

Las rectas  $a$  y  $b$  tendrán como trazas horizontales los puntos  $H'_a$  y  $H'_b$  comunes a  $\gamma_1$ , con  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , respectivamente. Estos dos puntos, al abatir el plano  $\gamma$  que contiene a las rectas  $a$  y  $b$ , permanecen fijos, por lo que abatiendo el  $M$  en  $(M)$ , de acuerdo a la construcción ya conocida, obtenemos según se ve en la figura las rectas (a) =  $(M)H'_a$  y (b) =  $(M)H'_b$ , que miden en verdadera magnitud el ángulo buscado de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .-

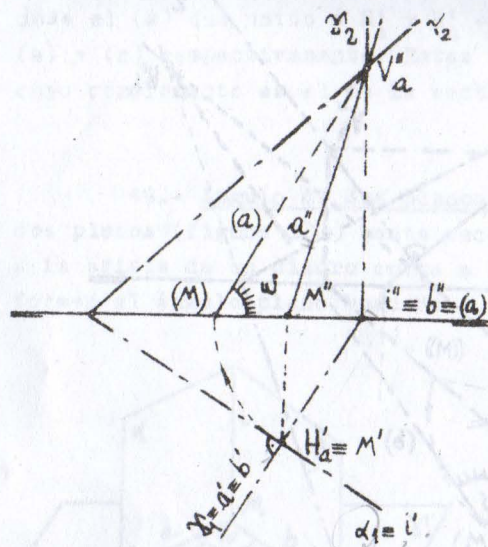


- figura 121 -

50.- Ángulo de un plano con las de proyección.- Este problema no es más que un caso particular del visto en el número anterior, pues bastará pensar que alguno de los planos dados en la figura 120, el  $\beta$  por ejemplo, es alguno de los de proyección, ya sea el  $\gamma_1$  icnográfico o el  $\gamma_2$  ortográfico.-

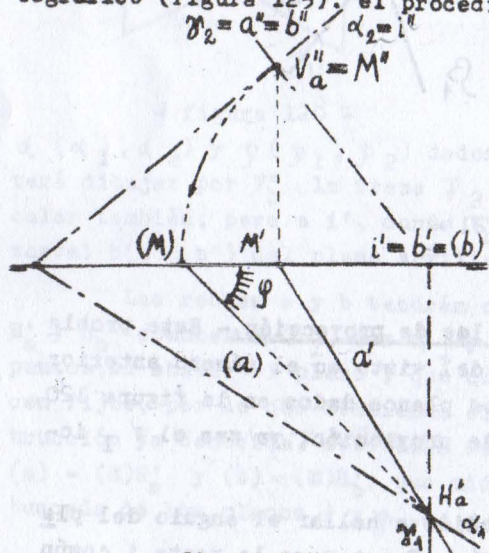
En la figura 122 se ha procedido a hallar el ángulo del plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) con el icnográfico  $\gamma_1$ . Puesto que la recta  $l$  común a los dos planos propuestos es la traza  $\alpha_1$ , cuya ortografía, es la





- figura 122 -  
por (a) y (b).-

Si se trata de hallar el ángulo del plano  $\alpha$  con el  $\pi_2$  ortográfico (figura 123), el procedimiento a seguir es idéntico, por lo que excusamos el detalle de la construcción remitiéndonos directamente a la citada figura.-



- figura 123 -

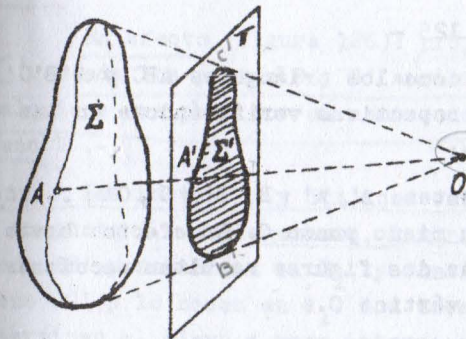
línea fundamental, el plano auxiliar  $\pi'$  que debemos tomar resulta ser un proyectante vertical. Las rectas  $a$  y  $b$ , de intersección de este plano con  $\alpha$  y  $\beta$ , son  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$ , cuyo punto común es el  $M(M', M'')$ .

El ángulo  $\omega$  buscado, cuya proyección ortográfica está formada por  $a''$  y  $b''$ , lo obtenemos en verdadera magnitud, girando, por ejemplo, el plano  $\pi'$  que lo contiene, alrededor de su traza  $\pi'_2$ . El punto  $M \equiv H_a$  pasará a  $(M) \equiv (H_a)$ , la recta  $a$  lo hará a  $(a)$  y la  $b$  a  $(b)$ . El ángulo  $\omega$  es el formado

## Capítulo 5

# Homología

51.- Figuras perspectivas..- La proyección  $\Sigma'$  desde un punto  $O$  de una forma  $\Sigma$  cualquiera sobre un plano  $\pi'$ , llamado cuadro, se obtiene hallando la intersección  $A', B', C', \dots$ , con este último, de cada uno de los rayos proyectantes  $OA, OB, OC, \dots$ , determinados por el centro de proyección  $O$  y los puntos  $A, B, C, \dots$  objetivos (figura 124).-



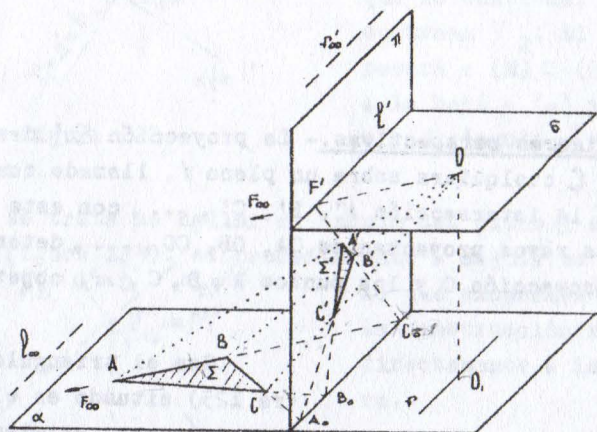
- figura 124 -

Sea el triángulo  $ABC$  (figura 125) situado en el plano  $\alpha$  y consideremos, asimismo, su proyección  $A'B'C'$  sobre el plano  $\pi'$ , desde el punto  $O$ . Los puntos tales como el  $A$  y el  $A'$  se dice que están en correspondencia biunívoca, pues al punto  $A$  del plano  $\alpha$  le corresponde el punto  $A'$  situado sobre el plano  $\pi'$ , y reciprocamente; en adelante los llamaremos puntos correspondientes. Al punto  $F_\infty$ , punto impropio de la recta  $AB$ , le corresponderá el  $F'$ , que lo determinamos hallando la



intersección con el plano  $\pi'$  del rayo proyectante  $OF_{\infty}$ ; en cambio, el correspondiente del punto  $C_0$ , situado sobre la recta de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\pi'$ , es el mismo punto  $C_0$ , por ser aquella común a los mencionados planos.  $C_0$ , por tal razón, decimos que es un punto unido.-

Podemos ver también que la proyección de la recta AB desde O es la intersección con  $\pi'$  del plano determinado por el centro de proyección O y la recta objetiva AB. Es decir que para la  $l_{\infty}$ , recta impropia del plano  $\alpha$ , su correspondiente es la  $l'$ , recta común a los planos  $\pi$  y  $\pi'$ , siendo  $\pi$  el plano paralelo al  $\pi'$  trazado por el punto O. La recta  $l'$  se llama recta límite de la figura  $\Sigma'$ . En cambio, si pensamos en la recta  $r'_{\infty}$ , impropia del plano  $\pi'$ , obtendremos su correspondiente sobre el plano  $\alpha$  en  $r$ , que es la recta límite de la figura  $\Sigma$ .-



- figura 125 -

Dos figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , tales como los triángulos ABC y A'B'C' respectivamente, se dice que son perspectivas verificándose en las mismas, con carácter recíproco, que:

- los pares de puntos correspondientes: A, A'; B, B'; C, C'; ..., determinan rectas que pasan por un mismo punto O. En efecto: basta para ello tener en cuenta que las dos figuras resultan secciones planas de una misma pirámide de vértice O.-
- las rectas correspondientes: AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A'; ..., se cortan en puntos de una misma recta. En efecto: las rectas AB y A'B' son coplanares (plano OA'ABB'O) y pertenecen respectivamente

a los planos  $\alpha$  y  $\pi'$ ; su punto  $C_0$  común debe necesariamente hallarse sobre la recta de intersección de aquéllos. El mismo razonamiento lleva a admitir que BC, B'C' y CA, C'A' se cortan en  $A_0$  y  $B_0$  respectivamente, puntos éstos que también pertenecen a la recta de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\pi'$ . Esta recta se llama recta de puntos unidos.-

Se hace notar que si el centro de proyección, es el ojo del observador o punto de vista, la figura  $\Sigma'$ , es la imagen o perspectiva de la figura objetiva  $\Sigma$ ; la recta límite  $l'$ , es la recta de fuga del plano  $\alpha$  y el punto F', es punto de fuga de la recta o dirección AB.-

**52.- Figuras homológicas.-** Cuando las propiedades enunciadas para las figuras perspectivas (ver parágrafo 51) se cumplen para figuras de un mismo plano, las mismas se dice que son figuras homológicas.-

Para el caso de tratarse de triángulos, DESARGUES (1593-1652) propuso su célebre teorema que figura entre los primeros descubrimientos de la Geometría proyectiva y que dice: "si en un plano, dos triángulos ABC y A'B'C' se hallan dispuestos de tal manera que las rectas que unen sus vértices correspondientes: A, A'; B, B'; C, C', concurren en un mismo punto O, tienen sus lados correspondientes: AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A', que se cortan en puntos de una misma recta."

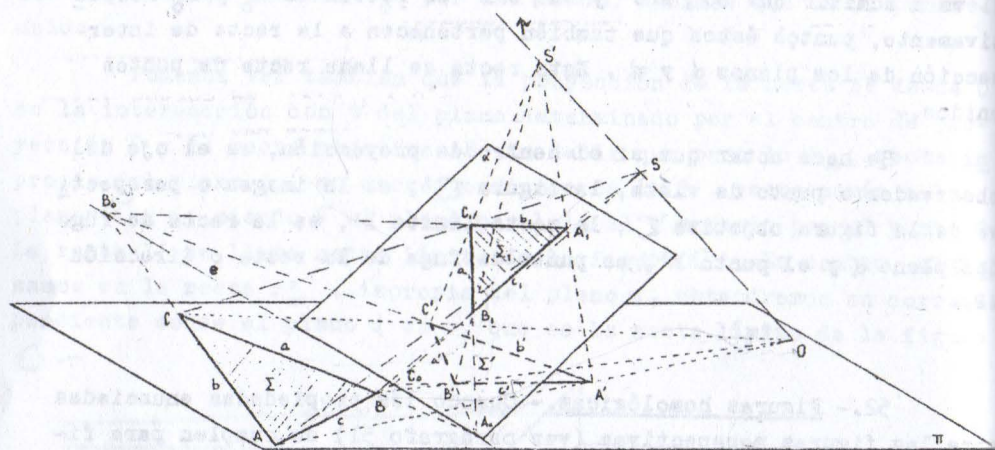
En efecto (figura 126): proyéctense los dos triángulos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , desde los puntos S y S' arbitrarios, tomados sobre una recta p cualquiera que pasa por el centro de proyección O y es exterior al plano  $\pi$ .-

Las rectas SA y S'A' que están en el plano AA'p, se cortan en un punto  $A_1$ . Análogamente, las rectas SB y S'B' pertenecientes al plano BB',p se cortan en  $B_1$ , y finalmente, las rectas SC y S'C' del plano CC',p lo hacen en  $C_1$ . Los tres puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  así obtenidos determinan el plano  $\alpha$  cuya intersección con  $\pi$  es la recta e.-

En los triángulos perspetivos  $\Sigma$  y  $\Sigma_1$ , se verifica que los lados AB y  $A_1B_1$  se cortan en  $C_0$ , en tanto que BC y  $B_1C_1$ , así como CA y  $C_1A_1$ , respectivamente lo hacen en  $A_0$  y  $B_0$ .- En los triángulos  $\Sigma'$  y



$\Sigma_1$ , también perspectivos, se verifica que  $A'B'$  y  $A_1B_1$  se cortan en  $C_0$ , en tanto que  $B'C'$  y  $B_1C_1$ , así como  $C'A'$  y  $C_1A_1$ , respectivamente lo hacen en  $A_0$  y  $B_0$ .-



- Figura 126 -

En consecuencia: los lados  $AB$  y  $A'B'$ ;  $BC$  y  $B'C'$ , y  $CA$  y  $C'A'$ , se cortan en  $C_0$ ,  $A_0$  y  $B_0$ , respectivamente, puntos éstos que pertenecen a una misma recta  $e = \pi \alpha$ . Con ello queda demostrado el teorema.

Los dos triángulos  $AEC$  y  $A'E'C'$  son homológicos; el punto  $O$  recibe ahora, el nombre de centro de homología; la recta  $e$  se denomina eje de homología, y los puntos  $A, A'$ ;  $B, B'$ ; ..., se llaman puntos correspondientes u homólogos.

Las propiedades enunciadas en el teorema anterior se cumplen con carácter recíproco, es decir que: "si dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen sus lados correspondientes:  $AB$ ,  $A'B'$ ;  $BC$ ,  $B'C'$ , y  $CA$ ,  $C'A'$ , que se cortan en puntos de una misma recta, tienen sus vértices correspondientes  $A, A'$ ,  $B'$ , y  $C, C'$ , que determinan rectas que concurren a un mismo punto  $O$ .

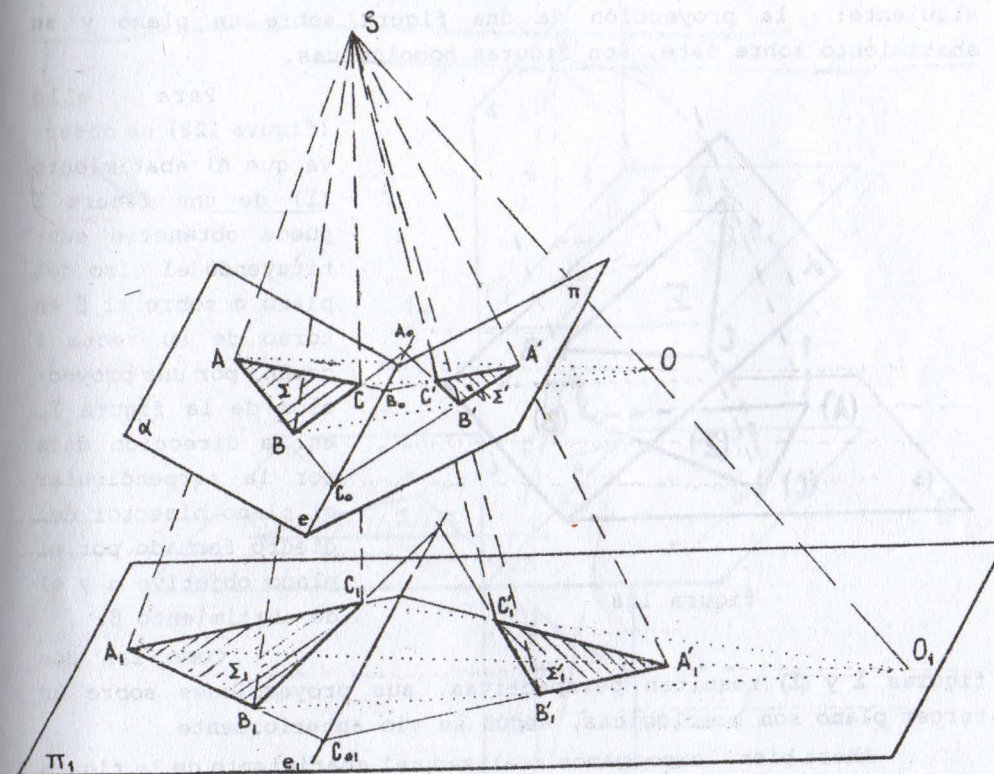
### 53.- La homología como proyección de figuras perspectivas.

Las proyecciones de dos formas planas perspectivas, desde un punto sobre un plano, son dos formas homológicas. El centro, el eje y el par de puntos correspondientes de la homología quedan determinados --

por la proyección sobre dicho plano, del centro, eje y un par de puntos correspondientes de las dos formas perspectivas.-

En efecto (figura 127): consideremos los triángulos perspectivos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  que proyectamos desde un punto  $S$  y sobre un plano  $\pi_1$  cualquiera, en  $\Sigma_1$  y  $\Sigma'_1$  respectivamente.-

Para que estos triángulos sean homológicos bastará demostrar que los lados  $A_1B_1$ ,  $A'_1B'_1$ ;  $B_1C_1$ ,  $B'_1C'_1$  y  $C_1A_1$ ,  $C'_1A'_1$ , se cortan en puntos de  $e_1$  y que las rectas  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$  y  $C_1C'_1$ , pasan por  $O_1$ .-



- figura 127 -

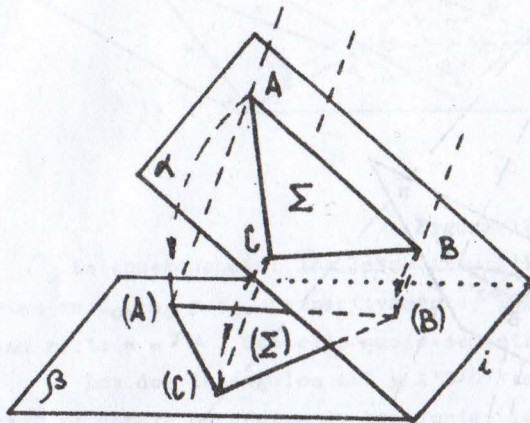
En efecto: los planos  $SAA_1B_1B'$  y  $SA'A'_1B'_1B'$  que se cortan según la recta  $SC_0C_{01}$ , al ser seccionados con el plano  $\pi_1$ , permiten obtener las rectas  $A_1B_1$  y  $A'_1B'_1$ , cuyo punto  $C_{01}$  común debe caer sobre  $SC_0$ . Por otra parte, el plano  $SOA'A'$  corta el  $\pi_1$  según la recta  $O_1A'_1A_1$ , lo que pone en evidencia que  $A_1A'_1$  pasa por el punto  $O_1$ .-



Idénticas consideraciones llevan a comprobar que los otros dos lados  $B_1C_1$ ,  $B'_1C'_1$  y  $C_1A_1$ ,  $C'_1A'_1$ , respectivamente concurren a  $A_{01}$  y  $B_{01}$ , y que  $B_1B'_1$  así como  $C_1C'_1$  pasan por el punto  $O_1$ .

Este teorema tiene múltiples aplicaciones en Geometría Descriptiva. Entre otras, podemos mencionar las secciones planas de conos, cilindros, pirámides y prismas, cuya determinación se reduce a resolver la homología que resulta de proyectar sobre el plano del dibujo, la base y la sección plana buscada, perspectivas en el espacio.

Como caso particular del teorema anterior, exponemos el siguiente: la proyección de una figura sobre un plano y su abatimiento sobre éste, son figuras homológicas.



- figura 128 -

Para ello (figura 128) se observa que el abatimiento  $(\Sigma)$  de una figura  $\Sigma$  puede obtenerse sustituyendo el giro del plano  $\alpha$  sobre el  $\beta$  en torno de su recta  $i$  común, por una proyección de la figura  $\Sigma$ , en la dirección dada por la perpendicular al plano bisector del diedro formado por el plano objetivo  $\alpha$  y el de abatimiento  $\beta$ .

Como las dos figuras  $\Sigma$  y  $(\Sigma)$  resultan perspectivas, sus proyecciones sobre un tercer plano son homológicas, según se vio anteriormente.

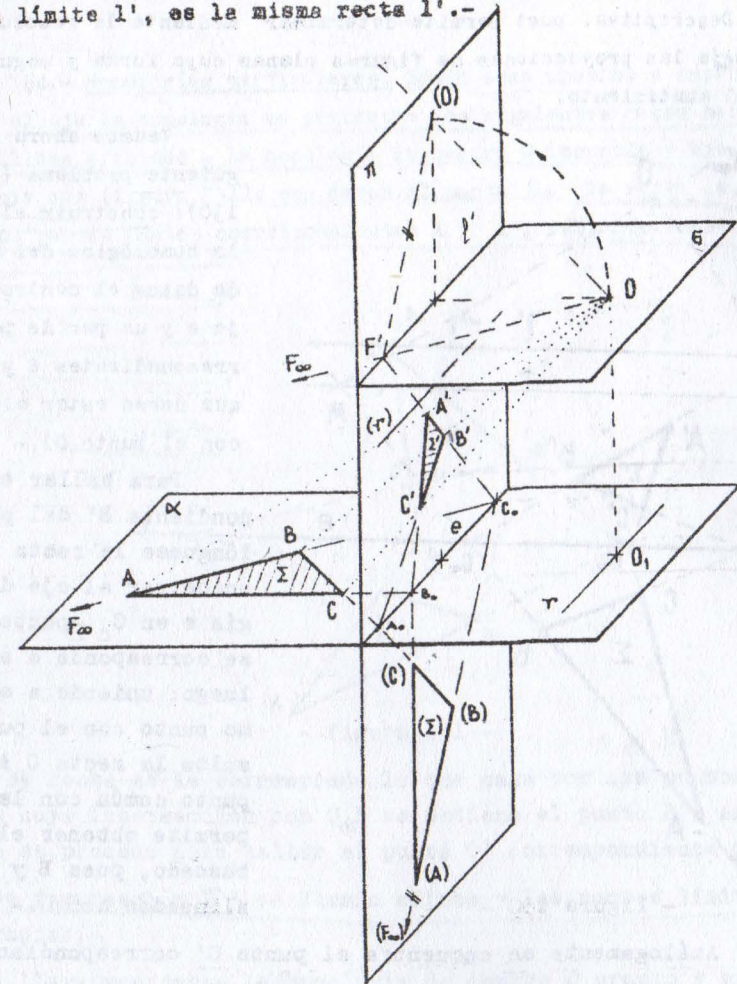
Ahora bien: supongamos realizado el abatimiento de la figura  $\Sigma$  en  $(\Sigma)$  sobre el plano  $\pi$  (figura 129), girando el plano  $\alpha$  alrededor de la recta  $A_0B_0C_0$ .

Si se proyectan las dos figuras perspectivas  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , sobre el plano  $\pi$  de  $\Sigma'$ , en la dirección  $A(A)$  que define el citado abatimiento, se obtienen las figuras homológicas  $\Sigma'$  y  $(\Sigma)$ , siendo el punto  $(O)$ , centro de homología; eje de homología la recta  $e$ , y par

de puntos correspondientes  $A'$  y  $(A)$ , proyecciones sobre  $\pi$  del punto  $O$ , de la recta  $A_0B_0C_0$  y de los puntos  $A$  y  $A'$ , respectivamente.

Por ser el plano  $\pi$  de proyección de la figura  $\Sigma'$ , él mismo, la proyección de  $A_0B_0C_0$  es la misma recta, que llamamos ahora  $e$ , y la de  $A'$  el mismo punto  $A'$ .

Idéntica razón dice que la proyección sobre el plano  $\pi$  de la recta límite  $l'$ , es la misma recta  $l'$ .



- figura 129 -

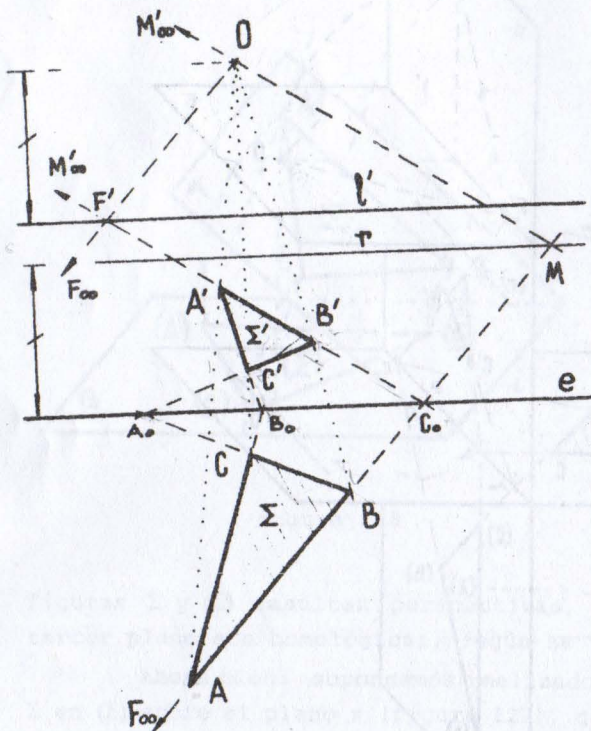
En cambio: la proyección de la otra recta límite  $r$ , es  $(r)$ , y su distancia al eje de homología  $e$ , es igual a la del punto  $(O)$  a la otra recta límite  $l'$ .



En lo sucesivo y a efectos de simplificar la notación, se designa directamente por  $O$ ,  $r$  y  $AB$ , al centro de homología, recta límite en figura abatida, que están en el plano  $\pi$ .—

Conviene observar que el centro de homología ( $O$ ) puede considerarse como el abatimiento, sobre el plano  $\pi$ , del punto  $O$  alrededor de la recta límite  $l'$  que, por pertenecer al plano fijo, no se mueve durante el giro del plano  $\alpha$  hasta llevar la figura  $\Sigma$  a la posición  $(\Sigma)$ .

Esta propiedad que se acaba de demostrar es también importante en Geometría Descriptiva, pues permite determinar mediante la resolución de una homología las proyecciones de figuras planas cuya forma y magnitud aparecen en el abatimiento.



- figura 130 -

Análogamente se encuentra el punto  $C'$  correspondiente del punto  $C$ .—

Ahora bien: como la recta límite  $l'$  correspondiente de la recta impropia  $l_\infty$  de la figura  $\Sigma$ , es paralela al eje de homología  $e$ , basta hallar uno de sus puntos para construirla.—

Veamos ahora el siguiente problema (figura 130): construir el triángulo homólogo del  $ABC$ , siendo datos el centro  $O$ , el eje  $e$  y un par de puntos correspondientes  $A$  y  $A'$  (los que deben estar alineados con el punto  $O$ ).—

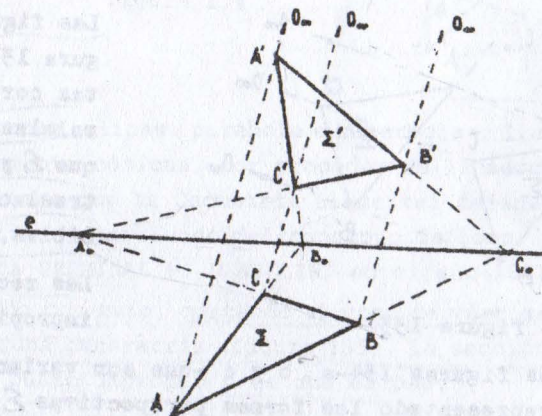
Para hallar el correspondiente  $B'$  del punto  $B$  prolonguense la recta  $AB$  hasta encontrar al eje de homología  $e$  en  $C_0$ —punto este que se corresponde a sí mismo—; luego: uniendo a este último punto con el punto  $A'$  resulta la recta  $C_0A'$ , cuyo punto común con la recta  $OB$  permite obtener el punto  $B'$  buscado, pues  $B$  y  $B'$  están alineados con  $O$ .—

En la figura 130, el punto  $F'$  correspondiente del  $F_\infty$  (punto en el infinito de la recta  $AB$ ), se ha obtenido cortando a la recta  $A'B'$  (homóloga de  $AB$ ) con  $OF_\infty$  (paralela por  $O$  a la recta  $AB$ ).—

Para hallar la otra recta límite  $r$  correspondiente de la recta impropia de la figura  $\Sigma'$ , se ha procedido de idéntica manera, o sea: buscando el punto  $M$  correspondiente del  $M_\infty$ , que está sobre la recta  $AB$  (homóloga de  $A'B'$ ), en su punto común con  $OM_\infty$  (paralela por  $O$  a la recta  $A'B'$ ).—

**54.- Homologías particulares.** Según sean propios o impropios el centro o el eje de homología se presentan los siguientes casos particulares:

a) Se llama afinidad a la homología de centro  $O$  impropio y eje  $e$  propio. Es decir que (figura 131): son datos el punto  $O_\infty$  la recta  $e$ , la figura  $\Sigma$  y un par de puntos correspondientes  $A$  y  $A'$ , debiendo construirse  $\Sigma'$ .—



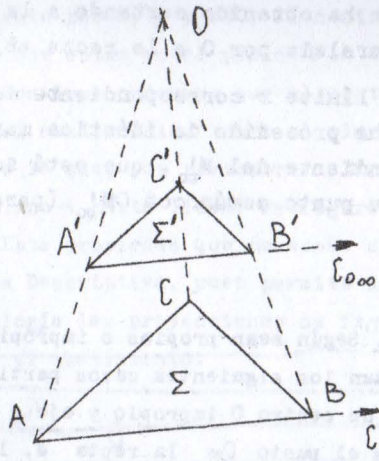
- figura 131 -

A la recta  $AB$  le corresponde la que pasa por los puntos  $C_0$  y  $A'$ , en cuya intersección con  $O_\infty B$  se obtiene el punto  $B'$ . Análogamente se procede para hallar el punto  $C'$  correspondiente del  $C$ .—

Las figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  se llaman afines y las rectas límites son impropias.—

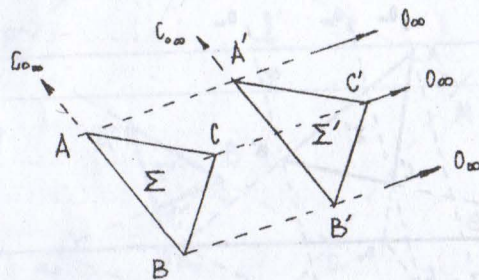
b) se llama semejanza la homología de centro  $O$  propio y eje  $e$  impropio. Es decir que (figura 132): son datos el punto  $O$ , el eje  $e_\infty$ ,





- figura 132 -

impropias.-



- figura 133 -

En las figuras 134-a, b y c -que son variantes de la figura 129- se han representado las formas perspectivas  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , cuyas proyecciones sobre el plano  $\pi$  (ver parágrafo 53) dan las figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  afines, semejantes y congruentes, respectivamente, y anteriormente de finidas.-

##### 55.- Las cónicas como homológicas de la circunferencia.-

Cuando se corta un cono de base circular -recto u oblicuo- con un plano, siempre se obtiene -según se demuestra en Geometría Analítica- una curva de segundo grado, la que puede ser -según sea la posición del plano secante en relación a las generatrices del cono-, una elipse, parábola o hipérbola.-

la figura  $\Sigma$  y un par de puntos correspondientes A y A', debiendo construirse  $\Sigma'$ .-

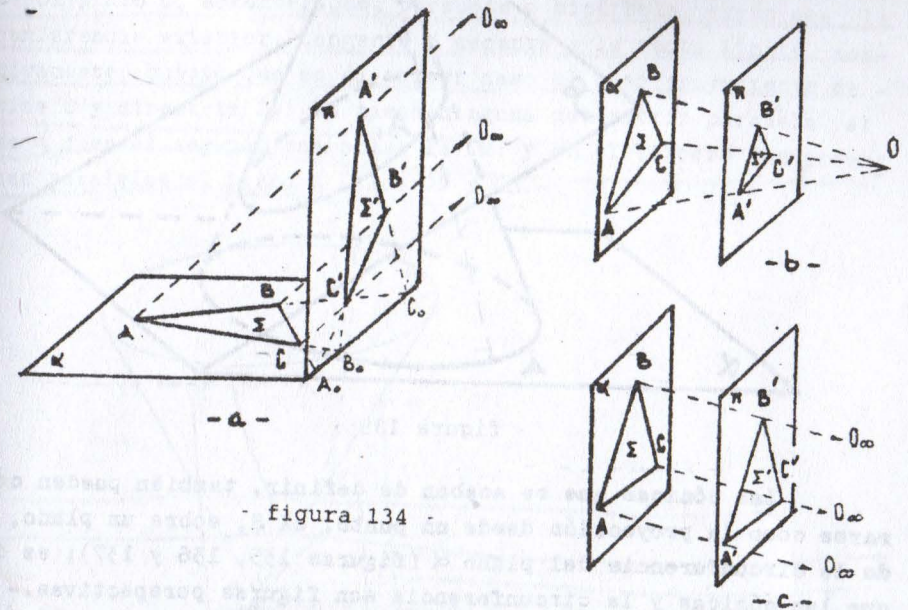
Los lados homólogos -por ejemplo AB y A'B'- son paralelos, pues el punto unido  $C_0$ , debe hallarse sobre el eje  $e_\infty$ , que es impropio.

Las figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son semejantes y las rectas límites son impropias.-

c) Se llama congruencia o traslación la homología de centro  $O_\infty$  y eje  $e_\infty$

Las figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  (figura 133) resultan de rectas correspondientes, paralelas e iguales, por lo que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , merced a una traslación, son superponibles.-

Las rectas límites son impropias.-



- figura 134 -

Estas curvas -elipse, parábola e hipérbola-, llamadas secciones cónicas o simplemente cónicas, por proceder de la sección plana de un cono, son las mismas que la Geometría Elemental define utilizando sus propiedades métricas, partiendo del concepto de foco; así lo demostró el geómetra belga GERMINAL P. DANDELIN, en el año 1822.

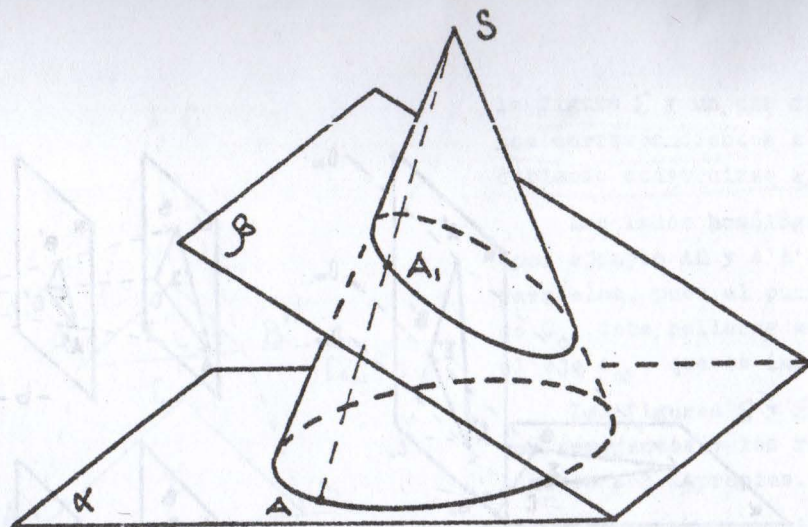
De acuerdo con esto, cortando al cono de vértice S con un plano  $\beta$  paralelo a ninguna generatriz (figura 135), la sección que se obtiene no tiene ningún punto impropio y es una elipse.

En cambio (figura 136): si el plano  $\beta$  secante, es paralelo a una generatriz del cono, la sección presenta un punto impropio y es una parábola.

Para asegurarnos de que el plano  $\beta$  secante corte a todas las generatrices menos a la SM del cono, bastará elegirlo paralelo al plano  $\tau$  tangente al cono que contiene a esa generatriz.

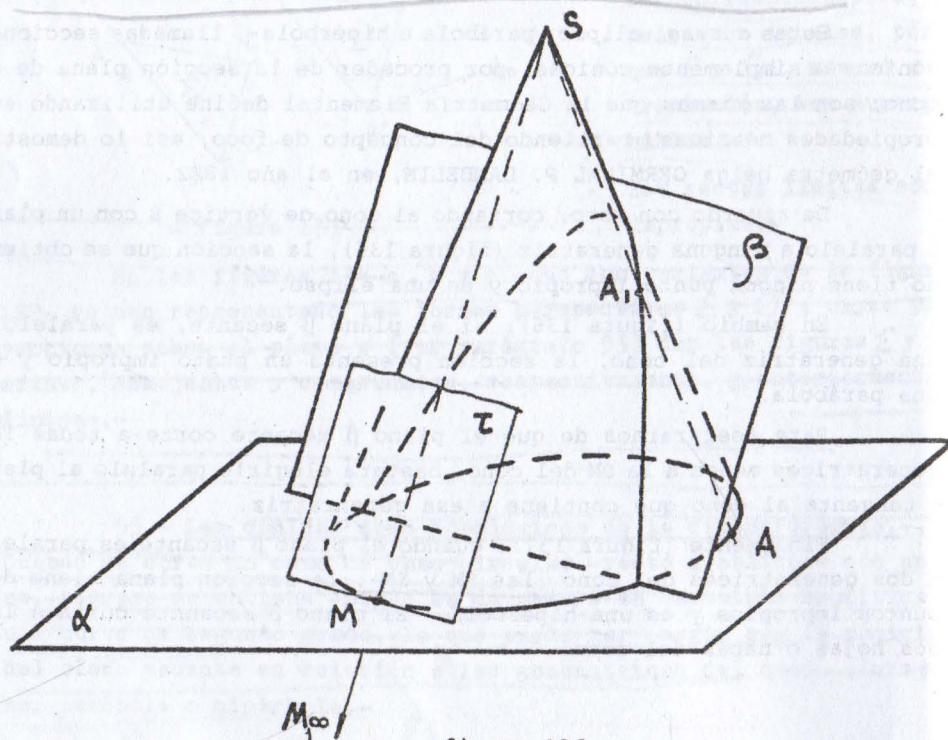
Finalmente (figura 137): cuando el plano  $\beta$  secante es paralelo a dos generatrices del cono -las SM y SN-, la sección plana tiene dos puntos impropios y es una hipérbola. El plano  $\beta$  secante corta a las dos hojas o napas del cono.





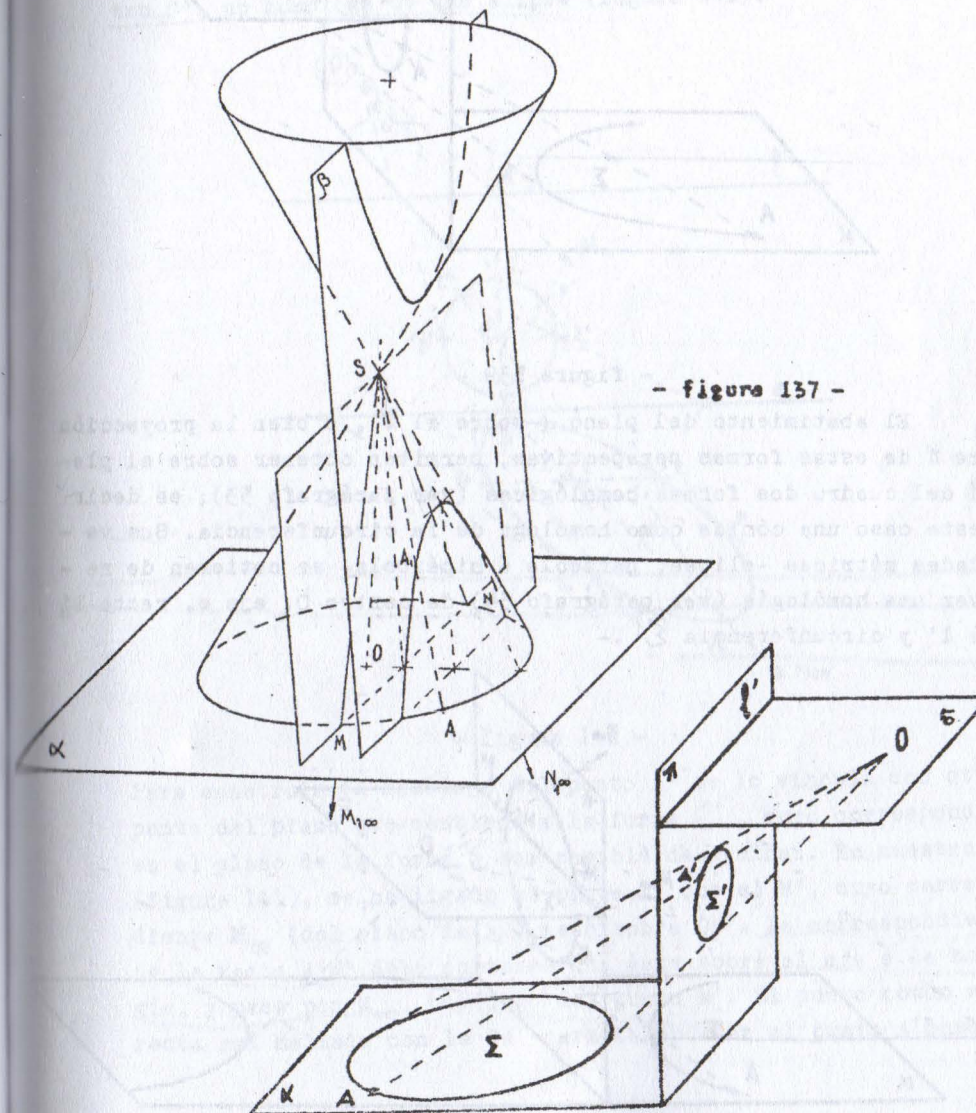
- figura 135 -

Las cónicas que se acaban de definir, también pueden considerarse como la proyección desde un punto, el S, sobre un plano, el β de la circunferencia del plano α (figuras 135, 136 y 137); es decir que las cónicas y la circunferencia son figuras perspectivas.-



- figura 136 -

Si en las figuras 138, 139 y 140, se supone que la forma  $\Sigma$  del plano  $\beta$  es una circunferencia, sus proyecciones sobre el plano  $\alpha$  desde el punto O, serán: elipse, parábola o hipérbola, según sea la circunferencia exterior, tangente o secante a la recta límite, respectivamente, puesto que en el primer caso el cono proyectante de vértice O y directriz  $\Sigma'$  no tiene ninguna generatriz paralela al plano  $\alpha$ ; en el segundo una sola, la OM; y en el tercero dos generatrices paralelas al plano  $\alpha$ , las OM y ON.-

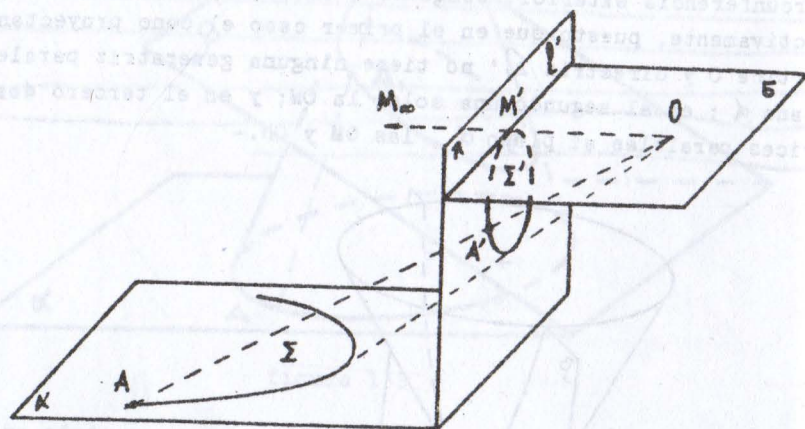


- figura 137 -

- figura 138 -

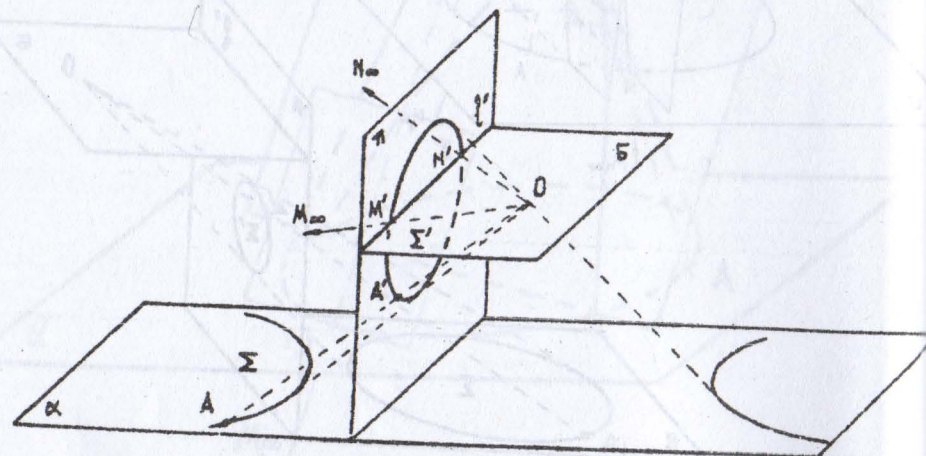


En cada caso (figuras 138, 139 y 140), ambas formas -circunferencia y cónica- son figuras perspectivas.-



- figura 139 -

El abatimiento del plano  $\pi$  sobre el  $\pi'$ , o bien la proyección sobre  $\pi'$  de estas formas perspectivas, permiten obtener sobre el plano  $\pi'$  del cuadro dos formas homológicas (ver parágrafo 53); es decir en este caso una cónica como homóloga de la circunferencia. Sus variedades métricas -elipse, parábola o hipérbola- se obtienen de resolver una homología (ver parágrafo 54) de centro O, eje e, recta límite l' y circunferencia  $\Sigma'$ .-

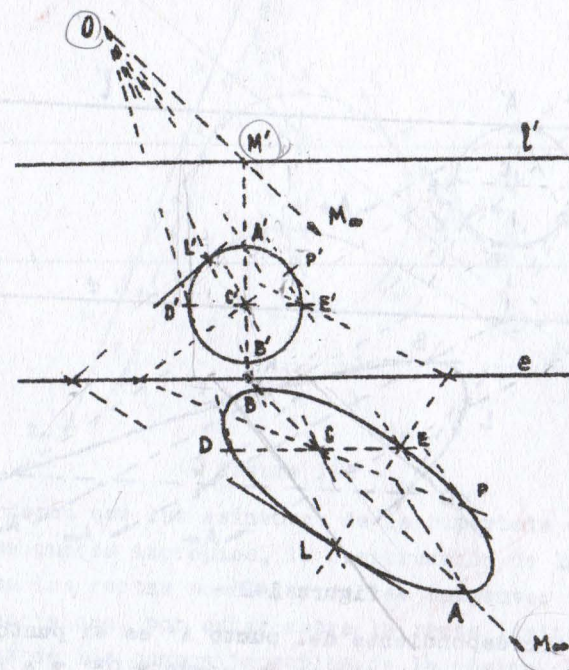


- figura 140 -

Como problema, en las figuras 141, 142 y 143, se ha procedido a trazar la cónicas, homológica de la circunferencia de centro C', siendo datos: el centro O de homología, el eje e y la recta límite l'.

Se pueden presentar tres posibilidades, según la posición - que observen entre sí la recta límite l' y la circunferencia de centro C'. Así entonces:

- a) Cuando la recta límite l' es exterior a la circunferencia de centro C', su homóloga es una elipse (figura 141).-



- figura 141 -

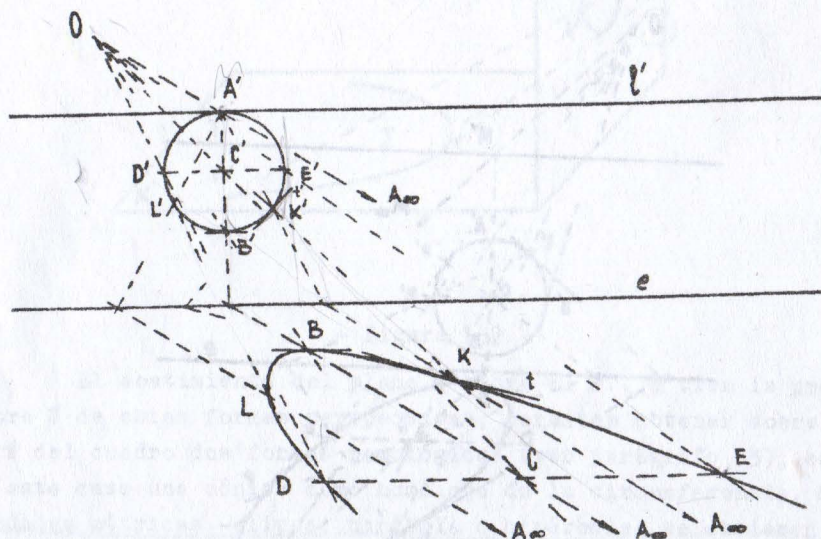
Para construir el homólogo del punto A' se lo vincula con otro - punto del plano que contiene a la forma  $\Sigma'$ , cuyo correspondiente en el plano de la forma  $\Sigma$  sea posible determinar. En nuestro caso (figura 141), se ha ligado el punto A' con el M', cuyo correspondiente  $M_\infty$  (del plano de  $\Sigma$ ) está sobre OM'. La correspondiente - de la recta A'M' debe cortarse con ésta sobre el eje e de homología, y pasa por  $M_\infty$ , homólogo del punto M'. El punto común a la - recta así hallada con la OA' permite obtener el punto A buscado.-



Para el punto B se procede en forma análoga. Los puntos D y E, por ser D'E' paralela al eje e de homología, están sobre una recta también paralela al eje e trazada por C, homólogo del punto C', y alineados DD' y EE' con O.-

El punto L se ha construido vinculando L' con E'. La tangente en L se obtiene como homóloga de la tangente en L', cortándose ambas sobre el eje e de homología.-

b) Cuando la recta límite  $l'$  es tangente a la circunferencia de centro  $C'$ , su homóloga es una parábola (figura 142).—



- figura 142 -

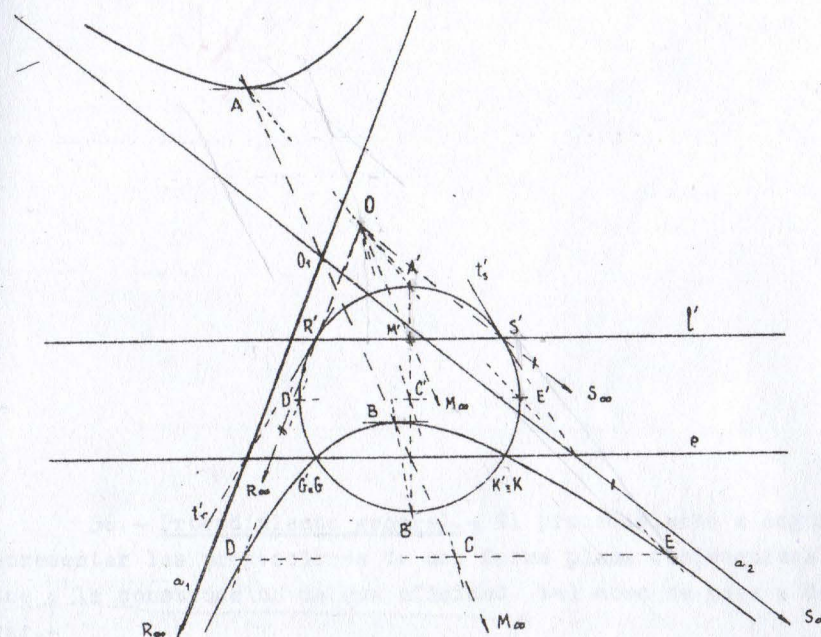
Dado que el correspondiente del punto  $A'$  es el punto  $A_{\infty}$ , el homólogo del punto  $B'$  se halla en  $B$ , común a  $OB'$  y a  $BA_{\infty}$ , paralela a  $OA'$ , trazada por el punto en que  $A'B'$  corta al eje.-

La determinación de otros puntos de la parábola pueden verse en la figura, pues las construcciones son similares a las del caso anterior.-

Finalmente: si la recta límite  $l'$  es secante a la circunferencia de centro  $C'$ , su homóloga es una hipérbola (figura 143).—

El trazado por puntos y tangentes de las dos ramas de la curva es análogo también al empleado en los casos precedentes por lo que debe remitirse el lector directamente a la figura.-

Por ser, en este ejercicio, el eje  $e$  de homología, secante a la circunferencia de centro  $C'$ , la hipérbola tiene los puntos  $G \equiv G'$  y  $K \equiv K'$ . -

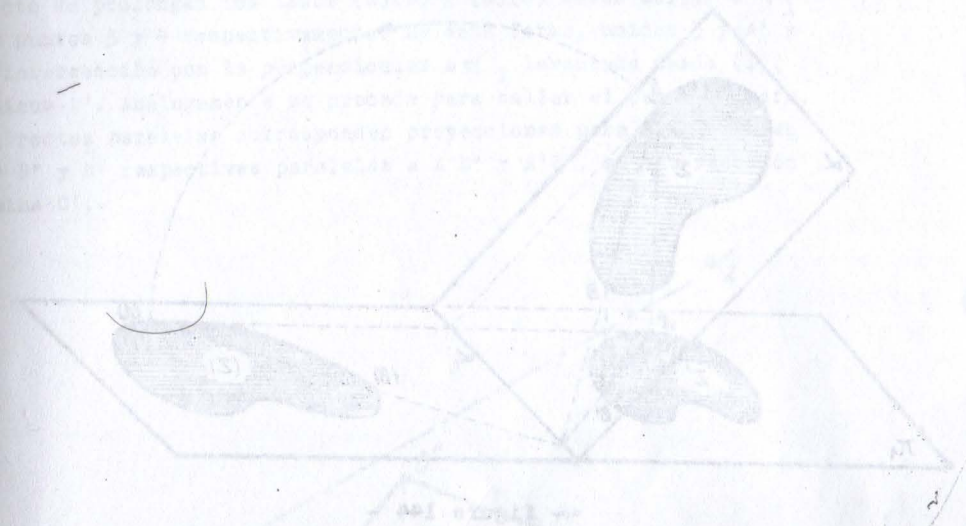


- figure 143 -

Recordando que las asíntotas de la hipérbola son las tangentes en sus dos puntos impropios, la construcción de las mismas se obtiene buscando las rectas homólogas de las tangentes en  $R'$  y  $S'$  de la circunferencia que, por estar sobre la recta límite  $l'$ , son correspondientes de los puntos impropios de la cónica. En la figura 143 se han dibujado las tangentes  $t_r'$  y  $t_s'$  a la circunferencia, basta cortar al eje  $e$  de homología, por donde pasan las asíntotas  $a_1$  y  $a_2$  cuyas direcciones son paralelas a  $OR'$  y  $OS'$ , respectivamente. Las asíntotas se cortan en  $O_1$ , centro de la cónica.-



# Figuras Planas



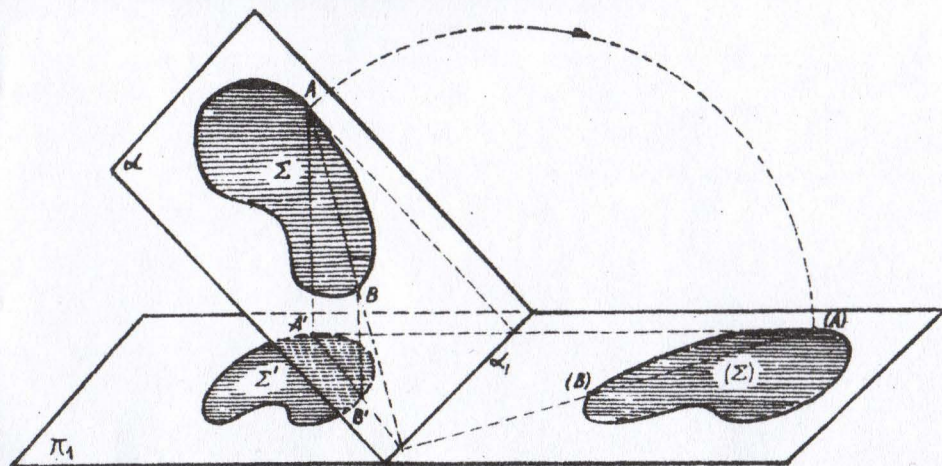
56.- Procedimiento general.- El procedimiento a seguir para representar las proyecciones de una forma plana cualesquiera se reduce a la construcción de una afinidad. tal como se pasa a demostrar.-

En efecto: sea (figura 144) una forma  $\Sigma$  situada en el plano  $\alpha$ , cuya traza sobre el plano  $\pi_1$  de proyección (cuadro), es  $\alpha_1$ . La proyección ortogonal, sobre este plano  $\pi_1$  de proyección, de los puntos  $A, B, \dots$  de la forma  $\Sigma$  permite obtener, a su vez, los puntos  $A', B', \dots$  de la forma  $\Sigma'$ . Las formas  $\Sigma$  objetiva y  $\Sigma'$  proyectada son perspectivas, siendo centro de perspectividad el punto impropio de las direcciones ortogonales  $A, A'; B, B'; \dots$ , al plano  $\pi_1$  de proyección.-

Abatido el plano  $\alpha$  sobre el plano  $\pi_1$  de proyección y entorno de su traza  $\alpha_1$ , se obtiene la forma  $(\Sigma)$  que resulta afín de la forma  $\Sigma'$ , pues, en efecto: basta recordar que la proyección de una figura sobre un plano y su abatimiento sobre éste, son figuras homológicas. Como en este caso el centro de homología es impropio, punto en el infinito de las perpendiculares a  $\alpha_1$ , las formas  $\Sigma'$  y  $(\Sigma)$  están vinculadas por una afinidad cuyo centro ya definiremos, el eje es la recta  $\alpha_1$  y par de correspondientes son los puntos  $A'$  y su abatimiento  $(A)$ .-



Es decir que resolviendo una afinidad se pueden representar las proyecciones de una figura plana, en función de su abatimiento en el que aparece en verdadera forma y magnitud.-



- figura 144 -

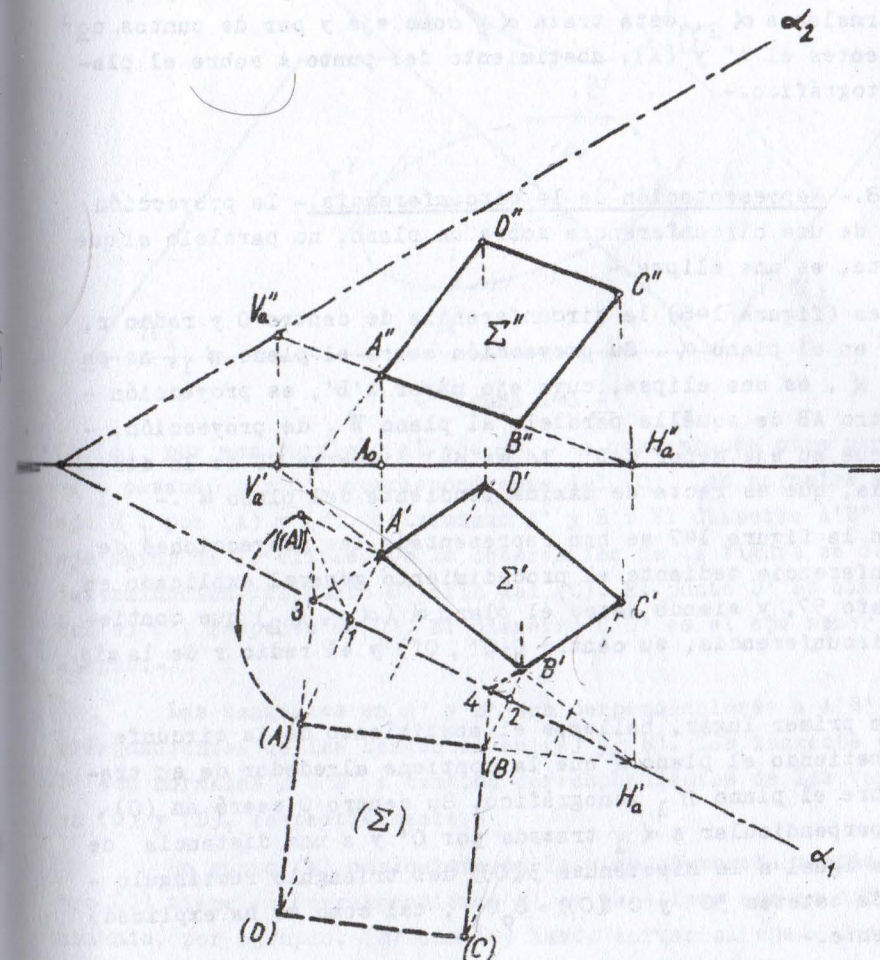
57.- Representación de un polígono.- En la figura 145 se ha procedido a representar las proyecciones de un cuadrado ABCD contenido en un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ), fijándose como dato la proyección A'B' de uno de sus lados.-

Desde luego la proyección A''B'' es obvia. A efectos de construir el abatimiento ( $\Sigma'$ ) = (A)(B)(C)(D) sobre el plano  $\pi_1$  icnográfico, del cuadrado cuya proyección del lado AB conocemos, bastará abatir el plano  $\alpha$  alrededor de su traza  $\alpha_1$ . De acuerdo con la construcción conocida e indicada en la figura, el punto A cae en (A). El punto (B) se obtiene cortando a la perpendicular a  $\alpha_1$  que pasa por B' con la recta determinada por (A) y  $H_a'$ , traza esta última de la recta AB y punto fijo durante el giro.-

Siendo (A)(B) el lado del cuadrado en verdadera magnitud, es posible obtenerlo también a éste, resultando la forma ( $\Sigma$ ) = (A)(B)(C)(D).-

Para hallar los puntos C' y D' que permitan completar la icnografía A'B'C'D' =  $\Sigma'$  del cuadrado, basta resolver la afinidad cuyo centro es el punto impropio de las normales a la traza  $\alpha_1$ , el

sobre la traza  $\alpha_1$  y par de correspondientes los puntos A' y (A), a cuyo efecto se prolongan los lados (A)(D) y (B)(C) hasta cortar a  $\alpha_1$  en los puntos 3 y 4 respectivamente. De esta forma, unidos 3 y A' y en su intersección con la perpendicular a  $\alpha_1$  levantada desde (D), se obtiene D'. Análogamente se procede para hallar el punto C'; pero, como a rectas paralelas corresponden proyecciones paralelas, trazando por B' y D' respectivas paralelas a A'D' y A'B', su intersección determina C'.



- figura 145 -



Explicado el mecanismo empleado para resolver la afinidad planteada entre el abatimiento ( $\Sigma$ ) de una forma y su proyección  $\Sigma'$ , se puede representar cualquier polígono en sus dos proyecciones -  $\Sigma'$  y  $\Sigma''$  - pues, obtenida la forma  $\Sigma'$ , la  $\Sigma''$  resulta de inmediato recordando que se trata de puntos y rectas de un mismo plano. Así se ha procedido a completar la figura 145.-

Ello no obstante (figura 145), la ortografía  $\Sigma'' = A''B''C''D''$  del cuadrado es posible obtenerla repitiendo el procedimiento explicado para la icnografía  $\Sigma' = A'B'C'D'$  del mismo, donde la afinidad quedaría establecida por su centro en el punto impropio de las normales a  $\alpha_2$ , esta traza  $\alpha_2$  como eje y par de puntos correspondientes el  $A''$  y  $(A)$ , abatimiento del punto A sobre el plano  $\pi_2$  ortográfico.-

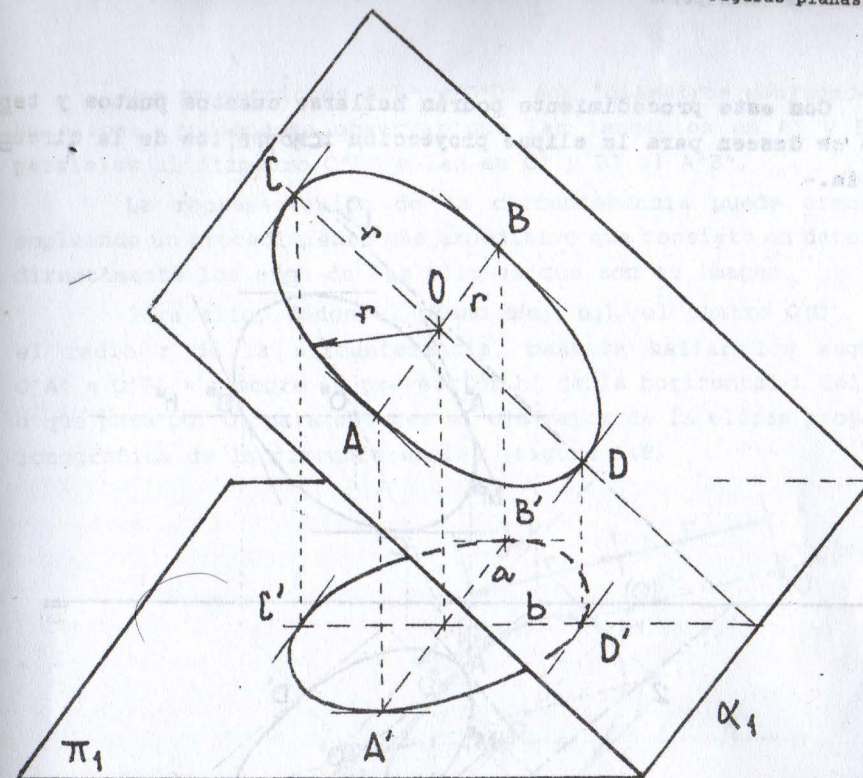
58.- Representación de la circunferencia.- La proyección ortogonal de una circunferencia sobre un plano, no paralelo al que la contiene, es una elipse.-

Sea (figura 146) la circunferencia de centro O y radio r, contenida en el plano  $\alpha$ . Su proyección sobre el plano  $\pi_1$ , no paralelo al  $\alpha$ , es una elipse, cuyo eje mayor A'B', es proyección del diámetro AB de aquella paralelo al plano  $\pi_1$  de proyección, - mientras que su eje menor C'D', lo es del diámetro CD de la circunferencia, que es recta de máxima pendiente del plano  $\alpha$ .-

En la figura 147 se han representado las proyecciones de una circunferencia mediante el procedimiento general explicado en el párrafo 57, y siendo datos el plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) que contiene a la circunferencia, su centro O ( $O', O''$ ) y el radio r de la misma.-

En primer lugar, hallemos el abatimiento de la circunferencia, abatiendo el plano  $\alpha$  que la contiene alrededor de su traza  $\alpha_1$  sobre el plano  $\pi_1$  icnográfico. Su centro O caerá en (O), sobre la perpendicular a  $\alpha_1$  trazada por  $O'$  y a una distancia de esta traza igual a la hipotenusa  $3(O)$  del triángulo rectángulo -  $3O'(O)$ , de catetos  $3O'$  y  $O'(O) = O_0O''$ , tal como se ha explicado anteriormente.-

Dibujada la circunferencia de radio r, la resolución de la afinidad pertinente nos deja dibujar la elipse A'B'C'D' ya que al



- figura 146 -

(A)(B), por ser paralelo al eje  $\alpha_1$ , le corresponde otra paralela a  $\alpha_1$  pasando por  $O'$ , correspondiente del (O). Las normales a dicho eje  $\alpha_1$  por (A) y (B), determinan  $A'$  y  $B'$ . El diámetro A'B' es el eje mayor de la elipse. De la observación de la figura se deduce la determinación del punto C', afín del (C). El punto D' es simétrico con el C', respecto de  $O'$ . El diámetro C'D' es el eje menor de la elipse.-

Las tangentes en A' y B' son perpendiculares a A'B' y correspondientes de las tangentes en (A) y (B). Las tangentes en C' y D' son normales a C'D' y también correspondientes de las tangentes en (C) y (D), respectivamente.-

Un punto (M) cualquiera de la circunferencia abatida, de centro (O), tiene su correspondiente M' en la elipse que se dibuja uniendo, por ejemplo, (M) con (O) hasta cortar al eje  $\alpha_1$  en 2; sobre 2O' y la normal, por (M), a  $\alpha_1$  estará el M'. La tangente en este punto será la correspondiente de la tangente en (M).-



Con este procedimiento podrán hallarse cuantos puntos y tangentes se deseen para la elipse proyección icnográfica de la circunferencia.-

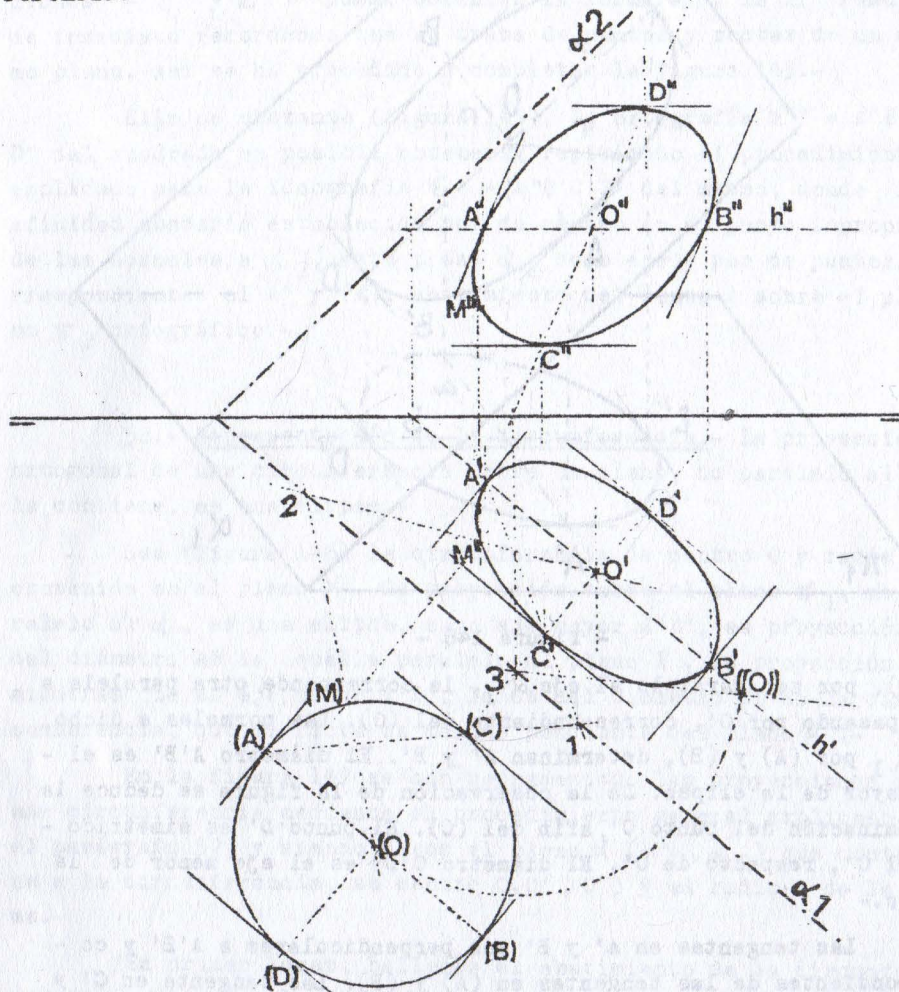


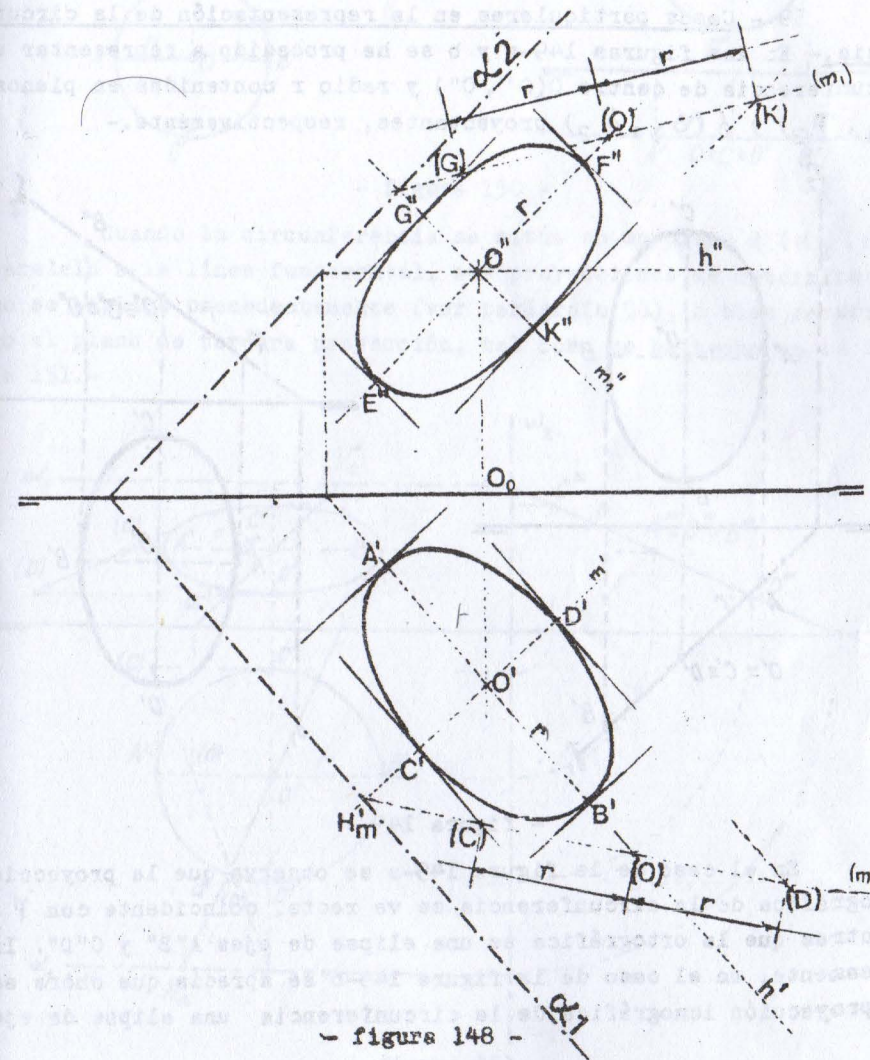
figura 147 -

La proyección ortográfica de la circunferencia es otra elipse de la cual podemos dibujar los puntos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $M''$ , ..., pues son ortografías de los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $M'$ , ... del plano  $\alpha$ . Idéntica razón permite hallar las tangentes respectivas.-

Las proyecciones  $A''B''$  y  $C''D''$  son "diámetros conjugados" de la elipse, pudiéndose observar que las tangentes en  $A''$  y  $B''$  son paralelas al diámetro  $C''D''$  y las en  $C''$  y  $D''$  al  $A''B''$ .

La representación de la circunferencia puede efectuarse empleando un procedimiento más expeditivo que consiste en determinar directamente los ejes de las elipses que son su imagen.

Para ello, dados el plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ , el centro  $O(O', O'')$  y el radio  $r$  de la circunferencia, bastará hallar los segmentos  $O'A' = O'B' = r$  sobre la proyección  $h'$  de la horizontal  $h$  del plano  $\alpha$  que pasa por  $O$ , para obtener el eje mayor de la elipse proyección icnográfica de la circunferencia. (figura 148)



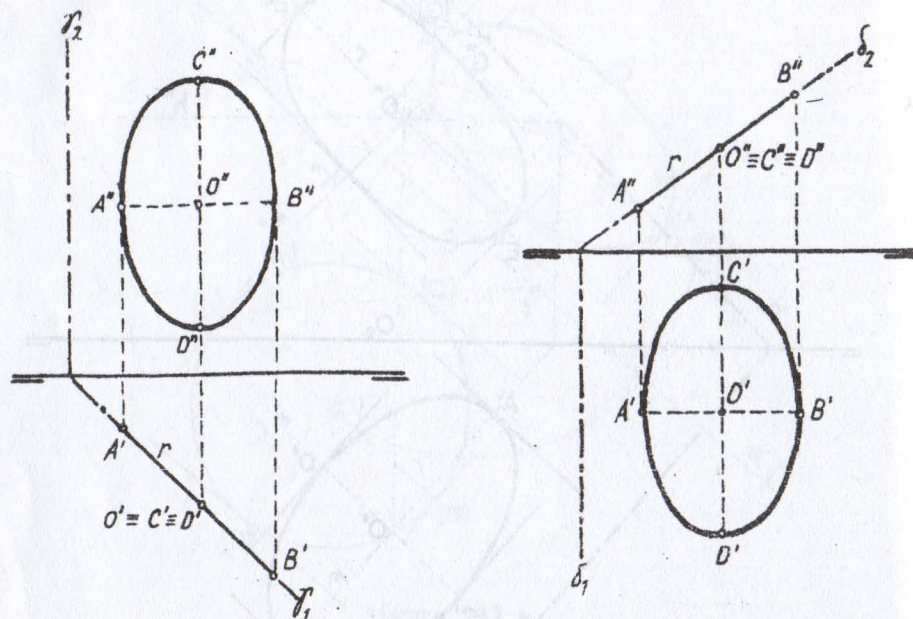
- figura 148 -



Para determinar el eje  $C'D'$  menor, debe abatirse el punto  $O$  en  $(O)$ , siendo  $O'(O)$  igual a  $O_0O''$ . Unidos  $(O)$  y  $H'_m$  se tiene el abatimiento de la recta de máxima pendiente del plano  $\alpha$  (ver figura 146) por lo que tomando a ambos lados de  $(O)$  el valor del radio  $r$  resultan los puntos  $(C)$  y  $(D)$ , en tanto que  $C'$  y  $D'$  se obtienen trazando perpendiculares a  $O'H'_m$  por  $(C)$  y  $(D)$ , respectivamente.

Para la proyección ortográfica de la circunferencia se procede de igual forma, obteniéndose los ejes  $E''F''$  y  $G''K''$  de la elipse.

**59.- Casos particulares en la representación de la circunferencia.** En las figuras 149-a y b se ha procedido a representar una circunferencia de centro  $O(O', O'')$  y radio  $r$  contenidas en planos  $\gamma$  ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) y  $\delta$  ( $\delta_1, \delta_2$ ) proyectantes, respectivamente.

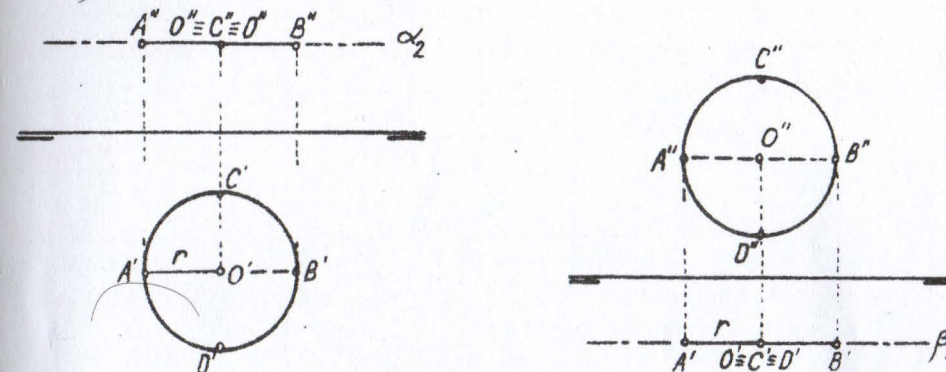


- figura 149 -

En el caso de la figura 149-a se observa que la proyección icnográfica de la circunferencia se ve recta, coincidente con  $\gamma_1$ , mientras que la ortográfica es una elipse de ejes  $A''B''$  y  $C''D''$ . Inversamente, en el caso de la figura 149-b se aprecia que ahora es la proyección icnográfica de la circunferencia una elipse de ejes

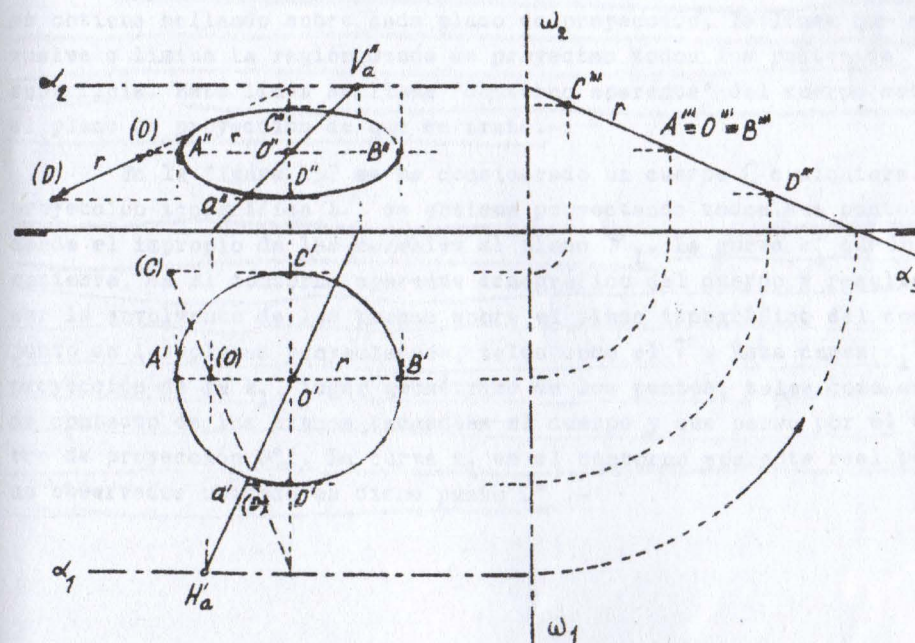
$A'B'$  y  $C'D'$ , mientras que la ortográfica se ve recta, coincidente con  $\delta_2$ .

En las figuras 150-a y b se ha representado una circunferencia de centro  $O(O', O'')$  y radio  $r$ , contenida en planos  $\alpha$  y  $\beta$  paralelos a los de proyección.



- figura 150 -

Quando la circunferencia se sitúa en un plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) paralelo a la línea fundamental, sus proyecciones se determinan como se explicó precedentemente (ver parágrafo 58), o bien recurriendo al plano de tercera proyección, tal como se ha hecho en la figura 151.



- figura 151 -



# Representación de Cuerpos

## Secciones Planas y Planos Tangentes

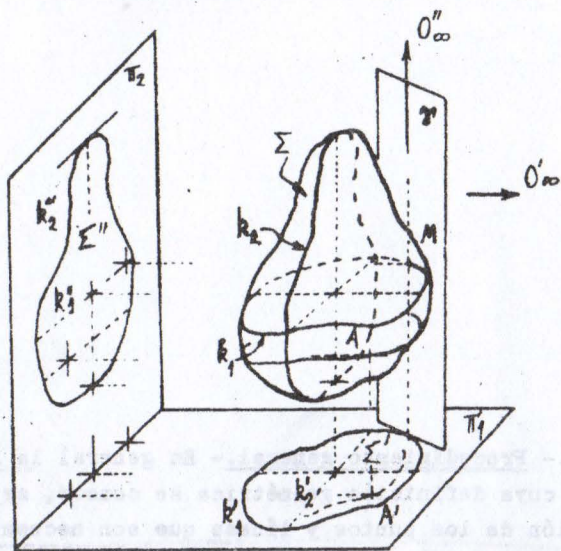
60.- Procedimiento general.- En general la representación de un cuerpo, cuya definición geométrica se conoce, se hace partiendo de la proyección de los puntos y líneas que son necesarios para su determinación.-

En base a estos elementos, la proyección o imagen del cuerpo se obtiene hallando sobre cada plano de proyección, la línea que envuelve o limita la región donde se proyectan todos los puntos de su superficie. Esta línea se llama "contorno aparente" del cuerpo sobre el plano de proyección de que se trate.-

En la figura 152 se ha considerado un cuerpo  $\mathcal{C}$  cualquiera. Su proyección icnográfica  $\mathcal{L}'$  se obtiene proyectando todos sus puntos desde el impropio de las normales al plano  $\pi_1$ . La curva  $k_1'$  que los encierra, es el contorno aparente icnográfico del cuerpo y resulta ser la envolvente de las trazas sobre el plano icnográfico del conjunto de los planos proyectantes, tales como el  $\pi_1'$ . Esta curva  $k_1'$  es proyección de la  $k_1$ , lugar geométrico de los puntos, tales como el M de contacto de los planos tangentes al cuerpo y que pasan por el centro de proyección  $O_\infty$ . La curva  $k_1$  es el contorno aparente real para un observador ubicado en dicho punto  $O_\infty$ .-



Idénticas consideraciones son válidas para la proyección ortográfica  $\Sigma''$ , el contorno aparente ortográfica  $k_2''$  y contorno aparente real  $k_2$ , para el centro de proyección o punto de vista ubicado en  $O_\infty'$ .



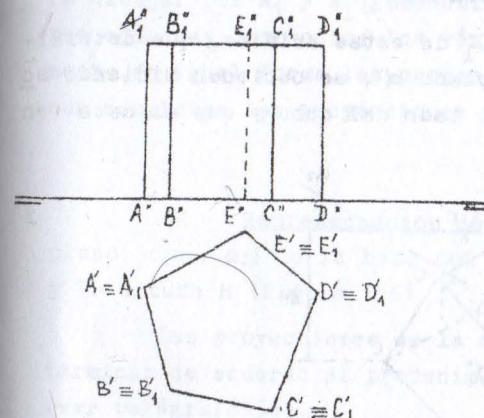
- figura 152 -

Si el cuerpo, como habitualmente sucede, es opaco, presentará en sus proyecciones partes visibles e invisibles.-

En la icnografía  $\Sigma'$  aparecerán como visibles -dibujar en trazo lleno- todo punto o línea del cuerpo que se encuentre por encima de la curva  $k_1$ , cuya ortografía es la recta  $k_1'$ , e invisibles -dibujar en trazo discontinuo- aquéllos que se hallen por debajo de dicha línea.-

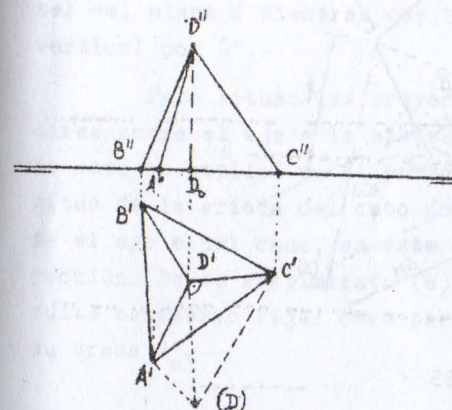
En cambio en la ortografía  $\Sigma''$ , serán visibles aquellos elementos de la superficie del cuerpo que se encuentren por delante de la curva  $k_2$ , cuya proyección icnográfica es la recta  $k_2'$ , e invisibles los que se hallen ubicados entre  $k_2$  y el plano  $\pi_2$  (parte posterior del cuerpo en relación al punto de vista  $O_\infty'$ ). En la figura 152, la proyección  $A'$  del punto A es invisible, en tanto que la  $A''$  es visible.-

61.- Representar un prisma recto de base pentagonal.- Supondremos el cuerpo apoyado en el plano icnográfico por su base ABCDE - (figura 153), la que tendrá en consecuencia su ortografía sobre la fundamental.-



- figura 153 -

no icnográfico, la que aparece por consiguiente (figura 154) según el triángulo equilátero  $A'B'C'$ . El cuarto vértice tendrá su proyección



- figura 154 -

Las aristas son verticales y limitamos al prisma con su cara superior  $A_1B_1C_1D_1E_1$ .

62.- Representar un tetraedro regular.- Se da como dato el valor del lado y su ponemos que una de sus caras apoye sobre el plano icnográfico, la que aparece por consiguiente (figura 154) según el triángulo equilátero  $A'B'C'$ . El cuarto vértice tendrá su proyección en  $D'$  y su ortografía en  $D''$ , siendo  $D_0D''$  la altura del cuerpo, que encontramos considerando el triángulo rectángulo  $CD'D$ , cuyo abatimiento es  $C'D'(D)$ . De este triángulo conocemos el cateto  $C'D'$  y la hipotenusa  $C'(D)$ , igual al lado del tetraedro, por lo que queda determinado el otro cateto  $D'(D)$  que es la altura buscada. Tomando  $D_0D'' = (D)D'$  se tiene el  $D''$  pudiéndose completar el cuerpo con sus aristas.-

63.- Representar un cubo apoyado en plano cualquiera.- Se dan como datos: el plano  $(\alpha_1, \alpha_2)$  de la cara ABCD del cubo, las proyecciones del vértice A ( $A'$ ,  $A''$ ), la dirección del lado AB del plano  $\alpha$  y la longitud l del lado del cubo (figura 155).-



Si siguiendo lo expuesto en el parágrafo 57 se ha representado la cara  $ABCD(A'B'C'D')$ ,  $A''B''C''D''$  del cubo. Las aristas normales a esta cara y que pasan por estos cuatro vértices lo son al plano  $\alpha'$ , por lo que resultan  $A'A_1'$ ,  $B'B_1'$ ,  $C'C_1'$  y  $D'D_1'$  perpendiculares a  $\alpha_1$  en tanto que  $A''A_1''$ ,  $B''B_1''$ ,  $C''C_1''$  y  $D''D_1''$  lo son a  $\alpha_2$ .

Los extremos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  y  $D_1$  de estas aristas, que determinan la cara  $A_1B_1C_1D_1$ , paralela al plano  $\alpha'$ , se obtienen midiendo sobre cualquiera de ellas el valor 1, lado del cubo y que es dato en el problema.

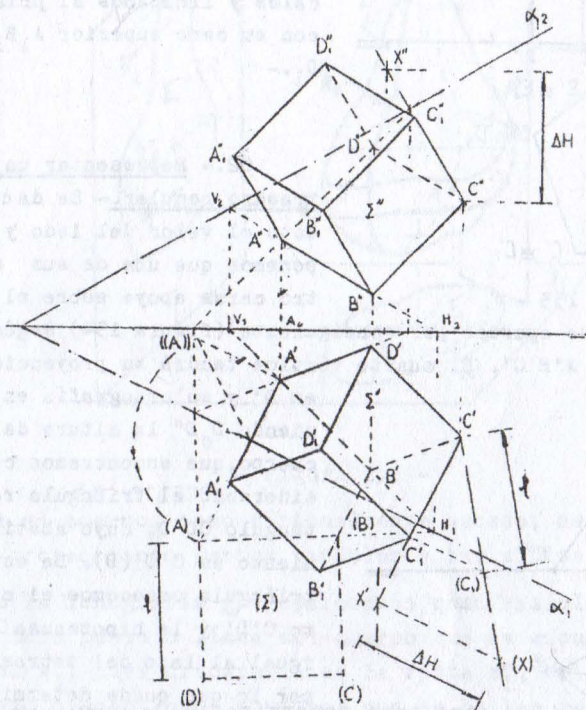


figura 155.

A este efecto, en la figura, se ha abatido sobre un plano paralelo al  $\pi_1$  la arista que pasa por C, abatiendo un punto X cualquiera de la misma, el que se ubica en (X), siendo el segmento  $X'(X)$  igual a la diferencia de alturas  $\Delta H$  entre X y el punto C que no se mueve en el abatimiento. Midiendo sobre la arista  $C'(X)$  la longitud 1, marcamos el  $(C_1)$  y deshaciendo el abatimiento resulta el extremo  $C'_1$  de la arista, y por consiguiente también la proyección ortográfica  $C''_1$ .

Conviene observar que esta construcción, que repetiremos en ejercicios similares, no es sino el problema inverso del resuelto en el parágrafo 41 (distancia entre dos puntos).

Para completar las proyecciones de la cara  $A_1B_1C_1D_1$ , bastará dibujar por  $A'_1$  y  $A''_1$ , respectivamente, rectas paralelas a las aristas opuestas lográndose los vértices  $B'_1$ ,  $B''_1$  y  $D'_1$ ,  $D''_1$ , y posteriormente, en igual forma, las proyecciones  $C'_1$ ,  $C''_1$  del restante vértice  $C_1$  que completan las proyecciones pedidas del cubo.

64.- Representación del cono recto. Se dan como datos el plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$  de la base del cono, su centro  $O(O', O'')$ , radio r y la altura H (figura 156).

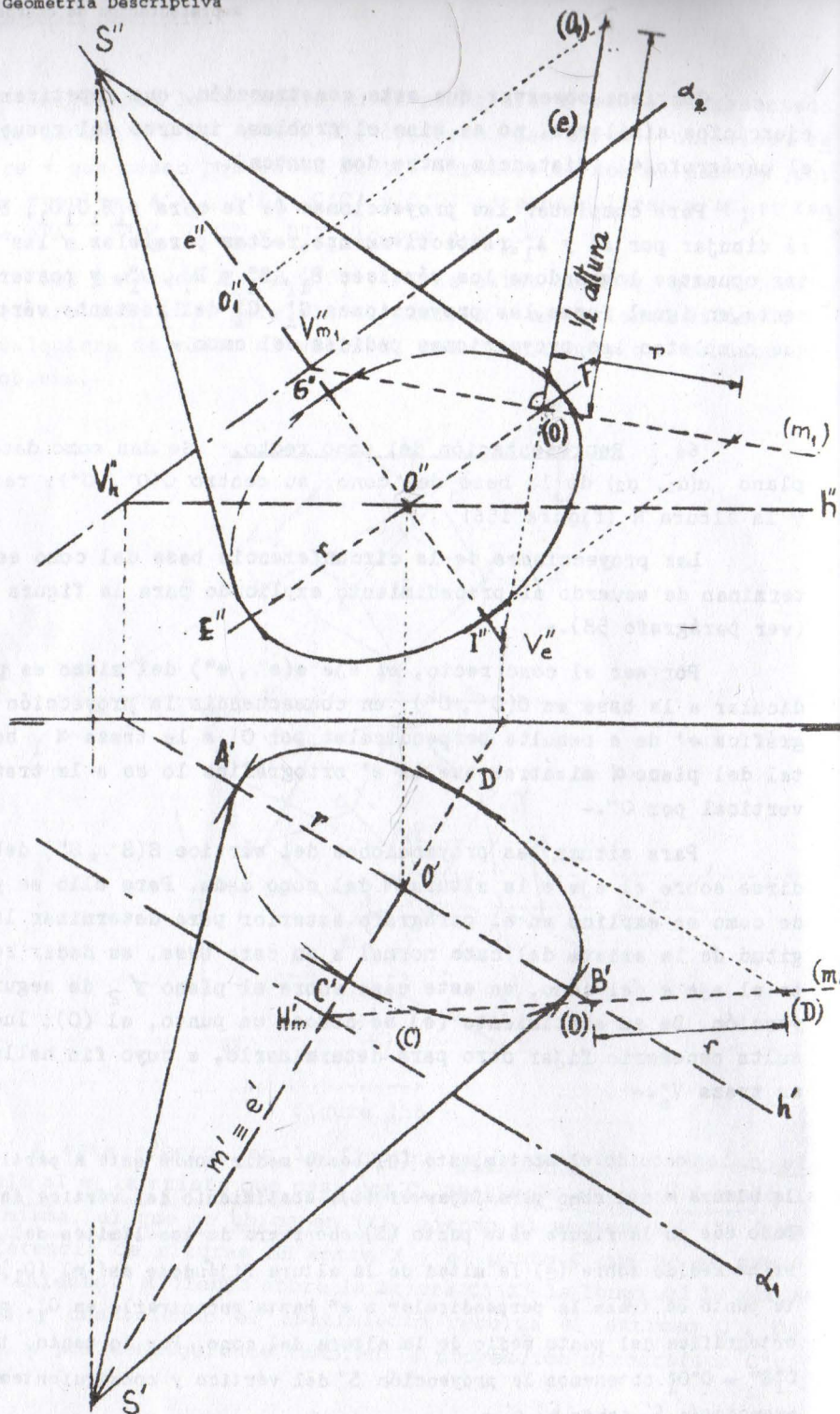
Las proyecciones de la circunferencia base del cono se determinan de acuerdo al procedimiento explicado para la figura 148 (ver parágrafo 58).

Por ser el cono recto, el eje  $e(e', e'')$  del mismo es perpendicular a la base en  $O(O', O'')$ ; en consecuencia la proyección icnográfica  $e'$  de e resulta perpendicular por  $O'$  a la traza  $\alpha_1$  horizontal del plano  $\alpha'$  mientras que la  $e''$  ortográfica lo es a la traza  $\alpha_2$  vertical por  $O''$ .

Para situar las proyecciones del vértice  $S(S', S'')$  debe medirse sobre el eje e la altura H del cono dada. Para ello se procede como se explicó en el parágrafo anterior para determinar la longitud de la arista del cubo normal a su cara base, es decir se abate el eje e del cono, en este caso sobre el plano  $\pi_2$  de segunda proyección. De su abatimiento (e) se conoce un punto, el (O); luego resulta necesario fijar otro para determinarlo, a cuyo fin hallemos su traza  $V''_e$ .

Conocido el abatimiento (e) basta medir sobre este a partir de (O) la altura H del cono para fijar el (S), abatimiento del vértice del cono. Dado que en la figura este punto (S) cae fuera de los límites del dibujo, se ha medido sobre (e) la mitad de la altura fijándose así el  $(O_1)$ . Por este punto se traza la perpendicular a  $e''$  hasta encontrarla en  $O''_1$ , proyección ortográfica del punto medio de la altura del cono. Por lo tanto, tomando  $O''_1S'' = O''O''_1$  obtenemos la proyección  $S''$  del vértice y consiguientemente la proyección  $S'$  sobre el  $e'$ .





- figura 156 -

Trazando por  $S'$  y  $S''$  del vértice  $S$  del cono las tangentes a las proyecciones homónimas -icnográfica y ortográfica, respectivamente- de su base, resultan los contornos aparentes del mismo.-

65.- Representación del cilindro recto.- Siendo el procedimiento constructivo idéntico al explicado en el párrafo anterior, para el caso del cono, representaremos ahora como ejercicio, las proyecciones de un cilindro recto del que se dan como datos: la proyección  $e(e', e'')$  de su eje, los centros  $O(O', O'')$  y  $O_1(O_1', O_1'')$  de sus bases y el radio  $r$  de las mismas (figura 157).-

La elipse proyección icnográfica de la circunferencia base de centro  $O$ , tiene como eje mayor la recta  $A'B'$  perpendicular a  $e'$ , siendo  $O'A' = O'B' = r$ . Su eje menor  $O'C'D'$  coincide con la proyección del eje del cilindro y su valor  $O'C' = O'D'$  se obtiene merced al abatimiento sobre el icnográfico  $\pi_1$ , del plano proyectante vertical que contiene a la recta de máxima pendiente del plano de la base y al eje del cilindro y cuya traza es  $\pi_1 \equiv e'$ . Por ser normales estas dos últimas rectas así aparecen en su abatimiento, por lo que llamada  $(e)$  es posible dibujar la  $(C)(D)$ . Los extremos  $(C)$  y  $(D)$  resultan de medir  $(O)(C) = (O)(D) = r$ . Volviendo el plano  $\gamma$  a su posición primitiva obtenemos las proyecciones  $C'$  y  $D'$ , por lo que la elipse de centro  $O'$  puede ya dibujarse en función de sus ejes.-

La otra base del cilindro de centro  $O_1$ , tiene por proyección icnográfica otra elipse de centro  $O_1'$  e idéntica a la centro  $O'$  pues ambas circunferencias están contenidas en planos paralelos.-

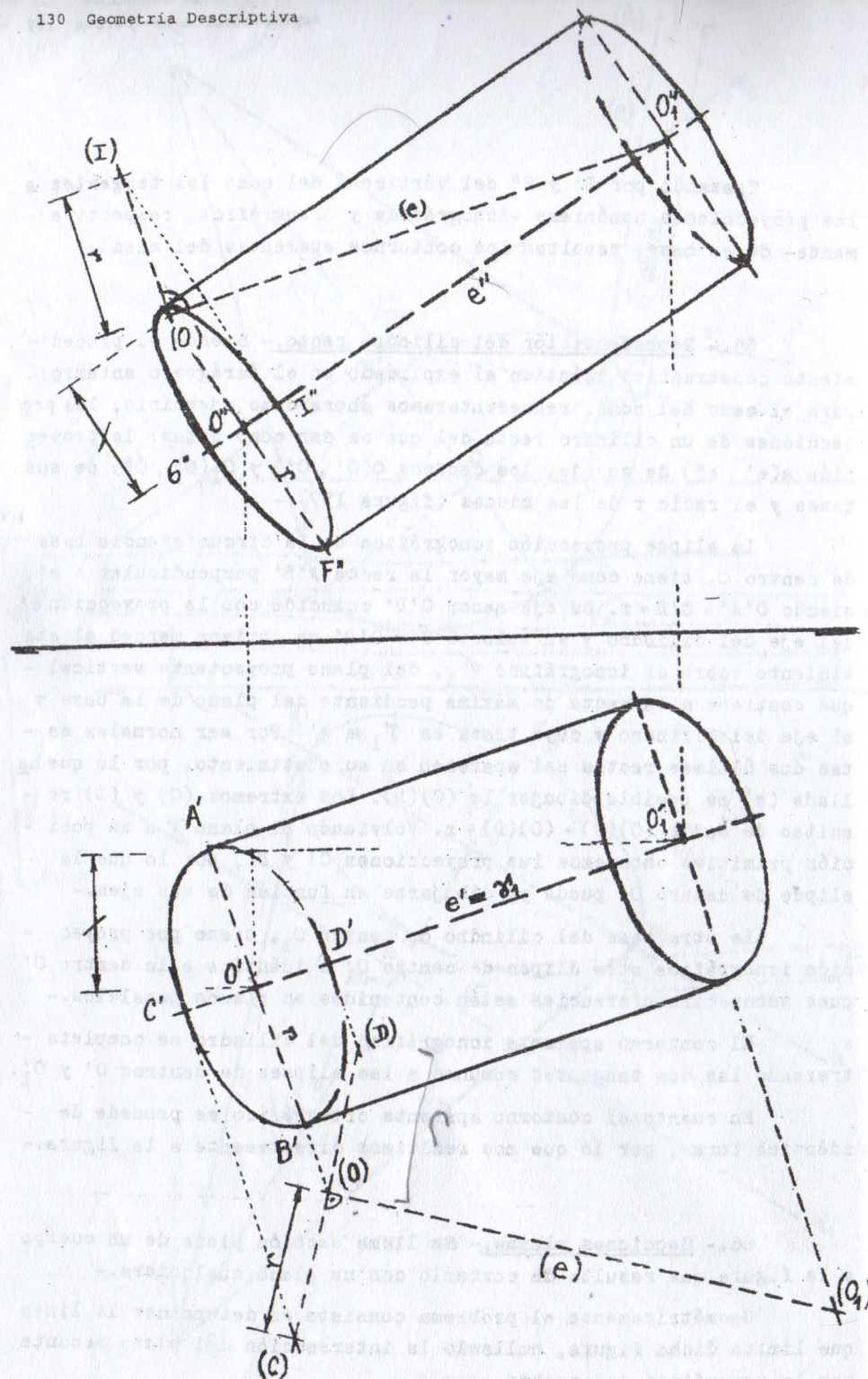
El contorno aparente icnográfico del cilindro se completa trazando las dos tangentes comunes a las elipses de centros  $O'$  y  $O_1'$ .

En cuanto al contorno aparente ortográfico se procede de idéntica forma, por lo que nos remitimos directamente a la figura.-

66.- Secciones planas.- Se llama sección plana de un cuerpo a la figura que resulta de cortarlo con un plano cualquiera.-

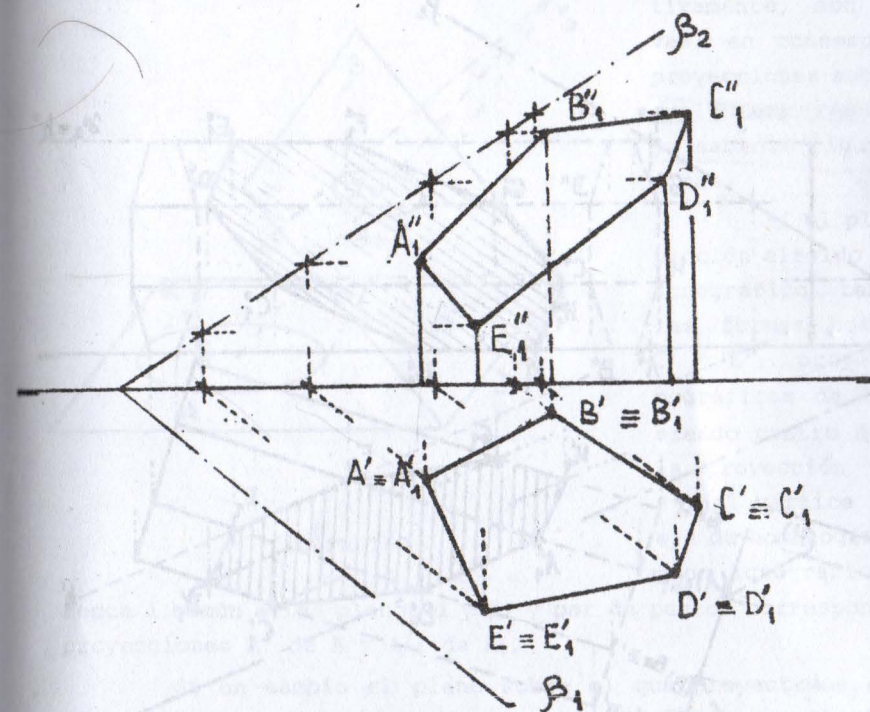
Geoméricamente el problema consiste en determinar la línea que limita dicha figura, hallando la intersección del plano secante con la superficie del cuerpo.-





En el caso de tratarse de un poliedro, la sección plana es un polígono cuyos lados y vértices son la intersección del plano secante con los planos de las caras y aristas del poliedro, respectivamente. En consecuencia su determinación se reduce en cada caso a hallar la intersección de planos entre sí, o bien a la de recta y plano.

Como ejercicio se ha resuelto en la figura 158 la sección plana de un prisma recto con un plano cualquiera.



- figura 158 -

La icnografía de la sección plana coincide con la proyección de la base, mientras que la ortografía en este caso se reduce a determinar la segunda proyección de puntos de un plano conociendo su primera proyección. En la figura se han trazado horizontales del plano concluyendo en el polígono A''B''C''D''E''F'', ortografía de la sección plana propuesta.

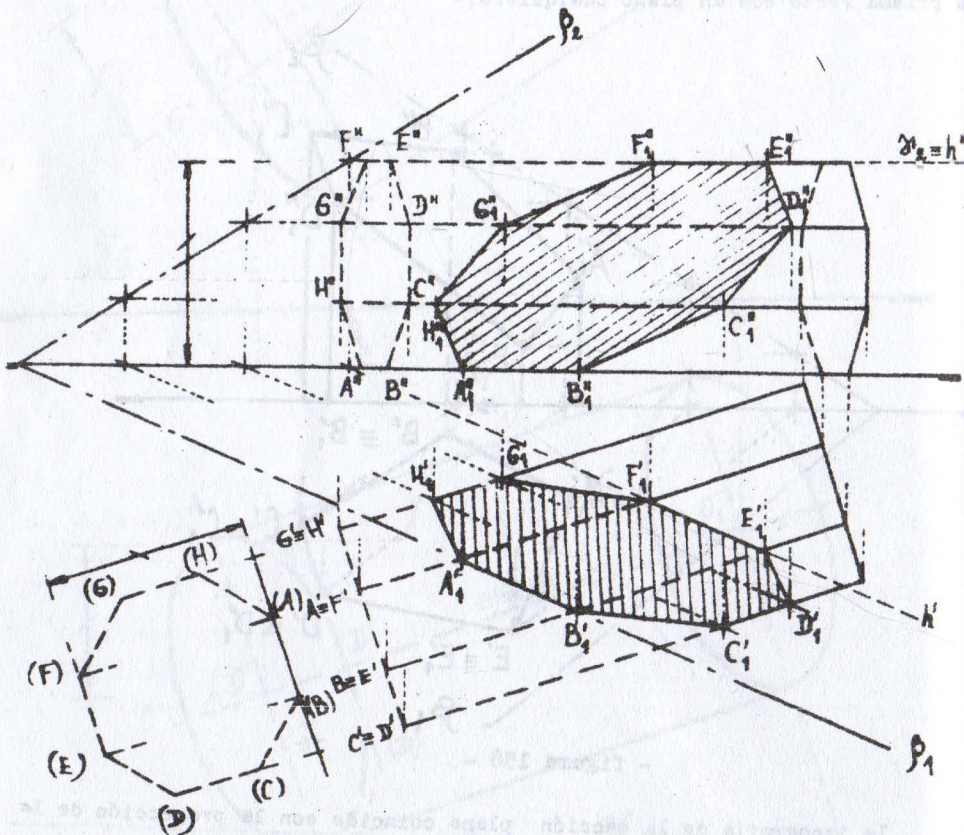
También como ejercicio, en la figura 159, se ha dibujado la sección con el plano  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) del prisma recto de base octogonal ABCDEFGH,



apoyado por una de sus caras laterales en el plano icnográfico.-

La intersección buscada se logra en este ejemplo utilizando planos horizontales tales como el  $\beta$  que contienen a las aristas del prisma y hallando su intersección con  $\beta$ .-

En la figura estos dos planos se cortan según la horizontal  $h(h', h'')$ . Los puntos comunes a  $h'$  y a las aristas que pasan por  $E'$  y  $F'$  dan puntos  $E_1'$  y  $F_1'$  de la sección plana cuyas ortografías son respectivamente  $E_1''$  y  $F_1''$ .-

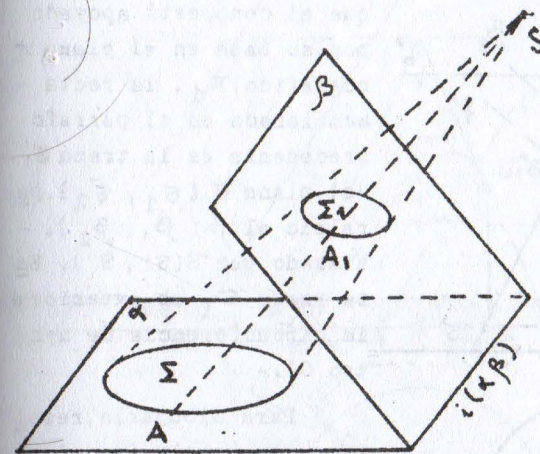


- figura 159 -

No obstante la sencillez de estas construcciones, las secciones planas de las pirámides y prismas pueden hallarse aplicando la resolución de una homología o afinidad, tal como pasamos a estudiar ahora para la sección plana de los conos y cilindros que son su generalización como superficies geométricas.-

La sección plana de una superficie cónica puede determinarse hallando la intersección de cada generatriz del cono con el plano secante  $\beta$ , procediendo como en las figuras 134 y 147, es decir resolviendo el problema elemental de recta y plano (ver parágrafo 28), o bien mediante una homología, tal como se explicara en los párrafos 53 y 55.

En efecto: de la figura 160 se deduce que las formas  $\Sigma$  y  $\Sigma_1$  directriz conocida y sección plana del cono respectivamente, son perspectivas; en consecuencia, sus proyecciones sobre un plano cualquiera resultan, como ya sabemos figuras homológicas.



- figura 160 -

Si el plano de proyección elegido es el plano icnográfico, tendremos que las formas homólogas son  $\Sigma'$  y  $\Sigma'_1$ , proyecciones icnográficas de las  $\Sigma$  y  $\Sigma_1$ , siendo centro de homología la proyección icnográfica  $S'$  del vértice  $S$  del cono, eje de homología la proyección icnográfica  $i'$  de la recta  $i$  común a los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , y par de puntos correspondientes las proyecciones  $A'$  de  $A$  y  $A'_1$  de  $A_1$ .

Si en cambio el plano sobre el que proyectamos es el plano ortográfico las figuras homólogas serán las  $\Sigma''$  y  $\Sigma''_1$ , pudiéndose deducir por analogía en el párrafo anterior los elementos que la definen.

Como ejercicio y a continuación se determinan las secciones planas de un cono de vértice  $S$  y apoyado por su base en el plano icnográfico. Ya se ha dicho en el parágrafo 55 que las mismas pueden ser elipse, parábola o hipérbola, según sea el plano  $\beta$  secante, respectivamente paralelo a ninguna generatriz, paralelo a una generatriz (paralelo a un plano  $\tau$  tangente), o paralelo a dos generatrices del cono.



Sección con el plano  $\beta$  ( $\beta_1, \beta_2$ ) se desea determinar.-

del cono.-

ERO 01.-

- figura 161 - se hace con el plano auxi

El movimiento es proyección  $\alpha_1$  basada.-

11-11-1961

recto dado.- B<sub>2</sub>

pectivamente.-

va sección con el plano  $\beta(\beta_1, \beta_2)$  se desea determinar.-

ya seccion con el plano  $\rho(\rho_1, \rho_2)$  se desea determinar.-

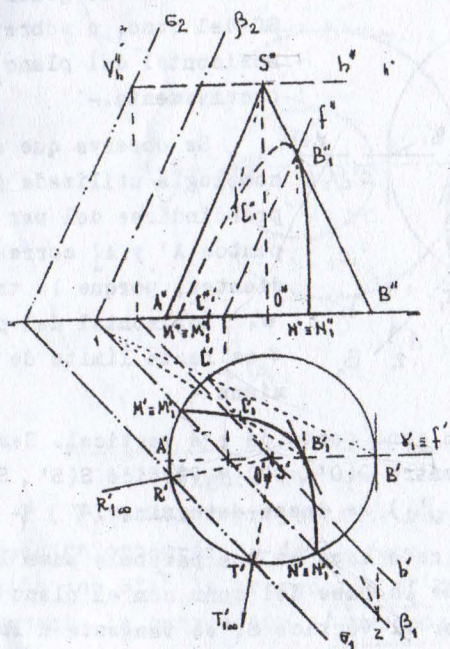


Ello significa que el plano  $\mathcal{G}$ , por ser tangente al cono, contiene a una sola generatriz del mismo, la de contacto  $ST$ ; por consiguiente el plano  $\beta$  que le es paralelo corta a todas las generatrices del cono menos a una, la  $ST$ , determinando una curva con un punto impropio.-

La traza  $\mathcal{G}_1$  horizontal del plano  $\mathcal{G}$ , es tangente en  $T'$  a la circunferencia base del cono y paralela a la homónima  $\beta_1$  del plano  $\beta$  secante, mientras que la  $\mathcal{G}_2$  vertical, lo es a la homónima  $\beta_2$  y pasa por  $V_h''$ .-

La sección parabólica del cono se traza resolviendo la homología definida por el centro  $S'$ , eje  $\beta_1$  y puntos correspondientes  $B'$  y  $B_1'$ , obtenido  $B_1(B_1', B_1'')$  mediante un procedimiento análogo al indicado para la figura 161, y pasa por  $M_1(M_1', M_1'')$  y  $N_1(N_1', N_1'')$  puntos en donde la circunferencia base del cono corta al eje  $\beta_1$  de homología. La traza  $\mathcal{G}_1$  es la recta límite en esta homología.-

El trazado de las proyecciones -icnográfica y ortográfica- de la sección parabólica del cono se completa como en el ejercicio anterior (ver figura 161).-



- figura 163 -

Conviene observar en este problema que, dado el plano  $\beta$  cualquiera, solamente por casualidad resulta  $\mathcal{G}_1$  tangente a la circunferencia al dibujar por  $S$  el  $\mathcal{G}$  paralelo al  $\beta$ . En consecuencia para obtener una sección parabólica del cono se procede a la inversa, es decir se traza primeramente el plano  $\mathcal{G}$  tangente al cono y se dibuja luego el  $\beta$  que le es paralelo.-

Sección hiperbólica de un cono recto de eje vertical. - Sea (figura 163) el cono de base con centro  $O(O', O'')$  y vértice  $S(S', S'')$ , cuya sección con el plano  $\beta(\beta_1, \beta_2)$  se desea determinar.-

La cónica resultante es una hipérbola pues la recta  $\mathcal{G}_1$ , intersección del plano de la base del cono con el plano  $\mathcal{G}$  paralelo al de sección  $\beta$  y trazado por el vértice  $S$ , es secante a la circunferencia base.-

Ello significa que el plano  $\mathcal{G}$  secciona al cono según las generatrices  $SR$  y  $ST$ ; por lo tanto el  $\beta$  que le es paralelo corta a todas las generatrices del cono salvo estas dos últimas, determinando una curva con dos puntos impropios.-

La traza  $\mathcal{G}_1$  horizontal del plano  $\mathcal{G}$  es interior a la circunferencia base del cono y paralela a la homónima  $\beta_1$  del plano  $\beta$  secante, mientras que la  $\mathcal{G}_2$  vertical, lo es a la homónima  $\beta_2$  de  $\beta$  y pasa por  $V_h''$ .-

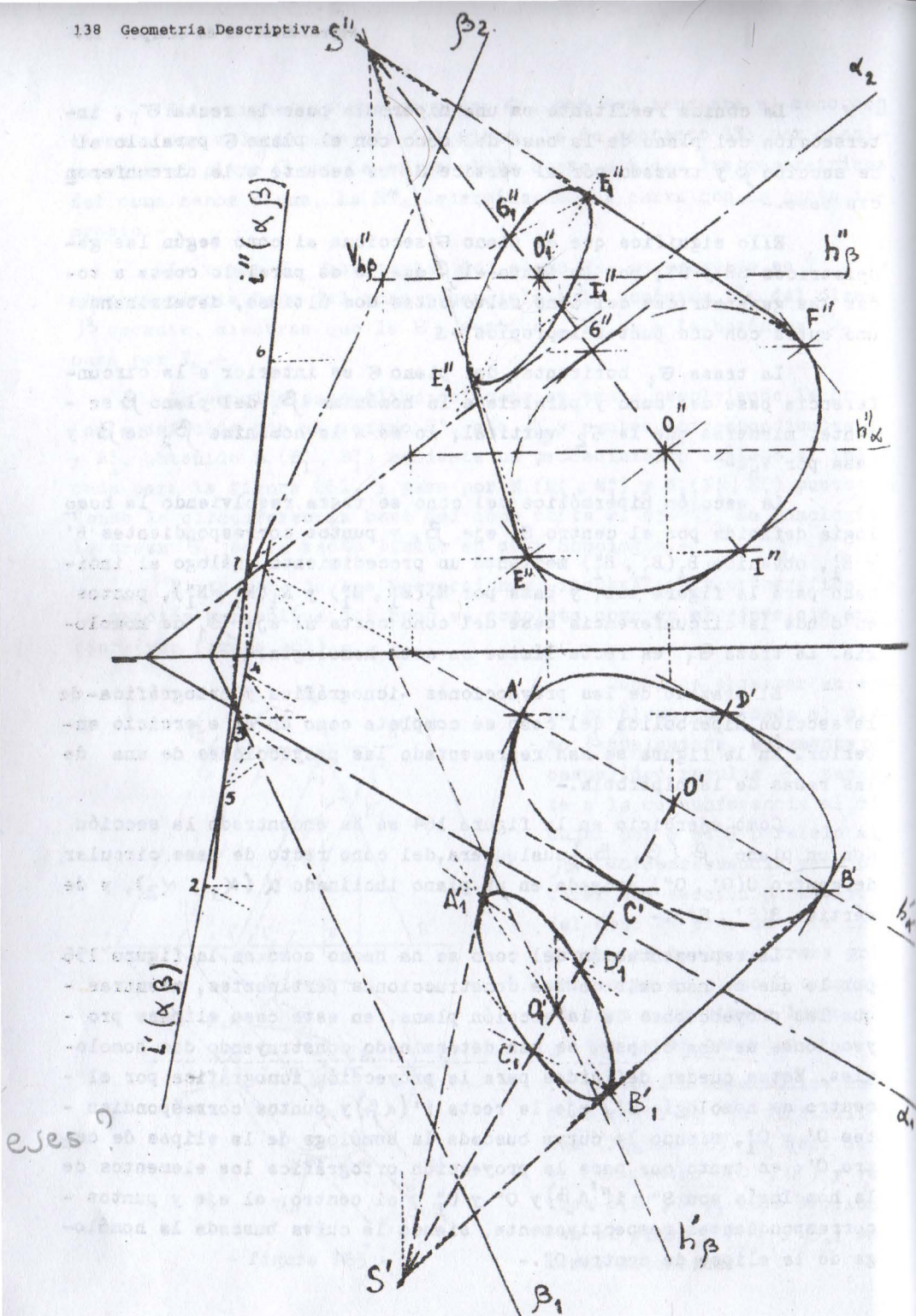
La sección hiperbólica del cono se traza resolviendo la homología definida por el centro  $S$ , eje  $\beta_1$  y puntos correspondientes  $B'$  y  $B_1'$ , obtenido  $B_1(B_1', B_1'')$  mediante un procedimiento análogo al indicado para la figura 161, y pasa por  $M_1(M_1', M_1'')$  y  $N_1(N_1', N_1'')$ , puntos en donde la circunferencia base del cono corta al eje  $\beta_1$  de homología. La traza  $\mathcal{G}_1$  es recta límite en esta homología.-

El trazado de las proyecciones -icnográfica y ortográfica- de la sección hiperbólica del cono se completa como en el ejercicio anterior. En la figura se han representado las proyecciones de una de las ramas de la hipérbola.-

Como ejercicio en la figura 164 se ha encontrado la sección con un plano  $\beta(\beta_1, \beta_2)$  cualquiera, del cono recto de base circular de centro  $O(O', O'')$ , apoyada en un plano inclinado  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ , y de vértice  $S(S', S'')$ .-

La representación del cono se ha hecho como en la figura 156 por lo que se han omitido las construcciones pertinentes, mientras que las proyecciones de la sección plana, en este caso elipses proyecciones de una elipse, se han determinado construyendo dos homologías. Estas quedan definidas para la proyección icnográfica por el centro de homología  $S'$ , eje la recta  $i'(\alpha\beta)$  y puntos correspondientes  $O'$  y  $O_1'$ , siendo la curva buscada la homóloga de la elipse de centro  $O'$ ; en tanto que para la proyección ortográfica los elementos de la homología son  $S''$ ,  $i''(\alpha\beta)$  y  $O''$  y  $O_1''$ , el centro, el eje y puntos correspondientes respectivamente, siendo la curva buscada la homóloga de la elipse de centro  $O''$ .-

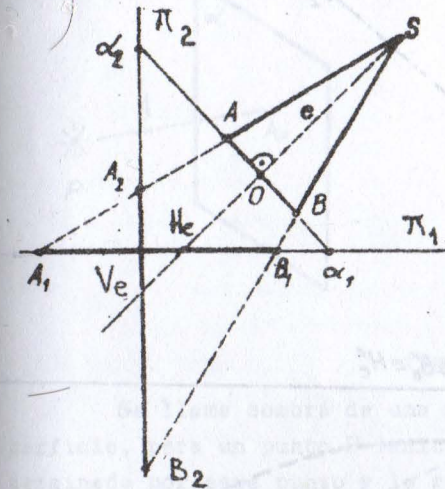




- figura 164 -

El punto  $O_1(O_1', O_1'')$  se encuentra ya sea buscando la intersección del eje del cono con el plano sección  $\beta$  (intersección de recta y plano), o bien como se ha hecho en este ejemplo, dibujando este plano  $\beta$  pasando por el punto  $O_1$  que se ha prefijado sobre dicho eje.-

Cuando el plano secante a un cuerpo es alguno de los de proyección la sección plana obtenida se llama traza del cuerpo, o bien traza de la superficie.-



- figura 165 -

Sea (figura 165) el cono recto de vértice S apoyado en el plano  $\alpha$  paralelo a la fundamental, en vista de perfil.-

La intersección de las generatrices  $Sa, Sb, \dots$ , del cono con el plano  $\pi_1$  de primera o  $\pi_2$  de segunda proyección, resultan ser cónicas y, respectivamente, trazas icnográfica y ortográfica de la referida superficie.-

Las trazas (cónicas) icnográfica y ortográfica de la superficie dada son figuras perspectivas con respecto a la circunferencia base del cuerpo cónico y su trazado en proyección se limita a la resolución de una homología.-

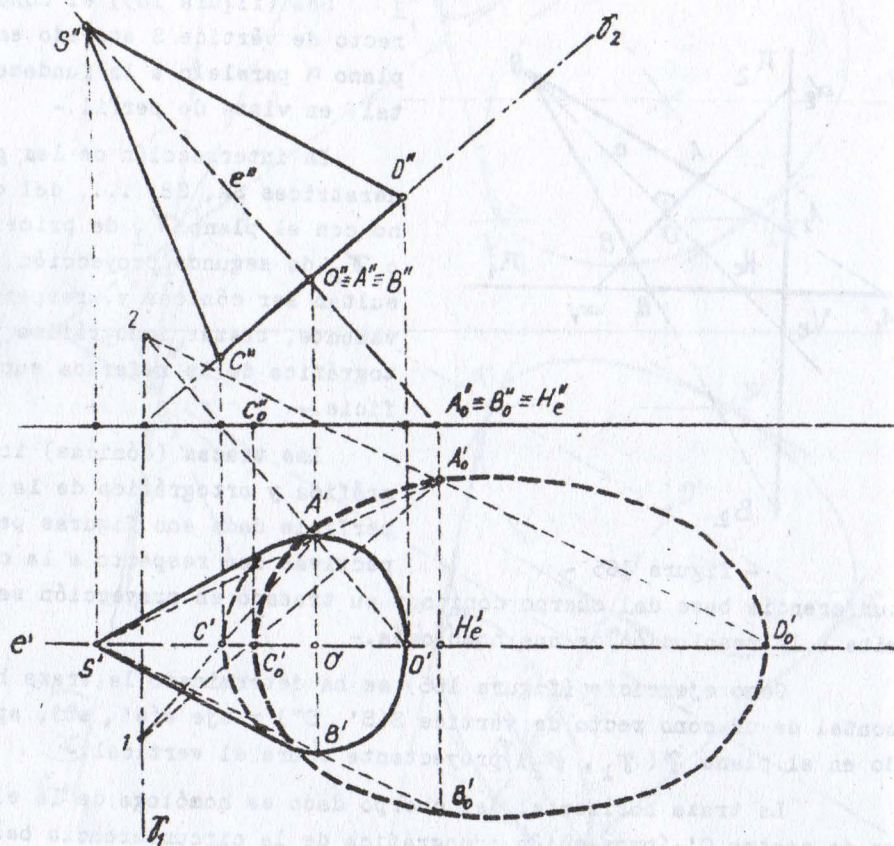
Como ejercicio (figura 166) se ha determinado la traza horizontal de un cono recto de vértice  $S(S', S'')$  y eje  $e(e', e'')$ , apoyado en el plano  $\pi(\pi_1, \pi_2)$  proyectante sobre el vertical.-

La traza horizontal del cuerpo dado es homóloga de la elipse de centro  $O'$  (proyección icnográfica de la circunferencia base del cono), siendo centro de homología el punto  $S'$  (proyección del vértice S), eje de homología la traza  $\pi_1$  horizontal del plano  $\pi$  (intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi_1$  de las dos formas), y puntos correspondientes  $O'$  y  $H_e'$ , éste traza horizontal del eje e del cono.-

Con estos elementos se ha determinado la traza horizontal del cono, habiéndose determinado el punto  $A_0$  -por ejemplo- como in-



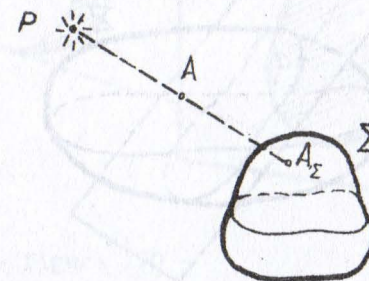
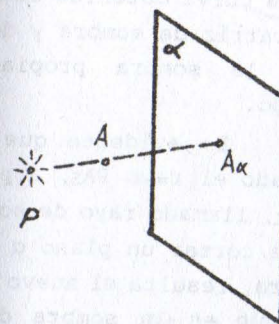
tersección de  $S'A'$  y la paralela trazada por  $H'_e$  a  $O'A'$ , ya que siendo por construcción  $A'O'$  paralela al eje  $\gamma_1$  de homología, su correspondiente  $H'_eA'_o$  concurre en el mismo punto (en este caso el impropio de  $\gamma_1$ ) la determinación de los demás puntos de la curva se deduce siguiendo la misma figura.



- figura 166 -

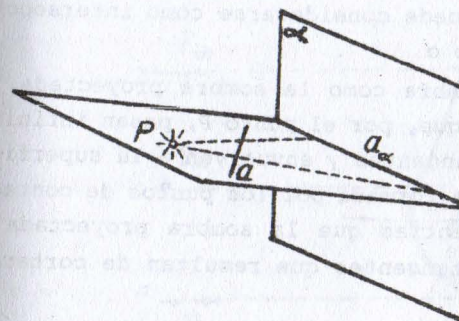
Todo lo dicho precedentemente para secciones planas y trazas de conos se puede generalizar para las superficies cilíndricas y para las pirámides y prismas.

67.- Principios de sombras.- Supuesta la propagación rectilínea para los rayos que emanan de una fuente luminosa, materializada en un punto P, propio o impropio (figura 167), se llama sombreado un punto A sobre un plano o sobre una superficie cualquiera, a la intersección del rayo PA de luz, formado por el foco luminoso y el punto dado, con ese plano o esa superficie, según corresponda.-



- figura 167 -

Se llama sombra de una recta sobre un plano, o sobre una superficie, para un punto P luminoso, a la intersección del plano, determinado por este punto y la recta dada, con el plano o la superficie, respectivamente.-



- figura 168 -

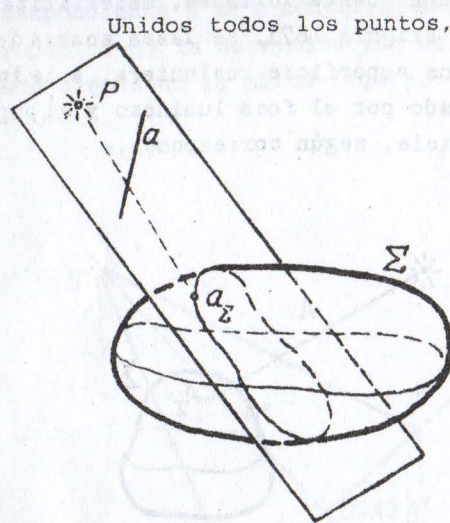
En la figura 168 se aprecia la sombra de una recta  $a$  sobre un plano  $\alpha$  que es  $a_\alpha$ ; en cambio, en la figura 169 resulta sobre una superficie.-

63.- Sombra propia y proyectada.- Sea (figura 170) una superficie  $\Sigma$  iluminada por una fuente luminosa P.-

De todos los rayos de luz que emergen de la fuente P luminosa e inciden sobre la superficie, considérense aquellos que le son tangentes a la misma (superficie  $\Sigma$ ).-



Como es fácil observar, se genera una superficie cónica, de vértice  $P$ , que a su vez envuelve a la superficie  $\Sigma$  dada.

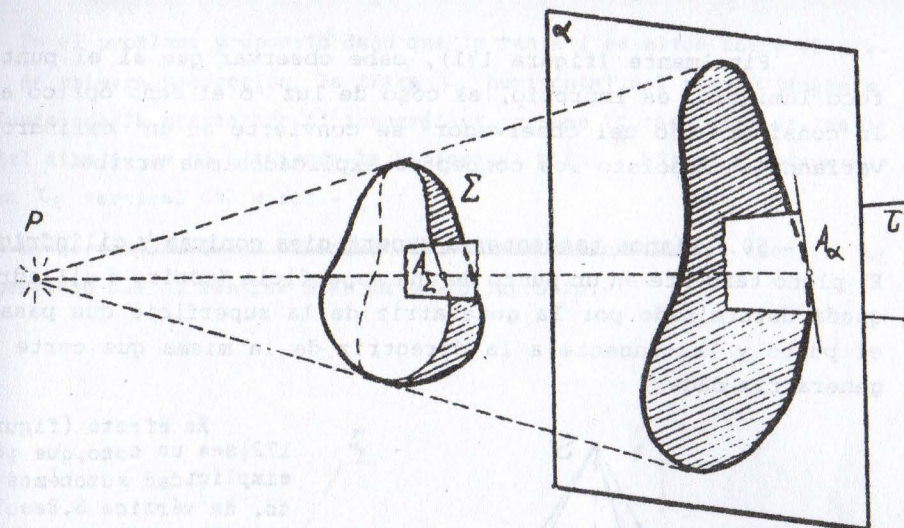


- figura 169 -

Es evidente que prolongado el rayo  $PA_{\Sigma}$ , a partir de  $A_{\Sigma}$ , llamado rayo de sombra, hasta cortar un plano  $\alpha$  cualquiera, resulta el nuevo punto  $A_{\alpha}$ , que es la sombra del  $A_{\Sigma}$  sobre dicho plano  $\alpha$ .

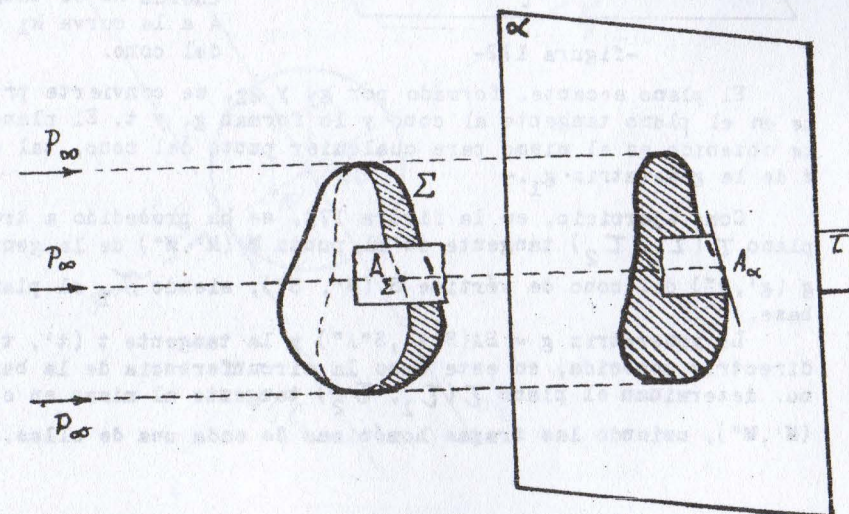
El área limitada por la curva común a todos los puntos, tales como el  $A_{\Sigma}$ , constituye la sombra proyectada por el cuerpo  $\Sigma$  sobre al plano  $\alpha$ . Específicamente la curva que resulta de unir puntos tales como el  $A_{\alpha}$ , es la sombra sobre  $\alpha$  de la separatriz de sombra de la superficie  $\Sigma$  antes definida, la que también puede considerarse como intersección del cono de vértice  $P$  con el plano  $\alpha$ .

Tanto la separatriz de sombra como la sombra proyectada, se obtienen geoméricamente pensando que, por el punto  $P$ , pasan infinitos planos -tales como el  $\tau$ - que son tangentes y envuelven a la superficie  $\Sigma$ . La separatriz de sombra resulta formada por los puntos de contacto  $A_{\Sigma}$  de los planos  $\tau$  tangentes, mientras que la sombra proyectada la determina la curva envolvente de tangentes que resultan de cortar al plano  $\alpha$  con dichos planos  $\tau$ .



- figura 170 -

De lo dicho se infiere la identidad de la separatriz de sombra y el contorno aparente de un cuerpo y, por lo tanto, la determinación de cualquiera de ellos se resuelve mediante el trazado del lugar geométrico de los puntos de contactos de los planos  $\tau$  tangentes a la superficie  $\Sigma$  que pasan por el punto  $P$ .



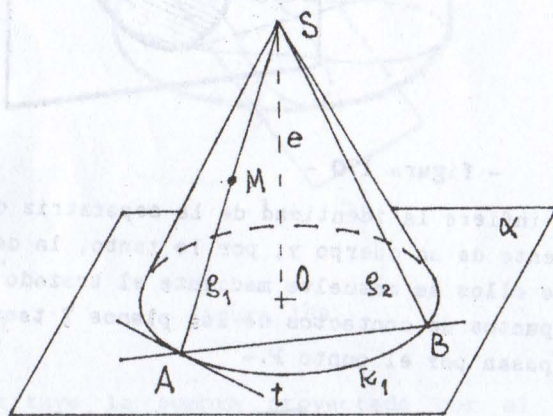
- figura 171 -



Finalmente (figura 171), cabe observar que si el punto P, foco luminoso, es impropio, el cono de luz o el cono óptico si se lo considera ojo del observador se convierte en un cilindro, no variando en absoluto los conceptos explicados más arriba.

#### 60.- Planos tangentes a superficies cónicas y cilíndricas.-

El plano tangente en un punto de una superficie (cónica o cilíndrica) queda determinado por la generatriz de la superficie que pasa por el punto y la tangente a la directriz de la misma que corte a la generatriz dada.



-figura 172-

En efecto (figura 172) sea un cono, que por simplicidad supongamos recto, de vértice S. Resultan las generatrices  $g_1$  y  $g_2$ , y la cuerda AB, siendo  $k_1$  la curva directriz conocida del cono dado.

Si imaginamos que la generatriz  $g_2$  se acerca indefinidamente a la  $g_1$ , hasta confundirse con ella, el punto B hace lo propio con fundiéndose con el A, y la cuerda AB es tangente  $t$  en A a la curva  $k_1$  directriz del cono.

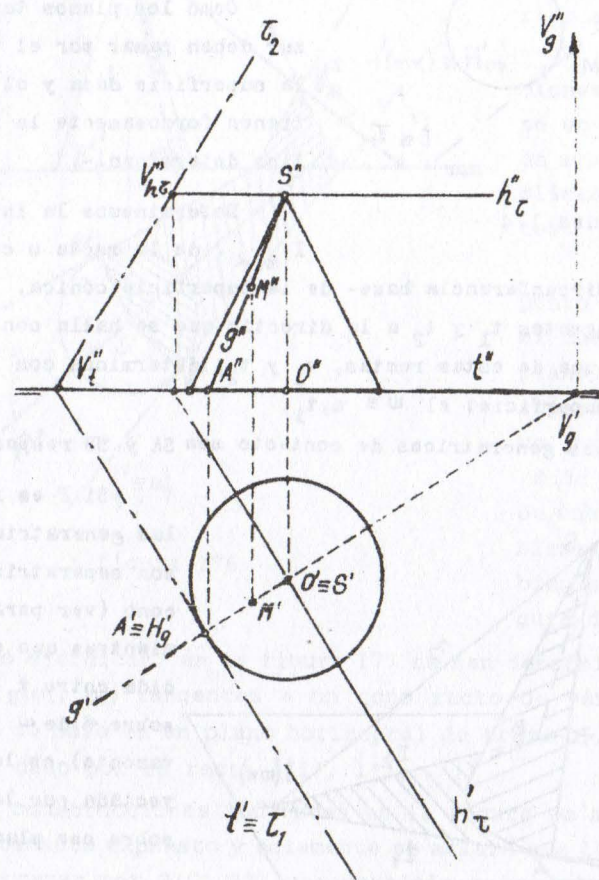
El plano secante, formado por  $g_1$  y  $g_2$ , se convierte precisamente en el plano tangente al cono y lo forman  $g_1$  y  $t$ . El plano tangente obtenido es el mismo para cualquier punto del cono, tal como el M de la generatriz  $g_1$ .

Como ejercicio, en la figura 173, se ha procedido a trazar el plano  $\tau$  ( $\tau_1, \tau_2$ ) tangente en el punto M ( $M', M''$ ) de la generatriz  $g$  ( $g', g''$ ) del cono de vértice S ( $S', S''$ ), siendo  $\pi_1$  el plano de la base.

La generatriz  $g = SA(S'A', S''A'')$  y la tangente  $t$  ( $t', t''$ ) a la directriz conocida, en este caso la circunferencia de la base del cono, determinan el plano  $\tau$  ( $\tau_1, \tau_2$ ) tangente al mismo en el punto M ( $M', M''$ ), uniendo las trazas homónimas de cada una de ellas.

En el problema propuesto dado que la recta  $t$  se sitúa sobre el plano  $\pi_1$  de primera proyección, la traza  $\tau_1$  horizontal del plano  $\tau$  tangente se confunde con la proyección  $t'$  icnográfica, y como  $V_g''$  cae fuera de los límites del dibujo, se ha utilizado la horizontal  $h''$  ( $h', h''$ ) para determinar la traza  $\tau_2$  vertical del mismo.

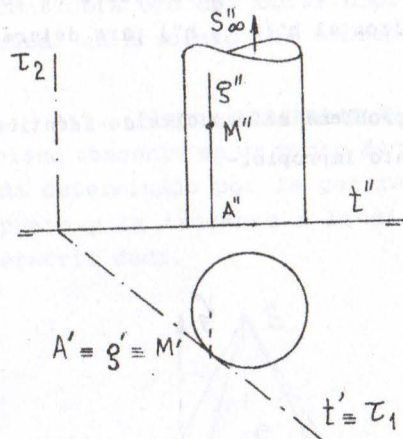
Si se tratara de un cilindro el problema se resuelve de idéntica manera, pensando que el vértice S es un punto impropio.



- figura 173 -



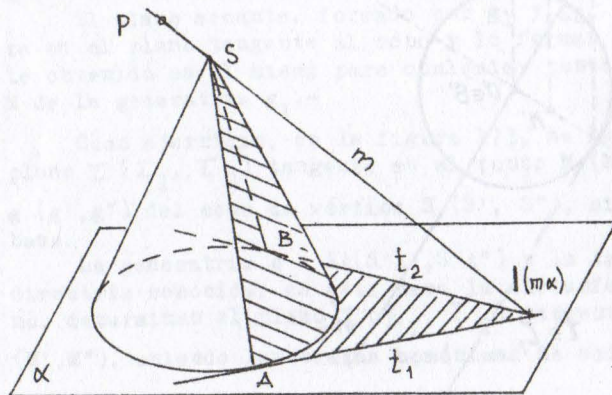
En la figura 174, se ha procedido a trazar el plano  $\tau(\tau_1, \tau_2)$  tangente a un cilindro recto, siendo  $\pi_1$  el plano de la base, obteniéndose como tal (plano  $\tau$  tangente) uno proyectante vertical.-



- figura 174 -

la directriz (circunferencia base) de la superficie cónica, tracemos por  $I(m, \alpha)$  las tangentes  $t_1$  y  $t_2$  a la directriz que se halla contenida en el plano  $\alpha$ . Cada una de estas rectas,  $t_1$  y  $t_2$ , determinan con la  $m$  un plano tangente a la superficie: el  $\omega \equiv m, t_1$ ,

y el  $\varphi \equiv m, t_2$ , cuyas generatrices de contacto son SA y SB respectivamente.-



- figura 175 -

70.- Planos tangentes a las superficies cónicas desde un punto exterior.- Dado un cono de vértice S (figura 175) se trata de hallar entre los infinitos planos, que siendo tangentes a la superficie, pasan por un punto P exterior a la misma.-

Como los planos tangentes a trazar deben pasar por el vértice S de la superficie dada y el punto P, contienen forzosamente la recta  $m$  que ellos determinan.-

Determinemos la intersección

$I(m, \alpha)$  de la recta  $m$  con el plano de

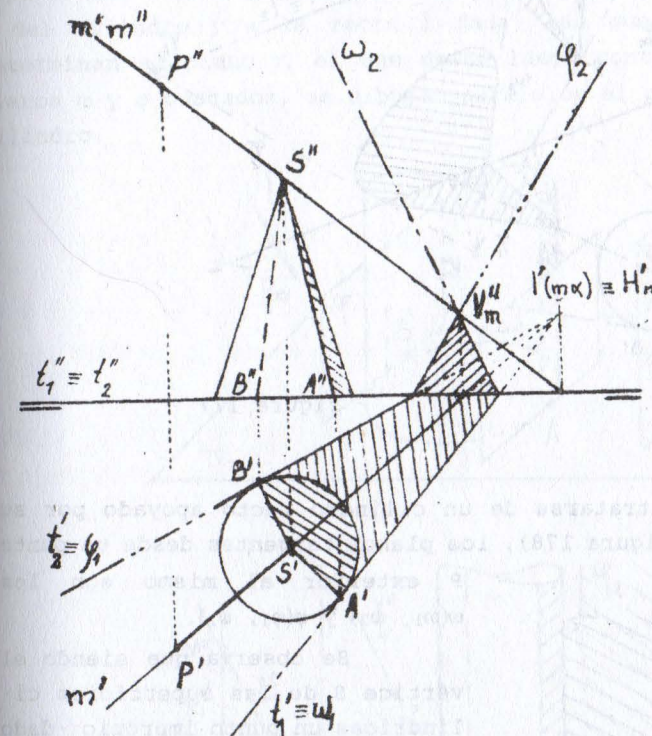
Si P es foco luminoso las generatrices SA y SB son separatriz de sombra del cono (ver parágrafo 68), mientras que el área comprendida entre  $t_1$  y  $t_2$  (trazas sobre  $\alpha$  de  $\omega$  y  $\varphi$ , respectivamente)-es la sombra proyectada por la superficie sobre ese plano.-

En cambio si P es punto de vista, las generatrices SA y SB son el contorno aparente del cono para un observador ubicado en dicho punto P. En

la figura 176 se han determinado los planos  $\omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$  tangentes al cono recto de vértice S(S', S''), apoyado en el plano  $\pi_1$  de primera proyección, desde un punto P(P', P'') exterior al mismo.

Las construcciones pueden seguirse en la misma figura de acuerdo con las explicaciones precedentes.

Cuando el punto exterior desde el cual se trazan los planos tangentes a una superficie cónica es un punto impropio  $P_\infty$  dado por la dirección de una recta-, el problema se resuelve también siguiendo la figura de análisis 175.

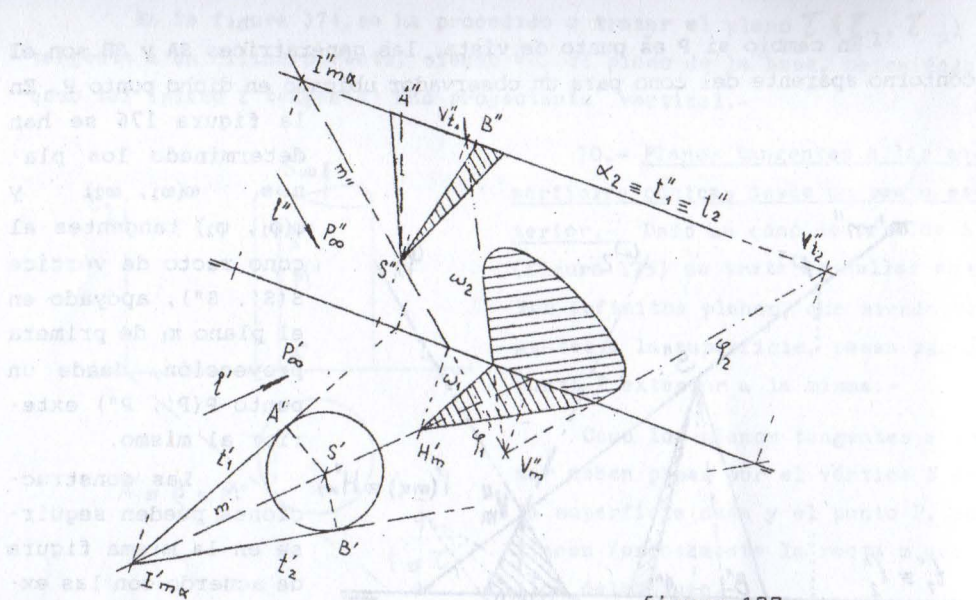


- figura 176 -

Como ejercicio, en la figura 177 se han determinado los planos  $\omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$  tangentes a un cono recto de vértice S(S', S'') apoyado por su base en un plano horizontal de traza  $\alpha_2$ , desde un punto impropio  $P_\infty$  dado por la recta  $l(1', 1'')$ .

Las construcciones indicadas en la figura se siguen en base a lo precedentemente expuesto y solamente se aclara que la recta  $m(m', m'')$  resulta de trazar por S(S', S'') una paralela a la dada  $l(1', 1'')$  y que la curva que limita la sombra proyectada por el cono sobre el plano ortográfico es una elipse, proyección de la circunferencia base sobre ese plano.





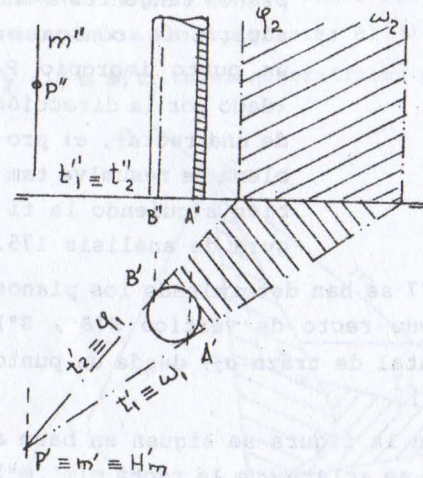
- figura 177 -

En el caso de tratarse de un cilindro recto apoyado por su plano  $\pi_1$  icnográfico (figura 178), los planos tangentes desde un punto

P exterior al mismo son los  $\omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ .

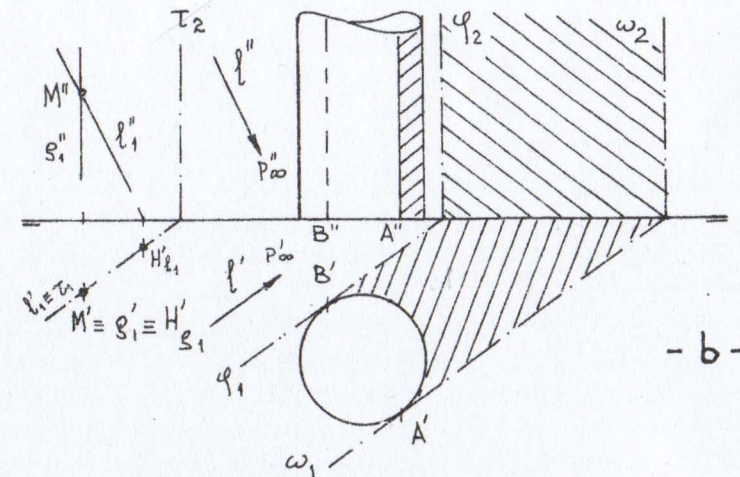
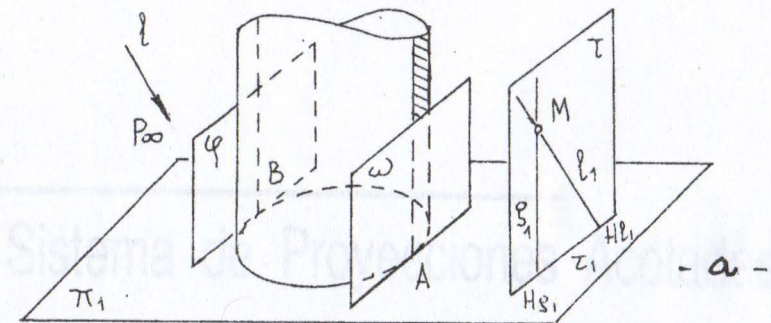
Se observa que siendo el vértice S de las superficies cilíndricas un punto impropio -dado por la dirección de sus generatrices-, la recta  $m(m', m'')$  que los une con el punto P resulta vertical; por lo tanto los planos tangentes  $\omega$  y  $\varphi$  hallados, son proyectantes verticales.

Para hallar los planos tangentes  $\omega$  y  $\varphi$  (figura 179) a una superficie cilíndrica desde un punto impropio  $P_\infty$ , basta recordar



- figura 178 -

que los mismos deben contener a este punto  $P_\infty$  y al vértice del cilindro, por lo que siendo ambos puntos impropios, la recta  $m$  que determinan también es impropia; por consiguiente los planos  $\omega$  y  $\varphi$  resultan paralelos. Para trazarlos basta dibujar por un punto M cualquiera del espacio las rectas  $g_1$  y  $l_1$ , respectivamente paralelas a una generatriz  $g$  del cilindro y a la recta  $l$  dada, las que siendo concurrentes determinan el plano  $\tau$ , el que desde luego contiene a  $S_\infty$  y  $P_\infty$ . Los planos  $\omega$  y  $\varphi$  buscados, se dibujan paralelos al plano  $\tau$  y tangentes al cilindro.

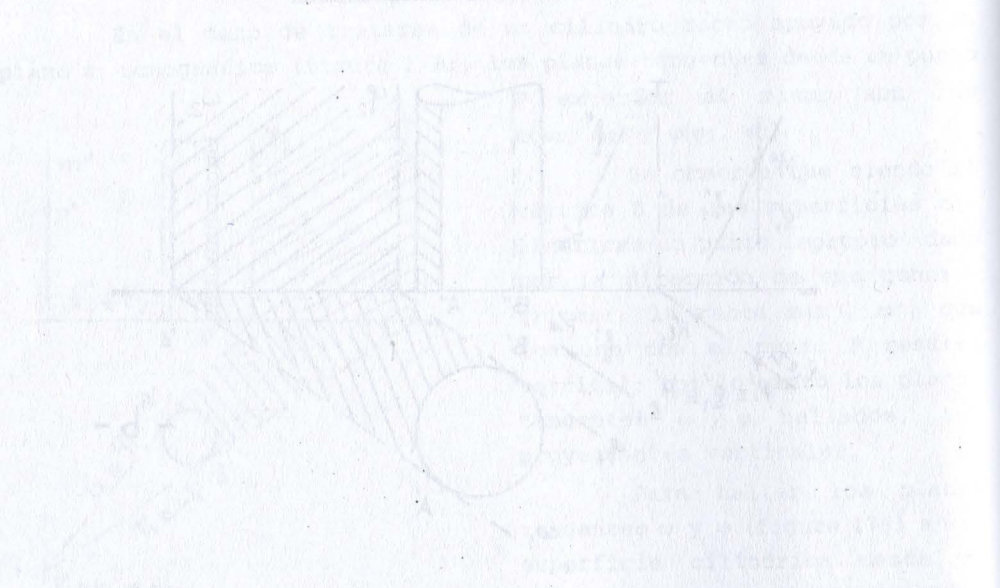
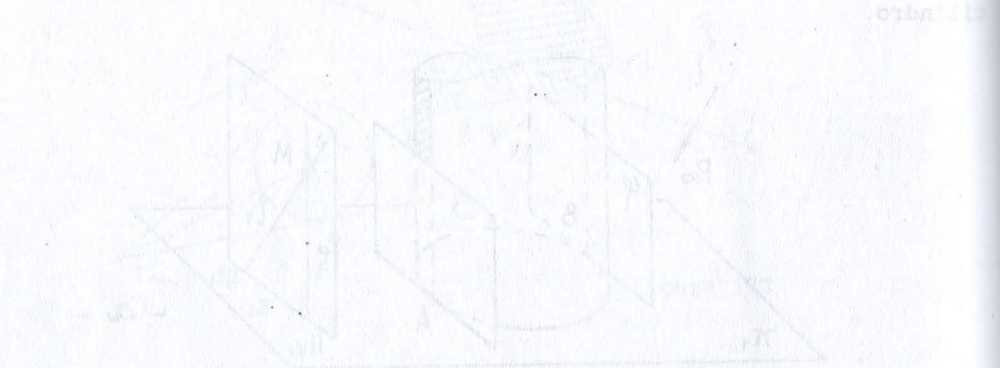


- figuras 179 -

En la figura 179-b se ha resuelto este problema para un cilindro recto de base circular apoyado en el plano icnográfico  $\pi_1$ .



que los mismos deben contener a este punto  $P$  y al vértice del cilindro.  
Por lo que siendo ambos puntos coplanarios, la recta que los determina  
también es intersección por consiguiente los planos  $\alpha$  y  $\beta$  resultan  
paralelos. Para demostrar basta mostrar por un punto  $M$  cualquiera del  
espacio las rectas  $\alpha$  y  $\beta$  tangenciales paralelas a una generatriz  
y al cilindro y a la recta  $\gamma$  dada. Sea el punto  $M$  cualquiera  
del espacio. El plano  $\alpha$  que tangente al cilindro contiene a  $M$  y  $P$ . Los  
planos  $\beta$  y  $\gamma$  dados, se dibujan paralelos al plano  $\alpha$  y tangentes al  
cilindro.



En la figura 179 se ha representado este problema para un cilindro  
cuyo eje es perpendicular al plano de proyección.

# Punto, Recta y Plano

## Sistema de Proyecciones Acotadas



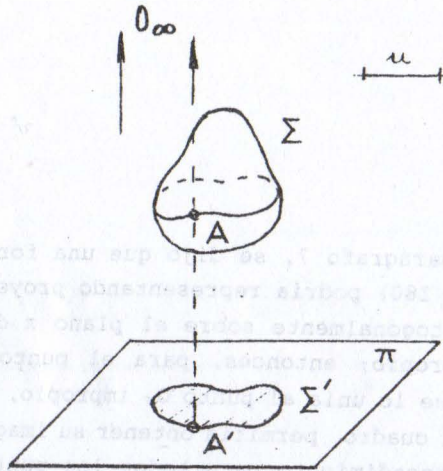
# Punto, Recta y Plano

71.- **Nociones.** En el párrafo 7, se dijo que una forma  $\Sigma$  cualquiera del espacio (figura 180) podría representando proyectando cada punto de la misma ortogonalmente sobre el plano  $\pi$  del cuadro y desde un punto  $O_x$  impropio; entonces, para el punto A objetivo, la recta proyectante que lo unía al punto  $O_x$  impropio, en su intersección con el plano  $\pi$  del cuadro, permitía obtener su imagen o proyección  $A'$ . Repetido el procedimiento para todos los puntos de la forma  $\Sigma$  se obtenía, sobre el plano  $\pi$  del cuadro, la imagen o proyección  $\Sigma'$ .

Refiriéndonos en particular al punto A objetivo se observa que su imagen  $A'$  está dada por la proyección de aquel sobre el plano del cuadro. Sin embargo, su posición no está determinada, porque todos los puntos objetivos de la forma  $\Sigma$  dada pertenecientes a la perpendicular al plano  $\pi$  del cuadro trazada por A, tienen su proyección; de allí entonces que un procedimiento para fijar la posición del punto A objetivo -con respecto de su imagen- consista en determinar la altura que lo separa del plano  $\pi$  del cuadro, de acuerdo con la medida de una cierta unidad de comparación u fijada de antemano, lo cual equivale a medir la longitud del segmento  $AA'$ . Resulta entonces un número, cota o altura del punto que, indicándose entre paréntesis al lado del símbolo de la imagen del mismo, designa su altura del plano  $\pi$  del cuadro.



En efecto: si en la figura 180, se mide la longitud del segmento  $AA'$  de acuerdo con la unidad  $u$  de comparación, se aprecia que tiene un valor igual a 2,75, o sea que el punto  $A$  objetivo de la forma  $\Sigma$  dada se sitúa de su imagen  $A'$  sobre  $\Sigma'$  a una distancia igual a 2,75 unidades sobre el plano del dibujo. Se ha logrado establecer entonces una dualidad entre punto y proyección.-



- figura 180 -

Mediante este procedimiento cada punto tiene su cota; de allí entonces que el Sistema de Representación se llame de "Proyecciones Acotadas".-

El plano del cuadro, se llama plano de comparación y todos los puntos que le pertenecen tienen cota o altura cero.-

La escala del dibujo está dada por la unidad  $u$  de medida que, prefijada arbitrariamente, determina la cota o altura del punto.-

Comparada la representación del punto en el Sistema Monge y en el Sistema de Proyecciones Acotadas, resulta que: en aquél, la posición de un punto  $A$  objetivo cualesquiera la determinan dos proyecciones:  $A'$  icnográfica y  $A''$  ortográfica; en cambio en éste, sólo se utiliza una sola proyección -que vendría a ser la icnográfica del Sistema Monge-, reemplazándose la ortográfica por un número, cota o altura del mismo sobre el plano de comparación. Es evidente que las construcciones son más simples cuando se utiliza el Sistema de Proyecciones Acotadas que el Sistema Monge, dado que se eliminan las representaciones sobre el plano  $\pi_2$  de segunda proyección.

72.- **Elementos de representación.** Los elementos de representación utilizados en el Sistema de Proyecciones Acotadas son los siguientes:

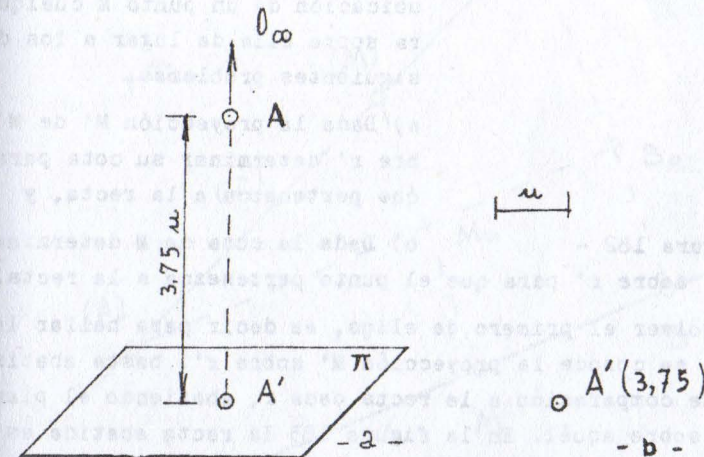
a) Plano de comparación. Es el plano horizontal donde se efectúan las

representaciones y resulta equivalente al plano  $\pi$  del cuadro del sistema cilíndrico y al  $\pi_1$  de primera proyección del Sistema Monge.

b) Cota o altura de la forma objetiva. Es el número que indica la altura  $a$  que la misma se encuentra de su imagen.

c) Escala del dibujo. Es la unidad  $u$  de comparación o medida, elegida arbitrariamente de antemano.

73.- **Representación del punto.** En el Sistema de Proyecciones Acotadas para representar un punto cualquiera del espacio, debe fijarse su cota, de acuerdo con la unidad  $u$  de medida, elegida arbitrariamente. De esta forma la representación del punto queda determinada por la proyección (ortogonal) sobre el plano de comparación y su cota.



- figura 181 -

Así, por ejemplo, en la figura 181-a se aprecia la representación en el espacio de un punto  $A$  dado, situado a 3,75 unidades del plano del dibujo, y en la figura 181-b, la misma representación en el sistema de Proyecciones Acotadas, advirtiéndose la proyección  $A'$  ortogonal del mismo (punto) y su cota (indicada entre paréntesis), siendo  $u$  la escala del dibujo.

74.- **Representación de la recta.** Una recta se representa por su proyección sobre el plano horizontal de comparación y las cotas de dos de sus puntos.

Así, por ejemplo, en la figura 182, se ha procedido a representar la recta  $r$  mediante su proyección sobre el plano horizontal.



de comparación, obtenida al fijar la proyección  $A'$ , de cota 2,50, correspondiente a un punto A, y la  $B'$ , de cota 6,25, correspondiente a otro punto B, ambos pertenecientes a la recta  $r$  dada. Se obtiene como proyección la recta  $r'$ , sobre el plano de comparación.

Para imaginar la recta en el espacio deben situarse los puntos A y B que le pertenecen, respectivamente a 2,50 y 6,25 unidades del plano del dibujo.

Definida así la recta, la ubicación de un punto M cualquier sobre ella da lugar a los dos siguientes problemas:

- a) Dada la proyección  $M'$  de  $M$  sobre  $r'$  determinar su cota para que pertenezca a la recta, y
- b) Dada la cota de  $M$  determinar

- figura 182 -                      b) Dada la cota de M determinar  
la proyección M' sobre r' para que el punto pertenezca a la recta.-

Para resolver el primero de ellos, es decir para hallar la cota de M cuando se conoce la proyección  $M'$  sobre  $r'$ , basta abatir sobre el plano de comparación a la recta dada  $r$ , abatiendo el plano que la proyecta sobre aquél. En la figura 183 la recta abatida es  $(r)$  siendo  $A'(A) = 2,50$  u y  $B'(B) = 6,25$  u, donde u es la unidad o escala del dibujo. El punto M por pertenecer a la recta  $r$  tendrá su abatimiento  $(M)$  sobre  $(r)$  y su cota interpretada gráficamente es el segmento  $M'(M)$  medido en la escala u.-

De la observación de la figura y por la simple proporcionalidad entre lados de triángulos que resultan de trazar por (A) la recta (A)B<sub>0</sub> paralela a r', se determina gráfica-analíticamente la cota de M, la que es:

$$M'(M) = M'M_0 + M_0(M)$$

De los triángulos rectángulos  $(A)M_0(M)$  y  $(A)B_0(B)$  se deduce:

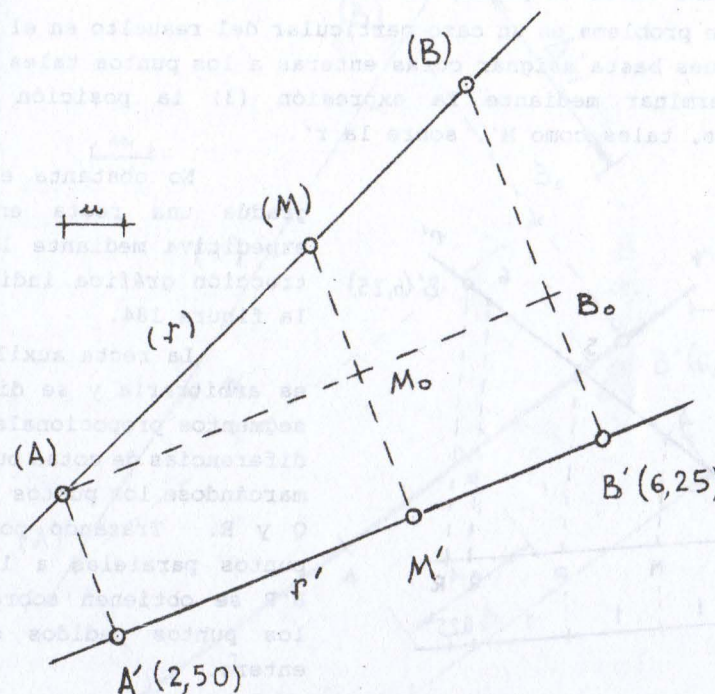
$$\frac{(A)M_0}{(A)B_0} = \frac{M_0(M)}{B_0(B)} \quad \therefore M_0(M) = \frac{(A)M_0}{(A)B_0} B_0(B) = \frac{A'M'}{A'B'} B_0(B)$$

Además

$$M' M_0 = A' (A) \quad ; \quad \text{luego la (1) queda}$$

$$M'(M) = A'(A) + \frac{A'M'}{A'B'} B_o(B) \quad (2)$$

es decir que la cota buscada del punto M es igual a la cota del punto A más la diferencia de cotas entre A y B multiplicada por la relación  $\frac{A'M'}{A'B'}$ , segmentos que medimos en centímetros directamente en la proyección.



- figura 183 -

En el caso de la figura propuesta resulta:

$$\text{Cota de M} = M' (M) = 2,50 + \frac{A' M'}{A' B'} \frac{(\text{cm})}{(\text{cm})} (6,25 - 2,50)$$

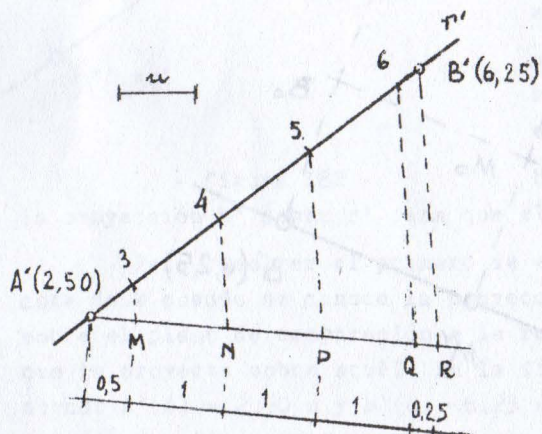


Para resolver el segundo problema, es decir para fijar la posición de  $M'$  sobre  $r'$  dada la cota del punto  $M$ , es suficiente despejar de la expresión (2) el segmento  $A'M'$ , el que en centímetros resulta en función de elementos conocidos, pues  $M'(M)$ , cota del punto  $M$ , es dato. Es decir que:

$$A'M'(\text{cm}) = A'B'(\text{cm}) \cdot \frac{M'(M) - A'(A)}{B_0(B)} \quad (3)$$

Habitualmente suele completarse la representación de la recta mediante la graduación de la misma que consiste en marcar sobre su proyección una serie de puntos de cota entera.

Este problema es un caso particular del resuelto en el párrafo anterior, pues basta asignar cotas enteras a los puntos tales como el  $(M)$  y determinar mediante la expresión (3) la posición de sus proyecciones, tales como  $M'$ , sobre la  $r'$ .



- figura 184 -

No obstante ello, se gradúa una recta en forma expeditiva mediante la construcción gráfica indicada en la figura 184.

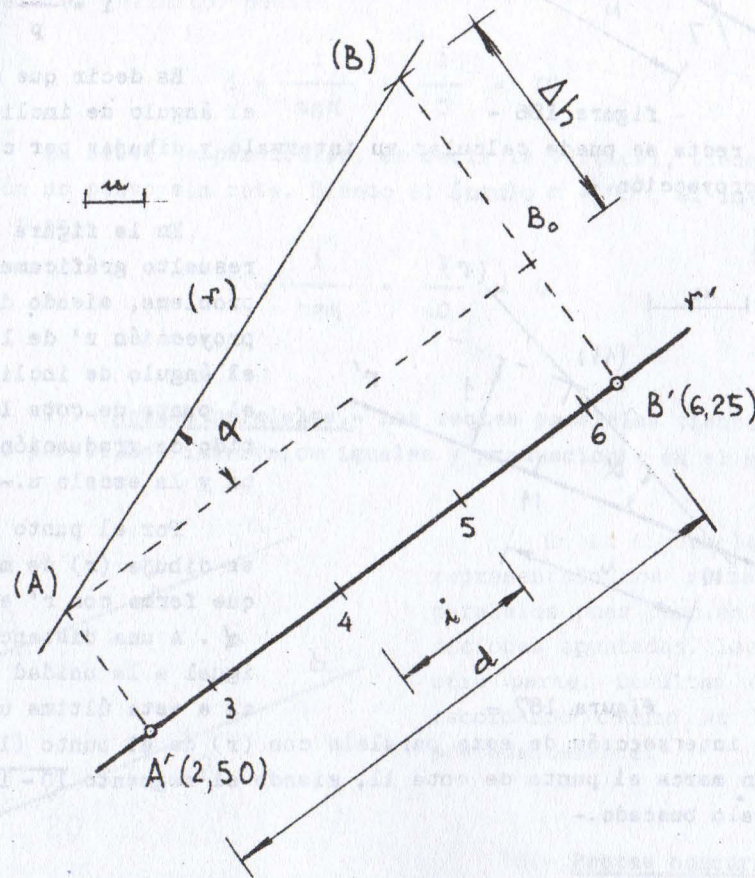
La recta auxiliar  $A'R$  es arbitraria y se divide en segmentos proporcionales a las diferencias de cotas buscadas, marcándose los puntos  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Trazando por estos puntos paralelas a la recta  $B'R$  se obtienen sobre la  $r'$  los puntos pedidos de cota entera.

**75.- Inclinación, pendiente e intervalo de una recta.** La inclinación de una recta  $AB$  es el ángulo  $\alpha$  que ella forma con su proyección horizontal  $A'B'$ , el que se pone en evidencia (figura 185) mediante el abatimiento de la recta sobre el plano de comparación, abatiendo el plano que la proyecta sobre aquél.

Se llama pendiente de una recta la tangente del ángulo de inclinación  $\alpha$ , es decir:

$$p = \text{tg } \alpha = \frac{B_0(B)}{A'B'} = \frac{\Delta h}{d} \quad (1)$$

que expresa que la pendiente de una recta es el cociente entre la diferencia de cotas de dos de sus puntos y la distancia entre sus proyecciones horizontales.

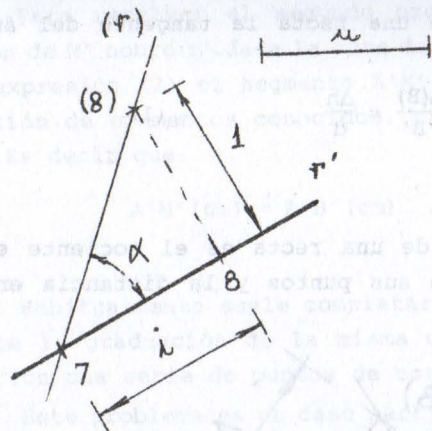


- figura 185 -

Se llama intervalo de una recta la distancia entre las proyecciones horizontales de dos puntos de esta recta cuyas cotas difieren de la unidad (figura 185).

El intervalo es la inversa de la pendiente. En efecto, (Figura





- figura 186 -

de una recta se puede calcular su intervalo y dibujar por consiguiente su proyección.-

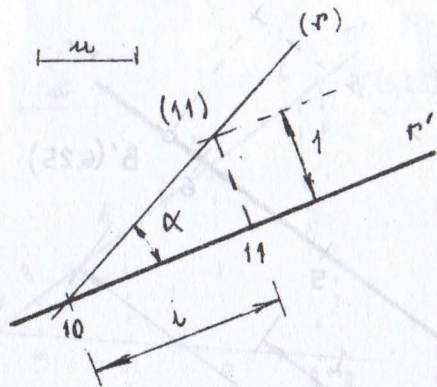


Figura 187 -

la. La intersección de esta paralela con (r) da el punto (11) cuya proyección marca el punto de cota 11, siendo el segmento 10-11 = i el intervalo buscado.-

76.- Posiciones particulares de la recta.- En relación al plano de comparación, una recta puede ser oblicua, paralela o perpendicular.-

La recta oblicua está caracterizada por una proyección rectilínea y por dos cotas desiguales en la forma indicada precedentemente.

ra 186) cuando las cotas de dos puntos difieren en una unidad, en la expresión (1) es  $\Delta h = 1$  y  $d = 1$  por definición. Luego:

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d} = \frac{1}{1}$$

o bien:

$$i = \frac{1}{p}$$

Es decir que conocido el ángulo de inclinación  $\alpha$

En la figura 187 se ha resuelto gráficamente este problema, siendo datos la proyección  $r'$  de la recta, el ángulo de inclinación  $\alpha$ , el punto de cota 10, el sentido de graduación de la recta y la escala u.-

Por el punto de cota 10 se dibuja (r) de manera tal que forma con  $r'$  el ángulo  $\alpha$ . A una distancia de  $r'$  igual a la unidad se le traza a esta última una paralela.

Como caso particular, es interesante destacar que una recta inclinada  $45^\circ$  tiene un intervalo  $i$  igual a la unidad, pues:

$$i = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

La recta paralela al plano de comparación es horizontal y está caracterizada por una proyección rectilínea y dos cotas iguales, o bien la de un solo punto, ya que ésta es la misma para todos.

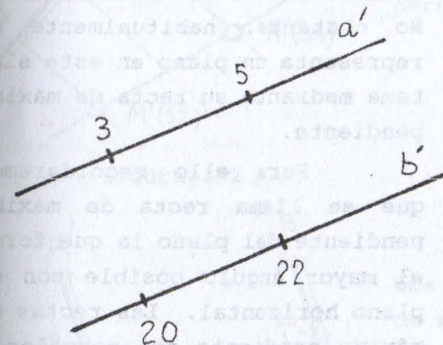
Como el ángulo de inclinación de las horizontales es cero, su intervalo es infinito, pues:

$$i = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{0} = \infty$$

La recta perpendicular, es decir la vertical, tiene por proyección un punto sin cota. Siendo el ángulo  $\alpha = 90^\circ$ , el intervalo es cero, pues:

$$i = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\infty} = 0$$

77.- Rectas paralelas.- Las rectas paralelas tienen proyecciones paralelas, intervalos iguales y graduaciones en el mismo sentido.-



- figura 188 -

Dos rectas se cortan cuando sus proyecciones también se cortan y el punto común tiene la misma cota sobre cada recta.-

En la figura 189 el punto de concurrencia de las rectas a y b es el M de cota (17).-

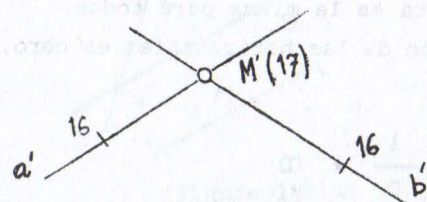
En la figura 188 se han representado dos rectas a y b paralelas pues cumplen las condiciones apuntadas, las que por otra parte, resultan evidentes recordando cuanto se ha dicho precedentemente.

78.- Rectas concurrentes.-



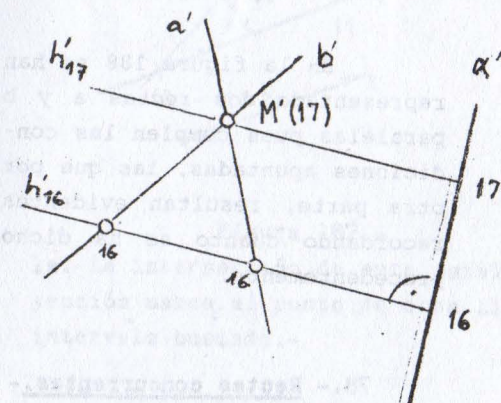
79.- **Representación del plano.**- Dos rectas concurrentes determinan un plano.

Sean (figura 190) las rectas  $a$  y  $b$ , representadas por sus proyecciones  $a'$  y  $b'$ , que se cortan en el punto  $M$  de cota 17; ellas determinan un plano.



- figura 189 -

Como en el plano existen rectas  $h$  horizontales, fácilmente es posible representarlas uniendo los puntos de igual cota. Así entonces: unidos los puntos de cotas 16 de las rectas  $a$  y  $b$  dadas, se obtiene la horizontal de cota 16, cuya proyección sobre el plano del dibujo es  $h'(16)$ . Como las rectas  $h$  horizontales son paralelas, la horizontal de cota 17 pasa por el punto de cota 17 y es paralela a la horizontal  $h'(16)$ , representándose por su proyección  $h'(17)$ . La horizontal  $h$  de cota cero, es la traza del plano por ser intersección del mismo y el de comparación. A la traza del plano se la simboliza con la notación  $h'0$ .

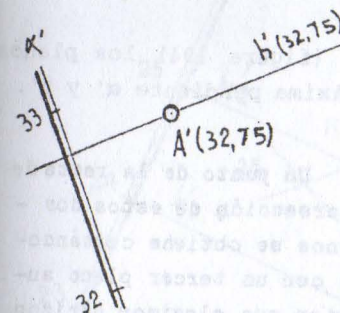


- figura 190 -

En la figura 190 la recta de máxima pendiente del plano determinado por  $a$  y  $b$ , es  $\alpha'$  recta que individualizamos de entre otras

del mismo plano, dibujando a su costado una línea más gruesa. Se ha representado así el plano  $\alpha$  buscado y que determinan las rectas  $a$  y  $b$ , siendo su intervalo y graduación la de su recta de máxima pendiente  $\alpha'$ .

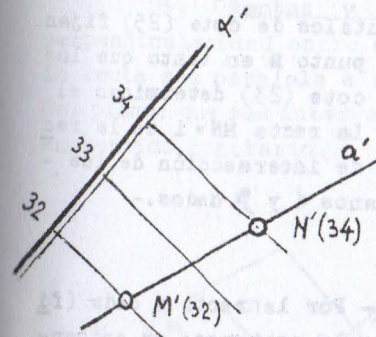
Todas las rectas paralelas a  $\alpha'$  son rectas de máxima pendiente del plano  $\alpha$ . Por consiguiente en los trazados se elige la que resulta más cómoda en relación a las líneas constructivas del dibujo.



- figura 191 -

De los expuesto se deduce que para ubicar un punto en un plano dado por su recta de máxima pendiente, es suficiente que la proyección del punto pertenezca a la horizontal del plano que tenga su misma cota.

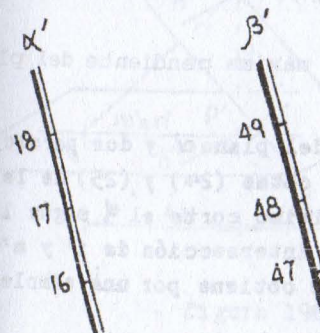
En la figura 191 el plano  $A$  de cota  $(32,75)$  pertenece al plano  $\alpha$  pues  $A'$  está sobre  $h'$  de cota también  $(32,75)$ .



- figura 192 -

Una recta pertenece a un plano si contiene a dos puntos de éste.

En la figura 192, la recta  $a$  está sobre el plano  $\alpha$ , pues sus puntos  $M$  y  $N$ , respectivamente de cotas  $(32)$  y  $(34)$ , pertenecen también al plano  $\alpha$ .



- figura 193 -

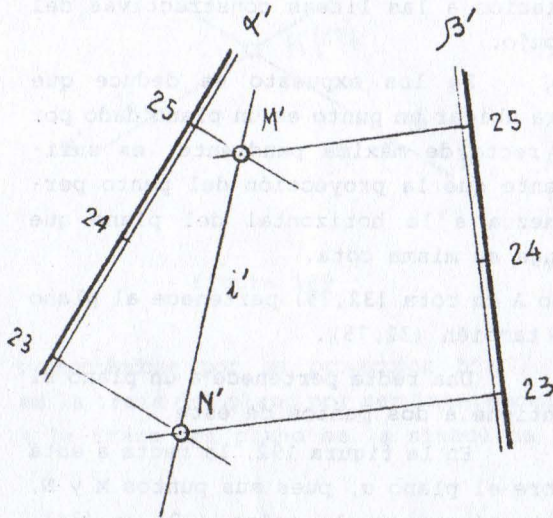
80.- **Planos paralelos.**- Los planos paralelos tienen paralelas sus rectas de máxima pendiente, iguales los intervalos y las graduaciones en el mismo sentido.

En la figura 193 los planos  $\alpha$  y  $\beta$  son paralelos porque



sus respectivas rectas de máxima pendiente  $\alpha'$  y  $\beta'$  también lo son; sus intervalos 16-17 y 47-48 son iguales y las graduaciones están orientadas en el mismo sentido.-

81.- Intersección de planos.- Sean (figura 194) los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados por sus respectivas rectas de máxima pendiente  $\alpha'$  y  $\beta'$ .



- figura 194 -

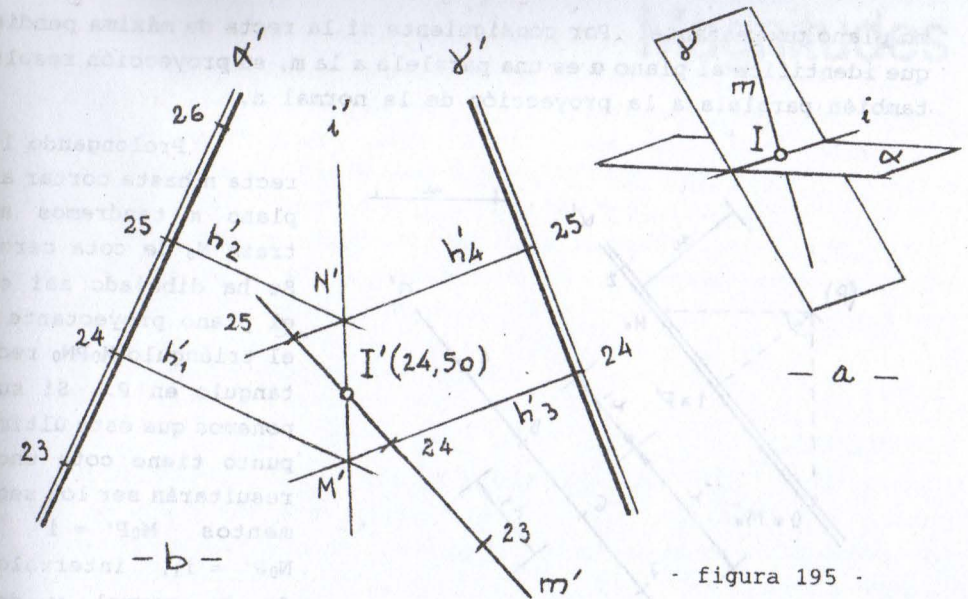
Un punto de la recta de intersección de estos dos planos se obtiene cortándolos con un tercer plano auxiliar que elegimos horizontal. Las rectas resultantes, que son horizontales de  $\alpha$  y  $\beta$  determinan el punto buscado.-

En la figura, las horizontales de cota (25) fijan el punto M en tanto que las de cota (23) determinan el N. La recta MN = i es la recta de intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  dados.-

82.- Intersección de recta y plano.- Por la recta m dada (figura 195-a) se traza un plano auxiliar  $\gamma$  que la contenga; se encuentra su intersección i con el plano  $\alpha$  dado. El punto común a i y m es el punto I buscado.-

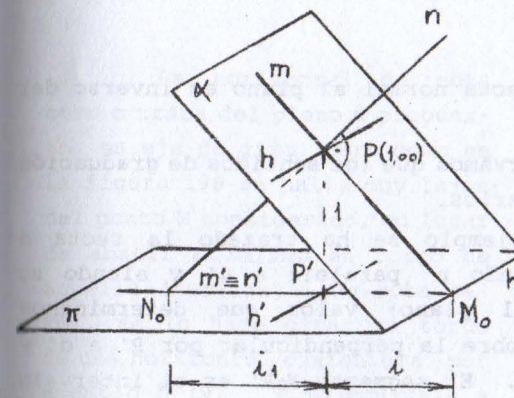
Sea (figura 195-b),  $\alpha'$  la recta de máxima pendiente del plano  $\alpha$  y  $m'$  la proyección de la recta.

Tracemos las horizontales  $h_1$  y  $h_2$  del plano  $\alpha$  y dos paralelas cualesquiera  $h_3$  y  $h_4$  por los puntos de cotas (24) y (25) de la recta m que determinan el plano  $\gamma$ . Este último corta al  $\alpha$  según la recta  $i'$  que obtenemos uniendo M' y N'. La intersección de  $i'$  y  $m'$  es el punto I' buscado cuya cota (24,50) se obtiene por una simple interpolación.-



- figura 195 -

83.- Rectas y planos perpendiculares.- La condición de perpendicularidad entre una recta y un plano es que la proyección de la recta sea paralela a la proyección de la recta de máxima pendiente del plano; que sus intervalos sean inversos y sus graduaciones dirigidas en sentido contrario.



- figura 196 -

En efecto: sean (figura 196),  $\alpha$  y  $n$  un plano y una recta perpendiculares. Si  $\pi$  es el plano de comparación,  $h_0$  horizontal de cota cero será la traza del plano  $\alpha$  y  $n'$  la proyección de la recta dada, siendo  $h_0$  y  $n'$  normales entre sí. Considerando la recta m de máxima pendiente del plano  $\alpha$  que pasa por P, tendremos que su proyección  $m'$  coincidirá con  $n'$ , por estar las dos rectas m y n en el mis-



mo plano proyectante. Por consiguiente si la recta de máxima pendiente que identifica al plano  $\alpha$  es una paralela a la  $m$ , su proyección resultará también paralela a la proyección de la normal  $n$ .

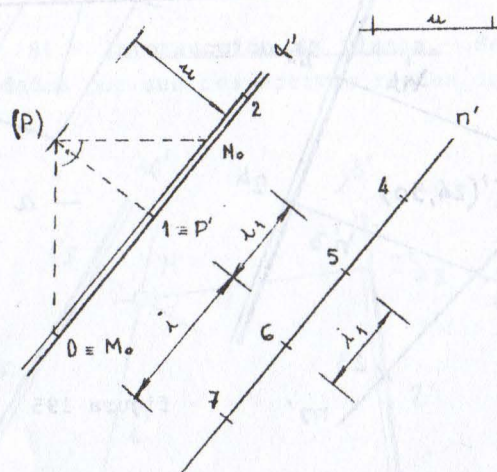


figura 197

Prolongando la recta  $n$  hasta cortar al plano  $\pi$  tendremos su traza  $N_0$  de cota cero. Se ha dibujado así en el plano proyectante y el triángulo  $M_0PN_0$  rectángulo en  $P$ . Si suponemos que este último punto tiene cota uno, resultarán ser los segmentos  $M_0P' = i$  y  $N_0P' = i_1$ , intervalos de la normal y del plano respectivamente, pudiéndose escribir:

$$\frac{N_0P'}{PP'} = \frac{PP'}{M_0P'}$$

o bien:

$$i_1 = \frac{1}{i}$$

es decir que el intervalo de la recta normal al plano es inverso del intervalo de este último.

De la misma figura 196 observamos que los sentidos de graduación de la recta y del plano son contrarios.

En la figura 197 como ejemplo se ha trazado la recta  $n$  perpendicular al plano  $\alpha$ , dibujando  $n'$  paralela a  $\alpha'$  y siendo su intervalo  $i_1$  inverso del  $i$  del plano; valor que determinamos gráficamente marcando la unidad sobre la perpendicular por  $P'$  a  $\alpha'$  y trazando por  $(P)$  la normal a  $M_0(P)$ . El segmento  $N_0P'$  es el intervalo  $i_1$  de la recta.

## Capítulo 9

# Magnitudes

### 1) ABATIMIENTOS.-

84.- Abatimiento de un punto del plano.— Sea (figura 198) el punto  $M$  de cota 11, dado por su proyección  $M'(11)$ , perteneciente al plano  $\alpha$ , dado por su recta de máxima pendiente  $\alpha'$ . Se desea abatir el punto  $M$  sobre el plano  $\pi$  de comparación.

La horizontal de cota cero o traza del plano  $\alpha$  propuesto, es eje de giro, pero como en la figura 198 se halla muy lejos del punto  $M$  considerado, en lugar de abatir el mismo en torno de aquella (horizontal de cota cero), se lo hace girar en torno de una horizontal cualquiera por ejemplo  $h'(9)$ . Ello equivale a levantar el plano  $\pi$  de comparación, considerando como tal al que contiene la horizontal  $h'(9)$ , lográndose haber desplazado el eje de giro.

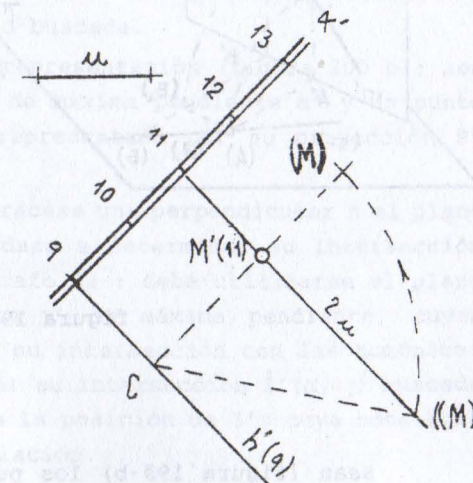


figura 198

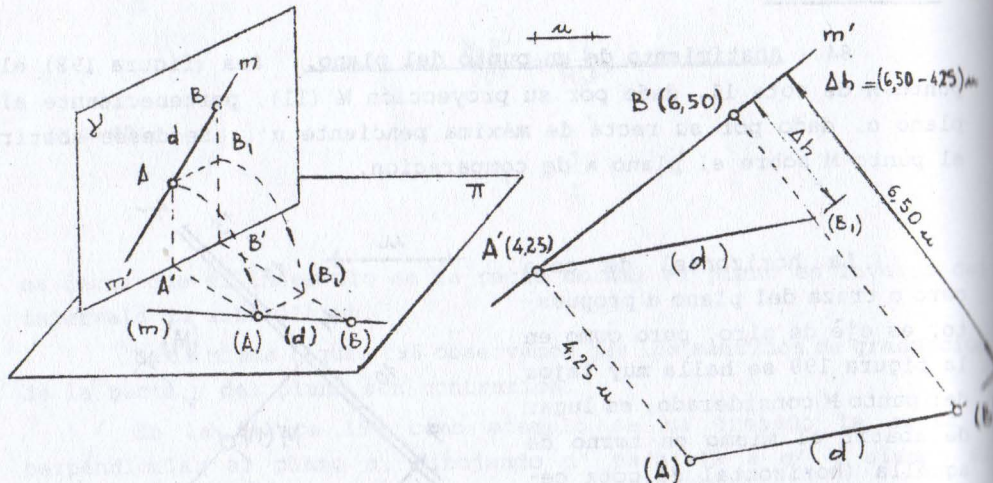


El punto (M) se sitúa sobre la perpendicular al eje de giro  $-h'(9)-$  trazada por  $M'(11)$  y a la distancia del centro C de giro igual a la hipotenusa  $C(M)$  del triángulo  $CM'(M)$  rectángulo, de catetos  $CM'$  y  $M'(M)$ , este último igual a la diferencia de cotas entre el punto M dado y el plano que contiene al eje de giro  $h'(9)$ .

En rigor, el abatimiento (M) del punto M dado se ha realizado sobre un plano paralelo al de comparación y que es el que contiene la  $h'(9)$ .

## II) DISTANCIAS

85.- Distancia entre dos puntos.- La distancia entre dos puntos la expresa la longitud del segmento que los une y se obtiene abatiendo dicho segmento sobre el plano  $\pi$  de comparación o uno que le sea paralelo.



- figura 199 -

Sean (figura 199-b) los puntos A y B, respectivamente dados por sus proyecciones  $A'(4,25)$  y  $B'(6,50)$ , referidos al plano  $\pi$  de comparación. Se desea saber la distancia  $d$  entre los puntos A y B dados.

Unidos los puntos A y B se determina la recta  $m$ , dada por su proyección  $m'$  y que es eje de giro, pues abatiremos el plano  $\gamma$  perpendicular al  $\pi$  de comparación que contiene a  $m$ .

Efectuado el abatimiento indicado, el punto A se dispone en (A) sobre una perpendicular a  $m'$  levantada por  $A'$  y a 4,25 unidades de su pie, mientras que B lo hace en (B) sobre una perpendicular a  $m'$  levantada por  $B'$  y a 6,50 unidades de su pie.

El segmento (A)(B) expresa la verdadera magnitud ( $d$ ) de la distancia entre los puntos A y B dados, que también es posible obtener mediante la diferencia de cotas entre  $A'$  y  $B'$ , lo que permite obtener el punto  $(B_1)$ .

Observando la figura 199 surge un método analítico que permite calcular la distancia  $d$  entre los puntos A y B dados:

$$(d) = \sqrt{A'B'^2 + B'(B_1)^2}$$

86.- Distancia de un punto al plano.- La distancia de un punto al plano es la longitud del segmento normal a dicho plano, trazado por el punto dado.

En efecto (figura 200 a): sea el plano  $\alpha$  y un punto P exterior al mismo. Para hallar la distancia entre ambos, basta trazar por el punto P dado una recta  $n$ , perpendicular al plano  $\alpha$ , y determinar la intersección I con este plano; el segmento PI define entonces la distancia  $d$  buscada.

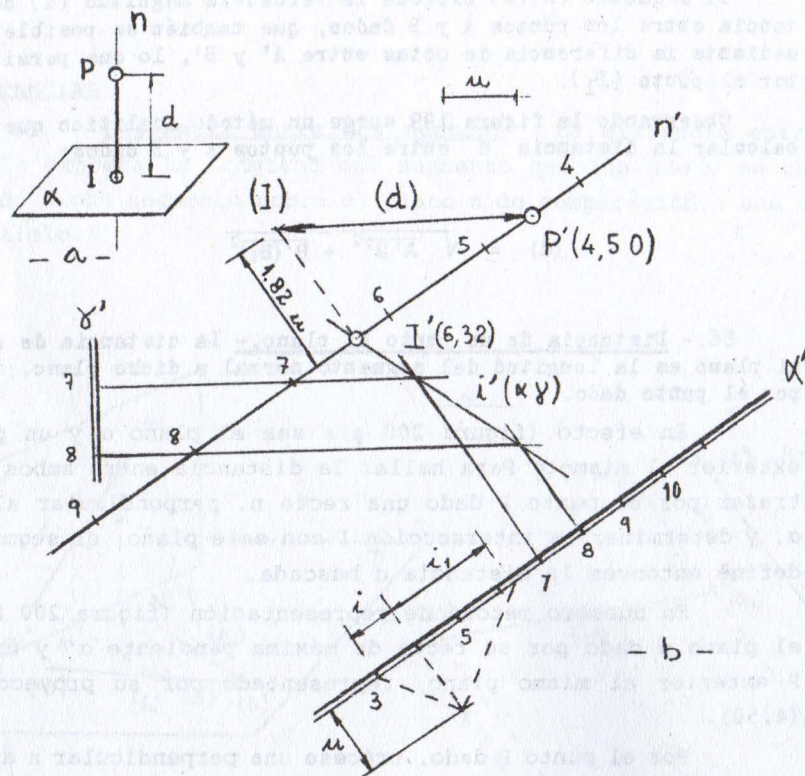
En nuestro método de representación (figura 200 b); sea el plano  $\alpha$  dado por su recta de máxima pendiente  $\alpha'$  y un punto P exterior al mismo plano, representado por su proyección  $P'(4,50)$ .

Por el punto P dado, trácese una perpendicular  $n$  al plano  $\alpha$  (ver parágrafo 83) y procédase a determinar su intersección con el mismo plano -ver parágrafo 82-: debe utilizarse el plano  $\gamma$  auxiliar dado por su recta  $\gamma'$  de máxima pendiente, cuyas horizontales  $h'(7)$  y  $h'(8)$  en su intersección con las homónimas del plano  $\alpha$  permiten determinar su intersección  $i'(\alpha, \gamma)$  buscada que, al cortar a  $n'$ , determina la posición de  $I'$ , cuya cota 6,32 determinamos mediante interpolación.



Ahora el problema se reduce al caso anterior (ver parágrafo 85), pues debe calcularse la distancia entre los puntos P e I, abatiéndose sobre el  $\pi'$  de comparación al plano que los contiene.-

Efectuado el abatimiento indicado, el punto I se dispone en (I) sobre una perpendicular a  $n'$  levantada por  $I'$ , determinándose su posición por diferencia de cotas entre  $P'$  e  $I'$ . Unidos  $P'$  con (I) resulta la verdadera magnitud (d) de la distancia d entre el punto P y el plano  $\alpha$  dados.

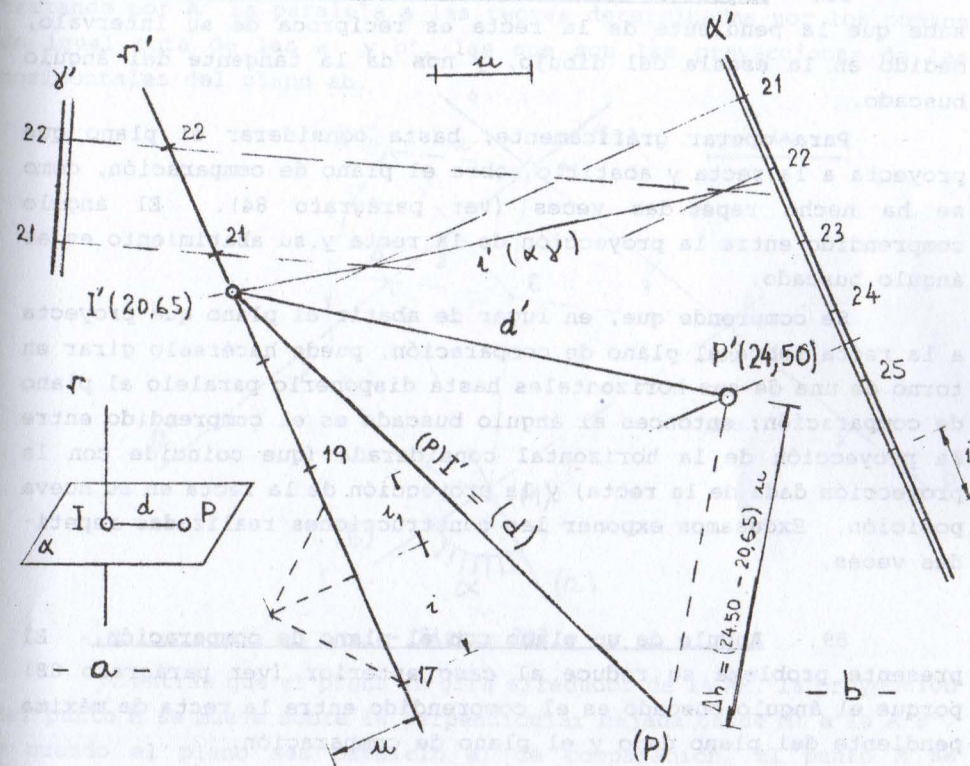


- figura 200 -

87.- Distancia de un punto a una recta.- La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento comprendido entre el punto dado y el pie de la normal a la recta bajada desde aquel punto.

En efecto (figura 201 a): sea una recta r y un punto P exterior a ella. La distancia entre el punto P y la recta r se determina midiendo la longitud del segmento comprendido entre el punto dado y el pie I de la normal a la recta trazada por aquél (punto P); luego es el segmento PI.

En nuestro sistema de representación (figura 201 b): sea la recta r, representada por su proyección  $r'$  y el punto P exterior a ella, dado por su proyección  $P'$  (24,50).-



- figura 201 -

Trácese el plano  $\alpha$  que contiene a P, perpendicular a la recta r dada; su recta  $\alpha'$  de máxima pendiente es entonces paralela a  $r'$ , siendo su graduación contraria y su intervalo inverso (ver parágrafo 83).

Trácese el plano  $\gamma$  que contiene a r, a quien se representa por su recta  $\gamma'$  de máxima pendiente. La intersección de las horizontales  $h'$  (21) y  $h'$  (22) homónimas de los planos  $\alpha$  y  $\gamma$  determinan



$i'(\alpha)$  que, al cortar a  $r'$ , permite obtener  $I'$ ; luego: para obtener la distancia  $d$  del punto  $P$  a la recta  $r$ , se traza por  $I'$  la perpendicular a  $P'I'$  donde se ubica  $(I)$  mediante la diferencia de cotas entre estos puntos. Unidos  $(I)$  y  $P'$  se obtiene la distancia buscada entre el punto y la recta dados.

### III) ANGULOS

88.- Angulo de una recta con el plano de comparación.- Se sabe que la pendiente de la recta es recíproca de su intervalo, medido en la escala del dibujo, y nos da la tangente del ángulo buscado.

Para operar gráficamente, basta considerar el plano que proyecta a la recta y abatirlo sobre el plano de comparación, como se ha hecho repetidas veces (ver parágrafo 84). El ángulo comprendido entre la proyección de la recta y su abatimiento es el ángulo buscado.

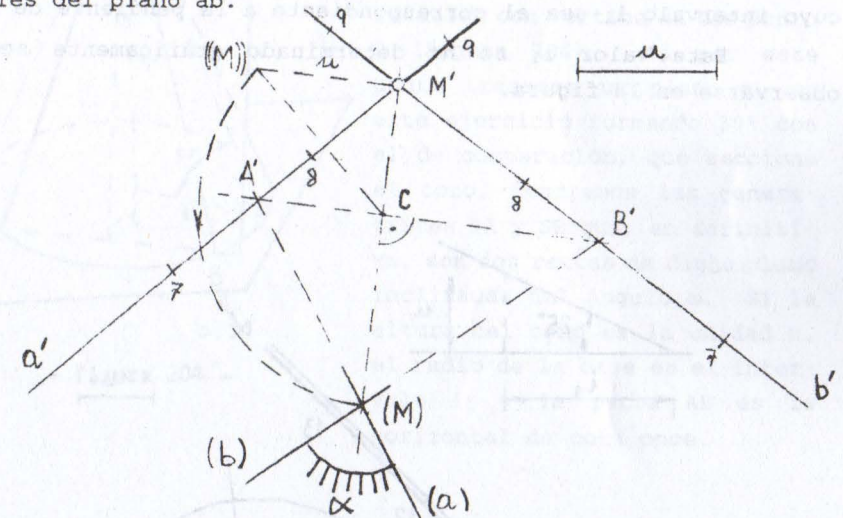
Se comprende que, en lugar de abatir el plano que proyecta a la recta sobre el plano de comparación, puede hacérselo girar en torno de una de sus horizontales hasta disponerlo paralelo al plano de comparación; entonces el ángulo buscado es el comprendido entre la proyección de la horizontal considerada (que coincide con la proyección dada de la recta) y la proyección de la recta en su nueva posición. Excusamos exponer las construcciones realizadas repetidas veces.

89.- Angulo de un plano con el plano de comparación.- El presente problema se reduce al caso anterior (ver parágrafo 88) porque el ángulo buscado es el comprendido entre la recta de máxima pendiente del plano dado y el plano de comparación.

90.- Angulo comprendido entre dos rectas, dadas por sus proyecciones graduadas.- Se trata de hallar el ángulo formado por dos rectas que se cortan, porque si se tratara de dos rectas que no se cortan, hallaríase el ángulo de las paralelas a las mismas (rectas) trazadas desde un mismo punto.

Sea (figura 202) el ángulo de dos rectas  $a$  y  $b$ , respectivamente dadas por sus proyecciones  $a'$  y  $b'$  graduadas, que se cortan en un punto  $M$ , de proyección  $M'$ .

Considérese el plano  $ab$  y hágaselo girar alrededor de una de sus horizontales hasta que se disponga paralelo al plano de comparación. Por sencillez, en la figura 202, se ha elegido la horizontal, cuya cota es inferior en una unidad a la del punto  $M$ . Designando a la horizontal considerada por  $AB$ , resulta su proyección  $A'B'$ , tomando sobre la  $a'$  el segmento  $M'A'$  igual a un intervalo de su graduación y trazando por  $A'$  la paralela a las rectas determinadas por los puntos de igual cota de las  $a'$  y  $b'$ , las que son las proyecciones de las horizontales del plano  $ab$ .



- figura 202 -

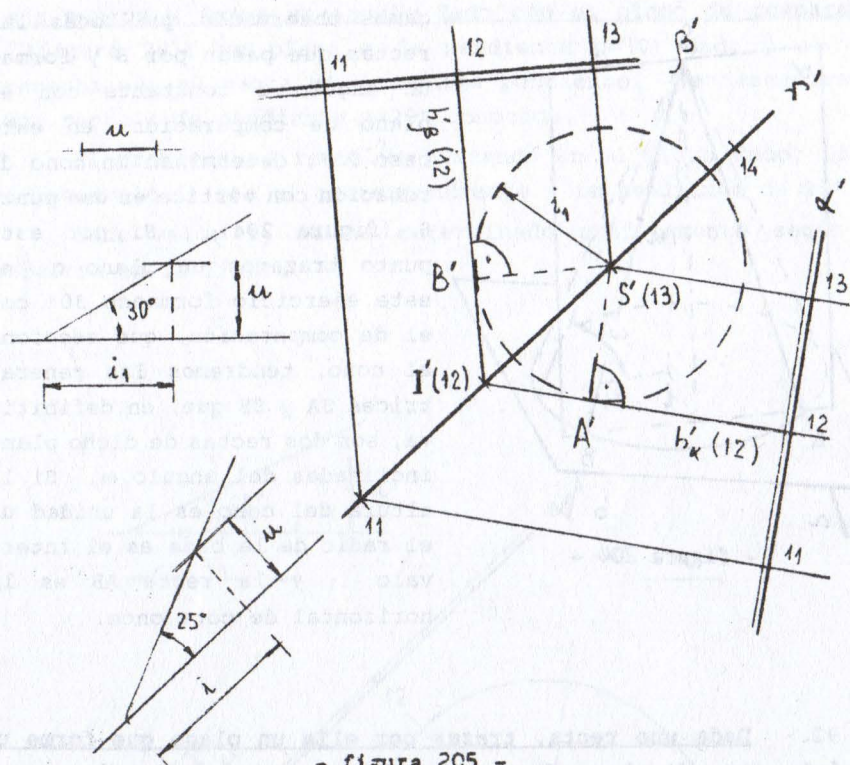
Mientras que el plano  $ab$  gira alrededor de la  $AB$ , la proyección del punto  $M$  se mueve sobre la perpendicular bajada desde  $M'$  a la  $A'B'$ , y cuando el plano sea paralelo al de comparación, el punto  $M$  se proyectará en  $(M)$  a una distancia  $C(M)$  de la  $A'B'$ , igual a la distancia entre el punto  $M$  y el eje  $AB$  de rotación, distancia que es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene  $M'C$  por uno de sus catetos, y a la unidad de la escala del dibujo por otro cateto. En la figura 202 el triángulo rectángulo es  $CM'(M)$  construido tomando  $M'(M)$  igual a la unidad de la escala del dibujo y obteniendo en  $C(M)$  la distancia  $C(M)$  buscada.







do con centro en  $S'$  una circunferencia con radio igual a  $i_1$  y trazándole desde  $I'$  las tangentes, obtenemos las horizontales  $h'_\alpha(12)$  y  $h'_\beta(12)$ , cada una de las cuales juntamente con la recta  $r$  determinan los planos  $\alpha$  y  $\beta$  que solucionan el problema propuesto. Desde luego, las rectas de máxima pendiente  $\alpha'$  y  $\beta'$  son normales a dichas horizontales  $h'_\alpha(12)$  y  $h'_\beta(12)$  respectivamente.

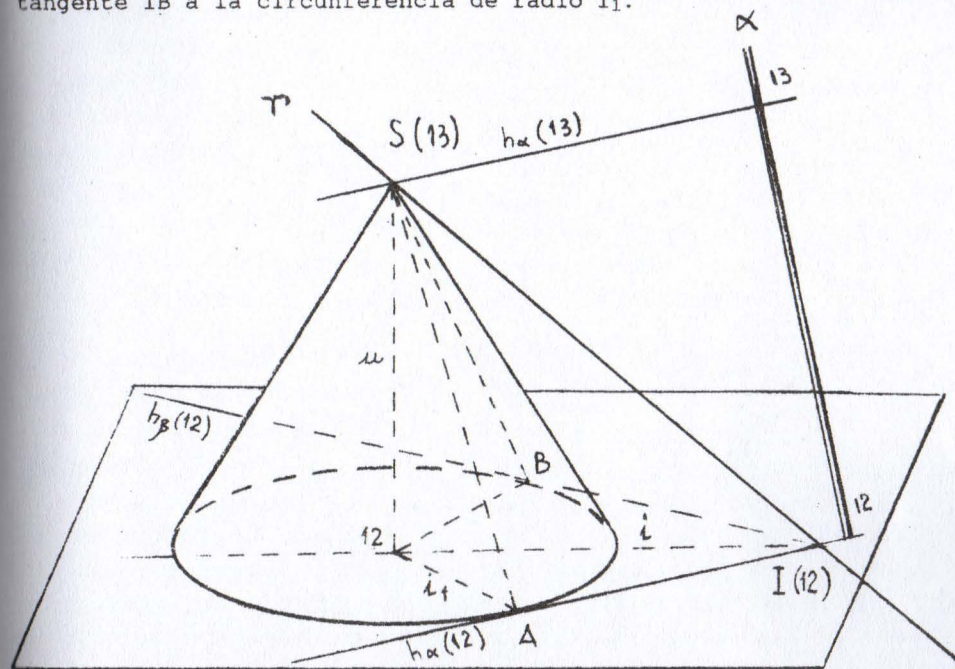


- figura 205 -

La solución de este problema puede ser presentada bajo un aspecto que tiene la ventaja de ser más fácil de retener y de generalizar.

El punto  $S$ , en el espacio (figura 206), puede ser considerado como el vértice de un cono de rotación cuyas generatrices tienen la pendiente del plano buscado. Si la altura de este cono es  $13-12=u$ , el radio de su base es  $i_1$ . La recta  $r$  dada, cuyo punto de cota 13 es el vértice del cono, corta al plano horizontal de la base de este en el punto  $I$ . La recta  $IA$  es una horizontal  $h(12)$  del plano  $\alpha \equiv r.h_\alpha$ . Este plano es tangente al cono, tiene en consecuencia la

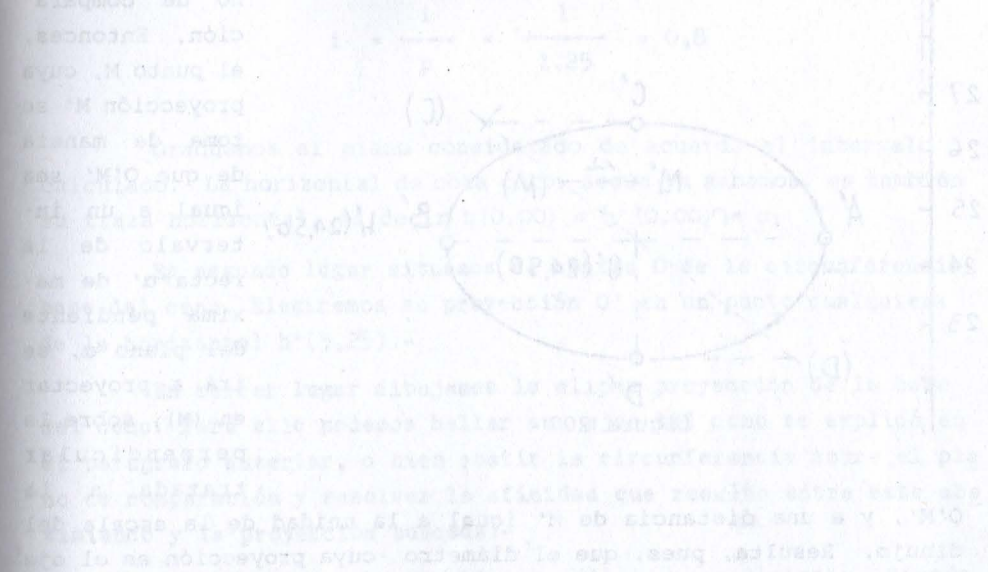
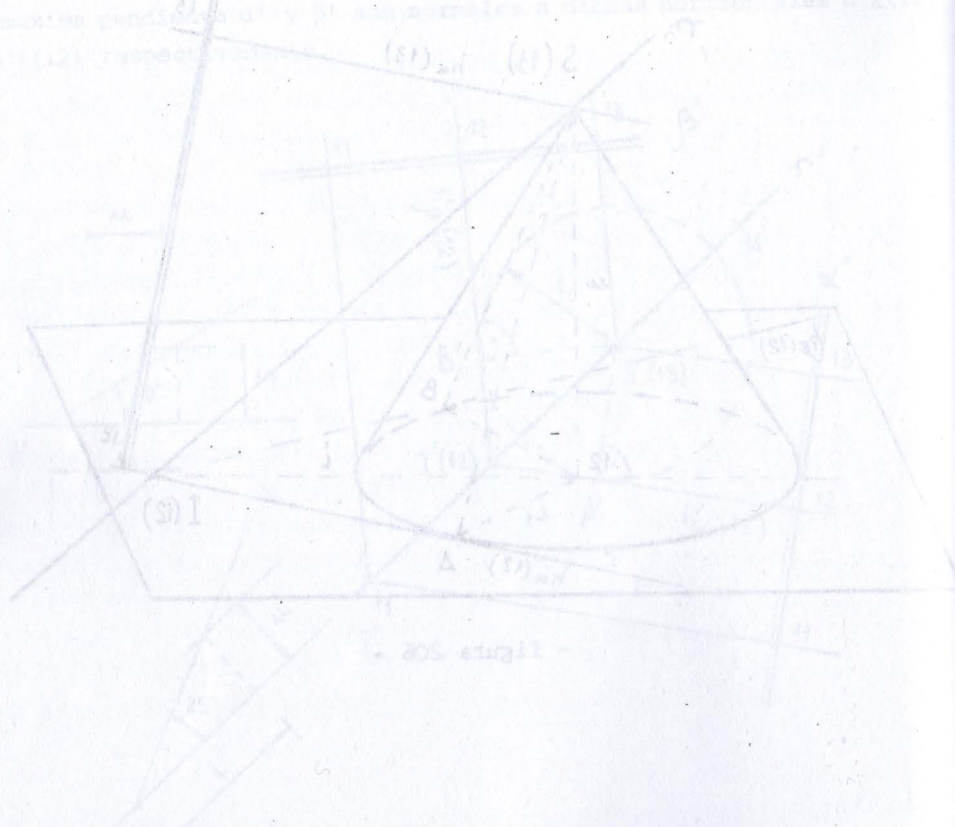
pendiente prefijada de  $\alpha$  y contiene a la recta  $r$ . La otra solución a este problema, el plano  $\beta$ , queda determinado por la recta  $r$  y la tangente  $IB$  a la circunferencia de radio  $i_1$ .



- figura 206 -



# Figuras Planas y Cuerpos



## 1) FIGURAS PLANAS.-

93.- Representación de la circunferencia.- Se desea hallar la proyección de una circunferencia de un plano  $\alpha$ , dada por su recta  $\alpha'$  de máxima pendiente (figura 207), conociendo la proyección  $O'$  de su centro  $O$  y el radio de la misma.

Podría procederse abatiendo el plano  $\alpha$  sobre el de comparación  $\pi'$ , o haciéndolo girar alrededor de una de sus horizontales - hasta disponerlo paralelo a este último plano para después deducir la proyección de la circunferencia, de su verdadera figura dibujada en el abatimiento. Sin embargo, como sabemos que toda proyección paralela de una circunferencia es una elipse, resulta más conveniente determinarla por sus ejes. Para esto, observemos que el eje mayor es igual al diámetro de la circunferencia y coincide con la proyección  $h'$  de la horizontal del plano que pertenece al centro de la circunferencia. Tomando  $O'A' = O'B' = r$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia, resulta  $A'B'$  ser el eje mayor de la elipse. El eje menor es perpendicular a  $A'B'$ .-











# Superficies Topográficas

95.- Nociones generales y definiciones.- Se llaman superficies topográficas aquellas superficies, tales como la superficie terrestre, cuyos puntos al no satisfacer ninguna ley geométrica, no son susceptibles de una definición rigurosa.-

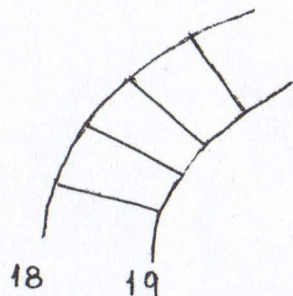
Una superficie topográfica es cortada en un solo punto por una recta vertical, mientras que una horizontal puede hacerlo en varios de sus puntos. En consecuencia la proyección horizontal de esa superficie será simple y clara, no así la vertical que resultará complicada por la superposición de puntos proyectados.-

De aquí que el Sistema de Proyecciones Acotadas resulta especialmente apropiado y ventajoso para la representación y estudio de las superficies topográficas.-

A este objeto se corta a la superficie del terreno con planos horizontales equidistantes, tanto más numerosos cuanto más irregular sea la superficie y mayor exactitud en la representación se exige.-



Las secciones teóricas que estos planos equidistantes producen en el terreno, se llaman líneas o curvas de nivel. Todos sus puntos tienen la misma altura o cota. Como ejemplo ilustrativo la intersección del espejo de agua de un lago con el terreno es una línea de nivel. La separación constante entre los planos que la producen se llama equidistancia.-



- figura 209 -

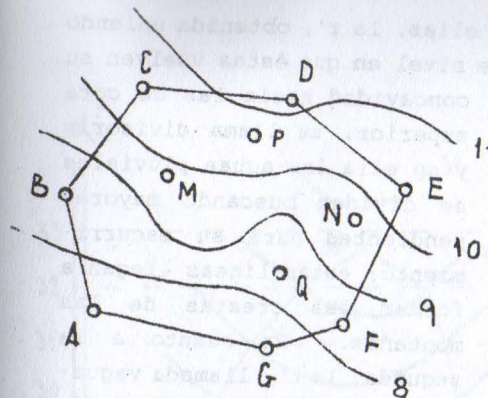
El conjunto de las proyecciones de todos los puntos del terreno con indicación de los cursos de agua, vías férreas, caminos, edificios, acompañado de las curvas de nivel constituye un plano topográfico.-

La representación así obtenida permite conocer el sentido de escurrimiento de las aguas, ubicar el movimiento de tierras, ya sean excavaciones o desmontes y los rellenos o terraplenes, siendo, por consiguiente, un auxiliar imprescindible en la elaboración de un proyecto, ya sea de una obra vial, hidráulica, férrea o arquitectónica.-

Corresponde a la Topografía, mediante la planimetría en primer término, determinar en el terreno los elementos necesarios para fijar la situación relativa de los puntos que han de ser representados en el plano, y en segundo lugar mediante la nivelación, obtener el relieve del suelo, es decir fijar la altura o cota de cada punto con respecto a un plano que se elige como referencia, que permitirá el trazado ulterior de las curvas de nivel.-

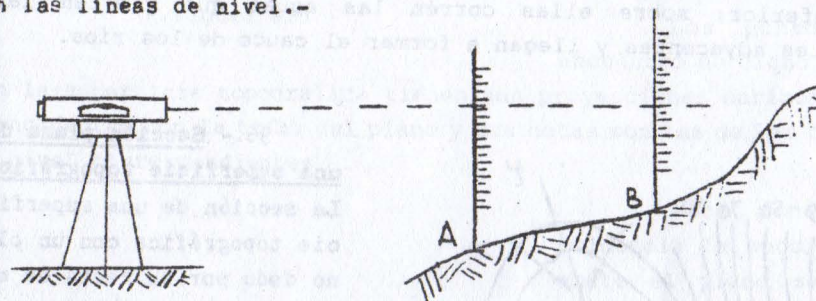
La medición de longitudes y ángulos, tarea propia de la planimetría, permite ubicar puntos dentro del polígono ABCDEFG (figura 210) que encierra el entorno de la superficie terrestre a represen-

Para la resolución de los problemas en una superficie representada por curvas de nivel, se considera sustituida la superficie comprendida entre dos curvas de nivel consecutivas - por la engendrada por una recta que se apoye sobre estas dos curvas y se mantenga normal a una de ellas, a la más elevada por ejemplo (figura 209).-



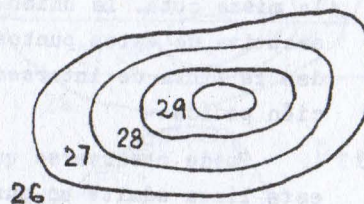
- figura 210 -

tes puntos A y B, permite determinar la diferencia de alturas entre los mismos (figura 211). Unidos los puntos de igual altura se dibujan las líneas de nivel.-



- figura 211 -

En presencia de estos elementos de información (figura 210) resulta evidente que el punto P tiene mayor altura que el Q, mientras que los M y N poseen aproximadamente la misma cota.



- figura 212 -

tar. Las distancias son medidas con la cinta y los ángulos con el teodolito.-

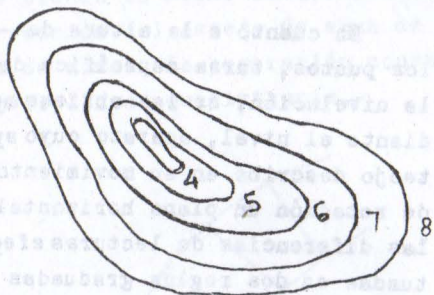
En cuanto a la altura de los puntos, tarea específica de la nivelación, se las obtiene mediante el nivel, aparato cuyo anteojo describe en su movimiento de rotación un plano horizontal. Las diferencias de lecturas efectuadas en dos reglas graduadas o miras, ubicadas en dos diferen-

La superficie topográfica representada por las líneas de nivel de la figura 212 nos indica una elevación en el terreno, mientras que las dibujadas en la figura 213 representan una depresión en el mismo.

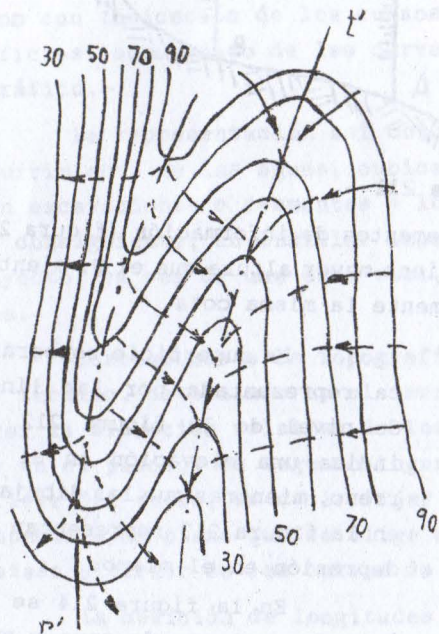
En la figura 214 se han marcado en trazo de raya y pun-



to las líneas  $r'$  y  $t'$ . La primera de ellas, la  $r'$ , obtenida uniendo los puntos salientes de las curvas de nivel en que éstas vuelven su concavidad hacia las de cota superior, se llama divisoria y en ella las aguas pluviales se dividen buscando mayores pendientes para su escurrimiento; estas líneas llegan a formar las crestas de las montañas. En cuanto a la segunda, la  $t'$ , llamada vaguada, se obtiene uniendo los puntos entrantes de las curvas de nivel, en que éstas vuelven su concavidad hacia las de cota inferior; sobre ellas corren las aguas que vierten las pendientes adyacentes y llegan a formar el cauce de los ríos.



- figura 213 -

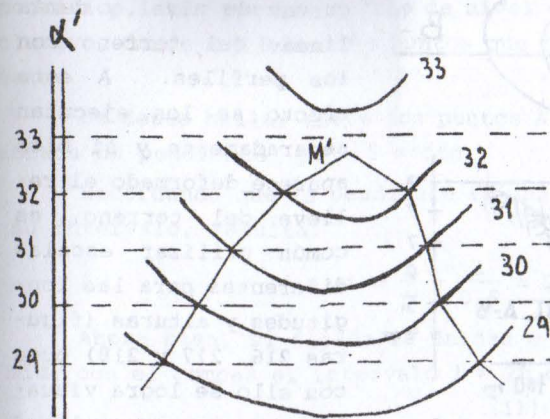


- figura 214 -

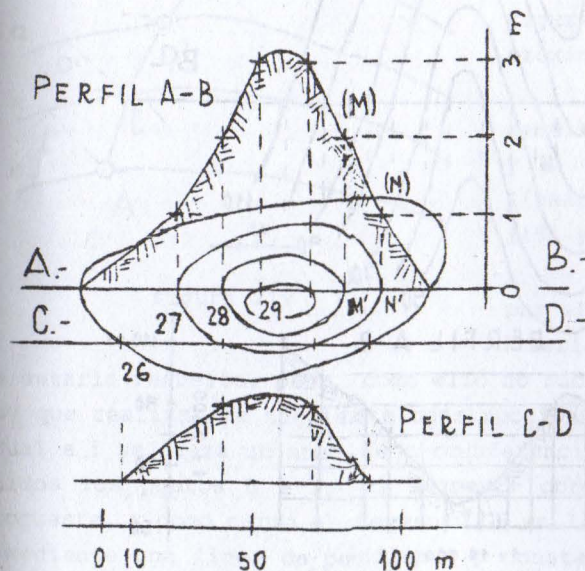
#### 96.- Sección plana de una superficie topográfica.

La sección de una superficie topográfica con un plano dado por su recta de máxima pendiente  $\alpha'$  (figura 215) está determinada por los puntos de encuentro de las curvas de nivel de la superficie con las horizontales del plano que tengan la misma cota. La unión consecutiva de estos puntos dan la línea de intersección pedida.-

Puede observarse que esta línea admite un punto cuya proyección es  $M'$  en el cual la tangente es horizontal; su determinación aproximada se hace hallan-



- figura 215 -



- figura 216 -

do la intersección del plano  $\alpha$  con la recta que sustituye a la superficie del terreno entre las dos curvas de nivel en que se encuentra ubicado el punto buscado (ver figura 221).

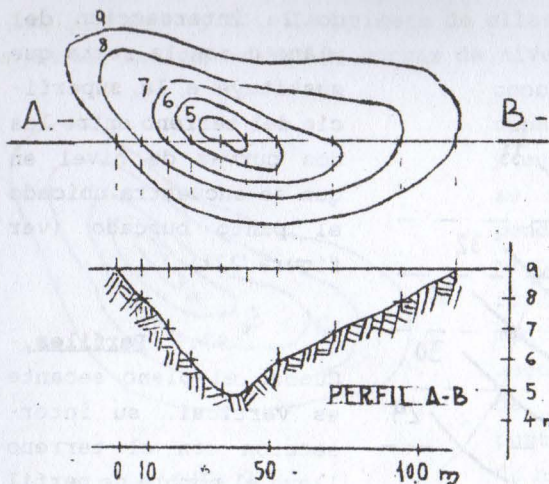
#### 97.- Perfiles.

Cuando el plano secante es vertical, su intersección con el terreno lleva el nombre de perfil (figuras 216, 217 y 218).

Los puntos de encuentro de dicho plano con la superficie topográfica tienen sus proyecciones horizontales coincidentes con la traza del plano y sus cotas son las de las curvas de nivel correspondientes.

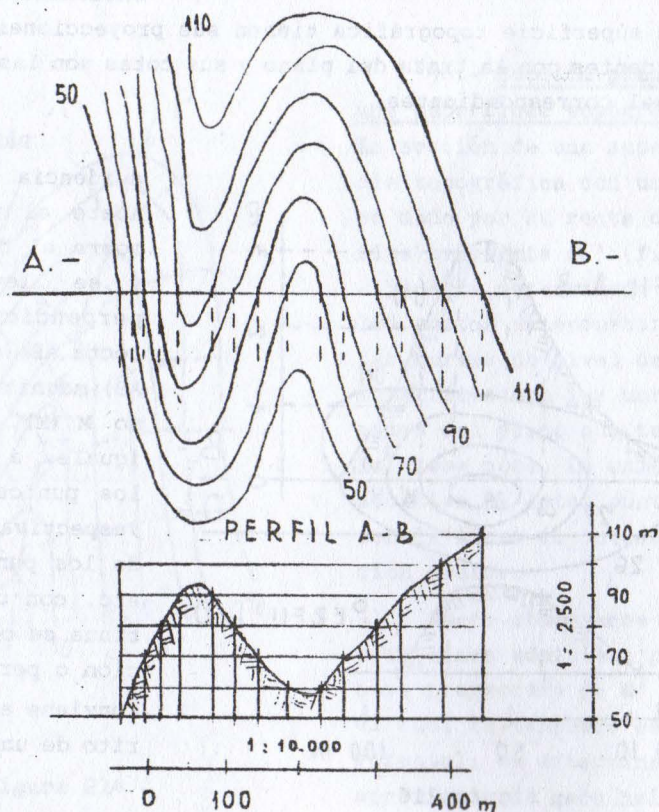
Para poner en evidencia la sección se abate el plano secante sobre el de comparación y se lleva sobre las perpendiculares a la recta AB (corte o perfil AB) magnitudes tales como  $M'(M)$ ,  $N'(N)$ , etc., iguales a las cotas de los puntos M, N, etc., respectivamente. Uniendo los puntos (M), (N), etc. con una línea continua se obtiene la sección o perfil buscado. Conviene a veces, en mérito de una mayor clari-





- figura 217 -

dad del dibujo, evitar la superposición de las curvas de nivel y demás líneas del terreno con los perfiles. A este efecto se los ejecutan separadamente y si bien aparece deformado el relieve del terreno, es común utilizar escalas diferentes para las longitudes y alturas (figuras 216, 217 y 218) pues con ello se logra visualizar con mayor amplitud pequeñas diferencias de nivel.



- figura 218 -

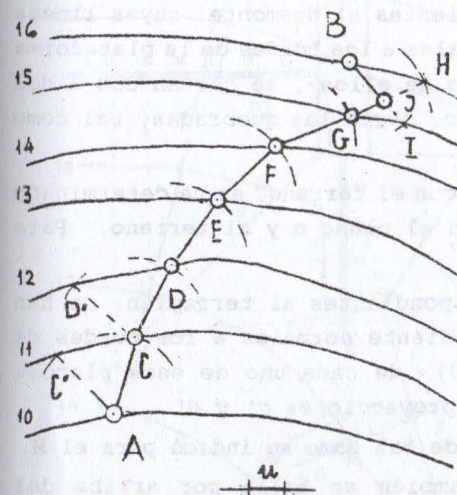
98.- Trazar entre dos puntos de una superficie topográfica una quebrada de pendiente constante. Sea (figura 219) una superficie topográfica, dada por las curvas de nivel que median entre (10) y (16) inclusive, donde A y B son dos puntos que respectivamente corresponden a éstas.

Se desea hallar entre los puntos A y B considerados, una línea quebrada de pendiente  $p = 0,5 = \text{cte}$ .

Recordando que la pendiente de una recta es igual a la inversa de su intervalo, resulta:

$$i = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,5} = 2$$

Ahora bien, si fijada la unidad  $u$  de medida y con centro en A se mide con el compás el intervalo  $i = 2u$ , cortamos a la línea de nivel (11) inmediata siguiente, en los puntos C y C'; entonces, los segmentos AC y AC' cumplen la condición impuesta de tener la pendiente  $p$  dada. Naturalmente de éstos debe elegirse, para continuar trazando la línea quebrada entre A y B, aquél que resulte más conveniente (en la figura 219, el C por ser el más próximo a B).



- figura 219 -

Repetido el proceso, determinamos los puntos D, E, F, G y H, respectivamente sobre las líneas de nivel (12), (13), (14), (15) y (16).

Si el segmento GH pasara por el punto B -en cuyo caso B y H serían coincidentes- el problema estaría resuelto; pero, como ello no sucede en la figura, entonces hay que realizar la siguiente construcción: con centro en B y radio igual a  $i$  se traza un arco de circunferencia, éste corta a (15) en I. Unidos los puntos B e I, el segmento obtenido cumple la condición propuesta, y como corta el segmento GH en J, para llegar de G al punto B mediante una línea de pendiente  $p$  constante, basta seguir desde G las quebradas GJ y JB, respectivamente.



99.- Proyecto de una plataforma horizontal en una superficie topográfica.- Sea (figura 220) una superficie topográfica representada por sus líneas de nivel, en la cual proyectamos emplazar una plataforma horizontal, dada por los puntos de proyecciones A', B', C' y D' de cota (20) y su acceso, mediante una rampa de pendiente 1:4.

Es fácil observar que para llegar al plano horizontal de cota (20) habrá que excavar o desmontar el terreno a partir de la línea de nivel (20) hacia al borde A'B', mientras que habrá que rellenar o terraplenar hacia el borde C'D'.

Para evitar desmoronamientos de la tierra, tanto el desmonte como el terraplén no se terminan verticalmente adoptándose, en cambio, planos inclinados de identificación cuyas pendientes dependen de la calidad del terreno. En nuestro ejercicio, adoptaremos para el desmonte un talud de pendiente 1:1, mientras que para el terraplén fijaremos una pendiente 2:3.

Los planos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  correspondientes al desmonte, cuyas líneas de máxima pendiente se han trazado normales a los bordes de la plataforma horizontales de cota (20) de cada uno de ellos, se cortan dos a dos en las rectas  $a'$  y  $b'$ , y con el terreno, según las quebradas, tal como se vió en el parágrafo 96.

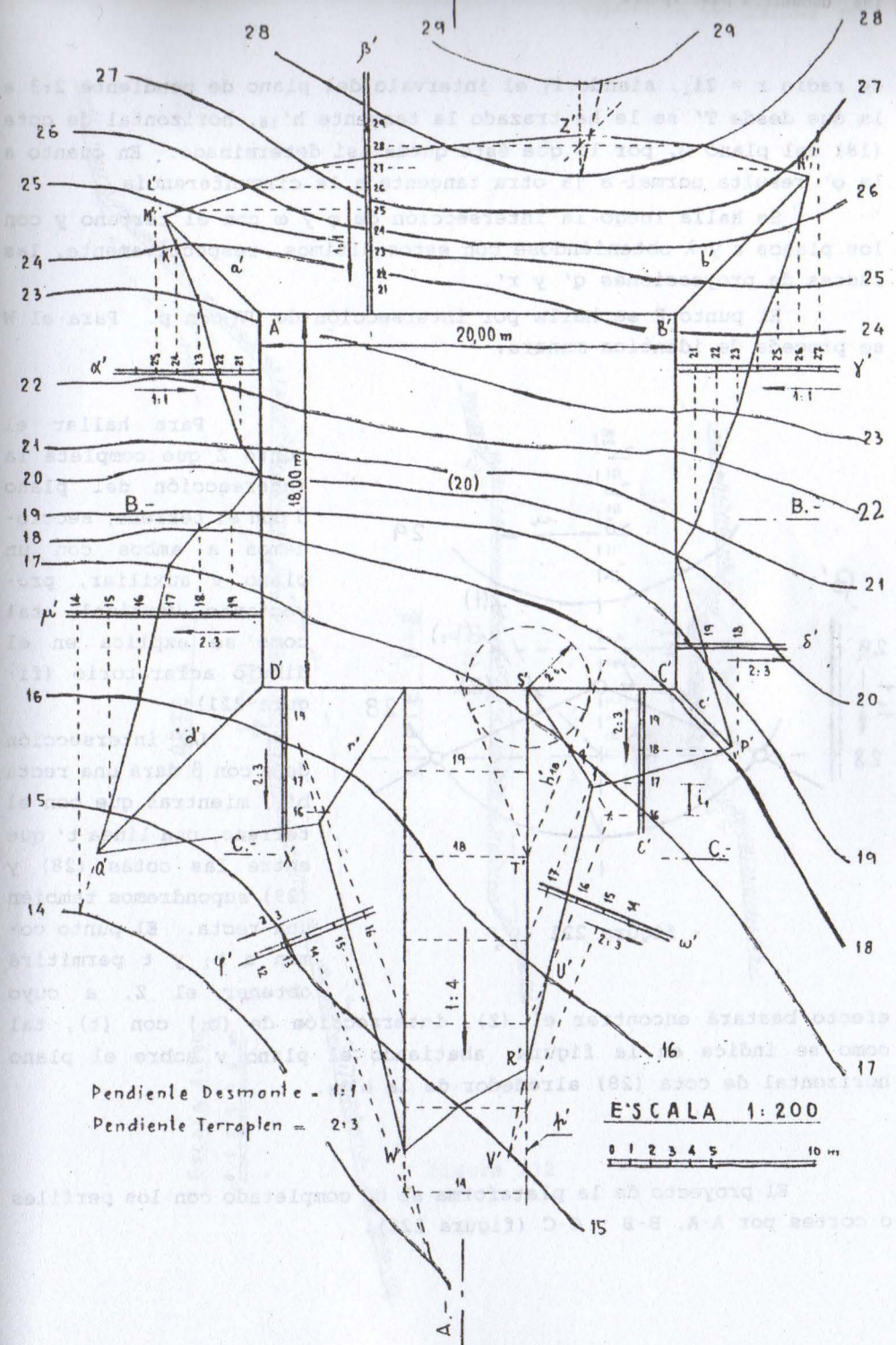
El punto M', intersección de  $a$  con el terreno, se ha determinado cortando a la  $a'$  con K'L', recta común al plano  $\alpha$  y al terreno. Para el punto N' se procede igual.

Los planos  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ , correspondientes al terraplén, se han dibujado con sus líneas de máxima pendiente normales a los bordes de la plataforma horizontal de cota (20) de cada uno de esos planos. Dos a dos se cortan en las rectas de proyecciones  $c'$  y  $d'$ .

Para los puntos P y Q se procede tal como se indicó para el M.

La rampa de pendiente 1:4 también se halla por arriba del terreno, por lo que habrá un terraplén cuya identificación con el terreno se ha hecho con los planos  $\omega$  y  $\phi$  de pendiente 2:3.

La recta de máxima pendiente de estos planos -la  $\omega'$ , por ejemplo- se traza pensando que este plano tiene una pendiente 2:3 y se apoya en la recta p, de pendiente 1:4, que pertenece a la rampa. Este problema ha sido resuelto en el parágrafo 92. En nuestro ejercicio (figura 220), con centro en S' se ha dibujado una circunferencia

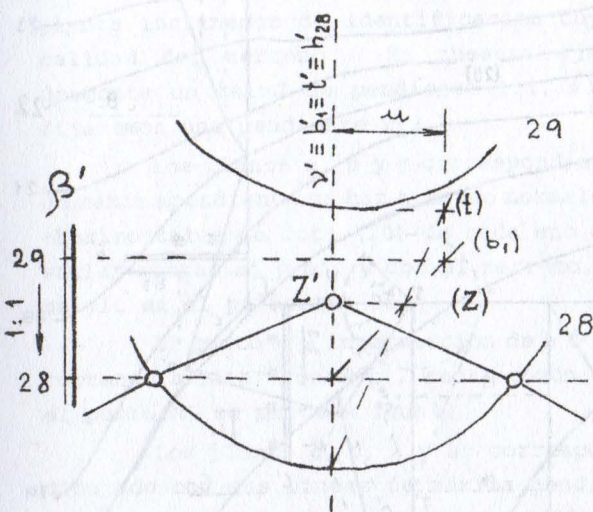




de radio  $r = 2i_1$ , siendo  $i_1$  el intervalo del plano de pendiente 2:3 a la que desde  $T'$  se le ha trazado la tangente  $h'_{18}$ , horizontal de cota (18) del plano  $\omega$ , por lo que éste queda así determinado. En cuanto a la  $\phi'$  resulta normal a la otra tangente a la circunferencia.

Se halla luego la intersección de  $\phi$  y  $\omega$  con el terreno y con los planos  $\varepsilon$  y  $\lambda$  obteniéndose con estos últimos, respectivamente, las rectas de proyecciones  $q'$  y  $r'$ .

El punto  $R$  se halla por intersección de  $UV$  con  $p$ . Para el  $W$  se procede de idéntica manera.



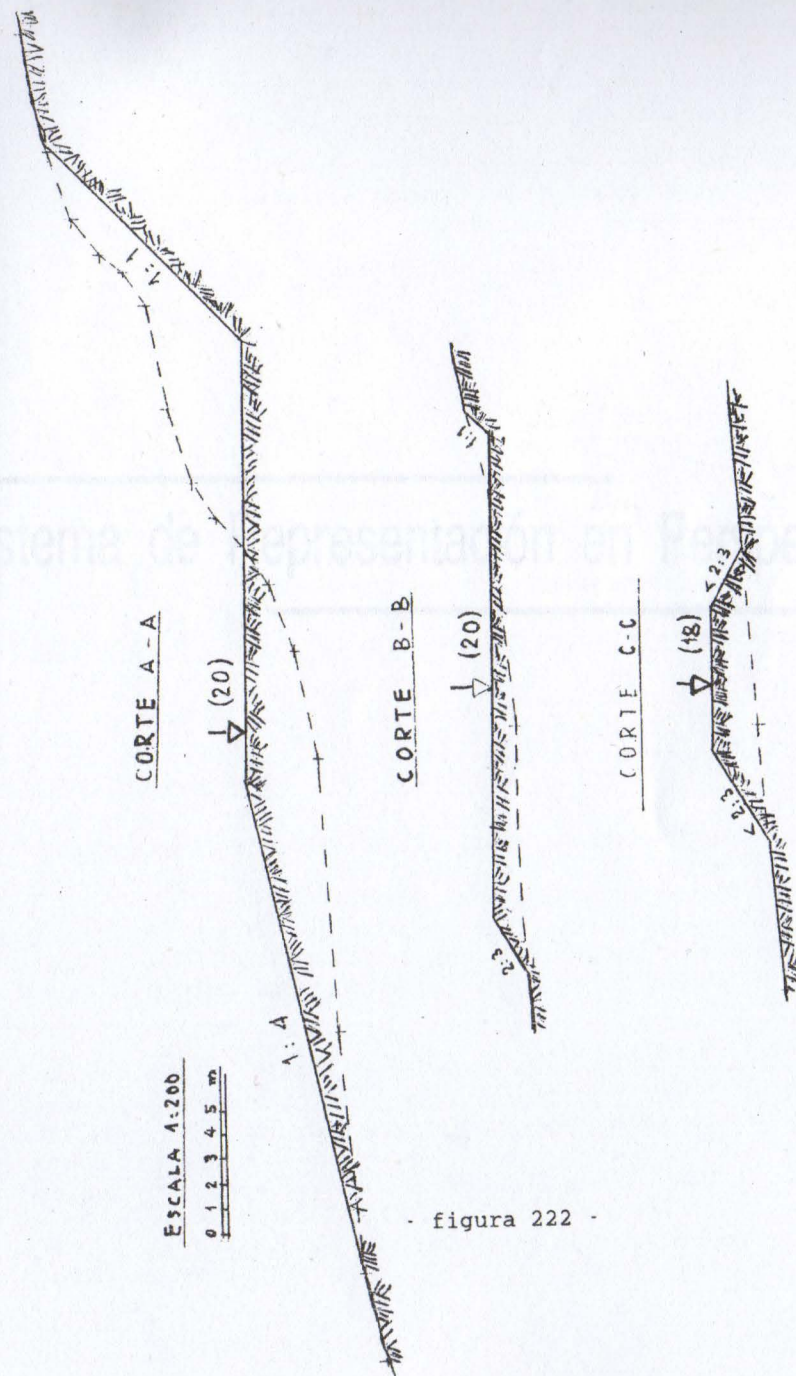
- figura 221 -

efecto bastará encontrar el  $(Z)$ , intersección de  $(b_1)$  con  $(t)$ , tal como se indica en la figura, abatiendo el plano  $v$  sobre el plano horizontal de cota (28) alrededor de la  $h'_{28}$ .

El proyecto de la plataforma se ha completado con los perfiles o cortes por A-A, B-B y C-C (figura 222).

Para hallar el punto  $Z$  que completa la intersección del plano  $\beta$  con el terreno, seccionemos a ambos con un plano  $v$  auxiliar, proyectante vertical, tal como se explica en el dibujo aclaratorio (figura 221).

La intersección de  $v$  con  $\beta$  dará una recta  $b'_1$ , mientras que con el terreno, una línea  $t'$  que entre las cotas (28) y (29) supondremos también una recta. El punto común a  $b_1$  y  $t$  permitirá obtener el  $Z$ , a cuyo



- figura 222 -



# La Proyección Central y la Perspectiva

100.- **Proyección Central y Perspectiva.** Se proyecta un punto sobre un plano  $\pi$  desde un punto  $O$  sobre el plano  $\pi$  llamado  $O$ , llamado  $O$  el centro de proyección. Si  $P$  es un punto de la recta  $OP$  que intersecciona a  $\pi$  en  $P'$ , se dice que  $P'$  es la proyección central de  $P$  desde  $O$ .

La figura 2 muestra un ejemplo de proyección central. El punto  $O$  es el centro de proyección,  $P$  es el punto a proyectar y  $P'$  es su proyección sobre el plano  $\pi$ .

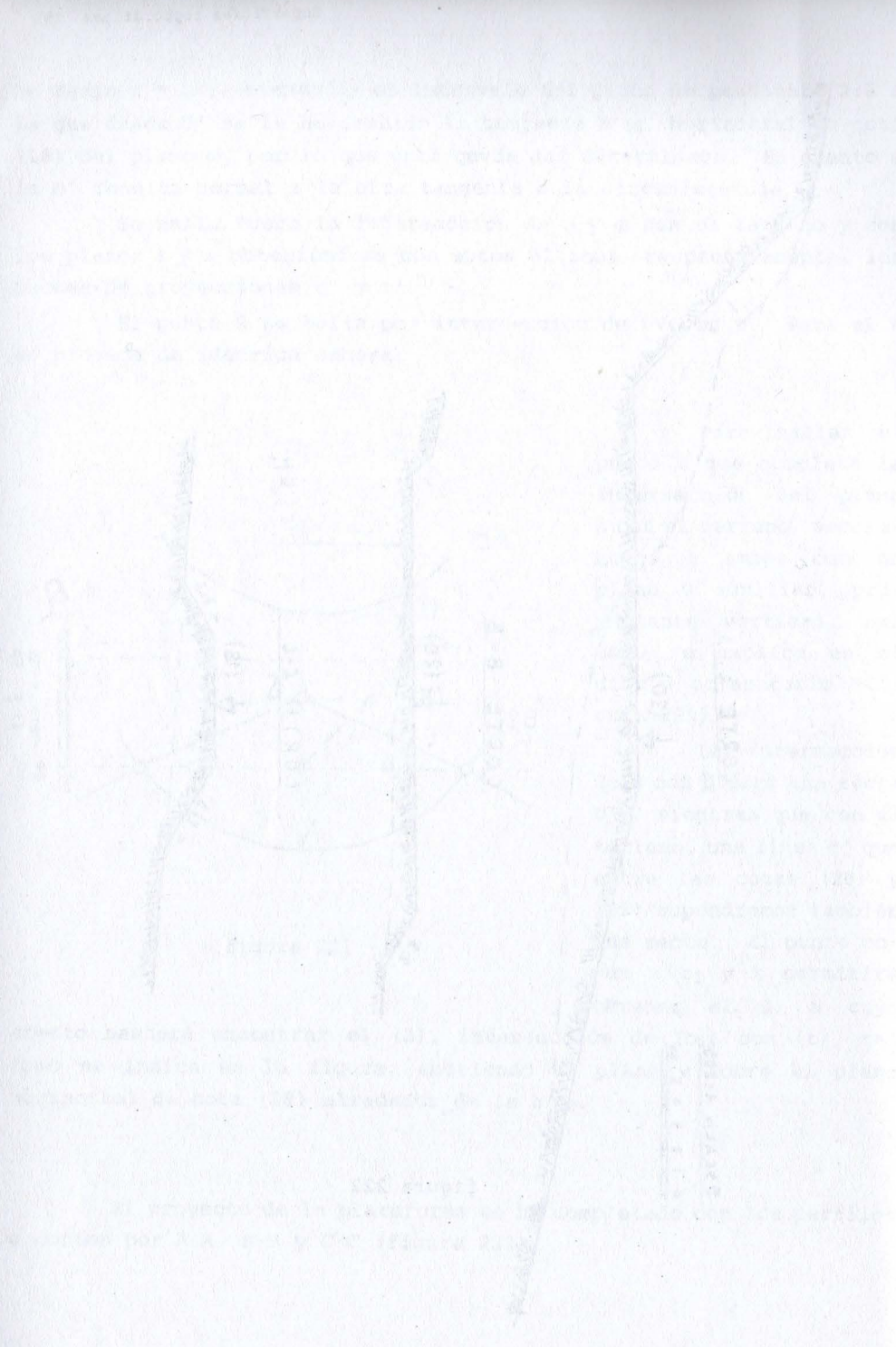
## Sistema de Representación en Perspectiva

El sistema de proyección se llama "central" porque el centro de proyección es un punto propio o "finito". Cuando el centro de proyección es un punto al infinito, se llama "perspectiva". En este sistema, las rectas que pasan por el centro de proyección y los puntos del objeto se proyectan sobre el plano de proyección como rectas que pasan por un punto, respectivamente.

Este sistema de proyección se llama "central" porque el centro de proyección es un punto propio o "finito". Cuando el centro de proyección es un punto al infinito, se llama "perspectiva". En este sistema, las rectas que pasan por el centro de proyección y los puntos del objeto se proyectan sobre el plano de proyección como rectas que pasan por un punto, respectivamente.

La parte 1 muestra la construcción de la perspectiva de un objeto. Se toma un punto  $O$  como centro de proyección y se proyecta el objeto sobre un plano  $\pi$ . Las rectas que pasan por  $O$  y los puntos del objeto se proyectan sobre  $\pi$  como rectas que pasan por un punto, respectivamente.

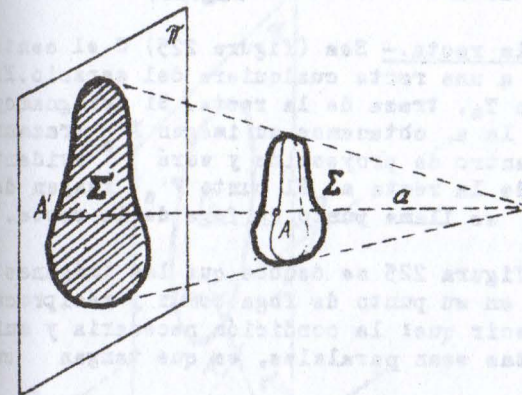
Para representar un objeto en perspectiva, se necesita un centro de proyección y un plano de proyección.





# La Proyección Central y la Perspectiva

100.- Nociones sobre Proyección Central. El procedimiento más sencillo para representar una forma  $\Sigma$  consiste en proyectarla desde un punto  $O$  sobre un plano  $\pi$  (figura 223), hallando las intersecciones con dicho plano de las rectas determinadas por cada punto  $A$  de  $\Sigma$  se obtiene el  $A'$  como intersección de  $OA = a$  y  $\pi$ . De esta manera resulta  $\Sigma'$ .



La figura  $\Sigma'$ , obtenida sobre  $\pi$  (figura 223) es la proyección o imagen de  $\Sigma$ ; el punto  $O$  desde el cual se la supone vista es el centro de proyección o punto de vista; el plano  $\pi$  donde aparece la proyección  $\Sigma'$  es el cuadro, y la recta  $OA = a$  es el rayo proyectante o visual, según que  $O$  sea considerado como centro de proyección o punto de vista, respectivamente.

Fig. 223

Este sistema de proyección se llama "central" porque el centro de proyección es un punto propio, o también "cónico" porque dicho centro y la forma  $\Sigma$  determinan una superficie cónica. Los procedimientos de trazado, en este sistema, parten del conocimiento de la forma y dimensiones de una figura, para obtener la imagen según la situación de aquella respecto al cuadro y al centro de proyección.

Es obvio y surge de la simple observación de la figura que a cada punto del espacio, corresponde un punto, y uno sólo, del cuadro; es decir que dado un punto del espacio queda determinada perfectamente su imagen. En cambio a un punto del cuadro corresponden, en general, infinitos puntos del espacio, por lo tanto la imagen de un punto no es suficiente para determinarlo.

Para determinar, sobre el cuadro, la posición del centro  $O$  de



proyección con respecto a aquel (figura 224) se dibuja su proyección ortogonal, a la que se indica con la letra  $P_1$  y se le llama punto principal.

La distancia  $\delta = OP_1$  entre el centro de proyección y el cuadro se llama distancia principal. La circunferencia de centro  $P_1$  y radio  $\delta$  dibujada sobre el cuadro define sobre este plano la posición de aquel centro de proyección; es la circunferencia de distancia.

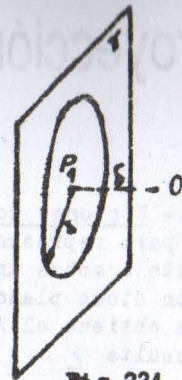


Fig. 224

101.- Representación de la recta.— Sea (figura 225)  $O$  el centro de proyección,  $\pi$  el cuadro y a una recta cualquiera del espacio. Esta corta al cuadro en el punto  $T_a$ , traza de la recta. Si designamos por  $F_\infty$  al punto impropio de la  $a$ , obtenemos su imagen  $F'_a$  trazando la paralela a la  $a$  por el centro de proyección y será evidentemente  $a' = T_a F'_a$  la imagen de la recta  $a$ . El punto  $F'_a$ , imagen del punto impropio de la recta  $a$  se llama punto de fuga de la recta.

De la observación de la figura 225 se deduce que las imágenes de rectas paralelas concurren en su punto de fuga común y recíprocamente, por lo tanto podemos decir que la condición necesaria y suficiente para que dos o más rectas sean paralelas, es que tengan sus puntos de fuga coincidentes.

También es oportuno observar que todas las perpendiculares al cuadro tienen su punto de fuga que coincide con el punto principal.

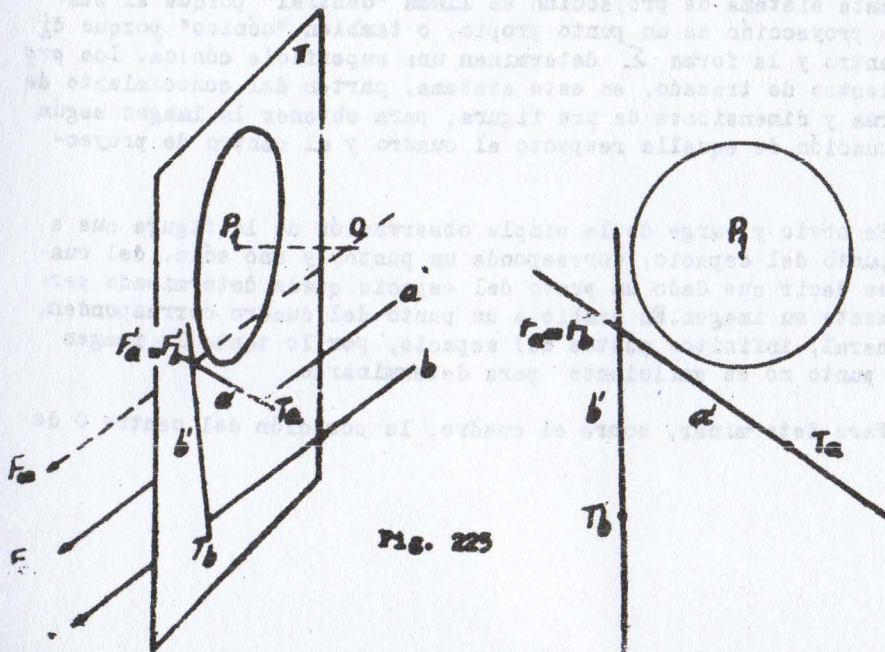


Fig. 225

102. Representación del punto. La imagen de un punto es como ya se ha dicho, la intersección del rayo proyectante del punto con el cuadro.

Pero es evidente que todos los puntos contenidos en dicho rayo tienen la misma imagen; en consecuencia la simple proyección del punto es insuficiente para ubicarlo.

Como para determinar un punto bastan dos rectas, representaremos al punto por su imagen y por una recta que lo contenga y que no pase por el centro de proyección. Así (figura 226) el punto  $A = A'$ ,  $T_r P'_r$  será la intersección del rayo  $OA$ , que lo proyecta, con la recta  $T_r F'_r = r$

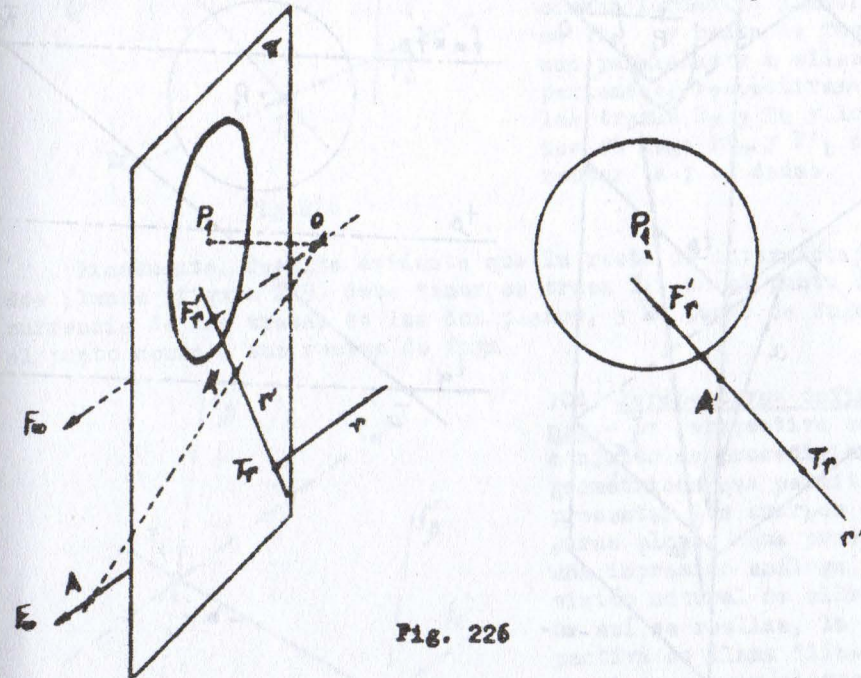


Fig. 226

103.- Representación del plano. Sea (figura 227)  $\alpha$  un plano cualquiera no paralelo al de proyección. Su intersección con este último  $t_\alpha = \alpha \cap \pi$  se llama traza del plano. Si proyectamos a la recta impropia del plano  $\alpha$ , es decir si por el centro de proyección trazamos el plano  $\beta$  paralelo al  $\alpha$ , su intersección  $f'_\alpha$  con el cuadro, es la imagen de la recta impropia  $f_\infty$  del plano  $\alpha$  y se llama recta de fuga del plano  $\alpha$ . Es evidente que la traza y la recta de fuga de un plano son siempre paralelas.



Si un plano pasa por el centro de proyección, su traza y su recta de fuga coinciden en una sola recta.

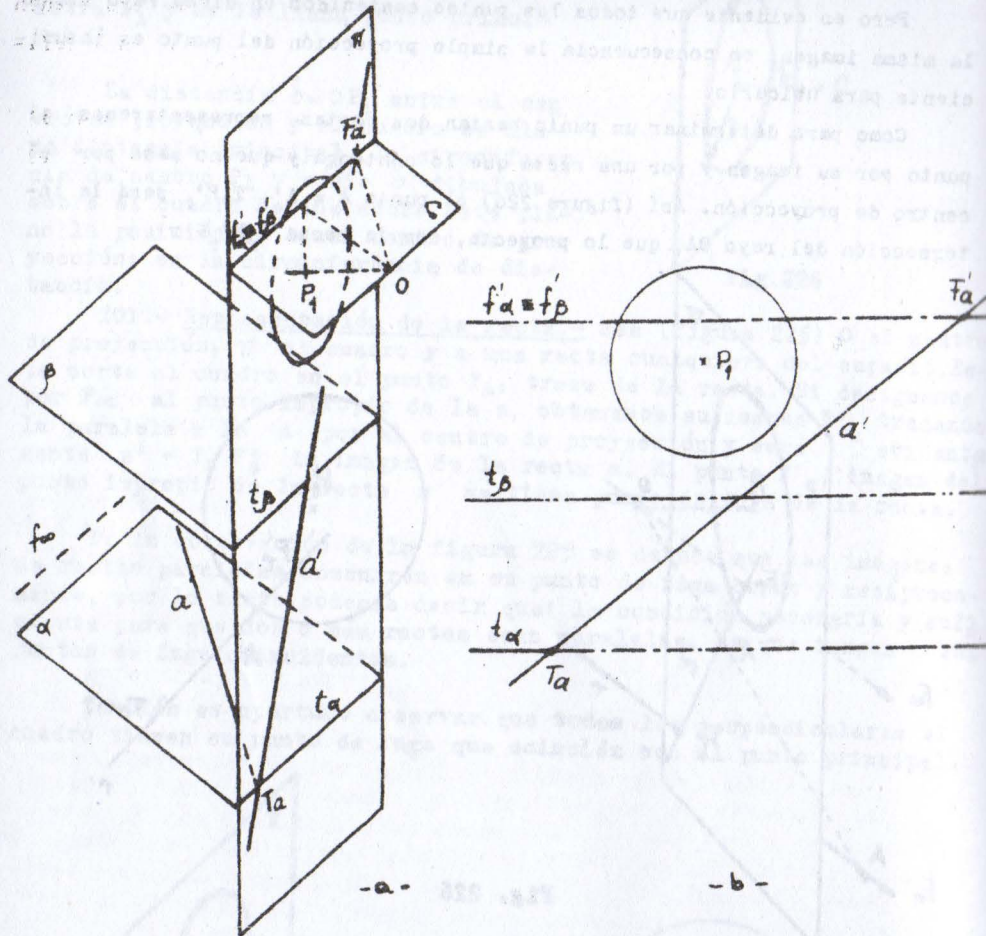


Fig. 227

Si dos planos son paralelos (figura 227) es evidente que tienen la misma recta de fuga, y recíprocamente, por lo tanto: la condición de paralelismo de dos planos es que tengan la misma recta de fuga.

De la observación de la figura 227-a se deduce que: para que una recta pertenezca a un plano, es condición necesaria y suficien

te que la traza y el punto de fuga de la recta pertenezcan a la traza y a la recta de fuga del plano, respectivamente (figura 227-b)

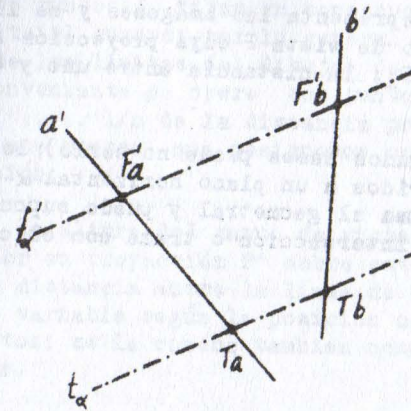


Fig. 228

Como consecuencia podemos decir que para que dos rectas se corten se debe cumplir que la recta determinada por sus trazas sea paralela a la determinada por sus puntos de fuga (figura 228). Desde luego, si las rectas se cortan forman un plano; su traza  $t_\alpha$  y recta de fuga  $f'_\alpha$  son paralelas y a ellas deben pertenecer respectivamente las trazas  $T_a$  y  $T_b$  y los puntos de fuga  $F'_a$  y  $F'_b$  de las rectas  $a$  y  $b$  dadas.

Finalmente, resulta evidente que la recta de intersección de dos planos (figura 229) debe tener su traza  $T_i$  en el punto de concurrencia de las trazas de los dos planos, y su punto de fuga  $P_i$  en el punto común a sus rectas de fuga.

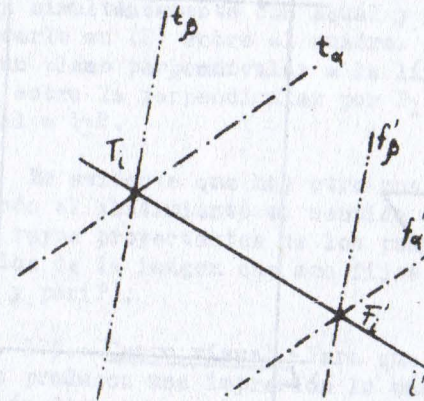


Fig. 229

104. Perspectiva: definiciones.— La Perspectiva es el conjunto de procedimientos geométricos que permiten representar los cuerpos con figuras planas que producen una impresión análoga a la visión natural de ellos. Cuando así se realiza, la Perspectiva se llama "lineal" pero si se agrega el trazado de la sombra y la aplicación del colorido se tiene la "Perspectiva aérea".

La Perspectiva es un caso particular de la Proyección Central o Cónica donde los elementos de representación se hallan dispuestos en una posición determinada. Primitivamente la Pers



pectiva se obtenía grabando sobre un vidrio los puntos que a su través marcaban los rayos determinados por el objeto y al ojo del observador.

El plano  $\Pi$  es en el que se representa las imágenes y se llama cuadro (figura 230); hay un punto de vista  $P$  cuya proyección sobre el mismo es el punto principal  $P_1$ ; la distancia entre uno y otro es la distancia principal  $\delta$  .-

El cuadro es vertical (en algunos casos puede no serlo); los objetos se suponen apoyados o referidos a un plano horizontal  $\alpha$ , perpendicular al cuadro, que se llama el geometral y puede suponerse que es el suelo, por lo que su intersección o traza con el cuadro se llama línea de tierra o LT.

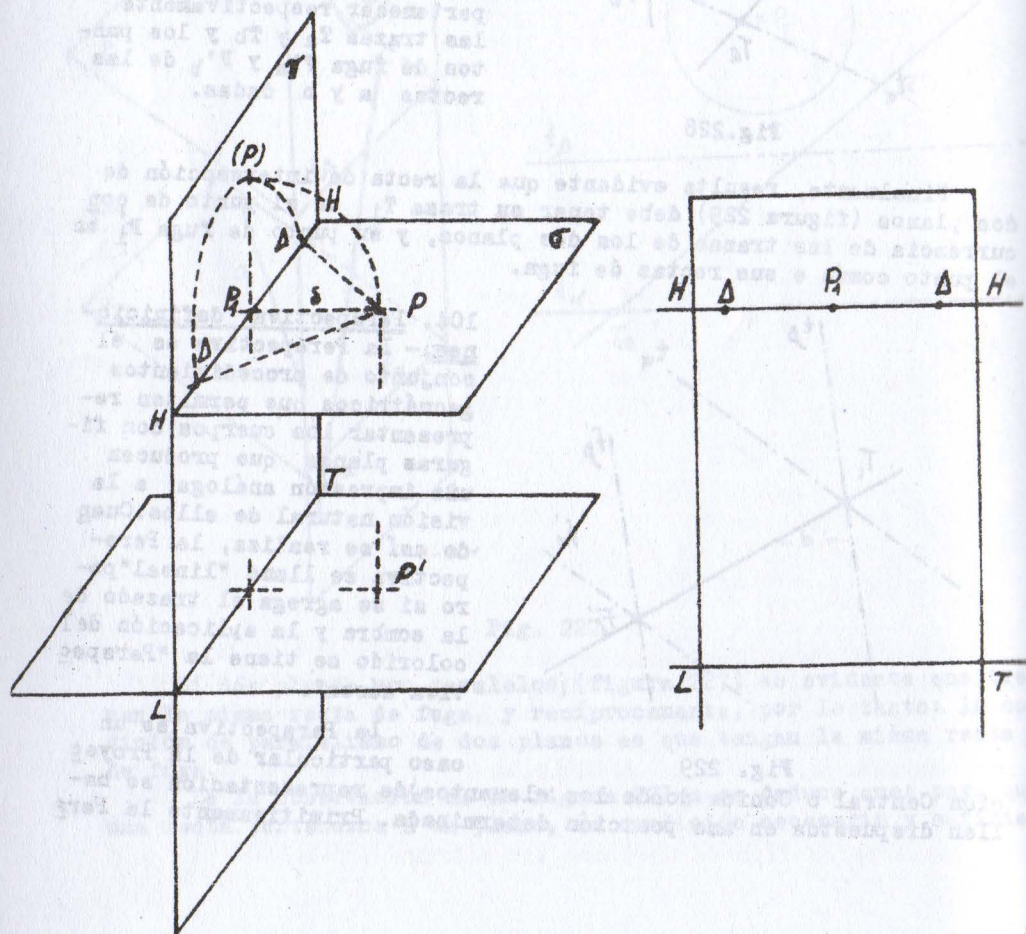


Fig. 230

La recta de fuga del geometral o imagen de la recta impropia

del mismo es una horizontal que pasa por el punto principal  $P_1$  y se llama línea de horizonte, o simplemente horizonte  $HH$ ; sus intersecciones con el círculo de distancia son los puntos de distancia  $\Delta$ . Estos puntos  $\Delta$  fijan en consecuencia la posición del observador frente al cuadro; por lo general quedan fuera del cuadro y aún fuera de los límites del dibujo; de allí entonces que para obviar este inconveniente se opere con puntos de distancia reducidos a  $1/2$ ,  $1/3$ , .....  $1/n$  de la distancia principal  $\delta$ ; marcando sobre el horizonte puntos que designamos con  $\Delta/2$ ,  $\Delta/3$ ....  $\Delta/n$  según sea la reducción.

La altura del punto de vista  $P$  con respecto al geometral, dada por su proyección  $P'$  sobre este plano, la que a su vez es igual a la distancia entre la línea de tierra y el horizonte, es una medida variable según la posición con que quieran representarse los objetos; se la conoce también como altura del horizonte o del observador.

El ancho del cuadro no es una medida arbitraria, sino que depende del ángulo visual y, por lo tanto, de la distancia principal, tal como veremos en el párrafo siguiente.

Si el geometral se abate sobre el cuadro (figura 230), gira alrededor de la línea de tierra la que permanece fija; pero el plano  $\sigma$  paralelo al  $\alpha$  trazado por  $P$  y que da la línea de horizonte gira simultáneamente con aquél y arrastra al punto de vista hasta ubicarlo en  $(P)$  sobre el cuadro. El círculo que describe  $P$  está en un plano perpendicular a la línea de horizonte; por lo tanto  $(P)$  cae sobre la perpendicular por  $P_1$  a esta última y a una distancia igual a  $P_1P$ .

Es evidente que hay otra posición de  $(P)$  simétrica de ésta, haciendo el abatimiento en sentido opuesto. También se comprende que los rayos proyectantes de los puntos de una figura, giran alrededor de los de la imagen que son fijos; en el abatimiento pasan por éstos y por  $(P)$ .

105.- Campo visual.- Para que la representación plana de un objeto produzca una impresión lo más análoga posible a la de su observación directa, es necesario tener presente algunas nociones sobre el fenómeno de la visión.



Es sabido que el ojo humano, órgano esencial de nuestras percepciones luminosas, es un sistema óptico bastante complejo que se pueda sustituir a los efectos de la formación de las imágenes de los cuerpos por un sistema de lentes de centro óptico  $C$  (fig. 232). Dichas imágenes proyectadas al fondo del ojo inciden sobre la retina, membrana sensible a la luz, produciendo finalmente a través del nervio óptico la sensación de la figura y forma de los cuerpos.

Recordemos además que la retina, en la región opuesta al cristalino, presenta una mancha circular (mácula lútea) de color amarillo en cuyo centro hay una pequeña depresión (fóvea centralis) donde la retina acusa la máxima sensibilidad. Esta sensibilidad se anula por completo en la zona de inserción del nervio óptico en la retina, la que constituye el llamado punto o mácula ciega del ojo pues las imágenes que allí inciden no son percibidas.

Cuando deseamos obtener una imagen clara de un objeto lo miramos directamente de modo que su imagen caiga en la fóvea centralis, pues esta nos proporciona la máxima visión de que somos capaces, esto constituye la visión central directa.

En cambio cuando la imagen cae en el resto de la retina, que es la mayor parte de ella, se tiene la visión periférica o indirecta, que si bien no es clara tiene mucha importancia para nuestra guía y seguridad.

El campo visual representa los límites de la visión periférica o indirecta, es decir es el espacio en el cual puede ser visto un objeto mientras la mirada permanece fija en un punto determinado.

La extensión del campo visual normal para la visión monocular y referida a un objeto blanco puede observarse en la figura 231, que corresponde al ojo izquierdo (1) y se extiende hacia afuera  $90^\circ$  o más; hacia arriba  $55^\circ$ , hacia adentro  $60^\circ$  y hacia abajo  $70^\circ$ .

La reducción del campo por dentro y arriba obedece además de la interposición de la nariz y del arco superciliar a que el borde de las capas sensibles de la retina se extienden hacia adelante

más del lado nasal que del temporal.

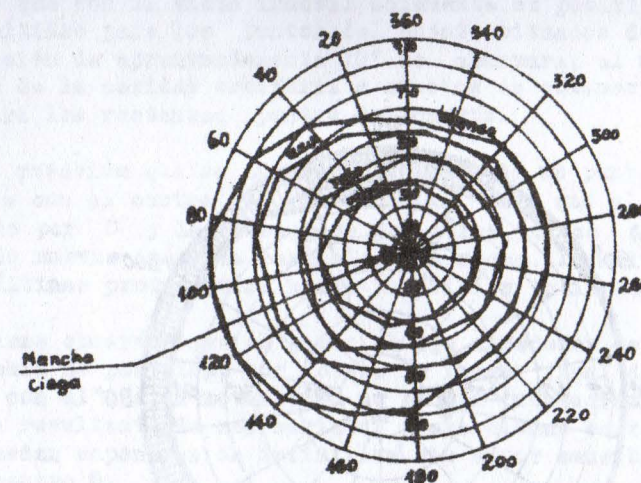


Fig. 231

De acuerdo con estos datos en la figura 232 se muestra la proyección de la retina sobre un plano  $\pi$  perpendicular al rayo visual determinado por el centro óptico  $C$  y la fóvea centralis. Para obtenerla se ha proyectado ortogonalmente al plano  $\pi$ , que luego abatimos, la proyección de la retina desde el centro óptico  $C$  sobre una superficie esférica de centro coincidente con  $C$ .

(1) Ernst Fuchs - Oftalmología - Ed. Labor S.A. 1958.



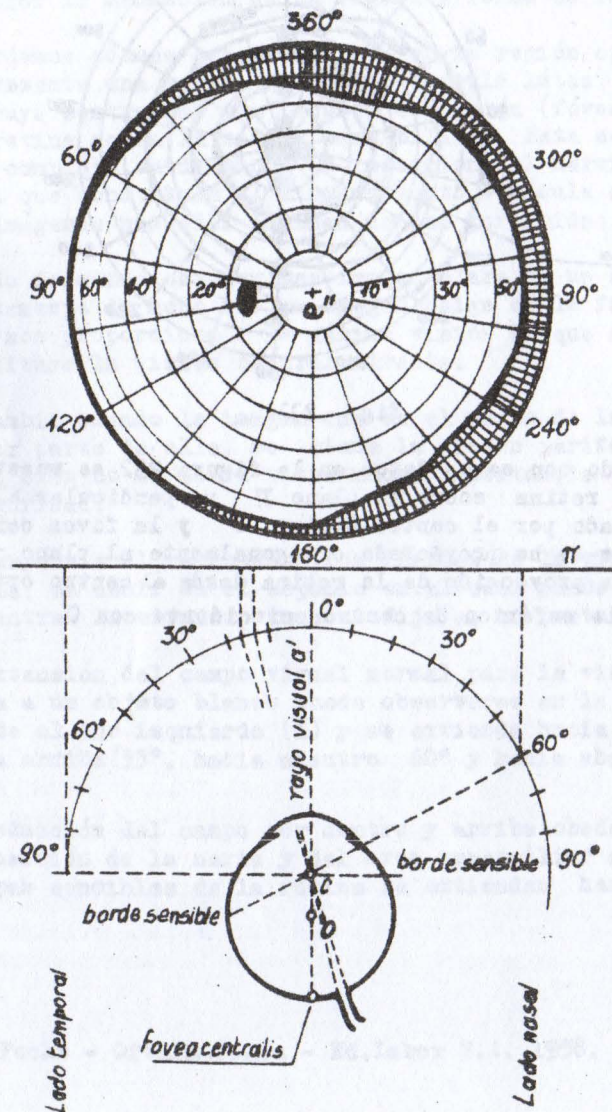


Fig. 232

Dado que con la vista inmóvil solamente es posible obtener imágenes nítidas para los puntos del objeto situados dentro de un cono de visión de aproximadamente  $10^\circ$  de abertura, el ojo debe girar dentro de la cavidad orbitaria a efectos de obtener la misma nitidez para los restantes puntos del cuerpo.

Esta rotación que se efectúa alrededor de un punto  $O$  casi coincidente con el centro del globo ocular, hace que el rayo visual determinado por  $C$  y la fovea pase por otros puntos del objeto produciendo nuevas imágenes parciales del mismo. La multiplicidad de estas últimas produce finalmente la visión total del cuerpo.

Conviene observar que al girar el ojo alrededor de  $O$  el centro  $C$  cambia de posición, por lo que la imagen final de la visión monocular con el ojo en movimiento no es una proyección central única sino la resultante de una serie de proyecciones centrales aisladas que puedan superarse en definitiva sin error sensible como otra única de centro  $O$ .

Si se observa la perspectiva o proyección central de un objeto con la mirada en movimiento y se logra que el centro  $O$  de giro del ojo coincida con el de proyección, se superpondrán los rayos visuales con los de proyección y se obtendrá de la representación plana una impresión óptica análoga a la producida por la observación directa del cuerpo.

Con el fin de obtener este resultado el trazado geométrico deberá someterse a ciertas limitaciones.

Estas resultan entre otras y esencialmente en considerar de acuerdo con lo expuesto que el campo visual es más largo que alto por lo que es posible encerrarlo dentro de un rectángulo llamado rectángulo límite (fig. 233).

La vinculación entre sus lados  $a$  y  $b$  y la distancia principal  $\delta$  en función de los ángulos visuales  $\omega$  y  $\lambda$ , permite ubicar al observador  $P$  frente a las dimensiones del cuadro de manera tal que el trazado resultante no presente deformaciones comparativamente a la imagen real.



No obstante estas conclusiones, marginando otros estudios (1) atendiendo a una mayor simplicidad, sustituiremos la pirámide óptica

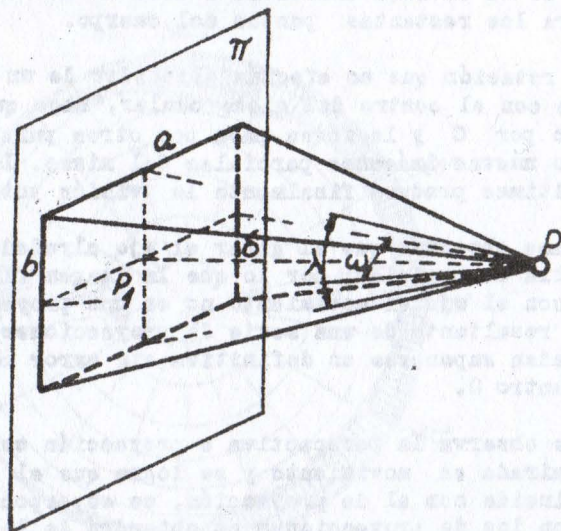


Fig. 233

tica formada por el rectángulo y el punto de vista por un cono de rotación (fig. 234) cuya abertura está dada por el ángulo visual  $\varphi$  que oscila entre los 30 y 45° aproximadamente. La altura del cono óptico coincide con la distancia principal y su base encierra el borde más externo del cuadro o imagen.

Es fácil ver que para los referidos valores del ángulo visual de 30° y 45° resulta la relación  $\delta / IT$  (distancia principal sobre ancho del cuadro) igual a 1,86 y 1,21 respectivamente.

Esto significa que ubicando el observador a una distancia en

(1) Entre otros: Dr. Wolfgang Haak -Geometría Descriptiva Ed. UTEHA 1962.

promedio igual a una vez y media el ancho del cuadro, las imágenes no aparecerán deformadas y la perspectiva producirá el efecto perpendicular.

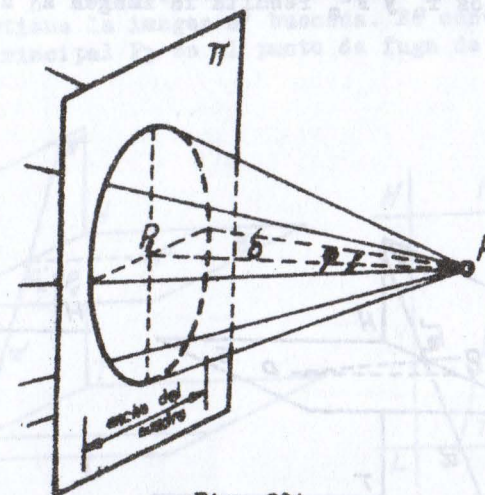


Fig. 234

106.-Representación de los elementos.- En todo trazado perspectivo, de acuerdo con los párrafos precedentes, será fundamental partir de los siguientes datos (fig. 230).

- la línea de horizonte  $H H'$
- el punto principal  $P_1$ , proyección del punto de vista.
- la distancia principal  $\delta$ : puntos  $\Delta$  ó  $\Delta/n$
- la línea de tierra  $IT$  o traza del geometral, de la que en algunos casos se puede prescindir si las medidas de las figuras no son absolutas, sino que pueden tomarse en proporción cualquiera con ellas.

Para un mejor entendimiento de lo que sigue conviene tener presente lo explicado en los párrafos 100 a 103 inclusive, pues lo que se dice vale para posiciones particulares de los elementos de referencia utilizados en la Proyección Central.



107.- Representación de la recta. Sea (figura 235) la recta  $a$  contenida en el plano del geometral  $\alpha$  y no paralela al cuadro  $\Pi$ . Su intersección con este último plano es el punto  $T_a$ , traza de la recta, que se sitúa sobre la LT; mientras que sobre la HH se obtiene el punto de fuga  $F'_a$ , imagen del punto impropio  $F_\infty$  de  $a$  y que resulta de trazar por el punto de vista  $P$  una paralela a la recta  $a$ . Unidos  $T_a$  y  $F'_a$  resulta la imagen  $a'$  de  $a$ .

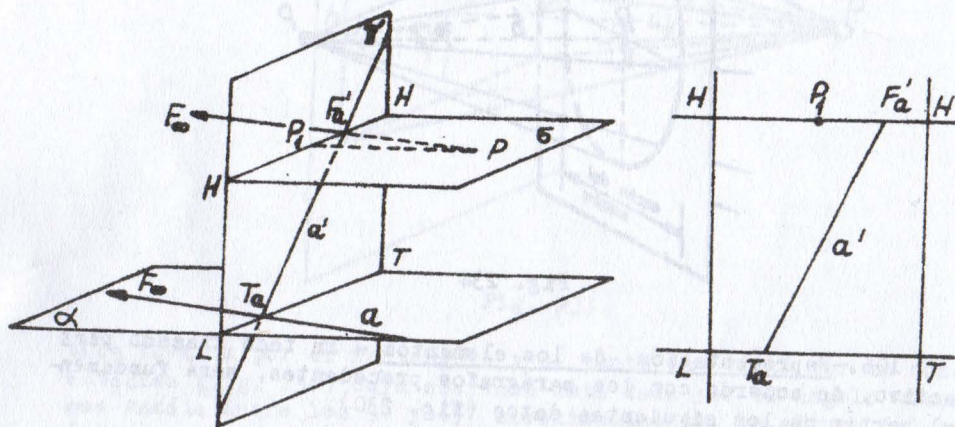


Fig. 235

Las posiciones más importantes que pueden tener las rectas son, entre otras, las siguientes:

a) Recta perpendicular al cuadro. Sea  $n$  (figura 236) una recta arbitraria perpendicular al cuadro  $\Pi$  contenida en el plano del geometral  $\alpha$ . Sobre la LT se obtiene la traza  $T_n$  y sobre la HH el punto de fuga  $F'_n$ , coincidente con el punto principal  $P_1$ . Unidos  $T_n$  y  $F'_n$  se obtiene la imagen  $n'$  buscada. Es conveniente observar que el punto principal  $P_1$  es el punto de fuga de todas las normales al cuadro.

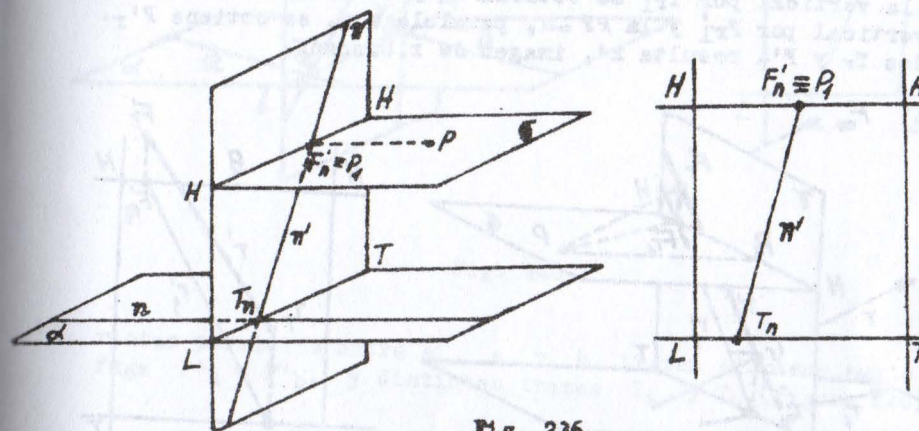


Fig. 236

b) recta oblicua a  $45^\circ$  con el cuadro. Sea  $m$  (figura 237) una recta inclinada a  $45^\circ$  con el cuadro  $\Pi$  contenida en el plano del geometral  $\alpha$ . Sobre la LT se obtiene la traza  $T_m$  y sobre la HH el punto de fuga  $F'_m$  que resulta coincidente con el punto de distancia entero  $\Delta$ . Unidos  $T_m$  y  $F'_m$  se obtiene la imagen  $m'$  buscada.

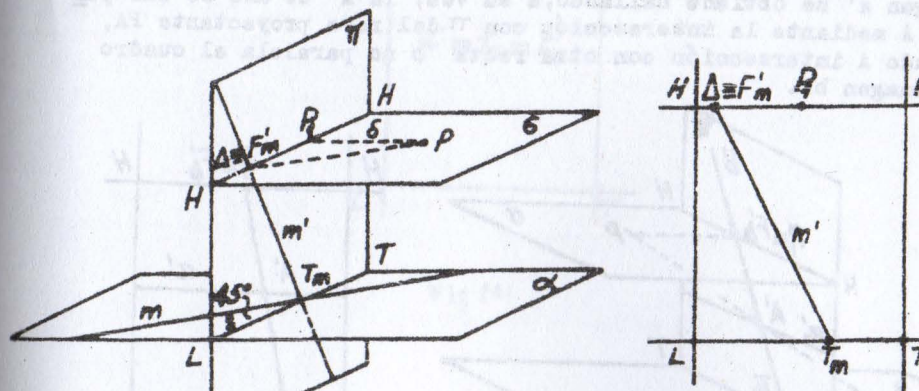


Fig. 237



Si pensamos en la recta simétrica a la  $m$ , con respecto al cuadro, su punto de fuga será el punto de distancia entera  $\Delta$  de la derecha.

En consecuencia los puntos de distancia entera  $\Delta$  son los puntos de fuga de todas las rectas que forman  $45^\circ$  con el cuadro.

- c) Recta que no pertenece al plano del geometral. Si la recta  $r$  no pertenece al plano del geometral  $\alpha$  (figura 238), su imagen se determina hallando la proyección  $r_1$  de la misma sobre ese plano y conseqüentemente la traza  $T_{r_1}$  y punto de fuga  $F'_{r_1}$ ; luego sobre la vertical por  $T_{r_1}$  se obtiene  $f_r$  y en la intersección de la vertical por  $F_{r_1}$  y la  $PF_{\infty}$ , paralela a  $r$ , se obtiene  $F'_r$ . Unidos  $T_r$  y  $F'_r$  resulta  $r'$ , imagen de  $r$  buscada.

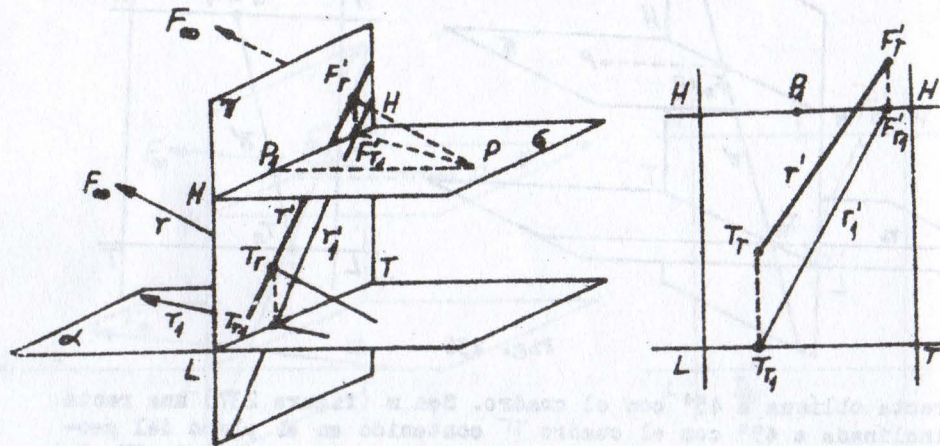


Fig. 238

- d) paralela al cuadro. Sea (fig. 239) una recta  $a$  paralela al plano del cuadro  $\pi$ . Su traza y punto de fuga son impropios; luego su imagen  $a'$  se obtiene hallando, a su vez, la  $A'$  de uno de sus puntos  $A$  mediante la intersección con  $\pi$  del rayo proyectante  $PA$ , siendo  $A$  intersección con otra recta  $b$  no paralela al cuadro de imagen  $b'$ .

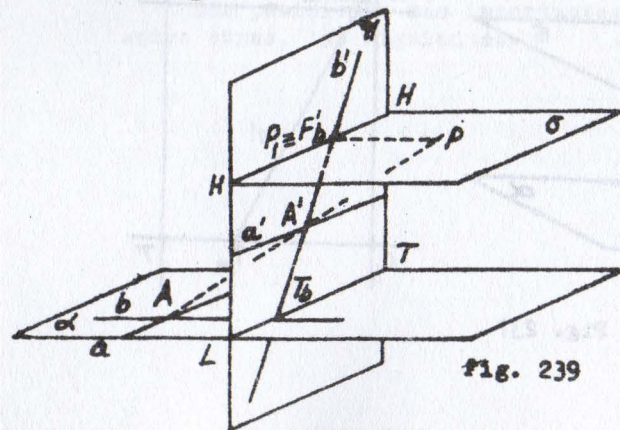


Fig. 239

De lo dicho se deducen por evidentes las siguientes conexiones:

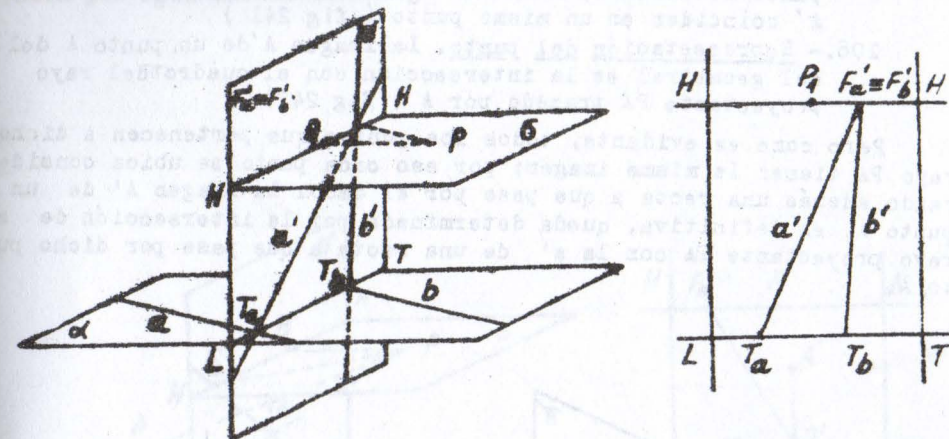


Fig. 240

1. rectas paralelas entre sí,  $a$  y  $b$ , tienen el mismo punto de fuga  $F'_a = F'_b$ , y distintas trazas  $T_a$  y  $T_b$  (figura 240)

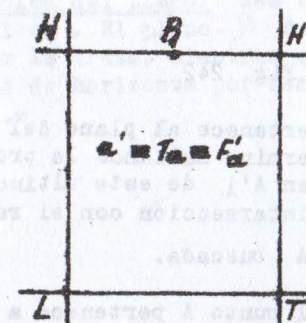


Fig. 241



2. Si la recta  $a$  es proyectante, vale decir si pasa por el punto de vista  $P$ , su traza  $T_a$ , punto de fuga  $F'_a$  e imagen  $a'$  coinciden en un mismo punto (fig 241).

106.- Representación del punto. La imagen  $A'$  de un punto  $A$  del del geometral es la intersección con el cuadro del rayo proyectante  $PA$  trazado por  $A$  (fig 242).

Pero como es evidente, todos los puntos que pertenecen a dicho rayo  $PA$  tienen la misma imagen; por eso cada punto se ubica considerando además una recta  $a$  que pase por el dado. La imagen  $A'$  de un punto  $A$ , en definitiva, queda determinada por la intersección de su rayo proyectante  $PA$  con la  $a'$  de una recta  $a$  que pase por dicho punto  $A$ .

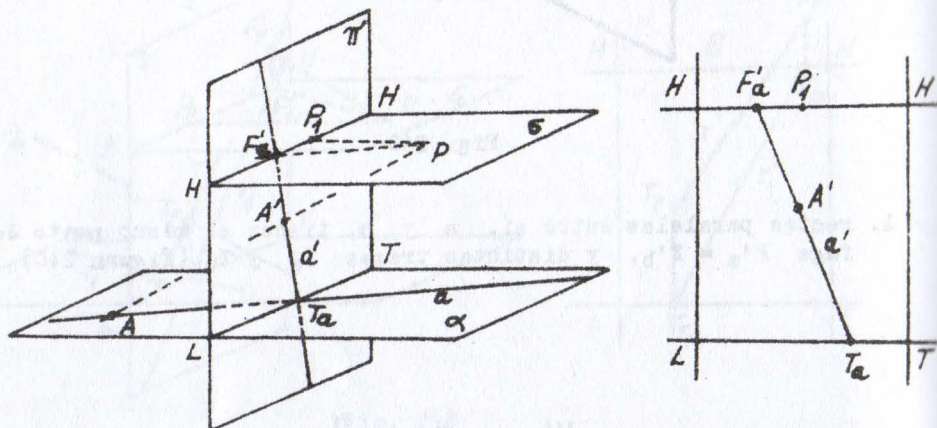


Fig. 242

Si el punto  $A$  no pertenece al plano del geometral  $\alpha$  (figura 243), su imagen  $A'$  se determina hallando la proyección  $A_1$  sobre ese plano, y sobre  $\pi$  la imagen  $A'_1$  de este último punto. Levantando por  $A'_1$  una vertical su intersección con el rayo proyectante  $PA_1$  determina  $A'$  imagen de  $A$  buscada.

Es evidente que si el punto  $A$  pertenece a la  $LT$ , su imagen  $A'$  coincide con el punto dado por esta línea contenida en el plano del cuadro  $\pi$ .

Como se verá más adelante los puntos que determinan una figu-

ra se ubicarán en perspectiva mediante la imagen de dos rectas que pasen por cada uno de ellos.

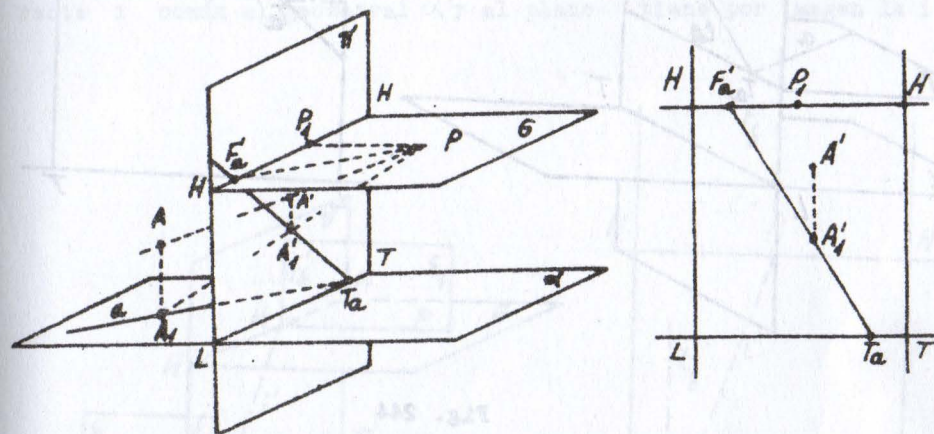


Fig. 243

109. Representación del plano. Sea (figura 244) un plano  $\beta$  paralelo al geometral  $\alpha$ . El plano  $\beta$  dado corta al cuadro  $\pi$  según la recta  $t_\beta$  que es la traza, mientras que la recta de fuga  $F'_\beta$  del mismo es la línea de horizonte por ser imagen de la recta  $i$  propia de ese plano  $\beta$ .-



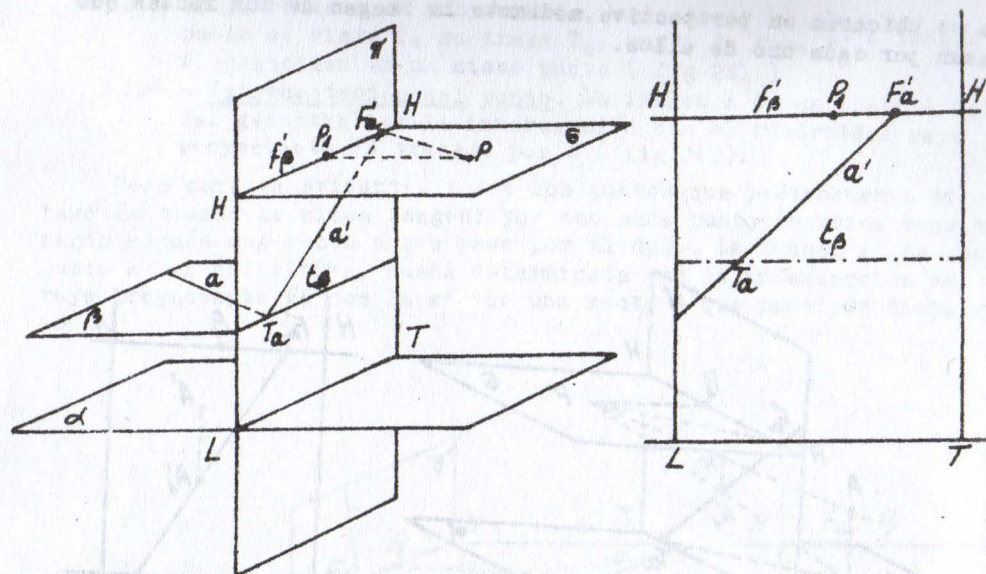


Fig. 244

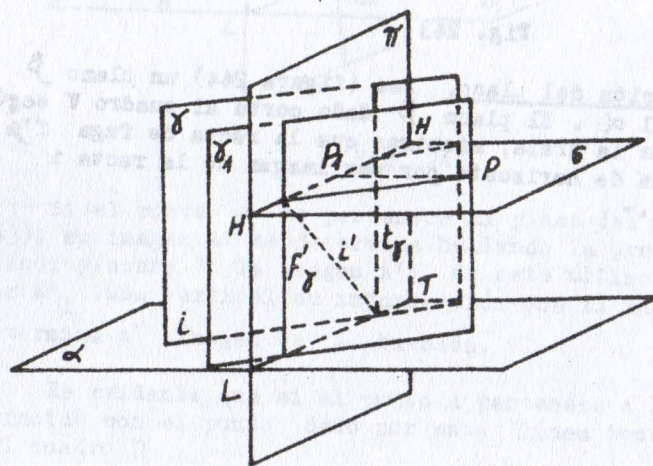


Fig. 245

Si una recta  $a$  pertenece al plano  $\beta$ , su traza  $t_a$  y punto de fuga  $F'_a$  pertenecen respectivamente a la traza  $t_\beta$  y recta de fuga  $f'_\beta$  del plano.

En la figura 245 se ha representado un plano  $\gamma$  vertical, es decir perpendicular al geometral  $\alpha$ . Su traza  $t_\gamma$  es intersección del plano  $\gamma$  dado con el cuadro  $\pi$  y resulta perpendicular a la  $LF$ ; su recta de fuga  $f'_\gamma$  se obtiene por intersección del cuadro con el plano  $\gamma_1$  paralelo al dado  $\gamma$  trazado por el punto de vista  $P$ . La recta  $i$  común al geometral  $\alpha$  y al plano  $\gamma$  tiene por imagen la  $i'$ .

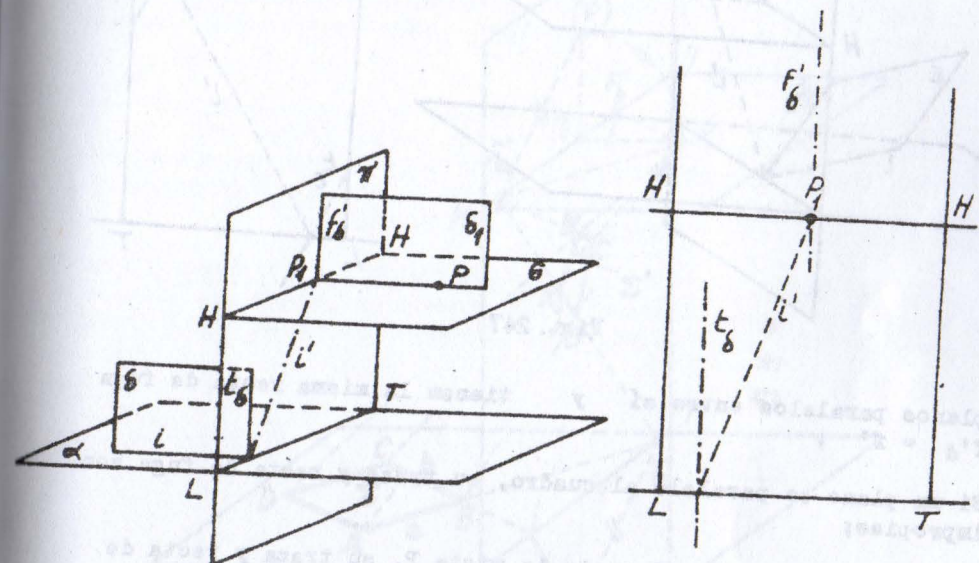


Fig. 246

La figura 246 representa un plano  $\delta$  vertical y normal al cuadro  $\pi$ . Su recta de fuga  $f'_\delta$  pasa por el punto principal  $P_1$ .

Si un plano  $\epsilon$  es oblicuo con respecto al geometral  $\alpha$  y al cuadro  $\pi$  (fig. 247) su traza  $t_\epsilon$  y recta de fuga  $f'_\epsilon$  son también oblicuas con referencia a la  $LF$  y  $HH$ , respectivamente.



Por evidentes se deducen las siguientes consecuencias:

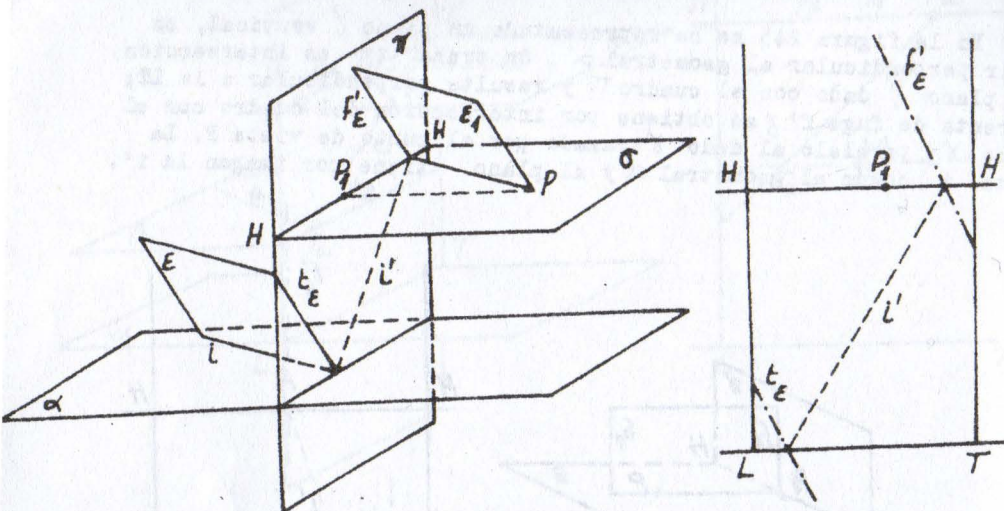


Fig. 247

1. planos paralelos entre sí y tienen la misma recta de fuga  $f'd = f'$  ;
2. Si un plano es paralelo al cuadro, su traza y recta de fuga son impropias;
3. Si un plano contiene al punto de vista P, su traza y recta de fuga son coincidentes.

## Capítulo 13

### Figuras Planas en el Geometral

110.- Sea (fig. 248) una forma plana, el cuadrado ABCD, situado en el geometral  $\alpha$  y cuya perspectiva o imagen A'B'C'D' sobre el cuadro  $\pi$  se desea obtener.

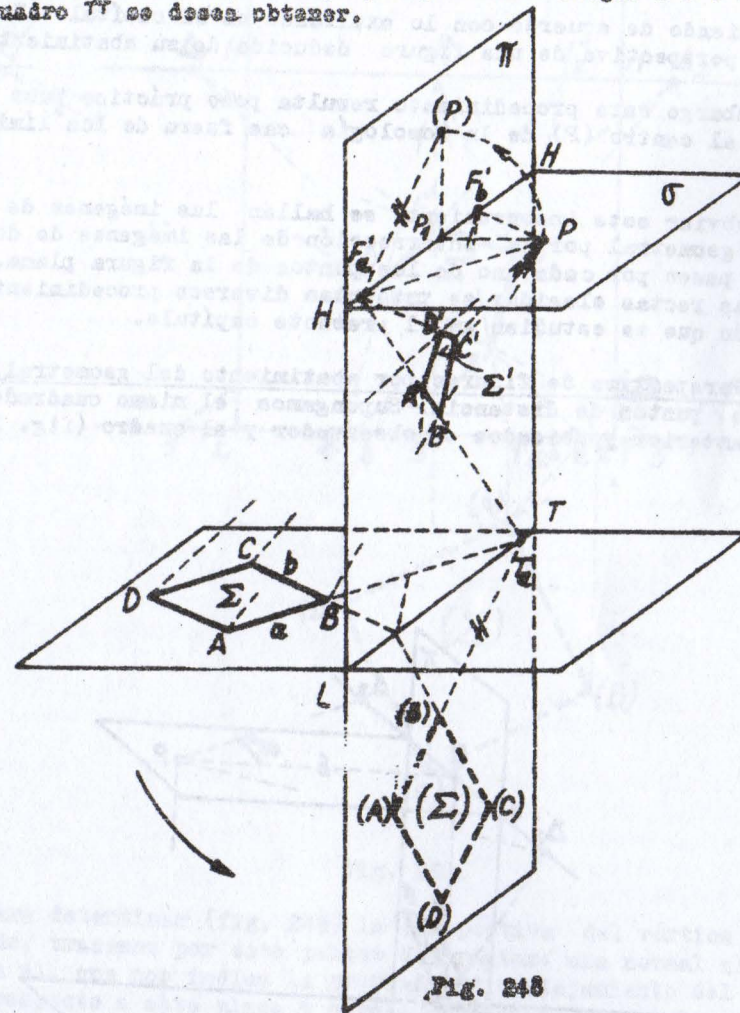


Fig. 248

Para ello se halla la imagen  $a'$  de  $A$  en  $\pi$ ,  $P'a$  del lado  $a$  de  $AB$ ; la proyección de sus extremos  $A$  y  $B$  desde  $P$  permite fijar sobre  $a'$  los  $A'$  y  $B'$ . De idéntica forma pueden hallarse  $C'$  y  $D'$ .



Si abatimos alrededor de  $IL$  la forma  $\Sigma$  sobre el cuadro en  $(\Sigma)$  las figuras  $(\Sigma) = (A)(B)(C)(D)$  y la perspectiva buscada  $\Sigma' = A'B'C'D'$  resultan estar vinculadas por una homología donde su eje es la  $IL$ , el horizonte es su recta límite y el abatimiento de  $P$  en  $(P)$  alrededor de  $HH$  su centro.

Procediendo de acuerdo con lo explicado en el capítulo V se obtiene la perspectiva de una figura deducida de su abatimiento.

Sin embargo este procedimiento resulta poco práctico pues generalmente el centro  $(P)$  de la homología cae fuera de los límites del dibujo.

Para obviar este inconveniente se hallan las imágenes de los puntos del geometral por la intersección de las imágenes de dos rectas que pasen por cada uno de los puntos de la figura plana. Según sean las rectas elegidas se presentan diversos procedimientos de operación que se estudian en el presente capítulo.

**III. Perspectiva de figuras por abatimiento del geometral. Método de los puntos de distancia.** Supongamos el mismo cuadrado de la figura anterior y ubicados el observador y el cuadro (fig. 249).

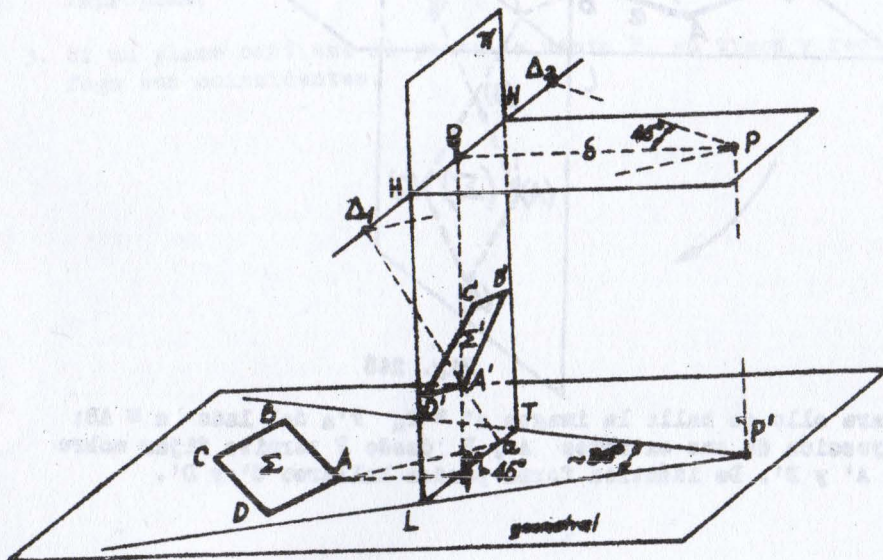


Fig. 249

Estos elementos permiten fijar en la perspectiva de la (fig. 250) la posición sobre el horizonte del punto principal  $P_1$  y los puntos de distancia, la altura del observador dada por la distancia entre  $IL$  y  $HH$  y el ancho del cuadro igual a  $IL$ .

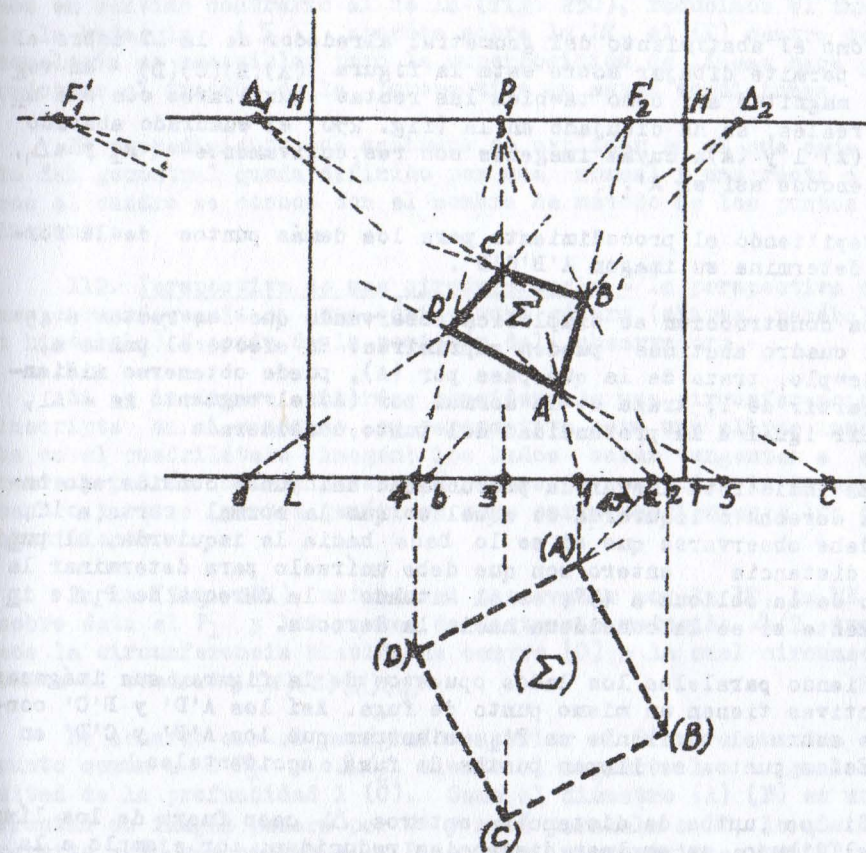


Fig. 250.

Para determinar (fig. 249) la perspectiva del vértice  $A$  del cuadrado, tracemos por este punto dos rectas: una normal al cuadro, la  $Al$ , que nos indica la profundidad o alejamiento del punto  $A$  con respecto a este plano y otra a  $45^\circ$  con el mismo plano, la  $Aa$ .



las imágenes son respectivamente  $lP_1$  y  $a\Delta$ , cuyo punto común nos da la perspectiva buscada  $A'$  de  $A$ .

Como el abatimiento del geometral alrededor de la  $LT$  sobre el cuadro permite dibujar sobre esta la figura  $(A)(B)(C)(D)$  en verdadera magnitud así como también las rectas auxiliares con sus ángulos reales, se ha dibujado en la (fig. 250) el cuadrado abatido y las  $(A)1$  y  $(A)a$  cuyas imágenes son respectivamente  $lP_1$  y  $a\Delta$ , obteniéndose así el  $A'$ .

Repetiendo el procedimiento para los demás puntos de la forma se determina su imagen  $A'B'C'D'$ .

La construcción se simplifica observando que las rectas a  $45^\circ$  con el cuadro abatidas pueden suprimirse. En efecto el punto  $a$ , por ejemplo, traza de la que pasa por  $(A)$ , puede obtenerse midiendo a partir de  $l$ , traza de la normal por  $(A)$  el segmento  $la = Al$ , es decir igual a la profundidad del punto considerado.

Es indistinto llevar la profundidad del punto considerado hacia la derecha o izquierda de aquel en que la normal corta a  $LT$ , pero debe observarse que si se lo hace hacia la izquierda, el punto de distancia entero con que debe unírsele para determinar la imagen de la oblicua a  $45^\circ$ , es el situado a la derecha de  $P_1$ , e inversamente si se la considera hacia la derecha.

Siendo paralelos los lados opuestos de la figura, sus imágenes respectivas tienen un mismo punto de fuga. Así los  $A'D'$  y  $B'C'$  concurren sobre el horizonte en  $F'_1$ , mientras que los  $A'B'$  y  $C'D'$  en  $F'_2$ . Estos puntos se llaman puntos de fuga accidentales.

Si los puntos de distancia enteros  $\Delta$  caen fuera de los límites del dibujo, se emplean distancias reducidas, por ejemplo a la mitad, los que serán puntos de distancia reducida  $\Delta/2$ . Pero entonces, para que el vértice  $A'$  no varíe, en vez de  $la$ , debe tomarse esa medida reducida también a la mitad.

Análogamente si se empleara  $\Delta/3$ , se tomaría  $la$  igual a un tercio de  $(A)1$ , etc.

Como las dos figuras  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son homológicas siendo  $LT$  su eje, conocido  $A'$  puede hallarse el  $D'$  prolongando  $(A)(D)$  hasta 5, punto que ligado con  $A'$  define la recta que corta a  $P_14$  en el  $D'$ . El centro de la homología, que suponemos inaccesible para nuestro

dibujo, se hallaría a la distancia  $P\Delta_1$  sobre la perpendicular a  $HH$  por  $P_1$ .

Desde luego que si el abatimiento de  $\Sigma$  (fig. 249) lo hacemos en sentido contrario al de la (fig. 250), reducimos el tamaño de la hoja, la  $(\Sigma)$  aparece sobre la  $LT$ , el  $(P)$  centro de la homología es accesible, pero la superposición de líneas hace poco práctico el trazo de la perspectiva en estas condiciones.

El procedimiento que acabamos de explicar en el que cada punto del geometral queda definido por una normal y una recta a  $45^\circ$  con el cuadro se conoce con el nombre de método de los puntos de distancia.

**112.- Perspectiva de una circunferencia.**— La perspectiva de una circunferencia es una cónica cuyo género (elipse, parábola o hipérbola) depende de la posición del observador.

Si en la figura anterior consideramos una circunferencia inscrita en el cuadrado, su perspectiva será una elipse inscrita en el cuadrilátero imagen; los lados serán tangentes a esa curva y podrán determinarse sus puntos de contacto, la imagen del centro y otros puntos genéricos como correspondientes a los del abatimiento.

En la (fig. 251), ubicado el observador por la  $LT$ , la  $HH$  y sobre ésta el  $P_1$  y los puntos de distancia reducida  $\Delta/2$ , tracemos la circunferencia abatida de centro  $(O)$  a la cual circunscribimos el cuadrado  $(M)(N)(P)(Q)$ .

De acuerdo con el párrafo anterior el  $O'$  se encuentra en el punto común a  $lP_1$  y  $o\Delta/2$  siendo el segmento  $l-o$  igual a la mitad de la profundidad  $l(O)$ . Como el diámetro  $(A)(B)$  es una frontal su imagen pasará por  $O'$  y será paralela a  $LT$ , lo que nos permite a su vez hallar  $A'$  y  $B'$  en sus intersecciones con  $2F_1$  y  $3P_1$  respectivamente. Estas rectas son tangentes a la curva en  $A'$  y  $B'$ .

El punto  $C'$  resulta de cortar la  $lP_1$  con  $o\Delta/2$  siendo este segmento la mitad de  $l(C)$ . Su tangente es paralela a  $LT$  con lo cual quedan fijados los puntos  $M'$  y  $N'$  que unidos con  $O'$  permiten dibujar las diagonales  $M'P'$  y  $N'Q'$ , las que a su vez determinan el punto  $D'$  y su tangente tal como puede verse en la figura.



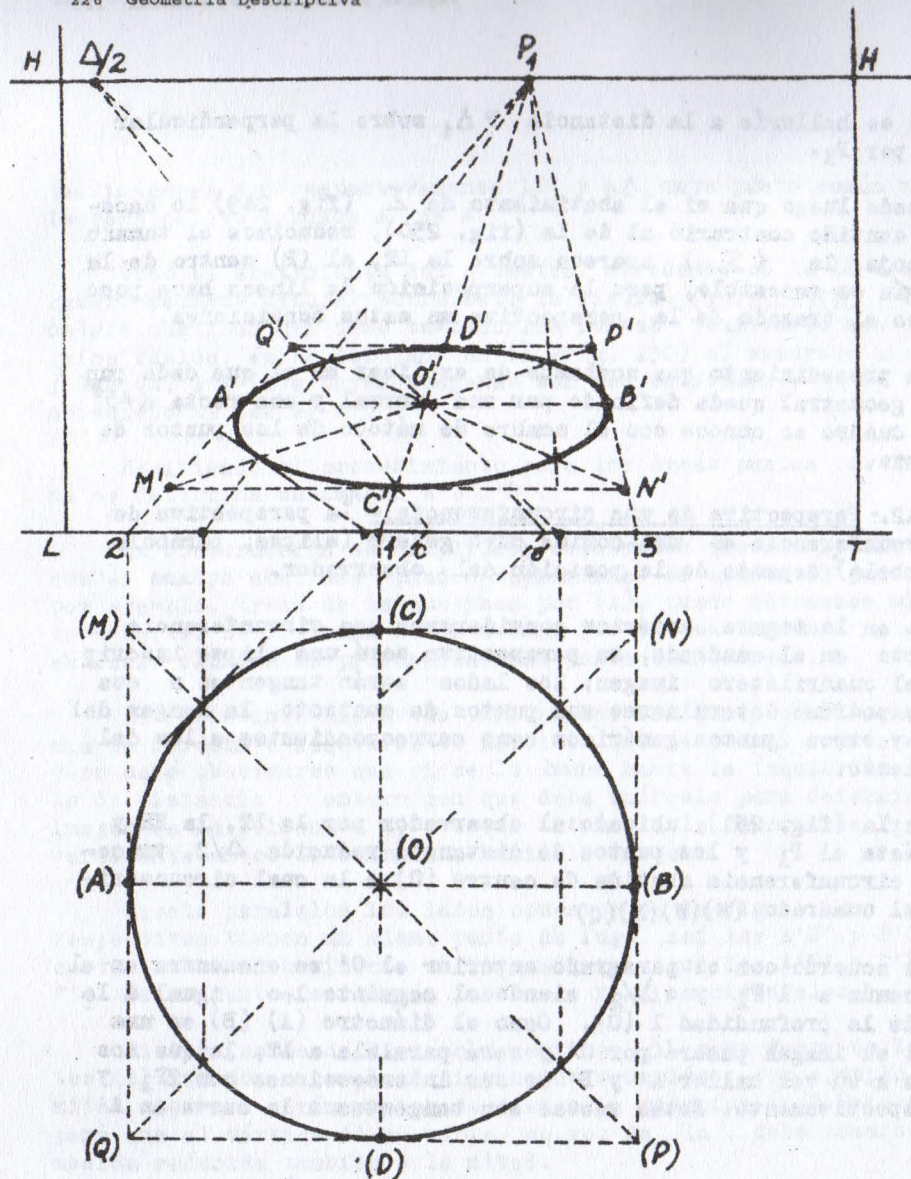


Fig. 251

Desde luego que los puntos de la elipse imagen pertenecientes a las diagonales del cuadrilátero también quedan fácilmente determinados. La tangente en cualquiera de ellos resulta como correspondiente de la tangente a su abatimiento.

**Método de los 8 puntos.** La construcción precedente puede simplificarse notablemente pues tratándose de una circunferencia se puede prescindir del abatimiento y del cuadrilátero circunscrito. En efecto siempre habrá tangentes paralelas al cuadro, otras perpendiculares a éste y diámetros a  $45^\circ$ , en uno y otro sentido. Determinando los ocho puntos en estas cuatro direcciones y las tangentes en ellos, se tienen elementos suficientes para el trazado de la perspectiva.

Sean dados (fig. 252a) la imagen  $O'$  del centro y el radio de la circunferencia. Para hallar  $A'$  sobre la frontal que pasa por  $O'$  se proyecta a éste desde  $P_1$  sobre  $LT$  en 1 a partir del cual medimos el radio  $r$  obteniendo el punto 2; su proyección desde  $P_1$  nos da la normal  $2P_1$  que fija  $A'$  y su tangente. El punto  $B'$  es simétrico del  $A'$ , por estar sobre una paralela al cuadro, siendo  $P_1B'$  su tangente.

Las rectas  $\Delta A'$  y  $\Delta B'$  son imágenes de rectas a  $45^\circ$  por lo que quedan determinados  $C'$  y  $D'$  sobre la normal  $O'P_1$ . Las tangentes en esos puntos son dos paralelas a  $LT$ .

Otros cuatro puntos  $E', F', G', I'$  se obtienen sobre las diagonales  $M'P'$  y  $N'Q'$ , en sus intersecciones con las normales por  $J'$  y  $K'$  siendo  $J'C' = K'C' = M'C'/\sqrt{2}$ .

Este último valor por ser  $M'C'$  una frontal puede obtenerse gráficamente trazando por  $M'$  y por  $C'$  rectas a  $45^\circ$  y abatiendo en  $J'$  su intersección  $J_1$  (ver también fig. 252 b). Esta construcción auxiliar puede realizarse sobre cualquier frontal, tal como  $A'O'$ ,  $D'P'$ , etc. o sobre  $LT$ .

Las tangentes en  $E'$  y  $G'$  se tienen fácilmente, observando que  $MJ = JR$ , luego sobre la frontal de la elipse será  $M'J' = J'E'$ . Sobre la  $P'Q'$  se tendrán segmentos semejantes, por proyección desde  $P_1$ .



Si en vez de los puntos  $\Delta$ , se hubieran empleado puntos reducidos  $\Delta/2$  por ejemplo lo mismo se hubieran obtenido los puntos  $C'$  y  $D'$  proyectando desde  $\Delta/2$  en vez de los extremos  $A'$  y  $B'$  del diámetro frontal, los puntos  $\frac{O'A'}{2}$  y  $\frac{O'B'}{2}$

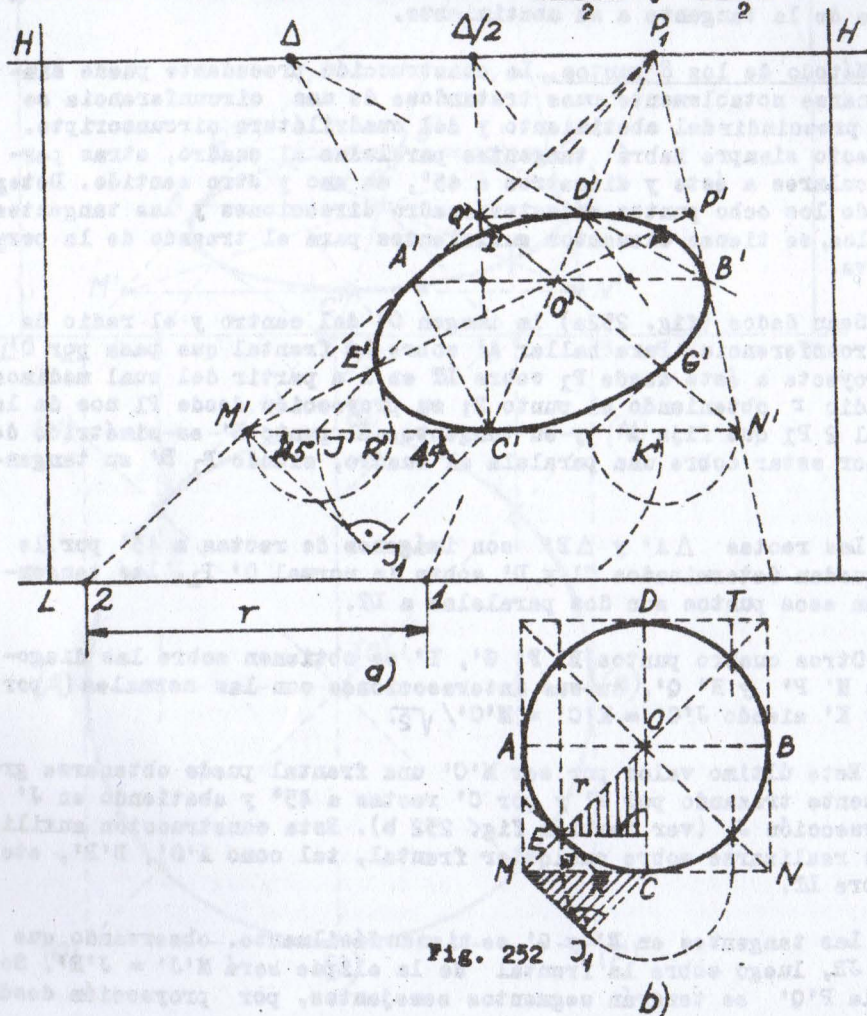


Fig. 252

Desde luego que si fuera el  $\Delta/3$  el utilizado se hubiera tomado  $\frac{O'A'}{3}$  y  $\frac{O'B'}{3}$

### 113.-Abatimiento del geometral alrededor de una frontal cualquiera.-

Puede convenir a veces, cuando la figura está algo alejada

del cuadro, emplear como eje de abatimiento una frontal que no sea la traza del geometral, lo que implica abatir este plano sobre un plano paralelo al cuadro.

Sea (fig. 253) el segmento  $A'B'$  la imagen del diámetro frontal de una circunferencia, cuyo abatimiento alrededor de una circunferencia, cuyo abatimiento alrededor de  $A'B'$  es la (A) (B) (C) (D). La imagen del diámetro (C) (D) normal al cuadro es  $PO'$  recta que seccionada con  $A'\Delta$  y  $B'\Delta$  rectas a  $45^\circ$ , proporcionan los extremos  $C'$  y  $D'$  de la elipse imagen.

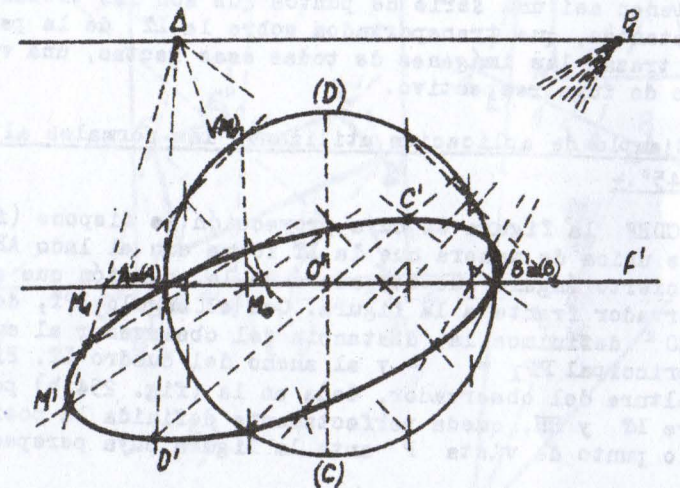


Fig. 253

Para hallar otros puntos de esta curva, el  $M'$  por ejemplo, se traza por (M) la normal (M)  $M_0$  cuya imagen es  $PM_0$ . La recta a  $45^\circ$  por (M) es (M)  $M_1$ . La  $\Delta M_1$  corta a  $PM_0$  en  $M'$ .

114.-Trazado de la perspectiva en el geometral, sin utilizar su abatimiento, empleando la figura original que se tiene en hoja aparte.-



En la mayor parte de los casos, los trazados de perspectiva, se refieren a conjuntos de cuerpos como por ejemplo un edificio, o un sistema de instalaciones, etc., de los que se poseen planos en proyección simple de la planta y los frentes.

El empleo de estos planos elimina el trazado de las figuras en abatimiento, que es doblemente laborioso, por tener que dibujarse la figura invertida, y exige además una superficie después sobrando en la hoja del dibujo.

Sobre la hoja del plano se marca la ubicación del cuadro con la inclinación elegida, y sobre él se proyectan, normalmente o en la dirección que se adopte, los puntos de la figura.

Se obtienen así una serie de puntos que son las trazas de los rayos proyectantes, que transportados sobre la LT de la perspectiva permiten trazar las imágenes de todas esas rectas, una vez fijado el punto de fuga respectivo.

#### 115.- Ejemplo de aplicación utilizando las normales al cuadro y rectas a $45^\circ$ .-

Sea ABCDEF la figura de cuya proyección se dispone (fig. 254 a). El cuadro se ubica de manera que la LT forme con el lado AB por ejemplo, un cierto ángulo que dependerá de la posición que se desee dar al observador frente a la figura. Con el ángulo LPT, de aproximadamente  $30^\circ$  definimos la distancia del observador al cuadro - distancia principal  $PP_1 =$  - y el ancho del cuadro LT. Finalmente con la altura del observador, dada en la (fig. 254 b) por la distancia entre LT y HH, queda perfectamente definida la posición del observador o punto de vista P ante la figura cuya perspectiva se busca.

En la (fig. 254 b) sobre la línea de horizonte se han marcado el punto principal  $P_1$  y los de distancia  $\Delta$ , siendo  $P_1\Delta = PP_1$ . El ancho del cuadro LT es la distancia LT de la figura 254 a.

Para hallar la imagen de un punto cualquiera del D por ejemplo, utilizando normales al cuadro y rectas a  $45^\circ$ , se dibujan estas (fig. 254 a) en D4 y Dd respectivamente, cuyas trazas puntos 4 y d se transportan con referencia al punto L por ejemplo, a la figura 254 b marcando así los 4' y d'. La imagen de la normal será

$P_14'$  y  $\Delta d'$  la de la recta a  $45^\circ$ . Para los restantes puntos se procede análogamente.

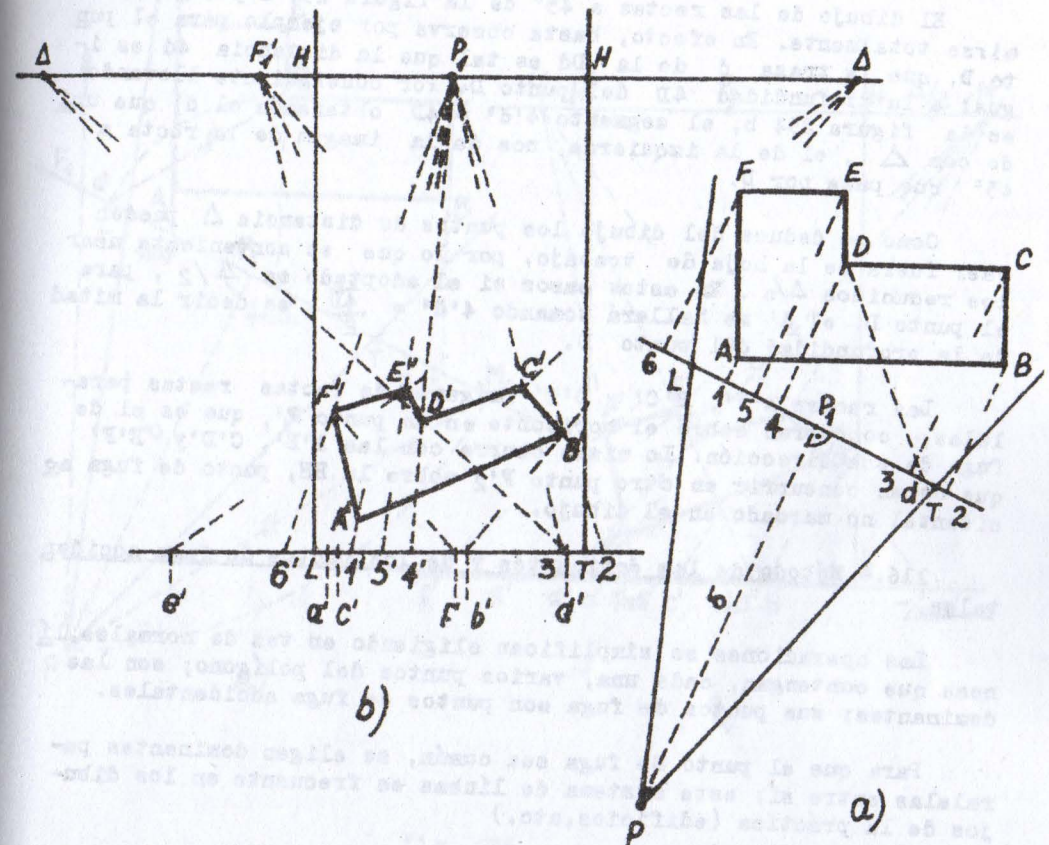


Fig. 254

A efectos de ordenar las construcciones conviene proyectar todos los puntos de la figura sobre LT en 1, 2, 3, ..., 6 (fig. 254 a), que con una tira de papel se transportan sobre la LT de la figura 254 b, sirviendo de referencia el punto L.



El dibujo de las rectas a  $45^\circ$  de la figura 254 a puede suprimirse totalmente. En efecto, basta observar por ejemplo para el punto D, que la traza  $d$  de la  $Dd$  es tal que la distancia  $4d$  es igual a la profundidad  $4D$  del punto D. Por consiguiente llevando en la figura 254 b, el segmento  $4'd' = 4D$  obtenemos el  $d'$  que unido con  $\Delta$ , el de la izquierda, nos da la imagen de la recta a  $45^\circ$  que pasa por D.

Como se deduce del dibujo los puntos de distancia  $\Delta$  pueden caer fuera de la hoja de trabajo, por lo que es conveniente usar los reducidos  $\Delta/n$ . En estos casos si al adoptado es  $\Delta/2$ , para el punto D, el  $d'$  se hallará tomando  $4'd' = \frac{4D}{2}$ , es decir la mitad de la profundidad del punto D.

Las rectas  $A'F'$ ,  $B'C'$  y  $D'E'$  imágenes de rectas rectas paralelas, concurren sobre el horizonte en un punto  $F'$ , que es el de fuga de esa dirección. Lo mismo ocurre con las  $A'E'$ ,  $C'D'$  y  $E'F'$  que deben concurrir en otro punto  $F'_2$  sobre la  $HH$ , punto de fuga accidental no marcado en el dibujo.

#### 116.- Método de las dominantes y de los puntos de fuga accidentales.-

Las operaciones se simplifican eligiendo en vez de normales, líneas que contengan, cada una, varios puntos del polígono; son las dominantes; sus puntos de fuga son puntos de fuga accidentales.

Para que el punto de fuga sea común, se eligen dominantes paralelas entre sí; este sistema de líneas es frecuente en los dibujos de la práctica (edificios, etc.)

Las profundidades de los puntos se toman ahora sobre la misma dominante; las líneas que los determinan, es decir las que marcan sobre el cuadro medidas iguales a esas profundidades son las líneas rectas de "igual resección" de dicha dirección dominante.

Sea (fig. 255 a) el polígono  $ABCDEF$  y el observador ubicado en las mismas condiciones que en la (fig. 254 a). Como en el ejemplo del párrafo anterior en la perspectiva de la figura 255 b se han dibujado la  $LT$  y sobre el horizonte el punto principal  $P_1$  y el punto de distancia reducida  $\Delta/2$ , elementos todos ellos fundamentales en toda perspectiva.

Las direcciones de las rectas  $AF$ ,  $BC$ ,  $DE$  son dominantes, cuyas trazas son respectivamente  $1 \equiv 6$ ,  $2 \equiv 3$  y  $4 \equiv 5$  sobre  $LT$  de la figura 255 a. Trazando por  $P$  una paralela a esta dirección dominante obtenemos en  $F_1$  la proyección de su punto de fuga. El sub

índice 1 identifica la dirección elegida frente a otras que pueden existir en el mismo trazo.

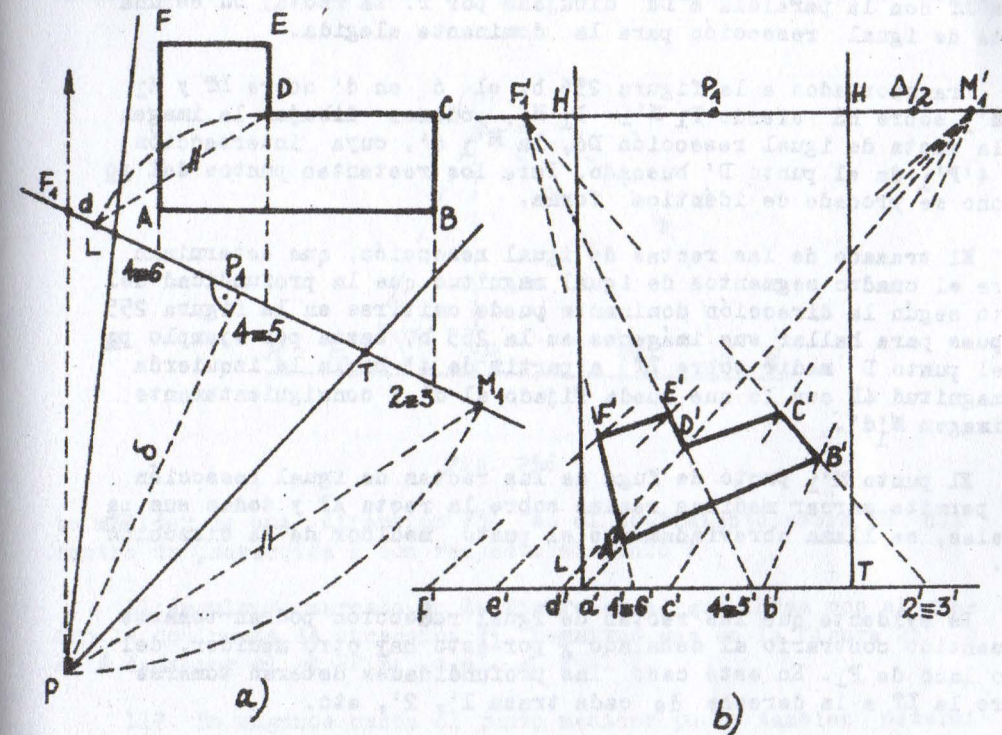


Fig. 255

Transportadas las trazas de las dominantes sobre la  $LT$  de la figura 255 b marcamos, con referencia al punto  $L$  por ejemplo, los  $1' \equiv 6'$ ,  $2' \equiv 3'$  y  $4' \equiv 5'$  y sobre el horizonte, con referencia al  $P_1$ , el  $F'_1$ . Quedan así determinadas las imágenes de esas rectas dominantes uniendo  $F'_1$  con cada una de las trazas.

Para hallar la imagen de un punto cualquiera del polígono por ejemplo el  $D'$ , tracemos en la figura 255 a la recta  $Dd$



sobre la dominante. El punto  $d$  es traza de la recta  $Dd$ , mientras que la proyección de su punto de fuga es  $M_1$  que obtenemos cortando a  $LT$  con la paralela a  $Dd$  dibujada por  $P$ . La recta  $Dd$  es una recta de igual resección para la dominante elegida.

Transportados a la figura 255 b, el  $d$  en  $d'$  sobre  $LT$  y  $M_1$  en  $M'_1$  sobre  $HH$  siendo  $P_1 M'_1 = P_1 M_1$ , podemos dibujar la imagen de la recta de igual resección  $Dd$ , la  $M'_1 d'$ , cuya intersección con  $4'F'_1$  da el punto  $D'$  buscado. Para los restantes puntos del polígono se procede de idéntica forma.

El trazado de las rectas de igual resección, que determinan sobre el cuadro segmentos de igual magnitud que la profundidad del punto según la dirección dominante puede omitirse en la figura 255 a, pues para hallar sus imágenes en la 255 b, basta por ejemplo para el punto  $D$  medir sobre  $LT$  a partir de  $4'$  hacia la izquierda la magnitud  $4D$  con lo que queda fijado el  $d'$  y consiguientemente su imagen  $M'_1 d'$ .

El punto  $M'_1$  punto de fuga de las rectas de igual resección que permite marcar medidas reales sobre la recta  $AF$  y todas sus paralelas, se llama abreviadamente el "punto medidor de la dirección  $F_1$ ".

Es evidente que las rectas de igual resección podrán tomarse en sentido contrario al señalado y por esto hay otro medidor, del otro lado de  $F_1$ . En este caso las profundidades deberán tomarse sobre la  $LT$  a la derecha de cada traza  $1'$ ,  $2'$ , etc.

Por razones de dibujo, el observador de la figura 255 a se halla más alejado del polígono  $ABCDEF$  que el de la figura 254 a; por ello la magnitud de la perspectiva en aquel caso resulta comparativamente más pequeña que la de la figura 254 b.

De la observación de la figura 255 a se deduce que la posición del punto medidor  $M_1$  es tal que resulta  $F_1 M_1 = F_1 P$  siendo  $F_1 P$  la hipotenusa del triángulo rectángulo en  $P_1$  donde los catetos son  $F_1 P_1$   $P P_1$  (distancia principal).

Como sobre la línea de horizonte de toda perspectiva se tienen marcados el punto principal  $P_1$ , el punto de fuga accidental  $F'_1$ , y el de distancia  $\Delta$ , es posible hallar directamente sobre ella la posición del punto  $M'_1$ , para la dirección fugante en  $F'_1$ , tal

como se indica en la (figura 256). En primer lugar se abate, con centro en  $P_1$  y radio  $P_1 \Delta$ , el punto de vista en  $(P)$ , el que seguidamente con radio  $F'_1 P$  ( $P'$ ) y centro  $F'_1$  se abate en  $M'_1$ . Es decir: el pun-

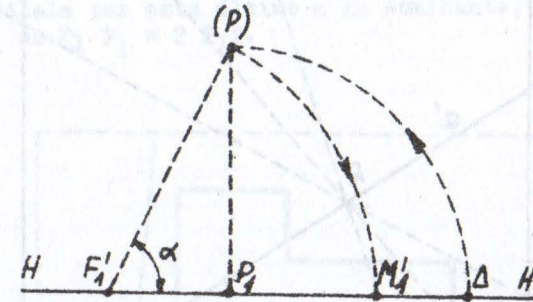


Fig. 256

to medidor de una dirección  $F'_1$  es el abatimiento sobre  $HH$  del centro de proyección  $P$  con respecto al punto  $F'_1$ .

El ángulo  $\alpha$  marcado en la figura es el que forma con el cuadro la dominante de dirección  $F_1$ , magnitud que en la figura 255 a está dada por el  $\angle PF_1 M_1$  o el  $\angle F_1 P F$ .

117.-En algunos casos el punto medidor puede también determinarse recurriendo al abatimiento de la dirección sobre la cual se desea medir, abatiendo el geometral sobre el cuadro.

Sea (fig. 257) el cuadro dado por  $LT$ ,  $HH$  y el observador por  $P_1$  y  $\Delta$ . Supongamos que la dirección dada forma  $\alpha^\circ$  con el cuadro; en su abatimiento, que llamaremos (a), aparecerá formando con  $LT$  el referido ángulo  $\alpha$ . Su imagen  $a'$  pasará por  $A_0$ , traza de  $a$ , y por  $R'$ , perspectiva del  $(R)$  que es un punto cualquiera de (a).

El  $R'$  se determina mediante una normal al cuadro y una recta a  $45^\circ$ .







Con centro en este punto y radio  $f$  ( $P/2$ ) abatimos el ( $P/2$ ) en  $m$ . El punto de fuga de la dirección dada es  $F'_1$  siendo  $P_1F'_1 = 2 P_1f$  y el medidor  $M'_1$  es  $P_1M'_1 = 2 P_1m$ .

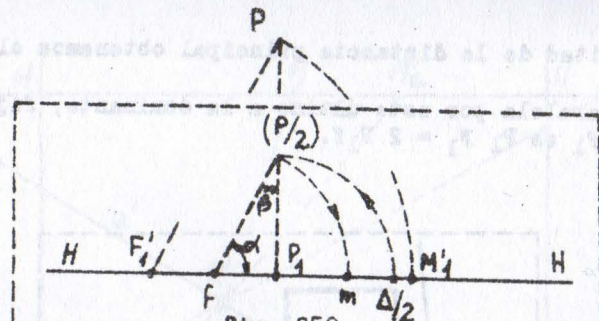


Fig. 259

**Empleo de medidores reducidos.**— Si el punto  $M'_1$  cayera fuera de la hoja de la perspectiva, puede operarse con un medidor reducido  $M'_1/2$ , por ejemplo. Así para el punto D (Fig. 260 a) que se obtiene por intersección de la dominante  $l D$  y la recta de igual resección  $Dd$ , siendo  $l d$  la profundidad del punto D, podrá obtenerse igualmente sobre dicha dominante, pero en su intersección con la recta  $Dd_1$ , donde  $ld_1$  es la mitad de la profundidad del punto. La proyección sobre el geometral del punto de fuga de la recta  $Dd_1$  es  $M'_1/2$  siendo  $P_1M'_1/2$  la mitad del segmento  $F_1M'_1$ . Operando en la perspectiva (fig. 260 b) el punto D' será el común de la imagen de la dominan-

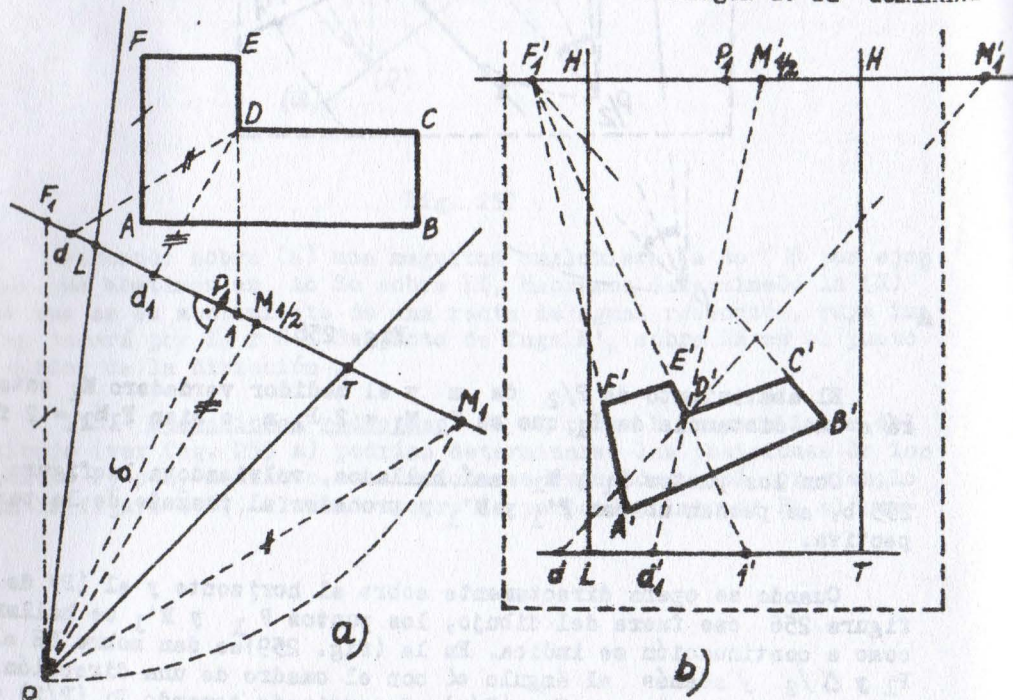


Fig. 260

te  $l'F'_1$  y la recta  $d'_1 M'$

En la (fig. 261) se indica la construcción del punto medidor reducido  $M'_1/2$  directamente sobre el horizonte.

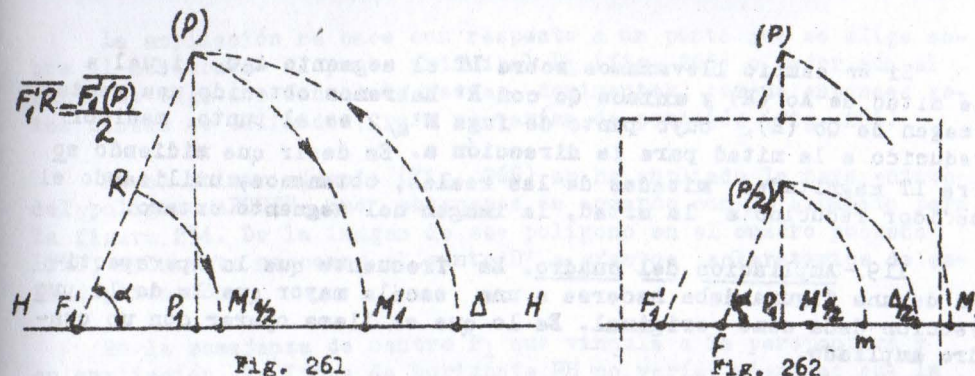


Fig. 261

Si el ( $P$ ) es inaccesible se utilizan operaciones reducidas (fig. 262) donde  $F'_1$ , siendo datos  $P_1$ ,  $\Delta/2$  y  $\alpha$ , resulta de tomar  $P_1F'_1 = 2 P_1f$  y  $M'_1/2$  de medir  $F'_1 M'_1/2 = fm$ .

Es claro que cuando se trabaja con los medidores reducidos deberán tomarse sobre la LT las profundidades reducidas a la mitad, un tercio, etc. según sea el medidor obtenido.

En la (fig. 263) se indica la construcción del medidor reducido cuando se abate la dirección dada, abatiendo el geometral sobre el cuadro. El punto  $R'$  se ha determinado como en la figura 257 pero utilizando el  $\Delta/2$ . El segmento  $AoR'$  es la imagen del  $Ao(R)$ , magnitud que medimos sobre LT en  $AoS_o$ , con lo que resulta el  $M'_1/2$  que suponemos fuera de los límites del dibujo.

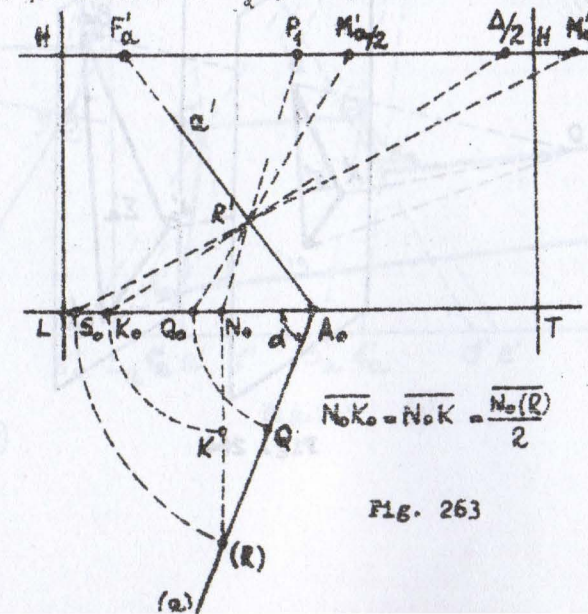


Fig. 263







Para los restantes puntos de la figura se procede de idéntica manera, siendo el orden de las construcciones gráficas el siguiente: se marcan sobre la Ta las trazas  $1', 2', 3', \dots$  transportando las  $1, 2, 3, \dots$  obtenidas en la figura 265a. Con centro en  $P_1$  se proyectan  $1', 2', 3' \dots$  en  $1'a, 2'a, 3'a \dots$  sobre la Ta. A la izquierda o derecha de cada uno de estos puntos, según sea el  $\Delta$  ar elegido, se llevan las profundidades de cada vértice del polígono obtenidas de la figura 265a. Los puntos en que las rectas formadas por  $a', b', c', \dots$  y  $\Delta$  ar son cortadas por las que unen  $P_1$  con  $1'a, 2'a, 3'a, \dots$ , determinan respectivamente los vértices  $A'a, B'a, C'a, \dots$  del polígono ampliado.

El centro de ampliación es el punto de fuga  $F'_1$  de las dominantes, por lo que las trazas ampliadas  $1'a = 8'a$ ,  $2'a = 3'a$  y  $4'a = 5'a$  sobre la  $Ta$  son las proyecciones sobre esta línea de las trazas  $1' = 6$ ,  $2' = 3'$  y  $4' = 5'$  respectivamente, que se han transportado de la  $LT$  de la figura 266 a.

gusa pues se miden las que da la figura original que corresponderían al cuadro pequeño, ya que se mantiene sobre  $EE'$  el  $M'$  que corresponde también al cuadro pequeño. Es decir que para hallar  $D'a$ , se



lleva a la izquierda de 4<sup>a</sup> el segmento 4<sup>a</sup> d' igual a la profundidad 4D, obteniéndose así el punto d' que unido con M<sub>1</sub> da la recta cuya intersección con F<sub>1</sub> 4<sup>a</sup> permite fijar el D<sup>a</sup> buscado. Esta construcción se repite para los restantes puntos del polígono.



# Representación de Cuerpos apoyados en el Geometral

120.- Puntos en altura. La posición de puntos que están fuera del geometral se marcan sobre perpendiculares a este plano, las cuales tienen por pie las proyecciones de los puntos.

Sea (fig. 267) el punto A y su proyección  $A_1$  sobre el geometral. El siguiente  $AA_1$ , que es vertical y mide la altura del punto A, tiene por imagen la recta  $A' A'_1$  perpendicular a la  $l_1$  por ser intersección con el cuadro del plano definido por P y  $AA_1$ , que a su vez es normal al geometral.

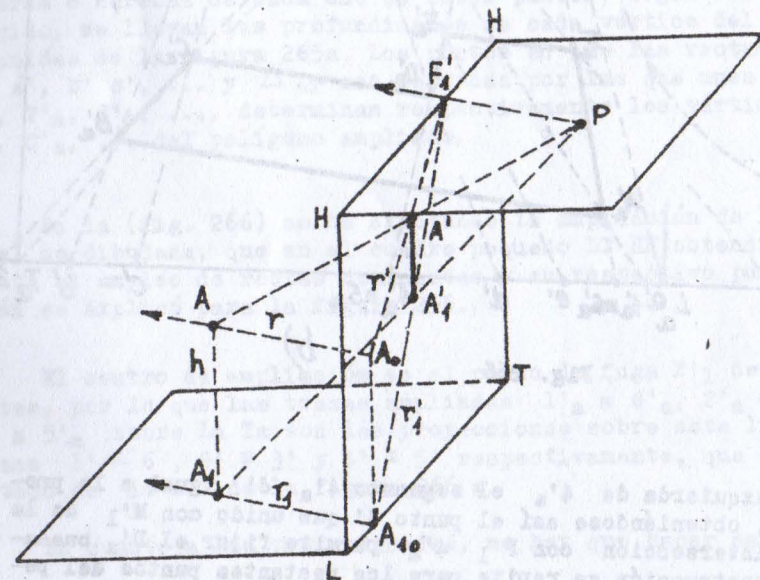


Fig. 267

Los puntos  $A'$  y  $A'_1$  se encuentran sobre las imágenes  $r'$  y  $r'_1$  de las rectas paralelas  $r$  y  $r_1$  de dirección arbitraria, que proyectan el segmento  $AA_1$  sobre el cuadro.

Es decir que para marcar la altura  $h$  (fig. 268) del punto cuya proyección es  $A'_1$ , debe proyectarse éste sobre el cuadro en  $A_{10}$  por medio de una recta cualquiera  $r_1$  del geometral que pase por él. Levantando por  $A_{10}$  una vertical y midiendo sobre ella la altura  $h$  se tiene el punto  $A_c$ . La paralela  $A_o F'_1$ , nos da sobre la vertical por  $A'_1$  el punto  $A''$  buscado. La rec

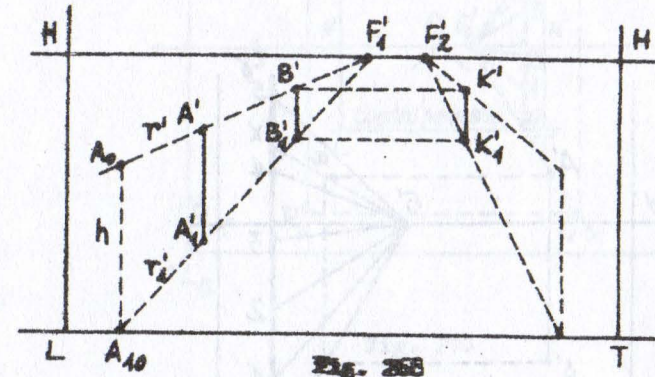


Fig. 268

ta  $A_o F'_1$  marca alturas iguales a  $h$ , para cualquier otro punto cuya proyección esté sobre la recta  $r'_1$ , pues como es fácil advertir se trata de segmentos paralelos comprendidos entre paralelas.

Para puntos con igual profundidad con respecto al cuadro, es decir ubicados en planos frontales, las alturas iguales tienen imágenes iguales; así lo del punto K es igual a la del E.

Desde luego que si la dirección de proyección de la vertical  $AA_1$  (fig. 267) es normal al cuadro, las imágenes de las rectas paralelas que pasan por A y  $A_1$  son concurrentes en  $P_1$ .

121. Escalas de alturas. Cuando se deben tomar alturas sobre varios puntos, a efectos de evitar la repetición de la construcción indicada en el párrafo anterior para cada uno de los puntos, se proyectan éstos (fig. 269) paralelamente a la línea de tierra sobre un plano vertical cualquiera cuya traza  $t_1$  por estar sobre el cuadro podemos graduar métricamente. Esta recta en la que medimos las alturas en verdadera magnitud constituye la escala de alturas.



La intersección de ese plano  $\gamma$  con el geometral es la recta de altura cero cuyo punto de fuga llamamos  $F'_1$ ; éste unido con los puntos de cota 1, 2, 3, ..., de la escala de alturas permite dibujar las imágenes de las horizontales sucesivas del plano.

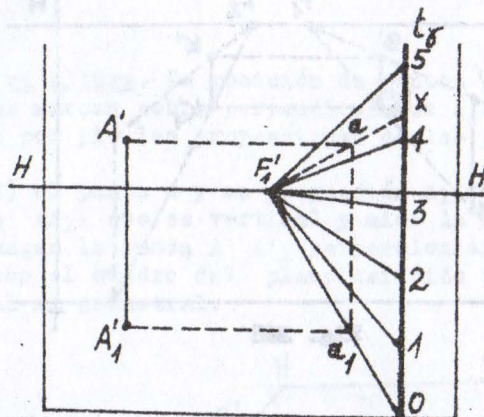


Fig. 269

Para marcar un punto  $A'$  del cual se conoce su altura y proyección  $A'_1$  sobre el geometral se proyecta éste paralelamente al cuadro sobre la recta de altura cero en  $a_1$ , cuya vertical corta en  $a$  a la línea  $F'_1 X$ , dada por el punto  $X$  de la escala de alturas. La magnitud  $OX$  es la altura dato de  $A$ , cuya imagen  $A'$  queda determinada llevando por  $a$  una paralela al cuadro hasta cortar la vertical por  $A'_1$ .

Si se trata de figuras ampliadas y se quiere marcar sobre el punto ampliado  $R'_1$  (Fig. 270) una altura prefijada, se lleva esta sobre la escala de alturas en el cuadro pequeño en  $OX$  cuyos extremos  $O$  y  $X$  se proyectan desde  $F'_1$ . Por  $R'_1$  se dibuja la paralela a  $La Ta$  hasta  $r'_1$ , cuya vertical encuentra en  $r$  a la  $F'_1 X$ . Por  $r$  se traza nuevamente una paralela al cuadro hasta encontrar en  $R'$  a la vertical por  $R'_1$ .

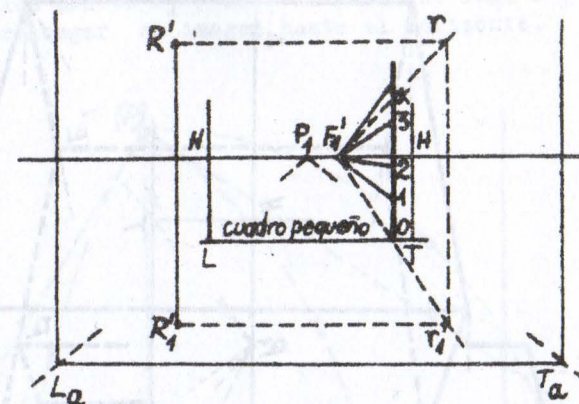


Fig. 270

122.- Como ejercicio de aplicación en la (fig. 271) se ha dibujado la perspectiva ampliada de un conjunto de paralelepípedos, que pueden constituir los lineamientos generales de un edificio.

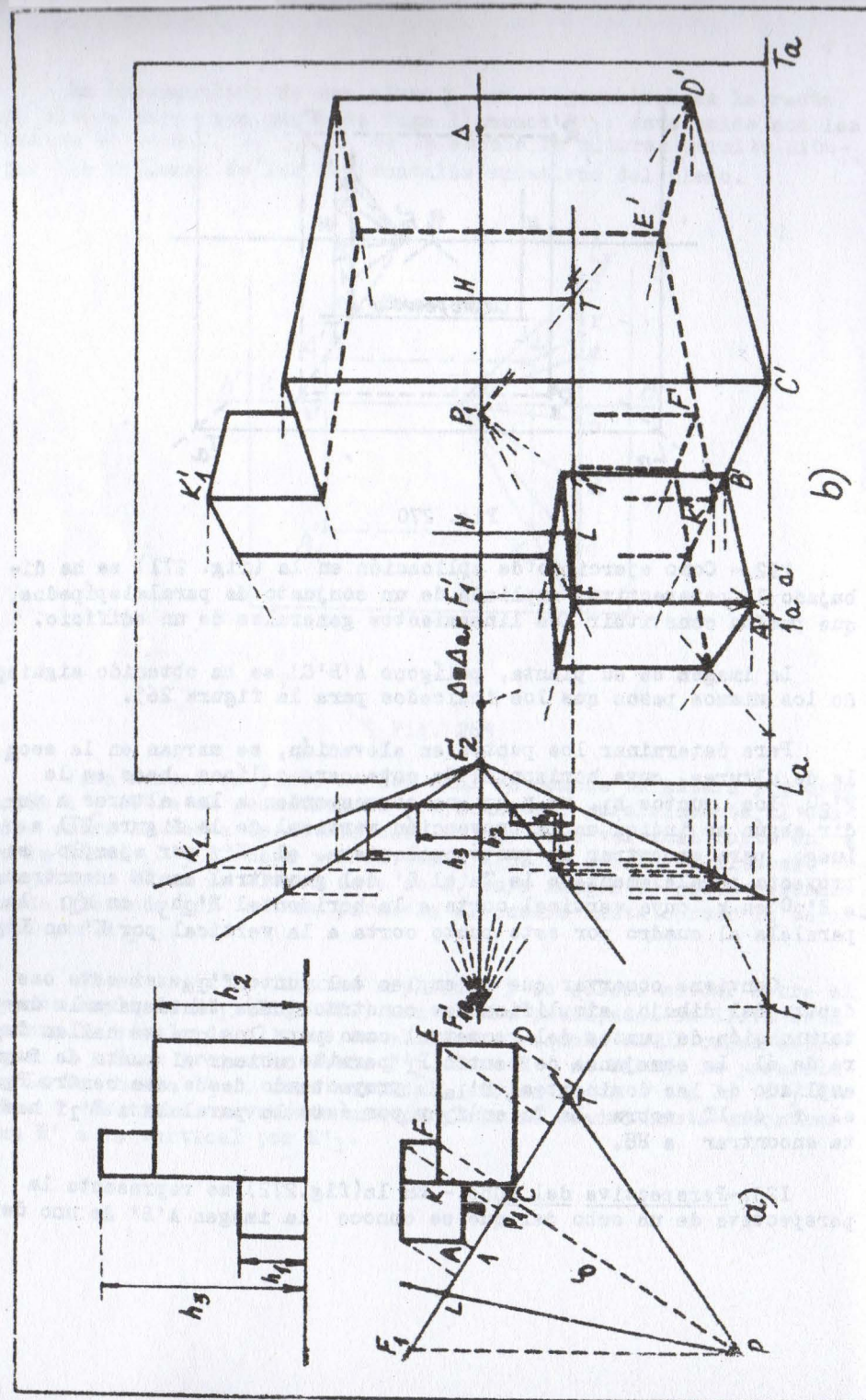
La imagen de su planta, polígono  $A'B'C...$ , se ha obtenido siguiendo los mismos pasos que los indicados para la figura 265.

Para determinar los puntos en elevación, se marcan en la escala de alturas, cuya horizontal de cota cero o línea base es la  $F'_2 O$ , los puntos  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  que corresponden a las alturas a medir según se indica en la proyección vertical de la figura 271 a. Luego, para encontrar un punto cualquiera, el  $K'_1$  por ejemplo, se proyecta paralelamente a la  $Ta$  el  $K'_1$  del geometral hasta encontrar a  $F'_2 O$  en  $k$ , cuya vertical corta a la horizontal  $F'_2 h_3$  en  $k_1$ ; la paralela al cuadro por este punto corta a la vertical por  $K'_1$  en  $K'_1$ .

Conviene observar que el empleo del punto  $F'_1$ , si este cae dentro del dibujo, simplifica las construcciones tanto para la determinación de puntos del geometral como para los que se hallan fuera de él. La semejanza de centro  $F_1$  permite ubicar el punto de fuga ampliado de las dominantes  $F'_1$ , proyectando desde ese centro  $F_1$  el  $f$  de  $LT$  sobre  $La Ta$  en  $f_1$  y por éste la paralela a  $F'_1 f$  hasta encontrar a  $HH$ .

123.- Perspectiva del cubo. En la (fig. 272) se representa la perspectiva de un cubo del que se conoce la imagen  $A'B'$  de uno de





sus lados. Completan los datos el cuadro LPHH y la ubicación del observador con los puntos  $P_1$  y  $\Delta$ . El punto de fuga  $F'_1$  del lado AB resulta de prolongar su imagen hasta el horizonte.

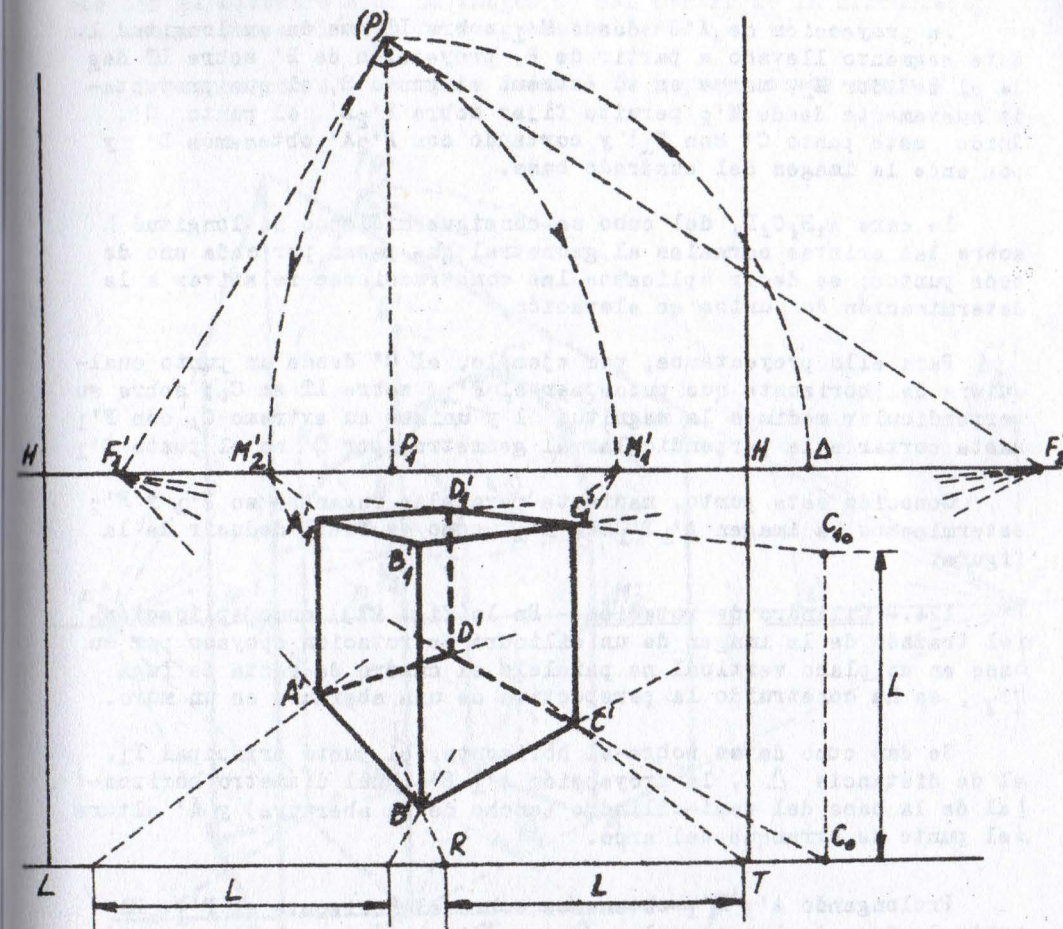


Fig. 272

Si abatimos el punto de vista en (P), siendo  $P_1(P) = P_1\Delta$ , y trazamos por este punto (P) una perpendicular a  $F'_1(P)$  obtenemos el  $F'_2$  punto de fuga de las rectas normales a la dirección AB,



por lo que podemos dibujar las imágenes de la dirección de los lados  $AD$  y  $BC$  uniendo  $F'_2$  con  $A'$  y  $B'$  respectivamente.

El abatimiento de  $(P)$ , ya sea con centro en  $F'_1$  o  $F'_2$ , nos proporciona los medidores  $M'_1$  y  $M'_2$  de esas dos direcciones ortogonales de los lados del cuadrado base del cubo.

La proyección de  $A'B'$  desde  $M'_1$  sobre  $LT$  nos da su longitud  $l$ . Este segmento llevado a partir de  $R$ , proyección de  $B'$  sobre  $LT$  desde el medidor  $M'_2$ , marca en su extremo el punto  $S$ , el que proyectado nuevamente desde  $M'_2$  permite fijar sobre  $F'_2B'$  el punto  $C'$ . Unido este punto  $C'$  con  $F'_1$  y cortando con  $F'_2A'$  obtenemos  $D'$  y por ende la imagen del cuadrado base.

La cara  $A_1B_1C_1D_1$  del cubo se consigue midiendo la longitud  $l$  sobre las aristas normales al geometral que pasan por cada uno de esos puntos; es decir aplicamos las construcciones relativas a la determinación de puntos en elevación.

Para ello proyectamos, por ejemplo, el  $C'$  desde un punto cualquiera del horizonte que puede ser el  $F'_1$ , sobre  $LT$  en  $C_0$ ; sobre su perpendicular medimos la magnitud  $l$  y unimos su extremo  $C_\mu$  con  $F'_1$  hasta cortar a la perpendicular al geometral por  $C'$  en el punto  $C'_1$ .

Conocido este punto, mediante paralelas fugantes en  $F'_1$  y  $F'_2$  determinamos la imagen  $A'_1B'_1C'_1D'_1$  como es fácil deducir de la figura.

124.- Cilindro de rotación.— En la (fig. 273) como aplicación del trazado de la imagen de un cilindro de rotación apoyado por su base en un plano vertical no paralelo al cuadro de recta de fuga  $f'y$ , se ha construido la perspectiva de una abertura en un muro.

Se dan como datos sobre el horizonte, el punto principal  $F'_1$ , el de distancia  $\Delta$ , la proyección  $A'_1B'_1$  del diámetro horizontal de la base del semi-cilindro (ancho de la abertura) y  $A'$  altura del punto de arranque del arco.

Prolongando  $A'_1B'_1$  obtenemos sobre el horizonte el  $F'_1$ . El punto de fuga de las normales a esta dirección es el  $F'_2$  que obtenemos abatiendo  $P$  en  $(P)$  y trazando por este una perpendicular a

$F'_1(P)$  hasta cortar el horizonte. Mediante el conocido abatimiento de  $(P)$  hallamos los puntos medidores  $M'_1$  y  $M'_2$ .

La proyección de  $A'$  desde  $F'_1$  define el punto  $B'$  sobre la vertical por  $F'_1$ . Por el punto común de las diagonales del cuadrivertice  $A'A'_1B'_1B'$  dibujamos una vertical y obtenemos en su encuentro con el diámetro  $A'B'$  la imagen  $O'$  del centro de la circunferencia, cuya proyección sobre el geometral es  $O'_1$ .

Tracemos por  $A'_1$  la recta frontal  $f'$  y proyectemos desde  $M'_1$

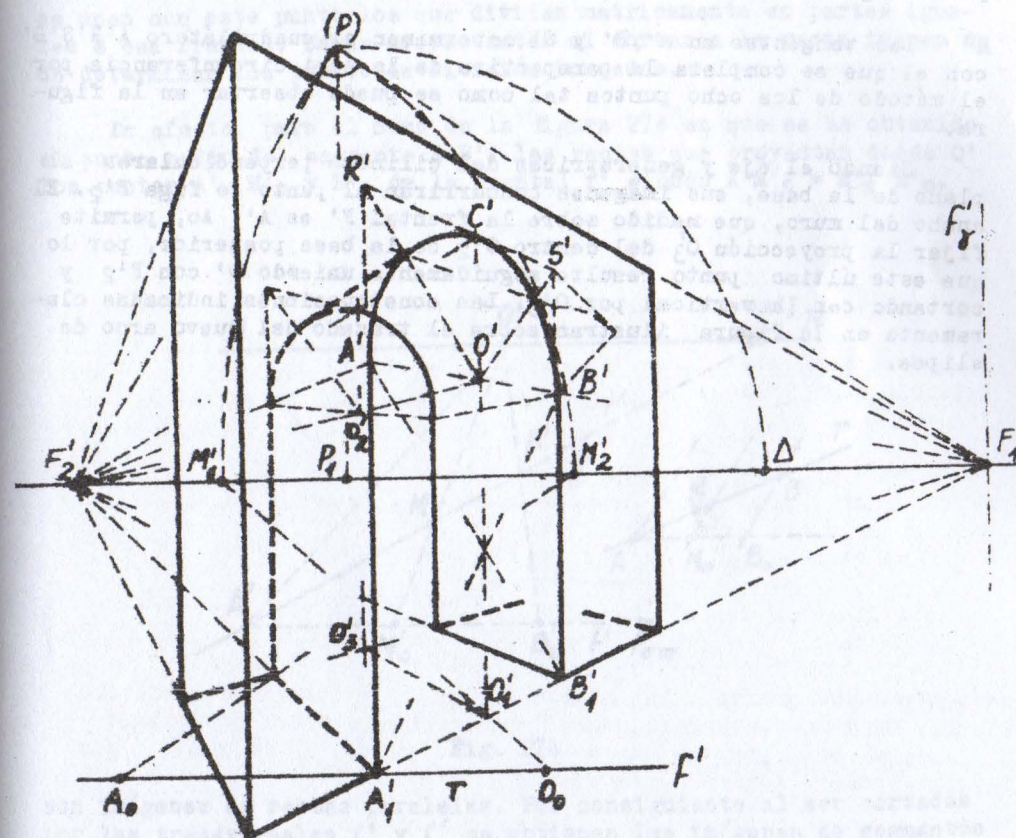


Fig. 273



el punto  $O'_1$  marcando así el  $O_0$ . El segmento  $A'_1 O_0$  es el valor del radio de la circunferencia medido en un plano frontal, es decir paralelo al cuadro, magnitud que transportamos a  $A'R'$  sobre la vertical por  $A'_1$  que está en ese mismo plano frontal. La recta  $F'_1 R'$  determina sobre la vertical por  $O'$  el punto  $C'$  de la elipse imagen y su tangente.

Las tangentes en  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  determinan el cuadrilátero  $A'R'S'B'$  con el que se completa la perspectiva de la semi circunferencia por el método de los ocho puntos tal como se puede observar en la figura.

Siendo el eje y generatrices del cilindro perpendiculares al plano de la base, sus imágenes concurrirán al punto de fuga  $F'_2$ . El ancho del muro, que medido sobre la frontal  $F'$  es  $A'_1 A_0$ , permite fijar la proyección  $O_3$  del centro  $O'_2$  de la base posterior, por lo que este último punto resulta seguidamente uniendo  $O'$  con  $F'_2$  y cortando con la vertical por  $O'_3$ . Las construcciones indicadas claramente en la figura ilustran sobre el trazado del nuevo arco de elipse.

## Construcciones Auxiliares

125.- División de un segmento de recta. Para dividir un segmento de imagen conocida en  $n$  partes iguales, se lo proyecta sobre una frontal cualquiera desde un punto arbitrario del horizonte y luego se unen con este punto los que dividen métricamente en partes iguales a esa frontal. Estas proyectantes al cortar a la recta imagen da da determinan los puntos de división buscados.

En efecto, para el caso de la figura 274 en que se ha obtenido el punto medio del segmento  $A'B'$ , las rectas que proyectan desde  $Q'$  los puntos  $A'$ ,  $M'_0$  y  $B'_0$  de la frontal  $f'$  siendo  $A'M'_0 = M'_0 B'_0$ ,

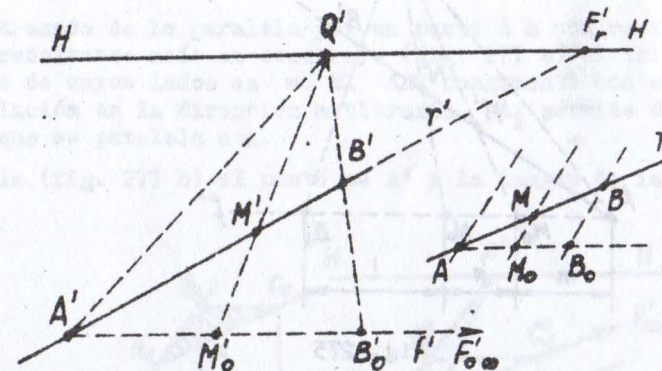


Fig. 274

son imágenes de rectas paralelas. Por consiguiente al ser cortadas por las transversales  $f'$  y  $f''$  se obtienen las imágenes de segmentos proporcionales y el  $M'$  será la imagen del punto medio de  $A'B'$  ya que  $M'_0$  lo es del segmento  $A'B'_0$ .

Observación.- Las puntuales  $r'$  y  $r$  son proyectivas pues son secciones de un mismo haz de rectas. Son correspondientes en esta proyección al  $A'$  que es unido,  $M'$  y  $M'_0$ ,  $B'$  y  $B'_0$ ,  $F'_r$  y  $F'_0$ . El con



jugado armónico de  $F'_{oo}$ , punto impropio de  $f'$ , respecto de  $A'$  y  $B'_o$  es el  $M'_o$  punto medio del segmento  $A'B'_o$ ; su correspondiente  $M'$  sobre  $f'$  es el conjugado armónico de  $F'_r$ , punto de fuga de  $f'$ , respecto de  $A'$  y  $B'$ .

La escala natural que resulta de repetir sucesivamente sobre  $f'$  segmentos iguales a  $A'M'$  origina al ser proyectada sobre  $f$  una escala llamada armónica.

126.- En la (fig. 275) se ha dividido el  $AB$  en segmentos proporcionales  $a, m, n$  y  $l$ . Sobre la frontal por  $A'$  se marcan tres seg-

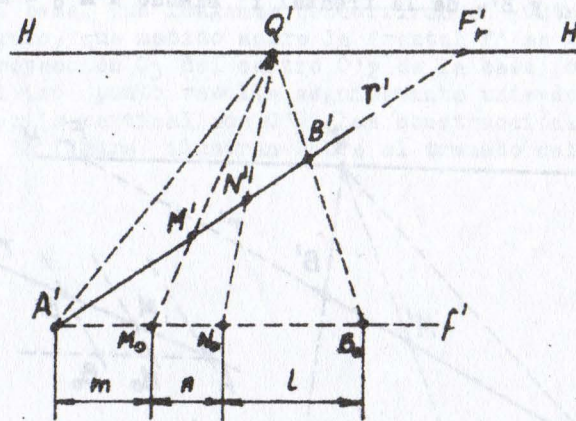


Fig. 275

mentos proporcionales a las magnitudes dadas obteniéndose los puntos  $M_o$ ,  $N_o$  y  $B_o$ . Uniendo  $B_o$  con  $B'$  determinamos sobre  $HH$  el punto  $Q'$  desde el cual proyectamos  $M_o$  y  $N_o$ . Las rectas  $Q'M_o$  y  $Q'N_o$  dan respectivamente sobre  $f'$  los puntos  $M'$  y  $N'$ .

127.- Trazar por puntos dados paralelas a una recta cuyo punto de fuga es inaccesible.-

Si se trata (fig. 276) de dibujar por  $A'$  una recta paralela a la  $m'$  dada, es decir concurrente a su punto de fuga  $F'_m$  inaccesible, se construyen dos triángulos semejantes cuyo centro de semejanza es dicho punto  $F'_m$ .

En la figura se trazan primeramente dos rectas paralelas cualesquiera  $E'C'$  y  $B_o C_o$  secantes a  $HH$  y  $m'$  dadas. Uniendo  $B'$  y  $C'$

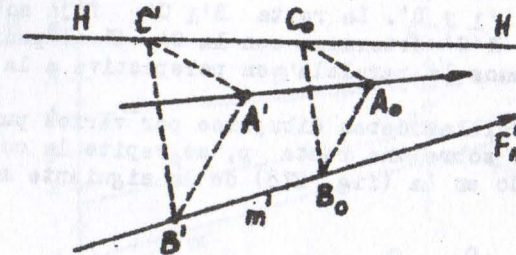


Fig. 276

con  $A'$  y dibujando las paralelas por  $B_o$  y  $C_o$  obtenemos el punto  $A_o$ ; finalmente éste proyectado desde  $A'$  proporciona la recta buscada.

El trazado de la paralela por un punto  $A$  a una recta  $m$  puede también resolverse así: se construye (fig. 277 a) el triángulo  $A_1 B_1 C_1$  uno de cuyos lados es  $m$ . El  $ABC$  congruente con el anterior, por traslación en la dirección arbitraria  $AA_1$  permite dibujar el lado  $AC$  que es paralelo a  $m$ .

En la (fig. 277 b) el punto es  $A'$  y la imagen de la recta es

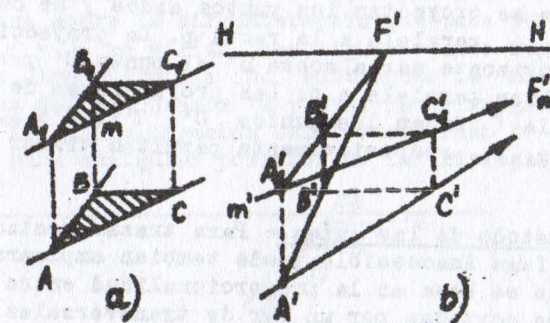


Fig. 277

$m'$  cuyo punto de fuga  $F'_m$  es inaccesible. Para unir este punto con  $A'$  la recta  $A'A'_1$  y por estos dos puntos las paralelas arbitrarias



$F'A'$  y  $F'A'_1$  cuyas intersecciones con una paralela cualquiera a  $A'A'_1$  dan los puntos  $B'_1$  y  $B'$ . La recta  $B'_1C'_1$  fija sobre  $m'$  el  $C'_1$  y su paralela  $B'C'$  determina con la  $C'_1C'$  el punto  $C'$ . Uniendo  $A'$  con  $C'$  obtenemos la paralela en perspectiva a la recta  $m'$ .

Cuando las paralelas deben dibujarse por varios puntos  $A'$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ , ..., alineados sobre una recta  $p$ , se repite la construcción habiéndose procedido en la (fig. 278) de la siguiente manera: desde

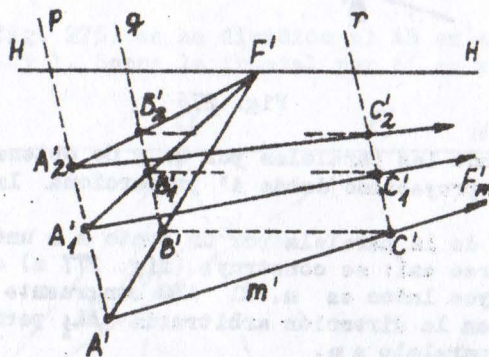


Fig. 278

$F'$  cualquiera se proyectan los puntos dados y se corta el haz resultante con la  $q$  paralela a la recta  $p$ . La proyección de  $B'$  paralelamente al horizonte marca sobre  $m'$  el punto  $C'$  por el cual dibujamos la  $f'$  también paralela a  $p$ . Las proyecciones de  $B'$ ,  $B'_1$ ,  $B'_2$ , ... de  $q$  sobre la  $f'$  fijan los puntos  $C'$ ,  $C'_1$ ,  $C'_2$ , ..., que unidos con  $A'$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ , ..., respectivamente permiten trazar las paralelas en perspectiva.

128.- Método de las guías. Para trazar rectas que pasen por un punto de fuga inaccesible puede también emplearse el método de las guías que se basa en la proporcionalidad entre segmentos de rectas paralelas cortadas por un par de transversales.

Se conocen (fig. 279) el horizonte y la  $m'$  que se cortan en  $F'_m$ . Sean  $a$  y  $b$  dos rectas paralelas, por lo general verticales y dispuestas a ambos lados del dibujo. Dividamos uniformemente en el mismo número de partes los segmentos que el horizonte y  $m'$  de-

terminan sobre cada una de ellas. Resultan así sobre  $a$  y  $b$  dos escalas donde las rectas que unen puntos correspondientes (de igual división) pasan por  $F'_m$ .

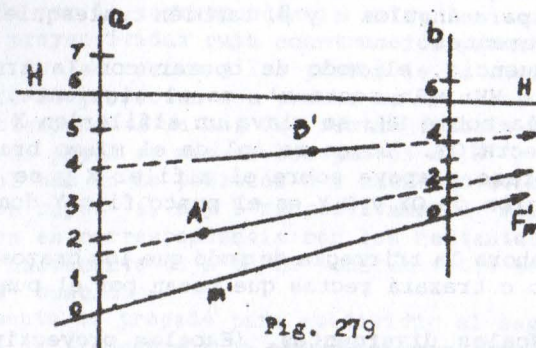
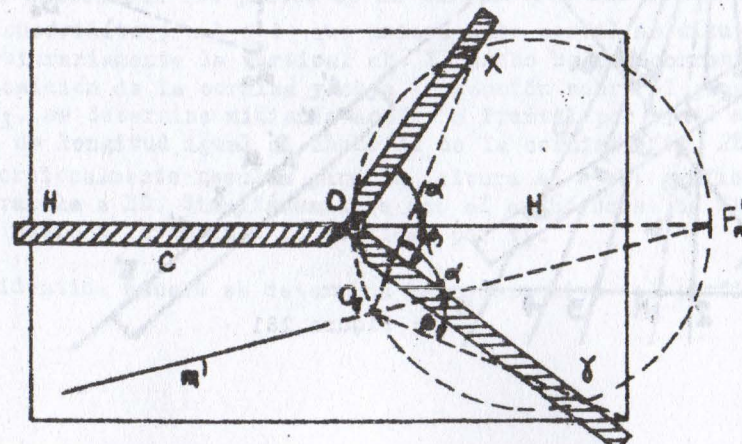


Fig. 279

Estas reglas graduadas llamadas escalas de fuga de  $F'_m$  o simplemente "guías" permiten trazar por los puntos  $A'$ ,  $B'$ , ..., rectas concurrentes en  $F'_m$ , con solo aplicar una regla por cada uno de ellos de manera que marque en las guías puntos de igual división.

129.- Regla Y o trirregla. El trazado de rectas concurrentes y un punto inaccesible puede solucionarse mediante el empleo de un simple aparato formado por tres reglas cuyos bordes pasan por un punto alrededor del cual pueden girar todas, aunque es posible fijarlas en él en una posición cualquiera apretando un tornillo (fig. 280).

El principio en que se basa el uso de esta regla, también llamada de convergencia, es el siguiente: si  $X$ ,  $Y$  y  $F'_m$  son tres puntos fijos y  $O$  se desplaza sobre la circunferencia que pasa por los primeros, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  no varían pues siguen siendo ángulos inscritos en la misma circunferencia que subtenden la misma cuerda. Por lo tanto, si dos de los brazos  $a$  y  $b$  de la trirregla pasan siempre por  $X$  e  $Y$ , la prolongación del tercer brazo  $c$  concurrirá siempre en  $F'_m$  para cualquier posición de la trirregla.





El problema consiste en determinar los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que deben formar los brazos, dados el horizonte y la recta  $m'$  concurrentes en  $F'_m$  inaccesible y los puntos fijos X e Y.

Sin embargo prácticamente es más cómodo usar la trirregla determinando el punto fijo Y para una posición del X que se elige arbitrariamente y para ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , también cualesquiera y que pueden ser iguales o diferentes.

En consecuencia, el modo de operar con la trirregla siendo datos el horizonte HH y la recta  $m'$ , es el siguiente: se aplica el brazo o de la regla sobre HH, se clava un alfiler en X junto al brazo a y se traza la recta OY. Luego se aplica el mismo brazo o, sobre  $m'$  haciendo que el brazo a apoye sobre el alfiler X y se traza la recta  $O_1Y$ . La intersección de OY y  $O_1Y$  es el punto fijo Y donde se clava el segundo alfiler.

Moviendo ahora la trirregla de modo que los brazos apoyen siempre en X e Y, el brazo c trazará rectas que pasan por el punto  $F'_m$ .

130.- **Escalas divergentes.** (Escalas proyectivas).- Es frecuente en Perspectiva tener que marcar sobre la imagen de una recta subdivisiones que se tienen en otra escala.

El procedimiento de las escalas divergentes que se emplea para ello se basa en que una recta y su imagen perspectiva son formas proyectivas, es decir se puede pasar de una a otra por proyecciones y seccionens. Esta propiedad, que se cumple también para otras posiciones del mismo segmento, queda establecida cuando se hacen corresponder tres pares de puntos de cada una de las rectas.

Sea (figura 281) la recta AB cuya imagen suponemos sea la

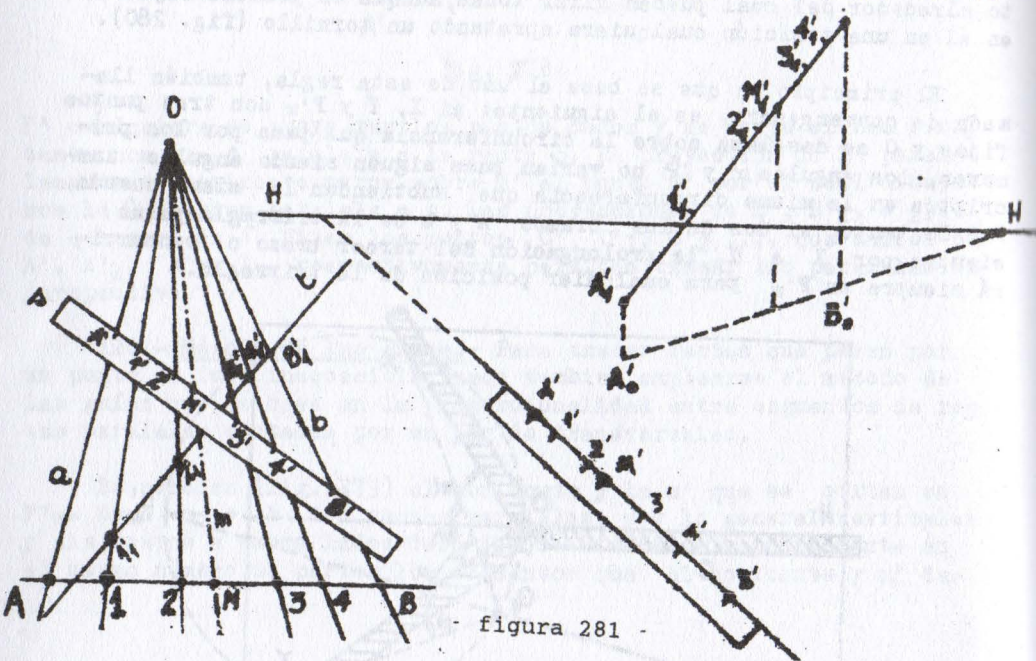


figura 281

A'B'. Se desea dividir este último segmento según una división que se conoce en escala natural en AB con los puntos 1, 2, 3 y 4, siendo además M su punto medio.

Determinando en A'B' la imagen M' de ese punto medio de AB, queda definida por la correspondencia entre las ternas (AMB) y (A'M'B') una proyectividad cuya construcción permite pasar de los puntos de una de las rectas a los puntos de la otra.

Para ello se proyectan los puntos de AB desde otro exterior O cualquiera obteniéndose un haz de rectas (escala divergente). Sobre una tira de papel se marcan los puntos A', M' y B', la que se lleva sobre el haz en la posición  $\delta$ , haciendo coincidir esos tres puntos con los rayos a, m y b respectivamente. Marcando subdivisiones en la tira en correspondencia con los restantes rayos del haz y llevándola nuevamente en A'B' se tendrán sobre esta los puntos 1', 2', 3' y 4' buscados.

Análogamente se procede para subdividir el segmento A'1 B'1 ubicado fuera del geometral; la recta t marca la posición de la tira de papel para este caso.

131.- Como ejemplo de aplicación en figura 282 se ha representado la perspectiva de un encuentro de cornisas rectas.

Sea un edificio cuyas líneas dominantes fugan en los puntos  $F'_1$  y  $F'_2$ . Entre las líneas m y n debe aplicarse una cornisa cuyo perfil (fig. 282 b) se tiene en una escala cualquiera.

Como es fácil advertir de la figura, el trazado de la imagen del perfil de la cornisa en las posiciones arbitrarias I y II permite dibujar mediante las fugantes en  $F'_1$  y  $F'_2$  la perspectiva de la cornisa en cada una de las paredes y también su encuentro en la esquina.

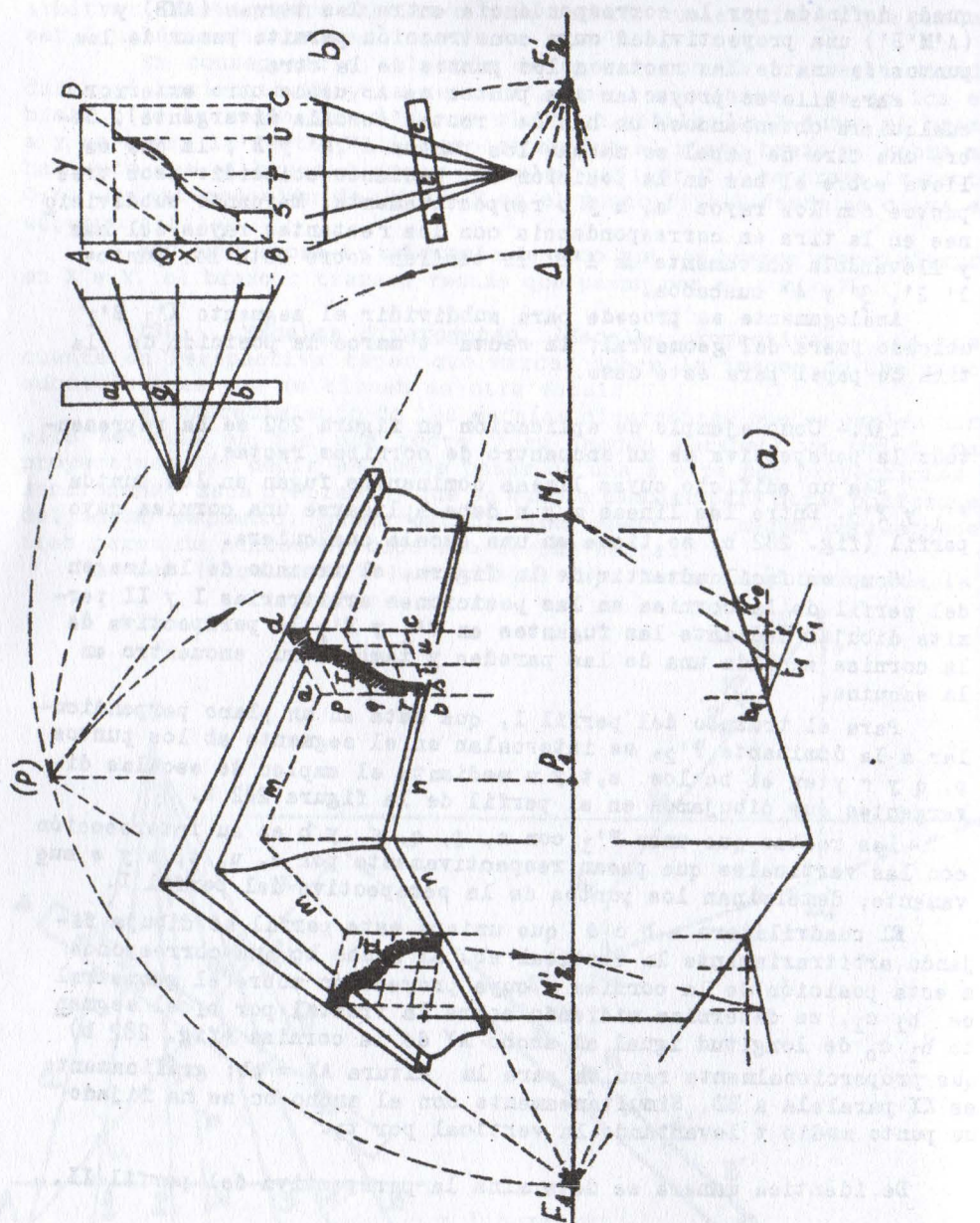
Para el trazado del perfil I, que está en un plano perpendicular a la dominante  $F'_2$ , se intercalan en el segmento ab los puntos p, q y r y en el bc los s, t y u mediante el empleo de escalas divergentes que dibujamos en el perfil de la figura 282 b.

Las rectas que unen  $F'_1$  con a, p, q, r y b en su intersección con las verticales que pasan respectivamente por c, u, t, s y s nuevamente, determinan los puntos de la perspectiva del perfil I.

El cuadrilátero a b c d que uniera este perfil se dibuja fijando arbitrariamente la vertical ab. El ancho bc que corresponde a esta posición de la cornisa y cuya proyección sobre el geometral es  $b_1 c_1$ , se determina midiendo sobre la frontal por  $b_1$  el segmento  $b_1 c_0$  de longitud igual al ancho AY de la cornisa (fig. 282 b) que proporcionalmente resulta para la altura  $AX = ab$ ; gráficamente es XY paralela a BD. Simultáneamente con el ancho bc se ha fijado su punto medio t levantando la vertical por  $t_1$ .

De idéntica manera se determina la perspectiva del perfil II.





La intersección de las horizontales, es decir de las fugantes en  $F'_1$  y  $F'_2$ , que pasan por los puntos de cada uno de los perfiles antes hallados, determinan la esquina de la cornisa tal como puede verse en la figura.

132.- Método de la cuadrícula.— Cuando en una perspectiva se debe representar la imagen de una línea curva irregular, se determinan las imágenes de varios de sus puntos en número suficiente para poder trazar una línea continua que represente con la mayor exactitud posible la perspectiva deseada.

Este procedimiento que acabamos de indicar es de una ejecución muy laboriosa cuando se tiene que determinar las imágenes de un número muy grande de puntos, tal como acontece en la perspectiva de jardines, parques, mapas geográficos, etc.

En estos casos se utiliza con ventaja el método de la cuadrícula, que consiste en dividir el dibujo original mediante un cuadrículado (fig. 283 a) cuya perspectiva hallamos en la figura 283 b utilizando por ejemplo cualquiera de los procedimientos indicados precedentemente para la división de segmentos.

Las líneas de la cuadrícula que así se obtiene serán líneas de guía o de referencia para el trazado, a ojo, de la perspectiva de la figura dada.

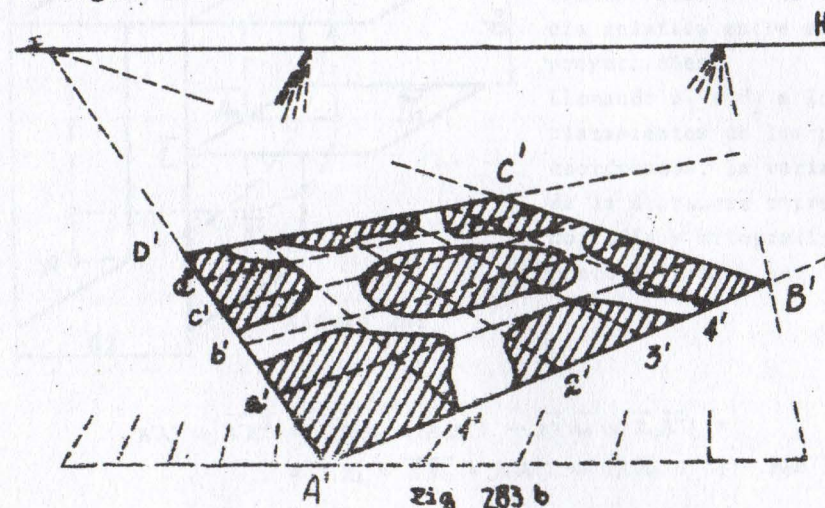


Fig 283 b



# Sistema de Proyección Diédrica (Monge)

## Problemas de Posición

133. - En lo que sigue se trata de complementar algunos temas estudiados en el Capítulo II. Así, en las figuras 46, 77 y 80 del mismo, se puede observar que la resolución de los problemas es independiente de la posición de la línea de tierra.

A continuación veremos que es posible teniendo un dibujo sin línea de tierra, introducir esta línea y con ello fijar la distancia de un punto a los planos coordenados elegidos convencionalmente.

En la fig. 284 se han representado, con referencia al diedro  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , las proyecciones  $A'$  y  $A''$  de un punto  $A$  de un cuerpo. Si se traslada el diedro, manteniendo el paralelismo de las caras, a la posición  $\bar{\pi}_1$ ,  $\bar{\pi}_2$  resultarán para el punto  $A$  las nuevas proyecciones  $\bar{A}'$  y  $\bar{A}''$ .

Puede observarse que tanto la icnografía (planta) como la ortografía (vista) de un cuerpo luego de la traslación de los planos de referencia resultarán congruentes con las anteriores variando solamente la distancia relativa entre ambas proyecciones.

Llamando  $d_1$  y  $d_2$  a los desplazamientos de los planos coordenados, la variación de la distancia entre la icnografía y ortografía del punto  $A$  resulta ser:

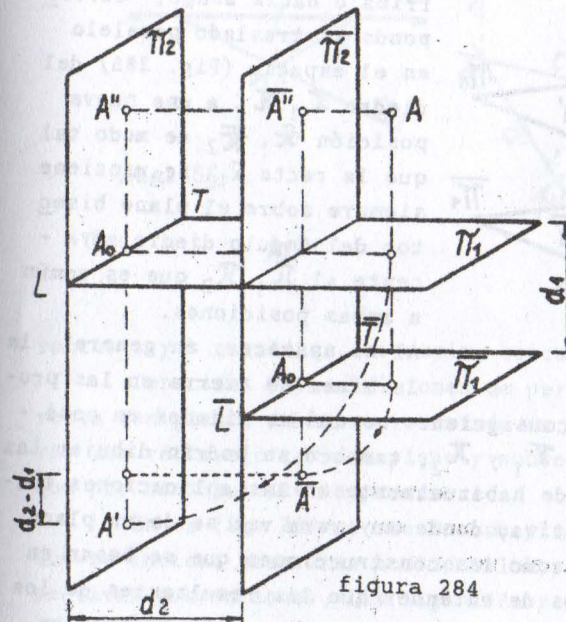


figura 284

$$\begin{aligned} A'A'' - \bar{A}'\bar{A}'' &= (A'A_0 + A_0A'') - (\bar{A}'\bar{A}_0 + \bar{A}_0\bar{A}'') = \\ &= (d_2 + \bar{A}'\bar{A}_0 + A_0A'') - (\bar{A}'\bar{A}_0 + d_1 + A_0A'') = \\ &= d_2 - d_1 \end{aligned}$$



Si los desplazamientos resultan ser  $d_1 = d_2$  la traslación conjunta de los planos coordenados en forma paralela, no sólo no modifica sus proyecciones, como ya se dijo antes, sino que además mantiene invariable las distancias entre las mismas.

Por lo tanto pueden representarse los objetos sin dibujar la línea de tierra dado que las proyecciones son independientes de la misma y cuando haya necesidad de utilizarla se la trazará en el lugar que resulte más conveniente, como una perpendicular a las rectas de vinculación o enlace entre las proyecciones de un mismo punto y la designaremos con la notación  $x_{12}$  (intersección de los planos 1 y 2 de referencia).

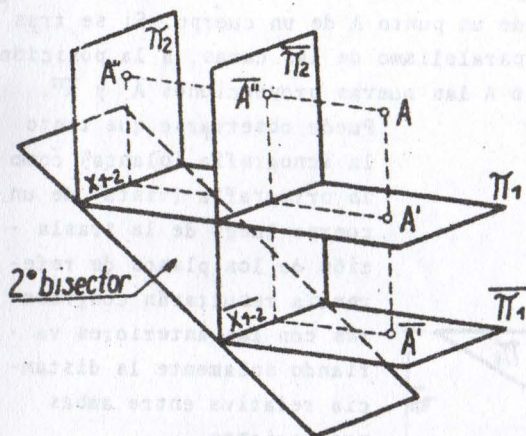


Fig. 285

Dadas las proyecciones de un cuerpo, el corrimiento de la línea de tierra  $x_{12}$  hacia arriba o hacia abajo, corresponde al traslado paralelo en el espacio (Fig. 285) del diedro  $\pi_1, \pi_2$  a una nueva posición  $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$  de modo tal que la recta  $\bar{x}_{12}$  se mantiene siempre sobre el plano bisector del ángulo diedro adyacente al  $\pi_1, \pi_2$  que es común a ambas posiciones.

Al no aparecer en general, la línea de tierra en las proyecciones de un cuerpo y por consiguiente no quedar fijados en posición los planos de referencia  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , tampoco se podrán dibujar las trazas de un plano. Esto sucede habitualmente en las aplicaciones técnicas de la geometría descriptiva, donde muy rara vez se da un plano por sus trazas. No obstante, como las construcciones que se basan en su empleo resultan más fáciles de entender que las resultantes de los procedimientos generales que luego aplicaremos, las utilizaremos en cuanto sea necesario para aclarar desde el punto de vista teórico los problemas que se resuelvan de aquí en más.

### 134. - PUNTOS Y RECTAS DE UN PLANO

Recordemos que un plano queda determinado por dos rectas que se cortan. En la fig. 286a se ha representado el plano por sus trazas  $q_1$  y  $q_2$ , que son dos rectas particulares del mismo, concurrentes en un punto de la línea fundamental. En la fig. 286b, el plano está dado por dos rectas a y b secantes en M y en la fig. 286c, por dos

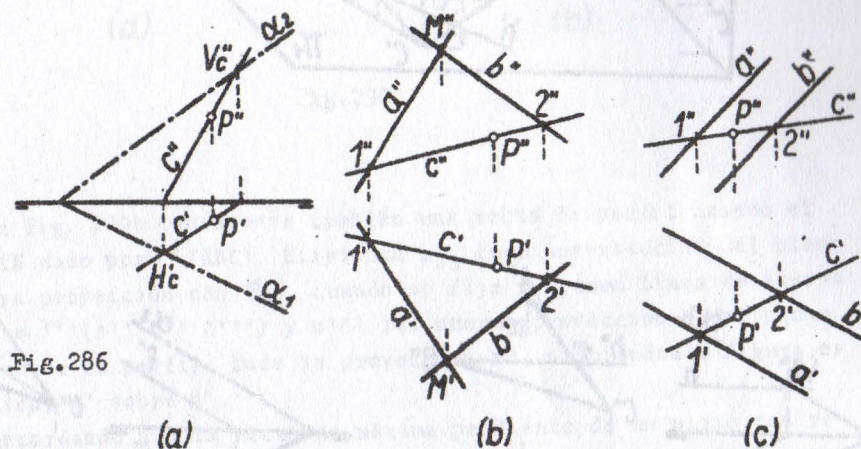


Fig. 286

rectas a y b paralelas, es decir, concurrentes en un punto  $M_\infty$ .

Conocidas las condiciones de pertenencia de punto y recta y de recta con plano, se ha representado en cada una de las figuras anteriores una recta  $c(c', c'')$  del plano y sobre esta recta un punto  $P(P', P'')$ , que por consiguiente le pertenece.

En la fig. 287 se muestra un plano dado por tres puntos en el que se indican una recta horizontal h y una recta frontal f, con sus respectivas proyecciones. Las fig. 288a y 289a representan esas rectas cuando el plano se da por sus trazas y fig. 288b y 289b cuando el plano está dado por tres puntos.



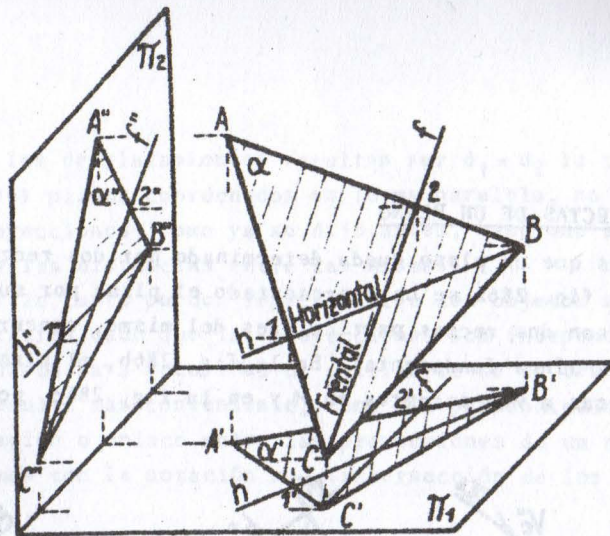


Fig. 287

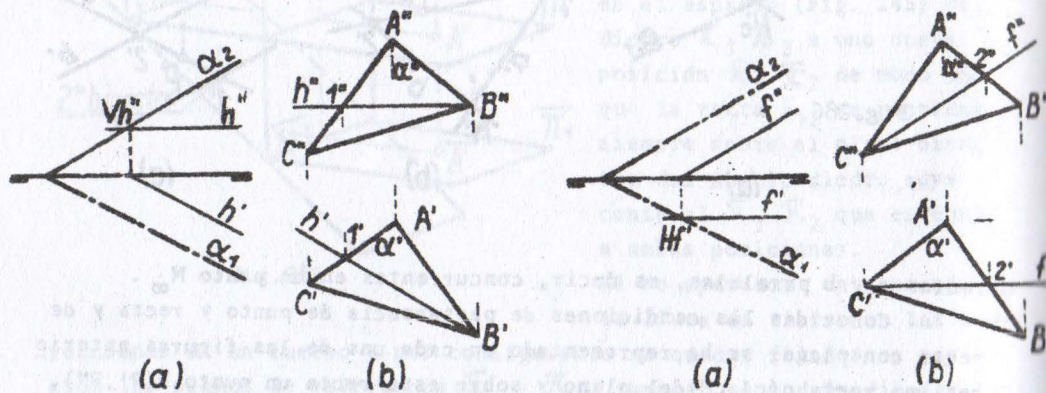


Fig. 288

La fig. 290a representa una recta de perfil  $p(p', p'')$  perteneciente al plano  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ . La recta  $\alpha_3$  es la traza de  $\alpha$  con el plano de tercera proyección, el  $\omega(\omega_1, \omega_2)$ , que es de perfil, es decir perpendicular a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . La tercera proyección de  $p$  es  $p'''$ . Tanto  $\alpha_3$  como  $p'''$  aparecen en la posición indicada luego de haber girado el plano  $\omega$  alrededor de  $\omega_2$ , hasta superponerlo con el  $\pi_2$ . Conocida la proyección  $M''$  de un punto de la recta  $p$ , usando  $M'''$  se puede hallar la  $M'$  sobre  $p'$ .

Fig. 289

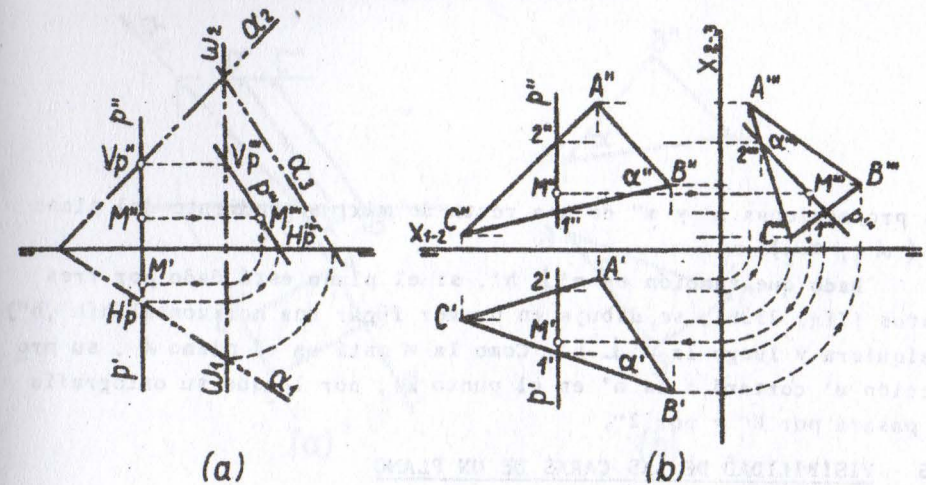


Fig. 290

La fig. 290b representa también una recta de perfil cuando el plano está dado por  $\Delta(ABC)$ . Eligiendo  $x_{23}$  como intersección del plano de tercera proyección con  $\pi_2$ , cuando se fija  $x_{12}$  como línea de tierra resultan  $\alpha'''(A''', B''', C''')$  y  $p'''$  las nuevas proyecciones del plano y de la recta de perfil. Dada la proyección  $M''$ , siguiendo la figura, es fácil ubicar  $M'$  sobre  $p'$ .

Recordando que la recta de máxima pendiente de un plano con relación al  $\pi_1$ , es perpendicular a su traza horizontal (fig. 291) y que su proyección icnográfica es  $m' \perp \alpha_1$ , se han dibujado en la fig. 292a

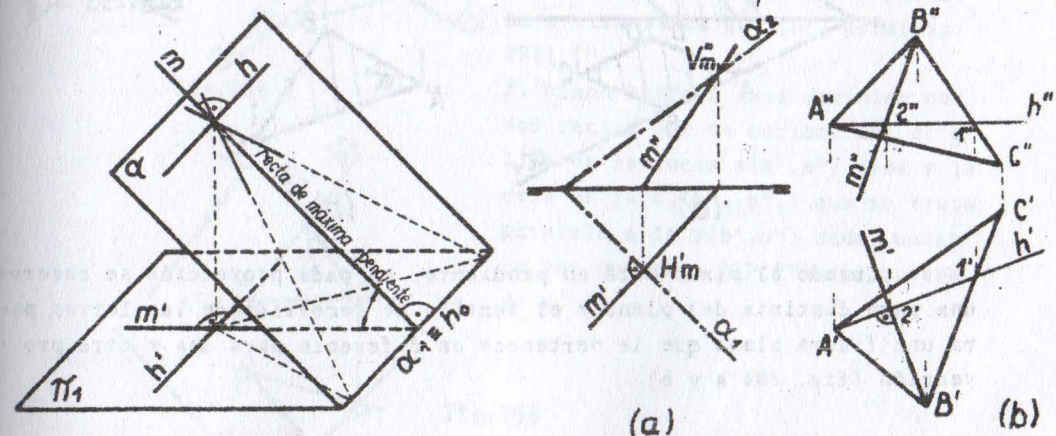


Fig. 291

Fig. 292



las proyecciones  $m'$  y  $m''$  de una recta de máxima pendiente del plano  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ).

Dado que también es  $m' \perp h'$ , si el plano está dado por tres puntos (fig. 292b), se dibuja en primer lugar una horizontal  $h(h', h'')$  cualquiera y luego la  $m' \perp h'$ . Como la  $m$  está en el plano  $\alpha$ , su proyección  $m'$  cortará a la  $h'$  en el punto  $2'$ , por lo que su ortografía  $m''$  pasará por  $B''$  y por  $2''$ .

### 135 - VISIBILIDAD DE LAS CARAS DE UN PLANO

Un plano en posición cualquiera frente a un observador ubicado en el primer cuadrante, puede estar en rampa o en pendiente según que su inclinación aparezca ascendente o descendente, respectivamente. En el primer caso, tanto se lo mire desde arriba como de frente se verá siempre la misma cara del plano y en la representación de una figura plana situada en él, el sentido del recorrido de las letras es el mismo para ambas proyecciones (fig. 293 a y b)

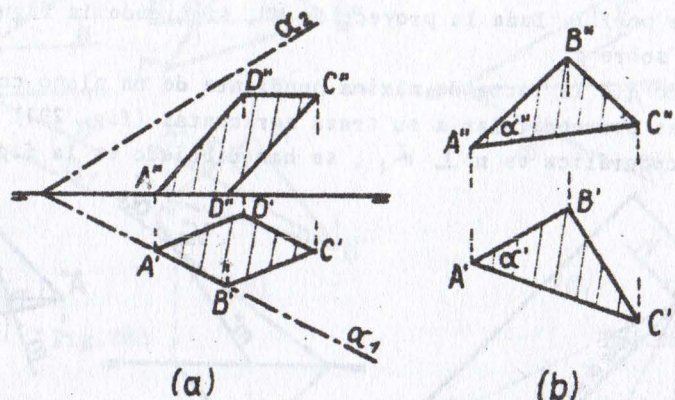


Fig. 293

Cuando el plano está en pendiente, en cada proyección se observa una cara distinta del plano y el sentido de recorrido de las letras para una figura plana que le pertenece es diferente para una y otra proyección (fig. 294 a y b)

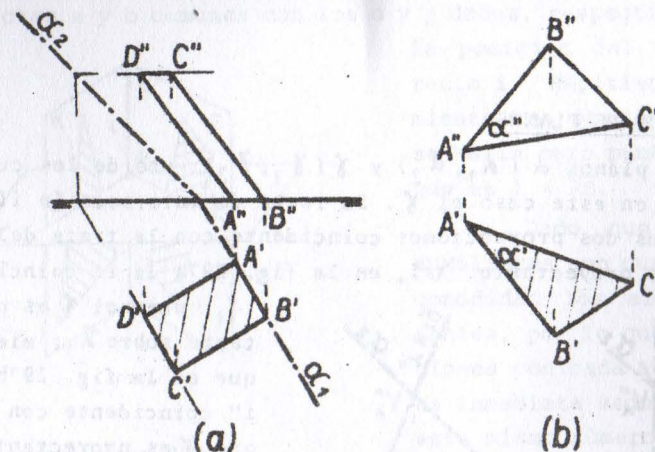


Fig. 294

### 136 - RECTAS Y PLANOS PARALELOS

a) Trazar por un punto  $P(P', P'')$  un plano paralelo a dos rectas  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$  dadas (fig. 295).

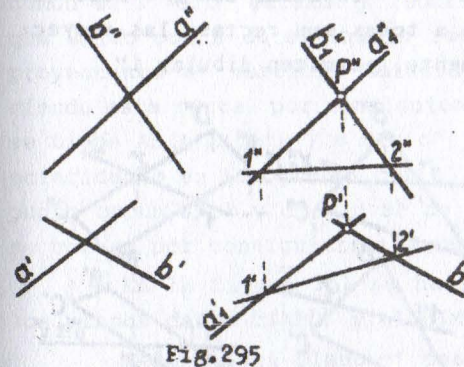


Fig. 295

El plano pedido queda definido por las rectas  $a_1(a'_1, a''_1)$  y  $b_1(b'_1, b''_1)$  que pasando por  $P(P', P'')$  son paralelas a  $a(a', a'')$  y  $b(b', b'')$  respectivamente.

b) Trazar un plano que, pasando por una recta dada  $a(a', a'')$  sea paralelo a otra recta  $b(b', b'')$  dada (fig. 296)

El plano buscado está definido por dos rectas que se cortan: una de ellas es la recta  $a(a', a'')$  dada y la otra es la  $b_1(b'_1, b''_1)$  que se traza paralela a la  $b(b', b'')$  dada, pasando por un punto  $P(P', P'')$  cualquiera de  $a$ .

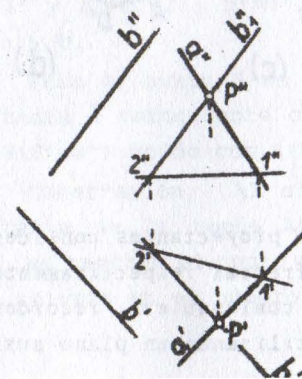


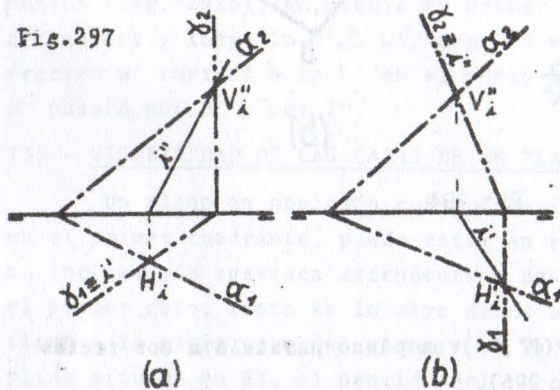
Fig. 296



## 137. INTERSECCION DE PLANOS

Sean dos planos  $\alpha (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\gamma (\gamma_1, \gamma_2)$ , uno de los cuales es proyectante, en este caso el  $\gamma$ . Su recta de intersección  $i(i', i'')$  tendrá una de sus dos proyecciones coincidente con la traza del plano sobre el cual es proyectante. Así, en la fig. 297a la  $i'$  coincide con

Fig. 297



$\gamma_1$ , pues el  $\gamma$  es proyectante sobre  $\pi_1$ ; mientras que en la fig. 297b es la  $i''$  coincidente con  $\gamma_2$  ya que  $\gamma$  es proyectante sobre  $\pi_2$ .

Cuando los planos no están dados por sus trazas, fig. 298a, al cortar al plano  $\alpha (A, B, C)$  con el  $\gamma$  proyectante vertical  $i'$  coincide con  $\gamma'$ . Dado que

por estar  $i$  en el plano  $\alpha (ABC)$  corta a todas sus rectas, las proyecciones  $1''$  y  $2''$  de  $1'$  y  $2'$  respectivamente, permiten dibujar  $i''$ .

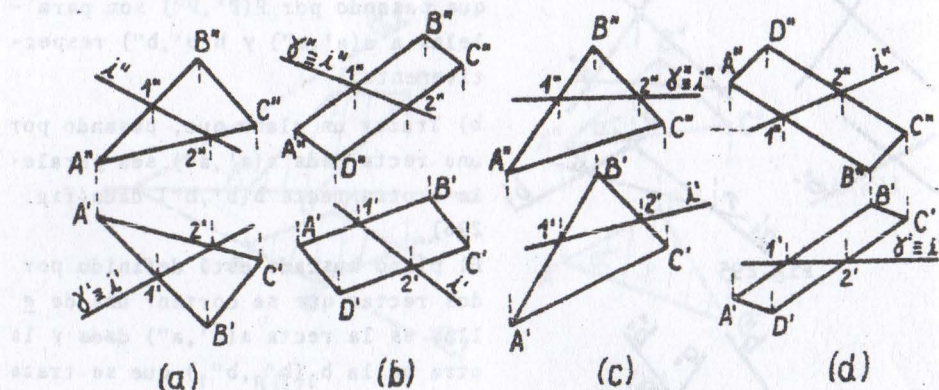
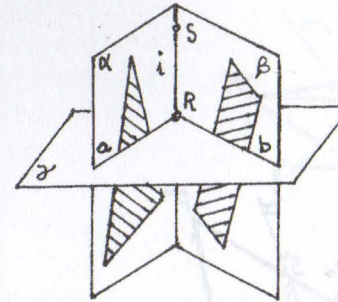


Fig. 298

En las fig. 298 b, c y d los planos proyectantes considerados son: proyectante sobre  $\pi_2$ , horizontal y frontal respectivamente.

Cuando los planos considerados son cualesquiera, recordemos que su intersección (fig. 299) se determina utilizando un plano auxiliar  $\gamma$

cuyas rectas  $a$  y  $b$  comunes con los  $\alpha$  y  $\beta$  dados, respectivamente, fijan la posición del punto  $R$  de la recta  $i$ . Repitiendo el procedimiento con otro plano auxiliar, se halla otro punto, el  $S$  por lo que es  $i = \overline{RS}$ .



- figura 299 -

Dado que estos planos auxiliares son cualesquiera, por comodidad los elegimos proyectantes, por lo que sus intersecciones con cada uno de los dados es inmediata según se explicó en este mismo número.

En la figura 300 se ha encontrado la intersección de los planos  $\alpha(ABC)$  y  $\beta(MNPQ)$ . Cortándolos con el proyectante horizontal  $\gamma''$  que hacemos pasar por  $B$ , se obtienen las intersecciones  $a$  y  $b$ , siendo las proyecciones  $a''$  y  $b''$  coincidentes con  $\gamma''$ . La recta  $a$  es  $a' = B''1'$  cuya icnografía es  $a'' = B''1''$  y la  $b$  es  $b'' = 2''3''$ , siendo  $b' = 2'3'$ ; su punto común es  $R' = a'b'$  estando  $R''$  sobre  $\gamma''$ . Para obtener el punto  $S(S', S'')$  que unido con  $R$  determina la recta  $i(i', i'')$  pedida, se ha tomado el proyectante  $\delta'$  vertical coincidente con la proyección  $A'B'$  de  $AB$ , siendo esta recta, por consiguiente, su intersección con  $\alpha$ . Es decir, se tiene  $AB(A'B', A''B'') \equiv c(c', c'')$ . La recta común a  $\delta$  y  $\beta$  es  $4'.5' = d'$  coincidente en icnografía con  $c'$ , cuyas ortografías dan  $4''.5'' = d''$ . El punto común a  $c''$  y  $d''$  dan  $S''$  de donde surge la  $S'$ . Los planos dados se cortan por consiguiente según  $i = \overline{RS}$ , siendo  $i' = \overline{R'S'}$  e  $i'' = \overline{R''S''}$ .

En la figura 301 se ha resuelto un problema similar, siendo los planos dados  $\alpha(ABC)$  y el  $\beta(MNP)$ .

Mediante el plano  $\gamma''$  pasante por  $M$  se obtienen  $a$  y  $b$  siendo  $a'' = 1''.2''$  y  $a' = 1'.2'$ ;  $b'' = M''.3''$  y  $b' = M'.3'$ . El punto  $R(R', R'')$  es el común a  $a$  y  $b$ .

Para el punto  $S$  se tomó, como en el caso anterior, el plano proyectante  $\delta$  coincidente con la proyección  $A'B'$  del lado  $AB$ . Este punto  $S(S', S'')$  unido con  $R(R', R'')$ , determina la recta  $i(i', i'')$ .

Observación: Al elegir  $\delta' = A'B'$ , este plano auxiliar es el proyectante de la recta  $AB$  y el punto  $S$  hallado que pertenece a  $i(\alpha \beta)$ , es también el punto de intersección de la recta  $AB$  con el plano  $\beta$  como se verá en el número que sigue.



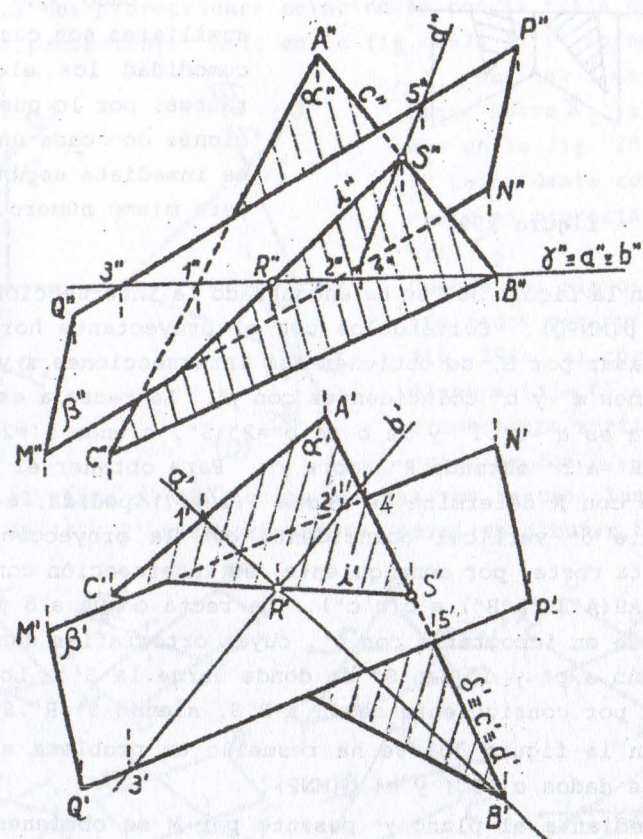


Fig. 300

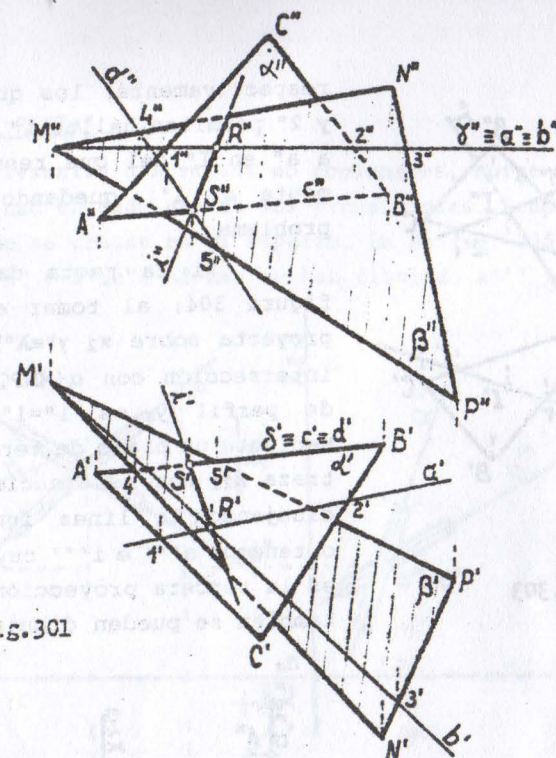


Fig. 301

En cuanto a la visibilidad de los planos, es decir a la determinación en cada proyección de las partes que quedan ocultas en un plano por la superposición con el otro y que complementan los dos ejemplos anteriores, será motivo de una explicación que se dará más adelante.

### 138 - INTERSECCION DE RECTA Y PLANO

Como ya se ha visto, el punto I de intersección buscado (fig. 302)

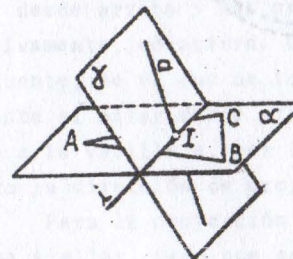


Fig. 302

surge de trazar por la recta dada a, el plano auxiliar  $\gamma$  cualquiera, cuya recta i común con el plano  $\alpha$  dado, permite obtener sobre a el referido punto I.

En la fig. 303, el plano auxiliar que contiene a la recta es su proyectante vertical, por lo que  $\gamma' \equiv a'$  y como i pertenece a  $\gamma$  es  $i' \equiv \gamma'$ . Como i también es de  $\alpha$  corta a AB y AC, en puntos cuyas icnografías son 1' y 2'



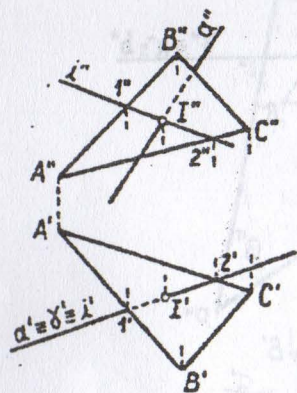


Fig. 303

respectivamente, los que dibujados en  $1''$  y  $2''$  permiten hallar  $i''$ . Esta recta corta a  $a''$  en  $I''$  del que resulta consiguientemente el  $I'$ , quedando así resuelto el problema

Si la recta dada es de perfil, figura 304, al tomar el plano  $\gamma$  que la proyecta sobre  $\pi_2$   $\gamma'' \equiv A''B''$ , la recta  $i$  de intersección con  $\alpha$  (MNPQ) resulta también de perfil y es  $i'' = 1''.2''$ , e  $i' = 1'.2'$ . Mediante un plano de tercera proyección de traza  $x_{23}$  con referencia a  $\pi_2$  que fijamos dibujando la línea fundamental en  $x_{12}$ , obtenemos  $a'''$  e  $i'''$  cuyo punto común  $I'''$  es la tercera proyección de  $I$ , por lo que también se pueden dibujar  $I''$  e  $I'$ .

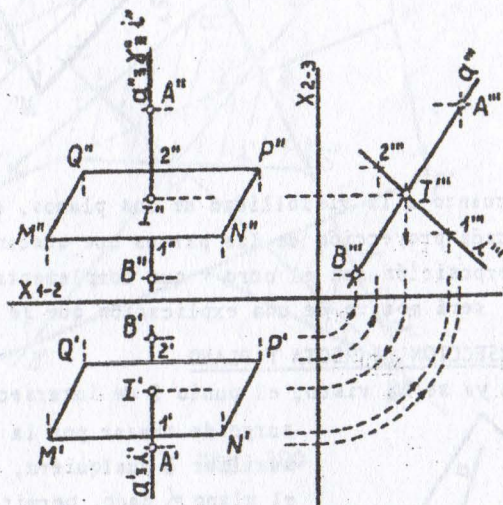


Fig. 304

### 139 - VISIBILIDAD DE RECTAS

Cuando se representan dos rectas no coplanares, surge el problema de la visibilidad en cada una de las proyecciones. Sean dos rectas (varillas) que se cruzan en el espacio. En la fig. 305 se dan sus proyecciones  $a', a''$  y  $b', b''$ ; además se han dibujado  $a'''$  y  $b'''$ .

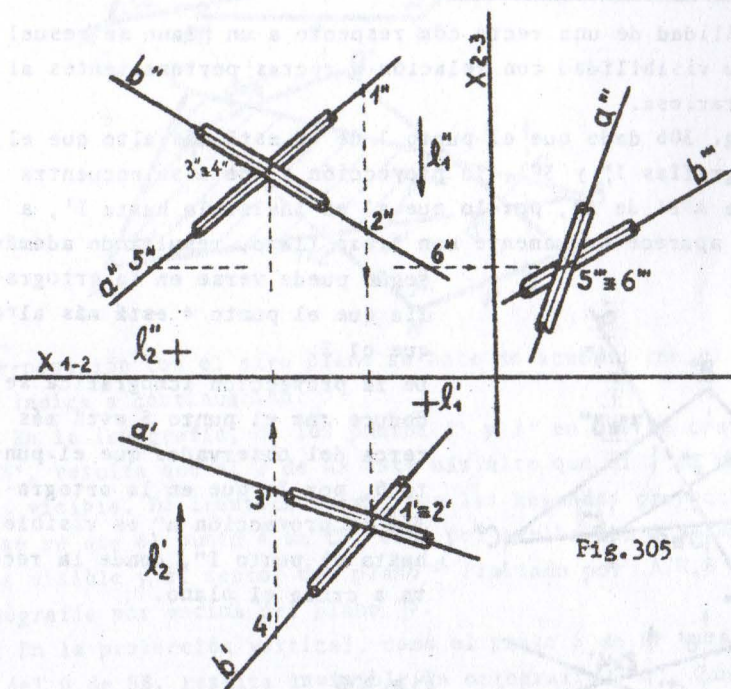


Fig. 305

En la icnografía, es decir en la planta, miramos las dos varillas desde arriba y las proyecciones de los puntos 1 y 2 de  $a$  y  $b$  respectivamente, coinciden. Observando la ortografía, es decir la vista de frente, se ve que de los dos puntos el 1 es el más alto, por consiguiente al mirar desde arriba, en la icnografía veremos en primer término a la varilla  $a$ , por lo que  $a'$  es visible. La recta  $l_1(l'_1, l''_1)$  marca la dirección de proyección para la icnografía.

Para la proyección ortográfica la visibilidad se resuelve en forma similar. Dado que sobre  $\pi_2$  representamos las varillas cuando las miramos de frente, de los puntos 3 y 4, cuyas ortografías coinciden en  $3'' \equiv 4''$ , veremos en primer término el más cercano al observador, es decir, el más alejado de  $\pi_2$ . Como los alejamientos de  $\pi_2$  se miden en la icnografía, se concluye que primero se ve el punto 4 perteneciente a la



recta  $b$ ; por lo tanto es visible la proyección  $b''$  de la varilla  $b$ . La recta  $l_2$  ( $1'2$ ,  $1''2$ ) marca la dirección de proyección para los puntos de la ortografía.

Con los puntos 5 y 6 se ha determinado la visibilidad en la tercera proyección.

#### 140 - VISIBILIDAD DE RECTAS Y PLANOS

La visibilidad de una recta con respecto a un plano se resuelve analizando su visibilidad con relación a rectas pertenecientes al plano al que atraviesa.

En la fig. 306 dado que el punto 1 de  $AB$  está más alto que el 3 de  $a$  (ver ortografías  $1''$  y  $3''$ ), la proyección  $a'$  de  $a$  se encuentra por debajo de la  $A'B'$  de  $AB$ , por lo que  $a'$  es invisible hasta  $I'$ , a partir del cual aparece nuevamente con trazo lleno, resultando además

según puede verse en la ortografía que el punto 4 está más alto que el 2.

De la proyección icnográfica se deduce que el punto 5 está más cerca del observador que el punto 6, por lo que en la ortografía la proyección  $a''$  es visible hasta el punto  $I''$ , donde la recta  $a$  cruza el plano.

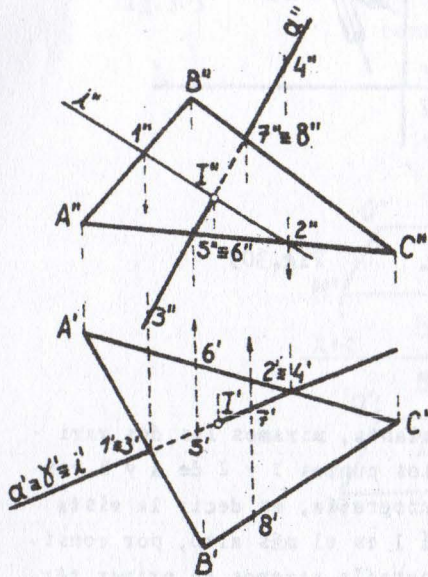


Fig. 306

#### 141 - VISIBILIDAD ENTRE PLANOS

Surge de analizar la visibilidad de rectas de un plano con relación a rectas del otro plano.

Así, en la fig. 307, resuelta la intersección  $RS$  de los planos  $\alpha$  ( $ABC$ ) y  $\beta$  ( $MNPQ$ ) de acuerdo con lo estudiado precedentemente, habiéndose omitido en figura las construcciones pertinentes, la determinación

cada proyección de los sectores de un plano que quedan ocultos por

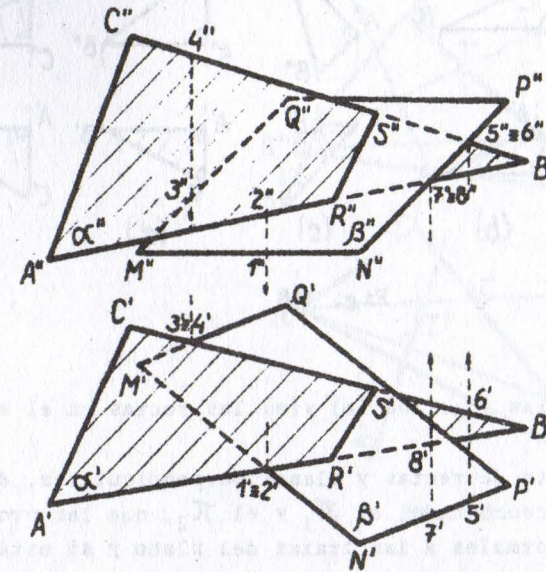


Fig. 307

la superposición con el otro plano se hace de acuerdo con el análisis que se indica a continuación.

En la icnografía, de los puntos  $1'$  y  $2'$  en que se cruzan  $A'R'$  con  $M'N'$ , resulta que el 2 de  $AR$  está más alto que el 1 de  $MN$ ; luego  $A'R'$  es visible. De idéntica forma, con las segundas proyecciones  $3''$  y  $4''$ , se ve que el punto 4 de  $CS$ , está por arriba del 3 de  $MQ$ ; luego  $C'S'$  es visible y el sector del plano  $\alpha$  limitado por  $A, R, S$  y  $C$  está en icnografía por encima del plano  $\beta$ .

En la proyección vertical, como el punto 5 de  $NP$  está por delante del 6 de  $SB$ , resulta invisible la ortografía  $S''6''$ . Con los puntos 7 y 8 se deduce que  $R''8''$  es también invisible. Luego el sector del plano  $\alpha$  limitado por los puntos  $R, S, 6$  y  $8$  tiene su segunda proyección oculta por el plano  $\beta$ .

#### 142 - RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

Recordemos que las proyecciones de dos rectas perpendiculares no son perpendiculares, salvo el caso en que uno de los lados del ángulo recto sea paralelo al plano de proyección, en cuyo caso el lado y ángulo recto aparecen en verdadera magnitud sobre dicho plano. Así en las fig. 308 (b) y (d) por ser horizontal la recta  $AB$ , el ángulo real en  $A$  es  $90^\circ$ . También es recto el ángulo en  $A$  de la fig. 308 pues la  $AB$  es frontal.



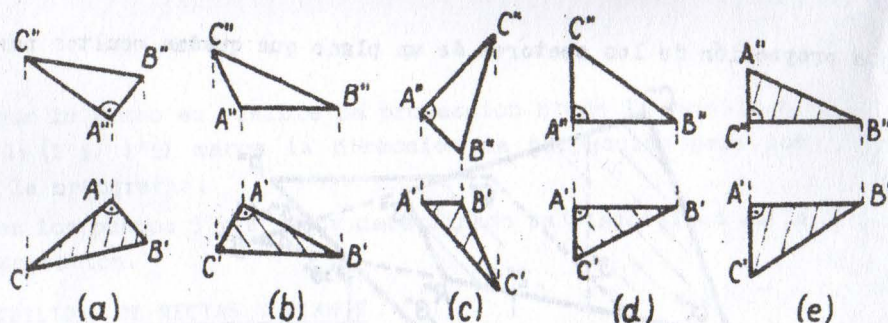
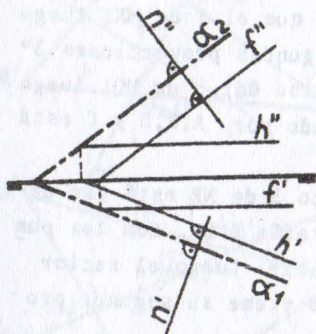


Fig. 308

En cambio en las fig. 308 (a) y (e) las rectas en el espacio no son ortogonales.

Cuando se trata de rectas y planos perpendiculares, debe verificarse en cada plano coordenado, el  $\pi_1$  y el  $\pi_2$ , que las proyecciones de las rectas sean normales a las trazas del plano y si estas faltan, a sus horizontales y frontales, respectivamente, como se desprende de la fig. 309. En ésta se cumple que  $n' \perp \alpha_1$ ;  $n' \perp h'$  y  $n'' \perp \alpha_2$ ;  $n'' \perp h''$ .

Fig. 309  
pertinentes.

En el caso de la fig. 310 en que el plano es  $\alpha$  (ABC), se ha trazado una horizontal cualquiera dibujando  $h''$  y luego la  $h'$ . La  $n'$  perpendicular a  $h'$  es la proyección de una normal al plano  $\alpha$ . Trazando luego  $f'$ , surge la  $f''$  y por consiguiente la  $n''$  perpendicular a  $f''$  es la otra proyección de la recta buscada normal al plano. El punto I común a esta normal y al plano queda determinado según lo estudiado en el n° 138, no habiéndose dejado indicado en la figura las construcciones

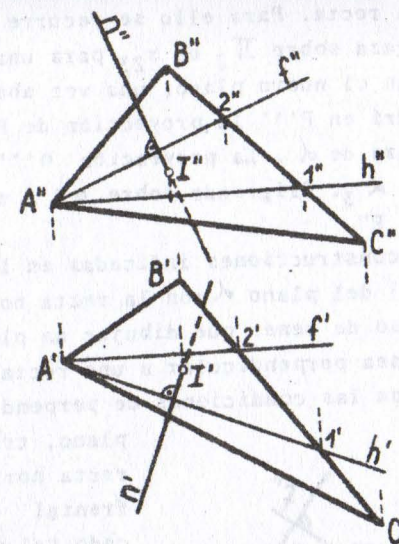


Fig. 310

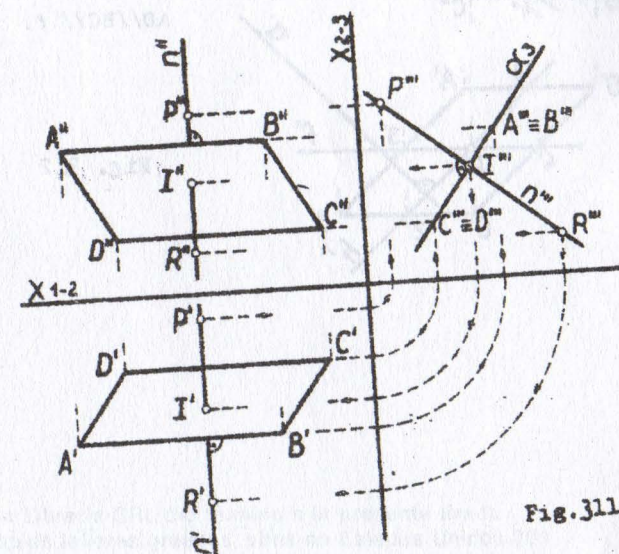


Fig. 311

En la fig. 311 se resuelve el problema de trazar por el punto  $P(P', P'')$  una recta perpendicular a un plano dado por  $\alpha$  (ABCD). Dado que este plano es paralelo a la línea de tierra, la recta buscada resulta ser de perfil, siendo sus proyecciones  $n' \perp A'B'$  y  $n'' \perp A''B''$  pasantes por  $P'$  y  $P''$  respectivamente. Como además de sus proyecciones necesitamos para una recta de perfil dar las proyecciones de dos de



sus puntos, en la figura se ha hallado el R que junto con el P dado definen a dicha recta. Para ello se recurre a un plano de tercera proyección cuya traza sobre  $\pi_2$  es  $x_{23}$  para una línea de tierra que elegimos en  $x_{12}$ . En el nuevo plano, una vez abatido sobre  $\pi_2$  alrededor de  $x_{23}$ , se tendrá en  $P'''$  la proyección de P y en  $A'''B'''$  la traza de  $\alpha$ . La proyección  $n'''$  de  $n$  pasa por  $P'''$  y es perpendicular a  $A'''B'''$ . Eligiendo sobre  $n'''$  el  $R'''$  cualquiera podremos hallar  $R'$  y  $R''$ .

Con las construcciones indicadas en la figura surge la intersección  $I(I', I'')$  del plano  $\alpha$  con la recta normal pasante por P.

En el caso de tener que dibujar un plano que pasando por un punto  $P(P', P'')$  sea perpendicular a una recta a dada (Fig. 312), bastará de acuerdo con las condiciones de perpendicularidad entre recta y

plano, trazar por el punto P una recta horizontal  $h(h', h'')$  y una frontal  $f(f', f'')$  del plano buscado tal que  $h' \perp a'$  y  $f'' \perp a''$ . Estas dos rectas definen el plano y en la figura se lo ha limitado por las rectas  $AB//CD//h$  y  $AD//BC//f$ .

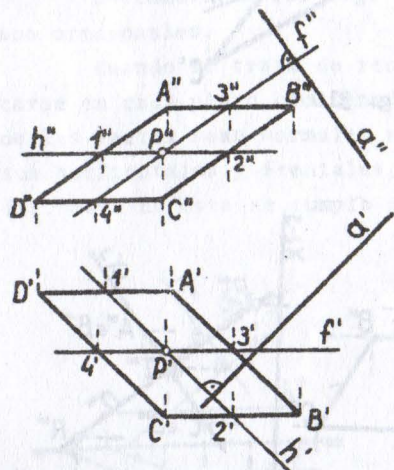


Fig. 312

Nueva Librería SRL dio término a la presente tirada en sus propios talleres gráficos, sitos en Estados Unidos 301 (1101) C. Autónoma de Buenos Aires, Argentina.  
Telefax (5411) 4362 - 9266  
En el mes de Agosto de 2015

[www.nuevalibreria.com.ar](http://www.nuevalibreria.com.ar)