

ROBERTO MÜLLER

COMPENDIO DE TOPOGRAFIA

Tomo III

VOLUMEN I:

TRIANGULACION y NIVELACION

SEGUNDA EDICION

LIBRERIA "EL ATENEO", FLORIDA 340-44
BUENOS AIRES

COMPENDIO GENERAL
DE
TOPOGRAFIA TEORICO PRACTICA

POR

ROBERTO MÜLLER

AGRIMENSOR NACIONAL

EX-PROFESOR DEL CURSO LIBRE DE TOPOGRAFÍA DE LA FACULTAD
DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
EX-GEODESTA DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO MILITAR ARGENTINO



TOMO III, VOLUMEN 1:

TRIANGULACION Y NIVELACION

SEGUNDA EDICIÓN
corregida y aumentada

INT
534

LIBRERÍA "EL ATENEO", FLORIDA 340-44
BUENOS AIRES
1940 (Marzo 1º)

528 4 25

Queda hecho el depósito
que marca la ley N° 11723.

Legado P. Vergés	
Fecha: May, 2005	MUL
Inv.: 00299	of 1

PREFACIO DE LA SEGUNDA EDICION.

El rápido agotamiento de la primera edición del tomo III de este compendio y la urgencia de poner a disposición de los estudiantes de ingeniería una nueva edición del mismo, corregida, ampliada y modernizada, ha hecho necesario una división de los tópicos del tomo en 2 volúmenes independientes, de los cuales el presente trata la triangulación y nivelación. El segundo volumen, que aparecerá a fines del corriente año, expondrá la representación cartográfica de las formas del terreno o sea la topografía propiamente dicha a base de la taquimetría gráfica y numérica.

Buenos Aires, marzo de 1940.

EL AUTOR.

DEL MISMO AUTOR:

Tolerancias en Agrimensura Legal, Buenos Aires, 1921.

Cálculo de compensación y teoría de los errores, Buenos Aires, 1924. (*)

Confección de catastros, Buenos Aires, 1925.

Regla de cálculo, tipo técnico, 3ª edición, Buenos Aires, 1939.

Regla de cálculo al alcance de todos, Buenos Aires, 1935.

Compendio de Topografía, tomo I, 2ª edición:

Agrimensura y Catastro, Buenos Aires, 1937.

Compendio de Topografía, tomo II, Volumen 1, segunda edición:

Optica, Buenos Aires, 1940.

Volumen 2, segunda edición:

Teodolitos y poligonación, en prensa.

Compendio de Topografía, tomo III, Volumen 2, segunda edición:

Taquimétrica gráfica y numérica, en prensa.

Libreta topográfica, Buenos Aires, 1936.

Libretas de campo:

Taquimetría, Poligonales Taquimétricas, Nivelación común y Nivelación de precisión, Buenos Aires, 1935.

(*) *Usase en el texto la abreviatura: "C. de C." cuando se cita esta obra.*

INDICE DE MATERIAS

TRIANGULACION

§ 1. Triangulación aislada. Sobre la disposición general y ejecución de los trabajos de triangulación. Medición de base topográfica. Clasificación de los principales problemas de Topografía.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Observaciones preliminares	3	
2.	Necesidad de los nuevos puntos básicos. Arranques y apoyos para los trabajos de levantamiento. Dos casos típicos	3	
3.	Puntos fijos: marcación natural y marcación artificial; señalación	4	
4.	Ejecución de una pequeña triangulación independiente. Principales partes del trabajo: reconocimiento, marcación, señalación, medición y cálculo. Elección de los vértices. Triángulos equiláteros. Longitud media de los lados. Elección del sitio para la base	4	
5.	Dependencia de la señalación y de la centración de instrumento y objeto visado de la longitud de las visuales. Tipo de teodolito y método de medición angular recomendados	5	
6.	Medición de una base topográfica. Cintas; estacas; reducción al horizonte; medición en ida y vuelta	5	
7.	Cálculo de la red de triangulación. Sistema de coordenadas	6	
8.	Determinación trigonométrica de nuevos puntos. Preponderancia de la medición angular. Objeto de las observaciones sobrantes. Clasificación de los principales problemas de Topografía	7	

§ 2. Intersección o bisección hacia adelante y bisección lateral.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Caso de haber visibilidad entre los dos puntos fijos extremos de la base	8	
2.	Caso de no haber visibilidad entre los dos puntos extremos de la base	10	
3.	Intersección o bisección lateral	10	
4.	Cálculo con la máquina. Deducción de las correspondientes fórmulas. Formulario trigonométrico Nº 9 y ejemplo práctico calculado en el mismo	10	

§ 3. Problema de la carta (de Snellius o de Pothenet) o problema de los tres puntos.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	El problema de la carta considerado desde tres distintos puntos de vista	12	
2.	Solución con ángulo auxiliar μ	14	
3.	Formulario trigonométrico 10 y ejemplo práctico calculado en el mismo	13	
4.	Discusión de la fórmula (6). Casos favorables y casos desfavorables. Solución imposible	18	
5.	Solución 2ª por medio de un punto auxiliar de Collins. Desarrollo de las correspondientes fórmulas	19	
6.	Formulario trigonométrico 11 con tres ejemplos prácticos calculados en el mismo determinando distintos puntos de Collins. Resumen y croquis de conjunto	22	
7.	Observaciones generales relativas a la precisión de la determinación	28	
8.	Solución 3ª con punto de Collins adaptada al cálculo con la máquina. Ejemplo práctico calculado en formulario trigonométrico 12	28	
9.	Solución 4ª calculando directamente		
	ctg ψ y ctg φ . Desarrollo de las fórmulas	30	
10.	Formulario 13 con un ejemplo práctico calculado en el mismo	30	
11.	Solución geométrica de Cassini-Gauss y solución analítica 5ª por medio del teorema de la tangente	32	
12.	Solución 6ª especial para la máquina. Deducción de las correspondientes fórmulas	34	
13.	Formulario trigonométrico 14 y ejemplo práctico en él calculado	38	
14.	Observaciones generales de recapitulación	38	
15.	Restablecimiento de un punto trigonométrico perdido por medio del problema de la carta	38	
16.	Importancia del problema de la carta para la navegación	38	
17.	Historia y datos bibliográficos relativos al problema de la carta en general y las distintas soluciones tratadas en particular	40	

§ 4. Problema de Hansen o problema del par de puntos fijos inaccesibles.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Condiciones del problema	41	
2.	Enunciado del problema y características de las tres soluciones que se ejecutan	41	
3.	Solución 1ª con ángulo auxiliar u . Deducción de las correspondientes fórmulas	42	
4.	Formulario trigonométrico 15 y geodésico 1 y ejemplos prácticos en ellos calculados		43
5.	Solución 2ª por medio de 2 puntos de Collins		49
6.	Solución 3ª con lado fingido		55
7.	Resumen y contralor de medición		58

§ 5. Problema de Marek o de los dos pares de puntos fijos inaccesibles.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Enunciado del problema e ideas generales sobre la solución del mismo	59	
2.	Ejemplo práctico; elementos básicos y de medición	59	
3.	Breves observaciones aclaratorias sobre la solución del problema y el resultado del mismo	62	
4.	Caso de no haber visibilidad recíproca entre los dos nuevos puntos a determinar o problema de Marek con poligonal		62
5.	Ejemplo práctico para el problema de Marek con poligonal		63
6.	Distintas etapas en la marcha del cálculo del problema de Marek con poligonal; contralores de cálculo y de medición. Precisión alcanzada		64
7.	Amplitud de la aplicabilidad del método preconizado		70

§ 6. Triangulación de enlace.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Característica y enunciado del problema	72	
2.	Distintas etapas de la marcha del cálculo	73	
3.	Precisión de la determinación. Errores medios m_ϵ y m_ω . Error relativo lineal		80

NIVELACION

§ 1. Explicaciones previas de carácter fundamental

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Dirección de la plomada. Elipsoide de revolución, superficie terrestre verdadera, superficie de nivel, geoide	83	
2.	Marea, flujo y reflujo, pleamar, bajamar, nivel medio del mar, mareógrafo. Horizonte hipsométrico general de la República Argentina	83	
3.	Definiciones: altitud, altura absoluta o cota, diferencia de nivel, desnivel o altura relativa, superficie o plano de comparación	84	
4.	Resumen: Geoide, elipsoide de Hayford, esfera de curvatura media, esfera de radio medio, plano	84	
5.	Horizontal verdadera y horizontal aparente. Definiciones. Efecto de la curvatura terrestre		84
6.	Horizontal óptica. Influencia de la refracción terrestre		86
7.	Clasificación general de las nivelaciones		87
8.	Nivelación geométrica considerada como medición lineal sobre la vertical		88
9.	División de la nivelación geométrica según su precisión		88
10.	División general de los trabajos de nivelación según otro criterio		89

§ 2. Reconocimiento y construcción de puntos fijos altimétricos. Monografías de puntos fijos altimétricos.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Dos distintos tipos de puntos fijos: provisionales y definitivos	90	
2.	Puntos fijos provisionales	90	
3.	Marcas para puntos fijos permanentes usadas en las nivelaciones del Instituto Geográfico Militar Argentino	91	
4.	Precauciones a tomar en la construcción de marcas altimétricas	91	
5.	Reconocimiento y construcción de puntos fijos de nivelación de precisión		91
6.	Monografías de puntos fijos altimétricos		91
7.	Categorías de puntos fijos altimétricos establecidas en el Instituto Geográfico Militar Argentino		92

§ 3. Principio de la nivelación geométrica o nivelación simple.
Nivelación compuesta.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. El aparato de nivelación	92	6. fracción terrestre	94
2. Principio de la nivelación geométrica o nivelación simple	93	6. Golpe de nivel atrás y golpe de nivel adelante	94
3. Posición del cero de la graduación de la mira	93	7. Nivelación compuesta o tiros de nivelación. Puntos de cambio	94
4. Nivelación desde el medio	93	8. Fórmula general de la nivelación geométrica	95
5. Influencia de la diferencia de la re-			

§ 4. Nivel simple de anteojo fijo.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. División de los niveles de anteojo y características generales de los niveles simples a anteojo fijo	95	de un nivel de anteojo o influencia c de un error γ sobre la lectura de mira	98
2. Ejes de un nivel de anteojo y condiciones que deben satisfacerse	96	8. Tolerancia para el error γ adoptada para las nivelaciones de alta precisión y tolerancia para la falta de equidistancia de las miras	99
3. Orden en que conviene sean efectuadas las correcciones	96	9. Error de cruce	100
4. Eliminación de la paralaje y falta de horizontalidad del hilo nivelador del retículo	97	10. Niveles simples Zeiss D y Wild I	100
5. Ejecución de la corrección principal: eje de colimación paralelo al eje del nivel	97	11. Ejemplos prácticos calculados en nuestro formulario de nivelación Nº 1. Explicaciones sobre el procedimiento operatorio y modo de anotar las lecturas de mira	100
6. Ejemplo práctico con comprobación	98		
7. Criterio sobre el estado de corrección			

§ 5. Nivel Egault con nivel tubular fijo e independiente del anteojo.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Descripción	104	4. Examen de la igualdad de los collares	105
2. Condiciones que deben satisfacerse	105	5. Error de cruce	105
3. Procedimiento operatorio a emplear en la corrección	105		

§ 6. Nivel de precisión de construcción antigua con nivel de caballete.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Condiciones que deben satisfacerse	106	6. nivel Seibt-Breithaupt	109
2. Modo de efectuar las correcciones	107	6. Corrección general del nivel de precisión Seibt-Breithaupt	109
3. Lo que motivó la creación del nivel de precisión Seibt-Breithaupt	108	7. Corrección especial de la desigualdad de los collares	110
4. Detalles constructivos que lo distinguen del tipo general	109	8. Perpendicularidad del eje de colimación al eje vertical	111
5. Modernización de la construcción del			

§ 7. Nivel biaxial de Zeiss.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Puntualizando los progresos ópticos y constructivos realizados	111	que corresponde a la visual horizontal compensada	112
2. Principales características del anteojo biaxial	111	5. Ejecución de la verificación y corrección principal	113
3. Cuatro diferentes posiciones del conjunto "anteojo-nivel", que se utilizan para efectuar la corrección principal	112	6. Tolerancia para el estado de corrección de un nivel en nivelaciones de segundo y tercer orden	113
4. Explicación de las 4 lecturas de mira que concurren a la formación de la		7. Error de cruce	114

§ 8. Nivel de anteojo con nivel reversible.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Lo que distingue estos modernos niveles del tipo biaxial	7.	Particularidades de los modernos niveles de precisión de este tipo: Placa de vidrio de caras planas y paralelas; trazo de cuña en el retículo, su uso en los diversos métodos de trabajo
2.	Condición principal que debe satisfacer el nivel y manera de efectuar la corrección	8.	Modo de operar con el dispositivo de placa de vidrio de caras planas y paralelas en unión con el tornillo micrométrico para la bisección de un espacio blanco de la mira
3.	Tres recursos para la eliminación del ángulo de convergencia de un nivel reversible	9.	Observación del nivel de coincidencia
4.	Corrección del nivel de coincidencia		
5.	Ventajas del nivel reversible y nivel de coincidencia		
6.	Comprobación del paralelismo de las dos tangentes del nivel reversible		

§ 9. Nivel de precisión de construcción moderna.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Aumento del anteojo y sensibilidad del nivel tubular	3.	Nivel Wild III
2.	Modelos especiales	4.	Nivel Zeiss A
		5.	Nivel de precisión de Fennel

§ 10. El nuevo tipo de nivel fijo "Cooke" y "Kern" NK 3.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	El nuevo tipo de nivel es un nivel simple perfeccionado	3.	Verificación de la condición principal del paralelismo del eje del nivel con el eje de colimación
2.	Ventajas del nuevo tipo de nivel comparado con el nivel simple		

§ 11. Nivel-taquímetro.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Observaciones generales		
2.	Descripción de los principales órganos del nivel-taquímetro de Kern	5.	Modo de iniciar el trabajo de campo
3.	Condiciones que deben satisfacerse en un nivel-taquímetro. Modo de realizarlas	6.	Medición de la distancia horizontal por el sistema de Reichenbach
4.	Importancia general del procedimiento de corrección por el método de "nivelación desde el medio y un extremo"	7.	Teoría del tornillo tangencial
		8.	Medición del desnivel con ayuda del tornillo tangencial del nivel-taquímetro

§ 12. Miras de nivelación.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Mira de corredera o de tablilla y mira parlante o a escala; inconvenientes de la primera	8.	Accesorios para la colocación de la mira en posición vertical (plomada y nivel esférico). Precisión de la vertical
2.	Mira parlante: material, dimensiones, sección, guarniciones y empuñaderas	9.	Acción del viento
3.	Miras plegables y miras corredizas o de enchufe	10.	Modo de efectuar la lectura de mira
4.	Miras de viaje	11.	Errores de lectura que más frecuentemente ocurren en la práctica, y su influencia sobre la adecuada disposición de las unidades de división y numeración de las escalas
5.	Clasificación de las miras según la unidad de división. Miras a trazos y miras a campos. Fenómeno de la irradiación. Colocación del cero. Numeración	12.	Miras especiales de nivelación de precisión; mira con numeración decádica y mira reversible
6.	Conocidos tipos de mira		
7.	Apoyos de mira ("sapos" y pique-		

§ 13. Errores de la nivelación geométrica, compensación y precisión

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Pasando revista a los principales errores y causas que los originan; errores de estima, errores de lectura, efectos del hundimiento del instrumento y de los puntos de cambio; efecto de la diferencia de refracción; tolerancias		

Nº	Pág.	Nº	Pág.
2.	Efecto del hundimiento del instrumento; método de eliminación empleado en las nivelaciones de precisión; su influencia en la nivelación de tercer orden	den; supónese m_v dependiente del largo de la visual. Deducción de la correspondiente fórmula. Criterio sobre la visual más favorable para la precisión	145
3.	Influencia del hundimiento de los puntos de apoyo. Conveniencia de las nivelaciones de ida y vuelta. Discrepancia de cierre Δ	8.	Error medio kilométrico m_o , que caracteriza un determinado instrumento y trabajo técnico. Determinación de m_o en base a un error de cierre de tiro de nivelación
4.	Deducción de la ley fundamental sobre la propagación del error en la nivelación. Visual de longitud constante	9.	Error medio M_y de la media aritmética x
5.	El peso de la nivelación geométrica, con un ejemplo de aplicación práctica	10.	Cálculo de la precisión en base a la discrepancia de cierre de un tiro de nivelación
6.	Nivelación de tercer o cuarto orden: supónese m_v constante. Fórmula pertinente. Ejemplo práctico; criterio sobre el caso	11.	Compensación de un error de cierre Δ . Dos ejemplos prácticos. Tolerancias establecidas en los trabajos de nivelación del Instituto Geográfico Militar Argentino
7.	Nivelación de precisión y segundo or-		152

§ 14. Contralores de medición en la nivelación geométrica.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Contralores fundamentales	2.	Contralores locales
	154		154

§ 15. Nivelación de precisión.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Objeto y subdivisión de las nivelaciones de puntos fijos	10.	Segundo método de nivelación de alta precisión con visual levemente inclinada. Segundo caso: Bisección de un campo blanco según el sistema de Seibt
2.	Medios técnicos que conducen al máximo rendimiento	11.	Orden de las lecturas en el sistema Seibt
3.	Instrumentos destinados para nivelación de precisión	12.	Determinación de la corrección a aplicar al desnivel de una estación
4.	Miras reversibles de madera y miras de doble graduación de invar. Contrastes quincenales de las miras de madera y contrastes anuales de las de invar	13.	Formulario de nivelación de precisión Nº 2 y ejemplos prácticos calculados en el mismo. Trabajos ejecutados según el método Seibt por el Instituto Geográfico Militar Argentino
5.	Características de los principales métodos de medición en uso en las nivelaciones de precisión	14.	Tercer método de nivelación de precisión: Bisección de espacio blanco (primer caso) o bisección de trazo de división de mira con ayuda de la cuña filar (segundo caso). Modo de operar
6.	Orden en que deben ser efectuadas las observaciones de nivelación de precisión. Dos contralores de campo que el uso de la mira con doble graduación proporciona; condición imprescindible para su eficacia. Eliminación de los efectos de hundimientos del instrumento y de los apoyos de mira. Tercer contralor de campo	15.	Ejemplos prácticos consignados en nuestro formulario de nivelación de precisión Nº 3 para ilustrar la aplicación del tercer método con bisección de espacios blancos
7.	Sustitución de los números negativos por sus complementos decádicos. Importancia de estos complementos decádicos en el cálculo de la nivelación	16.	Ejemplos prácticos consignados en nuestro formulario de nivelación de precisión 6 para ilustrar la aplicación del cuarto método con nivel Zeiss A. Nota explicativa
8.	Ejemplos prácticos consignados en nuestro formulario de nivelación Nº 5 ejecutados de acuerdo al primer método de nivelación de precisión	17.	Cruces de anchos ríos por medio de la nivelación de precisión. Nivelación recíproca y simultánea. Ejemplo práctico. Resultados de cruces de ríos efectuados en la República Argentina
9.	Nivelación con visual levemente inclinada; su importancia. Cálculo de la corrección $\Delta 1$		168

§ 16. Levantamiento y trazado de perfiles.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Importancia práctica de las tres clases de nivelaciones: nivelaciones de puntos, nivelaciones de líneas (perfiles) y nivelaciones de superficies	3.	Subdivisión de la traza de los perfiles longitudinales en trozos uniformes;
2.	Definición geométrica del perfil. Tra-		za o eje longitudinal. Horizontal principal de cota cero. Horizontal auxiliar sobrealzada de cota arbitraria
	181		181

Nº	Pág.	Nº	Pág.
	marcación y numeración de los puntos de estación. Puntos intermedios y puntos de arranque de perfiles transversales	5.	Perfiles transversales; su dirección y extensión. Medición con nivel de anteojo y por "resaltos horizontales"
4.	Nivelación del eje longitudinal. Puntos de cambio. Cálculo particular de los puntos intermedios	6.	Dibujo de los perfiles
	182	7.	Distintas formas de indicar pendientes
	183		187

§ 17. Nivelación trigonométrica.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Principio de la nivelación trigonométrica. Definiciones: ángulo de altura y distancia cenital. Fórmulas fundamentales		ejemplos prácticos en ellos calculados
	187	6.	Condiciones de la alidada vertical que deben satisfacerse para la medición de verdaderas distancias cenitales
2.	Condiciones teóricas constructivas que deben estar cumplidas en el instrumento	7.	Medios de contralor de la buena posición del eje vertical: nivel de soporte y nivel testigo de los nonios verticales
	188		193
3.	Observaciones generales sobre la graduación de círculos verticales	8.	Corrección del error de índice. Definición
	189	9.	Cinco problemas fundamentales de la nivelación trigonométrica
4.	Graduaciones corridas. Formularios trigonométricos 17 y 18 con ejemplos prácticos en ellos calculados. Caso particular del teodolito de Wild	10.	Influencia de la curvatura y refracción terrestres. Precisión de la determinación del desnivel
	189		200
5.	Graduación por cuadrantes. Ventajas e inconvenientes del doble nonio. Formularios trigonométricos 19 y 20 con		

§ 18. Nivelación barométrica.

Nociones fundamentales.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	Nociones fundamentales sobre la medición de la presión atmosférica. Definición de la medida de comparación.		Tres clases de borómetros: barómetros de mercurio, termobarómetros y barómetros metálicos
			201

Hipsómetro.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
2.	Hipsómetro, termobarómetro o termómetro de ebullición. Principio, descripción y uso		202

Borómetros metálicos o aneroides.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
3.	Observaciones generales. Conveniencia de un más amplio campo de aplicación. Principio. Aneroides según Naudet, Bohne y Goldschmid	5.	Corrección y ajuste del aneroides Naudet
	204	6.	Descripción y uso del aneroides Goldschmid
4.	Descripción del aneroides. Aneroides compensado. Paso muerto		205
			207

Correcciones de las lecturas de aneroides.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
7.	Definiciones y nociones fundamentales sobre las tres diferentes correcciones de lectura de aneroides	9.	Determinación de las correcciones de graduación y de estado. Ecuación de un aneroides
	208		209
8.	Determinación de la corrección por temperatura. Valor límite del coeficiente por temperatura. Aneroides compensado		210

Fórmulas barométricas y tablas

Nº	Pág.	Nº	Pág.
10.	Fórmula barométrica completa de Jordan	12.	Gradas de alturas barométricas. Tablas de altitudes barométricas brutas. Ejemplos de aplicación práctica con las tablas de Jordan I
	212		213
11.	Fórmulas simplificadas de Jordan y Babinet. Altitudes brutas. Tabla de Jordan		

Nº	Pág.	Nº	Pág.
bías de Jordan II con un ejemplo de aplicación práctica	215	13. Tabla gráfica para el cálculo de la altura de grada barométrica	218

Ejecución de la nivelación barométrica.
Precisión y compensación.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
14. Observaciones previas sobre las dos principales suposiciones fundamentales: paralelismo de las capas de igual presión atmosférica y de la superficie del nivel del mar, y variación regular de la temperatura entre puntos vecinos. Contralores de medición	219	el mismo	220
15. Procedimiento de intercalación entre puntos fijos dados, empleando la fórmula barométrica simplificada. Formulario de nivelación barométrica 1 con un ejemplo práctico calculado en		16. Interpolación simplificada sin aplicar la fórmula barométrica. Formulario de nivelación barométrica 2 con un ejemplo práctico calculado en el mismo	222
		17. Precisión de las nivelaciones barométricas y compensación de un punto nodal	223
		18. Mirada retrospectiva sobre las tres distintas categorías de nivelaciones en cuanto a su precisión y rendimiento	223

TRIANGULACION

CAPITULO PRIMERO

TRIANGULACION

o

Determinación trigonométrica de puntos fijos

S U M A R I O

- § 1. Triangulación aislada. Sobre la disposición general y ejecución de los trabajos de triangulación. Medición de base topográfica. Clasificación de los principales problemas de Topografía.
- § 2. Intersección o bisección hacia adelante y bisección lateral.
- § 3. Problema de la carta (de SNELLIUS o de POTHENOT) o problema de los tres puntos.
- § 4. Problema de HANSEN o problema del par de puntos inaccesibles.
- § 5. Problema de MAREK o del doble par de puntos inaccesibles.
- § 6. Triangulación de enlace.

TRIANGULACION AISLADA. BREVES INDICACIONES SOBRE LA DISPOSICION GENERAL Y EJECUCION DE LOS TRABAJOS DE TRIANGULACION. MEDICION DE UNA BASE TOPOGRAFICA. CLASIFICACION DE LOS PRINCIPALES PROBLEMAS DE LA TOPOGRAFIA

1. OBSERVACIONES PRELIMINARES.

Por lo visto en pág. 2 del Tomo I (2ª edición) sabemos que la finalidad de la topografía es la confección de la carta, en la cual se representan no sólo los detalles planimétricos sino también las formas del terreno.

Para lograr este fin es necesario efectuar numerosas mediciones en el terreno, operaciones planimétricas y altimétricas, es decir, trabajos de **levantamiento o de relevamiento completos**, elaborar gráficamente los resultados, preparándolos para su **multiplicación, publicación y difusión** en el público, siendo así aprovechados eficazmente por todos los interesados.

De acuerdo con el orden de los trabajos que acabamos de indicar, explicaremos cada vez, después de describir los detalles del respectivo **instrumento** a emplear, el **método** operatorio y luego su aplicación práctica a las operaciones en el terreno.

2. NECESIDAD DE LOS NUEVOS PUNTOS BASICOS, ARRANQUES Y APOYOS PARA LOS TRABAJOS DE LEVANTAMIENTO. DOS CASOS TIPICOS.

El fundamento para todo levantamiento racional de una zona lo constituye una red de puntos fijos geodésicos, regularmente distribuidos sobre toda la región, los que hacen el papel de **puntos de arranque**. (*)

Antes de iniciar un trabajo de levantamiento, se averiguará si existen los necesarios **puntos básicos geodésicos (planimétricos y altimétricos)**, para poder en ellos debidamente apoyar las operaciones topográficas.

Son dos los casos a considerar: pueden existir en la zona algunos pocos puntos básicos, o pueden ellos faltar por completo.

Si sólo disponemos de pocos puntos básicos dados por sus coordenadas (planas o geográficas), es preciso **densificar la red constituida por ellos**, es decir, determinar, en base a aquéllos toda la cantidad de nuevos puntos necesarios para la racional ejecución de los trabajos de levantamiento. Esta densificación de la red de puntos básicos puede realizarse por medio de una triangulación de orden inferior, o por medio de la determinación de puntos aislados o una red de triangulación de enlace (ver: § 6 de este capítulo).

Las coordenadas de los puntos geodésicos dados considéranse libres de errores.

En el caso de que tales puntos básicos faltasen, será necesario proporcionárselos por medio de una **triangulación independiente o triangulación aislada**, sobre la cual indicaremos brevemente los detalles más importantes relativos a su preparación y ejecución.

(*) Ver: Roberto Müller, "Principios e ideas fundamentales sobre la Confección de Catastros y levantamientos en general". Buenos Aires, 1925.

3. PUNTOS FIJOS: MARCACION NATURAL Y MARCACION ARTIFICIAL; SEÑALACION.

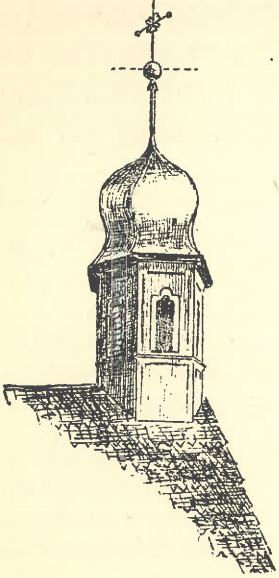


Fig. 1. — Marcación natural de punto fijo aéreo. El punto se encuentra sobre la vertical que pasa por el centro de la pequeña esfera en la cual descansa la cruz.

Los puntos fijos deben estar convenientemente **marcados** en el terreno. Cuando se les quiera utilizar para la medición, se los señala convenientemente.

Por lo visto en el párrafo 5 del Tomo I (2ª edición) sabemos que un punto topográfico está determinado por la **vertical** que pasa por él.

Su **marcación** puede ser **natural** (fig. 1) o **artificial** (figs. 2—4).

La **señalación** de los puntos artificiales puede efectuarse por medio de pirámides de **madera** (fig. 2), con tablas pintadas; trípodes de **madera** (fig. 3) con tablas y palo central (con división de 50 cm), cruzadas y pintadas blancas y negras; pirámides de **piedras** (fig. 4), con palo central y tablas cruzadas, etc.

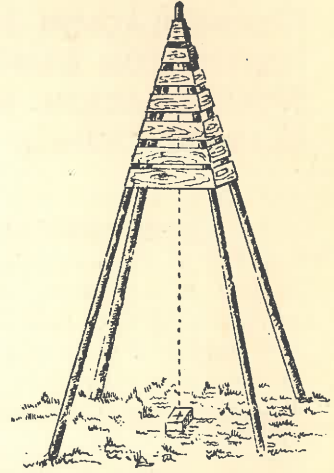


Fig. 2. — Marcación y señalación de punto fijo artificial. El punto está marcado por una piedra con cruz.

4. EJECUCION DE UNA PEQUEÑA TRIANGULACION INDEPENDIENTE. PRINCIPALES PARTES DEL TRABAJO: RECONOCIMIENTO, MARCACION, SEÑALACION, MEDICION Y CALCULO. ELECCION DE LOS VERTICES. TRIANGULOS EQUILATEROS. LONGITUD MEDIA DE LOS LADOS. ELECCION DEL SITIO PARA LA BASE.

Tratándose de ejecutar una **pequeña triangulación** básica para un levantamiento topográfico, se cubrirá la zona de trabajo con una red de triángulos, midiendo una línea llamada **base**, el **acimut** de ésta, **latitud** y

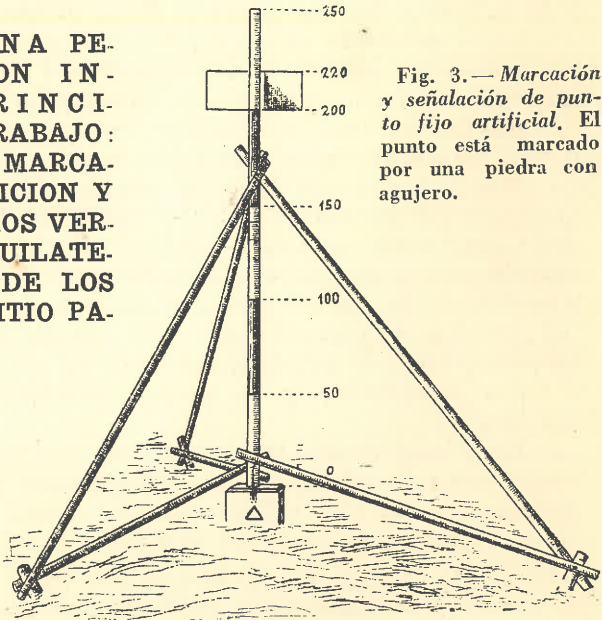


Fig. 3. — Marcación y señalación de punto fijo artificial. El punto está marcado por una piedra con agujero.

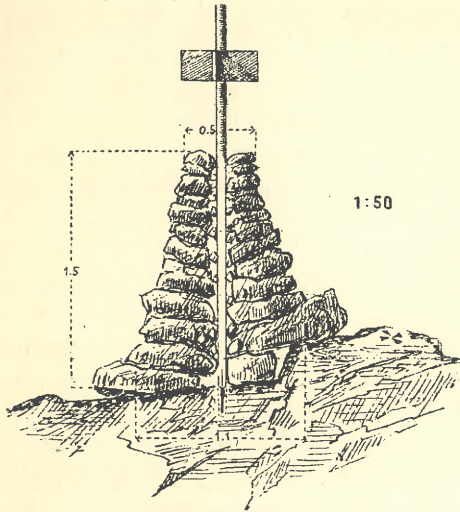


Fig. 4. — Marcadón y señalización de punto fijo artificial. El punto está marcado por una pieza metálica embutida en la roca.

longitud de uno de sus extremos y todos los ángulos de cada triángulo.

En una triangulación independiente se distinguen las siguientes partes principales: **Reconocimiento** de la red de triángulos que se propone medir, **marcadón** de los puntos elegidos, **señalización** de los mismos en el momento de utilizarlos, **medición de los ángulos y de la base**, y **cálculo** de la red.

Los vértices se elegirán con preferencia en sitios elevados.

En el **reconocimiento**, que deberá efectuarse con todo cuidado, se tratará de obtener, en lo posible, **triángulos equiláteros** (ver: "C. de C." págs. 126 — 129). La **disposición general** de la red de triángulos dependerá de la forma de la zona de trabajo, de los desniveles en la misma y de la vegetación (montes, etc.) que la cubre.

La **longitud media** de los lados de triángulo dependen de la extensión de la zona a triangular: siendo ésta limitada, oscilará la longitud media entre 1 y 2 km., llegando a 20 y más km sólo cuando la zona es muy extensa.

Durante el **reconocimiento** deberá elegirse la **más conveniente posición** de la base.

5. DEPENDENCIA DE LA SEÑALACION, CENTRACION DE INSTRUMENTO Y OBJETO VISADO DE LA LONGITUD DE LAS VISUALES. TIPO DE TEODOLITO Y METODO DE MEDICION ANGULAR RECOMENDADOS.

La **señalización** de los nuevos puntos dependen de la **longitud** de las visuales y de la **precisión** a alcanzar, dependiendo ésta, a su vez, de la **escala** de la carta a levantar.

La **centración de instrumento y objeto visado** deben efectuarse con tanta mayor precisión cuanto menor sea la longitud de la visual a tomar (ver "C. de C." págs. 129 — 136).

Para la **medición de los ángulos** empléase generalmente un **tipo de teodolito** similar a los indicados en Tomo II, es decir, un teodolito repetidor a nonios, microscopios a nonios, o microscopios a escala, con una apreciación de 10" ó 20", ó un teodolito óptico.

Para la **medición angular** se preferirá generalmente el método de **direcciones** (ver: Tomo II), midiendo 3 series completas.

6. MEDICION DE UNA BASE TOPOGRAFICA. CINTAS; ESTACAS; REDUCCION AL HORIZONTE; MEDICION EN IDA Y VUELTA.

Cuando la línea básica de la triangulación no puede constituirla un lado de triangulación (fig. 6), por las dificultades que se oponen a su

directa medición, se elegirá una **línea auxiliar** más corta, llamada **base**, que se relacionará por medio de mediciones con un lado de triángulo de la red. Esta base será elegida en terreno llano, pudiendo medirse así más fácil y exactamente (ver N° 9, pág. 28 de Tomo I, 2ª edición).

Para su medición puede emplearse, por ejemplo, una cinta de acero de 25 ó 50 metros, la que debe ser contrastada en un **comparador** (ver: Tomo I, 2ª edición, N°. 19, pág. 34), en lo posible antes y después de la operación en el terreno.

En el reconocimiento de la base conviene elegir la longitud de ésta de tal modo que resulte aproximadamente un múltiplo entero n de cintadas, 20.25 metros ó 10.50 metros, por ejemplo. Los puntos extremos de las cintadas serán marcados por **estacas de madera** con clavo, alineadas todas con teodolito, y distanciadas de tal manera que siempre resulte una cintada entera (25 ó 50 m), más un pequeño excedente, que se podrá medir cómodamente con un metro de bolsillo milimetrado.

Con el objeto de **reducir al horizonte** las cintadas medidas en pendiente, se determinarán las diferencias de nivel entre las distintas estacas con un **inclinómetro** (ver fig. 7, pág. 31 de Tomo I, 2ª edición) o por medio del procedimiento de nivelación que explicaremos en el próximo capítulo.

Para aumentar la precisión de la medición de la base, se la medirá por lo menos 2 veces ('C. de C.' pág. 28), mejor aún 4 veces, 2 veces en ida y 2 en vuelta (ver: 'C. de C.' § 11, págs. 253-265, especialmente ejemplo práctico 5, págs. 261 y 262).

7. CALCULO DE LA RED DE TRIANGULACION. SISTEMA DE COORDENADAS.

Partiendo de esta línea básica, se podrán calcular con ayuda de los triángulos medidos y por medio del teorema de los senos, todos los lados de los triángulos, cálculo que se iniciará por la **compensación de los inevitables errores de cierre angular** (ver: 'C. de C.', ejemplos prácticos, págs. 234 y 235).

Con el objeto de obtener las **coordenadas** de los nuevos puntos trigonométricos, se elegirá convenientemente un sistema de coordenadas, de tal modo que el origen coincida con uno de los vértices, y el eje de las x , por ejemplo, con uno de los lados de la red (fig. 5).

Conociendo, además, el acimut de la base, se podrá **orientar** el sistema geográficamente, como lo ilustra la figura 6.

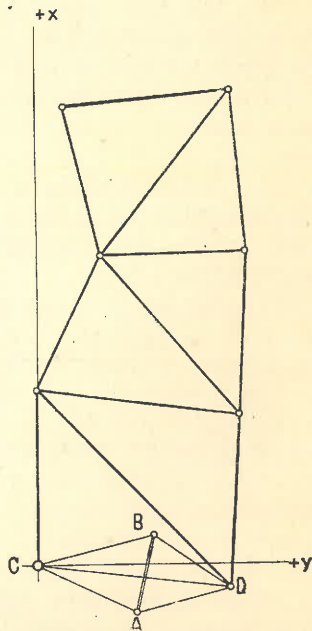
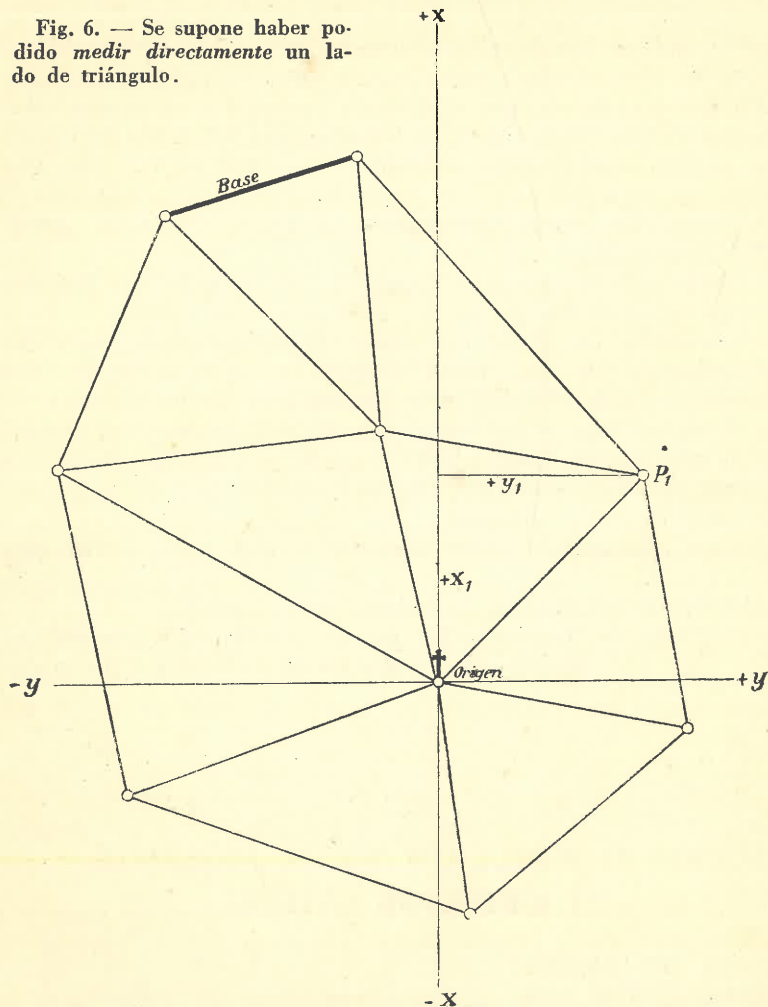


Fig. 5. — $AB = \text{Base}$. Por medio de los dos triángulos ABC y ABD se determinó el lado de arranque CD de la cadena de triángulos.

Fig. 6. — Se supone haber podido medir directamente un lado de triángulo.



8. DETERMINACION TRIGONOMETRICA DE NUEVOS PUNTOS. PREPONDERANCIA DE LA MEDICION ANGULAR. OBJETO DE LAS OBSERVACIONES SOBRANTES. CLASIFICACION DE LOS PRINCIPALES PROBLEMAS DE TOPOGRAFIA.

La determinación de nuevos puntos puede efectuarse por el procedimiento poligonal, por intersecciones o triangulación. Habiéndose dedicado al primero un extenso capítulo del Tomo II, nos limitaremos a referirnos al mismo.

En la determinación trigonométrica pueden efectuarse mediciones lineales y angulares. Pero, siendo éstas últimas mucho más cómodas y más rápidas que aquéllas, se empleará la medición de distancias sólo cuando se trate de líneas muy cortas. Consideraremos, por eso, en la determinación de nuevos puntos para levantamientos topográficos preferentemente el procedimiento trigonométrico basado en la medición angular.

Si sólo se miden los ángulos necesarios para la determinación de un nuevo punto, se dirá que se trata de una **determinación simple**.

Cuando sea preciso excluir toda duda respecto a la seguridad del resultado de una determinación de nuevo punto, se efectuarán más mediciones que las necesarias, **observaciones sobrantes** (ver: "C. de C." pág. 28), pero generalmente **no** para efectuar una compensación, sino con el único objeto de revelar eventuales **errores groseros** o permitir formar un **juicio sobre la precisión** alcanzada.

Por lo visto anteriormente en tomo II, sabemos que las intersecciones pueden realizarse midiendo ya sea en los puntos fijos mismos, o en el nuevo punto, quedando, en el primer caso, determinada por cada medición angular la posición de una **recta dirigida**, y, en el segundo, la de una **circunferencia**. Decimos "**bisección o intersección hacia adelante**" cuando se bisecte el nuevo punto, haciendo estación en punto fijo conocido, y "**bisección o intersección hacia atrás**" cuando se opere en el nuevo punto.

Un nuevo punto puede determinarse entonces por:

- 1° **intersección hacia adelante**,
- 2° **por una intersección hacia adelante y otra hacia atrás (bisección lateral)**,
- 3° **intersección hacia atrás (problema de la carta)**,
- 4° **el problema de Hansen o del par de puntos fijos inaccesibles**,
- 5° " " " **Marek o de los dos pares de puntos fijos inaccesibles**.

§ 2

INTERSECCION O BISECCION HACIA ADELANTE Y BISECCION LATERAL

1. CASO DE HABER VISIBILIDAD ENTRE LOS DOS PUNTOS FIJOS DE LA BASE AB (fig. 1).

Trátase en este problema de la determinación del triángulo ABC , en base al lado AB indirectamente conocido, y los dos ángulos adyacentes α y β medidos; y luego, del cálculo de las coordenadas parciales por medio de los rumbos (AC) y (BC) , y las distancias \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente; y, finalmente, de las coordenadas x e y del nuevo punto C .

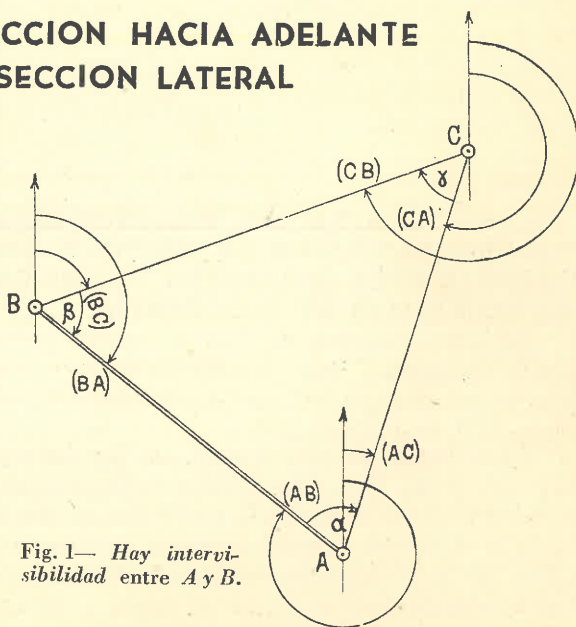


Fig. 1— Hay intervisibilidad entre A y B .

He aquí las distintas etapas de este cálculo:

a) **Cálculo de rumbo (AB) y de la base \overline{AB} .**

$$(1) \quad \text{tg (AB)} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Rumbo recíproco (BA):

$$(BA) = (AB) \pm 180^\circ.$$

$$(2) \quad \overline{AB} = \frac{y_b - y_a}{\text{sen (AB)}} = \frac{x_b - x_a}{\text{cos (AB)}} = \frac{y_a - y_b}{\text{sen (BA)}} = \frac{x_a - x_b}{\text{cos (BA)}}$$

b) **Cálculo de los lados \overline{AC} y \overline{BC} .**

Según el teorema de los senos:

$$(3) \quad \overline{AC} = \overline{AB} \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = \overline{AB} \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$$

$$(4) \quad \overline{BC} = \overline{AB} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \overline{AB} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$$

Introduciendo, para la comodidad del cálculo, el **diámetro m de la circunferencia circunscripta** al triángulo **ABC**, tenemos:

$$(5) \quad m = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } (\alpha + \beta)} = \frac{y_b - y_a}{\text{sen (AB)} \text{sen } \gamma} = \frac{x_b - x_a}{\text{cos (AB)} \text{sen } \gamma}$$

resultando entonces, en lugar de las (3) y (4), estas otras más simples:

$$(6) \quad \overline{AC} = m \cdot \text{sen } \beta$$

$$(7) \quad \overline{BC} = m \cdot \text{sen } \alpha$$

c) **Cálculo de los rumbos (AC) y (BC).**

$$(8) \quad (AC) = (AB) + \alpha \quad \text{y} \quad (BC) = (BA) - \beta,$$

siendo los **rumbos recíprocos** (CA) y (CB):

$$(9) \quad (CA) = (AC) \pm 180^\circ \quad \text{y} \quad (CB) = (BC) \pm 180^\circ,$$

lo que nos proporciona un **contralor de cálculo** para la buena formación de los rumbos **directos** (AC) y (BC):

$$(10) \quad \gamma = (CB) - (CA) = (BC) + 180^\circ - [(AC) + 180^\circ] = (BC) - (AC).$$

d) **Cálculo de las coordenadas parciales Δx_a , Δy_a , Δx_b , Δy_b .**

Tomando en cuenta las relaciones (6) y (7), tendremos:

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta x_a = \overline{AC} \cdot \text{cos (AC)} = m \cdot \text{sen } \beta \text{cos (AC)}, \\ \Delta y_a = \overline{AC} \cdot \text{sen (AC)} = m \cdot \text{sen } \beta \text{sen (AC)}, \\ \Delta x_b = \overline{BC} \cdot \text{cos (BC)} = m \cdot \text{sen } \alpha \text{cos (BC)}, \\ \Delta y_b = \overline{BC} \cdot \text{sen (BC)} = m \cdot \text{sen } \alpha \text{sen (BC)}. \end{cases}$$

e) **Cálculo de las coordenadas x e y del nuevo punto C.**

$$(12) \quad \begin{cases} x = x_a + \Delta x_a = x_b + \Delta x_b, \\ y = y_a + \Delta y_a = y_b + \Delta y_b, \end{cases}$$

lo que nos proporciona un **nuevo contralor de cálculo**.

2. CASO DE NO HABER VISIBILIDAD ENTRE LOS DOS PUNTOS EXTREMOS DE LA BASE (fig. 2).

No siendo posible visar de **A** a **B**, deberá poderse medir, en cambio, en los puntos **A** y **B** los ángulos α' y β' entre las direcciones **AC** y **BC** y las de otros puntos fijos **D** y **E** visibles desde **A** y **B**, respectivamente (fig. 2).

En base a las coordenadas de estos 4 puntos fijos dados se calcularán: el rumbo (AB), la distancia \overline{AB} , los rumbos (AD) y (BE), pudiendo formar así, por medio de los ángulos medidos α' y β' los rumbos (AC) y (BC) buscados:

$$(13) \quad (AC) = (AD) + \alpha' \quad \text{y} \quad (BC) = (BE) + \beta'$$

Los ángulos α y β necesarios para el cálculo de los lados **AC** y **BC**, se obtendrán fácilmente por **diferencias de rumbos**:

$$(14) \quad \alpha = (AC) - (AB) \quad \text{y} \quad \beta = (BA) - (BC).$$

Esta determinación de nuevo punto por intersección hacia adelante resulta insegura cuando el ángulo γ es muy pequeño o cuando está muy cerca de 180° .

3. INTERSECCION (o BISECCION) LATERAL.

Siendo inaccesible para la medición angular uno de los dos puntos fijos extremos de la base **AB**, se deberá, en cambio, poder medir en **C** el ángulo γ .

Llámase esta manera de fijar la posición del nuevo punto **C** "bisección (o intersección) lateral", designación que se entenderá mejor cuando más adelante expliquemos la correspondiente determinación gráfica por medio de la **plancheta** (ver § 8, N° 2 del capítulo V).

Siendo el ángulo en el punto fijo inaccesible suplemento de los otros dos medidos, el procedimiento de cálculo no se diferenciará esencialmente en nada del que pasamos a explicar por medio de un ejemplo numérico, empleando en él nuestro Form. trig. 8.

4. CALCULO CON LA MAQUINA. DEDUCCION DE LAS CORRESPONDIENTES FORMULAS. FORMULARIO TRIGONOMETRICO N° 9 Y EJEMPLO PRACTICO EN EL CALCULADO.

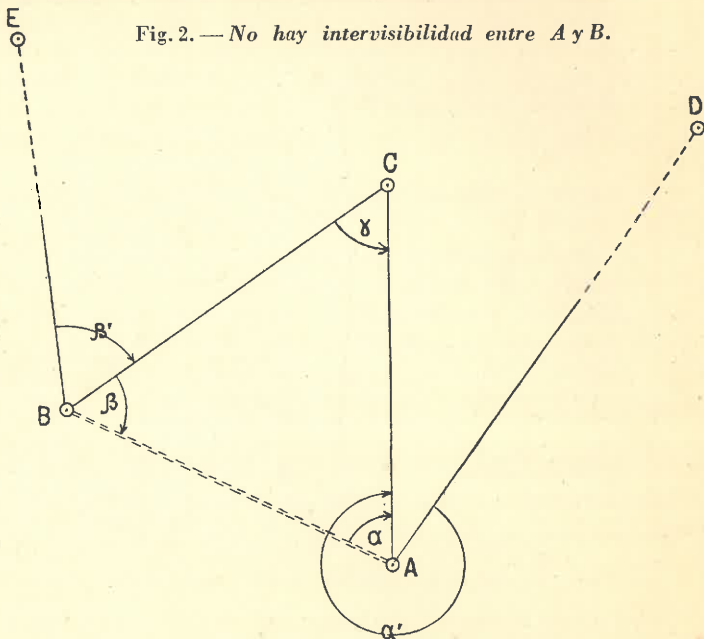
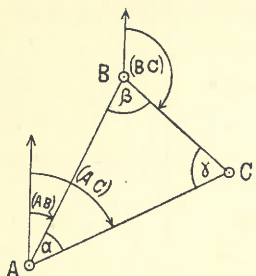


Fig. 2. — No hay intervisibilidad entre A y B.

BISECCION HACIA ADELANTE
(CÁLCULO LOGARÍTMICO)



A: Estaca 3
B: Estaca 1
C: Chimenea O.S.

$$\operatorname{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$m = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen} \gamma \cdot \operatorname{sen} (AB)} = \frac{x_b - x_a}{\operatorname{sen} \gamma \cdot \cos (AB)}$$

$$\Delta x_a = m \cdot \operatorname{sen} \beta \cos (AC); \quad \Delta y_a = m \cdot \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (AC)$$

$$\Delta x_b = m \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos (BC); \quad \Delta x_b = m \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (BC)$$

$$x = x_a + \Delta x_a = x_b + \Delta x_b$$

$$y = y_a + \Delta y_a = y_b + \Delta y_b$$

$x_a +$	7859,62	$y_a +$	3828,76	(AC)	287	17	38
$x_b +$	7638,62	$y_b +$	2927,01	(BC)	40	31	25
$x_b - x_a -$	221,30	$y_b - y_a -$	901,75	(AB)	256	12	40
$\Delta x_a +$	175,22	$\Delta y_a -$	562,80	$\alpha = (AC) - (AB)$	31	04	58
$\Delta x_b +$	396,53	$\Delta y_b +$	338,95	$\beta = (AB) \pm 180^\circ - (BC)$	35	41	15
$x +$	8035,14	$y +$	3265,96	$\gamma = (BC) - (AC)$	113	13	47
$x +$	8035,15	$y +$	3265,96	$\alpha + \beta + \gamma$	180	00	00
(Prom.) $x +$	8035,14	(Prom.) $y +$	8265,96				

$\operatorname{lg} (y_b - y_a)$	2,95 508 n	$\operatorname{lg} \Delta x_a$	2,24 359	<u>Bisección lateral:</u>
$\operatorname{lg} (x_b - x_a)$	2,34 498 n	$\operatorname{lg} \cos (AC)$	9,47 315	
$\operatorname{lg} \operatorname{tg} (AB)$	0,61 010	$\operatorname{lg} m$	3,00 450	Dados:
$\operatorname{lg} m$	3,00 450	$\operatorname{lg} \operatorname{sen} \beta$	9,76 594	(AC) y γ
$\operatorname{lg} (y_b - y_a)$	2,95 508 n	$\operatorname{lg} \operatorname{sen} (AC)$	9,97 991 n	ó
cpl. $\operatorname{lg} \operatorname{sen} (AB)$	0,01 270 n	$\operatorname{lg} \Delta y_a$	2,75 035 n	(BC) y γ
cpl. $\operatorname{lg} \operatorname{sen} \gamma$	0,03 672	$\operatorname{lg} \Delta x_a$	2,59 827	Entonces:
cpl. $\operatorname{lg} \cos (AB)$	0,62 280 n	$\operatorname{lg} \cos (BC)$	9,88 089	(BC) = (AC) + γ
$\operatorname{lg} (x_b - x_a)$	2,34 498 n	$\operatorname{lg} m$	3,00 450	ó
$\operatorname{lg} m$	3,00 450	$\operatorname{lg} \operatorname{sen} \alpha$	9,71 288	(AC) = (BC) - γ
		$\operatorname{lg} \operatorname{sen} (BC)$	9,81 275	
		$\operatorname{lg} \Delta y_a$	2,53 013	

a) En base a las coordenadas de los puntos **A** y **B** y los ángulos α y β **calcúlanse primeramente las magnitudes (AC) y (BC) del modo conocido:**

$$(15) \quad \operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$(16) \quad (AC) = (AB) + \alpha; \quad (BC) = (BA) - \beta$$

b) **Cálculo de cantidades Δx_a , Δx_b , Δy_a , Δy_b .**

Siendo:

$$(17) \quad \operatorname{tg}(AC) = \frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{\Delta y_a}{\Delta x_a}; \quad \operatorname{tg}(BC) = \frac{y - y_b}{x - x_b} = \frac{\Delta y_b}{\Delta x_b}$$

tendremos:

$$(18) \quad y - y_a = (x - x_a) \operatorname{tg}(AC)$$

$$(19) \quad y - y_b = (x - x_b) \operatorname{tg}(BC) \quad \text{Restando la (19) de la (18),}$$

$$\text{resulta:} \quad y_b - y_a = (x - x_a) \operatorname{tg}(AC) - (x - x_b) \operatorname{tg}(BC)$$

$$(20) \quad = (x - x_a) \operatorname{tg}(AC) - (x - x_a) \operatorname{tg}(BC) + (x_b - x_a) \operatorname{tg}(BC)$$

$$(21) \quad = (x - x_b) \operatorname{tg}(AC) - (x - x_b) \operatorname{tg}(BC) + (x_b - x_a) \operatorname{tg}(AC)$$

De donde:

$$(22) \quad x - x_a = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a) \operatorname{tg}(BC)}{\operatorname{tg}(AC) - \operatorname{tg}(BC)} = \frac{A}{C}$$

$$(23) \quad x - x_b = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a) \operatorname{tg}(AC)}{\operatorname{tg}(AC) - \operatorname{tg}(BC)} = \frac{B}{C}$$

Substituyendo estos valores en las (17), tendremos:

$$(24) \quad \Delta y_a = \Delta x_a \cdot \operatorname{tg}(AC); \quad \Delta y_b = \Delta x_b \cdot \operatorname{tg}(BC)$$

Estando conocidos los ángulos α y γ , o β y γ , en lugar de α y β , tendremos para los rumbos (AC) y (BC):

$$(25) \quad (AC) = (BC) - \gamma \quad (BC) = (AC) + \gamma$$

En el formulario trigonométrico N° 9 que va a continuación, calculamos nuevamente, en base a las fórmulas que anteceden, el mismo ejemplo que acabamos de calcular logarítmicamente.

§ 3

PROBLEMA DE LA CARTA (DE SNELLIUS O DE POTHENOT) O PROBLEMA DE LOS 3 PUNTOS

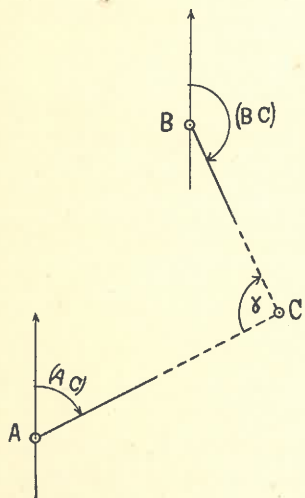
1. EL PROBLEMA DE LA CARTA CONSIDERADO DESDE TRES DISTINTOS PUNTOS DE VISTA.

Desde el punto de vista geométrico el problema se enunciaría del siguiente modo: **Construir un cuadrilátero APBC (fig. 1), estando dados los lados a y b, el ángulo comprendido γ y los ángulos α y β , en los cuales queda dividido el ángulo APB por la diagonal PC.**

La **determinación gráfica** es muy sencilla: Se construirá sobre el lado a el arco capaz del ángulo α , y sobre el lado b el arco capaz del ángulo β .

BISECCION HACIA ADELANTE
(CON LA MÁQUINA)

A: Estaca 3
B: Estaca 1
C: Chim. Obras Salub.



$$A = (y_b - y_a) - (x_b - x_a) \cdot \text{tg} (BC)$$

$$B = (y_b - y_a) - (x_b - x_a) \cdot \text{tg} (AC)$$

$$C = \text{tg} (AC) - \text{tg} (BC)$$

$$\Delta x_a = \frac{A}{C} (*)$$

$$\Delta y_a = \Delta x_a \cdot \text{tg} (AC)$$

$$\Delta x_b = \frac{B}{C} (*)$$

$$\Delta y_b = \Delta x_b \cdot \text{tg} (BC)$$

$$\Delta x_a - \Delta x_b = x_b - x_a$$

$$\Delta y_a - \Delta y_b = y_b - y_a$$

$$x = x_a + \Delta x_a$$

$$= x_b + \Delta x_b$$

$$y = y_a + \Delta y_a$$

$$= y_b + \Delta y_b$$

Dados:

tenemos:

$$(AC) \text{ y } \gamma$$

$$(BC) = (AC) + \gamma$$

$$\delta (BC) \text{ y } \gamma$$

$$(AC) = (BC) - \gamma$$

x_a	±	7859,92
x_b	+	7638,62
$x_b - x_a$	-	221,30
Δx_a	+	175,23
Δx_b	+	396,53
x	+	8035,15
x	+	8035,15
(Prom.) x	+	8035,15

y_a	±	3828,76
y_b	+	2927,01
$y_b - y_a$	-	901,75
Δy_a	-	562,80
Δy_b	+	338,95
y	+	3265,96
y	+	3265,96
(Prom.) y	+	3265,96

α	°	31	'	04	"	58
β		35		41		15
γ						
(AB)		256		12		41
(AC)		287		17		39
(BC)		40		31		26
$\text{tg} (AC)$	±					3,2118
$\text{tg} (BC)$	+					0,8548
C						4,0666
A						712,58
B						1612,52

(*) Cada vez que para Δx_a y Δx_b resulten valores pequeños, deben ellas calcularse con más de 2 cifras decimales.

El punto P buscado se hallará entonces en la intersección de ambas circunferencias.

Trigonométricamente considerado el problema se enunciaría así:

Hallar la longitud de las rectas PA , PC y PB (fig. 1), estando dados los ángulos α y β bajo los cuales se ven desde P las rectas AC y BC , que forman el ángulo γ .

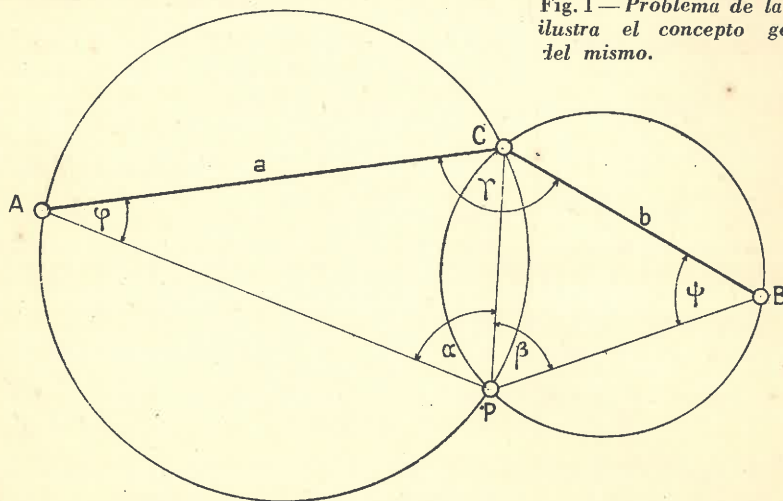


Fig. 1 — Problema de la carta. Se ilustra el concepto geométrico del mismo.

Pero para responder a las necesidades topográficas y geodésicas corrientes, suele plantearse el problema de la carta en esta otra forma:

Dadas las coordenadas (x_a, y_a) , (x_b, y_b) , (x_c, y_c) de los 3 puntos fijos A, B, C conocidos, hallar las coordenadas (x, y) del nuevo punto P , habiéndose medido en P los ángulos $APC = \alpha$ y $CPB = \beta$.

Consideraremos el problema principalmente desde este último punto de vista.

2. SOLUCION (DE KAESTNER) CON ANGULO AUXILIAR μ .

Con el objeto de obtener fórmulas generales, supondremos (fig. 2) que el punto P_a está siempre situado a la izquierda, el P_b a la derecha del rayo medio PP_m , y los ángulos α y $\beta < 180^\circ$ cada uno, lo que se verificará siempre empleando una adecuada notación en la figura.

Las distintas etapas del cálculo son las siguientes:

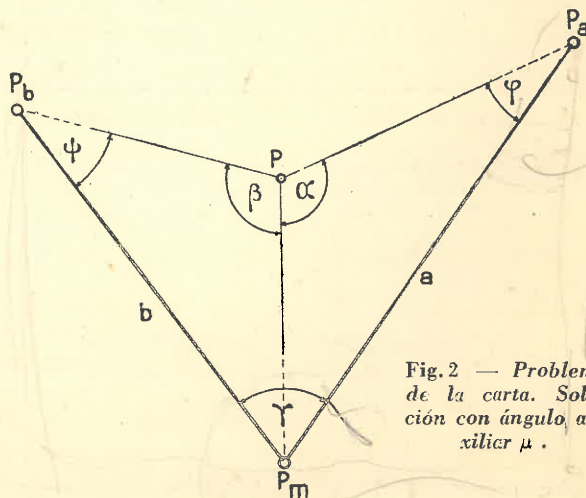


Fig. 2 — Problema de la carta. Solución con ángulo auxiliar μ .

a) Cálculo de los rumbos $(P_m P_a)$, $(P_m P_b)$ y de las longitudes de los lados $P_m P_a$ y $P_m P_b$.

$$(1) \quad \text{tg}(P_m P_a) = \frac{y_a - y_m}{x_a - x_m}, \quad \text{tg}(P_m P_b) = \frac{y_b - y_m}{x_b - x_m},$$

$$(2) \quad \overline{P_m P_a} = \frac{y_a - y_m}{\text{sen}(P_m P_a)} = \frac{x_a - x_m}{\text{cos}(P_m P_a)}, \quad \overline{P_m P_b} = \frac{y_b - y_m}{\text{sen}(P_m P_b)} = \frac{x_b - x_m}{\text{cos}(P_m P_b)}$$

b) Cálculo del ángulo γ por diferencia de rumbos.

$$(3) \quad \gamma = (P_m P_a) - (P_m P_b) = (P_a P_m) - (P_b P_m).$$

c) Cálculo de la semi-suma $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ de los ángulos φ y ψ .

$$(4) \quad \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

d) Cálculo de la razón de los senos $\frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi}$, en los triángulos $P_a P_m P$ y $P_b P_m P$, mediante el lado común $\overline{PP_m}$:

$$\begin{aligned} \overline{PP_m} &= \frac{a}{\text{sen } \alpha} \cdot \text{sen } \varphi, \\ &= \frac{b}{\text{sen } \beta} \cdot \text{sen } \psi. \\ \frac{a}{\text{sen } \alpha} \cdot \text{sen } \varphi &= \frac{b}{\text{sen } \beta} \cdot \text{sen } \psi, \end{aligned}$$

Handwritten notes:
 $\frac{\text{sen } P_m P_a}{\text{cos } P_m P_a} = \frac{y_a - y_m}{x_a - x_m}$
 $\frac{y_a - y_m}{\text{sen } P_m P_a} = \frac{x_a - x_m}{\text{cos } P_m P_a}$

$$(5) \quad \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi} = \frac{a \text{ sen } \beta}{b \text{ sen } \alpha} = \text{tg } \mu,$$

en donde μ significa un ángulo auxiliar que se introduce para una más elegante y más breve representación.

e) Cálculo de la semi-diferencia $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$:

Tenemos de la (5): $\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{1}{\text{tg } \mu}.$

Por un teorema de Aritmética:

$$\frac{\text{sen } \varphi + \text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi - \text{sen } \psi} = \frac{1 + \text{tg } \mu}{1 - \text{tg } \mu},$$

y recordando que:

$$\frac{\text{sen } \varphi + \text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi - \text{sen } \psi} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

podemos escribir:

$$\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{1 + \text{tg } \mu}{1 - \text{tg } \mu}$$

y, por ser: $\text{tg } 45^\circ = 1$,

tendremos: $\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } \mu}{1 - \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } \mu} = \text{tg}(45^\circ + \mu),$

de donde se deduce:

$$(6) \quad \boxed{\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tg } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \text{ctg}(45^\circ + \mu)}$$

f) Cálculo de φ y ψ por medio de la semisuma y semidiferencia:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \varphi, \\ \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \psi. \end{cases}$$

g) **Cálculo de los rumbos (P_aP) y (P_bP):**
 (8) $(P_aP) = (P_aP_m) + \varphi, \quad (P_bP) = (P_bP_m) - \psi.$

h) **Cálculo de los lados $\overline{P_aP}$ y $\overline{P_bP}$:**

(9) $\overline{P_aP} = \frac{a}{\text{sen } \alpha} \cdot \text{sen } (\alpha + \varphi), \quad \overline{P_bP} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \cdot \text{sen } (\beta + \psi).$

i) **Cálculo de las coordenadas parciales $\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta x_b, \Delta y_b.$**

(10)
$$\begin{cases} \Delta x_a = \overline{P_aP} \cdot \cos (P_aP), & \Delta y_a = \overline{P_aP} \cdot \text{sen } (P_aP), \\ \Delta x_b = \overline{P_bP} \cdot \cos (P_bP), & \Delta y_b = \overline{P_bP} \cdot \text{sen } (P_bP). \end{cases}$$

k) **Cálculo de las coordenadas (x, y) del nuevo punto P:**

(11)
$$\begin{aligned} x &= x_a + \Delta x_a, & y &= y_a + \Delta y_a, \\ &= x_b + \Delta x_b, & &= y_b + \Delta y_b. \end{aligned}$$

3. FORMULARIO TRIGONOMETRICO 10 Y EJEMPLO PRACTICO EN ÉL CALCULADO.

Tratóse de determinar las coordenadas (x, y) de un pilar del **Observatorio del Ing. Cobos** (Calle Juramento 2123, Bs. Aires), en el sistema de la red trigonométrica de la Capital Federal, medida por el Instituto Geográfico Militar.

A este efecto se midieron los ángulos α y β (fig. 3):

Chalet Lacroze }
 Obs. Cobos } = α
 Igl. Belgrano }
 $\alpha = 110^\circ 40' 40''$

Mr. San Juan }
 Obs. Cobos } = β
 Igl. Belgrano }
 $\beta = 110^\circ 11' 40''$

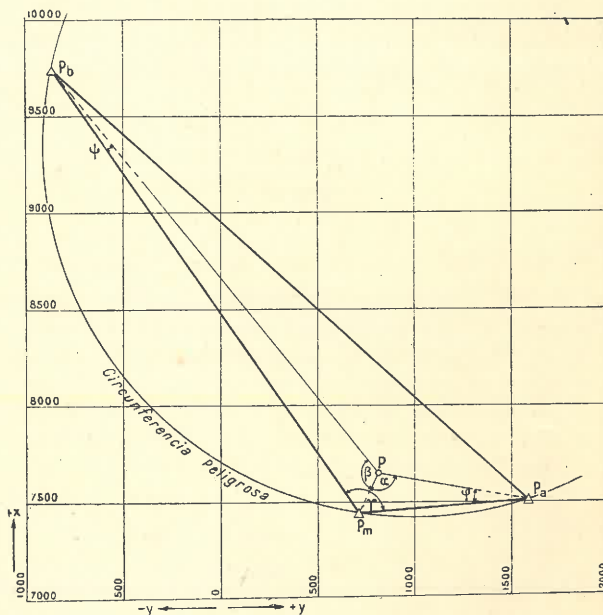


Fig. 3

COORDENADAS DADAS (*)

	x	y	OBSERVACIONES:
Chalet Lacroze:	+ 7 510,14,	+ 1 591,26	Pararrayo del mirador
Iglesia de Belgrano:	+ 7 452,65,	+ 708,19	"
Mirador San Juan:	+ 9 736,63,	- 874,70	Caño céntrico del pilar

Con estos elementos hemos efectuado en nuestro Form. trig. 10 el correspondiente cálculo, en base a las fórmulas (1) a (11).

Resultados obtenidos:

$x = + 7 646,18 \text{ m}$

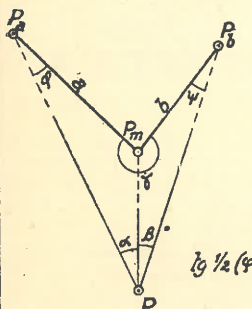
$y = + 823,17 \text{ m}$

(*) Datos sacados de "Anuario del Instituto Geográfico Militar", Vol. V, tomo I, años 1920 - 1926, pág. 52.

PROBLEMA DE LA CARTA (DE SNELLIUS O DE POTHENOT)

SOLUCIÓN 1ª CON ÁNGULO AUXILIAR μ (fig. 3)

PLANILLA DE CALCULO N° 1

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">±</td><td></td><td style="text-align: right;">±</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x_a +</td><td style="text-align: right;">7510,14</td><td style="text-align: right;">y_a +</td><td style="text-align: right;">1591,26</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x_b +</td><td style="text-align: right;">9736,63</td><td style="text-align: right;">y_b -</td><td style="text-align: right;">874,70</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x_m +</td><td style="text-align: right;">7452,65</td><td style="text-align: right;">y_m +</td><td style="text-align: right;">708,19</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x_a - x_m +</td><td style="text-align: right;">57,49</td><td style="text-align: right;">y_a - y_m +</td><td style="text-align: right;">883,07</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x_b - x_m +</td><td style="text-align: right;">2283,58</td><td style="text-align: right;">y_b - y_m -</td><td style="text-align: right;">1582,89</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">Δx_a +</td><td style="text-align: right;">136,04</td><td style="text-align: right;">Δy_a -</td><td style="text-align: right;">768,07</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">Δx_b -</td><td style="text-align: right;">2090,45</td><td style="text-align: right;">Δy_b +</td><td style="text-align: right;">1697,85</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x +</td><td style="text-align: right;">7646,18</td><td style="text-align: right;">y +</td><td style="text-align: right;">823,19</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x +</td><td style="text-align: right;">7646,18</td><td style="text-align: right;">y +</td><td style="text-align: right;">823,15</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">x (prom.) +</td><td style="text-align: right;">7646,18</td><td style="text-align: right;">y (prom.) +</td><td style="text-align: right;">823,17</td></tr> </table>	±		±		x _a +	7510,14	y _a +	1591,26	x _b +	9736,63	y _b -	874,70	x _m +	7452,65	y _m +	708,19	x _a - x _m +	57,49	y _a - y _m +	883,07	x _b - x _m +	2283,58	y _b - y _m -	1582,89	Δx _a +	136,04	Δy _a -	768,07	Δx _b -	2090,45	Δy _b +	1697,85	x +	7646,18	y +	823,19	x +	7646,18	y +	823,15	x (prom.) +	7646,18	y (prom.) +	823,17	<p><i>P_a: F. Lacroze</i> <i>P_b: M. San Juan</i> <i>P_m: Igl. Belgrano</i> <i>P: Obs. Cobos</i></p> $\operatorname{tg} \mu = \frac{a/\operatorname{sen} \alpha}{b/\operatorname{sen} \beta}$ $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{ctg}(45^\circ + \mu)$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">(P_mP_a)</td><td style="text-align: right;">86</td><td style="text-align: right;">16</td><td style="text-align: right;">31</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">(P_mP_b)</td><td style="text-align: right;">325</td><td style="text-align: right;">16</td><td style="text-align: right;">37</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">(P_mP_a) - (P_mP_b) = γ</td><td style="text-align: right;">120</td><td style="text-align: right;">59</td><td style="text-align: right;">54</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">α</td><td style="text-align: right;">110</td><td style="text-align: right;">40</td><td style="text-align: right;">40</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">β</td><td style="text-align: right;">110</td><td style="text-align: right;">11</td><td style="text-align: right;">40</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">α + β + γ = Σ</td><td style="text-align: right;">341</td><td style="text-align: right;">52</td><td style="text-align: right;">14</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">360° - Σ = φ + ψ</td><td style="text-align: right;">18</td><td style="text-align: right;">07</td><td style="text-align: right;">46</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">½(φ + ψ)</td><td style="text-align: right;">9</td><td style="text-align: right;">03</td><td style="text-align: right;">53</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">½(φ - ψ)</td><td style="text-align: right;">4</td><td style="text-align: right;">42</td><td style="text-align: right;">15</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">φ = ½(φ + ψ) + ½(φ - ψ)</td><td style="text-align: right;">13</td><td style="text-align: right;">46</td><td style="text-align: right;">08</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">φ = ½(φ + ψ) - ½(φ - ψ)</td><td style="text-align: right;">4</td><td style="text-align: right;">21</td><td style="text-align: right;">38</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">(P_aP) = (P_aP_m) + φ</td><td style="text-align: right;">280</td><td style="text-align: right;">02</td><td style="text-align: right;">39</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">(P_bP) = (P_bP_m) - ψ</td><td style="text-align: right;">140</td><td style="text-align: right;">54</td><td style="text-align: right;">59</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">α + φ</td><td style="text-align: right;">124</td><td style="text-align: right;">26</td><td style="text-align: right;">48</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">β + ψ</td><td style="text-align: right;">114</td><td style="text-align: right;">33</td><td style="text-align: right;">18</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">α + β + γ + φ + ψ</td><td style="text-align: right;">360</td><td style="text-align: right;">00</td><td style="text-align: right;">00</td></tr> </table>	(P _m P _a)	86	16	31	(P _m P _b)	325	16	37	(P _m P _a) - (P _m P _b) = γ	120	59	54	α	110	40	40	β	110	11	40	α + β + γ = Σ	341	52	14	360° - Σ = φ + ψ	18	07	46	½(φ + ψ)	9	03	53	½(φ - ψ)	4	42	15	φ = ½(φ + ψ) + ½(φ - ψ)	13	46	08	φ = ½(φ + ψ) - ½(φ - ψ)	4	21	38	(P _a P) = (P _a P _m) + φ	280	02	39	(P _b P) = (P _b P _m) - ψ	140	54	59	α + φ	124	26	48	β + ψ	114	33	18	α + β + γ + φ + ψ	360	00	00
±		±																																																																																																												
x _a +	7510,14	y _a +	1591,26																																																																																																											
x _b +	9736,63	y _b -	874,70																																																																																																											
x _m +	7452,65	y _m +	708,19																																																																																																											
x _a - x _m +	57,49	y _a - y _m +	883,07																																																																																																											
x _b - x _m +	2283,58	y _b - y _m -	1582,89																																																																																																											
Δx _a +	136,04	Δy _a -	768,07																																																																																																											
Δx _b -	2090,45	Δy _b +	1697,85																																																																																																											
x +	7646,18	y +	823,19																																																																																																											
x +	7646,18	y +	823,15																																																																																																											
x (prom.) +	7646,18	y (prom.) +	823,17																																																																																																											
(P _m P _a)	86	16	31																																																																																																											
(P _m P _b)	325	16	37																																																																																																											
(P _m P _a) - (P _m P _b) = γ	120	59	54																																																																																																											
α	110	40	40																																																																																																											
β	110	11	40																																																																																																											
α + β + γ = Σ	341	52	14																																																																																																											
360° - Σ = φ + ψ	18	07	46																																																																																																											
½(φ + ψ)	9	03	53																																																																																																											
½(φ - ψ)	4	42	15																																																																																																											
φ = ½(φ + ψ) + ½(φ - ψ)	13	46	08																																																																																																											
φ = ½(φ + ψ) - ½(φ - ψ)	4	21	38																																																																																																											
(P _a P) = (P _a P _m) + φ	280	02	39																																																																																																											
(P _b P) = (P _b P _m) - ψ	140	54	59																																																																																																											
α + φ	124	26	48																																																																																																											
β + ψ	114	33	18																																																																																																											
α + β + γ + φ + ψ	360	00	00																																																																																																											
																																																																																																														
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">lg a</td><td style="text-align: right;">2,94 691</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg (y_a - y_m)</td><td style="text-align: right;">2,94 600</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">cpl lg sen (P_mP_a)</td><td style="text-align: right;">0,00 091</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">cpl lg cos (P_mP_a)</td><td style="text-align: right;">1,18 733</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg (x_a - x_m)</td><td style="text-align: right;">1,75 959</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg tg (P_mP_a)</td><td style="text-align: right;">1,18 641</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg a</td><td style="text-align: right;">2,94 692</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen α</td><td style="text-align: right;">9,97 108</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg a/sen α</td><td style="text-align: right;">2,97 584</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg b/sen β</td><td style="text-align: right;">3,47 142</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg tg μ</td><td style="text-align: right;">9,50 442</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">μ</td><td style="text-align: right;">17 43 00</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">45° + μ</td><td style="text-align: right;">62 43 00</td></tr> </table>	lg a	2,94 691	lg (y _a - y _m)	2,94 600	cpl lg sen (P _m P _a)	0,00 091	cpl lg cos (P _m P _a)	1,18 733	lg (x _a - x _m)	1,75 959	lg tg (P _m P _a)	1,18 641	lg a	2,94 692	lg sen α	9,97 108	lg a/sen α	2,97 584	lg b/sen β	3,47 142	lg tg μ	9,50 442	μ	17 43 00	45° + μ	62 43 00	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">lg b</td><td style="text-align: right;">3,44 387</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">cpl lg sen (P_mP_b)</td><td style="text-align: right;">0,24 442 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">cpl lg cos (P_mP_b)</td><td style="text-align: right;">0,08 517</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg (x_b - x_m)</td><td style="text-align: right;">3,35 870</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg tg (P_mP_b)</td><td style="text-align: right;">9,84 075 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg b</td><td style="text-align: right;">3,44 387</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen β</td><td style="text-align: right;">9,97 245</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg b/sen β</td><td style="text-align: right;">3,47 142</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg ctg (45° + μ)</td><td style="text-align: right;">9,71 246</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg tg ½(φ + ψ)</td><td style="text-align: right;">9,20 288</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg tg ½(φ - ψ)</td><td style="text-align: right;">8,91 534</td></tr> </table>	lg b	3,44 387	cpl lg sen (P _m P _b)	0,24 442 n	cpl lg cos (P _m P _b)	0,08 517	lg (x _b - x _m)	3,35 870	lg tg (P _m P _b)	9,84 075 n	lg b	3,44 387	lg sen β	9,97 245	lg b/sen β	3,47 142	lg ctg (45° + μ)	9,71 246	lg tg ½(φ + ψ)	9,20 288	lg tg ½(φ - ψ)	8,91 534	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: right;">lg Δx_a</td><td style="text-align: right;">2,13 367</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg cos (P_aP)</td><td style="text-align: right;">9,24 156</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg a/sen α</td><td style="text-align: right;">2,97 584</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen (α + φ)</td><td style="text-align: right;">9,91 627</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen (P_aP)</td><td style="text-align: right;">9,99 325 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg Δy_a</td><td style="text-align: right;">2,88 540 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg Δx_b</td><td style="text-align: right;">3,32 024 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg cos (P_bP)</td><td style="text-align: right;">9,88 999 n</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg b/sen β</td><td style="text-align: right;">3,47 142</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen (β + ψ)</td><td style="text-align: right;">9,95 883</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg sen (P_bP)</td><td style="text-align: right;">9,79 965</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">lg Δy_b</td><td style="text-align: right;">3,22 990</td></tr> </table>	lg Δx _a	2,13 367	lg cos (P _a P)	9,24 156	lg a/sen α	2,97 584	lg sen (α + φ)	9,91 627	lg sen (P _a P)	9,99 325 n	lg Δy _a	2,88 540 n	lg Δx _b	3,32 024 n	lg cos (P _b P)	9,88 999 n	lg b/sen β	3,47 142	lg sen (β + ψ)	9,95 883	lg sen (P _b P)	9,79 965	lg Δy _b	3,22 990																																				
lg a	2,94 691																																																																																																													
lg (y _a - y _m)	2,94 600																																																																																																													
cpl lg sen (P _m P _a)	0,00 091																																																																																																													
cpl lg cos (P _m P _a)	1,18 733																																																																																																													
lg (x _a - x _m)	1,75 959																																																																																																													
lg tg (P _m P _a)	1,18 641																																																																																																													
lg a	2,94 692																																																																																																													
lg sen α	9,97 108																																																																																																													
lg a/sen α	2,97 584																																																																																																													
lg b/sen β	3,47 142																																																																																																													
lg tg μ	9,50 442																																																																																																													
μ	17 43 00																																																																																																													
45° + μ	62 43 00																																																																																																													
lg b	3,44 387																																																																																																													
cpl lg sen (P _m P _b)	0,24 442 n																																																																																																													
cpl lg cos (P _m P _b)	0,08 517																																																																																																													
lg (x _b - x _m)	3,35 870																																																																																																													
lg tg (P _m P _b)	9,84 075 n																																																																																																													
lg b	3,44 387																																																																																																													
lg sen β	9,97 245																																																																																																													
lg b/sen β	3,47 142																																																																																																													
lg ctg (45° + μ)	9,71 246																																																																																																													
lg tg ½(φ + ψ)	9,20 288																																																																																																													
lg tg ½(φ - ψ)	8,91 534																																																																																																													
lg Δx _a	2,13 367																																																																																																													
lg cos (P _a P)	9,24 156																																																																																																													
lg a/sen α	2,97 584																																																																																																													
lg sen (α + φ)	9,91 627																																																																																																													
lg sen (P _a P)	9,99 325 n																																																																																																													
lg Δy _a	2,88 540 n																																																																																																													
lg Δx _b	3,32 024 n																																																																																																													
lg cos (P _b P)	9,88 999 n																																																																																																													
lg b/sen β	3,47 142																																																																																																													
lg sen (β + ψ)	9,95 883																																																																																																													
lg sen (P _b P)	9,79 965																																																																																																													
lg Δy _b	3,22 990																																																																																																													

4. DISCUSION DE LA FORMULA (6). CASOS FAVORABLES Y CASOS DESFAVORABLES. SOLUCION IMPOSIBLE.

La solución del problema de la carta no es siempre posible. Sabemos que el nuevo punto P está determinado por la intersección de dos arcos capaces de los dos ángulos medidos entre los 3 puntos dados. En caso de coincidir estos dos arcos (fig.

4), los 4 puntos P_a, P_m, P_b y el nuevo punto P se encontrarían sobre una misma circunferencia circunscrita al triángulo fundamental. Tal circunferencia se denomina "peligrosa", por peligrar la buena determinación del nuevo punto al encontrarse éste cerca de aquélla: Cuanto más próximo el punto P a ella, tanto menor el ángulo bajo el cual se cortan los arcos capaces, lugares geométricos del nuevo punto P , siendo, por consiguiente, la determinación tanto más inexacta cuanto más próximo el nuevo punto P se halle de dicha circunferencia.

La indeterminación del punto P revélase también del examen de la fórmula (6):

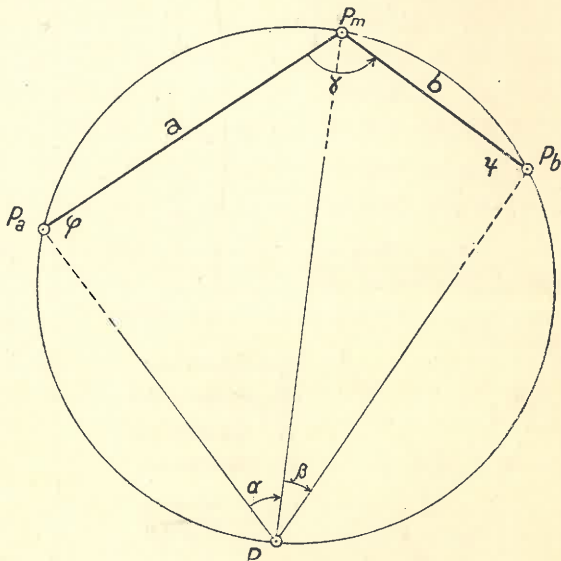


Fig. 4. — Caso de indeterminación $P_a P_m P_b P$ = "circunferencia peligrosa".

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{ctg}(45^\circ + \mu).$$

Por ser, en este caso, la figura $P_a P_m P_b P$ un cuadrilátero inscripto, tendremos:

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= 180^\circ & \frac{1}{2}(\varphi + \psi) &= 90^\circ \\ \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} \psi \\ \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \mu} = 1 & 45^\circ + \mu &= 90^\circ \end{aligned}$$

Luego:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \operatorname{ctg}(\mu + 45^\circ) = \infty \cdot 0 \text{ (solución imposible)}$$

A pesar de suceder raras veces en la práctica el caso de ser $(\varphi + \psi = 180^\circ 0' 0'')$, y no obstante ser posible el cálculo cuando dicha suma sólo se aproxime mucho a 180° , los resultados de la determinación tendrán, en este caso, muy poca seguridad.

Procúrase, por lo tanto, evitar cuidadosamente las posiciones de los puntos P_a, P_m, P_b , y P representadas en figura 4, prefiriéndose las indicadas en figuras 5 y 6, que excluyen tal peligro.

Fig. 5.— 1er. caso favorable.
(*P* dentro del triángulo *ABC*).

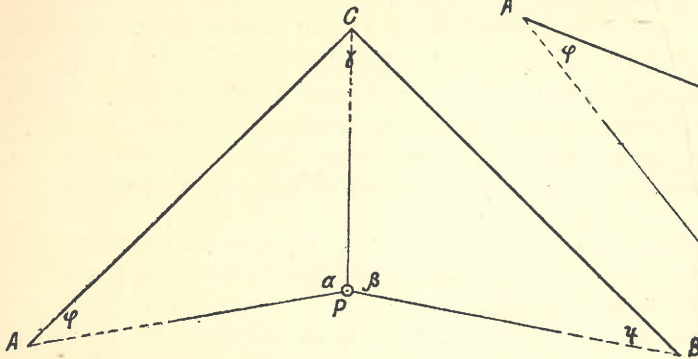
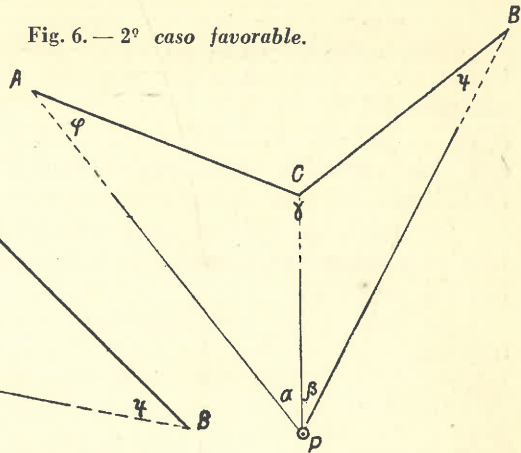


Fig. 6.— 2º caso favorable.



Ilústranse por estas dos figuras dos casos en que la circunferencia por *ABC* pasa lejos del punto *P*.

5. SOLUCION 2ª POR MEDIO DE UN PUNTO AUXILIAR DE COLLINS. DESARROLLO DE LAS CORRESPONDIENTES FORMULAS.

El punto *P* se halla sobre la prolongación de la recta *P_mQ*.

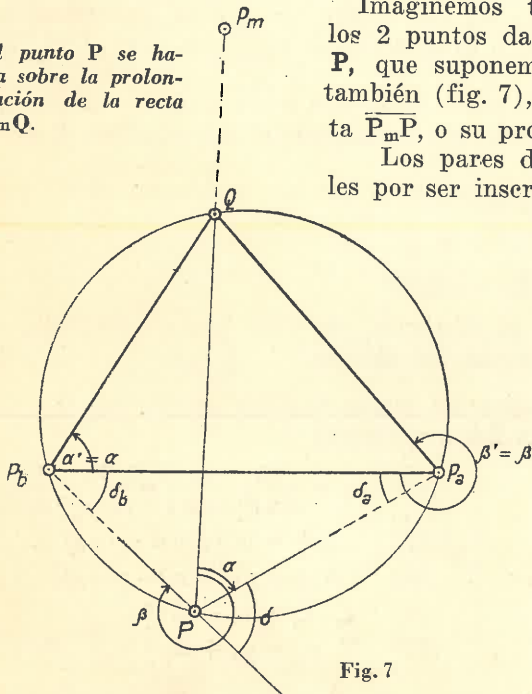


Fig. 7

Imaginemos trazada una circunferencia por los 2 puntos dados *P_a* y *P_b* y el nuevo punto *P*, que suponemos por un momento conocido también (fig. 7), circunferencia que corte la recta *P_mP*, o su prolongación en el punto *Q*.

Los pares de ángulos α y α' , β y β' son iguales por ser inscriptos sobre los mismos arcos capaces (ángulos periféricos sobre las mismas cuerdas).

Dichos ángulos α y β son conocidos por haberse medido en el terreno.

$$\alpha = P_m P P_a; \quad \beta = P_m P P_b$$

Dedúcese de la figura 7 que la posición del punto *Q* puede fácilmente obtenerse gráficamente, construyendo sobre el lado *P_aP_b*, en *P_a*, el ángulo β , y en *P_b* el ángulo α : el punto *Q* se hallará en la intersección de los correspondientes rayos.

Trazaremos ahora efectivamente la circunferencia por los puntos *P_a*, *P_b* y *Q*.

Uniendo *P_m* con *Q*, obtendremos en la intersección de esta recta, o su prolongación, con la circunferencia el nuevo punto *P* buscado, por ser *P* el único punto en que los ángulos *P_mPP_a* y *P_mPP_b* son iguales a los medidos en el terreno.

Para la **solución gráfica con la plancheta** (Nº 6 del § 9, Cap. V de este tomo) no será necesario trazar dicha circunferencia: Una vez hallada la **posición del punto Q**, y unidos los puntos **P_m** y **Q** por medio de la recta **P_mQ**, se podrán trasladar sobre dicha recta los ángulos α y β de tal modo que sus segundos lados pasen, respectivamente, por los puntos **P_a** y **P_b**, obteniendo, así, por doble conducto la posición del punto **P** buscado.

Esta solución gráfica, propuesta en 1671 por John COLLINS indica también el **camino que conduce a la determinación numérica** de las coordenadas del punto **P**:

En base a las coordenadas de los puntos **P_a** y **P_b** pueden calcularse fácilmente las coordenadas del punto auxiliar **Q**, llamado de COLLINS, por el método de la **intersección hacia adelante**.

Mediante las coordenadas de los puntos **P_m** y **Q** se calculará el rumbo ρ_m^q de la recta **P_mQ**, el que nos indica la **orientación** de la línea **P_mP** (ver fig. 7).

En base a este rumbo de arranque ρ_m^q y los ángulos α y β se calcularán los rumbos ρ_a y ρ_b de las rectas **P_aP** y **P_bP**, respectivamente, cuya intersección dará la posición del nuevo punto **P** buscado, posición que viene a estar determinada también por la intersección de la recta **P_mQ**, o su prolongación, con cada una de las rectas nombradas [**intersección lateral numérica** (ver Nº 3 del § 2) o **gráfica con la plancheta** (ver: Cap. V, Nº 2, § 8)].

De este modo la determinación por intersección hacia atrás queda transformada en intersección lateral, pudiendo determinar el nuevo punto **P** por las tres siguientes maneras:

$$\begin{aligned} \overline{P_a P} &\text{ con } \overline{P_b P}, \\ \overline{P_a P} &\gg \overline{P_m Q} \\ \overline{P_b Q} &\gg \overline{P_m Q}. \end{aligned}$$

Daremos a continuación las 26 fórmulas [de (12) hasta (38)], cuya numeración marca las distintas **etapas del cálculo**.

a) **Cálculo de las coordenadas del punto auxiliar de Collins Q.**
(Bisección hacia adelante)

$$(12) \quad \operatorname{tg} \rho_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$(13) \quad \rho_a^q = \rho_a^b - \beta$$

$$(14) \quad \rho_b^q = \rho_a^b \pm 180^\circ - \alpha$$

$$(15) \quad \delta = \beta - \alpha \pm 180^\circ$$

$$(16) \quad m = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen} \rho_a^b \cdot \operatorname{sen} \delta} = \frac{x_b - x_a}{\cos \rho_a^b \cdot \operatorname{sen} \delta}$$

$$(17) \quad \Delta x_a^q = m \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \rho_a^q$$

$$(18) \quad \Delta y_a^q = m \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \rho_a^q$$

$$(19) \quad x_q = x_a + \Delta x_a^q$$

$$(20) \quad y_q = y_a + \Delta y_a^q$$

b) **Contralores de cálculo.**

$$(21) \quad \Delta x_b^q = m \cdot \operatorname{sen} (360^\circ - \beta) \cdot \cos \rho_b^q$$

$$(23) \quad x_q = x_b + \Delta x_b^q$$

$$(22) \quad \Delta y_b^q = m \cdot \operatorname{sen} (360^\circ - \beta) \cdot \operatorname{sen} \rho_b^q$$

$$(24) \quad y_q = y_b + \Delta y_b^q$$

c) Cálculo de las coordenadas del nuevo punto P buscado.
(Bisección lateral)

$$(25) \quad \operatorname{tg} \rho_m^q = \frac{y_q - y_m}{x_q - x_m}$$

$$(26) \quad \rho_a = \rho_m^q + \alpha$$

$$(27) \quad \rho_b = \rho_m^q + \beta$$

$$(28) \quad \delta_a = \rho_a^b - \rho_a$$

$$(29) \quad \delta_b = \rho_b - \rho_a^b \pm 180^\circ$$

$$(30) \quad \delta_a + \delta_b = \delta$$

$$(31) \quad \Delta x_a = m \cdot \operatorname{sen} \delta_b \cdot \cos \rho_a$$

$$(32) \quad \Delta y_a = m \cdot \operatorname{sen} \delta_b \cdot \operatorname{sen} \rho_a$$

$$(33) \quad x = x_a + \Delta x_a$$

$$(34) \quad y = y_a + \Delta y_a$$

d) Contralores de cálculo:

$$(35) \quad \Delta x_b = m \cdot \operatorname{sen} \delta_a \cdot \cos \rho_b$$

$$(36) \quad \Delta y_b = m \cdot \operatorname{sen} \delta_a \cdot \operatorname{sen} \rho_b$$

$$(37) \quad x = x_b + \Delta x_b$$

$$(38) \quad y = y_b + \Delta y_b$$

El cálculo numérico, en esta solución, queda simplificado por la circunstancia de que el valor de m (diámetro de la circunferencia circunscrita) puede utilizarse tanto para el triángulo $P_a P_b Q$ como para $P_a P_b P$.

Las fórmulas son **generales**, valiendo para cualquier posición de los puntos básicos P_a, P_b, P_m y del nuevo punto P , a condición de seguirse estrictamente la correspondiente **regla de notación de punto**, la que puede expresarse así: **Vistos los vértices desde P, el primer punto después de P_m** (arbitrariamente elegido), siguiendo el sentido del movimiento de las agujas del reloj, **será llamado P_a , el segundo P_b** , debiendo ser:

$$P_m P P_a = \alpha \quad \text{y} \quad P_m P P_b = \beta.$$

Otras posiciones posibles entre los puntos P_a, P_b, P_m y Q , fuera de la representada en fig. 7, se ilustran en las figuras 8-11.

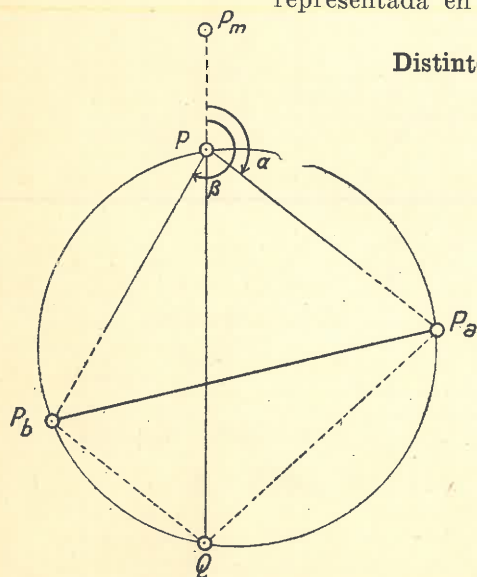


Fig. 8.—El nuevo punto P se halla sobre la recta $P_m Q$.

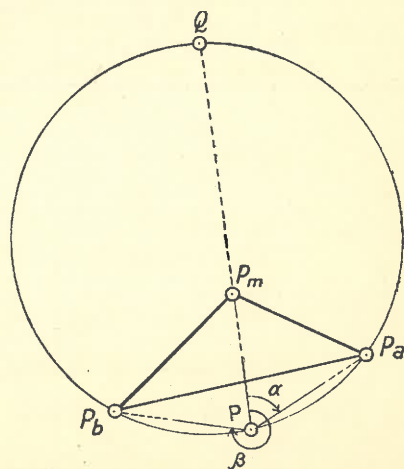


Fig. 9.—El nuevo punto P se halla sobre la prolongación de la recta $P_m Q$.

Distintos casos

Fig. 10. — El nuevo punto P se halla sobre la recta $P_m Q$.

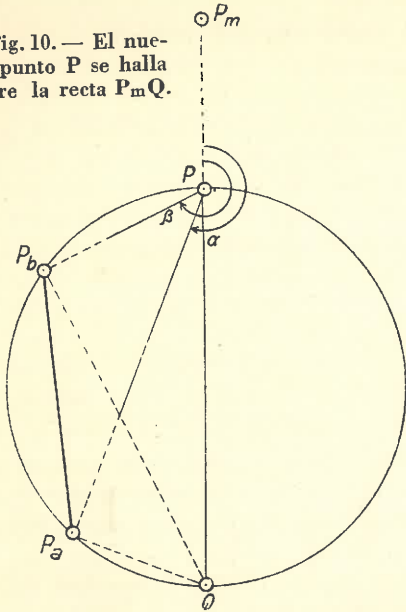
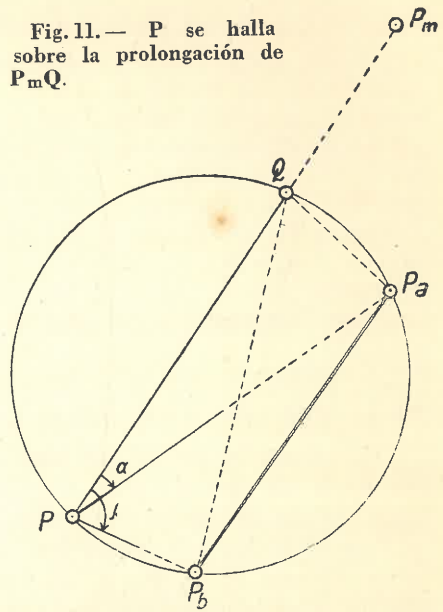


Fig. 11. — P se halla sobre la prolongación de $P_m Q$.



6. FORMULARIO TRIGONOMETRICO 11 CON TRES EJEMPLOS PRACTICOS EN ÉL CALCULADOS, DETERMINANDO DISTINTOS PUNTOS DE COLLINS. RESUMEN Y CROQUIS DE CONJUNTO.

En las siguientes planillas de cálculo se ha calculado nuevamente el mismo problema que acabamos de tratar, aplicando las fórmulas (12) a

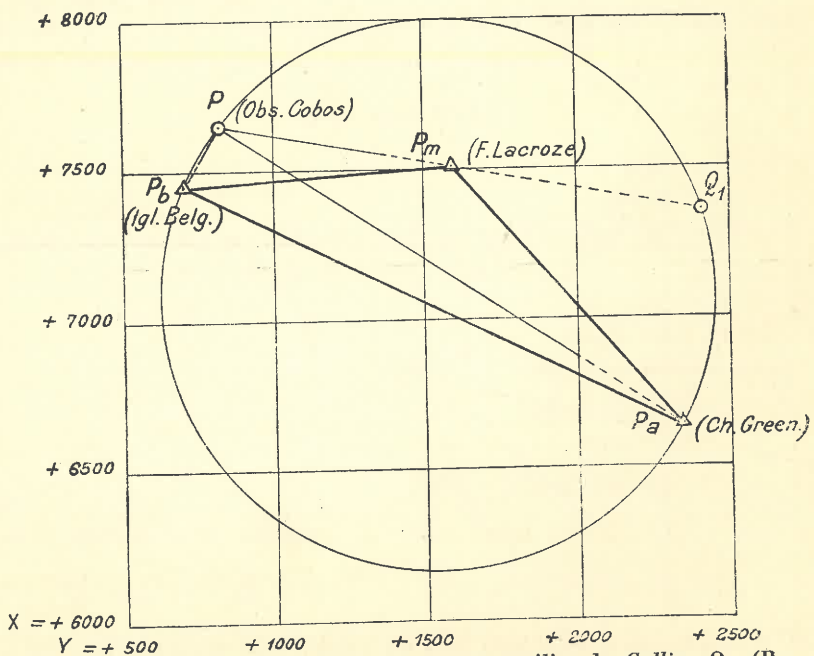


Fig. 12. — Problema de la carta con punto auxiliar de Collins Q_1 (P_m en el punto "Chalet Federico Lacroze").

(38) y variando la disposición de los elementos de medición. Creemos proporcionar así al lector estudioso una oportunidad de practicar el cálculo numérico y completar el estudio de esta solución del problema de la carta, con punto auxiliar de Collins, de tan extraordinaria utilidad para el topógrafo.

Ejemplo práctico N° 1.

Sea **Chalet Lacroze** punto del medio P_m y Q_1 el correspondiente punto de Collins. En consecuencia de esta elección tendremos:

α = ángulo Chalet Lacroze — Obs. Cobos — Chalet Green,
 β = " " " — " " — Igl. Belgrano.

Ver: Croquis fig. 12, y Planilla de cálculo N° 2, pág. 25.

Ejemplo práctico N° 2.

Se supone P_m en **Chalet Green**, siendo entonces Q_2 (fig. 13) el correspondiente punto de Collins y

Angulo α = Chalet Green — Obs. Cobos — Igl. Belgrano,
 " β = " " — " " — Chalet Lacroze.

Ver: Planilla de Cálculo N° 3, pág. 26.

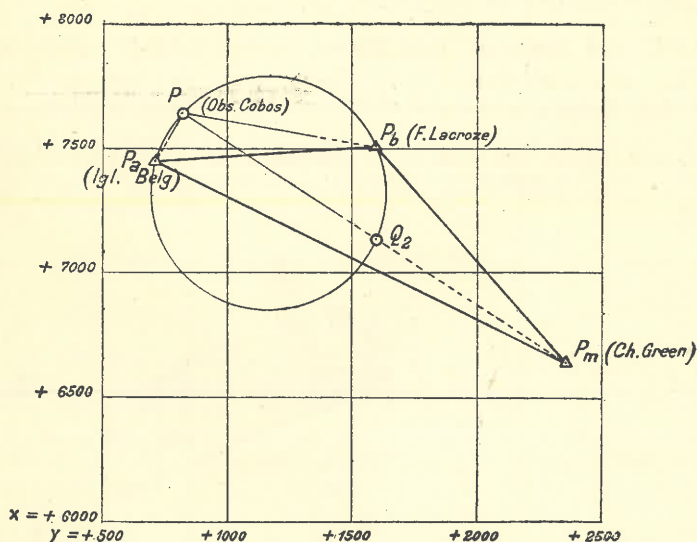


Fig. 13. — Problema de la carta con punto auxiliar de Collins Q_2 (P_m en "Chalet Green").

Ejemplo práctico N° 3.

P_m : Iglesia Belgrano (fig. 14).

Angulo α = " " — Obs. Cobos — Chalet Lacroze,
 " β = " " — " " — " Green.

Q_3 significa el correspondiente punto de Collins.

Ver: Planilla de Cálculo N° 4, pág. 27.

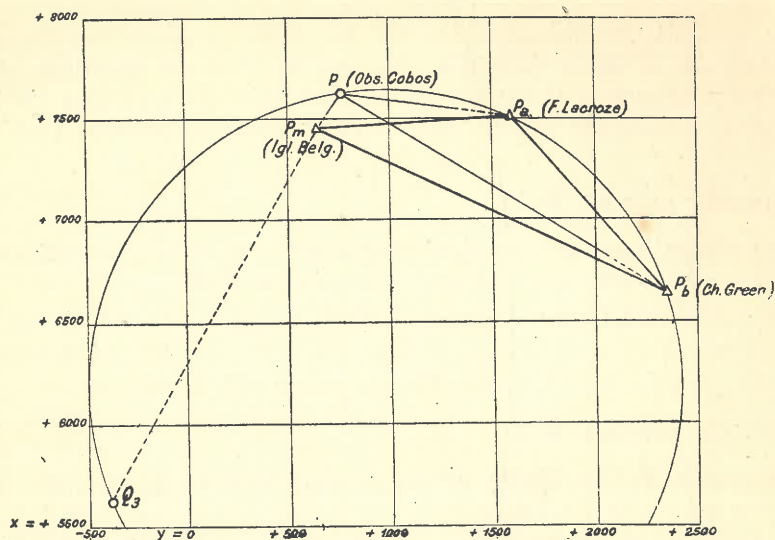


Fig. 14. — Problema de la carta con punto auxiliar de Collins Q_3 (P_m en "Igl. de Belgrano").

Resumen y Croquis de conjunto.

P_m en Chalet Lacroze:	Obs. Cobos	$x = + 7\ 646,20$	$y = + 823,16$
P_m " " "	Green:	" "	$= + 7\ 646,18$, $= + 823,20$
P_m " " "	Igl. Belgrano:	" "	$= + 7\ 646,18$, $= + 823,15$

El croquis figura 15 ilustra el conjunto de la triple solución del problema de la carta, habiéndose en ella determinado los 3 puntos de Collins, Q_1 , Q_2 y Q_3 .

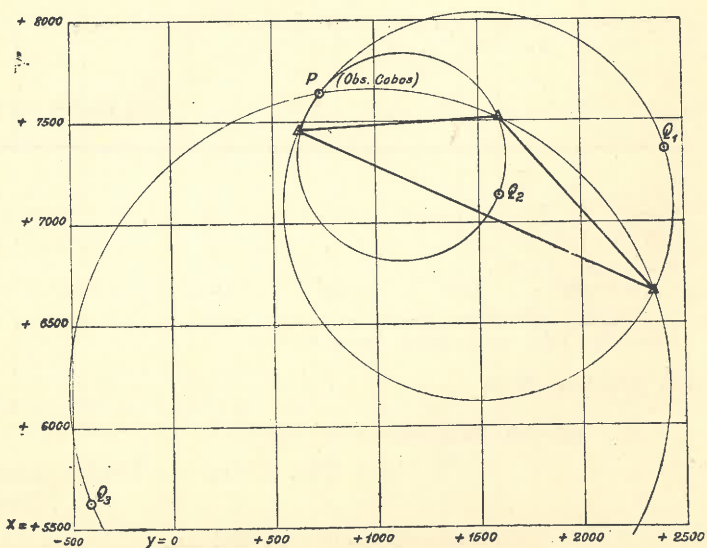


Fig. 15. — Croquis de conjunto sobre la triple solución según Collins.

PROBLEMA DE LA CARTA (Solución de COLLINS)

P_m en Chalet Lacroze (fig. 12)

PLANILLA DE CÁLCULO N° 2

x_a	\pm	6641,82	y_a	\pm	2346,32	α	°	'	"
x_b	+	7452,65	y_b	+	708,19	β	110	40	40
$x_b - x_c$	+	810,83	$y_b - y_a$	-	1638,13	$360^\circ - \beta$	249	19	20
Δx_a^q	+	721,93	Δy_a^q	+	71,50	ρ_a^b	296	20	02
Δx_b^q	-	88,91	Δy_b^q	+	1709,65	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	185	39	22
x_q	+	7363,74	y_q	+	2417,83	$\rho_b^q = \rho_a^b \pm 180^\circ - \alpha$	92	58	37
x_m	+	7510,14	y_m	+	1591,26	ρ_m^q	100	02	38
$x_q - x_m$	-	146,40	$y_q - y_m$	+	826,57	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	123	24	03
Δx_a	+	1004,39	Δy_a	-	1523,20	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	210	43	18
Δx_b	+	193,53	Δy_b	+	115,01	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	172	55	59
x	+	7646,21	y	+	823,12	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b \pm 180^\circ$	94	23	16
x	+	7646,18	y	+	823,20	$\delta = \beta - \alpha \pm 180^\circ$	267	19	15
x (prom.)	+	7646,20	y (prom.)	+	823,16	$= \delta_a + \delta_b$	267	19	15

P_m: Chalet Lacroze — P_a: Chalet Green — P_b: Iglesia Belgrano — P: Obs. Cobos

$\lg(y_b - y_a)$	3,21 435 _n	$\lg \Delta x_a^q$	2,85 850	$\lg \Delta x_a$	3,00 190
$\lg(x_b - x_a)$	2,90 893	$\lg \cos \rho_a^q$	9,99 788 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	9,74 075 _n ↑
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	0,30 542 _n	$\lg m$	3,26 242 _n ↑	$\lg m$	3,26 242 _n ↑
$\lg m$	3,26 241 _n	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,59 820 ↑	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,99 873 ↑
$\lg(y_b - y_a)$	3,21 435 _n ↑	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	8,99 369 _n ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,92 161 ↓
$\operatorname{cpl} \lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,04 758 _n	$\lg \Delta y_a^q$	1,85 431 ↓	$\lg \Delta v_a$	3,18 276 _n
$\operatorname{cpl} \lg \operatorname{sen} \delta$	0,00 048 _n ↑	$\lg \Delta x_b^q$	1,94 895 _n	$\lg \Delta x_b$	2,28 676
$\operatorname{cpl} \lg \cos \rho_a^b$	0,35 301	$\lg \rho_b^q$	8,71 545 _n ↑	$\lg \cos \rho_b$	9,93 433 _n ↑
$\lg(x_b - x_a)$	2,90 893 ↓	$\lg m$	3,26 242 _n ↑	$\lg m$	3,26 242 _n ↑
$\lg m$	3,26 242 _n	$\lg \operatorname{sen}(2\pi - \beta)$	9,97 108 _n ↓	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,09 001 ↓
$\lg(y_q - y_m)$	2,91 728	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	9,99 941 ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,70 831 _n ↓
$\lg(x_q - x_m)$	2,16 554 _n	$\lg \Delta y_b^q$	3,23 291	$\lg \Delta y_b$	2,06 074
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$	0,75 174 _n				

PROBLEMA DE LA CARTA (Solución de COLLINS)
 P_m en Chalet Green (fig. 13)

PLANILLA DE CÁLCULO N° 3

x_a	+	7452,65	y_a	+	708,19	α	87	19	15
x_b	+	7510,14	y_b	+	1591,26	β	336	38	35
$x_b - x_a$	+	57,49	$y_b - y_a$	+	883,07	$360^\circ - \beta$	23	21	25
Δx_a^q	-	317,45	Δy_a^q	+	889,92	ρ_a^b	86	16	31
Δx_b^q	-	374,95	Δy_b^q	+	6,84	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	109	37	56
x_q	+	7135,20	y_q	+	1598,10	$\rho_b^q = \rho_a^b + 180^\circ - \alpha$	178	57	16
x_m	+	6641,82	y_m	+	2346,32	ρ_m^q	303	24	04
$x_q - x_m$	+	493,38	$y_q - y_m$	-	748,22	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	30	43	19
Δx_a	+	193,54	Δy_a	+	115,01	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	280	02	39
Δx_b	+	136,04	Δy_b	-	768,07	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	55	33	12
x	+	7646,19	y	+	823,20	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b + 180^\circ$	13	46	08
x	+	7646,18	y	+	823,19	$\delta = \beta - \alpha + 180^\circ$	69	19	20
x (prom.)	+	7646,18	y (prom.)	+	823,20	$= \delta_a + \delta_b$	69	19	20

P_m: Chalet Green. P_a: Igl. Belgrano. P_b: Chalet Lacroze. P: Obs. Cobos

$\lg(y_b - y_a)$	2,94 600	$\lg \Delta x_a^q$	2,50 168 _n	$\lg \Delta x_a$	2,28 676
$\lg(x_b - x_a)$	1,75 959	$\lg \cos \rho_a^q$	9,52 632 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	9,93 433 ↑
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	1,18 641	$\lg m$	2,97 584	$\lg m$	2,97 584
$\lg m$	2,97 583	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,99 952	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,37 659
$\lg(y_b - y_a)$	2,94 600 ↑	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,97 399 ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,70 831 ↓
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,00 091	$\lg \Delta y_a^q$	2,54 935	$\lg \Delta y_a$	2,06 074
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \delta$	0,02 892	$\lg \Delta x_b^q$	2,57 397 _n ↑	$\lg \Delta x_b$	2,13 367
$\operatorname{cpl.} \lg \cos \rho_a^b$	1,18 733	$\lg \cos \rho_b^q$	9,99 993 _n ↑	$\lg \cos \rho_b$	9,24 156 ↑
$\lg(x_b - x_a)$	1,75 959	$\lg m$	2,97 584	$\lg m$	2,97 584
$\lg m$	2,97 584	$\lg \operatorname{sen}(2\pi - \beta)$	9,59 820	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,91 627
$\lg(y_q - y_m)$	2,87 403 _n	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	8,26 120 ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,99 329 _n ↓
$\lg(x_q - x_m)$	2,69 318	$\lg \Delta y_b^q$	0,83 524	$\lg \Delta y_b$	2,88 540 _n
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$	0,18 085 _n				

PROBLEMA DE LA CARTA (Solución de COLLINS)

P_m en Iglesia Belgrano (fig. 14)

PLANILLA DE CALCULO N° 4

x_a	+	7510,14	y_a	+	1591,26	α	249	19	20
x_b	+	6641,82	y_b	+	2346,32	β	272	40	45
$x_b - x_a$	-	868,32	$y_b - y_a$	+	755,06	$2\pi - \beta$	87	19	15
Δx_a^q	-	1875,65	Δy_a^q	-	1963,59	ρ_a^b	138	59	28
Δx_b^q	-	1007,33	Δy_b^q	-	2718,56	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	226	18	43
x_q	+	5634,49	y_q	-	372,28	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha \pm \pi$	69	40	08
x_m	+	7452,65	y_m	+	708,19	ρ_m^q	210	43	17
$x_q - x_m$	-	1818,16	$y_q - y_m$	-	1080,47	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	100	02	37
Δx_a	+	136,04	Δy_a	-	768,10	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	123	24	02
Δx_b	+	1004,36	Δy_b	-	1523,18	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	38	56	51
x	+	7646,18	y	+	823,16	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b \pm \pi$	164	24	34
x	+	7646,18	y	+	823,14	$\delta = \beta - \alpha \pm \pi$	203	21	25
x (prom.)	+	7646,18	y (prom.)	+	823,15	$= \delta_a + \delta_b$	203	21	25

P_m : Igl. Belgrano. P_a : Chalet Lacroze. P_b : Chalet Green. P : Obs. Cobos

$\lg(y_b - y_a)$	2,87 798	$\lg \Delta x_b^q$	3,27 315 _n	$\lg \Delta x_a$	2,13 367
$\lg(x_b - x_a)$	2 93 868 _n	$\lg \cos \rho_a^q$	9,83 931 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	9,24 154 _n ↑
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	9,93 930 _n	$\lg m$	3,46 276 _n	$\lg m$	3,46 276 _n ↑
$\lg m$	3,46 276 _n	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,97 108 _n ↓	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,42 937 ↑
$\lg(y_b - y_a)$	2,87 798 ↑	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,85 921 _n ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,99 329 ↓
$\operatorname{cpl} \lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,18 298	$\lg \Delta y_a^q$	3,29 305 _n	$\lg \Delta y_a$	2,88 542 _n
$\operatorname{cpl} \lg \operatorname{sen} \delta$	0,40 180 _n	$\lg \Delta x_b^q$	3,00 317 _n ↑	$\lg \Delta x_b$	3,00 189 ↑
$\operatorname{cpl} \lg \cos \rho_a^b$	0,12 228 _n	$\lg \cos \rho_b^q$	9,54 089 _n ↑	$\lg \cos \rho_b$	9,74 075 _n ↑
$\lg(x_b - x_a)$	2,93 868 _n ↓	$\lg m$	3,46 276 _n	$\lg m$	3,46 276 _n
$\lg m$	3,46 276 _n	$\lg \operatorname{sen}(2\pi - \beta)$	9,99 952 _n	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,79 838
$\lg(y_q - y_m)$	3,03 361 _n	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	9,97 206 _n ↓	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,92 161 ↓
$\lg(x_q - x_m)$	3,25 963 _n	$\lg \Delta y_b^q$	3,43 434 _n	$\lg \Delta y_b$	3,18 275 _n
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$	9,77 398				

7. OBSERVACIONES GENERALES RELATIVAS A LA PRECISION DE LA DETERMINACION.

Dedúcese de la inspección de las figuras 8-11 el hecho de que el nuevo punto **P** quedaría indeterminado si también el punto P_m estuviera situado sobre la circunferencia que pasa por los puntos **P**, P_a y P_b ("circunferencia peligrosa").

Estará, en cambio, el punto **P** bien determinado:

1° Si de las 3 visuales que salen de **P** hacia los puntos básicos P_a , P_b , P_m , dos están dirigidas a puntos cercanos, la tercera a punto lejano;

2° Si las dos visuales a puntos cercanos se cortan en **P** favorablemente, es decir, si:

$$\beta - \alpha \pm 180^\circ = \delta_a + \delta_b = \delta$$

oscila entre 60° y 120° , ó entre 240° y 300° .

Asimismo aumenta la precisión de la determinación si:

3° El nuevo punto **P** está situado entre P_m y **Q** (figs. 8 y 10), sucediendo lo contrario cuando **P** se halle sobre la prolongación de $\overline{P_m Q}$ (figs. 9 y 11). En el primer caso se reduciría el efecto de los errores que afectan los ángulos α y β aumentándose en el segundo.

Recomiéndase, por lo tanto, elegir para P_m el punto más lejano, por aparecer entonces las cantidades Δx_a , Δy_a , Δx_b , Δy_b con números más pequeños en el cálculo logarítmico.

Mas también un punto cercano puede elegirse para P_m con ventaja, por hallarse entonces el punto de COLLINS a gran distancia, pudiendo obtenerse así la dirección de la línea $\overline{P_m Q}$, sobre la cual se halla el nuevo punto **P** con la misma precisión que en el caso del punto P_m cercano.

Cuando los rumbos ρ_a^q y ρ_b^q sean aproximadamente iguales, como sucede para un punto de COLLINS muy lejano, se obtendrán para Δx_a^q , Δy_a^q , Δx_b^q , Δy_b^q valores relativamente grandes, afectados de grandes errores de redondeo en el cálculo logarítmico. Pero esta circunstancia no tendrá una influencia perjudicial, por determinarse entonces ρ_m^q en base a esos mismos valores grandes, desapareciendo, por lo tanto, el efecto de los grandes errores de redondeo.

Cuando el nuevo punto **P** está situado sobre la recta $\overline{P_a P_b}$, o su prolongación (bisección lateral), se tendrá $\beta = \alpha \pm 180^\circ$ y $\rho_a^q = \rho_b^q = \rho_m^q$, lo que haría inútil el cálculo de las coordenadas del punto auxiliar **Q**, que se halla en el infinito.

8. SOLUCION 3ª CON PUNTO DE COLLINS ADAPTADA AL CALCULO CON LA MAQUINA. EJEMPLO PRACTICO CALCULADO EN FORM. TRIG. 12.

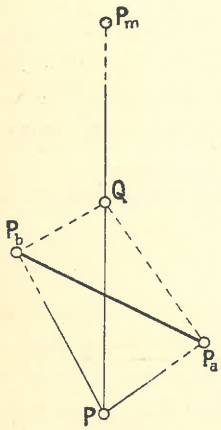
Las fórmulas que se utilizan y que van consignadas en la Planilla de cálculo N° 5, son las ya explicadas en N° 4, § 2. El problema de la carta, con punto de COLLINS viene a reducirse a una doble bisección hacia adelante, una primera para obtener el punto de COLLINS **Q**, la segunda para el nuevo punto **P** buscado. Ver Planilla de cálculo N° 5.

Se ha repetido en la citada planilla el mismo problema de planilla 4, con Iglesia de Belgrano como punto del medio P_m .

PROBLEMA DE LA CARTA (Solución de COLLINS)
Cálculo con la máquina

PLANILLA DE CALCULO N° 5

P_m : Ig. Belgrano
 P_a : Mr. San Juan
 P_b : Chalet Green
P: Obs. Cobos



Q $tg \rho_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$

P $tg \rho_m^q = \frac{y_q - y_m}{x_q - x_m}$

$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$ $\rho_b^q = \rho_a^b \pm 180^\circ - \alpha$ $\rho_a = \rho_m^q + \alpha$ $\rho_b = \rho_m^q + \beta$

$A_1 = \Delta y_a^b - \Delta x_a^b \cdot tg \rho_b^q$ $A_2 = \Delta y_a^b - \Delta x_a^b \cdot tg \rho_b$
 $B_1 = \Delta y_a^b - \Delta x_a^b \cdot tg \rho_a^q$ $B_2 = \Delta y_a^b - \Delta x_a^b \cdot tg \rho_a$
 $C_1 = tg \rho_a^q - tg \rho_b^q$ $C_2 = tg \rho_a - tg \rho_b$

$\Delta x_a^q = \frac{A_1}{C_1}$ $\Delta x_b^q = \frac{B_1}{C_1}$ $\Delta x_a = \frac{A_2}{C_2}$ $\Delta x_b = \frac{B_2}{C_2} (*)$

$\Delta y_a^q = \Delta x_a^q \cdot tg \rho_a^q$ $\Delta x_r = \Delta x_a \cdot tg \rho_a (*)$
 $\Delta y_b^q = \Delta x_b^q \cdot tg \rho_b^q$ $\Delta x_b = \Delta x_b \cdot tg \rho_b (*)$

$x_q = x_a + \Delta x_a^q$ $x = x_a + \Delta x_a$
 $= x_b + \Delta x_b^q$ $= x_b + \Delta x_b$
 $y_q = y_a + \Delta y_a^q$ $y = y_a + \Delta y_a$
 $= y_b + \Delta y_b^q$ $= y_b + \Delta y_b$

x_a	+	9736,626	y_a	-	874,702	α	110	11	40	$tg \rho_a^b$	-	1,04078	
x_b	+	6641,820	y_b	+	2346,324	β	272	40	45	$tg \rho_m^q$	+	0,59427	
$x_b - x_a$	-	3094,810	$y_b - y_a$	+	3221,03	ρ_a^b	133	51	19	ρ_m^q	30	43	18
Δx_a^q	+	10484,84	Δy_a^q	+	9171,09	ρ_a^q	221	10	34	ρ_a	140	54	58
Δx_b^q	+	13579,65	Δy_b^q	+	5950,06	ρ_b^q	203	39	39	ρ_b	303	24	03
x_q	+	20221,47	y_q	+	8296,38								
x_m	+	7452,649	y_m	+	708,193	$tg \rho_a^q$	+	0,87470		$tg \rho_a$	-	0,81222	
$x_q - x_m$	+	12768,82	$y_q - y_m$	+	7588,19	$tg \rho_b^q$	+	0,43816		$tg \rho_b$	-	1,51653	
Δx_a	-	2090,47	Δy_a	+	1697,92	C_1	+	0,43654		C_2	+	0,70431	
Δx_b	+	1004,33	Δy_b	-	1523,10	A_1	+	4577,05		A_2	-	1472,34	
x	+	7646,16	y	+	823,22	B_1	+	5928,06		B_2	+	707,36	

Form. trig. 12

(*) Para pequeños valores de Δx_a y Δx_b es necesario calcular más de dos cifras decimales si se quiere obtener Δy_a y Δy_b con suficiente precisión.

9. SOLUCION 4ª (DE TOBIAS MAYER), CALCULANDO DIRECTAMENTE $\text{ctg } \varphi$ y $\text{ctg } \psi$. DESARROLLO DE LAS FORMULAS.

Según fórmula (4) tenemos:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Poniendo ahora:

$$(39) \quad \psi = (\varphi + \psi) - \varphi$$

y substituyendo este valor en la ecuación (5):

$$\frac{a \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen } \psi}{\text{sen } \beta},$$

tendremos:
$$\frac{a \text{ sen } \varphi}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen } \{(\varphi + \psi) - \varphi\}}{\text{sen } \beta}$$

$$\begin{aligned} a \text{ sen } \beta \text{ sen } \varphi &= b \text{ sen } \alpha \text{ sen } \{(\varphi + \psi) - \varphi\} \\ &= b \text{ sen } \alpha \text{ sen } (\varphi + \psi) \cos \varphi - b \text{ sen } \alpha \cos (\varphi + \psi) \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

Dividiendo por $\text{sen } \varphi$:

$$a \text{ sen } \beta = b \text{ sen } \alpha \text{ sen } (\varphi + \psi) \text{ ctg } \varphi - b \text{ sen } \alpha \cos (\varphi + \psi)$$

$$\text{ctg } \varphi = \frac{a \text{ sen } \beta + b \text{ sen } \alpha \cos (\varphi + \psi)}{b \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\varphi + \psi)}$$

$$(40) \quad \text{ctg } \varphi = \frac{\frac{a}{\text{sen } \alpha}}{\frac{b}{\text{sen } \beta} \cdot \text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

$$= \frac{r}{\text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

en donde:

$$r = \frac{a/\text{sen } \alpha}{b/\text{sen } \beta}$$

y análogamente para $\psi = (\varphi + \psi) - \psi$

$$(41) \quad \text{ctg } \psi = \frac{\frac{b}{\text{sen } \beta}}{\frac{a}{\text{sen } \alpha} \cdot \text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

$$\text{ctg } \psi = \frac{1}{r \cdot \text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

Las fórmulas (40) y (41) son generales, a condición de seguirse invariablemente la regla sobre la designación de los nuevos puntos: Vistos desde P (fig. 16), se llamará P_m al punto del medio, P_a al situado a la izquierda y P_b al de la derecha del rayo PP_m , siendo α el ángulo P_aPP_m y β el ángulo P_bPP_m .

10. FORMULARIO N° 13 CON UN EJEMPLO PRACTICO EN EL CALCULADO.

Con el objeto de explicar el cálculo y de acuerdo a las fórmulas (40) y (41) correspondientes a esta 4ª solución del problema de la carta, hemos determinado nuevamente las coordenadas del Obs. Cobos, en base a los siguientes elementos:

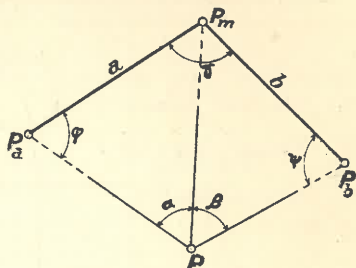


Fig. 16. — Problema de la carta. Solución con las ctg de φ y ψ .

PROBLEMA DE LA CARTA

Solución con la ctg (fig 17)

PLANILLA DE CALCULO N° 6

P_a : Chalet Green
 P_b : M^o S^o Juan
 P_m : Igl. Belgrano
 P : Obs. Cobos

$$\text{ctg } \varphi = \frac{a/\text{sen } \alpha}{b/\text{sen } \beta \text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

$$\text{ctg } \psi = \frac{b/\text{sen } \beta}{a/\text{sen } \alpha \text{sen } (\varphi + \psi)} + \text{ctg } (\varphi + \psi)$$

$\frac{a/\text{sen } \alpha}{b/\text{sen } \beta} = r$	$\frac{b/\text{sen } \beta}{a/\text{sen } \alpha} = \frac{1}{r}$																																																																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x_a +$</td><td>6641,82</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y_a +$</td><td>2346,32</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x_b +$</td><td>9736,63</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y_b -$</td><td>874,70</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x_m +$</td><td>7452,65</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y_m +$</td><td>708,19</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x_a - x_m -$</td><td>810,83</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y_a - y_m +$</td><td>1638,13</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x_b - x_m +$</td><td>2283,98</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y_b - y_m -$</td><td>1582,89</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\Delta x_a +$</td><td>1004,39</td><td style="border-right: 1px solid black;">$\Delta y_a -$</td><td>1523,18</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\Delta x_b -$</td><td>2090,45</td><td style="border-right: 1px solid black;">$\Delta y_b +$</td><td>1697,85</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x +$</td><td>7646,21</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y +$</td><td>823,14</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$x +$</td><td>7646,18</td><td style="border-right: 1px solid black;">$y +$</td><td>823,15</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">x (prom.)</td><td>7646,20</td><td style="border-right: 1px solid black;">y (prom.)</td><td>823,14</td></tr> </table>	$x_a +$	6641,82	$y_a +$	2346,32	$x_b +$	9736,63	$y_b -$	874,70	$x_m +$	7452,65	$y_m +$	708,19	$x_a - x_m -$	810,83	$y_a - y_m +$	1638,13	$x_b - x_m +$	2283,98	$y_b - y_m -$	1582,89	$\Delta x_a +$	1004,39	$\Delta y_a -$	1523,18	$\Delta x_b -$	2090,45	$\Delta y_b +$	1697,85	$x +$	7646,21	$y +$	823,14	$x +$	7646,18	$y +$	823,15	x (prom.)	7646,20	y (prom.)	823,14		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$(P_m P_a)$</td><td>116</td><td style="border-right: 1px solid black;">0</td><td>20</td><td>02</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$(P_m P_b)$</td><td>325</td><td style="border-right: 1px solid black;">16</td><td>38</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$(P_m P_a) - (P_m P_b) = \gamma$</td><td>151</td><td style="border-right: 1px solid black;">03</td><td>24</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">α</td><td>87</td><td style="border-right: 1px solid black;">19</td><td>15</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">β</td><td>110</td><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td>40</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\alpha + \beta + \gamma = \Sigma$</td><td>348</td><td style="border-right: 1px solid black;">34</td><td>19</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$360^\circ - \Sigma = \varphi + \psi$</td><td>11</td><td style="border-right: 1px solid black;">25</td><td>41</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$</td><td>7</td><td style="border-right: 1px solid black;">04</td><td>02</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$</td><td>4</td><td style="border-right: 1px solid black;">21</td><td>39</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$(P_a P) = (P_a P_m) + \varphi$</td><td>303</td><td style="border-right: 1px solid black;">24</td><td>04</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$(P_b P) = (P_b P_m) - \psi$</td><td>140</td><td style="border-right: 1px solid black;">54</td><td>59</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\alpha + \varphi$</td><td>94</td><td style="border-right: 1px solid black;">23</td><td>17</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\beta + \psi$</td><td>114</td><td style="border-right: 1px solid black;">33</td><td>19</td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi$</td><td>360</td><td style="border-right: 1px solid black;">00</td><td>00</td><td></td></tr> </table>	$(P_m P_a)$	116	0	20	02	$(P_m P_b)$	325	16	38		$(P_m P_a) - (P_m P_b) = \gamma$	151	03	24		α	87	19	15		β	110	11	40		$\alpha + \beta + \gamma = \Sigma$	348	34	19		$360^\circ - \Sigma = \varphi + \psi$	11	25	41		$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	7	04	02		$\psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	4	21	39		$(P_a P) = (P_a P_m) + \varphi$	303	24	04		$(P_b P) = (P_b P_m) - \psi$	140	54	59		$\alpha + \varphi$	94	23	17		$\beta + \psi$	114	33	19		$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi$	360	00	00	
$x_a +$	6641,82	$y_a +$	2346,32																																																																																																													
$x_b +$	9736,63	$y_b -$	874,70																																																																																																													
$x_m +$	7452,65	$y_m +$	708,19																																																																																																													
$x_a - x_m -$	810,83	$y_a - y_m +$	1638,13																																																																																																													
$x_b - x_m +$	2283,98	$y_b - y_m -$	1582,89																																																																																																													
$\Delta x_a +$	1004,39	$\Delta y_a -$	1523,18																																																																																																													
$\Delta x_b -$	2090,45	$\Delta y_b +$	1697,85																																																																																																													
$x +$	7646,21	$y +$	823,14																																																																																																													
$x +$	7646,18	$y +$	823,15																																																																																																													
x (prom.)	7646,20	y (prom.)	823,14																																																																																																													
$(P_m P_a)$	116	0	20	02																																																																																																												
$(P_m P_b)$	325	16	38																																																																																																													
$(P_m P_a) - (P_m P_b) = \gamma$	151	03	24																																																																																																													
α	87	19	15																																																																																																													
β	110	11	40																																																																																																													
$\alpha + \beta + \gamma = \Sigma$	348	34	19																																																																																																													
$360^\circ - \Sigma = \varphi + \psi$	11	25	41																																																																																																													
$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	7	04	02																																																																																																													
$\psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	4	21	39																																																																																																													
$(P_a P) = (P_a P_m) + \varphi$	303	24	04																																																																																																													
$(P_b P) = (P_b P_m) - \psi$	140	54	59																																																																																																													
$\alpha + \varphi$	94	23	17																																																																																																													
$\beta + \psi$	114	33	19																																																																																																													
$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi$	360	00	00																																																																																																													

$\text{lg } a$	3,26 193	$\text{lg } b$	3,44 387	$\text{lg } \Delta x_a$	3,00 190
$\text{lg } (y_a - y_m)$	3,21 435	$\text{lg } (y_b - y_m)$	3,19 945 n	$\text{lg } \cos (P_a P)$	9,74 075
$\text{cpl } \text{lg } \text{sen } (P_m P_a)$	0,04 758	$\text{cpl } \text{lg } \text{sen } (P_m P_b)$	0,24 442 n	$\text{lg } a/\text{sen } \alpha$	3,26 242
$\text{cpl } \text{lg } \cos (P_m P_a)$	0,35 301 n	$\text{cpl } \text{lg } \cos (P_m P_b)$	0,08 517	$\text{lg } \text{sen } (\alpha + \varphi)$	9,99 873
$\text{lg } (x_a - x_m)$	2,90 893 n	$\text{lg } (x_b - x_m)$	3,35 870	$\text{lg } \text{sen } (P_a P)$	9,92 160 n
$\text{lg } \text{tg } (P_m P_a)$	0,30 442 n	$\text{lg } \text{tg } (P_m P_b)$	9,84 075 n	$\text{lg } \Delta y_a$	3,18 275 n
$\text{lg } a$	3,26 194	$\text{lg } b$	3,44 387		
$\text{lg } \text{sen } \alpha$	9,99 952	$\text{lg } \text{sen } \beta$	9,97 245	$\text{lg } \Delta x_b$	3,32 024 n
$\text{lg } a/\text{sen } \alpha$	3,26 242	$\text{lg } b/\text{sen } \beta$	3,47 142	$\text{lg } \cos (P_b P)$	9,88 999 n
$\text{lg } b/\text{sen } \beta$	3,47 142	$\text{lg } a/\text{sen } \alpha$	3,26 242	$\text{lg } b/\text{sen } \beta$	3,47 142
$\text{lg } r$	9,79 100	$\text{lg } 1/r$	0,20 900	$\text{lg } \text{sen } (\beta + \psi)$	9,95 883
$\text{lg } \text{sen } (\varphi + \psi)$	9,29 696	$\text{lg } \text{sen } (\varphi + \psi)$	9,29 696	$\text{lg } \text{sen } (P_b P)$	9,79 965
$\text{lg } r/\text{sen } (\varphi + \psi)$	0,49 404	$\text{lg } 1/r \text{sen } (\varphi + \psi)$	0,91 204	$\text{lg } \Delta y_b$	3,22 990
\pm		\pm			
Número =	+ 3,11 915	Número =	+ 8,16 660		
$\text{ctg } (\varphi + \psi) =$	+ 4,94 695	$\text{ctg } (\varphi + \psi) =$	+ 4,94 695		
$\text{ctg } \varphi =$	+ 8,06 610	$\text{ctg } \psi =$	+ 13,11 355		

$$\alpha = 87^{\circ}19'15'' \quad \beta = 110^{\circ}11'10''$$

$$\text{Chalet Green: } \begin{aligned} x &= +6\,641,820 \\ y &= +2\,346,324 \end{aligned}$$

$$\text{Iglesia Belgrano: } \begin{aligned} x &= +7\,452,649 \\ y &= +708,193 \end{aligned}$$

$$\text{Mirador S. Juan: } \begin{aligned} x &= +9\,736,626 \\ y &= -874,702 \end{aligned}$$

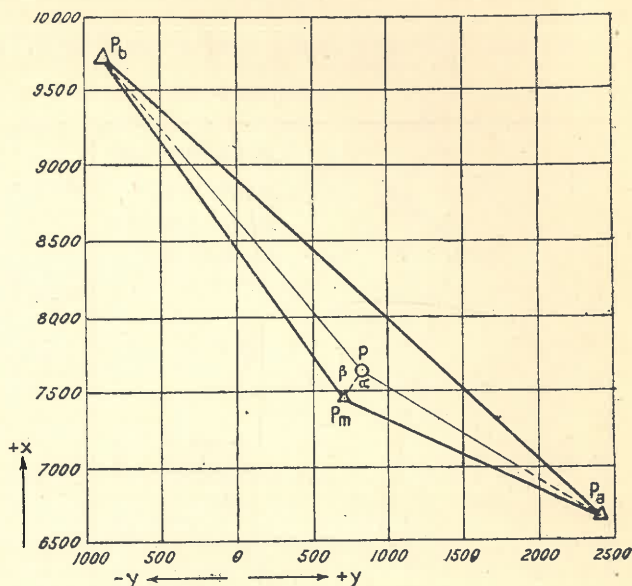
Resultados del cálculo:

Obs. Cobos:

$$x = +7\,646,20$$

$$y = +823,14$$

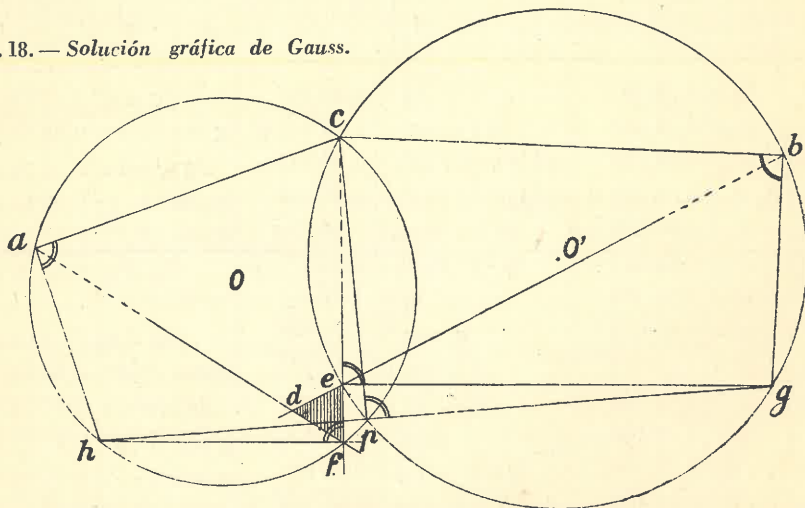
Fig. 17. — Problema de la carta. Se ilustra la solución con la *ctg* de los ángulos φ (en P_a) y ψ (en P_b).



11. SOLUCION GEOMETRICA DE CASSINI-GAUSS, Y SOLUCION ANALITICA 5° POR MEDIO DEL TEOREMA DE LA TANGENTE.

La construcción que pasamos a explicar, ideada por J.D. CASSINI para la solución de un problema astronómico, fué utilizada por C. F. GAUSS para la solución gráfica con la plancheta.

Fig. 18. — Solución gráfica de Gauss.



Oriéntase primero aproximadamente la plancheta por medio de la brújula. Los puntos básicos **A**, **B** y **C** del terreno están designados por **a**, **b** y **c** en el tablero (fig. 18). Por no estar exactamente orientado el tablero, suponemos que los rayos **Aa**, **Bb** y **Cc** producen el triángulo de error **def**.

Las perpendiculares levantadas en **b**, sobre **bc**, y en **e**, sobre **ec**, se cortan en **g**, las levantadas en **a**, sobre **ac**, y en **f**, sobre **fc**, se cortarán en **h**.

Unidos **g** con **h**, tendremos, en el punto de intersección de la perpendicular, bajada desde **c**, sobre **gh**, el punto de estación, **p**, buscado.

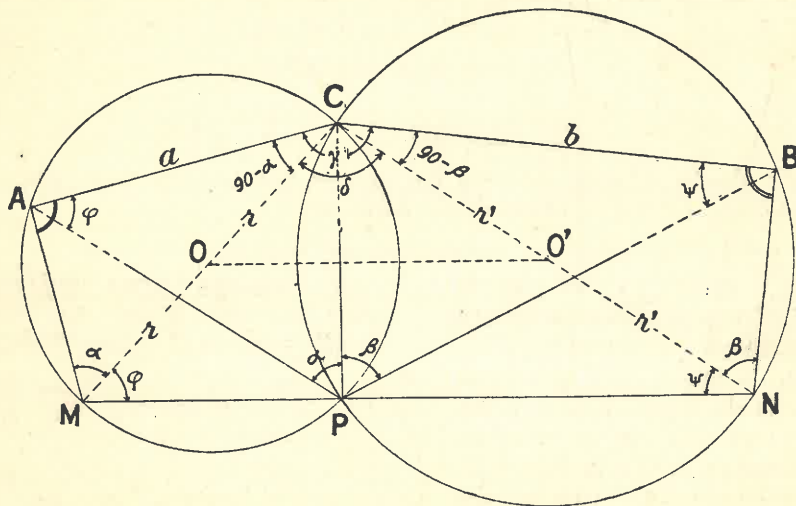


Fig. 19

La solución trigonométrica conduce a la fórmula (6) de KAESTNER quedando con ella el problema del cuadrilátero, **ACBP** (fig. 19), reducido al del triángulo, **M CN**, con los lados $2r$ y $2r'$ y el ángulo comprendido δ conocidos.

Las dos circunferencias **ACP** y **CBP** son los lugares geométricos para todos los puntos desde los cuales los segmentos **AC** y **BC** son visibles bajo los ángulos α y β , respectivamente, siendo, por consiguiente, el punto de intersección, **P**, el nuevo punto buscado, en que dichos ángulos fueron observados.

Aplicando el teorema de la tangente al triángulo **M CN**, tendremos:

$$(42) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)} = \frac{CN - CM}{CN + CM} = \frac{2r' - 2r}{2r' + 2r}$$

$$(43) \quad = \frac{1 - \frac{2r}{2r'}}{1 + \frac{2r}{2r'}}$$

Siendo:

$$(44) \quad 2r = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \quad 2r' = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

y, según ecuación (5):

$$(45) \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \beta}{b \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

$$(46) \quad = \frac{2r}{2r'}$$

resulta de la (43):

$$(47) \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu} = \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu)$$

Tendremos entonces:

$$(48) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu)$$

$$(49) \quad = \operatorname{ctg} \delta \cdot \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu)$$

en donde

$$(50) \quad \delta = \gamma - \{ (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) \}$$

es decir, desde el punto de vista del cálculo, exactamente la misma fórmula fundamental (6) de la solución de *Kästner*.

12. SOLUCION 6ª ESPECIAL PARA LA MAQUINA. DEDUCCION DE LAS CORRESPONDIENTES FORMULAS.

Otra solución del problema de la carta especialmente adaptada al cálculo con la máquina, se deduce en base a la figura 20, determinando las coordenadas (x, y) del punto de intersección P de los dos rayos MN y CP.

He aquí las principales etapas del cálculo.

a) Cálculo de las coordenadas de los 2 puntos auxiliares M y N, en base a las coordenadas de los dos puntos fijos, A y B, y los ángulos α y β medidos en el terreno.

$$\text{Siendo:} \quad y_m - y_a = \overline{AM} \operatorname{sen} (AM),$$

$$\overline{AM} = \overline{AC} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$(AM) = (AC) + 90^\circ,$$

$$\operatorname{sen} (AM) = \overline{\operatorname{cos} (AC)},$$

$$\text{tendremos:} \quad y_m - y_a = \overline{AC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cos} (AC)$$

$$\text{Y siendo:} \quad \overline{AC} \operatorname{cos} (AC) = x_c - x_a$$

resulta:

$$(51) \quad y_m - y_a = (x_c - x_a) \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Análogamente para $(x_m - x_a)$:

$$x_m - x_a = \overline{AM} \operatorname{cos} (AM)$$

$$\text{Siendo:} \quad \operatorname{cos} (AM) = -\operatorname{sen} (AC),$$

$$\text{tendremos:} \quad x_m - x_a = -\overline{AC} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{sen} (AC),$$

$$\text{y por ser:} \quad -\overline{AC} \operatorname{sen} (AC) = -(y_c - y_a),$$

resulta:

$$(52) \quad x_m - x_a = -(y_c - y_a) \operatorname{ctg} \alpha.$$

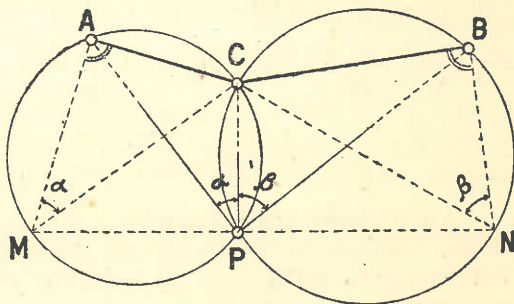


Fig. 20 — Solución especial para la máquina.

Diferencias de coordenadas para el punto N:

$$\begin{aligned}y_n - y_b &= \overline{BN} \operatorname{sen} (BN) \\ \overline{BN} &= \overline{BC} \operatorname{ctg} \beta \\ (BN) &= (BC) - 90^\circ \\ \operatorname{sen} (BN) &= -\operatorname{cos} (BC) \\ \operatorname{cos} (BN) &= +\operatorname{sen} (BC)\end{aligned}$$

Luego:

$$(53) \quad y_n - y_b = -(x_c - x_b) \operatorname{ctg} \beta$$

$$(54) \quad x_n - x_b = + (y_c - y_b) \operatorname{ctg} \beta.$$

Las fórmulas (51) a (54) proporcionan las coordenadas de los puntos **M** y **N**.

b) Resolución del **problema general**: Determinación de las coordenadas del punto de intersección de los dos rayos **MN** y **CP** (fig. 20), estando dadas las coordenadas de los puntos **M, N, C, P**.

Siendo (MN) y (CP), respectivamente, los rumbos de las líneas MN y CP, tendremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} (MN) &= \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}; \quad \operatorname{tg} (CP) = \frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} = -\operatorname{ctg} (MN) \\ &= -\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m}\end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas \overline{MN} y \overline{CP} son:

$$(55) \quad y - y_m = (x - x_m) \operatorname{tg} (MN)$$

$$(56) \quad y - y_c = (x - x_c) \operatorname{tg} (CP)$$

Determinando de estas dos ecuaciones las dos incógnitas, **x** e **y**, se tendrán las coordenadas del punto de intersección **P** buscado.

Restando para eso la (56) de la (55), se eliminará la **y**, resultando la **x**:

$$\begin{aligned}y_c - y_m &= x_c \cdot \operatorname{tg} (CP) - x \cdot \operatorname{tg} (CP) + x \cdot \operatorname{tg} (MN) - x_m \operatorname{tg} (MN) \\ &= x [\operatorname{tg} (MN) - \operatorname{tg} (CP)] + x_c \operatorname{tg} (CP) - x_m \operatorname{tg} (MN) \\ (57) \quad x &= \frac{(y_c - y_m) - x_c \operatorname{tg} (CP) + x_m \operatorname{tg} (MN)}{\operatorname{tg} (MN) - \operatorname{tg} (CP)}\end{aligned}$$

Esta fórmula (57) no es cómoda para el cálculo por figurar en ella las coordenadas de los puntos **C** y **M**, que pueden ser números muy grandes.

Es más conveniente calcular las **diferencias de las coordenadas**, por cuya razón la transformaremos del siguiente modo:

Restando x_c , en ambos miembros de la (57), tendremos:

$$\begin{aligned}x - x_c &= \frac{(y_c - y_m) - x_c \operatorname{tg} (CP) + x_m \operatorname{tg} (MN) - x_c \operatorname{tg} (MN) + x_c \operatorname{tg} (CP)}{\operatorname{tg} (MN) - \operatorname{tg} (CP)} \\ (58) \quad \left\{ \begin{aligned}x - x_c &= \frac{(y_c - y_m) - (x_c - x_m) \operatorname{tg} (MN)}{\operatorname{tg} (MN) - \operatorname{tg} (CP)} \\ y - y_c &= (x - x_c) \operatorname{tg} (CP)\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Substituyendo en estas dos ecuaciones los valores de las tangentes, tendremos:

$$\begin{aligned}
 x - x_c &= \frac{(y_c - y_m) - (x_c - x_m) \cdot \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}}{\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} + \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m}} \\
 &= \frac{(y_c - y_m) (y_n - y_m) (x_n - x_m) - (x_c - x_m) (y_n - y_m)^2}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} \\
 (59) \quad x - x_c &= \frac{(y_c - y_m) (x_n - x_m) - (x_c - x_m) (y_n - y_m)}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} \cdot (y_n - y_m)
 \end{aligned}$$

Y siendo: $y - y_c = -(x - x_c) \cdot \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m}$

resulta:

$$(60) \quad y - y_c = - \frac{(y_c - y_m) (x_n - x_m) - (x_c - x_m) (y_n - y_m)}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} (x_n - x_m)$$

o sea, usando una designación abreviada:

$$(61) \quad \left. \begin{aligned} x - x_c &= + A (y_n - y_m) \\ x &= + x_c + A (y_n - y_m) \end{aligned} \right\} \quad (\text{N}^{\text{os}} 24 \text{ y } 25)$$

$$(62) \quad \left. \begin{aligned} y - y_c &= - A (x_n - x_m) \\ y &= + y_c - A (x_n - x_m) \end{aligned} \right\} \quad \gg 26 \gg 27)$$

en donde

$$(63) \quad A = \frac{(y_c - y_m) (x_n - x_m) - (x_c - x_m) (y_n - y_m)}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} \quad (\text{N}^{\text{os}} 17-23)$$

Para el cálculo numérico no es necesario calcular efectivamente las coordenadas de los dos puntos **M** y **N**.

Las **diferencias de coordenadas** $(y_c - y_m)$, $(x_c - x_m)$, $(y_c - y_n)$, $(x_c - x_n)$, se calculan directamente según las ecuaciones (51) - (54) ligeramente transformadas:

$$y_m - y_a = (x_c - x_a) \operatorname{ctg} \alpha$$

Invirtiendo los signos y agregando y_c , en ambos miembros, tendremos:

$$(64) \quad y_c - y_m = (y_c - y_a) - (x_c - x_a) \operatorname{ctg} \alpha \quad (\text{N}^{\text{os}} 1-5)$$

Y análogamente con las demás ecuaciones, resultando:

$$(65) \quad x_c - x_m = (x_c - x_a) + (y_c - y_a) \operatorname{ctg} \alpha \quad (\text{N}^{\text{os}} 6 \text{ y } 7)$$

$$(66) \quad y_c - y_n = (y_c - y_b) + (x_c - x_b) \operatorname{ctg} \beta \quad (\gg 8 - 12)$$

$$(67) \quad x_c - x_n = (x_c - x_b) - (y_c - y_b) \operatorname{ctg} \beta \quad (\gg 13 \text{ y } 14)$$

De donde sacamos también:

$$(68) \quad y_n - y_m = (y_c - y_m) - (y_c - y_n) \quad (\text{N}^{\circ} 15)$$

$$(69) \quad x_n - x_m = (x_c - x_m) - (x_c - x_n) \quad (\gg 16)$$

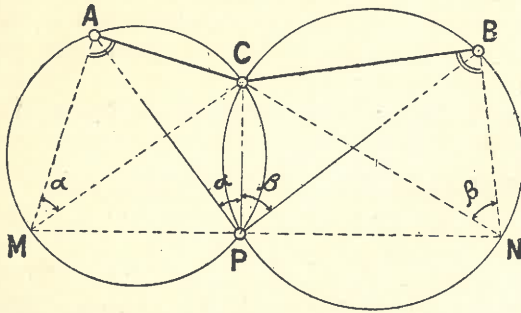
Las 9 ecuaciones (61) - (69) contienen la solución del problema.

c. Comprobación final.

Una prueba segura para el resultado se obtiene por el cálculo de los rumbos (PA), (PB) y (PC), según las operaciones Nros. 28-41, comparándolos con los ángulos α y β medidos en el terreno.

PROBLEMA DE LA CARTA
(Solución especial para la máquina)

PLANILLA DE CÁLCULO N° 7



Punto buscado
P: Obs. Cobos

	α	°	'	''
		87	19	15
	β	110	11	40

N°			
3	ctg α	+	0,04 680
10	ctg β	-	0,36 782
	y_a	+	2 346,324
	y_b	-	874,702
	y_c	+	708,193

A: Ch. Green	x_a	+	6 641,820
B: Mr. San Juan	x_b	+	9 736,626
C: Igl. Belgrano	x_c	+	7 452,649

N°			N°				
1	$(y_c - y_a)$	-	1 638,131	2	$(x_c - x_a)$	+	810,829
4	$-(x_c + x_a) \text{ ctg } \alpha$	-	37,947	6	$+(y_c - y_a) \text{ ctg } \alpha$	-	76,665
5	$y_c - y_m$	-	1 676,078	7	$x_c - x_m$	+	734,164
8	$(y_c - y_b)$	+	1 582,895	9	$(x_c - x_b)$	-	2 283,977
11	$+(x_c - x_b) \text{ ctg } \beta$	+	840,092	13	$-(y_c - y_b) \text{ ctg } \beta$	+	582,220
12	$y_c - y_n$	+	2 422,987	14	$x_c - x_n$	-	1 701,757
15	$(5 - 12) y_n - y_m$	-	4 099,065	16	$(7 - 14) x_n - x_m$	+	2 435,921
20	$(y_n - y_m)^2$	+	16 802,293	17	$(y_c - y_m)(x_n - x_m)$	-	4 082,797
21	$(x_n - x_m)^2$	+	5 933,706	18	$-(x_c - x_m)(y_n - y_m)$	+	3 009,366
22	Denominador	+	22 735,999	19	Numerador	-	1 073,431
23	$A = -0,047 213$						
24	x_c	+	7 452,65	26	y_c	+	708,19
25	$+ A (y_n - y_m)$	+	193,53	27	$- A (x_n - x_m)$	+	115,01
	x	+	7 646,18		y	+	823,20

COMPROBACIONES

N°			N°			N°								
28	$y_a - y$	+	1523,12	31	$y_b - y$	-	1692,90	34	$y_c - y$	-	115,01			
29	$x_a - x$	-	1004,36	32	$x_b - x$	+	2090,45	35	$x_c - x$	-	193,53			
30	tg (PA)	-	1,51 651	33	tg (PB)	-	0,812 21	36	tg (PC)	+	0,59 427			
37	(PA)	123	24	04	38	(PB)	320	54	59	39	(PC)	210	43	18
40	$(39-37) \alpha$	87	19	14	41	$(38-39) \beta$	110	11	41					

13. FORMULARIO TRIGONOMETRICO 14 Y EJEMPLO PRACTICO EN EL CALCULADO.

En el formulario trigonométrico 14 calcúlanse nuevamente las coordenadas del *Obs. Cobos* en base a los elementos consignados en el mismo.

Los números 1-41, de nuestro formulario, correspondientes a las ecuaciones (61) — (69), indican el **orden**, en que deben ejecutarse las distintas operaciones del problema.

Para el calculista práctico será ésta, entre todas, la solución más rápida del problema de la carta.

14. OBSERVACIONES GENERALES DE RECAPITULACION.

Cuando se trata de la determinación de un nuevo punto por intersección hacia adelante, sabemos que se hace estación en dos puntos conocidos, tomando en cada uno la dirección al nuevo punto, mientras que en el problema de la carta se hace estación en el nuevo punto mismo, siendo los puntos bisectados los puntos fijos conocidos. Visando desde el nuevo punto, **P**, a los puntos trigonométricos, **P_a** y **P_m**, se obtendrá el ángulo **P_aPP_m**. El correspondiente lugar geométrico para el punto **P** es una circunferencia con ángulo periférico **P_aPP_m = α**, sobre la cuerda **P_aP_m** línea de unión de los dos puntos dados.

Bisectando un tercer punto, quedará determinada una segunda circunferencia como lugar geométrico de **P**, con ángulo periférico **P_bPP_m = β**, sobre la cuerda **P_bP_m**. Esta segunda circunferencia corta a la primera en dos puntos, de los cuales uno es el punto **P_m** visado, en el que las dos cuerdas se encuentran, siendo el segundo el nuevo punto **P** buscado.

Está, además, determinada, por medio de las indicadas mediciones, una tercera circunferencia, con ángulo periférico $(\alpha + \beta)$ sobre la cuerda **P_aP_b**, de la que prescindimos en nuestras consideraciones.

15. RESTABLECIMIENTO DE UN PUNTO TRIGONOMETRICO PERDIDO POR MEDIO DEL PROBLEMA DE LA CARTA.

En base al material cartográfico disponible u otros elementos de orientación, existentes en la zona, se fijará un lugar aproximado, **P'**, para el punto **P** a restablecer.

Se efectuará en **P'** un problema de la carta, valiéndose en ello, en lo posible, de los mismos puntos básicos utilizados en la determinación original del punto **P**.

A raíz de las coordenadas del nuevo punto, **P'**, así obtenidas, y las del punto **P**, de antemano conocidas, se calcularán la distancia **P'P** y el rumbo (**P'P**), conociendo, así, también el ángulo que la dirección **P'P** forma con cualquiera de las visuales tomadas, elementos éstos suficientes para el restablecimiento del punto **P** perdido.

16. IMPORTANCIA DEL PROBLEMA DE LA CARTA PARA LA NAVEGACION.

El problema de la carta tiene un preponderante papel no sólo en los levantamientos terrestres sino también en los **trabajos hidrográficos** (*):

(*) Ver: *W. Kurze*: "Wie eine Seekarte entstand", *Meereskunde*, Band XVIII, 4, Heft 200.

Los resultados de los **sondeos** que nos proporcionan las cotas (profundidades) de los puntos del relieve submarino, requieren, para su representación cartográfica, los correspondientes elementos de ubicación. Obtienen estos elementos relacionando los lugares en que se efectuaron los sondeos mediante intersección hacia atrás (problema de la carta) con puntos fijos conocidos que pueden ser puntos trigonométricos terrestres preexistentes o señales (boyas) especiales previamente ancladas y determinadas en base a aquéllos, en los casos en que los puntos terrestres no puedan más claramente bisectarse por hallarse muy alejados de la costa los trabajos de sondeo.

Empléase para tales mediciones de vinculación planimétrica el **sextante** (ver Tomo I, 2ª edición, págs. 54-58).

Daremos a continuación algunas breves indicaciones, según KURZE, sobre **procedimientos y rendimientos de trabajo**.



Fig. 21 — Medidores de ángulos, 1 y 2, y sondeador, 3, en el barco hidrógrafo.

Después de haber elegido los 3 puntos básicos más apropiados, el oficial Jefe de los trabajos de sondeo a realizar con el **barco hidrógrafo** a su mando (1, fig. 21) se prepara para la medición del ángulo entre el punto de la derecha y el del medio (ángulo β), el 2 para la medición del ángulo entre el objeto del medio y el de la izquierda (ángulo α). A la voz de "atención" del 1, el 2 responderá "listo", quedando, después del "top" del 1, efectuada, en el mismo instante, la medición del primer par de ángulos buscados.

En el término de un mes, con 18 días de tiempo bueno, el barco hidrógrafo de referencia realizó el levantamiento completo de una superficie de 150 km², en mar playo con 10 200 mediciones de dobles ángulos y 46 100 sondeos, lo que da un **rendimiento diario** de 566 determinaciones de dobles ángulos, o sea cada minuto un nuevo problema de la carta con 9½ horas de trabajo diario.

La utilización cartográfica efectúase según el **procedimiento gráfico** explicado en Cap. V, § 9, N° 7, o mediante el "**Station pointer**" o **corógrafo**, de frecuente uso en los trabajos hidrográficos del navegante.

17. HISTORIA Y DATOS BIBLIOGRAFICOS RELATIVOS AL PROBLEMA DE LA CARTA EN GENERAL Y LAS DISTINTAS SOLUCIONES TRATADAS EN PARTICULAR.

La idea fundamental en que está basada la solución gráfica del problema de la carta, expresada por el teorema de la igualdad de los ángulos inscritos sobre arcos de círculos iguales, es conocida desde más de 2000 años: es el teorema 21 del tercer libro de los *Elementos de EUCLIDES* (300 a. J. C.).

A HIPARCO (160-125 a. J.C.) se debe la primera y a PTOLOMEO la segunda aplicación astronómica del problema.

El geodesta neerlandés Willebrord SNELLIUS fué el primero que empleó el problema de los tres puntos para fines geodésicos: En su célebre obra "*Erathósthene's Batavus*" publicó, en el año 1617, una solución gráfica y otra trigonométrica del problema, siendo esta última todavía bastante complicada.

En el año 1671 el inglés John COLLINS (1624-1683), librero de Oxford, publicó un artículo titulado "*A Solution given by John Collins of a Chorographical Problem*", una nueva solución, valiéndose del punto auxiliar que lleva su nombre. Este recurso resultó muy fecundo en las soluciones gráficas y numéricas no sólo del problema de la carta, sino también de otros similares sobre el cuadrilátero, que trataremos más adelante.

El problema de la carta denominase a menudo "problema de POTHENOT", por haber el matemático POTHENOT repetido, en el año 1692, la solución de SNELLIUS olvidada entonces.

Observaciones complementarias sobre las soluciones tratadas en este párrafo.

Solución 1ª, (de Käestner) con ángulo auxiliar μ .

Esta solución se debe al matemático Abrahán Gotthelf KAESTNER, quien en "*Geometrische Abhandlungen*", Goettingen, año 1790, trató la cuestión.

Solución 2ª con punto auxiliar de Collins.

La utilización del punto de COLLINS para el cálculo numérico, se debe a F.G. GAUSS. Ver: F.G. GAUSS, *Trigonometrische und polygonometrische Rechnungen in der Feldmesskunst*, Halle, 1922.

La solución 3ª adaptada a la máquina de cálculo se debe a KOLL.

Ver: KOLL, *Geodaetisches Rechnen mit der Rechenmaschine*, Stuttgart, 1927.

Solución 4ª (de Tobías Mayer)), calculando directamente $\text{ctg } \varphi$ y $\text{ctg } \psi$:

Las fórmulas (40) y (41) se encuentran por vez primera en las "*Instrucciones técnicas prusianas*", edición del año 1870, para la ejecución de los cálculos trigonométricos y poligonométricos, pág. 177.

La citada instrucción (*Instrucción IX*) en su edición del año 1881, abandonó las fórmulas con la ctg , substituyéndolas por las de KAESTNER, con ángulo auxiliar μ .

La edición del año 1894 de la Instrucción IX adoptó la solución con "punto auxiliar de COLLINS".

En el *Reglamento del Servicio Trigonométrico para Artillería (R. S. T. A.)* del Ejército Argentino se adoptaron las fórmulas con la ctg .

Solución (gráfica) mediante el teorema de la tg.

Esta solución gráfica fué ideada por el astrónomo italiano Domingo CASSINI, quien la utilizó para un problema astronómico.

C. F. GAUSS la empleó en sus trabajos de levantamiento a plancheta, según consta en Tomo IX, pág. 239 de sus obras.

La solución trigonométrica con la tg (solución 5ª) se encuentra por primera vez en H. GRASSMANN, "Manual de Trigonometría", Berlín, 1865.

Solución 6ª, especialmente adaptada a la máquina, se debe a SOSSNA, Ver: "Anleitung des einfachen Rückwaertseinschnitts mittels Rechenmaschine und numerisch-trigonometrischer Tafel", en "Zeitschrift für Vermessungswesen", 1896, págs. 229-272.

§ 4

PROBLEMA DE HANSEN

6

PROBLEMA DEL PAR DE PUNTOS FIJOS INACCESIBLES

no fogosamente

1. CONDICIONES DEL PROBLEMA.

Cuando para determinar la posición de un nuevo punto, P_1 , (fig. 1), sólo se disponga de dos puntos inaccesibles, A y B , y del ángulo AP_1B , en P_1 , entre A y B , se podrá trazar una circunferencia por los 3 puntos, A, B y P_1 , único lugar geométrico para el nuevo punto P_1 .

Pero, eligiendo, además, un segundo punto, P_2 (fig. 1), visible desde P_1 , y en condiciones tales de poder visar desde él también a los puntos conocidos, A y B , y midiendo en P_1 los 2 ángulos α y β (figs. 1-3) y, en P_2 , γ y δ , se dispondrán de los 5 ($= 2n - 3$) elementos (un lado y cuatro ángulos) indispensables para la completa determinación del cuadrilátero ABP_1P_2 .

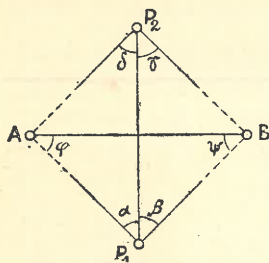


Fig. 1

$AP_1B = (\alpha + \beta) < 180^\circ$
 $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$

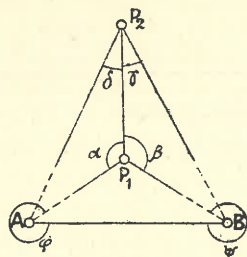


Fig. 2

$AP_1B = (\alpha + \beta) > 180^\circ$
 $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 360^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$

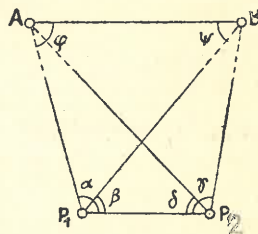


Fig. 3

$AP_1B = (\alpha - \beta) < 180^\circ$
 $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$

2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA Y CARACTERISTICA DE LAS TRES SOLUCIONES QUE SE EJECUTAN.

Dadas las coordenadas x_a, y_a y x_b, y_b , de los dos puntos trigonométricos, A y B , hallar las coordenadas $x_{p1}, y_{p1}, x_{p2}, y_{p2}$ de los dos nuevos pun-

tos P_1 y P_2 , en los cuales se han medido, respectivamente, los ángulos α y β , γ y δ (figs. 1-3).

Con el objeto de profundizar debidamente el importante problema, expondremos a continuación, teórica y prácticamente, **tres distintas soluciones**, una primera con ángulo auxiliar μ , análoga a la 1ª solución del problema de la carta, una segunda, con dos puntos de COLLINS y una tercera, con lado fingido, como ejercicio de preparación para una aplicación más amplia en el problema llamado "triangulación de enlace", que trataremos más adelante.

3. SOLUCION 1ª CON ANGULO AUXILIAR μ . DEDUCCION DE LAS CORRESPONDIENTES FORMULAS.

He aquí las distintas etapas de la marcha del cálculo.

a) **Cálculo de las 2 magnitudes**, rumbo (AB) y lado AB, estando dadas las coordenadas x_a, y_a y x_b, y_b , con cálculo de contralor.

$$(1) \quad \text{tg (AB)} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad (\text{Operaciones N}^\circ\text{s } 1 \text{ á } 6)$$

$$(2) \quad \overline{AB} = \frac{y_b - y_a}{\text{sen (AB)}} = \frac{x_b - x_a}{\text{cos (AB)}} \quad (\quad \gg \quad \gg \quad 7 \gg 10)$$

b) **Cálculo de la semisuma** $\frac{1}{2} (\varphi + \psi)$.

$$(3) \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2} \text{AP}_1\text{B} \quad (\text{figs. 1 y 3})$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 360^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2} \text{AP}_1\text{B} \quad (\text{fig. 2}) \quad (\text{Operaciones 11 á 14})$$

eligiéndose la fórmula (4) en caso de ser ángulo $\text{AP}_1\text{B} > 180^\circ$.

c) **Cálculo del ángulo auxiliar μ .**

Siendo (fig. 1):

$$\overline{P_1P_2} = \frac{\overline{AP_1}}{\text{sen } \delta} \cdot \text{sen } (\alpha + \delta) = \frac{\overline{BP_1}}{\text{sen } \gamma} \cdot \text{sen } (\beta + \gamma)$$

tendremos:
$$\frac{\overline{AP_1}}{\text{sen } \delta} \cdot \text{sen } (\alpha + \delta) = \frac{\overline{BP_1}}{\text{sen } \gamma} \cdot \text{sen } (\beta + \gamma)$$

$$(5) \quad \text{Luego: } \frac{\overline{BP_1}}{\overline{AP_1}} = \frac{\text{sen } \gamma \cdot \text{sen } (\alpha + \delta)}{\text{sen } \delta \cdot \text{sen } (\beta + \gamma)} = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{1}{\text{tg } \mu} = \text{ctg } \mu \quad (\text{N}^\circ\text{s } 15 \text{ á } 22)$$

d) **Cálculo de la semidiferencia** $\frac{1}{2} (\varphi - \psi)$.

$$(6) \quad \text{tg } \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \text{tg } \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \cdot \text{ctg } (45^\circ + \mu)$$

$$(7) \quad = \text{ctg } \frac{1}{2} \text{AP}_1\text{B} \cdot \text{ctg } (45^\circ + \mu) \quad (\text{N}^\circ\text{s } 23 \text{ á } 27)$$

e) **Cálculo de φ y ψ .**

$$(8) \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) + \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \varphi \quad (\text{N}^\circ\text{s } 28 \text{ y } 29)$$

$$(9) \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) - \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \psi$$

f) **Cálculo de los dos lados $\overline{AP_1}$ y $\overline{BP_1}$.**

$$(10) \quad \overline{AP_1} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } (\text{AP}_1\text{B})} \cdot \text{sen } \psi \quad (\text{N}^\circ\text{s } 30 \text{ á } 33)$$

$$(11) \quad \overline{BP_1} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } (\text{AP}_1\text{B})} \cdot \text{sen } \varphi \quad (\text{N}^\circ\text{s } 34 \text{ á } 36)$$

g) Cálculo de contralor.

$$(12) \quad \frac{\overline{BP_1}}{\overline{AP_1}} = \text{ctg } \mu \quad (\text{N}^\circ 37)$$

h) Cálculo de contralor del lado $\overline{P_1 P_2}$.

$$(13) \quad \overline{P_1 P_2} = \frac{\overline{AP_1}}{\text{sen } \delta} \cdot \text{sen } (\alpha + \delta) = \frac{\overline{BP_1}}{\text{sen } \gamma} \cdot \text{sen } (\beta + \gamma) = \quad \text{N}^\circ\text{s } 38 \text{ á } 45)$$

i) Cálculo de los rumbos (AP_1) y $(P_1 P_2)$.

$$(14) \quad (AP_1) = (AB) + \varphi \quad \left. \vphantom{(14)} \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 46 \text{ á } 50)$$

$$(15) \quad (P_1 P_2) = (P_1 A) + \alpha \quad \left. \vphantom{(15)} \right\}$$

j) Cálculo de incrementos y coordenadas.

$$(16) \quad x_{p1} = x_a + \overline{AP_1} \cdot \cos (AP_1) \quad \left. \vphantom{(16)} \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 51 \text{ á } 59)$$

$$(17) \quad y_{p1} = y_a + \overline{AP_1} \cdot \text{sen } (AP_1) \quad \left. \vphantom{(17)} \right\}$$

$$(18) \quad x_{p2} = x_{p1} + \overline{P_1 P_2} \cdot \cos (P_1 P_2) \quad \left. \vphantom{(18)} \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 60 \text{ á } 68)$$

$$(19) \quad y_{p2} = y_{p1} + \overline{P_1 P_2} \cdot \text{sen } (P_1 P_2) \quad \left. \vphantom{(19)} \right\}$$

k) Comprobaciones finales de cálculo.

$$(20) \quad \text{tg } (P_1 B) = \frac{y_b - y_{p1}}{x_b - x_{p1}} = \text{tg } \left\{ (P_1 A) + AP_1 B \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 69 \text{ á } 75)$$

$$(21) \quad \text{tg } (P_2 B) = \frac{y_b - y_{p2}}{x_b - x_{p2}} = \text{tg } \left\{ (P_2 P_1) - \gamma \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 76 \text{ á } 83)$$

$$(22) \quad \text{tg } (P_2 A) = \frac{y_a - y_{p2}}{x_a - x_{p2}} = \text{tg } \left\{ (P_2 P_1) + \delta \right\} \quad (\text{N}^\circ\text{s } 84 \text{ á } 90)$$

Las fórmulas (1) — (22) son generales para cualquier posición de los puntos trigonométricos **A** y **B** y los dos nuevos puntos P_1 y P_2 .

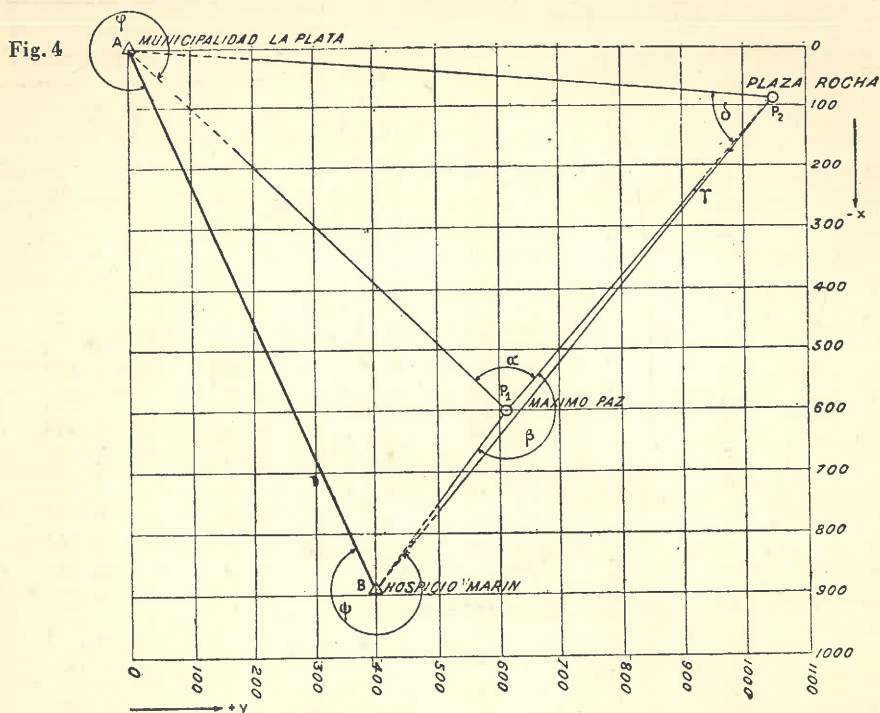
1) Comprobación de medición.

La medición directa de la distancia $P_1 P_2$ proporciona una valiosa prueba de medición para la determinación de los dos nuevos puntos P_1 y P_2 .

4. FORMULARIO TRIGONOMETRICO 15 Y GEODESICO 1 Y EJEMPLOS PRACTICOS EN ELLOS CALCULADOS.

Tratóse de vincular, en el año 1927, por medio de operaciones de carácter expeditivo, los trabajos de levantamiento ejecutados bajo la dirección del autor por los alumnos del "Curso libre de Topografía" de la Universidad de La Plata, con la triangulación del Instituto Geográfico Militar Argentino.

Dada la circunstancia de no existir entonces en dicha ciudad sino un número muy reducido de vértices aéreos, cuya visibilidad desde el nivel de las calles era difícil conseguir, el reconocimiento dió por resultado que sólo era posible obtener los elementos de medición necesarios para un problema de HANSEN y esto todavía en condiciones muy desfavorables, circunstancia ésta que, sin embargo, no sólo no impidió alcanzar la finalidad propuesta, sino que proporcionó la oportunidad de evidenciar gráficamente las consecuencias de tales condiciones (ver: figs. 4 y 9).



Desde el punto P_1 (ver: fig. 9, Trozo de la plancheta "La Plata", y fig. 4), situado cerca de Plaza Máximo Paz, se pudo visar a los vértices trigonométricos "Municipalidad" y "Hospicio Marín" y, además, al segundo nuevo punto P_2 , elegido en Plaza Rocha. Desde este punto se pudo visar a los vértices trigonométricos mencionados y al otro nuevo punto P_1 . Midiéronse, por consiguiente, en P_1 los ángulos α y β y en P_2 γ y δ (figs. 2 y 4).

Como los puntos trigonométricos estaban dados por sus coordenadas geográficas:

$$\begin{aligned} \text{A (Municipalidad La Plata):} \quad \varphi_1 &= -34^{\circ}55'13'',300 \\ \lambda_1 &= -57^{\circ}57'17'',870 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B (Hospicio Marín, La Plata):} \quad \varphi_2 &= -34^{\circ}55'42'',111 \\ \lambda_2 &= -57^{\circ}57'1'',991 \end{aligned}$$

se tuvo que efectuar un cálculo geodésico previo, determinando, en base a ellas, el **acimut** [$(AB) = \alpha_1 = 155^{\circ}35'09''$] y la **distancia** $AB (= 975,07)$, como se puede ver en la planilla de cálculo geodésico ejecutado en nuestro *Form. geod. N.º 1* (pág. 48).

Luego se adoptó un **sistema local de coordenadas planas** con origen en la *Municipalidad*, al que se refirieron las del *Hospicio Marín* mediante el siguiente brevísimo cálculo:

Punto	Rumbo (AB)	Lado AB m	$\log \left\{ \frac{\cos (AB)}{\overline{AB}} \right\}$	$\log \left\{ \frac{\overline{AB} \cdot \cos (AB)}{\overline{AB} \cdot \sin (AB)} \right\}$	Δx Δy	Coordenadas	
						x	y
A			9,959 319 n	2,948 356 n	-887,88	0,00	0,00
B	155°35'9",4	975,07	2,989 037	2,605 332	+403,02	-887,88	+403,02

	log (1)	D	log (2)	D	PARTES PROPORCIONALES	
21° 0'	8,512 081 -10	8	8,509 527 -10	3	3	4
10	073	9	524	3		
20	064	9	521	3		
30	055	8	518	3	1' 40" 0	1' 15" 0
40	047	9	515	3	5 00 1	3 45 1
50	038	9	512	3	8 20 2	6 15 2
22 0	8,512 029	9	8,509 509	3	3 3	8 45 3
10	020	9	506	3		4 4
20	011	9	503	3	8	9
30	002	9	500	3		
40	8,511 993	9	497	3	0' 38" 0	0' 33" 0
50	984	9	494	3	1 52 1	1 40 1
23 0	975	9	8,509 491	3	3 08 2	2 47 2
10	966	9	488	3	4 22 3	3 53 3
20	957	9	485	3	5 38 4	5 00 4
30	8,511 947	10	482	3	6 52 5	6 07 5
40	938	9	479	3	8 08 6	7 13 6
50	929	9	476	3	9 22 7	8 20 7
24 0	8,511 919	10	8,509 473	3	8 8	9 27 8
10	910	9	469	4		9 9
20	900	10	466	3		
30	890	10	466	3		
40	881	9	463	3	10	11
50	871	10	460	3		
25 0	8,511 861	10	8,509 457	4	0' 30" 0	0' 27" 0
10	852	9	453	3	1 30 1	1 22 1
20	842	10	450	3	2 30 2	2 16 2
30	832	10	447	4	3 30 3	3 11 3
40	822	10	443	4	4 30 4	4 05 4
50	812	10	440	3	5 30 5	5 00 5
26 0	8,511 802	10	8,509 437	4	6 30 6	5 55 6
10	792	10	433	3	7 30 7	6 49 7
20	782	10	430	3	8 30 8	7 44 8
30	771	11	427	4	9 30 9	8 38 9
40	761	10	423	3	10 10	9 33 10
50	751	10	420	3		11 11
27 0	8,511 741	10	8,509 417	4		
10	730	11	413	3		
20	720	10	410	4		
30	710	10	406	3		
40	699	11	403	4		
50	689	10	399	3		
28 0	8,511 678	11	8,509 396	4		

(*) Extracto de "Fórmulas y tablas (basadas en las dimensiones de Hayford) para el cálculo de coordenadas geográficas de triangulación de 3°. y 4°. orden" del Instituto Geográfico Militar Argentino.

	log (1)	D	log (2)	D	PARTES PROPORCIONALES.	
28° 0'	8,511 678 -10	11	8,509 392 -10	3	3	4
10	667	10	389	4		
20	657	11	385	3	1' 40" 0	1' 15" 0
30	646	11	382	4	5 00 1	3 45 1
40	635	10	378	4	8 20 2	6 15 2
50	625	11	374	3		8 45 3
29 0	8,511 614	11	8,509 371	4		8 45 4
10	603	11	367	3		
20	592	11	364	4		
30	581	11	360	4	10	11
40	570	11	356	3		
50	559	11	353	4	0' 30" 0	0' 27" 0
30 0	8,511 548	11	8,509 349	4	1 30 1	1 22 1
10	537	11	345	4	2 30 2	2 16 2
20	526	11	341	3	3 30 3	3 11 3
30	515	11	338	4	4 30 4	4 05 4
40	504	11	334	4	5 30 5	5 00 5
50	492	12	330	4	6 30 6	5 55 6
31 0	8,511 481	11	8,509 327	3	7 30 7	6 49 7
10	470	11	323	4	8 30 8	7 44 8
20	459	11	319	4	9 30 9	8 38 9
30	447	12	315	4		9 33 10
40	436	11	311	4		
50	424	12	308	3		
32 0	8,511 413	11	8,509 304	4		
10	401	12	300	4	12	
20	390	11	296	4		
30	378	12	292	4	0' 25" 0	
40	367	11	288	4	1 45 1	
50	355	12	285	4	2 05 2	
33 0	8,511 344	11	8,509 281	4	2 55 3	
10	332	12	277	4	3 45 4	
20	320	12	273	4	4 35 5	
30	308	12	269	4	5 25 6	
40	297	11	265	4	6 15 7	
50	285	12	261	4	7 05 8	
34 0	8,511 273	12	8,509 257	4	7 55 9	
10	261	12	253	4	8 45 10	
20	249	12	249	4	9 35 11	
30	237	12	245	4		
40	225	12	241	4		
50	213	12	237	4		
35 0	8,511 201	12	8,509 233	4		

	log (1)	D	log (2)	D	PARTES PROPORCIONALES.	
35° 0'	8,511 201 -10	12	8,509 233 -10	4	4	5
10	189	12	229	4		
20	177	12	225	4		
30	165	12	221	4	1' 15" 0	4' 00" 0
40	153	12	217	4	3 45 1	3 00 1
50	141	12	213	4	6 15 2	5 00 2
36 0	8,511 129	12	8,509 209	4	8 45 3	7 00 3
10	117	12	205	4	4	9 00 4
20	105	12	201	4		
30	093	13	197	4		
40	080	12	193	4	12	13
50	068	12	189	4		
37 0	8,511 056	13	8,509 185	4	0' 25" 0	0' 23" 0
10	043	12	181	4	1 15 1	1 09 1
20	031	12	177	4	2 05 2	1 55 2
30	019	12	172	5	2 55 3	2 42 3
40	007	12	168	4	3 45 4	3 28 4
50	8,510 994	13	164	4	4 35 5	4 14 5
38 0	982	12	8,509 160	4	5 25 6	5 00 6
10	969	13	156	4	6 15 7	5 46 7
20	957	12	152	4	7 05 8	6 32 8
30	944	13	148	4	7 55 9	7 18 9
40	932	12	144	4	8 45 10	8 05 10
50	920	13	139	5	9 35 11	8 51 11
39 0	8,510 907	12	8,509 135	4	12	9 37 12
10	895	13	131	4		
20	882	12	127	4		
30	870	13	123	5		
40	857	13	118	4		
50	844	12	114	4		
40 0	8,510 832	12	110	4		

Obtuvieronse, así, los siguientes elementos básicos para la solución del problema:

Coordenadas planas:

Municipalidad de La Plata: $x = 0,00$ $y = 0,00$
 Hospicio Marín " " : $x = -887,88$ $y = +403,02$

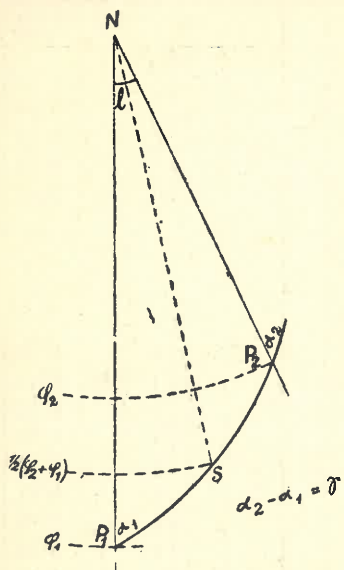
Angulos medidos:

En P_1 (Máximo Paz): $\alpha = 86^\circ 37' 45''$,
 $\beta = 174^\circ 15' 00''$;
 en P_2 (Plaza Rocha): $\gamma = 1^\circ 58' 40''$,
 $\delta = 53^\circ 42' 25''$.

Hemos efectuado en nuestro formulario trigonométrico 15 (págs. 50 y 51) el correspondiente cálculo según las fórmulas (1) — (22).

ACIMUT Y DISTANCIA estando dadas coordenadas geográficas

PLANILLA DE CALCULO N° 1



P₁: Municipalidad La Plata
 P₂: Hospicio Marín, La Plata

$$s \cdot \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1)}{(2)}$$

$$s \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{(1)}$$

$$\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cdot \frac{(1)}{(2)} \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$$

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = l \text{ sen } \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$$

$$s = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{(1) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

(1) = $\frac{\rho}{M}$ (M = radio de curv. en el meridiano)

(2) = $\frac{\rho}{N}$ (N = radio de curv. transversal)

(1) y (2) se sacan de Tablas con argumento $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$

	±	°	'	"	log tg $\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$	9,657 001 n
φ_2	—	34	55	42,111	log cos $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$	9,913 765 ↑
φ_1	—	34	55	13,300	log $\frac{(1)}{(2)}$	0,001 971
$\varphi_2 - \varphi_1$				28,811	cpl. log $(\varphi_2 - \varphi_1)$	8,540 442 n
$\varphi_2 + \varphi_1$	—	69	50	55,411	log 1	1,200 823 ↓
$\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$	—	34	55	27,706	log sen $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$	9,757 771 n
λ_2	—	57	57	01,991	log $(\alpha_2 - \alpha_1)$	0,958 594 n
λ_1	—	57	57	17,870		
$\lambda_2 - \lambda_1 = 1$	+			15,879	$\gamma = (\alpha_2 - \alpha_1)$	± ° ' " 9,091
log $(\varphi_2 - \varphi_1)$		1,459 558 n			$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$	4,546
cpl. log (1)		1,488 794			$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$	155 35 4,821
cpl. log cos $\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$		0,040 685 n			α_2	155 35 0,275
log s		2,989 037			α_1	155 35 9,367
s		975,07 m				

Con el objeto de proporcionar una cómoda guía en la ejecución de las diversas operaciones a que da lugar el problema, las hemos numerado en dicho formulario según el orden en que racionalmente deben efectuarse.

5. SOLUCION 2ª POR MEDIO DE DOS PUNTOS DE COLLINS.

Sean P_a y P_b (fig. 5) los dos puntos fijos dados, P_1 y P_2 los dos nuevos puntos a determinar.

Trazaremos por $P_a P_1 P_b$, análogamente a lo que se hizo en fig. 8 del párrafo anterior, una circunferencia y otra por $P_b P_2 P_a$: la recta $P_1 P_2$ cortará a las dos circunferencias en los dos puntos Q_1 y Q_2 que desempeñarán aquí el mismo papel que los puntos de COLLINS en el problema de la carta, representando, así, el problema de HANSEN un problema de la carta doble, uno con los puntos básicos P_a, P_b, P_2 , con el nuevo punto P_1 ("cálculo I", en planilla de cálculo N° 3) y otro, basado en P_a, P_b, P_1 , con el nuevo punto P_2 ("cálculo II", planilla de cálculo N° 4).

Respecto a las notaciones hay que recordar que se elegirá, en "Cálculo I", al punto P_2 como origen (P_m) y, en "II", al punto P_1 , contando invariablemente los ángulos α y β de la izquierda a la derecha, conforme lo indica la figura 5.

Tanto en "I" como en "II" se conducirá el cálculo primeramente hasta obtener las coordenadas x_q e y_q del respectivo punto de COLLINS Q , las que se trasladarán, con su nueva designación, x_m e y_m de "II" a "I" y viceversa, después de lo cual se continuará con el cálculo separadamente en ambas hojas (págs. 52 y 53).

El hecho de encontrarse, como en nuestro ejemplo, los puntos de COLLINS Q_1 y Q_2 muy próximos uno de otro y los nuevos puntos P_1 y P_2 a gran distancia sobre la prolongación del corto segmento $Q_1 Q_2$ (fig. 8), ilustra un caso desfavorable típico que siempre conviene evitar.

Resultado del cálculo: $P_1: x = -598,80, y = +608,56$ (Cálculo I),
 $P_2: x = -89,82, y = +1053,60$ (" II).

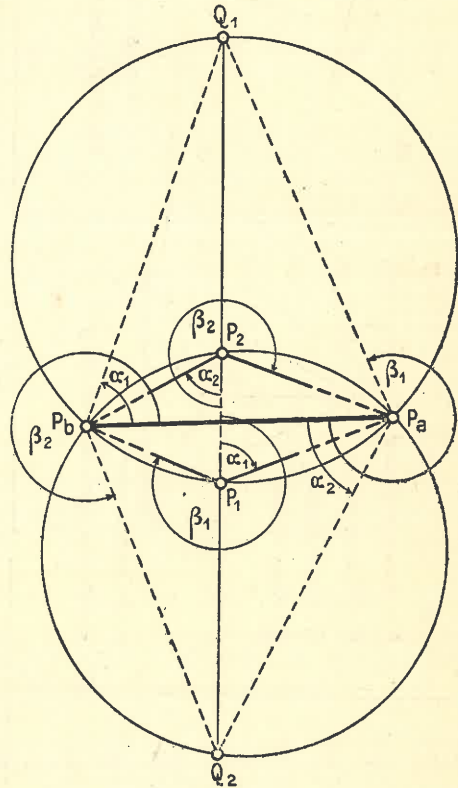


Fig. 5 — Problema de Hansen.
 (con dos puntos de Collins).

Diagrama 1: $\alpha + \beta = AP_1B < 180^\circ$ $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$		Diagrama 2: $\alpha + \beta = AP_1B > 180^\circ$ $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 360^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$		Diagrama 3: $\alpha + \beta = AP_1B < 180^\circ$ $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$	
N.º	x_a	N.º	y_a	N.º	α
2	0,00	1	0,00	11	86
	x_b		y_b		β
	887,88		403,02		174
	$x_b - x_a$		$y_b - y_a$		AP_1B
56	887,88	57	403,02	11	260
	Δx_{p1}		Δy_{p1}		γ
58	598,83	59	608,56		1
	x_{p1}		y_{p1}		δ
65	598,83	66	608,56	15	53
	Δx_{p2}		Δy_{p2}		$\alpha + \delta$
67	508,98		445,05	16	140
	x_{p2}		y_{p2}		$\beta + \gamma$
	89,85		1053,61	12	176
71	289,05	70	205,54		$\frac{1}{2}AP_1B$
79	798,03	78	650,59	13	130
86	89,85	85	1053,61		$90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B$
	$x_b - x_{p1}$		$y_b - y_{p1}$	14	319
	$x_b - x_{p2}$		$y_b - y_{p2}$		$360^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}AP_1B =$
	$x_a - x_{p2}$		$y_a - y_{p2}$		$= \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$
9	log AB			27	319
3	log $(y_b - y_a)$			28	19
7	cpl. log sen (AB)			29	338
8	cpl. log ccs (AB)				φ
4	log $(x_b - x_a)$				ψ
					300

Cálculo de:	
μ y $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$:	
$\text{sen } \gamma \text{ sen } (\alpha + \delta) = \frac{1}{\text{sen } \delta \text{ sen } (\beta + \gamma)} = \frac{BP_1}{AP_1}$	

RUMBOS		RUMBOS	
		°	"
6	(AB)	155	35 09
46	φ	338	57 07
47	(AP ₁)	134	32 16
48	(P ₁ A)	314	32 16
49	α	86	37 45
50	(P ₁ P ₂)	41	10 01
69	(P ₁ A) + AP ₁ B = (P ₁ B)	215	25 01
75	(P ₂ P ₁)	221	10 01
76	(P ₂ P ₁) - γ = (P ₂ B)	219	11 21
77	(P ₂ P ₁) + δ = (P ₂ A)	274	52 26
83			(16)
84			(27)
90			

CÁLCULOS DE CONTRALOR		INCREMENTOS	
5	log tg (AB)	9,65 698 n	8,53 797
10	log AB	2,98 903	9,80 502
30	cpl. log sen AP ₁ B	0,00 552 n	0,09 366
31	log AB/sen AP ₁ B	2,99 455 n	1,18 184
32	log sen ψ	9,93 679 n	9,61 849
33	log AP ₁	2,93 134	67 26 27
34	log AB/sen AP ₁ B	2,99 455 n	45° + μ
35	log sen φ	9,55 528 n	log ctg (45° + μ)
36	log BP ₁	2,54 983	log tg 1/2 (φ + ψ)
			log tg 1/2 (φ - ψ)
54	log BP ₁ /AP ₁	9,61 849	2,77 730 n
38	log AP ₁	2,93 134	9,84 596 n
39	cpl. log sen δ	0,09 366	2,93 134
40	log sen (α + δ)	9,80 502	9,85 296
41	log P ₁ P ₂	2,83 002	log Δ Y _{p1}
42	log BP ₁	2,54 983	log Δ X _{p2}
43	cpl. log sen γ	1,46 203	log cos (P ₁ P ₂)
44	log sen (β + γ)	8,81 816	log P ₁ P ₂
45	log P ₁ P ₂	2,83 002	log sen (P ₁ P ₂)
			log Δ Y _{p2}
			2,70 670
			9,87 668
			2,83 002
			9,81 839
			2,64 841

COMPROBACIONES FINALES		
72	log (y _b - y _{p1})	2,31 289 n
73	log (x _b - x _{p1})	2,46 098 n
74	log tg (P ₁ B)	9,85 191
80	log (y _b - y _{p2})	2,81 330 n
81	log (x _b - x _{p2})	2,90 202 n
82	log tg (P ₂ B)	9,91 128
87	log (y _a - y _{p2})	3,02 268 n
88	log (x _a - x _{p2})	1,95 352
89	log tg (P ₂ A)	1,06 916 n

Form. trig. I'

PROBLEMA DE HANSEN (con puntos de Collins)

Cálculo I

PLANILLA DE CÁLCULO N° 3

x_a	\pm	887,88	y_a	\pm	403,02	α	°	'	"
x_b		0,00	y_b		0,0	β	273	22	15
$x_b - x_a$	$+$	887,88	$y_b - y_a$	$-$	403,02	$360^\circ - \beta$	86	37	45
Δx_a^q	$-$	46,12	Δy_a^q	$-$	87,53	ρ_a^b	335	35	09
Δx_b^q	$-$	933,99	Δy_b^q	$+$	315,48	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	62	12	54
x_q	$-$	934,00	y_q	$+$	315,48	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha \pm 180^\circ$	341	20	09
x_m	$-$	879,48	y_m	$+$	363,15	ρ_m^q	221	09	55
$x_q - x_m$	$-$	54,52	$y_q - y_m$	$-$	47,67	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	35	24	55
Δx_a	$+$	289,07	Δy_a	$+$	205,55	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	134	32	10
Δx_b	$-$	598,79	Δy_b	$+$	608,56	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	300	10	14
x	$-$	598,81	y	$+$	608,57	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b \pm 180^\circ$	338	57	01
x	$-$	598,79	y	$+$	608,56	$\delta = \beta - \alpha \pm 180^\circ$	279	07	15
x (prom.)	$-$	598,80	y (prom.)	$+$	608,565	$= \delta_a + \delta_b$	279	07	15

P_m : Rocha (P_2) P_a : Hospicio Marín P_b : Municipalidad P : Máximo Paz (P_1)

$\log (y_b - y_a)$	2,60 533 n	$\log \Delta x_a^q$	1,66 390 n	$\log \Delta x_a$	2,46 101
$\log (x_b - x_a)$	2,94 835	$\log \cos \rho_a^q$	9,66 853	$\log \cos \rho_a$	9,91 115
$\log \operatorname{tg} \rho_a^b$	9,65 698 n	$\log m$	2,99 455 n	$\log m$	2,99 455 n
$\log m$	2,99 455 n	$\log \operatorname{sen} \alpha$	9,00 082	$\log \operatorname{sen} \delta_b$	9,55 531 n
$\log (y_b - y_a)$	2,60 533 n	$\log \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,94 679	$\log \operatorname{sen} \rho_a$	9,76 305
$\operatorname{cpl.} \log \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,38 370 n	$\log \Delta y_a^q$	1,94 216 n	$\lg \Delta y_a$	2,31 291
$\operatorname{lpl.} \log \operatorname{sen} \delta$	0,00 552 n	$\log \Delta x_b^q$	2,97 034 n	$\log \Delta x_b$	2,77 727 n
$\operatorname{cpl.} \log \cos \rho_a^b$	0,04 068	$\log \cos \rho_b^q$	9,97 654	$\log \cos \rho_b$	9,84 594 n
$\log (x_b - x_a)$	2,94 835	$\log m$	2,99 455 n	$\log m$	2,99 455 n
$\log m$	2,99 455 n	$\log \operatorname{sen} (360^\circ - \beta)$	9,99 925	$\log \operatorname{sen} \delta_a$	9,93 678 n
$\log (y_b - y_m)$	1,67 825 n	$\log \operatorname{sen} \rho_b^q$	9,50 517 n	$\log \operatorname{sen} \rho_b$	9,85 297
$\log (x_b - x_m)$	1,73 656 n	$\log \Delta y_b^q$	2,49 897	$\log \Delta y_b$	2,78 430
$\log \operatorname{tg} \rho_m^q$	9,94 169				

PROBLEMA DE HANSEN (con puntos de Collins)

Cálculo II

PLANILLA DE CALCULO N° 4

x_a	+	0,00	y_a	+	0,00	α	53	42	25
x_b	-	887,88	y_b	+	403,02	β	358	01	20
$x_b - x_a$	-	887,88	$y_b - y_a$	+	403,02	$2\pi - \beta$	1	58	40
Δx_a^q	-	879,46	Δy_a^q	+	363,15	ρ_a^b	155	35	09
Δx_b^q	+	8,39	Δy_b^q	-	39,87	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	157	33	49
x_q	-	879,48	y_q	+	363,15	$\rho_b^q = \rho_a^b \pm \pi - \alpha$	281	52	44
x_m	-	934,00	y_m	+	315,48	ρ_m^q	41	09	55
$x_q - x_m$	+	54,52	$y_q - y_m$	+	47,67	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	94	52	20
Δx_a	-	89,81	Δy_a	+	1053,61	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	39	11	15
Δx_b	+	798,05	Δy_b	+	650,58	$\delta_a = \rho_a^b - \delta_a$	60	42	49
x	-	89,81	y	+	1053,61	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b \pm \pi$	63	36	06
x	-	89,83	y	+	1053,60	$\delta = \beta - \alpha \pm \pi$	124	18	55
x (prom.)	-	89,82	y (prom.)	+	1053,605	$= \delta_a + \delta_b$	124	18	55

P_m : Máximo Paz P_a : Municipalidad P_b : Hospicio Marín P : Rocha (P_2)

$\lg(y_b - y_a)$	Ver cálculo I	$\lg \Delta x_a^q$	2,94 422 _n	$\lg \Delta x_a$	1,95 333 _n
$\lg(x_b - x_a)$		$\lg \cos \rho_a^q$	9,96 581 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	8,92 908 _n ↑
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$		$\lg m$	3,07 207	$\lg m$	3,07 207
$\lg m$	3,07 207	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,90 634	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,95 218
$\lg(y_b - y_a)$	2,60 533 ↑	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,58 168	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,99 843
cpl. $\lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,38 370	$\lg \Delta y_a^q$	2,56 009	$\lg \Delta y_a$	3,02 268
cpl. $\lg \operatorname{sen} \delta$	0,08 304	$\lg \Delta x_b^q$	0,92 358	$\lg \Delta x_b$	2,90 203
cpl. $\lg \cos \rho_a^b$	0,04 068 _n	$\lg \cos \rho_b^q$	9,31 354 ↑	$\lg \cos \rho_b$	9,88 935 ↑
$\lg(x_b - x_a)$	2,94 835 _n	$\lg m$	3,07 207 _n	$\lg m$	3,07 207
$\lg m$	3,07 207	$\lg \operatorname{sen}(2\pi - \beta)$	8,53 797 _n	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,94 061
$\lg(y_q - y_m)$	Ver cálculo I	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	9,99 060	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,80 062
$\lg(x_q - x_m)$		$\lg \Delta y_b^q$	1,60 064	$\lg \Delta y_b$	2,81 330
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$					

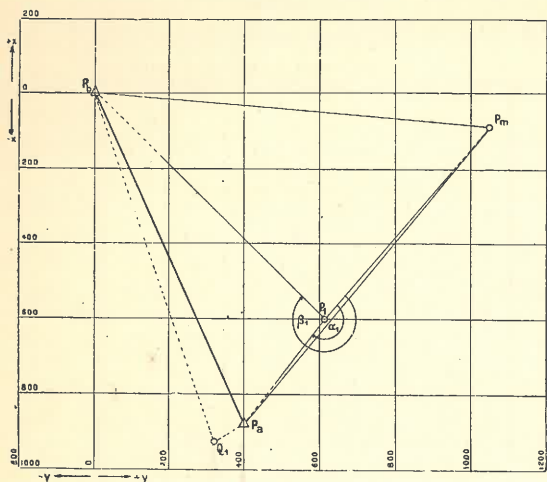


Fig. 6 (Corresponde al cálculo I.)

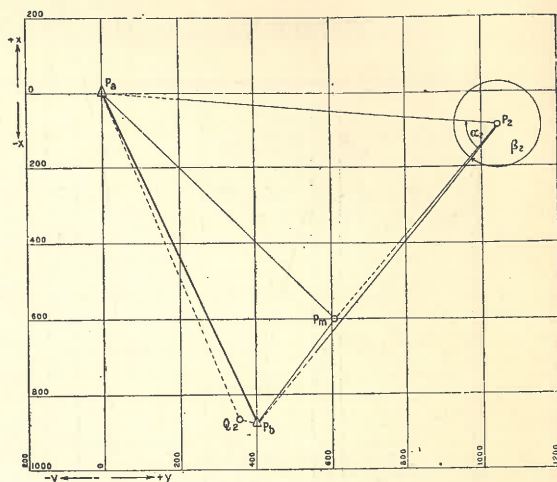


Fig. 7.— (Corresponde al cálculo II.)

Se ilustra el problema de Hansen con 2 puntos de Collins

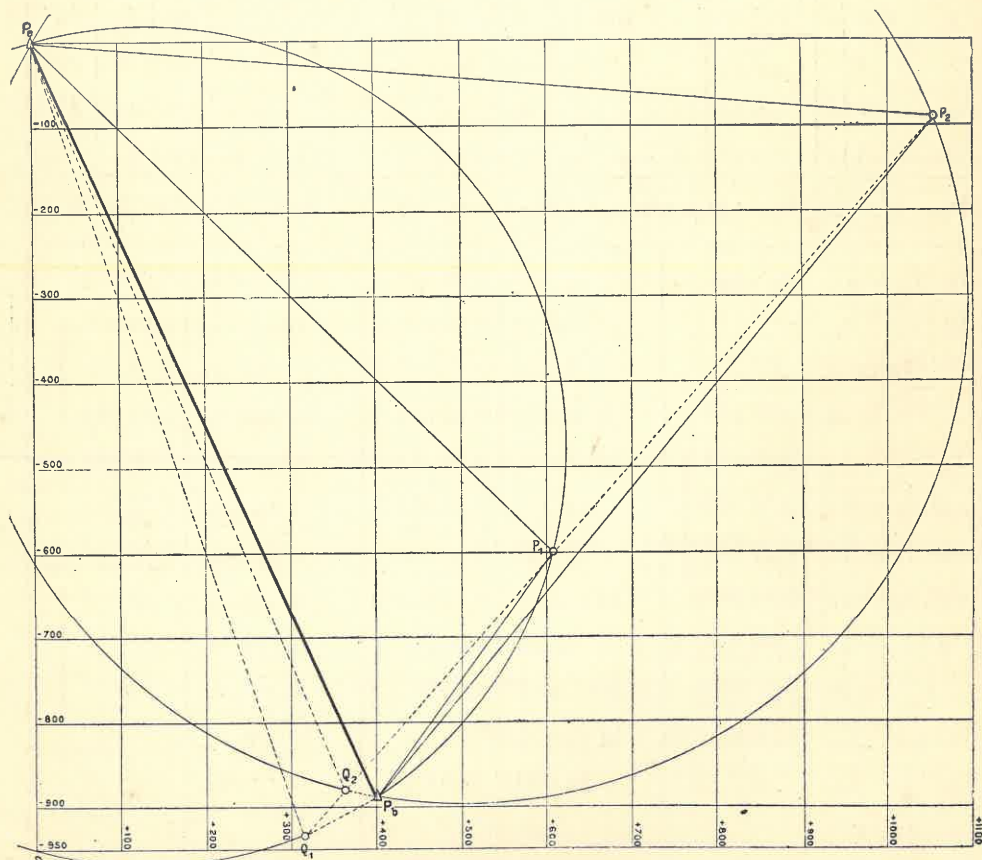


Fig. 8 — Croquis de conjunto sobre el problema de Hansen con 2 puntos de Collins.

6. SOLUCION 3ª CON LADO FINGIDO.

Adoptando para el lado $\overline{P_1 P_2}$ (fig. 10) una longitud arbitraria, $\overline{P_1 P_2} = 1$, por ejemplo, se podrá calcular todo el sistema de triángulos de la figura, partiendo de esa base fingida y con el concurso de los 4 ángulos medidos, que a continuación se repiten (fig. 9):

En P_1 (Plaza Máximo Paz) $\alpha = 86^\circ 37' 45''$ $\beta = 174^\circ 15' 00''$
 En P_2 (Plaza Rocha): $\gamma = 1^\circ 58' 40''$ $\delta = 53^\circ 42' 25''$

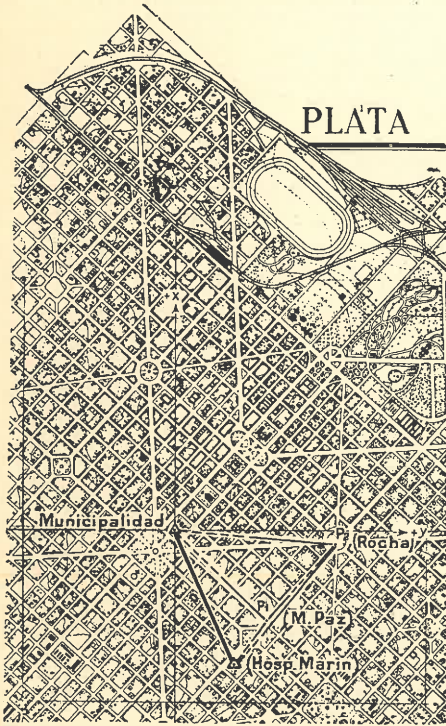


Fig. 9. — Trozo de la plancheta "La Plata", del I. G. M., reducida a 1: 50 000, ilustrando el problema de Hansen calculado.

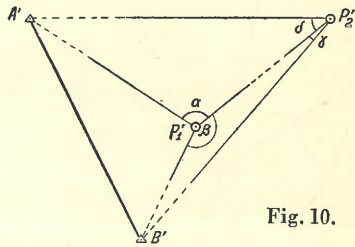


Fig. 10.

Se obtendrá, así, para la longitud del lado dado, \overline{AB} , por medio de las ecuaciones que a continuación detallaremos, un nuevo valor, $\overline{A'B'}$, correspondiente a la reducción a la escala, 1: $\overline{P_1 P_2}$, elegida.

La diferencia q :

$$q = \log AB - \log A'B'$$

representa el logaritmo de la razón de semejanza o factor de proporcionalidad, cantidad constante que, agregada a los logaritmos de los lados de la figura reducida, los transforma en los que corresponden a las verdaderas magnitudes de los mismos.

Para el lado $\overline{P_1 P_2}$ (fig. 10) tendremos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log P_1 P_2 &= \log P_1' P_2' + q \\ &= \log 1 + q = q \end{aligned}$$

He aquí las principales etapas del cálculo numérico:

a) Cálculo de los lados d' , a' , b' , c' por el teorema de los senos (figs. 11 y 12).

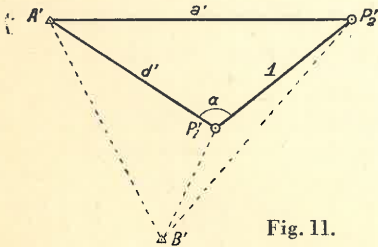


Fig. 11.

$$d' = \frac{1}{\sin(\alpha + \delta)} \cdot \sin \delta$$

$$\begin{aligned} \log 1/\sin(\alpha + \delta) &= 0,19\ 498 \\ \log \sin \delta &= 9,90\ 634 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log d' &= 0,10\ 132 \\ d' &= 1,26\ 277 \end{aligned}$$

$$a' = \frac{1}{\sin(\alpha + \delta)} \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \log 1/\sin(\alpha + \delta) &= 0,19\ 498 \\ \log \sin \alpha &= 9,99\ 925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a' &= 0,19\ 423 \\ a' &= 1,56\ 396 \end{aligned}$$

$$b' = \frac{1}{\text{sen}(\beta + \gamma)} \cdot \text{sen} \beta$$

$$\log 1/\text{sen}(\beta + \gamma) = 1,18 184$$

$$\log \text{sen} \beta = \underline{9,00 082}$$

$$\log b' = 0,18 266$$

$$b' = 1,52 286$$

$$c' = \frac{1}{\text{sen}(\beta + \gamma)} \cdot \text{sen} \gamma$$

$$\log 1/\text{sen}(\beta + \gamma) = 1,18 184$$

$$\log \text{sen} \gamma = \underline{8,53 797}$$

$$\log c' = 9,71 981$$

$$c' = 0,52 458$$

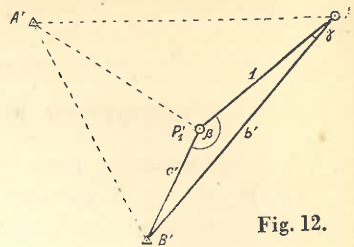


Fig. 12.

b) Cálculo de los ángulos (1) y (2), figura A'P1'B' (fig. 13) y (3) y (4), figura A'P2'B' (fig. 14) por medio del teorema de la tangente.

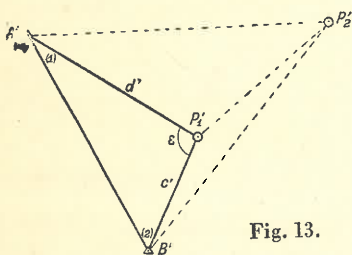


Fig. 13.

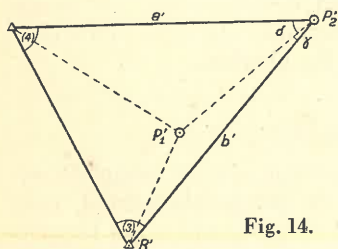


Fig. 14.

$$\text{tg} \frac{(1) - (2)}{2} = \frac{c' - d'}{c' + d'} \cdot \text{tg} \frac{(1) + (2)}{2}$$

$$\epsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 99^\circ 07' 15''$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\epsilon = 40^\circ 26' 22''$$

$$c' + d' = 1,78 735$$

$$c' - d' = -0,73 849$$

$$\log(c' - d') = 0,86 816 \text{ n}$$

$$\text{cpl. log}(c' + d') = 9,74 779$$

$$\log \text{tg} \frac{(1) + (2)}{2} = \underline{9,93 057}$$

$$\log \text{tg} \frac{(1) - (2)}{2} = 9,54 652 \text{ n}$$

$$\frac{(1) - (2)}{2} = -19^\circ 23' 29''$$

$$\frac{(1) + (2)}{2} = 40^\circ 26' 22''$$

$$(1) = 21^\circ 02' 53''$$

$$(2) = 59^\circ 49' 51''$$

$$\text{tg} \frac{(3) - (4)}{2} = \frac{a' - b'}{a' + b'} \cdot \text{tg} \frac{(3) + (4)}{2}$$

$$\log(a' - b') = 8,61 384$$

$$\text{cpl. log}(a' + b') = 9,51 049$$

$$\log \text{tg} \frac{(3) + (4)}{2} = \underline{0,27 721}$$

$$\log \text{tg} \frac{(3) - (4)}{2} = 8,40 154$$

$$\frac{(3) + (4)}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma + \delta}{2} = 62^\circ 09' 28''$$

$$a' + b' = 3,08 682 \quad a' - b' = 0,04 110$$

$$\frac{(3) - (4)}{2} = +1^\circ 26' 38''$$

$$(3) = 63^\circ 36' 06''$$

$$(4) = 60^\circ 41' 50''$$

c) Cálculo del lado A'B' en los dos triángulos A'P1'B' y A'P2'B', fig. 15.

$$A'B' = \frac{d'}{\text{sen}(2)} \cdot \text{sen} \epsilon$$

$$\epsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 99^\circ 07' 15'' \quad \gamma + \delta = 55^\circ 41' 05''$$

$$\log d' = 0,10 132$$

$$\text{cpl log sen}(2) = 0,06 321$$

$$\log \text{sen} \epsilon = \underline{9,99 448}$$

$$\log A'B' = 0,15 901$$

$$A'B' = \frac{a'}{\text{sen}(3)} \cdot \text{sen}(\gamma + \delta)$$

$$\log a' = 0,19 423$$

$$\text{cpl log sen}(3) = 0,04 782$$

$$\log \text{sen}(\gamma + \delta) = \underline{9,91 696}$$

$$\log A'B' = 0,15 901$$

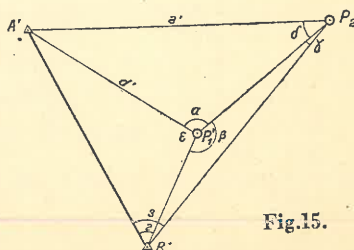


Fig. 15.

d) Cálculo de la razón de semejanza $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = q$, a raíz de las coordenadas x_a, y_a, x_b, y_b , de los puntos dados, A y B.

$\log \overline{AB} = 2,98\ 903$	$\overline{AB} = \frac{y_b - y_a}{\text{sen}(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\text{cos}(AB)}$
$\log (y_b - y_a) = 2,60\ 533$	
$\text{cpl } \log \text{sen}(AB) = 0,38\ 370$	$\log \overline{AB} = 2,98\ 903$
$\text{cpl } \log \text{cos}(AB) = 9,04\ 068\ n$	$\log \overline{A'B'} = 0,15\ 901$
$\log (x_b - x_a) = 2,94\ 835\ n$	$\log \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \log q = 2,83\ 002$
$\log \overline{AB} = 2,98\ 903$	

e) Cálculo de los rumbos (AP_1) , (AP_2) , (BP_1) , (BP_2) , fig. 16.

$(AP_1) = (AB) - (1)$	$(BP_1) = (BA) + (2)$
$(AB) = 155^\circ\ 35'\ 09''$	$(BA) = 335^\circ\ 35'\ 09''$
$(1) = 21^\circ\ 02'\ 53''$	$(2) = 59^\circ\ 49'\ 51''$
$(AP_1) = 134^\circ\ 32'\ 16''$	$(BP_1) = 35^\circ\ 25'\ 00''$
$(AP_2) = (AB) - (4)$	$(BP_2) = (BA) + (3)$
$(AB) = 155^\circ\ 35'\ 09''$	$(BA) = 335^\circ\ 35'\ 09''$
$(4) = 60^\circ\ 42'\ 50''$	$(3) = 63^\circ\ 36'\ 06''$
$(AP_2) = 94^\circ\ 52'\ 19''$	$(BP_2) = 39^\circ\ 11'\ 15''$

f) Cálculo de los incrementos, Δx y Δy , y de las coordenadas $x_{p1}, y_{p1}, x_{p2}, y_{p2}$, de los nuevos puntos P_1 y P_2 .

$x_{p1} = x_a + \Delta x_a^{p1} = x_a + d \cdot \text{cos}(AP_1) = x_b + \Delta x_b^{p1} = x_b + c \cdot \text{cos}(BP_1)$
$y_{p1} = y_a + \Delta y_a^{p1} = y_a + d \cdot \text{sen}(AP_1) = y_b + \Delta y_b^{p1} = y_b + c \cdot \text{sen}(BP_1)$
$x_{p2} = x_a + \Delta x_a^{p2} = x_a + a \cdot \text{cos}(AP_2) = x_b + \Delta x_b^{p2} = x_b + b \cdot \text{cos}(BP_2)$
$y_{p2} = y_a + \Delta y_a^{p2} = y_a + a \cdot \text{sen}(AP_2) = y_b + \Delta y_b^{p2} = y_b + b \cdot \text{sen}(BP_2)$

$\Delta x_a^{p1} = -598,83$	$\Delta x_b^{p1} = +289,05$
$\log \Delta x_a^{p1} = 2,77\ 730\ n$	$\log \Delta x_b^{p1} = 2,46\ 097$
$\log \text{cos } AP_1 = 9,84\ 596\ n$	$\log \text{cos } BP_1 = 9,91\ 114$
$\log d = 2,93\ 134$	$\log c = 2,54\ 983$
$\log \text{sen } AP_1 = 9,85\ 296$	$\log \text{sen } BP_1 = 9,76\ 307$
$\log \Delta y_a^{p1} = 2,78,430$	$\log \Delta y_b^{p1} = 2,31\ 290$
$\Delta y_a^{p1} = +608,56$	$\Delta y_b^{p1} = +205,54$

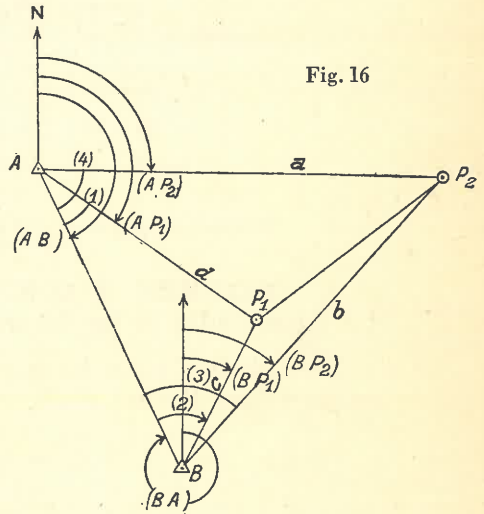


Fig. 16

$\Delta x_a^{P_2} = - 89,81$	$\Delta x_b^{P_2} = + 798,05$
$\log \Delta x_a^{P_2} = \underline{1,95\ 331\ n}$	$\log \Delta x_b^{P_2} = \underline{2,90\ 203}$
$\log \cos (AP_2) = \underline{8,92\ 906\ n}$	$\log \cos (BP_2) = \underline{9,88\ 935}$
$\log a = \underline{3,02\ 425}$	$\log b = \underline{3,01\ 268}$
$\log \sin (AP_2) = \underline{9,99\ 843}$	$\log \sin (BP_2) = \underline{9,80\ 062}$
$\log \Delta y_a^{P_2} = \underline{3,02\ 268}$	$\log \Delta y_b^{P_2} = \underline{2,81\ 330}$
$\Delta y_a^{P_2} = +1053,61$	$\Delta y_b^{P_2} = + 650,58$
$x_a = \underline{0,00}$	$y_a = \underline{0,00}$
$x_b = - 887,88$	$y_b = + 403,02$
$\Delta x_a^{P_1} = - 598,83$	$\Delta y_a^{P_1} = + 608,56$
$\Delta x_b^{P_1} = + 289,05$	$\Delta y_b^{P_1} = + 205,54$
$x_{p1} = - 598,83$	$y_{p1} = + 608,56$
$x_{p1} = - 598,83$	$y_{p1} = + 608,56$
Promedios: $x_{p1} = - 598,83$	$y_{p1} = + 608,56$
$\Delta x_a^{P_2} = - 89,81$	$\Delta y_a^{P_2} = +1053,61$
$\Delta x_b^{P_2} = + 798,05$	$\Delta y_b^{P_2} = + 650,58$
$x_{p2} = - 89,81$	$y_{p2} = +1053,61$
$x_{p2} = - 89,83$	$y_{p2} = +1053,60$
Promedios: $x_{p2} = - 89,82$	$y_{p2} = +1053,60$

7. RESUMEN Y CONTRALOR DE MEDICION.

Coordenadas de los dos nuevos puntos:

P ₁ (Máximo Paz): $x_{p1} = - 598,83$	$y_{p1} = + 608,56$	} 1ª solución
P ₂ (Plaza Rocha): $x_{p2} = - 89,85$	$y_{p2} = + 1053,61$	
$x_{p1} = - 598,80$	$y_{p1} = + 608,56$	} 2ª »
$x_{p2} = - 89,82$	$y_{p2} = + 1053,60$	
$x_{p1} = - 598,86$	$y_{p1} = + 608,56$	} 3ª »
$x_{p2} = - 89,82$	$y_{p2} = + 1053,60$	
Prom. definitivos: $x_{p1} = - 598,83$	$y_{p1} = + 608,56$	
$x_{p2} = - 89,83$	$y_{p2} = + 1053,60$	

Contralor de medición.

Calculóse, en base a estas coordenadas, la distancia $\overline{P_1 P_2}$:

$$\overline{P_1 P_2} = 676,11$$

y se midió, para obtener el necesario **contralor**, dicha distancia directamente, resultando 675,85 metros, es decir, una diferencia de 0,26 m, o sea un **error relativo** de:

$$\frac{0,26}{676} = \frac{1}{2\ 600}$$

Y si comparamos esta diferencia con la que corresponde en **Tabla III**, pág. XII, tomo I, 2ª edición ($t_{III} = 0,36\ m$), vemos que, a pesar de las condiciones desfavorables se pudo alcanzar la precisión exigida para mediciones de catastro urbano.

§ 5

PROBLEMA DE MAREK

6

DE LOS DOS PARES DE PUNTOS FIJOS INACCESIBLES

1. ENUNCIADO DEL PROBLEMA E IDEAS GENERALES SOBRE LA SOLUCION DEL MISMO.

El problema de HANSEN que acabamos de explicar no es sino un caso particular del de MAREK cuyo enunciado es el siguiente: **Estando dadas, las coordenadas de dos pares de puntos trigonométricos inaccesibles, P_a y P_b , y P_a' y P_b'** (fig. 1), **hallar las de los dos nuevos puntos P_1 y P_2 , en el supuesto de poderse observar, en P_1 , las direcciones a P_2, P_a y P_b , y, en P_2 a P_1, P_a' y P_b' .**

En caso de coincidir los puntos P_b y P_a' , P_a y P_b' , estaremos en presencia de un problema de HANSEN tal cual lo hemos tratado en el N° 5 del párrafo anterior.

La solución de este problema, por medio de 2 puntos de COLLINS se reduce, como el de HANSEN, a un doble problema de la carta: Por la medición de los ángulos $P_a P_1 P_b$ y $P_a' P_2 P_b'$ quedarán determinadas las circunferencias que pasan, respectivamente, por P_a y P_b, P_a' y P_b' , lugares geométricos de los dos nuevos puntos P_1 y P_2 , y los puntos de COLLINS, Q_1 y Q_2 . Estos últimos serán obtenidos por bisección hacia adelante por medio de los ángulos α, β , y α', β' , respectivamente.

Sabiendo que los nuevos puntos P_1 y P_2 se hallan sobre la dirección $(Q_1 Q_2)$, se los determina por bisección lateral.

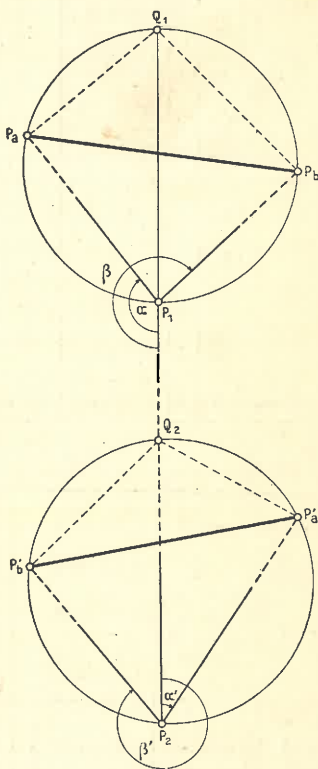


Fig. 1. — Problema de Marek.

2. EJEMPLO PRACTICO (fig. 2); ELEMENTOS BASICOS Y DE MEDICION.

Ángulos medidos en P_1 para el cálculo de las coordenadas de Q_1 :

$$\alpha = \sphericalangle P_2 P_1 P_a = 167^\circ 12' 29''$$

$$\beta = \sphericalangle P_2 P_1 P_b = 214^\circ 41' 42''$$

Ángulos medidos en P_2 para el cálculo de las coordenadas de Q_2 :

$$\alpha' = \sphericalangle P_1 P_2 P_a' = 76^\circ 27' 48''$$

$$\beta' = \sphericalangle P_1 P_2 P_b' = 103^\circ 59' 52''$$

PROBLEMA DE MAREK SIMPLE

Cálculo I

PLANILLA DE CÁLCULO N° 1

x_a	+	6641,82	y_a	+	2346,32	α	167	12	29
x_b	+	6338,20	y_b	+	2425,04	β	214	41	42
$x_b - x_a$	-	303,62	$y_b - y_a$	+	78,72	$360^\circ - \beta$	145	18	18
Δx_a^q	-	61,52	Δy_a^q	+	71,35	ρ_a^b	165	27	53
Δx_b^q	+	242,09	Δy_b^q	-	7,37	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	310	46	11
x_q	+	6580,29	y_q	+	2417,67	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha \pm 180^\circ$	178	15	24
x_m	+	8044,74	y_m	+	3594,92	ρ_m^q	218	47	44
$x_q - x_m$	-	1464,45	$y_q - y_m$	-	1177,25	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	26	00	13
Δx_a	-	382,21	Δy_a	-	186,44	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	73	29	26
Δx_b	-	78,59	Δy_b	-	265,17	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	139	27	40
x	+	6259,61	y	+	2159,88	$\delta_a = \rho_b - \rho_a^b \pm 180^\circ$	88	01	33
x	+	6259,61	y	+	2159,87	$\delta = \beta - \alpha \pm 180^\circ$	227	29	13
(Prom.) x	+	6259,61	(Prom.) y	+	2159,88	$= \delta_a + \delta_b$	227	29	13

$P_m: Q_2$

$P_a: Ch. Green$

$P_b: T. Granaderos$

$P: P_1$

$\lg (y_b - y_a)$	1,89 609	$\lg \Delta x_a^q$	1,78 904 _n	$\lg \Delta x_a$	2,58 230 _n
$\lg (x_b - x_a)$	2,48 233 _n	$\lg \cos \rho_a^q$	9,81 493 [▲]	$\lg \cos \rho_a$	9,95 365 [▲]
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	9,41 376 _n	$\lg m$	2,62 891 _n	$\lg m$	2,62 891 _n
$\lg m$	2,62 891 _n	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,34 520	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,99 974
$\lg (y_b - y_a)$	1,89 609 [▲]	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,87 929 _n	$\lg \cos \rho_a$	9,64 190
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,60 036	$\lg \Delta y_a^q$	1,85 340	$\lg \Delta y_a$	2,27 055 _n
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \delta$	0,13 246 _n	$\lg \Delta y_b^q$	2,38 398	$\lg \Delta x_b$	1,89 538 _n
$\operatorname{cpl.} \lg \cos \rho_a^b$	0,01 412 _n	$\lg \cos \rho_b^q$	9,99 980 _n [▲]	$\lg \cos \rho_b$	9,45 358 [▲]
$\lg (x_b - x_a)$	2,48 233 _n	$\lg m$	2,62 891 _n	$\lg m$	2,62 891 _n
$\lg m$	2,62 891 _n	$\lg \operatorname{sen} (2\pi - \beta)$	9,75 527	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,81 289
$\lg (y_q - y_m)$	3,07 087 _n	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	8,48 319	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,98 172
$\lg (x_q - x_m)$	3,16 567 _n	$\lg \Delta y_b^q$	0,86 737 _n	$\lg \Delta y_b$	2,42 352 _n
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$	9,90 520				

PROBLEMA DE MAREK SIMPLE

Cálculo II

PLANILLA DE CALCULO N° 2

x_a	+	4422,16	y_a	+	4236,17	α'	°	'	''
x_b	+	4542,97	y_b	+	2491,04	β'	103	59	52
$x_b - x_a$	+	120,81	$y_b - y_a$	-	1745,13	$360^\circ - \beta'$	256	00	08
Δx_a^q	+	3622,59	Δy_a^q	-	641,23	ρ_a^b	273	57	36
Δx_b^q	+	3501,77	Δy_b^q	+	1103,87	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta'$	169	57	44
x_q	+	8044,74	y_q	+	3594,92	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha' + 180^\circ$	17	29	48
x_m	+	6580,29	y_m	+	2417,67	ρ_m^q	38	47	44
$x_q - x_m$	+	1464,45	$y_q - y_m$	+	1177,25	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha'$	115	15	32
Δx_a	+	1215,54	Δy_a	-	2576,31	$\rho_b = \rho_m^q + \beta'$	142	47	36
Δx_b	+	1094,74	Δy_b	-	831,15	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	158	42	04
x	+	5637,70	y	+	1659,86	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b + 180^\circ$	48	50	00
x	+	5637,71	y	+	1659,89	$\delta = \beta' - \alpha' + 180^\circ$	207	32	04
(Prom.) x	+	5637,70	(Prom.) y	+	1659,88	$= \delta_a + \delta_b$	207	32	04

$P_m: Q_1$ $P'_a: Iglesia Esp. Santo$ $P'_b: Chim. Martignone$ $P: P_2$

$\lg(y_b - y_a)$	3,24 183 _n	$\lg \Delta x_a^q$	3,55 902	$\lg \Delta x_b$	3,08 477
$\lg(x_b - x_a)$	2,08 211	$\lg \cos \rho_a^q$	9,99 330 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	9,63 013 _n ↑
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	1,15 972 _n	$\lg m$	3,57 796 _n	$\lg m$	3,57 796 _n
$\lg m$	3,57 796 _n	$\lg \operatorname{sen} \alpha'$	9,98 776	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,87 668
$\lg(y_b - y_a)$	3,24 183 _n ↑	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,24 129	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,95 636
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,00 104 _n	$\lg \Delta y_a^q$	2,80 701 _n	$\lg \Delta y_a$	3,41 100 _n
$\operatorname{cpl.} \lg \operatorname{sen} \delta$	0,33 509 _n	$\lg \Delta x_b^q$	3,54 429	$\lg \Delta x_b$	3,03 931
$\operatorname{cpl.} \lg \cos \rho_a^b$	1,16 077	$\lg \cos \rho_b^q$	9,97 943	$\lg \cos \rho_b$	9,90 116 _n ↑
$\lg(x_b - x_a)$	2,08 211	$\lg m$	3,57 796 _n	$\lg m$	3,57 796 _n
$\lg m$	3,57 797 _n	$\lg \operatorname{sen} (2\pi - \beta')$	9,98 690 _n	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,56 019
$\lg(y_q - y_m)$	Ver cálculo I	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	9,47 806	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,78 153
$\lg(x_q - x_m)$		$\lg \Delta y_b^q$	3,04 292	$\lg \Delta y_b$	2,91 968 _n
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$					

Coordenadas de los dos pares de puntos trigonométricos, perteneciente a la triangulación de la Capital Federal (con centro en "Iglesia Flores"), básicos para este problema:

	x	y	
P_a , Chalet Green:	+ 6 641,82	+ 2 346,32	} Datos sacados del Anuario del I.G.M. Vol. V, Tomo I. Años 1920-26, pág. 52.
P_b , Tanque Granaderos:	+ 6 338,20	+ 2 425,04	
$P_{a'}$, Iglesia Espíritu Santo:	+ 4 422,16	+ 4 236,17	
$P_{b'}$, Chalet Martignone:	+ 4 542,97	+ 2 491,04	

Hallar las coordenadas del par de nuevos puntos P_1 y P_2 .

3. BREVES OBSERVACIONES ACLARATORIAS SOBRE LA SOLUCION DEL PROBLEMA Y EL RESULTADO DEL MISMO.

En base a los elementos que acabamos de consignar, se conducirá el cálculo en ambas hojas (I y II, págs. 60 y 61) hasta obtener las coordenadas de Q_1 y Q_2 , respectivamente.

Por encontrarse los dos puntos P_1 y P_2 sobre la dirección $(Q_1 Q_2)$, se consideró en I a P_2 como P_m , y, en II a P_1 como P_m , quedando el problema de MAREK reducido, así, como dijimos, a un doble problema de la carta, con los siguientes resultados:

$$\begin{array}{l} P_1 = + 6\ 259,61 \quad + 2\ 159,88 \\ P_2 = + 5\ 637,70 \quad + 1\ 659,88 \end{array}$$

El croquis, fig. 2, nos ilustra sobre la situación de los puntos trigonométricos dados, los puntos de COLLINS y los nuevos puntos determinados, desprendiéndose del mismo que las condiciones de la determinación son bastante más favorables que las de fig. 8, pág. 54 (problema de HANSEN).

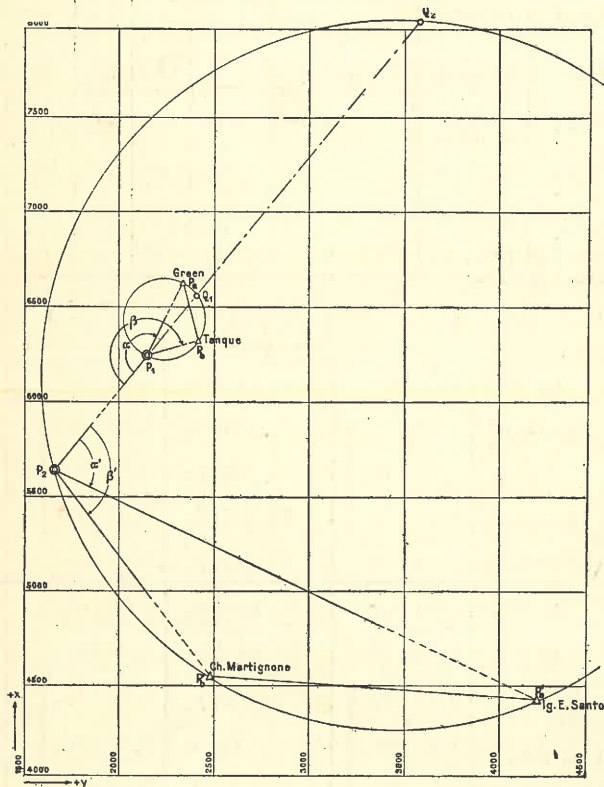


Fig. 2. — Problema de Marek simple (compare fig. 7).

4. CASO DE NO HABER VISIBILIDAD RECÍPROCA ENTRE LOS DOS NUEVOS PUNTOS A DETERMINAR O PROBLEMA DE MAREK CON POLIGONAL.

Cuando no exista intervisibilidad entre los dos nuevos puntos a determinar, se podrá intercalar entre ellos un tiro poligonal $T_1, P_1 \dots P_6, T_2$ (fig. 3), midiendo los lados l y los ángulos poligonales $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$, inclusive los

de arranque, $\angle P_b T_1 P_1$, $\angle P_a T_1 P_1$ y los de cierre, $\angle P_6 T_2 P_b'$, $\angle P_6 T_2 P_a'$, por medio de los cuales la poligonal quedará vinculada con la red trigonométrica.

En los puntos T_1 y T_2 conviene medir, además, las direcciones magnéticas de los lados de arranque y cierre, respectivamente.

El principal objetivo del tiro poligonal es hacernos conocer los ángulos x y x' que la línea $T_1 T_2$ forma con el primer y el último lado del tiro, respectivamente, ángulos éstos que nos servirán para formar los valores $\alpha = \angle T_2 T_1 P_a$, $\beta = \angle T_2 T_1 P_b$, $\alpha' = \angle T_1 T_2 P_a'$ y $\beta' = \angle T_1 T_2 P_b'$, necesarios para la solución del problema.

La distancia $T_1 T_2$, deducida del tiro poligonal, representará un valioso **contralor de medición**.

Efectuados estos cálculos preparatorios, se estará en las condiciones del problema de MAREK simple, que se resolverá en la forma conocida.

Es en el **levantamiento de grandes ríos** que la aplicación de este problema suele ofrecer grandes ventajas.

5. EJEMPLO PRACTICO PARA EL PROBLEMA DE MAREK CON POLIGONAL (fig. 4).

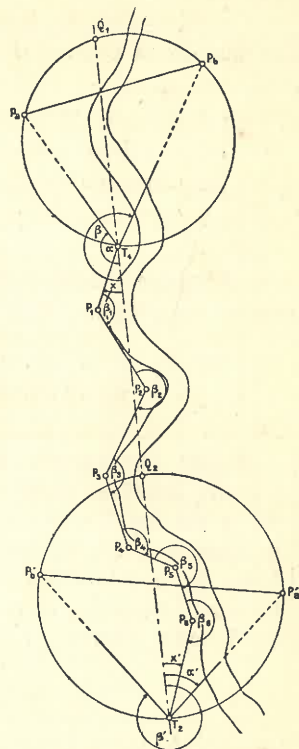


Fig. 3.— Problema de Marek con poligonal.

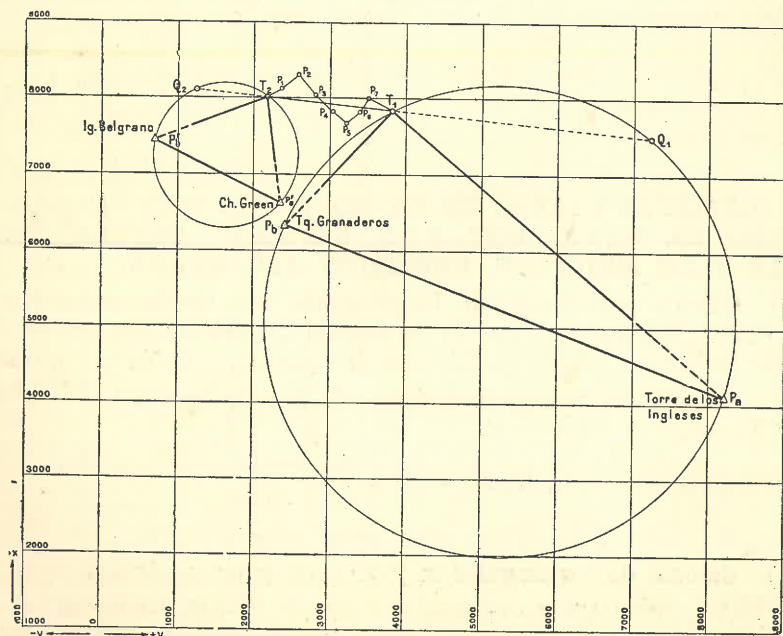


Fig. 4.— Croquis de conjunto sobre el problema de Marek con poligonal.

Coordenadas de los dos pares de puntos trigonométricos dados en el sistema de la Capital Federal:

		x	y		
1 ^r par	P _a :	Torre Reloj Retiro	+ 4 112,34	+ 8 216,75	Cúpula de la torre de los Ingleses.
	P _b :	Tanque Granaderos	+ 6 338,20	+ 2 425,04	
2 ^o par	P _a ':	Chalet Green	+ 6 641,82	+ 2 346,32	
	P _b ':	Iglesia Belgrano	+ 7 452,65	+ 708,19	Pararrayo al lado de la cruz de la cúpula.

Ángulos medidos en los nuevos puntos, T₁ y T₂, (ver croquis, fig. 4) y rumbo magnético (T₂T₁).

$$\begin{aligned} \text{En } T_1: & \angle P_a T_1 P_b = 195^\circ 15' 08'' \\ & \angle P_b T_1 P_a = 287^\circ 26' 37'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En } T_2: & \angle P_a' T_2 P_1 = 112^\circ 18' 12'' \\ & \angle P_b' T_2 P_1 = 187^\circ 58' 52'' \\ & (T_2 P_1) = 57^\circ 34' 08'' \end{aligned}$$

Hallar las coordenadas del par de nuevos puntos, T₁ y T₂, y de los 7 nuevos puntos poligonales, en el mismo sistema de la triangulación de la Capital Federal, con origen en Iglesia Flores.

Los ángulos fueron determinados con teodolito repetidor KERN N° 29 728, perteneciente a la División Topografía del Instituto Geográfico Militar, midiendo cada ángulo en una serie completa y los lados poligonales con cinta de acero CHESTERMAN de 50 metros, en ida y vuelta.

ANGULOS β Y LADOS POLIGONALES MEDIDOS

Punto	Ángulos poligonales β	Lados l
T ₂		210,36 m
P ₁	$\beta_1 = 169^\circ 40' 27''$	293,41 »
P ₂	$\beta_2 = 269 26 23$	341,84 »
P ₃	$\beta_3 = 174 58 12$	315,66 »
P ₄	$\beta_4 = 174 18 26$	242,46 »
P ₅	$\beta_5 = 100 33 55$	225,05 »
P ₆	$\beta_6 = 162 43 12$	219,43 »
P ₇	$\beta_7 = 262 53 40$	354,98 »
T ₁		
[β] = 1681° 50' 31''		

6. DISTINTAS ETAPAS EN LA MARCHA DEL CALCULO DEL PROBLEMA DE MAREK CON POLIGONAL; CONTRALORES DE CALCULO Y DE MEDICION. PRECISION ALCANZADA.

a) Cálculo provisional de la poligonal, con rumbos magnéticos, en nuestro Form. trig. 6 (ver: Planilla de cálculo 3), habiéndose elegido en ello un sistema local (con origen en T₂) para la simplificación de las operaciones.

b) Cálculo del rumbo magnético (T₂T₁) en base a las coordenadas de T₂ y T₁, en el sistema local.

$$\text{Siendo:} \quad \text{tg}(T_2 T_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+ 1 658,94}{- 76,35}$$

$$\text{resulta:} \quad (T_2 T_1) = 92^\circ 38' 06'' \quad (\text{fig. 5})$$

c) Cálculo de los ángulos x y x' (ver croquis, fig. 5).

$$(T_2 P_1) = 57^\circ 34' 08'' \quad (\text{ver: Plan. de cálc. 3}) \quad (T_1 P_7) = 292^\circ 08' 23''$$

$$(T_2 T_1) = 92^\circ 38' 06''$$

$$x' = 35^\circ 03' 58''$$

$$(T_1 T_2) = 272^\circ 38' 06''$$

$$x = 19^\circ 30' 17''$$

Cálculo de coordenadas provisionales en un sistema local, con rumbos magnéticos (ver croquis fig. 5)

Planilla de cálculo N.º 3

Punto	Ang. pol. β Correc. β correg.	Rumbo α	Lado l	\log I sen α	$\cos \alpha$ I sen α	\log I sen α	\log I sen α	\log I sen α	\log I sen α	Δx sin corr. Correc. Δx correg.	Δy sin corr. Correc. Δy correg.	X_n m	Y_n m
Iglesia Belg.													
T ₂	172 01 08											0,00	0,00
P ₁	169 40 27	57 34 08	210,36	9,72 939 2,32 297 9,92 636	2,05 236	2,24 933	2,29 928	2,33 332	2,39 570n	+ 112,81	+ 177,55	+ 112,81	+ 177,55
P ₂	269 26 23	47 14 35	293,41	9,83 180 2,46 748 9,86 584	2,29 928	2,33 332	2,39 570n	2,37 016	2,32 179n	+ 199,20	+ 215,44	+ 312,01	+ 392,99
P ₃	174 58 12	136 40 58	341,84	9,86 188n 2,53 382 9,83 634	2,39 570n	2,37 016	2,49 922	9,87 343	2,32 179n	- 48,71	+ 234,51	+ 63,30	+ 627,50
P ₄	174 18 26	131 39 10	315,66	9,82 257n 2,49 922 9,87 343	2,49 922	9,87 343	2,37 265	2,15 344n	2,32 179n	- 209,79	+ 235,86	- 146,49	+ 863,36
P ₅	100 33 55	125 57 36	242,46	9,76 880n 2,38 464 9,90 818	2,15 344n	2,29 282	2,18 989	2,21 302	2,15 344n	- 142,38	+ 196,25	- 288,87	+ 1059,61
P ₆	162 43 12	46 31 31	225,05	9,83 761 2,35 228 9,86 074	2,29 282	2,21 302	2,18 989	2,28 208	2,15 344n	+ 154,84	+ 163,31	- 134,03	+ 1222,92
P ₇	262 53 40	29 14 43	219,43	9,94 078 2,34 130 9,68 891	2,28 208	2,03 021	2,12 640n	2,03 021	2,28 208	+ 191,46	+ 107,20	+ 57,43	+ 1330,12
T ₁	195 15 08	112 08 23	354,98	9,57 619n 2,55 021 9,96 674	2,12 640n	2,51 695	2,12 640n	2,51 695	2,12 640n	- 133,78	+ 328,82	- 76,35	+ 1658,94
Reloj Retiro		127 23 31											

Form. trig. 6

5. MÜLLER, Compendio de Topografía, tomo III, 2ª edición.

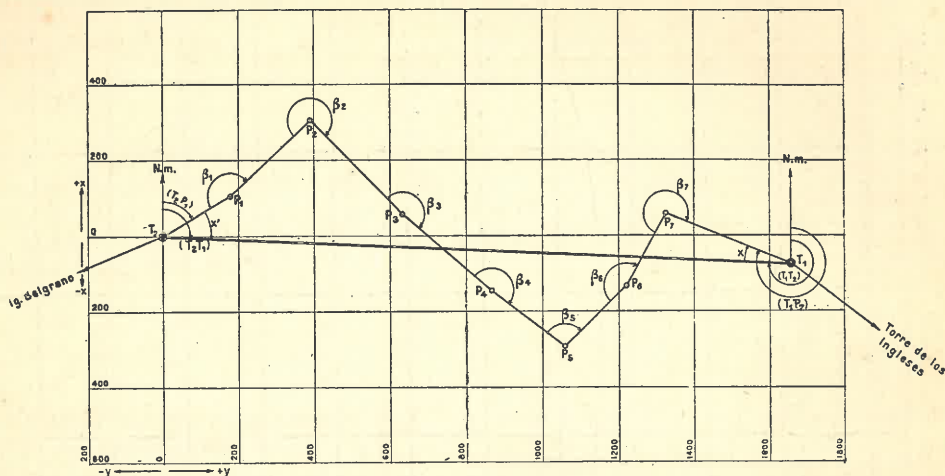


Fig. 5 Poligonal, en sistema local.

d) **Cálculo de los pares de ángulos α , β y α' , β'** , y su aplicación en el Form. trig. 11 (ver: Planillas de cálc. 4 y 5) para la determinación de las coordenadas de Q_1 y Q_2 y las de los dos nuevos puntos, T_1 y T_2 (ver fig. 4).

$$\alpha = x + \sphericalangle P_7 T_1 P_a = 19^\circ 30' 17'' + 195^\circ 15' 08'' = 214^\circ 45' 25''$$

$$\beta = x + \sphericalangle P_7 T_1 P_b = 19^\circ 30' 17'' + 287^\circ 26' 37'' = 306^\circ 56' 54''$$

$$\alpha' = \sphericalangle P_1 T_2 P'_a - x' = 112^\circ 18' 12'' - 35^\circ 03' 58'' = 77^\circ 14' 14''$$

$$\beta' = \sphericalangle P_1 T_2 P'_b - x' = 187^\circ 58' 52'' - 35^\circ 03' 58'' = 152^\circ 54' 54''$$

e) **Cálculo de los rumbos de arranque ($T_2 P'_b$) y de cierre ($T_1 P_a$)** de la poligonal (ver croquis, fig. 4) con el objeto de establecer un necesario **contralor de cálculo** (de cierre angular), en base a las coordenadas de los nuevos puntos T_1 y T_2 , que acabamos de calcular y las de los puntos dados.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(T_2 P'_b) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1467,63}{-573,48} \\ &= 248^\circ 39' 24'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(T_1 P_a) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+4387,99}{-3747,58} \\ &= 130^\circ 29' 55'' \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\text{Rumbo de arranque } (T_2 P'_b) = 248^\circ 39' 24''$$

$$\begin{aligned} \text{Suma de los ángulos poligonales, incluso los de} \\ \text{arranque y cierre: } 1681^\circ 50' 31'' - 8.180^\circ &= 241^\circ 50' 31'' \end{aligned}$$

$$\text{Rumbo de cierre } (T_1 P_a) \text{ de la poligonal} = 130^\circ 29' 55''$$

$$\text{'' '' '' } (T_1 P_a) \text{ del problema de Marek} = 130^\circ 29' 55''$$

f) **Cálculo del rumbo ($T_2 P_1$) del lado inicial y de las coordenadas definitivas del los puntos poligonales (con compensación), en el sistema de la Capital Federal (ver: Planilla de cálculo N° 6, pág. 69 y croquis, fig. 6).**

$$\text{Rumbo } (T_2 P'_b) = 248^\circ 39' 24''$$

$$\text{Angulo } P_1 T_2 P'_b = 172^\circ 01' 08''$$

$$\text{Rumbo } (T_2 P_1) = 60^\circ 40' 32''$$

I

Problema de Marek

Planilla de cálculo N.º 4

x_a	+	4112,34	y_a	+	8216,75	α	214	45	25
x_b	+	6338,20	y_b	+	2425,04	β	306	56	54
$x_b - x_a$	+	2225,86	$y_b - y_a$	-	5791,71	$360^\circ - \beta$	53	03	06
Δx_a^q	+	3404,00	Δy_a^q	-	971,30	ρ_a^b	291	01	22
Δx_b^q	+	1178,14	Δy_b^q	+	4820,33	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta$	344	04	28
x_q	+	7516,34	y_q	+	7245,41	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha + 180^\circ$	256	15	57
x_m	+	8119,24	y_m	+	1249,86	ρ_m^q	95	44	32
$x_q - x_m$	-	602,90	$y_q - y_m$	+	5995,55	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha$	310	29	57
Δx_a	+	3747,58	Δy_a	-	4388,00	$\rho_b = \rho_m^q + \beta$	42	41	26
Δx_b	+	1521,71	Δy_b	+	1403,74	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	340	31	25
x	+	7859,92	y	+	3828,75	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b + 180^\circ$	291	40	04
x	+	7859,91	y	+	3828,78	$\delta = \beta - \alpha + 180^\circ$	272	11	29
(prom.) x	+	7859,92	(prom.) y	+	3828,76	$= \delta_a + \delta_b$	272	11	29

$P_m: T_2$

P_a : Torre Reloj

P_b : Tanque Granad. P : T_1

$\lg(y_b - y_a)$	3,76 281 _n	$\lg \Delta x_a^q$	3,53 199 _n	$\lg \Delta x_a$	3,57 375
$\lg(x_b - x_a)$	3,34 750	$\lg \cos \rho_a^q$	9,98 300 \uparrow	$\lg \cos \rho_a$	9,81 253 \uparrow
$\lg \operatorname{tg} \rho_a^b$	0,41 531 _n	$\lg m$	3,79 304 _n \uparrow	$\lg m$	3,79 304 _n \uparrow
$\lg m$	3,79 305 _n	$\lg \operatorname{sen} \alpha$	9,75 595 _n \uparrow	$\lg \operatorname{sen} \delta_b$	9,96 818 _n \uparrow
$\lg(y_b - y_a)$	3 76 281 _n \uparrow	$\lg \operatorname{sen} \rho_a^q$	9,43 836 _n \downarrow	$\lg \operatorname{sen} \rho_a$	9,88 105 _n \downarrow
cpl. $\lg \operatorname{sen} \rho_a^b$	0,02 992 _n \uparrow	$\lg \Delta y_a^q$	2,98 735 _n	$\lg \Delta y_a$	3,64 227 _n
cpl. $\lg \operatorname{sen} \delta$	0,00 032 _n \uparrow	$\lg \Delta x_b^q$	3,07 120	$\lg \Delta x_b$	3,18 233
cpl. $\lg \cos \rho_a^b$	0,44 522 \downarrow	$\lg \cos \rho_b^q$	9,37 552 _n \uparrow	$\lg \cos \rho_b$	9,86 630 \uparrow
$\lg(x_b - x_a)$	3,34 750 \downarrow	$\lg m$	3,79 304 _n \uparrow	$\lg m$	3,79 304 _n \uparrow
$\lg m$	3,79 304 _n	$\operatorname{gsen}(360 - \beta)$	9,90 264 \uparrow	$\lg \operatorname{sen} \delta_a$	9,52 299 _n \downarrow
$\lg(y_q - y_m)$	3,77 783	$\lg \operatorname{sen} \rho_b^q$	9 98 740 _n \downarrow	$\lg \operatorname{sen} \rho_b$	9,83 126
$\lg(x_q - x_m)$	2,78 025 _n	$\lg \Delta y_b^q$	3,68 308	$\lg \Delta y_b$	3,14 729
$\lg \operatorname{tg} \rho_m^q$	0,99 758 _n				

II

Problema de Marek

Planilla de cálculo N.º 5.

x_a	+	6641,82	y_a	+	2346,32	α'	77	14	14
x_b	+	7452,65	y_b	+	708,19	β'	152	54	54
$x_b - x_a$	+	810,83	$y_b - y_a$	-	1638,13	$360^\circ - \beta'$	207	05	06
Δx_a^q	+	1477,45	Δy_a^q	-	1096,45	ρ_a^b	296	20	04
Δx_b^q	+	666,57	Δy_b^q	+	541,65	$\rho_a^q = \rho_a^b - \beta'$	143	25	10
x_q	+	8119,24	y_q	+	1249,86	$\rho_b^q = \rho_a^b - \alpha' + 180^\circ$	39	05	50
x_m	+	7516,34	y_m	+	7245,41	ρ_m^q	275	44	32
$x_q - x_m$	+	602,90	$y_q - y_m$	-	5995,55	$\rho_a = \rho_m^q + \alpha'$	352	58	46
Δx_a	+	1384,32	Δy_a	-	170,48	$\rho_b = \rho_m^q + \beta'$	68	39	26
Δx_b	+	573,47	Δy_b	+	1467,60	$\delta_a = \rho_a^b - \rho_a$	303	21	18
x	+	8026,14	y	+	2175,84	$\delta_b = \rho_b - \rho_a^b + 180^\circ$	312	19	22
x	+	8026,12	y	+	2175,79	$\delta = \beta' - \alpha' + 180^\circ$	255	40	40
(prom.)x	+	8026,13	(prom.)y	+	2175,82	$= \delta_a + \delta_b$	255	40	40

$P_m : T_1$

$P'_a : \text{Chalet Green}$

$P'_b ; \text{Ig. Belgrano}$

$P : T_2$

$\lg (y_b - y_a)$	3,21 434 _n	$\lg \Delta x_a^q$	3,16 951	$\lg \Delta x_a$	3,14 124
$\lg (x_b - x_a)$	2,90 893	$\lg \cos \rho_a^q$	9,90 473 _n ↑	$\lg \cos \rho_a$	9,99 674 ↑
$\lg \text{tg } \rho_a^b$	0,30 541 _n	$\lg m$	3 27 564 _n ↑	$\lg m$	3,27 564 _n
$\lg m$	3,27 563 _n	$\text{la sen } \alpha'$	9,98 914	$\lg \text{sen } \delta_b$	9,86 886 _n
$\lg (y_b - y_a)$	3,21 434 _n ↑	$\lg \text{sen } \rho_a^q$	9,77 521	$\lg \text{sen } \rho_a$	9,08 716 _n
$\text{cpl. } \lg \text{sen } \rho_a^b$	0,04 758 _n ↑	$\lg \Delta y_a^q$	3,03 999 _n	$\lg \Delta y_a$	2,23 166 _n
$\text{cpl. } \lg \text{sen } \delta$	0,01 371 _n	$\lg \Delta x_b^q$	2,82 385	$\lg \Delta x_b$	2,75 851
$\text{cpl. } \lg \cos \rho_a^b$	0,35 300	$\lg \cos \rho_b^q$	9,88 991 ↑	$\lg \cos \rho_b$	9,56,104 ↑
$\log (x_b - x_a)$	2,50 893	$\lg m$	3,27 564 _n	$\lg m$	3,27 564 _n
$\log m$	3,27 564 _n	$\lg \text{sen}(360 - \beta)$	9,65 830 _n	$\lg \text{sen } \delta_a$	9,92 183 _n
$\lg (y_q - y_m)$	3,77 783 _n	$\lg \text{sen } \rho_b^q$	9,79 978	$\lg \text{sen } \rho_b$	9,96 914
$\lg (x_q - x_m)$	2,78 025	$\lg \Delta y_b^q$	2,73 372	$\lg \Delta y_b$	3,16 661
$\lg \text{tg } \rho_m^q$	0,99 758 _n				

Cálculo de las coordenadas definitivas en el sistema de la Capital Federal (ver croquis fig. 6)

Planilla de cálculo N° 6.

Punto P _n	Ang. pol. β Correcc. β correg. ° ' "	Rumbo α ° ' "	Lado l m	lg { cos α 1 sen α	lg { l.cos α l.sen α	Δx sin cor.	Δy sin cor.	Coord. totales	
						Correcc.	Correcc.	x _n	y _n
						Δx correg.	Δy correg.		
Igl. Belg.									
T ₂	172 01 08	68 39 24						+ 8 026,13	+ 2 175,82
P ₁	169 40 27	60 40 32	210,36	9,68 998	2,01 295	+ 103,03	+ 183,41		
				2,32 297		- 0,01	+ 0,05		
P ₂	269 26 23	50 20 59	293,41	9,94 045	2,26 342	+ 103,02	+ 183,46	+ 8 129,15	+ 2 359,28
				9,80 489	2,27 237	+ 187,23	+ 225,92		
P ₃	174 58 12	139 47 22	341,84	2,46 748		- 0,01	+ 0,08		
				9,88 647	2,35 395	+ 187,22	+ 226,00	+ 8 316,37	+ 2 585,28
P ₄	174 18 26	134 45 34	315,66	9,88 291 _n	2,41 673 _n	- 261,05	+ 220,69		
				2,53 382		- 0,01	+ 0,09		
P ₅	100 33 55	129 04 00	242,46	9,80 996	2,34 378	- 261,06	+ 220,78	+ 8 055,31	+ 2 806,06
				9,84 765 _n	2,34 687 _n	- 222,26	+ 224,14		
P ₆	162 43 12	49 37 55	225,05	2,49 922		- 0,01	+ 0,08		
				9,85 130	2,35 052	- 222,27	+ 224,22	+ 7 833,04	+ 3 030,28
P ₇	262 53 40	32 21 07	219,43	9,79 950 _n	2,18 414 _n	- 152,81	+ 188,25		
				2,38 464		- 0,01	+ 0,06		
T ₁	195 15 08	115 14 47	354,98	9,89 009	2,27 473	- 152,82	+ 188,31	+ 7 680,22	+ 3 218,59
				9,81 137	2,16 365	+ 145,76	+ 171,47		
Torre Reloj	130 29 55	2 203,19 = [1]		2,35 228		- 0,01	+ 0,06		
				9,88 190	2,23 418	+ 145,75	+ 171,53	+ 7 825,97	+ 3 390,12
				9,92 674	2,26 804	+ 185,37	+ 117,42		
				2,34 130		- 0,01	+ 0,05		
				9,72 845	2,06 975	+ 185,36	+ 117,47	+ 8 011,33	+ 3 507,59
				9,62 993 _n	2,18 014 _n	- 151,40	+ 321,08		
				2,55 021		- 0,01	+ 0,09		
				9,95 640	2,50 661	- 151,41	+ 321,17	+ 7 859,92	+ 3 828,76

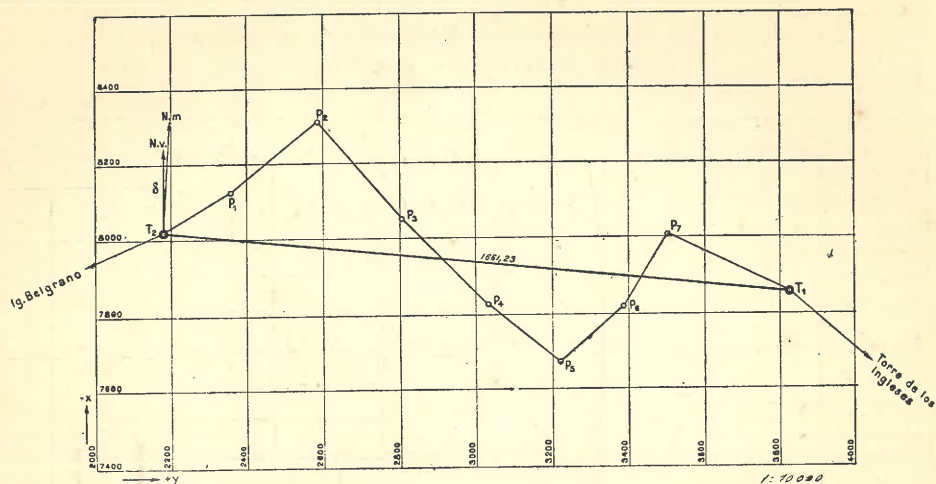


Fig. 6 Poligonal en el sistema de la Capital Federal.

g) Declinación magnética δ .

$$\text{Rumbo } (T_2P_1) = 60^\circ 40' 32''$$

$$\text{Rumbo magnético } (T_2P_1) = 57^\circ 34' 08''$$

$$\text{Declinación magnética } \delta = 3^\circ 06' 24''$$

h) Prueba final de medición lineal. Precisión y tolerancia..

$$\begin{aligned} \text{Distancia } T_2 T_1 \text{ del cálculo del tiro poligonal definitivo} &= 1660,70 \text{ m} \\ \text{" } T_2 T_1 \text{ " problema de Marek} &= 1661,23 \text{ "} \end{aligned}$$

$$\text{Diferencia} = 0,53 \text{ m}$$

de acuerdo también con los resultados del siguiente cálculo de la precisión correspondiente a la Planilla de cálculo N° 6.

$$\begin{aligned} [\Delta x] &= -166,13 & [vy] &= +1652,38 \\ x_{T1} - x_{T2} &= -166,21 & y_{T1} - y_{T2} &= +1652,94 \\ f_x &= + 0,08 & f_y &= - 0,56 \end{aligned}$$

$$f = \sqrt{0,08^2 + 0,56^2} = \pm 0,57 \text{ m}$$

Tolerancia t_{II} para 2200 m = $\pm 0,74$ m (ver pág. XIII, tomo I, 2ª edición).

Vemos que las mediciones efectuadas satisfacen a las exigencias impuestas por nuestras Tolerancias para Catastro urbano.

7. AMPLITUD DE LA APLICABILIDAD DEL METODO PRECONIZADO.

Las explicaciones sobre la solución del problema de Marek que anteceden, incluyen también la de otro no menos importante: **Determinar la posición de dos nuevos puntos, P_1 y P_2** , en base a tres trigonométricos dados, de los cuales se suponen dos visibles desde P_1 , y el tercero desde P_2 conjuntamente con uno de los dos primeros.

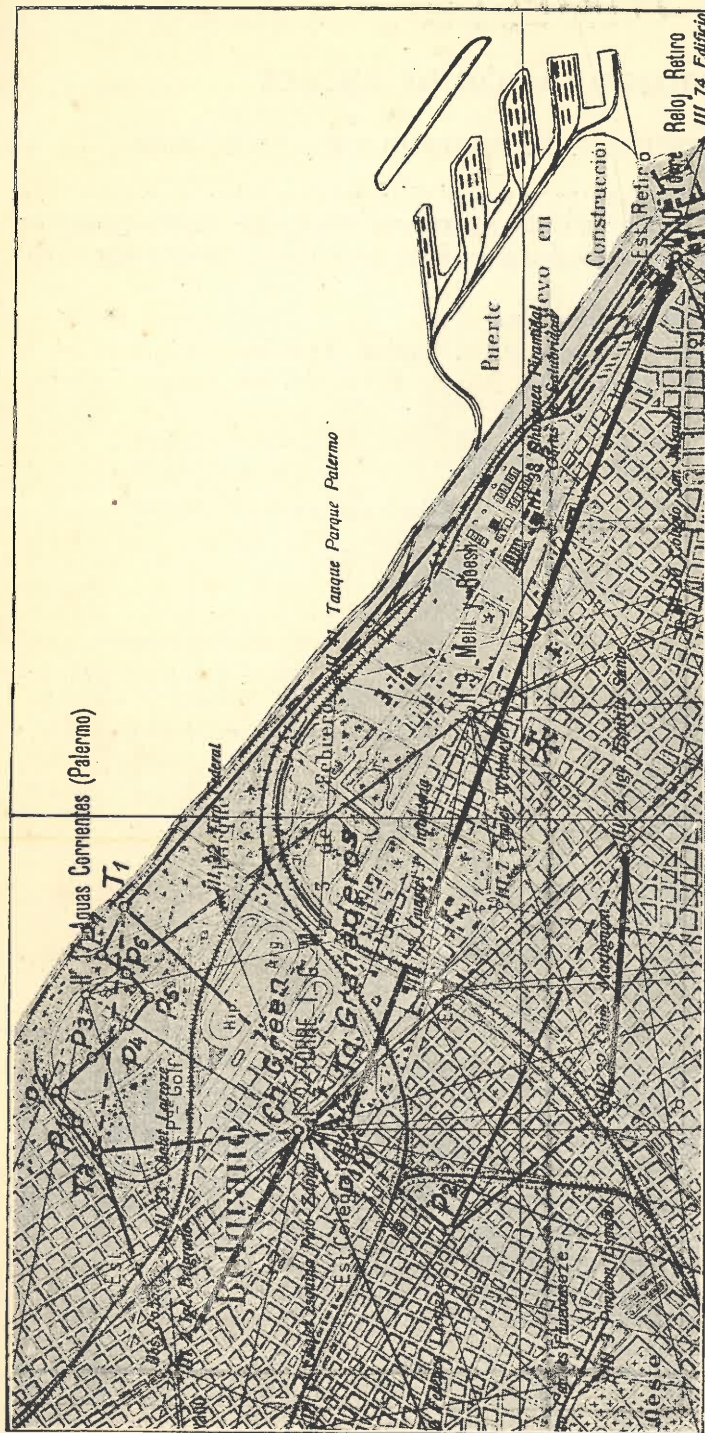


Fig. 7.— Se ilustra sobre un trozo del Plano de triangulación de la ciudad de Buenos Aires (escala 1: 50 000) la situación de los dos problemas de Marek calculados, a saber:
Problema de Marek simple: Se midió en P_1 el ángulo Chalet Green — P_1 — Tanque Granaderos, en P_2 el ángulo Ch. Martignone — P_2 — Iglesia E. Santo. (Las dos bases de triángulo están trazadas con línea gruesa.) Entre P_1 y P_2 hay intervisibilidad.
Problema de Marek con poligonal. Se midió en T_1 el ángulo Tanque Granaderos — T_1 — Torre Reloj Retiro y en T_2 el ángulo Igl. Belgrano — T_2 — Ch. Green. (Las dos bases de triángulo están trazadas con líneas gruesas.) Entre T_2 y T_1 no hay intervisibilidad. Los elementos de orientación de la línea T_2T_1 obtuvieronse mediante la poligonal $T_2P_1P_2P_3P_4P_5P_6T_1$. Indícase, además, la situación del Observatorio Cobos, cerca de la Igl. Belgrano.

§ 6.

TRIANGULACIÓN DE ENLACE

1. CARACTERÍSTICA Y ENUNCIADO DEL PROBLEMA.

Trátase de intercalar, entre dos distantes puntos trigonométricos, una serie de nuevos puntos por medio del **procedimiento de la triangulación**, es decir, por la medición de ángulos solamente. (Ver observación final, pág. 80.)

Ejemplo de aplicación práctica.

Estando dadas, en el sistema de la Capital Federal, con origen en la Iglesia de Flores, las coordenadas x_v , y_v , x_{II} , y_{II} de los puntos trigonométricos P_v y P_{II} :

$$\begin{array}{r} x_v = + 7\ 680,21 \\ x_{II} = + 8\ 316,37 \\ \hline \Delta x = x_{II} - x_v = + 636,16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} y_v = + 3\ 218,59 \\ y_{II} = + 2\ 585,28 \\ \hline \Delta y = y_{II} - y_v = - 633,31 \end{array}$$

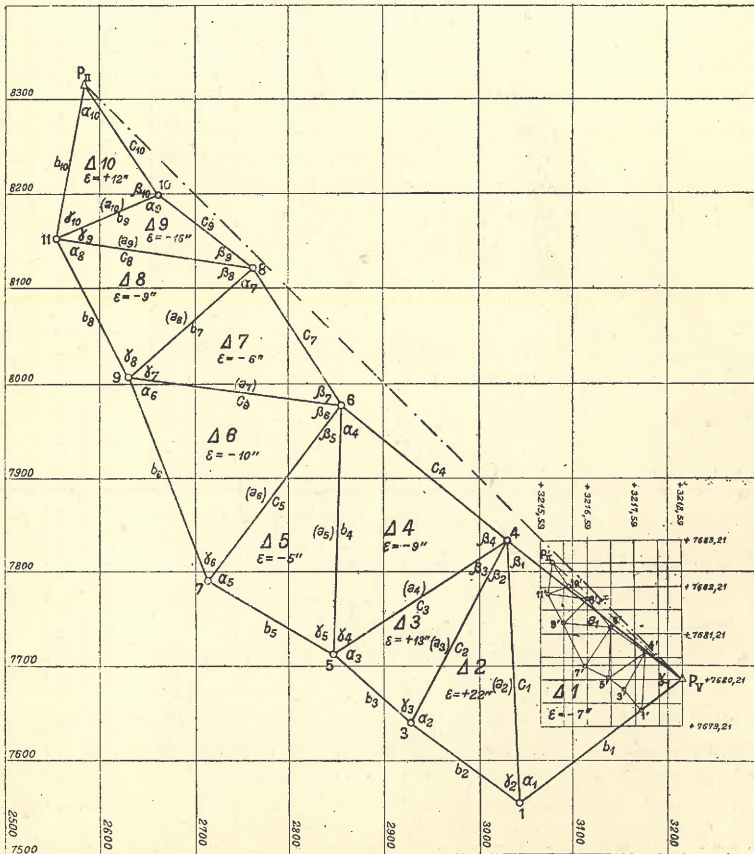


Fig. 1.—Triangulación de enlace.

y habiéndose medido, después de determinar el rumbo magnético (*) del lado de salida P_v-1 :

$$(P_v-1) = 232^\circ 22' 30''$$

en los 10 nuevos vértices los ángulos α , β y γ , que figuran en la planilla de cálculo página 74, hallar las coordenadas de esos 10 nuevos puntos, en el sistema general de la Capital Federal, con el necesario contralor de cálculo.

2. DISTINTAS ETAPAS DE LA MARCHA DEL CALCULO.

a) Cálculo de la distancia $\overline{P_v P_{II}}$ y del rumbo $(P_v P_{II})$.

$$\overline{P_v P_{II}} = \frac{\Delta y}{\text{sen}(P_v P_{II})} = \frac{\Delta x}{\text{cos}(P_v P_{II})} \quad \text{tg}(P_v P_{II}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \log \overline{P_v P_{II}} &= 2,95\ 311 \\ \log (y_{II} - y_v) &= 2,80\ 162\ n \uparrow \\ \text{cpl. } \log \text{sen}(P_v P_{II}) &= 0,15\ 149\ n \uparrow \\ \text{cpl. } \log \text{cos}(P_v P_{II}) &= 0,14\ 954 \downarrow \\ \log (x_{II} - x_v) &= 2,80\ 357 \downarrow \\ \log \overline{P_v P_{II}} &= 2,95\ 311 \\ \log \text{tg}(P_v P_{II}) &= 9,99\ 805\ n \\ (P_v P_{II}) &= 315^\circ 07' 43'' \end{aligned}$$

b) Compensación de los 10 errores de cierre de triángulo, ϵ .

Estando medidos todos los ángulos con la misma precisión, los errores de cierre de triángulo ϵ serán repartidos uniformemente sobre los tres ángulos de cada triángulo Δ . (Ver: Planilla de cálculo N° 1).

Por ejemplo:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 179^\circ 59' 53'' = 180^\circ - 7'' \text{ (error).}$$

Luego, ángulos corregidos: $\alpha_1' = \alpha_1 + 2''$; $\beta_1' = \beta_1 + 2''$; $\gamma_1' = \gamma_1 + 3''$.

(Ver: "C. de C.", pág. 234).

c) Cálculo de los lados de triángulos de la figura semejante:

$$P_v - 1' - 3' - 5' - 7' - 9' - 11' - P'_{II} - 10' - 8' - 6' - 4' - P_v$$

en el supuesto de ser:

$$\overline{P_v - 4'} = 1 \text{ (ver figura).}$$

Partiendo de esta base fingida, $\overline{P_v - 4'} = 1$, se calcularán por el teorema de los senos todos los demás lados de triángulos de la cadena, conforme se muestra en la Planilla de cálculo N° 1.

d) Cálculo de las coordenadas x' e y' de los puntos de la figura fingida reducida.

En base a los lados a', b', \dots , calculados en columnas (4) y (5) de la Planilla de cálculo N° 1, y el rumbo de arranque $(P_v-1) = 232^\circ 22' 30''$ (ver N° 1), se calcularán las coordenadas de los vértices de la figura fingida. El contorno de esta figura lo forman dos poligonales, arrancando ambas en P_v , pasando una por los vértices de números impares, 1', 3', 5', ..., y la otra por los de números pares, 4, 6, 8, 10, cerrando ambas en P'_{II} , obteniéndose, así, para este punto dos pares de valores, cuyas pequeñas diferencias expresan el efecto de los errores de redondeo. En nuestro Form.

(*) Podía haberse elegido un rumbo cualquiera.

Planilla de cálculo N.º 1

N.º del Δ	Angulos medidos α, β, γ	Corr.	Angulos corregidos α', β', γ'	$\log m$ $\log \text{sen}$ $\log m$	$a' = m. \text{sen } \alpha'$ $b' = m. \text{sen } \beta'$ $c' = m. \text{sen } \gamma'$	$a = d. a'$ $b = d. b'$ $c = d. c'$			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)			
Δ_1		o ' "	"	o ' "	0,07 805	d	2,38 475		
	α_1	56 40 08	+ 2	56 40 10	9,92 195	a'	0,00 000	a	2,38 475
	β_1	49 26 17	+ 2	49 26 19	9,88 064	b'	9,95 869	b	2,34 344
	γ_1	73 53 28	+ 3	73 53 31	9,98 261	c'	0,06 066	c	2,44 541
	Suma	179 59 53	+ 7	180 00 00	0,06 649				
Δ_2	α_2	99 22 17	- 7	99 22 10	9,99 417	a'	0,06 066	a	2,44 541
	β_2	29 28 37	- 7	29 28 30	9,69 201	b'	9,75 850	b	2,14 325
	γ_2	51 09 28	- 8	51 09 20	9,89 145	c'	9,95 794	c	2,34 269
	Suma	180 00 22	-22	180 00 00	9,97 111				
Δ_3	α_3	75 57 37	- 4	75 57 33	9,98 683	a'	9,95 794	a	2,34 269
	β_3	28 35 48	- 4	28 35 44	9,68 000	b'	9,65 111	b	2,03 586
	γ_3	75 26 48	- 5	75 26 43	9,98 583	c'	9,95 694	c	2,34 169
	Suma	180 00 13	-13	180 00 00	0,06 021				
Δ_4	α_4	52 01 54	+ 3	52 01 57	9,89 673	a'	9,95 694	a	2,34 169
	β_4	73 06 47	+ 3	73 06 50	9,98 086	b'	0,04 107	b	2,42 582
	γ_4	54 51 10	+ 3	54 51 13	9,91 259	c'	9,97 280	c	2,35 755
	Suma	179 59 51	+ 9	180 00 00	0,04 342				
Δ_5	α_5	84 02 40	+ 2	84 02 42	9,99 765	a'	0,04 107	a	2,42 582
	β_5	35 51 45	+ 1	35 51 46	9,76 778	b'	9,81 120	b	2,19 595
	γ_5	60 05 30	+ 2	60 05 32	9,93 793	c'	9,98 135	c	2,36 610
	Suma	179 59 55	+ 5	180 00 00	0,03 785				
Δ_6	α_6	61 24 06	+ 4	61 24 10	9,94 350	a'	9,98 135	a	2,36 610
	β_6	59 35 49	+ 3	59 35 52	9,93 576	b'	9,97 361	b	2,35 836
	γ_6	58 59 55	+ 3	58 59 58	9,93 307	c'	9,97 092	c	2,35 567
	Suma	179 59 50	+10	180 00 00	9,97 561				
Δ_7	α_7	81 35 34	+ 2	81 35 36	9,99 531	a'	9,97 092	a	2,35 567
	β_7	49 50 00	+ 2	49 50 02	9,88 319	b'	9,85 880	b	2,24 355
	γ_7	48 34 20	+ 2	48 34 22	9,87 494	c'	9,85 055	c	2,23 530
	Suma	179 59 54	+ 6	180 00 00	9,94 827				
Δ_8	α_8	54 28 12	+ 3	54 28 15	9,91 053	a'	9,85 880	a	2,24 355
	β_8	48 28 06	+ 3	48 28 09	9,87 425	b'	9,82 252	b	2,20 727
	γ_8	77 03 33	+ 3	77 03 36	9,98 883	c'	9,93 710	c	2,32 185
	Suma	179 59 51	+ 9	180 00 00	9,99 527				
Δ_9	α_9	118 59 50	+ 5	118 59 55	9,94 183	a'	9,93 710	a	2,32 185
	β_9	29 28 06	+ 6	29 28 12	9,69 194	b'	9,68 721	b	2,07 196
	γ_9	31 31 48	+ 5	31 31 53	9,71 847	c'	9,71 374	c	2,09 849
	Suma	179 59 44	+16	180 00 00	9,85 215				
Δ_{10}	α_{10}	43 09 30	- 4	43 09 26	9,83 506	a'	9,68 721	a	2,07 196
	β_{10}	82 08 12	- 4	82 08 08	9,99 589	b'	9,84 804	b	2,23 279
	γ_{10}	54 42 30	- 4	54 42 26	9,91 180	c'	9,76 395	c	2,14 870
	Suma	180 00 12	-12	180 00 00					

trig. 6 (Planilla de cálculo 2, págs. 76 y 77) hemos efectuado este cálculo con los siguientes resultados:

$$\begin{array}{rcl} x_{II}' & = & + 2,49\ 282 \\ & = & + 2,49\ 281 \\ \text{Promedios: } x_{II}' & = & + 2,49\ 282 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y_{II}' & = & - 2,73\ 613 \\ & = & - 2,73\ 619 \\ y_{II}' & = & - 2,73\ 616 \end{array}$$

e) **Cálculo de la razón de semejanza d (factor de proporcionalidad o factor de aumento) y del ángulo de giro x .**

En base a las coordenadas de los puntos P_V (para facilitar el cálculo pusimos $x_V = 0$ e $y_V = 0$) y las de P_{II}' que acabamos de calcular, se determinarán la distancia $P_V P_{II}'$ y el rumbo ($P_V P_{II}'$) del modo conocido:

$$\begin{array}{r} \log P_V P_{II}' = 0,56\ 836 \\ \log (y_{II}' - y_V) = 0,43\ 714 \uparrow \\ \text{cpl } \log \text{ sen } (P_V P_{II}') = 0,13\ 122 \uparrow \\ \text{cpl } \log \text{ cos } P_V P_{II}' = 0,17\ 168 \\ \log (x_{II}' - x_V) = 0,39\ 669 \downarrow \\ \log P_V P_{II}' = 0,56\ 837 \\ \log \text{ tg } (P_V P_{II}') = 0,04\ 045 \text{ n} \\ (P_V P_{II}') = 312^\circ 20' 07'' \end{array}$$

Luego:

$$\text{Razón de semejanza, } d = \frac{P_V P_{II}}{P_V P_{II}'}$$

$$\log d = 2,95\ 311 - 0,56\ 836 = \underline{\underline{2,38\ 475}}$$

$$\begin{aligned} \text{Angulo de giro, } x &= (P_V P_{II}) - (P_V P_{II}') = \\ &= 315^\circ 07' 43'' - 312^\circ 20' 07'' = + 2^\circ 47' 36'' \text{ (ver fig. 1).} \end{aligned}$$

que expresa el valor de la **declinación magnética** en la zona y la época de la determinación.

f) **Cálculo de los logaritmos de las longitudes verdaderas de los lados de triángulos.**

Los logaritmos de las verdaderas magnitudes de los lados de triángulos, obtiéndose fácilmente sumando a los de la figura fingida [columna (5) de la planilla 1] el logaritmo del factor de proporcionalidad ($\log d = 2,38\ 475$), conforme queda ejecutado en columna (6) de la citada planilla.

g) **Cálculo de los rumbos de arranque, (P_V-1) y (P_V-4), para el cálculo de coordenadas definitivas.**

$$\begin{array}{rcl} (P_V-1)' & = & 232^\circ 22' 30'' \\ \text{Angulo de giro, } x & = & 2^\circ 47' 36'' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (P_V-4)' & = & 306^\circ 16' 01'' \\ x & = & 2^\circ 47' 36'' \end{array}$$

$$\text{Rumbos de arranque: } (P_V-1) = 235^\circ 10' 06'' \qquad (P_V-4) = 309^\circ 03' 37''$$

h) **Cálculo de las coordenadas definitivas de los 10 nuevos puntos de la cadena.**

En base a estos elementos básicos calcúlanse nuevamente los dos tiros poligonales, obteniendo, así, las coordenadas definitivas de todos los puntos de la red con el necesario contralor de cálculo (ver: Planillas de cálculo 3, págs. 78 y 79).

Cálculo de las coordenadas de la figura fingida

P_v — 4 = 1 m.

Planilla de cálculo N.º 2

Punto	Angulo pol. β Corrección			Rumbo magnético			Lado l m	log		Δx sin corr. Corrección Δx correg. m	Δy sin corr. Corrección Δy correg. m	Coordenadas totales	
	o	'	"	o	'	"		cos α 1	sen α			x _n m	y _n m
P _v	73	53	31										
							1,00	9,77 199	0,00 000	+ 0,59 155	— 0,80 627		
4'	180	37	23	306	16	01		9,90 648 _n	9,90 648 _n				+ 7 680,21 + 3 218,59
6'	197	19	37	306	53	24		9,77 836	9,97 280	+ 0,56 384	— 0,75 122		
								9,90 297 _n	9,87 577 _n				
8'	159	31	57	324	13	01		9,90 915	9,85 055	+ 0,57 504	— 0,41 448		
								9,76 695 _n	9,61 750 _n				
10'	201	08	03	303	44	58		9,74 473	9,71 374	+ 0,28 739	— 0,43 012		
								9,91 985 _n	9,63 359 _n				
P'II	43	09	26	324	53	01		9,91 274	9,76 395	+ 0,47 500	— 0,33 404		
								9,75 985 _n	9,52 380 _n				
11'				188	02	27				+ 2,49 282	— 2,73 613		

3. PRECISION DE LA DETERMINACION. ERRORES MEDIOS m_ϵ Y m_ω Y ERROR RELATIVO LINEAL.

Los 10 errores de cierre de triángulo, ϵ , nos permiten calcular el error medio m_ϵ de una suma ($\alpha + \beta + \gamma$) de ángulos de triángulo.

Teniendo las cantidades ϵ el carácter de errores verdaderos (ver: "C. de C." pág. 35), resulta:

$$m_\epsilon = \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{1425}{10}} = \pm 12''$$

Y como en cada suma entran tres ángulos, cuyo error medio m_ω se trata de averiguar, se tendrá, según la ley de la propagación de los errores (ver: "C. de C.", págs. 54 - 56):

$$m_\epsilon = m_\omega \sqrt{3}$$

$$\text{De donde: } m_\omega = \frac{m_\epsilon}{\sqrt{3}}$$

Luego:

$$m_\omega = \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{3 \cdot n}}$$

$$m_\omega = \sqrt{\frac{1425}{30}} = \pm 6,9''$$

ϵ	$\epsilon\epsilon$
- 7	49
+ 22	484
+ 13	169
- 9	81
- 5	25
- 10	100
- 6	36
- 9	81
- 16	256
+ 12	144
$[\epsilon\epsilon]$	= 1425

Esta fórmula, llamada **fórmula internacional de Ferrero**, da resultados tanto más seguros cuanto mayor sea el número n .

Dada la circunstancia especial de conocer para este problema de antemano la distancia $P_v - 4$, por haberla medido **directamente** en nuestro ejercicio práctico anterior (ver número subrayado, pág. 64), se obtuvo un valioso **controlador de medición** y material para calcular el **error relativo lineal**:

$P_v P_4$, medido directamente	242,46 m
$P_v - 4$, lado resultante de la triangulación	242,52 "
Diferencia	0,06 m

Luego:

$$\text{Error relativo lineal: } \frac{0,06}{242} \sim \frac{1}{4000}$$

Según nuestras **Tablas de tolerancias I** (ver pág. V de tomo I, 2ª edición) tenemos para 243 m: 0,067 m, vale decir que el trabajo realizado satisfaría las más altas exigencias de catastro urbano.

Observación final.

Cabe observar que este ejercicio, así como los demás que anteceden, representan ejemplos prácticos de carácter didáctico, efectuados por mis alumnos de la Escuela de Topógrafos del I. G. M. y los del Curso libre (año 1927) de la Facultad de La Plata, en limitadísimos sectores de la Capital Federal y ciudad de La Plata, respectivamente; y, como tales, son simples **simulacros de trabajos de campo**, con los que se persigue la finalidad de ilustrar los correspondientes procedimientos operatorios, métodos, economía de trabajo, práctica de cálculo y precisión alcanzada, y nada más.

No debe, por ejemplo, sacarse del último ejercicio la conclusión de que se recomiende, en verdad, efectuar una "triangulación de enlace" cuando se trate de dotar de nuevos puntos a una faja de terreno de sólo 900 metros de extensión.

CAPITULO SEGUNDO

N I V E L A C I O N

SUMARIO

NIVELACION GEOMETRICA

- § 1. Explicaciones previas de carácter fundamental.
2. Reconocimiento y construcción de puntos fijos. Monografías de puntos fijos altimétricos.
3. Principio de la nivelación geométrica o nivelación simple. Nivelación compuesta.
4. Nivel simple de anteojo fijo.
5. Nivel Egault con nivel tubular fijo e independiente del anteojo.
6. Nivel de precisión de construcción antigua con nivel de caballete.
7. Nivel biaxial de Zeiss.
8. Nivel de anteojo con nivel reversible.
9. Nuevo tipo de nivel de Cooke y Kern.
10. Nivel de precisión de construcción moderna.
11. Nivel - taquímetro.
12. Miras de nivelación.
13. Errores de la nivelación geométrica. Compensación y precisión.
14. Contralores de medición en la nivelación geométrica.
15. Nivelación de precisión.
16. Levantamiento y trazado de perfiles.

§ 17.

NIVELACION TRIGONOMETRICA

§ 18.

NIVELACION BAROMETRICA

EXPLICACIONES PREVIAS DE CARACTER FUNDAMENTAL

1. **DIRECCION DE LA PLOMADA, ELIPSOIDE DE REVOLUCION, SUPERFICIE TERRESTRE VERDADERA, SUPERFICIE DE NIVEL, GEOIDE.** Sobre un punto de la superficie terrestre actúa principalmente la fuerza de la gravedad en la **dirección de la vertical**, dada por la plomada.

Imagínase, en **Geodesia**, la Tierra limitada por una **superficie elipsoidal de revolución**, sin ninguna clase de irregularidades, ni elevaciones ni depresiones. Pero, en la **superficie terrestre verdadera**, esta suposición no se verifica: presenta ésta rugosidades de todo orden, salientes y entrantes.

Llámase **superficie de nivel** a una superficie cualquiera que en todos sus puntos es perpendicular a la vertical, llamándose **geoide** a la superficie de nivel particular correspondiente al nivel del mar. Los mares, prescindiendo del flujo y reflujo y de las corrientes son grandes trozos de esta superficie, la que se imagina continuada debajo de los continentes en forma de canales unidos entre sí y con los mares.

2. **MAREA, FLUJO Y REFLUJO, PLEAMAR, BAJAMAR, NIVEL MEDIO DEL MAR, MAREOGRAFO. HORIZONTE HIPSOMETRICO GENERAL DE LA REPUBLICA ARGENTINA.** Sabemos que por el efecto de las atracciones combinadas del Sol y de la Luna las aguas del mar suben y bajan periódicamente, produciendo las oscilaciones de **la marea, el flujo y el reflujo**.

La máxima elevación de las aguas del mar se llama **pleamar**, mientras que el máximo descenso se denomina **bajamar**.

Estos fenómenos de la marea son minuciosamente estudiados por medio de aparatos llamados **mareógrafos**, instalados en apropiados puntos de la costa, siendo una de las principales tareas que se realizan en estas instalaciones la **determinación del nivel medio del mar**, en base a grandes series de observaciones, extendidas a largos períodos de años. Anúlase así, en el promedio final de las observaciones, la influencia de las perturbaciones de equilibrio de las aguas.

La media entre cada lectura de pleamar y bajamar dará un valor grosero para el **nivel medio del mar**. Y si en un determinado sitio se observan las diferentes alturas que alcanzan sucesivamente la pleamar y bajamar y tomando la media de todas, se obtendrá un valor para el nivel medio que se aproximará tanto más al verdadero cuanto mayor haya sido el número de sucesivas mareas consideradas.

Horizonte hipsométrico general de la República Argentina. Las cotas publicadas por el Instituto Geográfico Militar Argentino están referidas al **nivel medio del Océano Atlántico**, frente a **Mar del Plata**, determinado por las observaciones mareográficas del Ministerio de Obras Públicas de la Nación.

La **corrección** a aplicar, para pasar de las cotas del citado Ministerio, las que son referidas al **horizonte de aguas bajas (cero del mareógrafo del Riachuelo**, en Buenos Aires) a las correspondientes al horizonte del Instituto Geográfico Militar es de — 0,556 metro.

3. **DEFINICIONES: ALTITUD, ALTURA ABSOLUTA O COTA, DIFERENCIA DE NIVEL, DESNIVEL O ALTURA RELATIVA, SUPERFICIE O PLANO DE COMPARACION.** Llámase *altitud, altura absoluta o cota* de un punto a su altura sobre el nivel del mar, *diferencia de nivel, desnivel o altura relativa*, entre dos puntos, a la cota de uno cualquiera de ellos referida a la superficie de nivel que pasa por el otro.

Si las cotas de muchos puntos están referidas a una misma superficie de nivel de antemano establecida, ésta recibe el nombre particular de *superficie o plano de comparación*.

Un punto puede estar situado encima o debajo de esta superficie de comparación, siendo, en el primer caso, su *cota positiva*, en el segundo *negativa*.

4. **RESUMEN: GEOIDE, ELIPSOIDE DE HAYFORD, ESFERA DE CURVATURA MEDIA, ESFERA DE RADIO MEDIO, PLANO.** Resumiendo, tendremos entonces: La dirección de la plomada y el geoide constituyen la verdadera base de todas las operaciones que se ejecutan en la superficie terrestre, siendo todos los puntos, líneas y elementos de superficies proyectados en la dirección de la plomada sobre el geoide, en una de las formas simplificadas que la categoría de los distintos trabajos reclame, a saber: Para el cálculo geodésico y la cartografía, este geoide puede ser reemplazado por un *elipsoide de revolución*, por ejemplo el de **Hayford**, (*) adoptado por el Instituto Geográfico Militar Argentino (por Disp. Perm. N° 197, de Abril 24 de 1925) para todos sus trabajos fundamentales; o, cuando sea suficiente considerar aproximadamente la curvatura, por una *esfera de curvatura media*; o, por una *esfera de radio medio* cuando sea permitido prescindir del aplastamiento; o, finalmente, por un *plano* cuando se pueda prescindir completamente de la curvatura de la Tierra.

En otros términos, recorriendo la escala en sentido inverso: Queda substituído el geoide por el plano en las operaciones planimétricas de Topografía; por la esfera de radio medio en las operaciones altimétricas ordinarias; por una esfera de curvatura media para la proyección de redes trigonométricas, que cubren extensas zonas, y por el elipsoide para las triangulaciones fundamentales de grandes territorios; conduciendo las operaciones gravimétricas conjuntamente con las astronómicas al mejor conocimiento del geoide.

5. **HORIZONTAL VERDADERA Y HORIZONTAL APARENTE. DEFINICIONES. EFECTO DE LA CURVATURA TERRESTRE.** Mientras que en las mediciones topográficas horizontales se puede prescindir de la curvatura de la Tierra y considerar paralelas las direcciones de la plomada (o perpendiculares al plano horizontal) en todos los puntos de la zona de trabajo, no sucede lo mismo en las mediciones verticales. Hasta para operaciones de nivelación geométrica ejecutadas en muy reducidos sectores de trabajo es necesario tomar en cuenta la curvatura terrestre.

(*) Radio ecuatorial 6 378 388 m ± 18 m
Recíproca del achatamiento 297,0 ± 0,5

Suponemos en fig. 1 una esfera de radio medio $R = 6400$ km, concu-
riendo las verticales en el centro C .

Sean A y B (fig. 1) dos puntos del terreno de cotas iguales; AB una
línea cuyos puntos tienen todos la misma altura. Una tal línea se llama
horizontal verdadera del punto A . Es una línea curva de radio R perpen-
dicular en todos sus puntos a la vertical. Es un arco de círculo máximo
de la **superficie de nivel** que pasa por A .

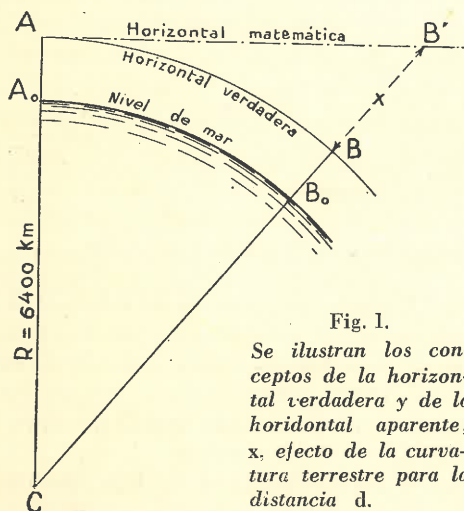


Fig. 1.
Se ilustran los con-
ceptos de la *horizon-
tal verdadera* y de la
horizontal aparente;
 x , efecto de la curva-
tura terrestre para la
distancia d .

La tangente AB' , en cambio, que
suponemos trazada en el punto A
a la curva AB , es perpendicular a la
vertical sólo en el punto de arran-
que A . Es la **horizontal aparente** u
horizontal matemática del punto A .

Si nos imaginamos colocados en
el punto A mirando en la direcció-
n de la horizontal verdadera AB , ve-
ríamos los puntos de ésta más ba-
jos que el horizonte de A , tanto
más bajos cuanto más alejados de A
se hallen los puntos considerados,
no obstante tener ellos, en ver-
dad, todos la misma altura. Llámase
a este gradual hundimiento cre-
ciente de los puntos de la línea AB
la **depresión** de los mismos. En la
figura 1 se ve que la depresión del
punto B asciende el valor BB' ; se
mide su valor sobre la vertical de B ,
lo designamos por x .

Esta cantidad x expresa entonces el error que se cometería a causa de
la curvatura de la Tierra al indicar las alturas de los puntos referidas a
la horizontal matemática u horizontal aparente AB' en lugar de referirlas
a la horizontal verdadera. La tangente AB' , trazada geoméricamente en el
punto A cortaría a la vertical de B en el punto B' , siendo así $BB' = x$
(fig. 1) la depresión del horizonte para el punto B . Podemos fácilmente
deducir el valor de x de dicha figura.

Sean $AB' = d$ y $CA = CB = R$ (radio de la Tierra). Del triángulo
 ACB' tenemos entonces:

$$(R + x)^2 = R^2 + d^2$$

de donde:

$$R^2 + 2Rx + x^2 = R^2 + d^2$$

$$2Rx + x^2 = d^2$$

Dividiendo por $2R$, resulta:

$$x + \frac{x^2}{2R} = \frac{d^2}{2R}$$

Despreciando $\frac{x^2}{2R}$ al lado de x por su relativa pequeñez, resulta:

(1)

$$x = \frac{d^2}{2R}$$

Llámase la cantidad x "efecto de la curvatura terrestre" o "importe de la curvatura terrestre" o también "depresión del horizonte" para la distancia d .

Para $d = 100$ metros, $x = 0,78$ mm, para $d = 200$ metros, $x = 3,1$ mm, es decir, para la doble distancia d , se cuadruplica el efecto x de la curvatura de la Tierra, e inversamente para el caso de reducirse la distancia d .

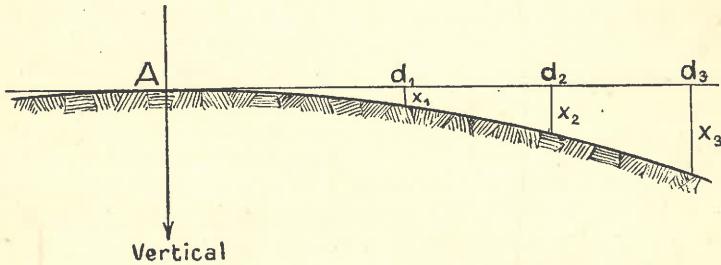


Fig. 2 — Efectos x de la curvatura terrestre para las distancias d_1 , d_2 , d_3 .

6. HORIZONTAL OPTICA. INFLUENCIA DE LA REFRACCION TERRESTRE. Cuando la dirección horizontal es establecida ya no por una tangente geométrica sino por medio de una visual horizontal obtenida con ayuda de un instrumento óptico, tal visual, debido a la refracción terrestre, no cortaría la vertical de B en B' sino en otro punto B'' (ver fig. 3) más bajo (*).

A causa de las distintas densidades de las capas atmosféricas, un rayo visual que las atraviesa no es rectilíneo (como la tangente geométrica AB') sino toma una forma ligeramente curva, con la cavidad vuelta hacia

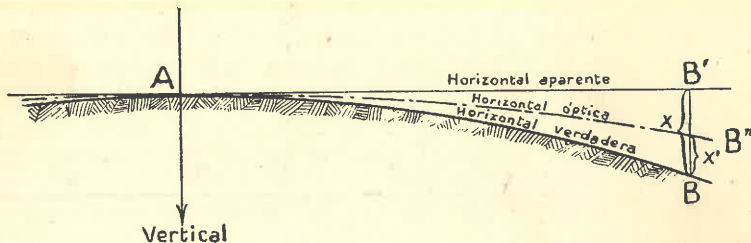


Fig. 3.— Se ilustra el concepto de la horizontal óptica AB'' y el efecto total x' de la curvatura y refracción terrestre.

el suelo. La refracción terrestre reduce entonces el efecto x de la curvatura en una pequeña fracción que oscila entre $1/7$ y $1/8$ de su valor, quedando así reducido a $\frac{6}{7}x$ ó $\frac{7}{8}x$.

(*) (Llámase "refracción terrestre" porque el segundo punto es un objeto terrestre B , en oposición a la "refracción astronómica" en caso de ser el objeto visado B un astro.)

El radio de curvatura R' de esta curva de luz es muy grande, entre 7 y 8 veces más grande que el radio R de la Tierra ($R = 6400$ km, en cifras redondas), siendo entonces, en el promedio, $R' = 50\,000$ km. La refracción terrestre está sujeta a muy fuertes variaciones durante el día, llegando a tener el radio R' el valor de sólo 25 000 km a la salida y puesta del Sol (períodos de refracción máxima) y al valor de $R' = 75\,000$ km a mediodía (período de refracción mínima). La visual horizontal AB'' establecida con ayuda de un instrumento óptico ha sido llamada muy acertadamente **horizontal óptica** por el profesor **Hammer**. El factor $1/7$ ó $1/8$ [promedio $1/7\frac{1}{2}$] que expresa la reducción de x por causa de la refracción terrestre, se llama **coeficiente de refracción terrestre**. Se lo designa generalmente por k , siendo entonces:

$$(2) \quad k = \frac{R}{R'} = \frac{R}{7\frac{1}{2}R} = \frac{1}{7\frac{1}{2}} = 0,13$$

Tendremos entonces para el efecto total de curvatura y refracción terrestre el valor x' (ver fig. 3):

$$(3) \quad x' \sim \frac{6}{7} x$$

o, un poco más exactamente:

$$(4) \quad x' = \frac{d^2}{2R} - k \cdot \frac{d^2}{2R} = \frac{d^2}{2R} (1 - k) = 0,87 \frac{d^2}{2R}$$

Para $d = 1$ km, x' sería sólo 6,8 cm, en lugar de $x = 7,8$ cm.
 " $d = 500$ m, x' " " 1,7 " , " " " $x = 2,0$ " ,
 " $d = 100$ " , x' " " 0,7 mm, " " " $x = 0,8$ mm

Conviene recordar estos valores:

$$\begin{aligned} x' &= 7 \text{ cm para } d = 1000 \text{ metros.} \\ x' &= \frac{2}{3} \text{ mm " } d = 100 \text{ " } \end{aligned}$$

Para más detalles sobre este tema, ver "Cálculo de compensación", págs. 118-120.

7. CLASIFICACION GENERAL DE LAS NIVELACIONES. Llamando **nivelación** a toda operación que conduce a la determinación de una **diferencia de nivel**; pueden dividirse las nivelaciones en las siguientes tres grandes categorías:

- I. Nivelación geométrica,
- II. Nivelación trigonométrica,
- III. Nivelación barométrica,

entendiéndose por **nivelación geométrica** o **nivelación propiamente dicha** una determinación de desnivel entre puntos próximos, mediante visuales horizontales hacia miras verticales; por **nivelación trigonométrica** la de-

terminación de desniveles por medio de la medición de ángulos verticales, usando teodolito.

En la **nivelación barométrica**, en cambio, aprovéchase una importante propiedad del aire: Como la presión atmosférica disminuye rápidamente con la altura, y esto según una cierta ley conocida, **dedúcese** de la diferencia de presión que se **mide**, la correspondiente diferencia de altura que se **busca**.

8. NIVELACION GEOMETRICA CONSIDERADA COMO MEDICION LINEAL SOBRE LA VERTICAL.

La nivelación geométrica tal cual la definimos no es más que una medición lineal en el sentido de la vertical. Los distintos trozos de la línea a medir, diferentes en magnitud y signo, no son determinados sobre una misma vertical sino sobre distintas, pero no en forma mecánica, como sucede en la medición lineal, agregando una medida redonda a continuación de la otra, reglón a reglón, cintada a cintada, sino ópticamente, por medio de visuales horizontales. La precisión de tales mediciones dependerá del instrumento empleado. Si la unidad no es exacta, siendo, por ejemplo, el metro corto, las diferencias de nivel resultarán demasiado grandes, o demasiado pequeñas, en caso contrario. Son análogos también los contrastes de las miras de nivelación y los de los reglones de madera o cintas de acero de la medición lineal, hechos en un aparato especial llamado **comparador** con el objeto de establecer el valor exacto de la unidad métrica en la medida.

9. DIVISION DE LA NIVELACION GEOMETRICA SEGUN SU PRECISION.

Análogamente a lo que se acostumbra hacer en las triangulaciones, se suele distinguir en la nivelación diversos órdenes de trabajos, llamando:

Nivelación de alta precisión a la que responda a la tolerancia internacional, (fijada en la 17ª Conferencia Internacional de Hamburgo, año 1912), no debiendo exceder su error medio accidental de $\pm 1,5$ mm, por 1 km doblemente nivelado;

Nivelación de precisión, cuyo error medio accidental kilométrico no exceda de $\pm 2,5$ mm;

Nivelación de 2º orden, con tolerancia de ± 1 cm, por km de nivelación simple;

Nivelaciones de tercer orden, con tolerancia de ± 3 cm, por 1 km de nivelación simple;

Nivelación de cuarto orden, con una tolerancia kilométrica de $\pm 0,1$ m, de nivelación simple.

La nivelación de alta precisión sirve a los objetos **científicos** de la medición de la Tierra, por ejemplo, la unión de los ceros de aguas medias de distintos puntos de los Océanos; sirve para constatar la existencia y determinar la magnitud de movimientos verticales en la costra terrestre; establecer las bases hipsométricas definitivas de las grandes redes de ni-

velación de extensos territorios para fines prácticos, topográficos y técnicos, transportando a las lejanas regiones del interior un determinado horizonte, una superficie de nivel, generalmente la del nivel del mar, a la cual están referidas las cotas de todas las nivelaciones del país.

Las **nivelaciones de precisión**, que arrancan en las de alta precisión, dando bases a las de segundo orden, serán efectuadas con una exactitud tal que la precisión del transporte del horizonte al interior de las mallas no quede muy sensiblemente reducida.

Las **nivelaciones de segundo orden** que suministran las bases altimétricas para los trabajos técnicos, arrancan generalmente en puntos de las de precisión, cerrando en otros de la misma categoría, pudiendo ser, por ejemplo, la densidad de la red de puntos tal que por cada plancheta de 1:50 000 ó 400 km² aproximadamente, pase por lo menos una de sus líneas o una de orden superior. (*)

La **nivelación de tercer orden** tiene por misión dar base altimétrica a los trabajos del topógrafo. Los puntos fijos, marcados por estacas o piquetes, se consideran de permanencia temporaria, mientras duren los trabajos en el terreno, (pudiendo ser, por ejemplo, su densidad tal que en un cuadrado de 10 km de lado haya por lo menos un punto, ya sea de éste o de otro orden superior. (*)

10. DIVISION GENERAL DE LOS TRABAJOS DE NIVELACION SEGUN OTRO CRITERIO.

Desde otro punto de vista que el de la precisión, pueden dividirse las nivelaciones en las siguientes tres categorías:

Nivelación de puntos fijos, la que abarca las operaciones correspondientes a los órdenes anteriormente establecidos;

Nivelación de líneas, o cortes, llamados **perfiles longitudinales** y **perfiles transversales**, respectivamente;

Nivelación de superficies, efectuada generalmente por nivelación trigonométrica, semi-trigonométrica o nivelación barométrica, cuyo objeto es la obtención de planos acotados que conducen a la construcción de las curvas de nivel y la plástica representación de las formas del terreno.

(*) (Normas adoptadas para los trabajos del Instituto Geográfico Militar Argentino).

§ 2.

RECONOCIMIENTO Y CONSTRUCCION DE PUNTOS FIJOS. MONOGRAFIAS DE PUNTOS FIJOS ALTIMETRICOS.

1. DOS DISTINTOS TIPOS DE PUNTOS FIJOS: PROVISIONALES Y DEFINITIVOS.

La manera de señalar y marcar un punto fijo altimétrico en el terreno, dependerá esencialmente del objetivo de la operación: será **provisional** o **definitiva** según que la finalidad del trabajo exija una duración temporaria o permanente.

2. PUNTOS FIJOS PROVISIONALES.

Puntos fijos provisionales, cuyo objeto está limitado al tiempo de la duración de un trabajo, los constituyen, según la naturaleza del suelo y

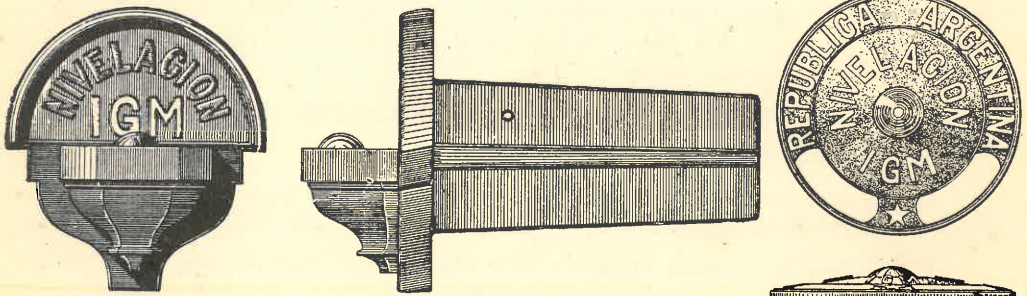


Fig. 1. — Chapa de nivelación de eje horizontal (signo convencional ⊥).

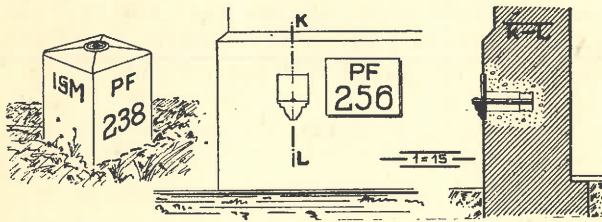


Fig. 3. — Punto fijo de 3ª categoría.

Fig. 4. — Punto fijo de 4ª categoría.

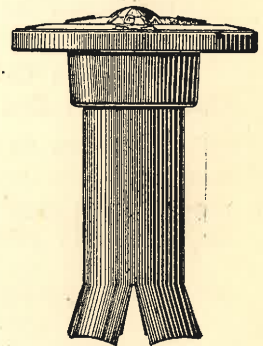


Fig. 2.

Chapa de nivelación de eje vertical (signo convencional ⊥).

la exactitud de las operaciones a realizar, puntos firmes del suelo natural, piedras naturales, piedras marcadas con cal, etc.

Cuando sea necesario suponérseles una duración más larga, como sucede en las nivelaciones de ferrocarriles y las de topografía regular, se

emplearán estacas o piquetes de madera de 40 a 60 cm de largo y 5 a 8 cm de diámetro, con numeración corrida inscripta en uno de sus costados previamente aplanados.

3. MARCAS PARA PUNTOS FIJOS PERMANENTES USADAS EN LAS NIVELACIONES DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR ARGENTINO.

Las marcas usadas en el Instituto Geográfico Militar Argentino para puntos fijos permanentes son muy variables, pudiendo consistir en chapas de bronce de eje horizontal, (fig. 1) o vertical (fig. 2), bulón de eje vertical (τ , fig. 5) u horizontal (\vdash , fig. 5), sujetos en un pilar construído a propósito (fig. 3) o pared de casa existente (fig. 4).

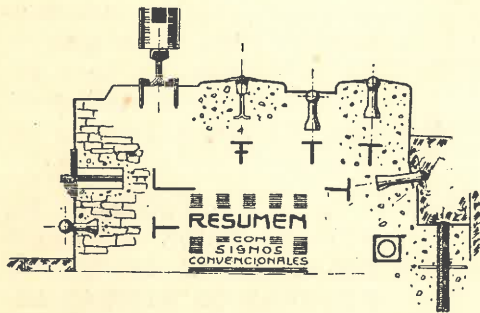


Fig. 5.

o estorbando una cornisa de la pared, podrá emplearse, en lugar de la mira, un metro plegable de madera, en el arraqué o cierre de un trabajo de nivelación.

5. RECONOCIMIENTO Y CONSTRUCCION DE PUNTOS FIJOS DE NIVELACION DE PRECISION.

El reconocimiento y construcción de puntos fijos para nivelaciones de precisión hasta 2º orden que se efectúan en la división Geodesia del ya citado Instituto, son ejecutados de acuerdo a lo establecido en las "Instrucciones para la construcción de puntos fijos de nivelación de precisión", en las que se fijan normas precisas para la adecuada elección del lugar, ubicación del punto, época favorable según la naturaleza del terreno, forma de operar sobre caminos carreteros y ferrocarriles, detallando todos los requisitos para conseguir un punto fijo de buena estabilidad y fácil identificación.

En la figura 5 se da un resumen esquemático de las distintas disposiciones de marcas que ocurren en los trabajos de nivelación de precisión, agregando los correspondientes signos convencionales.

6. MONOGRAFIAS DE LOS PUNTOS FIJOS ALTIMETRICOS.

En todo lugar donde se halle construído un punto fijo, se efectúa un relevamiento altiplanimétrico, en que se relaciona el punto con los

4. PRECAUCIONES A TOMAR EN LA COLOCACION DE MARCAS ALTIMETRICAS.

En el empotramiento de estas marcas es menester tener presente que deben permitir colocar verticalmente una mira de 3 ó 4 metros de largo.

En caso de que esto no haya sido posible realizar, quedando, por ejemplo, muy alta la marca

hechos existentes en el terreno, de tal manera que los datos tomados permitan confeccionar una descripción del punto, llamada **monografía**, donde quedan consignados gráfica y numéricamente todos los datos relacionados

con la situación, diferencias de nivel entre las distintas referencias (marcas) de que puede constar el punto fijo y el terreno natural en sus alrededores (perfil transversal), nombre particular de la región, propietario del terreno, tec.

Esta monografía sirve al nivelador para la **identificación** del punto y contralor de las variaciones que haya podido sufrir, y la **reconstrucción** del mismo en caso de destrucción parcial.

7. CATEGORIAS DE PUNTOS FIJOS ESTABLECIDAS EN EL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR ARGENTINO.

Establecieron en el Instituto Geográfico Militar Argentino 4 categorías de puntos

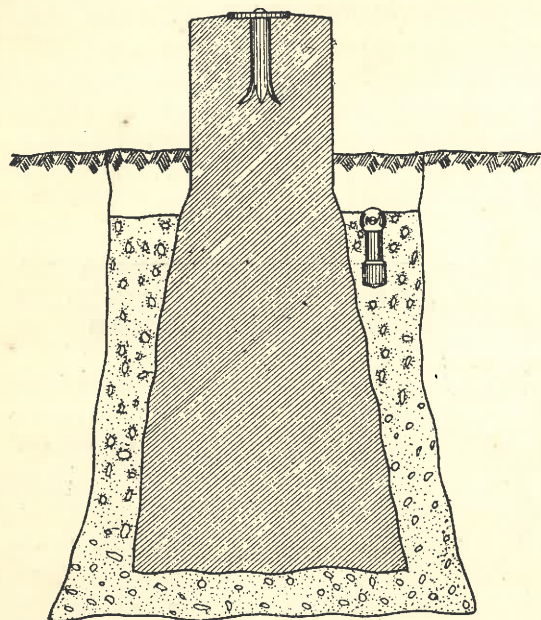


Fig. 6. — Punto fijo de 3ª categoría.

tos fijos, perteneciendo a la **primera** los llamados "**nodales**", destinados a la intersección de grandes líneas y puntos terminales de cruces de grandes ríos, constituidos por marcas ocultas, haciendo cuerpo con un maciso pilar de hormigón, y otras marcas visibles independientes de dicho pilar. **Ejemplo:** "Nodal 29 de La Plata" (Prov. de Buenos Aires).

La **segunda y tercera categoría** se caracterizan ambas por dos marcas, una visible y otra oculta (fig. 6) y **mojón subterráneo** (fig. 5) la primera de éstas, siendo la cuarta constituida por una sola marca visible (fig. 4).

§ 3

PRINCIPIO DE LA NIVELACION GEOMETRICA O NIVELACION SIMPLE. NIVELACION COMPUESTA

1. EL APARATO DE NIVELACION.

Estando dados los puntos **A** y **B** (fig. 1) en el terreno, la nivelación geométrica tiene por **objeto** determinar su desnivel Δh .

El aparato que para ello se necesita se compone de dos partes prin-

cipales, del instrumento de nivelación llamado **nivel de anteojo** y de la **mira**.

El nivel de anteojo sirve para establecer una visual horizontal, lo que se consigue generalmente con el auxilio de un nivel tubular vinculado con un anteojo, y los tornillos calantes o tornillo de elevación.

La mira de nivelación es una regla graduada que va colocada verticalmente sobre un punto de apoyo, leyéndose sobre ella la altura a la cual la visual horizontal la corta.

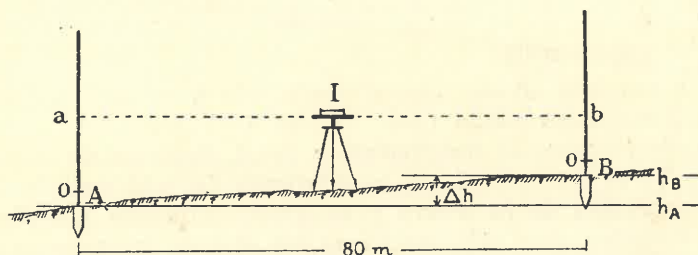


Fig. 1.—Ilustrando el principio de la nivelación simple.

2. PRINCIPIO DE LA NIVELACION GEOMETRICA O NIVELACION SIMPLE.

Instalado el nivel en **I** (fig. 1), se colocará la mira verticalmente primero en **A** (a unos 40 metros de distancia), haciendo la lectura **a**, luego **b** en **B**, pero no sin haber cada vez llevado la visual a la posición horizontal, centrando la burbuja del nivel con el auxilio del correspondiente tornillo calante.

Siendo h_A y h_B , respectivamente, las alturas de los piquetes en **A** y **B**, referidas a un mismo plano de comparación, tendremos para el desnivel Δh :

$$(1) \quad \Delta h = h_B - h_A$$

$$(2) \quad = a - b,$$

Es decir:

Diferencia de nivel $\Delta h =$ lectura atrás (a) ^Smenor lectura adelante (b).

3. POSICION DEL CERO DE LA GRADUACION DE MIRA.

No tiene influencia en esta operación el hecho de que el punto de apoyo de la mira coincidan o no con el origen de la división, siendo sólo necesario que tanto en **A** como en **B** se haya empleado la misma mira (ver fig. 1).

4. NIVELACION DESDE EL MEDIO.

Según vimos en los Nos. 5 y 6 de § 1, sabemos que en la mira verticalmente colocada en **A**, a la distancia d_A , se leerá, con visual exactamente horizontal (horizontal aparente), una altura h mayor en la cantidad x (ver ecuación (1) de § 1):

$$x = \frac{d_A^2}{2R}$$

que la que nos proponemos medir, y que de este excedente de lectura se anula una pequeña parte debido a la refracción terrestre:

$$k \cdot x = k \cdot \frac{d^2}{2R} \sim \frac{1}{7^{1/2}} \cdot \frac{d^2}{2R} \quad (\text{ver (2) de § 1})$$

leyéndose entonces sobre la mira (siempre en más) según (4) de § 1 la cantidad x' :

$$x' = 0,87 \cdot \frac{d^2}{2R}$$

la que es necesario restar.

Pero no hay que olvidar que el coeficiente k es muy variable, siendo $k = 0,13$ sólo un **valor medio** (ver: “**C. de C.**”, pág. 118).

Colocando entonces el instrumento a igual distancia de **A** y **B** ($d_A = d_B$, ver fig. 1) se compensará, en la diferencia ($a - b$) no sólo la influencia de la curvatura de la Tierra y en grado suficiente también la de la refracción terrestre, sino principalmente los errores instrumentales, lo que es esencial, procedimiento operatorio éste que recibió el nombre “**nivelación desde el medio**”.

5. INFLUENCIA DE LA DIFERENCIA DE REFRACCION TERRESTRE.

Sin embargo, en terreno inclinado, en que una visual horizontal encuentra una mira siempre a una altura mucho más próxima al suelo que la otra, esta compensación de la influencia de la refracción terrestre puede ser muy imperfecta, originándose entonces un **error sistemático**, que es necesario tener muy en cuenta cuando se trate de nivelación de precisión. La **nivelación con visual corta** es uno de los mejores recursos para contrarrestar su efecto.

6. GOLPE DE NIVEL ATRAS Y GOLPE DE NIVEL ADELANTE.

Llámase golpe de nivel atrás o simplemente “**golpe atrás**” al que se da sobre una mira colocada en un punto de arranque o punto anteriormente determinado, y **golpe de nivel adelante** o “**golpe adelante**” al que se da sobre la mira en un nuevo punto de cota aún desconocida.

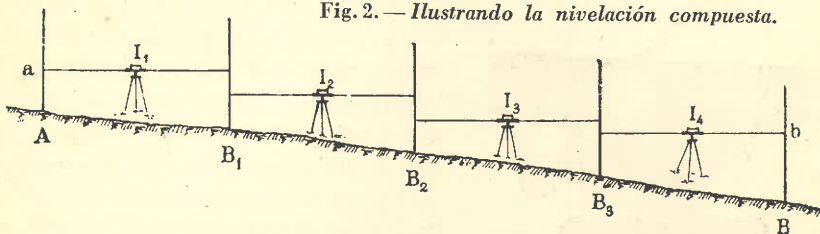
7. NIVELACION COMPUESTA O TIROS DE NIVELACION. PUNTOS DE CAMBIO.

Si la diferencia de nivel entre dos puntos extremos de un trozo de línea es obtenida por observaciones hechas en 2 ó más estaciones de nivel, ya sea por causa de ser muy grande la distancia que los separa o muy considerable su desnivel, se dirá que la nivelación es **compuesta**, o que se trata de un **tiro de nivelación**.

Se elegirán, en este caso, **puntos intermedios**, B_1, B_2, B_3, \dots (fig. 2), que pueden consistir en piquetes de antemano colocados o “**puntos perdidos**” elegidos durante las operaciones como puntos de apoyo de mira, usando “**sapos**” (ver fig. 11, § 10), puntos naturales, piedras, etc.

Estos puntos apoyos de mira subdividen el tiro en otros tantos pequeños trozos parciales de 100 metros (visuales de 50 m), por ejemplo, no siendo entonces el desnivel final, correspondientes a los dos puntos ex-

Fig. 2. — Ilustrando la nivelación compuesta.



tremos del tiro, otra cosa que la suma algebraica de los desniveles de las estaciones consecutivas, es decir, del de **A** al primer punto intermedio **B₁**, del de éste al **B₂**, etc.

Dedúcese de la figura 2 el hecho de que en cada punto intermedio se efectúan dos lecturas, desde dos distintas estaciones de nivel, una desde la estación anterior, y otra desde la siguiente, una vez con visual hacia adelante y otra con visual hacia atrás. Estas dobles lecturas, realizadas en los puntos de cambio, durante las cuales se efectúa también un cambio de estación del instrumento, les ha valido la denominación de “**puntos de cambio**”.

8. FORMULA GENERAL DE LA NIVELACION GEOMETRICA.

Siendo, como ya dijimos h_A y h_B , respectivamente, las alturas de **A** y **B**, tendremos:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta h = h_B - h_A \\ = \Sigma \text{ golpes atrás} - \Sigma \text{ golpes adelante.} = \Sigma a - \Sigma b \end{array} \right.$$

es decir: La diferencia de nivel Δh entre los puntos extremos **A** y **B** de una línea de nivelación, es igual a la diferencia de las sumas de las lecturas atrás (a) y las de delante (b).

§ 4.

NIVEL SIMPLE DE ANTEOJO FIJO.

1. DIVISION DE LOS NIVELES DE ANTEOJO Y CARACTERISTICAS GENERALES DE LOS NIVELES SIMPLES A ANTEOJO FIJO.

Divídense los niveles en dos grandes categorías:

Niveles simples, con anteojo fijo y

Niveles con anteojos de collares.

El primer grupo de niveles se caracteriza por la rígida unión de nivel tubular y anteojo entre sí y en conjunto con la alilada.

Como representante de este primer grupo de niveles damos en figura 1 el modelo "Kern I".

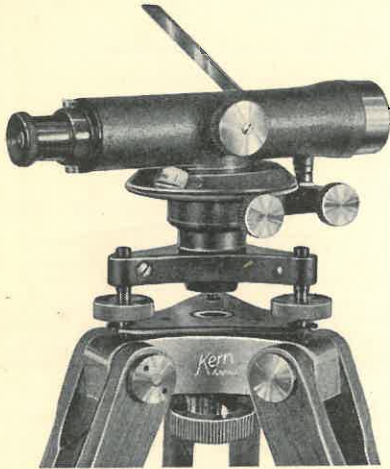


Fig. 1. — Nivel simple "Kern I" (con o sin círculo).

Principales características:

Diámetro del objetivo	26 mm
Aumento del anteojo analítico	19
Luminosidad	1,87
Sensibilidad del nivel tubular 40"/2 mm	

La condición principal que debe satisfacer un instrumento de nivelación es la siguiente:

Eje del nivel tubular paralelo al eje de colimación, NN || CC, para que así, estando horizontal aquél, sea también horizontal la visual o eje de colimación.

Eje vertical de rotación perpendicular al del nivel, VV ⊥ NN, de modo que, al girar la alidada alrededor de su eje, el de colimación describa un plano horizontal.

Esta segunda condición es sólo de importancia secundaria, siendo, sin embargo, generalmente muy conveniente, para aumentar la rapidez de las mediciones, que el eje del nivel tubular sea aproximadamente perpendicular al de rotación.

3. ORDEN EN QUE CONVIENE SEAN EFECTUADAS LAS CORRECCIONES.

El orden de las correcciones de un instrumento de nivelación depende en general, de la disposición

Los tornillos **B** y **C** del retículo (fig. 2), accesibles una vez destornillado el anillo de protección **A**, permiten llevar el eje de colimación a la posición paralela con el eje del nivel tubular o sea perpendicular al eje vertical de rotación.

Dicho nivel tubular tiene en su extremo un dispositivo de corrección que actúa en sentido vertical, con el objeto de llevar el eje del nivel a la posición perpendicular al eje de rotación.

Un nivel esférico fijo al soporte, facilita la rápida verticalización del eje principal.

2. EJES DE UN NIVEL DE ANTEOJO Y CONDICIONES QUE DEBEN SATISFACER.

Distínguense en un nivel de anteojo los 3 siguientes ejes:

Eje del nivel tubular, NN,
eje de colimación, CC,
eje vertical de rotación, VV.

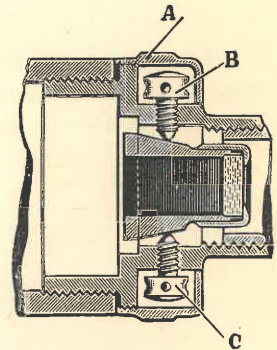


Fig. 2. — Se ilustra el dispositivo de corrección del eje de colimación: B y C, tornillos de corrección, que se descubren al quitarse el anillo de protección A.

de los órganos del mismo, siendo necesario proceder siempre de tal modo que nunca una corrección modifique los resultados de otra anterior. Desde este punto de vista conviene efectuar primero la corrección secundaria, **NN ⊥ VV**.

Por haber detalladamente explicado esta corrección secundaria en el Tomo II, nos limitamos aquí a hacer esta referencia.

4. ELIMINACION DE LA PARALAJE Y FALTA DE HORIZONTALIDAD DEL HILO NIVELADOR, DEL RETICULO. Antes de examinar la posición relativa del eje de colimación y del eje del nivel, es necesario averiguar si hay **paralaje** y corregirla en caso positivo, siendo la omisión de esta operación inicial una de las principales causas de errores de los principiantes, efectuando lecturas de mira sin haber previamente eliminado la paralaje (ver pág. 156, tomo II, segunda edición).

Deberá el operador, además, previamente constatar, si al estar vertical el eje de la alidada (eje de rotación), el hilo nivelador es efectivamente horizontal. Suponiendo establecida con suficiente precisión por el constructor la perpendicularidad entre los dos hilos de la cruz del retículo (lo que se puede admitir para todo nivel de buena procedencia), el operador se limitará a dirigir para examinar dicha condición de la verticalidad el anteojo a una plomada colgada, una arista de casa o el canto de una mira vertical, girando, en caso de una descorrección del hilo, la placa porta retículo.

5. EJECUCION DE LA CORRECCION PRINCIPAL: EJE DE COLIMACION PARALELO AL EJE DEL NIVEL. Elíjanse dos puntos **A** y **B**, distantes entre sí unos 80 metros. Se determinará la diferencia de nivel Δh por el método de la nivelación desde el medio.

Situado el instrumento en **I₁** (fig. 3), se hará colocar la mira sucesivamente en **A** y **B**, haciendo las lecturas **a₁** y **b₁**, respectivamente, obteniendo, así, el desnivel Δh :

$$\Delta h = a_1 - b_1$$

Luego se elegirá el punto de estación **I₂**, situado cerca de **A**, colocando el instrumento tan próximo que el anteojo casi llega a tocar la mira. Efectúase la lectura **a₂**, mirando por el objetivo al interior del anteojo hacia la mira. Se hará correr a lo largo de ésta un lápiz hasta que su punta se encuentre en el medio del pequeño círculo de luz que constituye el campo visual del anteojo invertido. Esta lectura **a₂** así obtenida, no estará afectada de error alguno por causa de la distancia mínima de la mira, debiendo, en consecuencia, cumplirse la condición:

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2.$$

Si no se verifica, se corregirá la posición del hilo horizontal mediante los tornillos de corrección **B** y **C** (ver fig. 2), hasta producirse el **valor ideal b₂**:

$$b_2 = a_2 - (a_1 - b_1)$$

6. EJEMPLO PRACTICO CON COMPROBACION.

Lectura en I_1 :	Lectura en I_2 :	Corrección
$a_1 = 1,020$	$a_2 = 1,407$	$a_2 = 1,407$
$b_1 = 1,706$	$b_2 = 2,014$	$\Delta h = -0,686$
$\Delta h = a_1 - b_1 = -0,686$	$\epsilon = a_2 - b_2 = -0,607$	$b_2 = 2,093$

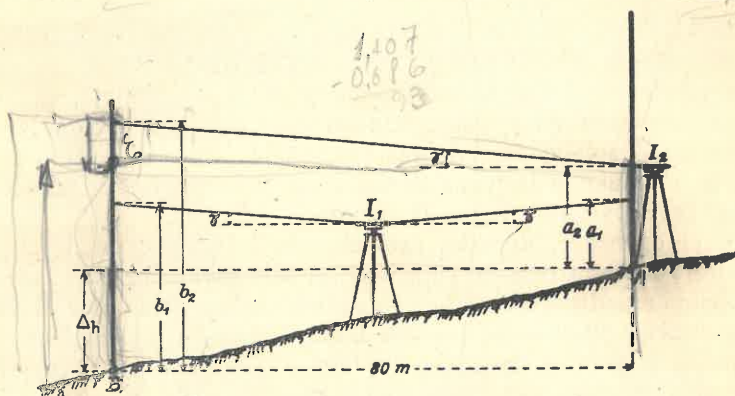


Fig. 3. — Nivelación desde el medio y un extremo.

En el presente ejemplo, $a_1 - b_1 = -0,686$ representa el verdadero valor del desnivel, obtenido por nivelación desde el medio. La lectura a_2 también puede considerarse exacta; tendremos entonces para la lectura b_2 a establecer:

$$b_2 = 1,407 + 0,686 = 2,093,$$

la que se realiza moviendo el retículo en el sentido que corresponda (recordando que el ocular no invierte la imagen).

Comprobación: Después de hecha la corrección, se hizo la comprobación y se obtuvieron los siguientes valores:

$a_1 = 1,102$	$a_2 = 1,425$
$b_1 = 1,789$	$b_2 = 2,111$
$\Delta h = a_1 - b_1 = -0,687$	$a_2 - b_2 = -0,686$

7. CRITERIO SOBRE EL ESTADO DE CORRECCION DE UN NIVEL DE ANTEOJO O INFLUENCIA ϵ DE UN ERROR γ SOBRE LA LECTURA DE MIRA. El valor angular γ que pasamos a definir es el que caracteriza el estado de corrección de un nivel: Estando centrada la burbuja del nivel, el eje de colimación puede no ser horizontal, sino forma todavía un pequeño ángulo constante γ con la horizontal (ángulo entre el eje de colimación y el eje del nivel), resultando entonces todas las lecturas hechas con nivel centrado o demasiado grandes o demasiado pequeñas, según que el eje de colimación esté inclinado por encima o por debajo de la horizontal.

El efecto ϵ de este error γ sobre la lectura de mira no sólo depende de γ , sino también de la longitud d de la visual, siendo ϵ proporcional a ambos, es decir:

2,093
- 0,607

1,486
1,407
1,520
1,407
p 78

o sea: c (con γ expresado en radiaciones) = $d \cdot \gamma$

$$c \text{ (con } \gamma \text{ expresado en segundos)} = d \cdot \frac{\gamma''}{206\,265''}$$

en donde c y d deben expresarse en la misma unidad de medida.

Siendo, por ejemplo, $\gamma = 30''$, tendremos para las distintas distancias d los errores c consignados en la siguiente planilla:

γ	d	c
30''	5 m	0,7 mm
	10 "	1,5 "
	15 "	2,2 "
	20 "	3,0 "
	25 "	3,6 "
	30 "	4,4 "
	40 "	5,8 "
	50 "	7,3 "

Por medio de la nivelación desde el medio ($d_A = d_B$), eliminase el efecto de este error, conforme hemos visto anteriormente. En caso de no verificarse la igualdad de las distancias, la eliminación del efecto de este error no será completa.

Suponiendo, por ejemplo, un error $\gamma = 1'$, y ($d_B - d_A$) = 2 metros, tendremos para el resto de error no eliminado la cantidad:

$$1/3438 \cdot 2 \text{ m} = 0,6 \text{ mm}$$

magnitud despreciable cuando se trate de nivelaciones de tercer orden, con lecturas al $1/2$ cm.

Pero si el desnivel Δh debe ser obtenido con más exactitud, la igualdad de las distancias ha de cumplirse con tanto más rigor cuanto más grande sea el error γ del instrumento. Cuando después de corregirse el instrumento quedara

todavía un ángulo γ relativamente grande, se repetirá la corrección hasta lograr la precisión requerida.

Una vez verificado el estado de un nivel, y antes de proceder a su corrección, es conveniente reflexionar primero si la precisión del trabajo a realizar o razones económicas exijan o no la reducción del error γ .

8. TOLERANCIA PARA EL ERROR γ ADOPTADA PARA LAS NIVELACIONES DE ALTA PRECISION, Y TOLERANCIA PARA LA FALTA DE EQUIDISTANCIA DE LAS MIRAS.

En las nivelaciones de alta precisión rige para la distancia de 50 metros, por ejemplo, la tolerancia de $c = 1$ mm, es decir que no se corregirá el error γ mientras su efecto c , a 50 metros, no sobrepase 1 mm. (*)

En base a este valor de γ , tendremos entonces para una tolerancia en la desequidistancia de las miras, t , de 5 metros (45 m atrás y 50 m adelante, por ejemplo), un efecto c delante:

$$c = \frac{1}{50\,000} \cdot 5\,000 \text{ mm} = 0,1 \text{ mm.}$$

Ver pag 114

Para las nivelaciones técnicas (visuales de 50 m), puede admitirse para la desequidistancia una tolerancia t de 5 a 10 metros, según la precisión exigida.

(*) Tolerancia adoptada para los trabajos de nivelación de alta precisión del Instituto Geográfico Militar Argentino.

9. ERROR DE CRUCE.

A raíz de la corrección explicada en el N° 5 se habrá logrado establecer el **paralelismo en elevación** entre el eje de colimación y el eje del nivel. Puede, sin embargo, faltar todavía dicho paralelismo en el plano. Se cruzan entonces las proyecciones horizontales de dichos ejes, formando un pequeño ángulo llamado **error de cruce** del nivel.

Con el objeto de ponerlo en evidencia, se procederá del siguiente modo: Estando el instrumento corregido en todo lo demás, se colocará el anteojo en la dirección de dos tornillos calantes, se centrará el nivel tubular usando uno de dichos tornillos calantes y se efectuará una lectura de mira. Manteniendo siempre centrado el nivel, se producirá una inclinación del eje vertical con ayuda del tercer calante. Si al proceder así se observara un notable cambio de la lectura, sería indicio de la existencia, de un fuerte error de cruce, defecto éste que a veces puede eliminarse por medio de tornillos laterales de corrección.

En los pequeños modelos que aquí se consideran, este error se halla generalmente corregido por el fabricante.

El error de cruce, sin embargo, no deja de tener cierta importancia en las nivelaciones corrientes, en las cuales se suelen verticalizar el eje sólo aproximadamente por medio de un nivel esférico, lo cual, en realidad, es admisible sólo en caso de no estar afectado el instrumento del error de cruce.

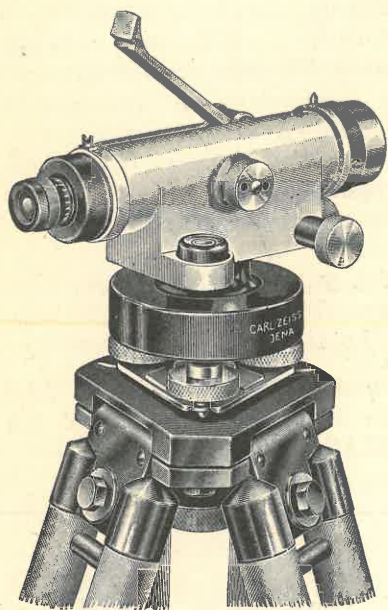


Fig. 4. — Nivel "Zeiss" D.

Principales características:

Diámetro del objetivo . . .	30 mm
Aumento del anteojo analítico . . .	25
Luminosidad del anteojo . . .	1,44
Sensibilidad del nivel tubular 30"	por 2 mm

10. NIVELES SIMPLES "ZEISS" D Y "WILD" I. Pertenecen a este grupo de niveles también el nivel "Zeiss" D (fig. 4) y el nivel "Wild" I (fig. 5). En este último modelo el nivel tubular es de coincidencia (ver N° 22, pág. 21, tomo II, 2ª edición). Tanto la coincidencia de los extremos de la burbuja en el "Wild" como el centrado de la burbuja en el "Zeiss" se producen con mover el correspondiente tornillo calante.

11. EJEMPLOS PRACTICOS CONSIGNADOS EN NUESTRO FORMULARIO DE NIVELACION N° 1. EXPLICACIONES SOBRE EL PROCEDIMIENTO OPERATORIO Y MODO DE ANOTAR

LAS LECTURAS DE MIRA. Centrado el nivel esférico, se procederá a la observación en el siguiente orden:

- 1) Se apuntará aproximadamente la mira atrás;
- 2) se centrará el nivel tubular;
- 3) se leerán los hilos estadimétricos, anotando las lecturas en columna (3) del formulario;
- 4) verificado el buen centrado del nivel, se efectuará la lectura del hilo medio, anotándola en columna (4).

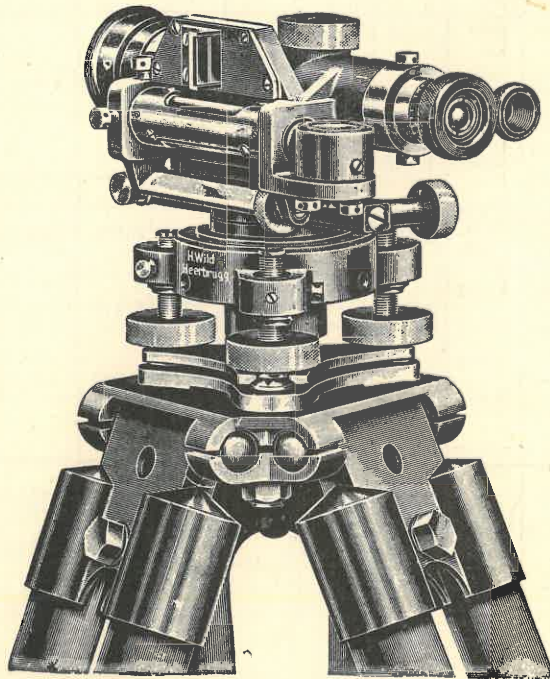


Fig. 5. — Nivel "Wild" I.

Principales características:

Díámetro del objetivo	25 mm
Aumento del anteojo analítico	18
Luminosidad del anteojo	1,93
Sensibilidad del nivel tubular	40"/2 mm

De un modo completamente análogo se procederá en el golpe adelante.

Principio de anotación. Se seguirá en las anotaciones invariablemente la siguiente norma: **A todo punto de mira relacionado, ya sea punto de cambio o punto intermedio** (ver N° 4, § 16), **será dedicado un solo renglón horizontal** del registro, en cuyo renglón deberán figurar todas las lecturas que a dicho punto se refieran.

La columna (1) está destinada a la designación o numeración de los puntos de mira. Las estaciones de nivel no figuran en este formulario, contrario a la costumbre establecida en las nivelaciones de precisión.

Las **distancias** que se consigan en columna (2), se expresan en **pasos**.
El contralor del hilo central, en base a las lecturas de los hilos estadiométricos deberá hacerse inmediateamente, pudiendo salvar así en seguida un error grosero.

PUNTO	DIST. PASOS	HILOS DISTANCIOM.		LECTURA DE MIRA HILO MEDIO			DESNIVELES Δh		COTAS PROVISION. m	CORRECCION mm	COTAS CORREGIDAS m
		ATRAS INF. SUP.	ADEL. INF. SUP.	ATRAS m	INTERM. m	ADEL. m	+	-			
(1)	(2)	(3)		(4)			(5)		(6)	(7)	(8)
P. F. 54	120	2,394		2.145							424.724
		1,895									
1	120	1,705	2,771	1,455		2,521		0,376	424,348		
2	120	1,204	2,270								
		2,063	2,022	1,762		1,773		0,318	424.030		
3	140	1,460	1,522								
			3,944			3,644		1,882	422,148		
			3,343								
SUMAS	380			5,362		7,933		2,576	422,148		
				$\Sigma \text{at.} - \Sigma \text{ad.} = -2,576$					-424,724		
									= -2,576		

Form. niv. N° 1.

Al final de cada página deberá efectuarse los **dos contralores de cálculo**, de columnas (4) y (5), y un **tercero**, de columna (6), en caso de calcularse las cotas de los puntos de cambio.

En las nivelaciones de carácter técnico, muchas veces no se llenan las columnas (2) y (3) de nuestro formulario.

Este formulario "Form. ni. 1", para **registro de nivelación común** (3ª edición), que damos a continuación, se halla en uso en varias reparaciones argentinas y extranjeras.

§ 5.

NIVEL EGAULT CON NIVEL TUBULAR FIJO E INDEPENDIENTE DEL ANTEOJO

1. **DESCRIPCION.** El nivel Egault es el tipo de los llamados “niveles de anteojo con nivel fijo independiente”. Consta este nivel de un anteojo (provisto de ocular de Ramsden) que descansa por medio de dos collares

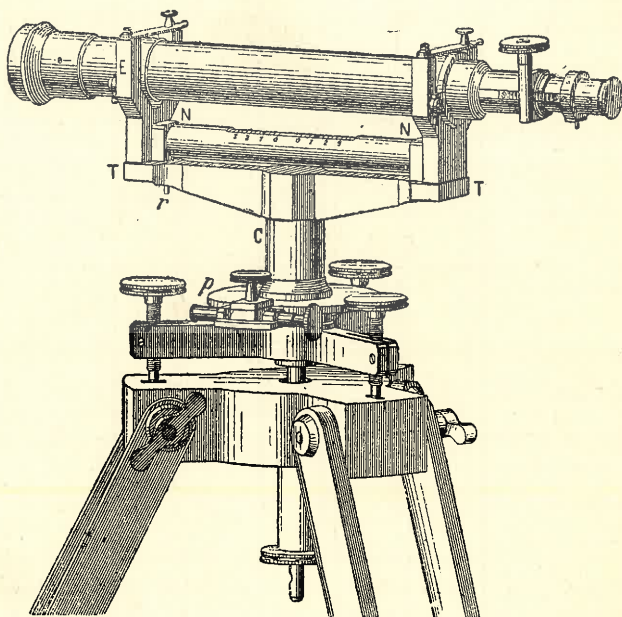


Fig. 1. — Nivel Egault.

o anillos circulares de igual diámetro sobre dos horquillas o estribos **EE** unidos a una pieza transversal **TT** (ver figs. 1 y 2).

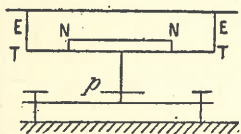


Fig. 2.

Esta pieza, que lleva fijo el nivel tubular **NN**, está montada sobre una columna **C**, que gira alrededor de un pivote sostenido por una sólida base triangular provista de tres tornillos calantes.

Los movimientos groseros y finos de esta alidada pueden regularse mediante un sistema de fijación periférico.

El anteojo es girable sobre sí mismo hasta llegar a un tope, a 180°, pudiendo, además, ser invertido, es decir sacado de sus estribos, para volver a colocarse de tal modo que vendrá a quedar el ocular donde antes estaba el objetivo.

2. CONDICIONES QUE DEBEN SATISFACERSE.

- 1) Eje de nivel perpendicular al eje vertical, $NN \perp VV$.
- 2) Centración del retículo, haciendo coincidir el eje de colimación CC con el de los collares o anillos AA .
- 3) Paralelismo en elevación de los ejes de colimación y del nivel, $CC \parallel NN$.

Constituye una ventaja de los niveles de collares la posibilidad de corregirlos desde una sola estación.

3. PROCEDIMIENTO OPERATORIO A EMPLEAR EN LA CORRECCION. Ad 1). Se procederá conforme queda explicado en la pág. 151, Tomo II, pudiendo primeramente determinar el punto de verticalidad y verticalizar el eje, llevando luego dicho punto al centro de la graduación accionando sobre el tornillo r , corrigiéndose así el nivel.

Ad 2). Verticalizado el eje principal, se apuntará a un objeto lejano bien definido, no teniendo así influencia una eventual descentración del objetivo. Si al girar el anteojo sobre sí mismo de 180° , la cruz de hilos no permaneciera sobre el punto bisectado, es indicio de que el eje de colimación no coincide con el de los collares; y como en esta revolución queda **duplicado el efecto del error**, se corregirá mitad con los tornillos de corrección del retículo.

Ad 3). Después del centrado del retículo, y estando en posición vertical el eje principal VV , se dirigirá el anteojo a una mira colocada a unos 50 metros, efectuando la **lectura a**. Luego se levantará el anteojo de las horquillas, se girará la alidada de 180° , volviendo a colocar aquél en sus horquillas, quedando entonces el ocular donde antes estaba el objetivo, y viceversa. Apuntando nuevamente la mira, se obtendrá con **nivel centrado la lectura b**.

Produciendo ahora, por medio del dispositivo de corrección, que existe en uno de los estribos, la lectura promedio $\frac{1}{2}(a + b)$, quedará el eje de colimación en **posición horizontal**, es decir, $CC \parallel NN$, a **condición de ser los anillos completamente iguales**.

4. EXAMEN DE LA IGUALDAD DE LOS COLLARES Y CONSECUENCIAS. El examen de la igualdad de los collares puede efectuarse por medio de la "nivelación desde el medio y un extremo", cuyo resultado es independiente de la propiedad de los collares (ver Nos. 5 y 6 de § 4).

Si de esta operación resultara que el eje de colimación es paralelo al eje del nivel, se deduciría que los dos collares son efectivamente iguales.

En caso contrario, se establecería dicho paralelismo por medio de los tornillos de corrección del retículo (ver N° 5 del párrafo anterior), debiendo el nivel **Egault**, para ser utilizable, ser considerado como **nivel simple** y ser rigurosamente tratado como tal en todas las operaciones que con él se ejecuten.

5. ERROR DE CRUCE. Respecto a la falta de paralelismo en el plano o sea el **error de cruce**, se procederá de un modo completamente análogo al explicado en el N° 9 del párrafo anterior.

§ 6.

NIVEL DE PRECISION DE CONSTRUCCION ANTIGUA CON NIVEL DE CABALLETE.

1. CONDICIONES QUE DEBEN SATISFACERSE.

- 1) Plano principal del nivel esférico debe ser perpendicular al eje vertical.
- 2) Centración del retículo, debiendo coincidir el eje de colimación con el de los collares (anillos).

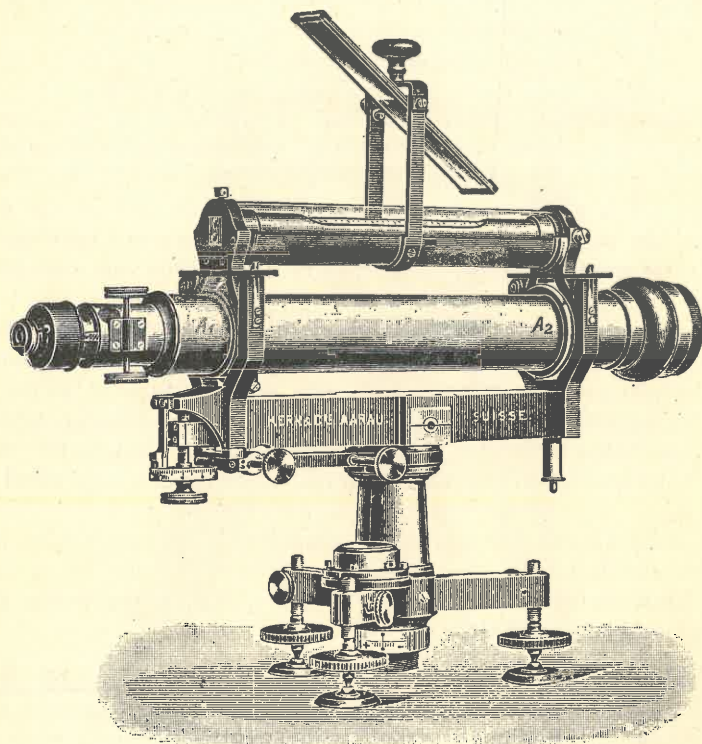


Fig. 1. — Nivel de precisión "Kern". (*)

Características principales

Diámetro del objetivo	41 mm
Aumento del antejo.	42
Luminosidad	0,95

(*) Es éste, quizás, entre todos los niveles de precisión de construcción antigua, el que más tradición tiene; ver: *Report of the Superintendent of the Coast and Geodetic Survey*, año 1903: "Precise Leveling in the United States", by John F. Hayford, pág. 199, donde se encuentra el siguiente dato estadístico: "Leveling of the Corps of Engineers with the "Kern" levels: 7000 km," sin contar the United States Lake Levelings; y en otra parte: *William M. Gillespie*, "A treatise on Surveying", Part II, donde dice en pág. 243: "It was the instrument prescribed by the International Commission held in Berlin in 1864".

- 3) Corrección del nivel de caballete, estableciendo el paralelismo entre su eje y la generatriz del cilindro de los collares del anteojo, siendo entonces y con hallarse cumplida la condición 2):

$$\mathbf{NN} \parallel \mathbf{CC}$$

- 4) El hilo nivelador del retículo debe ser horizontal.

5) Los dos collares del anteojo deben ser exactamente iguales, de tal modo que el anteojo puede ser invertido sin que por ello se modifique su eje longitudinal de rotación.

2. MODO DE EFECTUAR LAS CORRECCIONES. Ad 1). Se examinará el nivel esférico de la manera conocida (ver pág. 153, Tomo II): Centrado el nivel en cualquier dirección acimutal del anteojo, se girará éste de 180°, corrigiendo mitad de la descentración que se revelara con los tornillos de corrección del nivel y la otra con los calantes.

Ad 2). La verificación se ejecuta en la forma descripta en el N° 2, ad 2), pág. 105, a lo cual, para mayor claridad, agregamos lo siguiente:

Sabemos que el eje de colimación está determinado por el centro del retículo y el centro del objetivo, eje que debe ser llevado por medio de esta corrección al **paralelismo con el eje de los collares**. Se colocará para eso una mira a una distancia de 100 metros, como mínimo, para que una eventual descentración del objetivo no inflencie la precisión de esta operación. Hecha la primera lectura y luego de quitar el nivel de caballete, se hará girar el anteojo alrededor de su eje longitudinal con el objeto de efectuar una segunda lectura con el hilo medio. La diferencia de ambas lecturas expresa el doble error, que se eliminará moviendo el tornillo de corrección del retículo hasta producir la lectura media.

Con el fin de averiguar el buen **centrado del objetivo**, se colocará una marca (por ejemplo un círculo negro sobre cartón blanco) a la distancia mínima (3 ó 4 metros) que el anteojo permita enfocar. Bisectado este círculo con el hilo medio, se girará el anteojo. Si en este movimiento el punto se desplazara, sería indicio de que el objetivo no está bien centrado. Los buenos constructores de niveles cuidan de que no exista este error.

Ad 3). Se supone, por un momento, la igualdad de los anillos, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ (fig. 1). Se centrará la burbuja del nivel de caballete. Luego se invertirá el nivel sobre la línea de apoyo, sin modificar ningún otro órgano de la alidada. Si después de esta operación no quedara desplazada la burbuja, es indicio de que el eje del nivel es paralelo a la línea de apoyo (generatriz del cilindro), sobre la cual se efectúa la inversión (o que está **corregido el nivel**). En caso de producirse una descentración de la burbuja, sabremos que mitad es efecto del error del nivel, proveniente la otra del hecho de no ser aún horizontal dicha línea de apoyo. Se corregirá, por tanto, mitad con los tornillos de corrección del nivel y mitad con los calantes. Se repetirá la operación hasta tener completamente eliminado el error.

Se ha conseguido establecer, así, el paralelismo entre el eje del nivel y el eje de los collares o el eje mecánico; y como este último, en virtud del cumplimiento de la condición 2), coincide con el de colimación, tendremos

satisfecha la **condición principal**:

$$NN \parallel CC$$

Ad 5). La igualdad de los collares será examinada del siguiente modo: Colocado el anteojo en la dirección de dos tornillos calantes, se centrará la burbuja del nivel de caballete. Se levantará éste, se invierte el anteojo sobre sus collares, volviendo a colocar el nivel en la posición que tenía antes de la inversión del anteojo. Si en esta operación se produjera una descentración de la burbuja, provendría de que A_1 no es igual a A_2 , no siendo entonces indiferente cuál de los dos collares, A_1 o A_2 , se encuentra debajo del extremo del nivel. No es posible corregir este error, debiendo, por consiguiente, en caso de existir, considerar el instrumento prácticamente como nivel de anteojo fijo.

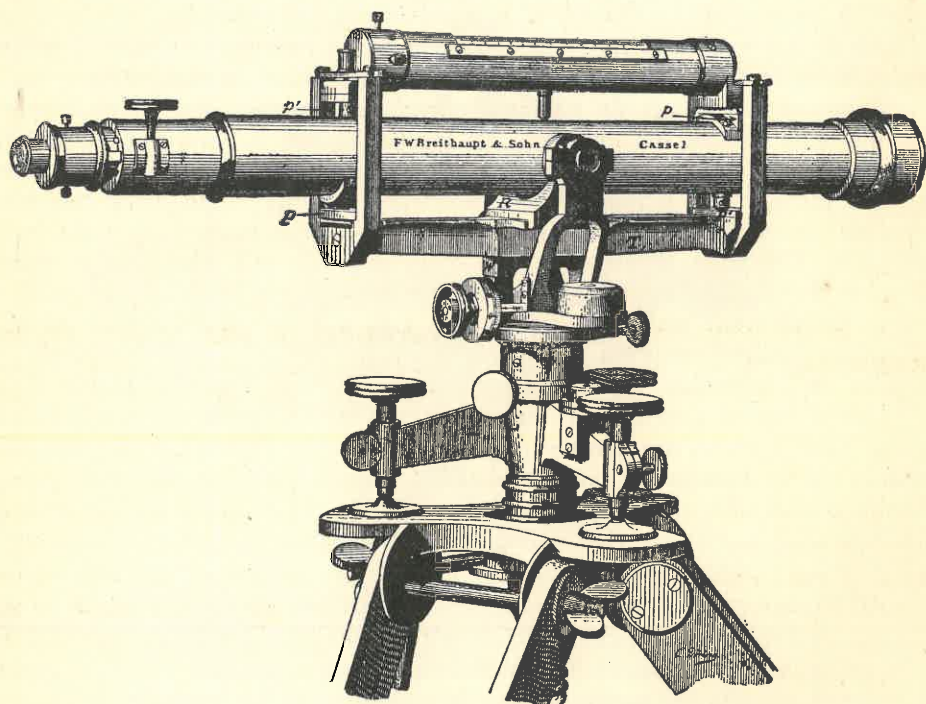


Fig. 2. — Nivel de precisión Seibt-Breithaupt.

Principales características

Díámetro del objetivo	40 mm
Aumento del anteojo	45
Luminosidad del anteojo	0,79
Sensibilidad del nivel tubular . . .	5"/2¼ mm

3. LO QUE MOTIVO LA CREACION DEL NIVEL DE PRECISION SEIBT-BREITHAUPT. Con el objeto de evitar el rápido desgaste de los collares y hacer posible la corrección del efecto de la desigualdad de los

mismos, la casa **Breithaupt** construyó un equipo de nivelación (nivel, fig. 2, y miras especiales, fig. 19 § 12), el que, en unión con un ingenioso método ideado por el Prof. **Seibt**, pudo alcanzar en la práctica de las nivelaciones de precisión notables éxitos, también en nuestro país, a tal punto de conquistar un puesto duradero en la historia de las nivelaciones fundamentales de la República Argentina, habiéndose hecho con este instrumental las primeras nivelaciones de alta precisión durante los dos primeros decenios de nuestro siglo.

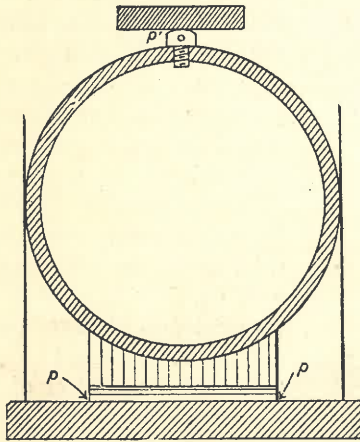


Fig. 3.

4. DETALLES CONSTRUCTIVOS QUE LO DISTINGUEN DEL TIPO GENERAL.

Según lo muestra la figura 3, el anteojo, en lugar de los collares, lleva **dos juegos de prismas con tornillo, p y p'** (ver también fig. 2), prismas de forma de cuchilla y tornillos con **cabeza esférica**, colocados de tal modo que cada vez el tornillo de un lado se opone a la arista del prisma en el otro, quedando entonces en ese instrumento substituído el **diámetro invariable** de los collares del tipo general por la **distancia variable** entre tornillo y arista de prisma.

5. MODERNIZACION DE LA CONSTRUCCION DEL NIVEL SEIBT-BREITHAUPT. En el año 1925, la casa **Breithaupt** introdujo un nuevo tipo de nivel de primer orden según **Seibt** con las siguientes características:

En lugar de:	Hoy:
Cojinetes prismáticos con tornillos cilíndricos	Cojinetes de anillos de acero templado,
Anteojo con óptica antigua (diámetro del objetivo de 40 mm y aumento 45)	Anteojo con óptica moderna de enfoque interior (con diámetro del objetivo de 50 mm y aumento 45)
Luminosidad 0,79	Luminosidad 1,13
Nivel de caballete de 5"	Nivel reversible de compensación, sistema Breithaupt de 5"
Trípode modelo antiguo	Trípode y base triangular modernizados.

6. CORRECCION GENERAL DEL NIVEL DE PRECISION SEIBT-BREITHAUPT. Después de centrar el retículo (ver N° 2), se eliminará el error de cruce (ver N° 9, § 4 y pág. 150 de tomo II), y después de poner horizontal el **hilo nivelador** del retículo, se determinará, por medio de la inversión del nivel de caballete, el punto de horizontalidad, con respecto a la línea de apoyo; colocando la burbuja en dicho punto (la línea de apoyo

será entonces horizontal), llevándolo luego, si se quiere, al medio de la graduación con ayuda de los tornillos de corrección. Quedará así el nivel **corregido**, es decir, su eje paralelo a la línea de apoyo y, en el supuesto de ser iguales los "collares" también paralelo al eje de éstos y ambos horizontales.

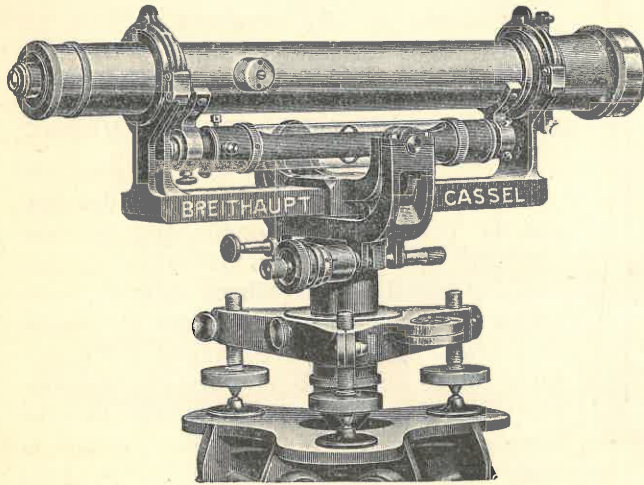


Fig. 4.

Nuevo modelo de nivel de precisión Seibt-Breithaupt.

Levantando ahora el nivel de caballete e invirtiendo el anteojo supuesto cónico dentro de sus estribos sin mover la base, y volviendo a colocar el nivel sobre el anteojo, se observará una desviación de 4ϵ , expresada en divisiones de nivel, la que mide el ángulo de inclinación del eje del nivel con respecto a la horizontal **HH** (fig. 6), correspondiente a esta posición.

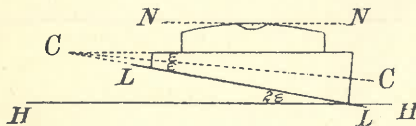


Fig. 5. — Antes de la inversión.

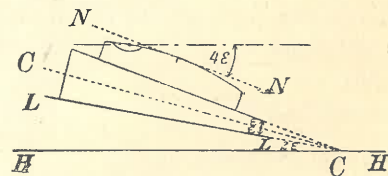


Fig. 6. — Después de la inversión.

Corrigiendo entonces en la primera posición (fig. 5) $\frac{1}{4}$ de esta desviación, con accionar sobre el tornillo de cabeza esférica, (que se halle debajo del anteojo), se habrá hecho horizontal el eje de colimación **CC**.

Esta corrección indirecta del eje de colimación, haciéndolo horizontal, producirá lógicamente (por haberse modificado la línea de apoyo) una inclinación del eje del nivel de caballete igual al mismo ángulo ϵ . Y como a un eje de colimación horizontal deberá forzosamente corresponder en

7. CORRECCION ESPECIAL DE LA DESIGUALDAD DE LOS COLLARES.

Imaginamos, para simplificar el pensamiento, que el anteojo, en lugar de formar dentro de sus collares un cilindro, constituya un cono, con semi-ángulo de abertura ϵ (figs. 5 y 6). Estando centrado el nivel de caballete, formará en tales condiciones el eje de colimación, **CC**, un ángulo ϵ con la horizontal **HH**, y la base inferior **LL** del anteojo el ángulo 2ϵ con aquélla.

un instrumento corregido un eje de nivel horizontal también, es necesario eliminar en el nivel dicha desviación ϵ , actuando sobre los tornillos de corrección del mismo, quedando así satisfecha la **condición principal**:

$$CC \parallel NN.$$

8. PERPENDICULARIDAD DEL EJE DE COLIMACION AL EJE VERTICAL: $CC \perp VV$. Estando colocado el nivel de caballete en la dirección de dos tornillos calantes, se centrará la burbuja por medio de éstos. Si después de un giro horizontal de 180° del anteojo se produjera una desviación, se corregirá mitad con los calantes (**VV** estará entonces situado en un plano vertical) y mitad con el tornillo de elevación (**VV \perp NN y CC**). Colocando el anteojo a 90° , con respecto a la anterior posición, y centran-do el nivel con el tercer calante, se habrá llevado el eje principal a un segundo plano vertical, es decir, verticalizado completamente dicho eje.

§ 7.

NIVEL BIAxIAL DE ZEISS

1. PUNTUALIZANDO LOS PROGRESOS OPTICOS Y CONSTRUCTIVOS REALIZADOS. Las ventajas de este instrumento emanan principalmente de las siguientes innovaciones óptico-constructivas:

1) de la construcción particular del anteojo, en la que se substituyó el **tiraje ocular** (parte débil del anteojo astronómico) por el **enfoque interior**, según Wild, a cremallera interna, a cubierto de la acción de la humedad y polvo (ver: N° 21, § 10, tomo II, 2ª edición);

2) de la transformación del anteojo común en **anteojo biaxial**, (*) con el objeto de facilitar la corrección principal;

3) de la introducción del **nivel de coincidencia**, según Wild, desprovisto de graduación, que se observa desde el ocular por medio de un sistema de prismas, apareciendo la burbuja partida en dos mitades, cuyas imágenes forman menisco, en el momento de estar centrado el nivel (ver explicaciones detalladas en págs. 21 y 22 de tomo II, 2ª edición).

2. PRINCIPALES CARACTERISTICAS DEL ANTEOJO BIAxIAL.

El anteojo tiene dos oculares, dos objetivos y dos retículos, por consiguiente, **dos ejes de colimación**: el principal y el de corrección. En lugar de estar dotado de un retículo común grabado sobre una placa de vidrio, lo lleva grabado sobre una lente, que puede servir como segundo objetivo, llamado **objetivo de corrección**. El **objetivo principal**, a su vez, es portador

(*) Esta innovación no ha significado un progreso: Debido a las múltiples condiciones ópticas que tienen que satisfacerse en el anteojo biaxial, sufren las buenas cualidades de las imágenes, circunstancia por la cual este anteojo hoy no se construye más.

del retículo llamado **retículo de corrección** y usado como tal cuando la lente que porta el retículo principal hace las veces de objetivo.

Resulta, así, que el anteojo es **biaxial**, pudiendo empleárselo cual dioptra, para dirigir visuales recíprocas con sólo sacar el ocular principal y colocar el de corrección ante el objetivo principal.

3. **CUATRO DIFERENTES POSICIONES DEL CONJUNTO "ANTEOJO-NIVEL", QUE SE UTILIZAN PARA EFECTUAR LA CORRECCIÓN PRINCIPAL: CC || NN.** Rígidamente unido al anteojo, el nivel reversible puede girar con él, pasando de la posición izquierda a la derecha, y viceversa.

Para efectuar la corrección principal del nivel, es necesario llevarlo sucesivamente a las siguientes 4 posiciones:

Posición I:	con oc. de trabajo,	niv. a la izq. y prisma arriba,
Posición II:	" " " " "	" " " der. " " abajo,
Posición III:	" " " corrección,	" " " izq. " " "
Posición IV:	" " " " "	" " " der. " " arriba.

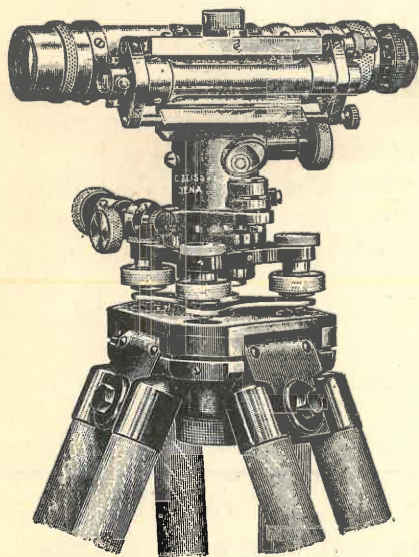


Fig. 1.— Nivel biaxial "Zeiss" I.

Principales características:

Diámetro del objetivo	27 mm
Aumento del anteojo analítico	20
Luminosidad	1,79
Sensibilidad del nivel tubular 25"/2 mm	

sobre el primero en la magnitud angular β . Operando en posición I, tendremos, como anteriormente dijimos, $h' + a_1$; en posición IV, ahora, en vir-

4. EXPLICACIONES DE LAS 4 LECTURAS DE MIRA QUE CONCURREN A LA FORMACION DE LA QUE CORRESPONDE A LA VISUAL HORIZONTAL COMPENSADA.

Supongamos ahora que operamos con el eje de colimación principal (posición I) y que efectuamos, con burbuja centrada, la lectura de mira $h' + a_1$, donde a_1 significa el efecto de una elevación α_1 , en la mira y h' la lectura correspondiente a una visual horizontal (esto implica suponer una cierta elevación α_1 del eje de colimación).

Efectuando ahora, con eje de colimación auxiliar (posición IV) y burbuja centrada, una **observación recíproca**, en el supuesto de coincidir los dos ejes de colimación, resultaría una lectura $h' - a_1$, es decir disminuía la cantidad h' en lo que antes estuvo aumentada, obteniéndose entonces en la semi-suma un valor que corresponde a la visual horizontal.

Suponiendo ahora que los dos ejes de colimación formen entre sí un pequeño ángulo β , tal que en la posición IV el segundo eje de colimación se eleve

tud del nuevo supuesto, un valor $h' - a_1 + b$, donde b es el efecto del ángulo β sobre la mira.

Operando en posición II, con burbuja centrada, obtendremos una lectura $h' + a_2$, donde a_2 es el efecto de cierta otra elevación α_2 de la visual, sobre la mira; y como en posición III el segundo eje de colimación queda debajo del primero en la cantidad angular β , resultará, con burbuja centrada, en posición III, la lectura $h' - a_2 - b$, resultados éstos que se explican por la circunstancia de que en las posiciones I y IV se usaba la misma parte de la superficie del nivel, como así también en las posiciones II y III.

Tenemos entonces las siguientes 4 lecturas de mira:

$$\begin{array}{l} \text{Posición I: } h' + a_1 \\ \text{Posición IV: } h' - a_1 + b \\ \text{Posición III: } h' - a_2 - b \\ \text{Posición II: } h' + a_2 \\ \hline \text{Suma: } = 4h' \end{array}$$

Haciendo el promedio de ellas, se obtendrá un valor $h = \frac{1}{4} h'$ libre de error, correspondiente a la visual horizontal, quedando en el mismo **compensado** los efectos de la falta de paralelismo ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) de los dos ejes del nivel tubular y el de la convergencia β de los dos ejes de colimación.

En la práctica, estas lecturas se efectúan en el orden: I-II-III-IV.

5. EJECUCION DE LA VERIFICACION Y CORRECCION PRINCIPAL. Estando el nivel en posición I, llamada "posición de trabajo", se efectuará sobre una mira colocada a 30 metros una lectura, la que se comparará con el promedio h obtenido según dejamos explicado. Si esta comparación acusa una diferencia mayor que la tolerancia establecida para la clase de nivelación que se ejecuta, se corregirá el nivel del siguiente modo: Colocado el anteojo en posición I, se producirá, por medio del tornillo de elevación, la lectura h , corrigiendo luego el nivel hasta que esté centrada la burbuja, valiéndose para ello del **dispositivo de coincidencia especial**: Se aflojará la contratuerca del tornillo que actúa sobre la caja del prisma, se desplazará, por intermedio de aquél, la caja hasta obtener el centrado de la burbuja con producir la coincidencia. En caso de no alcanzar el juego del mencionado dispositivo, debido a una fuerte descorrección, se llevará la caja del prisma a su posición normal, por medio del citado tornillo, centrando luego la burbuja con ayuda de los tornillos de corrección, que se encuentran en el otro extremo del nivel tubular. Efectuada así una corrección aproximada, se podrá obtener la definitiva por medio del nombrado dispositivo de corrección.

6. TOLERANCIA PARA EL ESTADO DE CORRECCION DE UN NIVEL EN NIVELACION DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN. La condición del paralelismo de los ejes de colimación y del nivel tubular, deberá hallarse siempre satisfecha dentro de cierta tolerancia de antemano fijada, la que establece, por ejemplo, que el efecto c del error γ , entre el eje de

colimación y el eje del nivel, sobre una mira a 50 metros, no exceda de 3 mm (ver también los Nos. 7 y 8 del § 4). *Pag 99*

En base a este máximo error admisible, tendríamos entonces, para una tolerancia en la desequidistancia de 5 metros, un efecto c :

$$c = \frac{3}{50\,000} \cdot 5\,000 = 0,3 \text{ mm.}$$

7. ERROR DE CRUCE.

Puede suceder que el eje de colimación y el eje del nivel tubular no sean todavía paralelos en el plano, estando sólo en planos paralelos; crúzase entonces sus proyecciones horizontales. De existir este error, podrá producir efectos perjudiciales para el trabajo toda vez que no esté debidamente verticalizado el eje principal del instrumento, a pesar de estar centrado el nivel tubular.

Para constatar rápidamente la existencia de este error, se centrará la burbuja observándola directamente, es decir sin valerse del sistema de coincidencia se girará el anteojo de 90° sobre sí mismo, quedando entonces el nivel arriba.

En esta posición la burbuja debería permanecer centrada. En caso contrario, se la centrará por medio de los correspondientes tornillos de corrección del nivel tubular. Una descentración de la burbuja de unos pocos milímetros puede tolerarse sin ningún inconveniente.

truce muy verificada

§ 8

NIVEL DE ANTEOJO CON NIVEL REVERSIBLE

1. **LO QUE DISTINGUE ESTOS MODERNOS NIVELES DEL TIPO BIAxIAL.** Han sido razones de carácter óptico-constructivo, el perseguir una mayor simplicidad, comodidad, rapidez de las correcciones y mayor capacidad óptica, las que hicieron abandonar el anteojo biaxial.

Reconocióse pronto que era más racional excluir en la construcción de esta clase de instrumentos todo nivel reversible cuyas tangentes tuvieran **errores de convergencia** mayores que un valor máximo admisible de antemano fijado, como, por ejemplo, el de 0,2" adoptado por la casa **Kern**, valor angular al que corresponde sobre una mira situada a 100 metros de distancia un efecto de $\frac{0,2''}{206\,265''} \cdot 100\,000 = 0,1 \text{ mm.}$

2. **CONDICION PRINCIPAL QUE DEBE SATISFACER EL NIVEL Y MANERA DE EFECTUAR LA CORRECCION.** Partiendo de esta base, la condición principal a satisfacer es invariablemente:

CC || NN.

Supónese verificada y rectificada la centración del retículo según págs. 105 y 107 y eliminado un eventual error de cruce según el procedimiento indicado en el N° 7 del párrafo anterior.

Nivelado el instrumento por medio del nivel esférico, se efectuará con nivel reversible centrado y situado a la izquierda, una primera lectura, a_1 , sobre una mira vertical colocada a unos 30 metros de distancia. Girando el anteojo alrededor de su eje mecánico, se tendrá nivel reversible a la derecha. Centrado éste, se efectuará una segunda lectura de mira, a_2 .

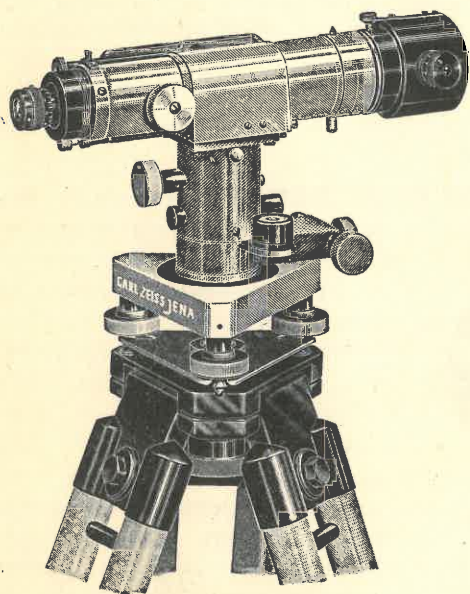


Fig. 1.— Nivel "Zeiss" B (con o sin placa de vidrio plana).

Principales características:

Diámetro del objetivo	35 mm
Aumento del anteojo analítico	31
Luminosidad del anteojo	1,28
Sensibilidad del nivel tubular	20" / 2 mm

Si estas dos lecturas no coinciden, el eje de colimación no es todavía paralelo a las dos tangentes (entre sí paralelas por hipótesis) del nivel reversible. Se formará la media $\frac{1}{2} (a_1 + a_2)$ de las lecturas a_1 y a_2 .

Produciendo ahora por medio del tornillo de elevación esta lectura promedio (usando el hilo medio del retículo), se corregirá una eventual descentración de la burbuja del nivel que en ello se produjera, mediante los tornillos de corrección, quedando, así, satisfecha la condición principal exigida: **CC || NN**.

Este procedimiento de corrección de tan extraordinaria simplicidad que permite aplicar este tipo de nivel, **no puede extenderse, sin más, al nivel de coincidencia**, debiendo en este último previamente satisfacerse una condición de la cual tratará el siguiente número.

3. TRES RECURSOS PARA LA ELIMINACION DEL ANGULO DE CONVERGENCIA DE UN NIVEL REVERSIBLE.

En un nivel reversible normal (ver número anterior)

las divisiones están dispuestas de tal manera que las tangentes en sus puntos medios (sus ejes) son paralelas entre sí.

En los **niveles de coincidencia**, en cambio, prodúcese la superposición de los extremos de burbuja sin que fuera preciso que se cumpla la condición que acabamos de expresar.

En caso de existir un ángulo de convergencia sensible, la media de ambas lecturas, de la efectuada con nivel a la izquierda y la de la derecha, no será generalmente la que corresponde a la visual horizontal.

La **eliminación de este error** puede realizarse mediante el uso de un **anteojo biaxial** (ver párrafo anterior).

Otro recurso para conseguir este mismo fin consistiría en el empleo de un **nivel reversible** normalmente graduado, utilizándolo (sin valerse del aparato de coincidencia) tal cual se explicó en el número anterior: Pro-

ducida la lectura correspondiente a la horizontal, se desplazará la caja del prisma hasta obtener la superposición de los extremos de burbuja.

No se recomienda este procedimiento por resultar superflua y molesta la graduación completa del nivel tubular.

Otro método consiste en marcar sólo los puntos medios de la división del nivel reversible, colocando la caja del prisma simétricamente con respecto a aquellos dos puntos. En esta posición del prisma estará satisfecha la condición de que a la media de ambas lecturas efectivamente corresponda la visual horizontal.

Tal posición del prisma queda marcada por medio de un índice, existiendo además una pequeña escala que permite fijar una determinada posición del prisma. (*)

4. **CORRECCION DEL NIVEL DE COINCIDENCIA.** Después de esta brevísima operación preliminar, la corrección del nivel resulta muy simple y rápida.

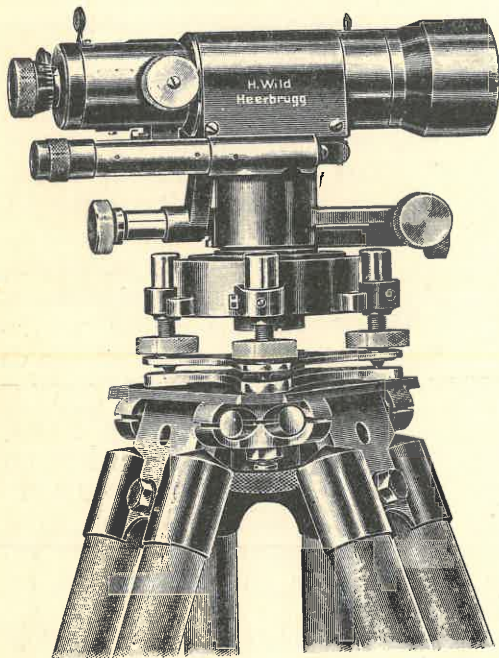


Fig. 2. — Nivel "Wild" II sin placa plana.

Características principales:

Abertura libre del objetivo	40 mm
Aumento del anteojo	28
Luminosidad	2,04
Sensibilidad del nivel tubular	20" / 2 mm

1) Se colocará el prisma en el índice.

2) Se efectuarán una lectura con nivel de coincidencia a la izquierda, y otra con nivel a la derecha.

3) Colocado el nivel a la izquierda, se producirá sobre la mira la lectura promedio, desplazando la caja hasta obtener la perfecta coincidencia. Comparando la nueva posición del índice con la anterior, se podrá juzgar sobre la buena conservación de la corrección.

5. **COMPROBACION DEL PARALELISMO DE LAS DOS TANGENTES DEL NIVEL TUBULAR.** Puede el ingeniero fácilmente efectuar un contralor práctico del paralelismo de las tangentes del nivel reversible, recurriendo al procedimiento clásico de corrección por medio de la "nivelación desde el medio y un extremo".

Estando el nivel cuidadosamente corregido según el método

(*) Ver: "Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik", N° 4, Año 1929: Alfred Aregger. "Das Nivellierinstrument Kern II".

explicado en el número anterior, se lo considera como nivel simple en este nuevo examen: Resultando que el eje de colimación es efectivamente paralelo a una de las dos tangentes, serán paralelas entre sí las dos.

6. VENTAJAS DEL NIVEL REVERSIBLE Y NIVEL DE COINCIDENCIA. El simple procedimiento de corrección indicado en los números 2 y 4, nos enseña también el modo de utilizar ventajosamente el nivel reversible (aún estando descorregido) cuando se quiera obtener desniveles más precisos, con sólo observar cada visual en ambas posiciones del nivel (izquierda y derecha): Elimínanse, en la media los errores instrumentales, consiguiéndose, además, un aumento de la precisión en la razón 1 a $\sqrt{2}$.

En las nivelaciones de precisión efectuadas en terreno muy accidentado, esta posibilidad puede redundar frecuentemente en un factor de verdadera importancia práctica, cuando sea necesario tomar visuales desiguales en los golpes de nivel atrás y adelante, o en casos de tener dudas sobre el estado de corrección del nivel.

La desigualdad de los collares del anteojo no tiene influencia aquí. Bastará que el anteojo pueda girar sobre su eje mecánico determinado por los dos centros de collares, no siendo, por consiguiente, necesario la inversión de aquél sobre sus collares.

Por las notables ventajas del nivel de coincidencia, ver págs. 21 y 22 del tomo II, 2ª edición.

7. PARTICULARIDADES DE LOS MODERNOS NIVELES DE PRECISION DE ESTE TIPO: PLACA DE VIDRIO DE CARAS PLANAS Y PARALELAS; TRAZO DE CUÑA EN EL RETICULO, USO DEL RETICULO CON CUÑA EN LOS DIVERSOS METODOS DE TRABAJO.

Después de nuestras explicaciones teóricas sobre las características de la placa de vidrio con caras planas y paralelas y su aplicación práctica dadas en las páginas 16 y 17 del tomo II, 2ª edición, podemos limitarnos a la siguiente brevísima descripción del dispositivo esquemáticamente represen-

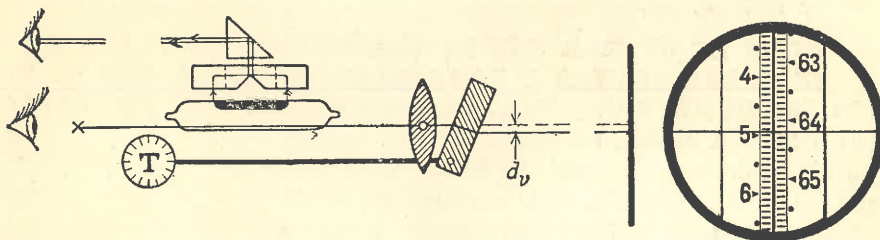


Fig. 3. — Esquema del dispositivo de placa de vidrio con caras planas y paralelas. Se ilustra la bisección de un espacio blanco de 5 mm por medio del hilo central y con ayuda del tambor T.

tado en figura 3: Consta, según ya dijimos en dicha referencia, este dispositivo en una placa antepuesta al objetivo del anteojo y giratoria alrededor de un eje horizontal, cuya rotación se efectúa por medio de un tornillo micrométrico T (ver figs. 3 y 4).

El efecto de esta rotación es un desplazamiento del eje de colimación paralelo a sí mismo, que puede llegar a un máximo de 5 mm arriba o debajo de la horizontal, pudiendo leerse la magnitud de este desplazamiento vertical, en unidades del medio centímetro (y la aproximación de los medios décimos del mismo o sea de $1/20$ de mm) sobre el tambor **T** (ver fig. 4b).

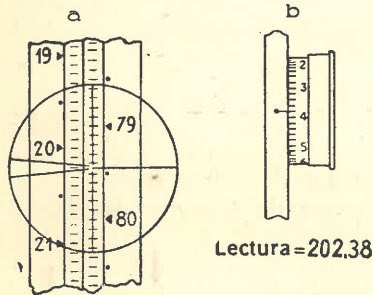


Fig. 4. — Se ilustra la lectura de mira usando el tambor **T** y la cuña filar del retículo.

Se le usa también para la bisección de un espacio blanco de la mira (ver fig. 3) **con visual horizontal desplazada** (tercer método de nivelación de precisión), procedimiento empleado en gran escala en los trabajos de nivelación de alta precisión ejecutados en nuestro país por el **Instituto Geográfico Militar** y el **Ministerio de Obras Públicas de la Nación**.

Puede todavía emplearse dicho retículo en el **nivel Zeiss A** de reciente construcción (ver fig. 2 del próximo párrafo) para un cuarto método de nivelación de precisión, con bisección de espacio blanco o trazo de mira (por medio de la cuña) correspondiente a **visual levemente inclinada**.

A continuación daremos algunos detalles relativos a la explicación del tercer método.

8. MODO DE OPERAR CON EL DISPOSITIVO DE PLACA DE VIDRIO DE CARAS PLANAS Y PARALELAS EN UNION CON EL TORNILLO MICROMETRICO, PARA LA BISECCION DE UN ESPACIO BLANCO DE LA MIRA.

La graduación del tambor del tornillo micrométrico está dispuesta de tal modo que a la visual no refractada corresponde en dicho tambor la lectura 50, y una lectura mayor a la visual bajada y una menor a la visual levantada. Distinguiremos tres casos distintos, a saber:

1er. caso: Supongamos que en una determinada posición del instrumento (sin vidrio plano paralelo), estando centrada la burbuja del nivel, el hilo central bisecte justamente el espacio entre los trazos 28 y 29, correspondiendo entonces a esta posición la lectura de mira 28,5.

Retículo de cuña (fig. 5). Uso de este retículo en los diversos métodos de trabajo.

En los niveles de alta precisión se ha reemplazado la mitad del hilo central por dos líneas en forma de cuña. Usando este retículo de cuña se consigue mantener la **precisión de la bisección** de una división de la mira casi independiente de la longitud de la visual.

La segunda mitad del "hilo central" puede utilizarse como hilo nivelador común, efectuando con su ayuda las lecturas correspondientes a la **visual horizontal no desplazada** (primer método de nivelación de precisión).

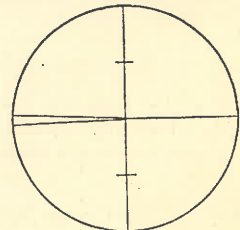


Fig. 5.
Retículo con trazo de cuña para nivelaciones de alta precisión.

Colocando ahora en tales condiciones del instrumento el dispositivo de vidrio de caras paralelas, se verá que a la bisección de dicho espacio corresponde efectivamente la lectura 50 ($\frac{1}{2}$ dmm), leídos en el tambor, como corresponde, por ser en este caso la lámina de caras paralelas perpendicular a la visual.

2º. caso: Si en vez de una lectura de 28,5 tuviéramos 28,8, sin placa, colocando ésta como antes, en posición vertical (con índice en 50), leeríamos invariablemente en la mira por estima 28,8. Inclinando ahora la placa hacia adelante, la visual se refracta, bajando, pudiendo llevársela hasta

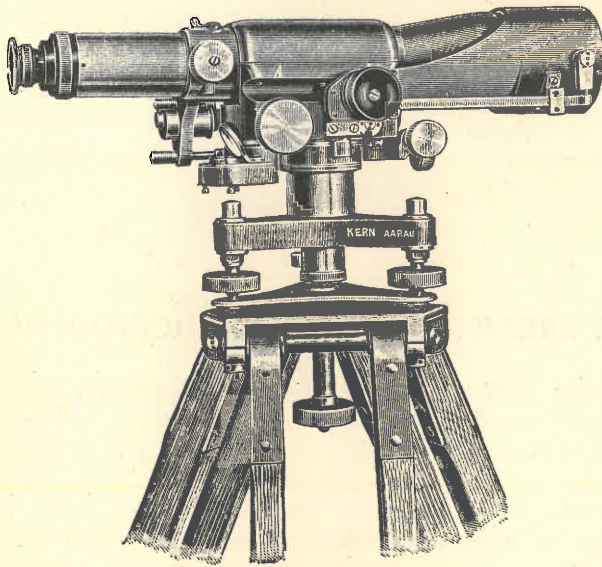


Fig. 6. — Nivel de precisión "Kern" III con micrómetro.

Principales características:

Diámetro del objetivo	48 mm
Aumento del anteojo	36
Luminosidad	1,78
Sensibilidad del nivel tubular	10"/2 mm

la bisección del próximo espacio blanco. Con este movimiento del vidrio se aumentó la lectura del tambor en 30 unidades de $\frac{1}{2}$ dmm, resultando así la lectura final 28,80 buscada.

3er. caso: Suponiendo ahora que la visual caiga en la mitad inferior del espacio, en 28,2, por ejemplo, será necesario levantarla, inclinando la placa hacia atrás para la bisección del próximo espacio blanco: La lectura del tambor disminuirá entonces desde 50 las 30 unidades (que en el caso 2º aumentó de 50 a 80), quedando al final en la lectura 28,20, como debe ser.

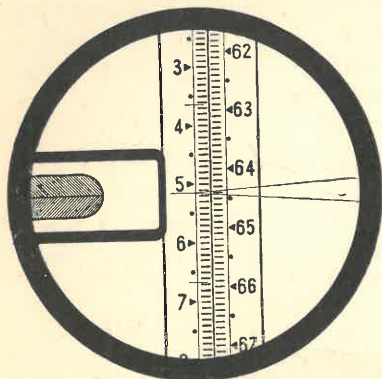


Fig. 7. — *Campo visual del anteojo.* Se ilustra el centrado de la burbuja del nivel tubular, hallándose en coincidencia las medias imágenes de los extremos de la misma.

Tratándose de la bisección de un trazo por medio de la cuña filar, el raciocinio es completamente análogo.

9. OBSERVACION DEL NIVEL DE COINCIDENCIA. Dedúcese de la misma definición del concepto de la nivelación geométrica la necesidad de la observación del nivel tubular en el momento de efectuarse la lectura de mira.

En el nivel "Kern" III (ver figs. 6 y 7) se ha conseguido la observación casi simultánea del centrado de la burbuja (algo aumentada) y de la lectura de la mira, sin necesidad de mover la cabeza y sin modificar la acomodación del ojo observador.

§ 9

NIVEL DE PRECISION DE CONSTRUCCION MODERNA.

1. AUMENTO DEL ANTEOJO Y SENSIBILIDAD DEL NIVEL TUBULAR. Sabemos que, en cuanto al instrumento se refiere, la precisión de la nivelación geométrica depende del aumento del anteojo y de la sensibilidad del nivel. Se proveerá, por consiguiente, a los instrumentos destinados a la nivelación de precisión de anteojos con fuerte aumento y de niveles tubulares de gran sensibilidad (hasta de 5", ver nivel **Seibt-Breithaupt**, figs. 2 y 4, § 6).

Un instrumento que respondiera en forma adecuada a estas dos condiciones, podrá servir para nivelaciones de precisión.

2. MODELOS ESPECIALES. Con el objeto de conseguir la máxima precisión posible se han construido modelos de los cuales hemos indicado ya dos ejemplos, el de **Seibt-Breithaupt** (ver figs. 2 y 4, § 6) y el de **Kern** (ver nivel **Kern III**, fig. 6, § 8), a los cuales agregamos ahora otros dos, el "**Wild**" III y el "**Zeiss**" A, sobre los cuales daremos más abajo algunos detalles.

Estos cuatro modelos de niveles pueden naturalmente emplearse también para nivelaciones comunes (lectura de mira con burbuja de nivel centrada); pero ellos sirven particularmente para la aplicación de métodos operatorios especiales, los que trataremos en el § 15 de este capítulo.

Nos limitaremos, por eso, a dar a continuación las principales características ópticas y mecánicas de los dos modelos últimamente mencionados.

3. **NIVEL WILD III.** El anteojo es fijo, no siendo girable alrededor de su eje longitudinal como lo es el modelo “**Wild**” **II** (ver fig. 2, § 8).

Con el objeto de aumentar la precisión de la observación del centrado del nivel y evitar el cansancio del ojo, se emplea en dicha observación una lupa de pequeño aumento.

Un nivel esférico de 8' facilita la rápida verticalización aproximada del eje.

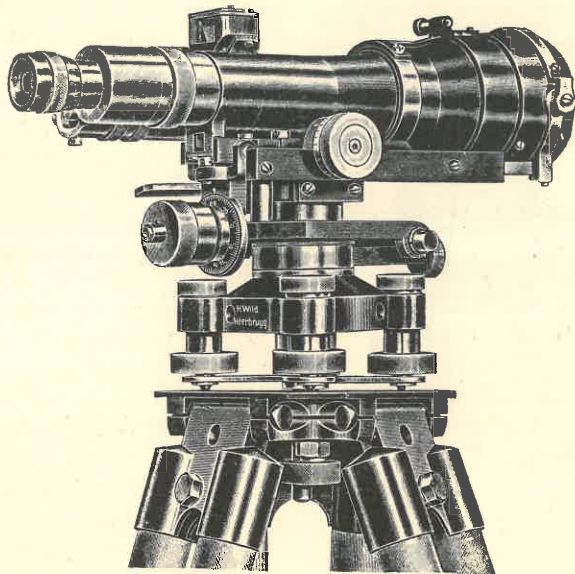


Fig. 1— Nivel Wild III

Principales características:

Diámetro de la abertura del objetivo	50 mm
Aumento del anteojo	36
Luminosidad del anteojo	1,93
Sensibilidad del nivel de coincidencia	6"/2 mm

4. **NIVEL ZEISS A.** El anteojo es fijo, no siendo girable alrededor de su eje longitudinal como lo es el “**Zeiss**” **B** (fig. 1, § 8). La corrección del instrumento debe, en consecuencia, ser ejecutada por el “método de nivelación desde el medio y un extremo” anteriormente explicado (ver Nos. 5 y 6, § 4).

Para facilitar la observación del estado del nivel de burbuja en el momento de efectuarse la lectura de la mira, se ha hecho visible dicha burbuja en el campo visual del anteojo, pudiendo así fácilmente controlar la coincidencia de los extremos de la burbuja (primer método operatorio), o efectuar las lecturas de nivel correspondientes a un estado próximo a dicha coincidencia (segundo método operatorio, ver fig. 3). Es decir, este tipo de nivel permite trabajar no sólo con burbuja centrada o visual hori-

zontal sino también con visual levemente inclinada arriba o debajo del horizonte, lo que se ha conseguido con proyectar al costado del nivel una graduación del mismo.

Valor aproximado de un intervalo de la división del nivel tubular observada con aumento. Siendo la sensibilidad del nivel tubular de este modelo **A** de 10" para un intervalo de 2 mm, y tratándose de un nivel de coincidencia (a prismas), sabemos por las explicaciones dadas en páginas

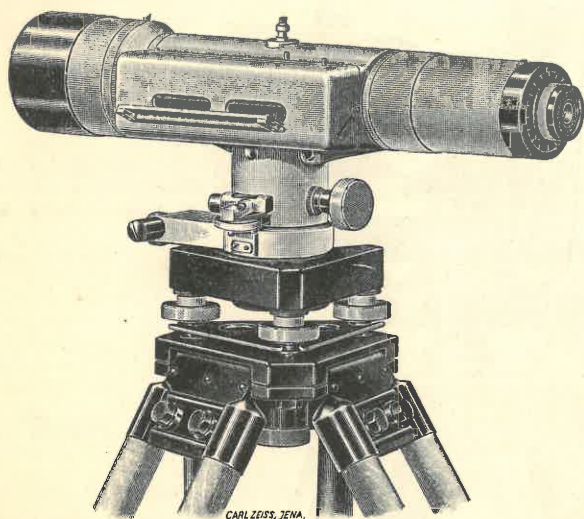


Fig. 2. — Nivel Zeiss A.

Pincipales características:

Diámetro de la abertura del objetivo	55 mm
Aumento del antejo analítico	44
Luminosidad del antejo	1,56
Sensibilidad del nivel de coincidencia (por 2 mm)	10"

21 y 22 del tomo II, 2ª edición, que el segmento de la línea que separa los dos semi-imágenes de los dos extremos de burbuja expresa el **doble efecto** de la descentración del nivel.

Es decir, un nivel de coincidencia de 10" da prácticamente casi el mismo resultado que un nivel tubular común de 5", cuya centración es mucho más lenta y más laboriosa que la de un nivel de 10". Y como dicho nivel de coincidencia se observa con una lupa de 2,5 aumentos, resulta para un intervalo de

$$\left(\frac{2 \text{ mm}}{2 \cdot 2^{1/2}} \right) = 0,4 \text{ mm}$$

un **valor aproximado de:**

$$\left(\frac{10''}{2 \cdot 2^{1/2}} \right) = 2''.$$

Precisión del calado. Y como sobre este intervalo de 0,4 mm correspondiente a 2" todavía es posible estimar el décimo, o sea 0,2", podemos decir que tal valor de 0,2" expresa la **precisión del calado** realizable con este modelo **A**. Es decir, la sensibilidad de este nivel es tal que acusa todavía variaciones de la inclinación hasta de 0,2".

Reducción a la horizontal de la visual levemente inclinada. La diferencia Δn entre las dos posiciones de los extremos de la burbuja que puede leerse en la división del nivel, nos da directamente el descentrado de la burbuja en intervalos de dicha división (de 2" aproximados). Si la lectura n_i correspondiente a la media burbuja izquierda es mayor que n_d que corresponde a la media burbuja derecha, la visual está inclinada hacia arriba, pero si la lectura n_d es mayor que n_i (que es el caso representado en figura 3), la visual está inclinada hacia abajo. Obtendremos

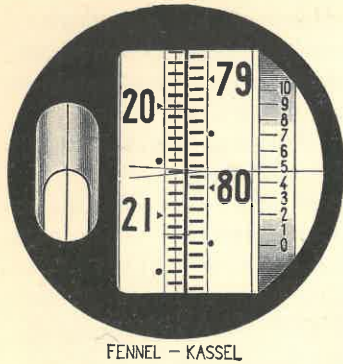


Fig. 4.

Campo visual del anteojo.

Lectura: 206,48

el molesto giro del tornillo de elevación que muchas veces es necesario dar al pasar de una bisección de mira atrás a la mira adelante. Esta ventaja se traduce en un aumento de la rapidez y, por ende, aumento de la precisión del trabajo de la nivelación.

5. **NIVEL DE FENNEL:** La casa **O. Fennel** construye un nivel de precisión (N. O. P. III) análogo a los anteriormente descritos, con la característica particular de que en el anteojo del mismo se forma a la derecha de la mira la **imagen de la graduación del tambor**, pudiendo así efectuarse, en el momento de la coincidencia de los extremos de la burbuja del nivel tubular (visibles a la izquierda de la mira) la correspondiente lectura del tambor.

§ 10

EL NUEVO TIPO DE NIVEL FIJO "COOKE" Y "KERN" NK3

1. **EL NUEVO TIPO DE NIVEL ES UN NIVEL SIMPLE PERFECCIONADO.** Los grandes esfuerzos realizados por los fabricantes de instrumentos topográficos y geodésicos tendientes a simplificar el uso de los mismos, pero sin que dejen de responder ampliamente a la exigencia relativa a la precisión, han conducido a la creación de un **nuevo tipo de nivel**. Este nuevo tipo de nivel es en el fondo un **nivel simple** (ver fig. 1, pág. 96), con anteojo y nivel fijos, sólidamente unidos entre sí y perfeccionado con todos los adelantos de la técnica mecánica y óptica instrumental, con el objeto de aumentar la estabilidad del instrumento y la rapidez de las operaciones.

Entre tales nuevas creaciones de niveles han sido los modelos de **Kern NK 3** (fig. 1) y de **Cooke** (fig. 2) los que han encontrado más aceptación en nuestro país.



Fig. 1. — El nuevo nivel "Kern" NK 3.
Principales características del nuevo nivel Kern NK 3:

Abertura útil del objetivo	45 mm
Aumento del anteojo analítico	30
Luminosidad	2,25
Sensibilidad del nivel tubular	20"/2 mm

2. VENTAJAS DEL NUEVO TIPO DE NIVEL COMPARADO CON EL NIVEL SIMPLE DESCRITO EN § 4.

Aumento de la estabilidad.

1) Toda la construcción del instrumento es más maciza y, por ende, más estable el instrumento durante las observaciones. El **trípode** se distingue muy particularmente por su mayor firmeza y solidez.

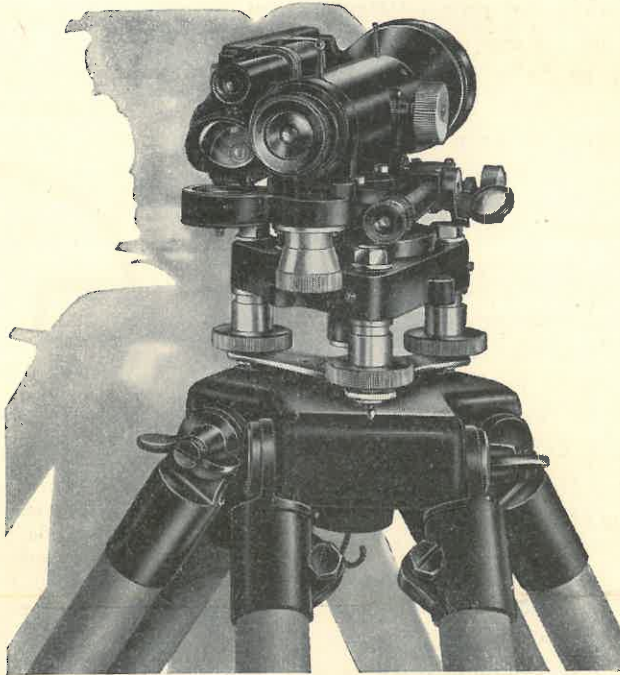


Fig. 2.— Nuevo nivel "Cooke".

Principales características del nuevo nivel "Cooke":

Abertura útil del objetivo	38 mm
Aumento del anteojo analítico	25
Luminosidad	2,31
Sensibilidad del nivel tubular	30"/2¼ mm

2) El tubo del anteojo forma con los soportes del nivel tubular una sola sólida pieza de fundición.

Aumento de la capacidad óptica.

3) El **diámetro del objetivo** es de 38 mm en el "Cooke" y de 45 mm en el "Kern" NK 3 (mientras que en el nivel simple descrito en pág. 96 es de sólo 26 mm).

4) **Aumento del anteojo.** Es de 25 en el nuevo "Cooke" y de 30 en el "Kern" NK 3 (mientras que en nivel simple es de sólo 19).

5) **Luminosidad del anteojo.** Es de 2,25 en el "Kern" NK 3 y de 2,31 en el nuevo "Cooke".

Aumento de la precisión, en parte consecuencia de la rapidez de la operación.

6) Un **tornillo micrométrico** permite un centrado de la burbuja más rápido y más exacto que el que es posible realizar con ayuda de un tornillo calante del nivel simple.

En el modelo del nuevo "Cooke" tal tornillo micrométrico está colocado debajo del anteojo (ver fig. 2), mientras que en el modelo "Kern" NK 3 (fig. 1) se halla dispuesto lateralmente (a la derecha), lo que muchos técnicos prefieren por juzgar tal posición más cómoda en el trabajo.

7) **El nivel de coincidencia procura mayor rapidez en el centrado.** El centrado del nivel tubular se efectúa con ayuda del sistema de coincidencia con mayor rapidez que el centrado del nivel de espejos en el nivel simple. La coincidencia de los extremos de la burbuja se observa en el "Cooke" con ayuda de un pequeño anteojo especial y en el "Kern" NK 3 en el campo visual del anteojo, a la izquierda de la imagen de la mira (ver fig. 3).

8) **El uso del sistema de coincidencia da mayor precisión en el centrado del nivel de burbuja.** Por lo expuesto en páginas 21 y 22 del tomo II, segunda edición, el uso del nivel de coincidencia proporciona **aproximadamente la doble precisión** de la que corresponde al calado con nivel de espejo.

9) Como consecuencia de la ventaja 8), el empleo del sistema de coincidencia permite el uso de un nivel tubular de menos sensibilidad, el que facilita notablemente el centrado, permitiendo por eso **efectuar con rapidez la lectura de mira correspondiente a la posición de "nivel centrado"**.

10) **Simultaneidad del centrado del nivel y de la lectura de mira.** La simultaneidad del centrado exacto del nivel tubular y de la lectura de mira en el preciso momento de la formación del menisco, es facilitado en grado sumo en el nivel "Kern" NK 3.

3. VERIFICACION DE LA CONDICION PRINCIPAL DEL PARALELISMO DEL EJE DEL NIVEL CON EL EJE DE COLIMACION. El paralelismo del eje del nivel con el eje de colimación viene garantizado por los fabricantes con una precisión suficiente para todas las exigencias de los trabajos de nivelaciones corrientes. La **verificación** de dicho paralelismo, la que sólo conviene ejecutar de vez en cuando, se efectúa de acuerdo al procedimiento clásico de la "nivelación desde el medio y un extremo" explicado en págs. 97 y 98 de este tomo.

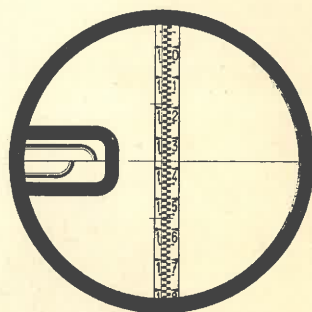


Fig. 3. — *Campo visual del anteojo del nivel "Kern" NK 3.* Se ilustra la posición de "burbuja no centrada". (Ver fig. 24, caso b), pág 21, tomo II, 2ª edición).

El error de cruce, prácticamente eliminado también por el fabricante, puede ser verificado según se explica en N° 9 de § 4.

§ 11

NIVEL - TAQUIMETRO.

1. **OBSERVACION GENERAL.** El nivel-taquímetro se presta particularmente para trabajos de levantamiento en zonas débilmente onduladas, en trazados de ferrocarriles, de caminos carreteros, canales, etc. Los ángulos horizontales son obtenidos por medio de un pequeño círculo y los desniveles o pendientes hasta el 10 o/o con ayuda de un tornillo tangencial que posee este tipo de nivel (ver modelos de Kern, fig. 1, de Fennel, fig. 2 y de Zeiss, fig. 3).

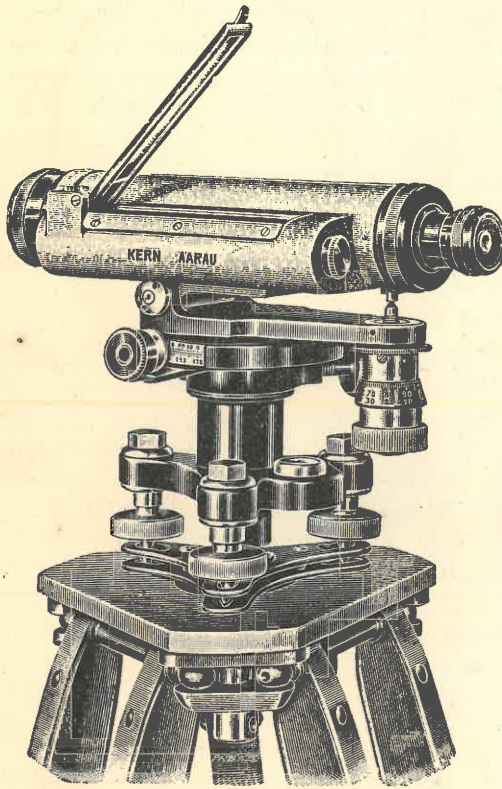


Fig. 1. — Nivel-taquímetro "Kern" I.

Principales características:

Diámetro del objetivo	27 mm
Aumento del anteojo analítico	18
Luminosidad del anteojo	2,25
Sensibilidad del nivel tubular. . .	30"/2 mm

2. **DESCRIPCION DE LOS PRINCIPALES ORGANOS DEL NIVEL-TAQUIMETRO DE KERN.** Referímonos en nuestra descripción al modelo de Kern (fig. 1).

El buje del eje vertical lleva en el borde superior un círculo horizontal de 7 cm de diámetro provisto de graduación frontal en 1/2 grados. Un nonio de 29/30 permite leer directamente los minutos con ayuda de una lupa de 10 aumentos.

En el extremo superior de dicho buje hállase dispuesto, además, una pieza horizontal que lleva en un extremo los cojinetes del eje horizontal y en el otro la larga rosca del tornillo tangencial.

El paso p de este tornillo es de 0,8 mm, su distancia constante al eje horizontal: $C = 100 p = 80$ mm, resultando así para cada paso o vuelta del tornillo tangencial una variación angular del eje de colimación de:

$$\frac{0,8}{80} = \frac{1}{100} = 1\%$$

(en el modelo de **Fennel**, fig. 2, el valor del paso es de 0,5 %), razón por la cual se le llama también **tornillo de porcentajes**.

Permite este tornillo medir ángulos hasta de 10 % sobre la horizontal (indicados con el signo + y números **negros**) y ángulos hasta de 10 o/o debajo del horizonte (— y números **rojos**), estando, por consiguiente, su tambor provisto de una doble numeración simétricamente opuesta, una negra para los ángulos de elevación y otra roja para los ángulos de depresión. (El nivel - taquímetro "Zeiss", representado en figura 3, permite efectuar inclinaciones hasta de 15 % arriba o debajo del horizonte.)

El tambor está dividido en 100 partes, representando entonces cada una 0,01 %, ó sea 1/10 000 de la distancia (1 cm a 100 metros), pudiendo todavía determinarse una fracción por estima. Las vueltas enteras, es decir, las unidades del tanto por ciento, se leerán en una **escala vertical** dispuesta sobre un **anillo**, llamado **porta-índice**, que permite fácilmente obtener la lectura 0 correspondiente a la visual horizontal.

El tornillo mismo es girable sobre la cabeza del tornillo tangencial después de aflojar un tornillo especial que lo sujeta, pudiendo así corregírsele y conseguir que, estando el eje vertical en su posición correcta y centrada la burbuja, se tenga la lectura 0 situada exactamente en el punto medio, debajo del ocular del anteojo.

3. CONDICIONES QUE DEBEN SATISFACERSE EN EL NIVEL-TAQUIMETRO. MODO DE REALIZARLAS. El instrumento corregido deberá satisfacer las siguientes condiciones:

- 1) **Eje de colimación paralelo al eje del nivel;**
- 2) **eje del nivel perpendicular al eje vertical;**
- 3) **a una vuelta del tornillo tangencial deberá corresponder un cambio de inclinación de la visual de 1 % (0,57 ó 34').**

La primera condición se realizará según queda explicado en el N° 5 de § 4, pág. 97, con la modificación que en el nivel-taquímetro la lectura ideal b_2 no se debe producir mediante un movimiento de la placa del retículo (a veces fijo en el tubo), sino por medio de un tornillo tangencial (fig. 1). Establecida así la lectura correspondiente a la visual horizontal, se centrará el nivel por medio de los tornillos de corrección (quitar antes el anillo de protección).

Satisfecha esta primera condición y comprobada por una medición de contralor, se obtendrá la perpendicularidad del eje vertical y del eje del nivel (2ª condición a realizar) del siguiente modo: Estando el tornillo tangencial en cero, se colocará el anteojo en la dirección de dos tornillos calantes centrando el nivel con ayuda de éstos. Gírese el anteojo de 180°: Mitad de la desviación que se constatará será corregida con los tornillos calantes, mitad con el tornillo tangencial.

Luego se llevará el anteojo a la dirección perpendicular, en la que se encuentra el tercer calante, centrando por medio de éste la burbuja del nivel.

Se repetirá la operación para mejorar el resultado.

Habiendo así verticalizado perfectamente el eje principal, se podrá centrar el **nivel esférico** por medio de sus tornillos de corrección.

Con el objeto de examinar la **tercera condición**, se colocará en posición vertical una mira (finamente dividida) a 20 metros exactos contados desde el eje de rotación horizontal del anteojo, efectuando sobre ella, después de cada giro completo del tornillo, la correspondiente lectura. Se comprobará si efectivamente los intervalos así determinados representan 1 % de la distancia.

4. IMPORTANCIA GENERAL DEL PROCEDIMIENTO DE CORRECCION POR EL METODO DE "NIVELACION DESDE EL MEDIO Y UN EXTREMO". El procedimiento de corrección por "nivelación desde el

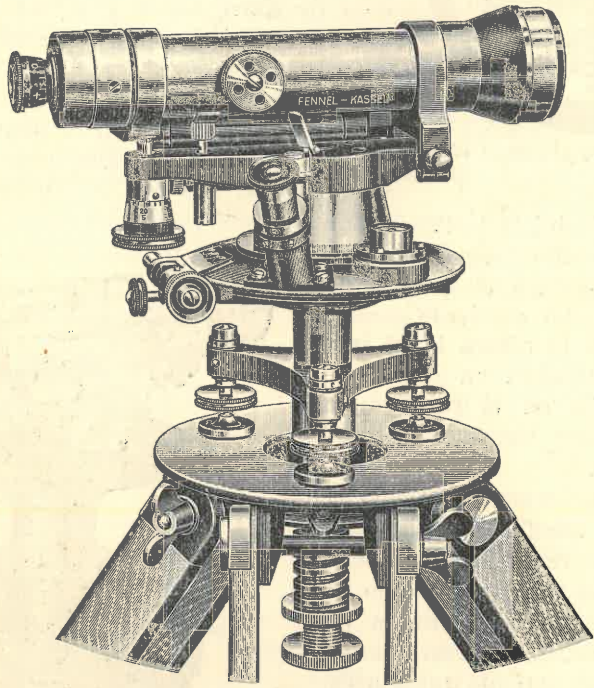


Fig. 2. — Nivel-taquímetro "Fennel".

Principales características:

Diámetro del objetivo	36 mm
Aumento del anteojo	32
Luminosidad	1,27
Sensibilidad del nivel tubular	30"/2 mm

medio y un extremo" es general, siendo aplicable a todo instrumento de nivelación, cualquiera que sea su construcción y disposición de los distintos órganos de corrección, ya sean anteojos giratorios en sus collares o de inversión, provistos de nivel reversible o de caballete, con o sin tornillo

de elevación o tangencial. Bastará en este último caso, colocar dicho tornillo al iniciarse la operación en su posición normal (cero) y proceder luego como dejamos explicado en el número 3.

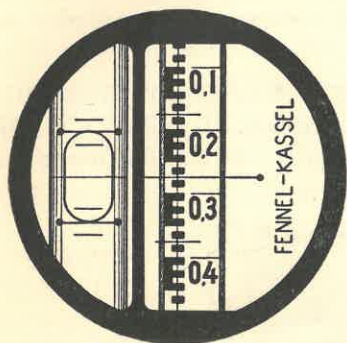


Fig. 3. — Se ilustra el campo visual del anteojo.

bular, se producirá la lectura 0 por medio del tornillo tangencial. Hecho esto, se iniciará el trabajo de levantamiento del siguiente modo:

Se medirá la **altura i del instrumento** anotándola en el correspondiente sitio en el **registro de taquimetría** (ver Capítulo V, § 12 de este tomo).

Cuando se trate de terrenos cubiertos de vegetación baja, conviene muchas veces señalar dicha altura sobre la mira por medio de una corredera de goma negra de fácil colocación. Se bisectará con el hilo medio del retículo tal marca, cuando no se prefiere bisectar con el hilo medio, cada vez que se pueda, una división de valor redondo, 1 ó 2 metros, por ejemplo. Se leerán en el tambor directamente las unidades de pasos (vueltas de tornillo o unidades del tanto por ciento), los centésimos del tanto por ciento y, por estima, una fracción.

Prefiérese siempre la bisección con nivel centrado (nivelación geométrica propiamente dicha) cada vez que esto fuera posible. Seguida-

5. MODO DE INICIAR EL TRABAJO DE CAMPO. El nivel-taquímetro se presta muy especialmente para trabajos de levantamiento en zonas débilmente onduladas, el trazado de ferrocarriles, caminos carreteros, canales, etc. Los ángulos horizontales se obtienen por medio de un pequeño círculo (ver modelo de **Kern**, fig. 1, y el modelo de **Fennel**, fig. 2) o una brújula (ver modelo de **Zeiss** (fig. 4).

Se comienza el trabajo de campo con colocar el instrumento en el punto de arranque. Verticalizado aproximadamente el eje con ayuda del nivel esférico, y centrado el nivel tu-

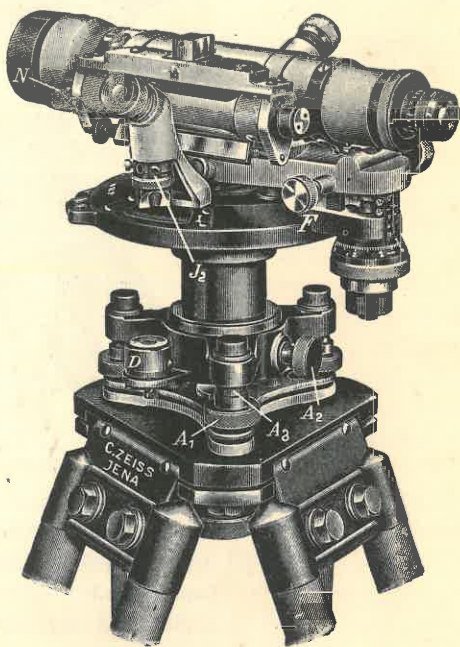


Fig. 4. — Nivel-taquímetro "Zeiss".

Principales características:

Diámetro del objetivo	35 mm
Aumento del anteojo analítico	30
Luminosidad del anteojo	1.36
Valor del paso del tornillo tangencial 1%	

mente se tomará el **ángulo horizontal** y la **distancia** correspondientes al primer punto levantado.

Después de esta brevísimas indicación de los tres elementos a tomar para cada punto a levantar, rumbo, distancia y altura, pasamos ahora al estudio detallado de las dos operaciones principales, la **medición de la distancia** y de la **altura**.

6. MEDICION DE LA DISTANCIA HORIZONTAL POR EL SISTEMA DE REICHENBACH. Para obtener la distancia horizontal empléase generalmente con ventaja el **principio de Reichenbach** (ver N° 25 del § 10, *Optica*, tomo II, 2ª edición). Y como en la mayor parte de los modernos instrumentos que pertenecen a este grupo, los anteojos son **analíticos** (constante aditiva $c = 0$) con la constante de multiplicación $k = 100$, se tendrá para la distancia oblicua **D** la relación conocida:

$$(1) \quad D = k \cdot l = 100 \cdot l$$

donde $l = a - b$ (**lectura alta a menos lectura baja b** sobre la mira).

Reducción de la distancia oblicua D a su proyección horizontal $d = D - c$.

Con el objeto de obtener la corrección **c** para la reducción de la distancia **D** al horizonte, y siendo $\alpha = 1/n$ la **pendiente** del terreno, tendremos según figura 5:

$$(2) \quad D + c = \sqrt{D^2 + D^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = D \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

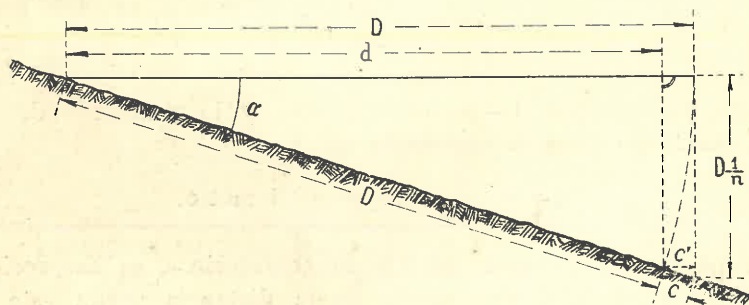


Fig. 5.— Se ilustra la deducción de la fórmula: $c = - \frac{D}{20\,000} p^2$ para la reducción de la distancia inclinada **D** al horizonte.

donde n^2 es generalmente un número relativamente grande, es decir $1/n^2$ una fracción muy pequeña.

Tendremos entonces según el teorema del binomio:

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) - \dots$$

Despreciando en la (3) las potencias superiores a la primera, resulta de la (2):

$$(4) \quad \begin{aligned} D+c &= D \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &= D + \frac{D}{2n^2} \end{aligned}$$

Luego:

$$(5) \quad c = \frac{D}{2n^2}$$

Substituyendo ahora en la (5) en lugar de la pendiente $1/n$ el porcentaje $p\%$ ó sea $p/100$, en uso general en los trabajos de vialidad, tenemos:

$$c = \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{p}{100} \right)^2$$

o sea, corrección por reducción al horizonte:

$$(6) \quad c = \frac{D}{20000} \cdot p^2 \text{ que es de signo negativo}$$

Siendo l el segmento de mira observado por medio del nive-taquímetro, tendremos para la corrección c con tener en cuenta la (1):

$$c = - \frac{100 \cdot l}{20000} \cdot p^2$$

(7)

$$c = - \frac{1}{200} \cdot p^2$$

Siendo, por ejemplo, $l = a - b = 1$ metro y la pendiente del terreno de 10% , resultaría para la corrección c :

$$c = - \frac{1}{200} \cdot 100 = -0,5 \text{ metro.}$$

Para pendientes menores del 2% la corrección c es despreciable.

Admítase para la determinación de la distancia según este método llamado **sistema de Reichenbach** un error medio de $0,2\%$.

Puede también determinarse la distancia horizontal reducida d directamente con ayuda del tornillo tangencial, lo que se deduce de la teoría de dicho tornillo, la que pasamos a exponer.

7. TEORIA DEL TORNILLO TANGENCIAL. Imaginamos por un momento estacionado en **I** (fig. 6) un teodolito provisto de círculo vertical (teodolito-taquímetro, ver § 17 de este capítulo) y en **P** una mira vertical, y que nos proponemos medir los ángulos verticales correspondientes a los puntos de mira **A** y **B**.

Suponemos que se haya llevado para ello primeramente el eje de colimación a la dirección de la horizontal **HH'** con ayuda de un nivel tubular, y que a dicha horizontal corresponda en el teodolito la lectura 0°, en el círculo vertical. Se harán luego en dicho círculo las lecturas correspon-

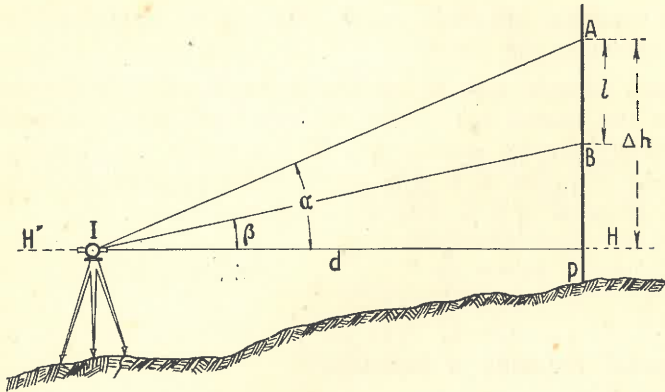


Fig. 6.— Se supone instalado en I un teodolito provisto de círculo vertical con el cual se han medido los ángulos verticales α y β a los puntos de mira A y B, respectivamente.

dientes a las visuales a los puntos **A** y **B**, las que nos indican directamente los valores de los ángulos α y β que nos interesan. Sea, además, **l** el segmento de mira que separa los puntos **A** y **B**.

Tendremos entonces para los desniveles Δh y $\Delta h - l$, referidos a la horizontal **HH'** de **I**, respectivamente:

$$(8) \quad \Delta h = d \cdot \text{tg } \alpha$$

$$(9) \quad \Delta h - l = d \cdot \text{tg } \beta$$

de donde deducimos:

$$d \cdot \text{tg } \alpha = d \cdot \text{tg } \beta + l$$

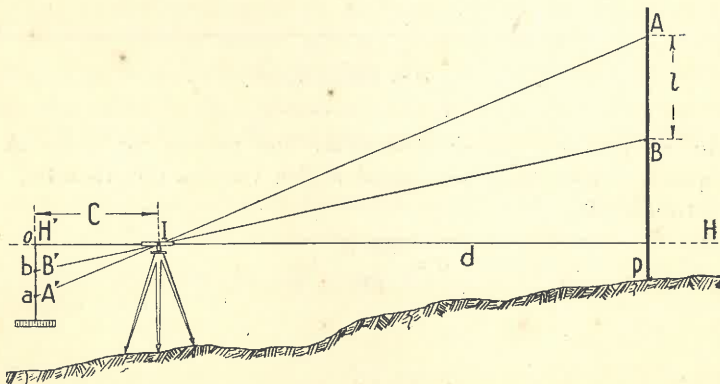


Fig. 7.— Se supone instalado en I un nivel-taquímetro.

$$y: \quad l = d (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

Luego:

$$(10) \quad d = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

Suponemos ahora instalado en **I** (fig. 7), un nivel-taquímetro reemplazando el teodolito de fig. 6.

Suponemos, además, que se ha llevado a la posición horizontal el eje de colimación del mismo por medio del nivel tubular y colocado en **O** el tambor. Se bisectarán los puntos **A** y **B**. Sea ahora **a** la lectura de tambor correspondiente al punto **A** y **b** la de **B**. Tendremos entonces para la tangente de los ángulos α y β (fig. 6), respectivamente:

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{C} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{C}$$

Substituyendo los valores (11) en la (10), obtendremos para la **distancia horizontal reducida d** buscada:

$$(12) \quad d = \frac{l}{\frac{a}{C} - \frac{b}{C}} = \frac{l}{a - b}$$

o sea:

$$(13) \quad d = \frac{C}{a - b} \cdot l$$

Siendo en el nivel-taquímetro generalmente $C = 100 p$, y eligiéndose el segmento **l** que separa los puntos de mira **A** y **B** en tal forma que el mismo corresponda a un paso **p** o una vuelta del tornillo, es decir, que sea: $a - b = 1p$, resulta de la (13):

$$d = \frac{100 p}{p} \cdot l$$

o sea:

(14)

$$d = 100 \cdot l_{1v}$$

Cuando se prefiera hacer distanciar los puntos de mira **A** y **B** de tal modo que $a - b = 2p$, o sea igual a dos vueltas del tornillo, resultaría para la distancia **d**:

$$d = \frac{100 p}{2p} \cdot l_{2v}$$

o sea:

(15)

$$d = 50 \cdot l_{2v}$$

El procedimiento según (15) es un poco más preciso que el según (14). Admítase para el error medio de una determinación de la distancia por medio del tornillo tangencial el valor de 0,3 %, resultando, en consecuencia, los resultados algo menos exactos que los que se obtienen por el sistema de **Reichenbach** (ver N° 6, pág. 132).

Es de observar que se debe procurar que las visuales no corten a la mira muy cerca del suelo.

Por más detalles sobre el procedimiento taquimétrico, ver capítulos V y VI de este tomo.

8. MEDICION DEL DESNIVEL CON AYUDA DEL TORNILLO TANGENCIAL DEL NIVEL - TAQUIMETRO. Sea **HH'** (fig. 8) la horizontal que pasa por el eje de rotación del nivel taquímetro y **m** una mira

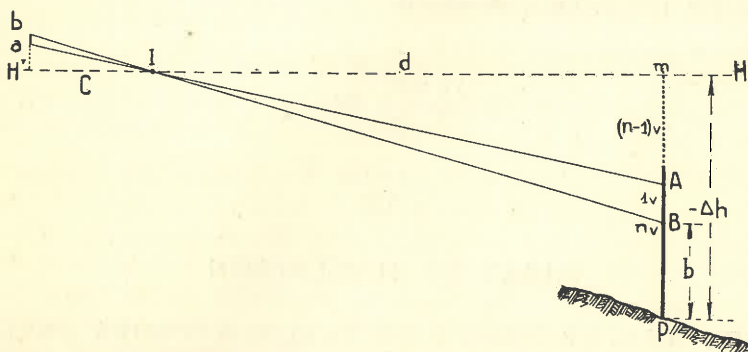


Fig. 8.— Se ilustra la determinación del desnivel Δh por medio del tornillo tangencial (caso de un desnivel de signo negativo).

vertical situada en el punto **P**, cuyo desnivel Δh , con respecto a la horizontal **HH'**, se trata de determinar.

Estableciendo primeramente la horizontal **HH'** conforme dejamos anteriormente explicado (tambor en 0), se bajará el eje de colimación $(n-1)$ vueltas de tornillo, hasta llegar así a bisectar un punto **A** convenientemente elegido. Sea **a** la lectura de mira que corresponde a la bisección de dicho punto **A**. Girando el tornillo una revolución más, la visual llegará a bisectar un punto de mira **B**, al cual suponemos que corresponda la lectura de mira **b**.

Tendremos entonces para el desnivel Δh (fig. 8) buscado:

$$(16) \quad -\Delta h = b + n(a - b) \quad (\text{caso del desnivel en depresión})$$

Para el caso del desnivel de signo positivo (fig. 9) tendremos la siguiente fórmula:

$$(17) \quad +\Delta h = n(a - b) - a \quad (\text{caso del desnivel en elevación})$$

En caso de haberse previamente determinado la distancia horizontal **d**, se puede obtener fácilmente el desnivel Δh con sólo leer el segmento **B'H'**

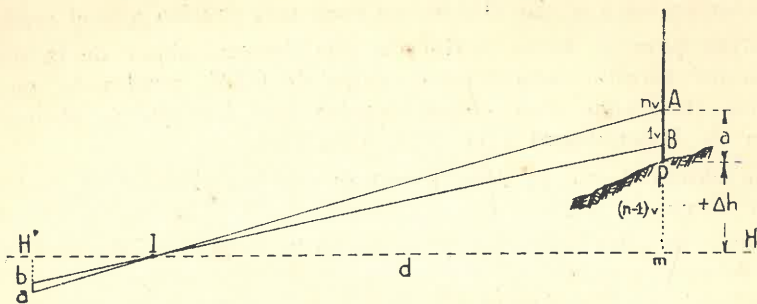


Fig. 9. — Se ilustra la determinación del desnivel Δh por medio del tornillo tangencial (caso de un desnivel de signo positivo).

(ver fig. 7), expresado en unidades de paso del tornillo tangencial (unidades éstas que nos indican, como sabemos, la pendiente en porcientos) y multiplicarlo por dicha distancia d .

Luego:

$$(18) \quad \Delta h = d \cdot \frac{B' H'}{100}$$

§ 12

MIRAS DE NIVELACION

1. MIRA DE CORREDERA O DE TABLILLA Y MIRA PARLANTE O A ESCALA; INCONVENIENTE DE LA PRIMERA. La mira es la segunda de las dos partes que integran el **equipo de nivelación**. Dependerá de la precisión de la mira no menos que del tipo del nivel la precisión de un trabajo a realizar.

Distínguense primeramente dos tipos de mira esencialmente diferentes: **miras de corredera o de tablilla y miras parlantes o miras a escala**. El primer tipo, anteriormente en uso exclusivo, consta de una regla graduada (ver fig. 1), a lo largo de la cual puede deslizarse una tablilla-señal **T** (pintada de blanco y negro) hasta hallarse su línea de fe f a la altura de la visual.

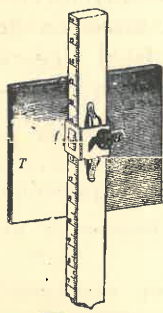


Fig. 1 — Mira de corredera.

Estará a cargo de un auxiliar, llamado **mirero**, la tarea de colocar debidamente la tablilla, el que deberá responder en ello a las señales que le da el **operador** situado en el instrumento; es decir, es el **mirero** quien efectúa en este caso las lecturas y quien las anota en la libreta de campo.

Las **miras parlantes** (del francés: **mire parlante**), en cambio, permiten efectuar las lecturas directamente desde el instrumento, con ayuda de un antejo, siendo tales las ventajas técnicas y económicas de este procedimiento, que la mira de tablilla puede considerarse hoy casi completamente fuera de uso en las nivelaciones corrientes.

2. MIRA PARLANTE: MATERIAL, DIMENSIONES, SECCION, GUARNICIONES Y EMPUÑADERA. Generalmente las miras se hacen de abeto, de 3 a 5 metros de largo y de 9 a 11 cm de ancho.

Las hay construídas de una sola pieza (ver figs. 5, 8-11, 14, 16, 19 y 21) de sección rectangular (fig. 2), de sección doble T (fig. 3), de sección U (fig. 15), sección cajón (ver fig. 4) constituída por dos tablas unidas por listones (fig. 7), etc.

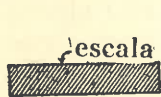


Fig. 2.
Mira común

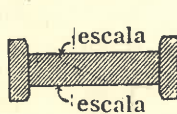


Fig. 3.
Mira Seibt reversible.

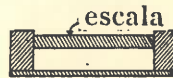


Fig. 4.
Mira cajón o mira de enchufe.

Los extremos de mira, especialmente el inferior, están muchas veces reforzados por medio de **guarniciones metálicas**, siendo esencial en ello que la base sea perpendicular al eje longitudinal de la mira.

Con el objeto de facilitar el manejo de la mira, lleva ésta a veces en sus costados **empuñaderas, asas o manijas**, sólidamente fijadas en ella (fig. 21), desmontables (fig. 19) o plegables (fig. 6), según el modelo.

3. MIRAS PLEGABLES Y MIRAS CORREDIZAS O DE ENCHUFE.

Con el objeto de facilitar el transporte, las miras de 4 metros constrúyense generalmente de dos trozos plegables uno sobre el otro mediante un buen mecanismo a visagras, asegurándose su rigidez por medio de un listón aplicado en el reverso de la mira (fig. 6).

Son las miras plegables las que se prefieren en los trabajos técnicos corrientes; las de enchufe (fig. 7), en cambio, no son tan recomendables, por ocurrir con frecuencia que, debido a una negligencia del mirero en el desenchufe al sacar a tracción los diversos trozos, uno de los mismos no queda en la correcta posición en el momento de su uso.

4. MIRAS DE VIAJE. Divisiones de mira según 11, pintadas sobre tela y barnizadas, empléanse a veces para improvisar una mira de viaje: se fija simplemente dicha división sobre un listón de madera.

5. CLASIFICACION DE LAS MIRAS SEGUN LA UNIDAD DE DIVISION. MIRAS A TRAZOS Y MIRAS A CAMPOS. FENOMENO DE LA IRRADIACION. COLOCACION DEL CERO. NUMERACION. Pueden clasificarse las miras, según la unidad de división, en miras **milimetradas** (figs. 8 y 10), de **dobles milímetros** (fig. 19), de **medios centímetros** (figs. 9, 14 y 20), **miras centimetradas** (figs. 5-7, 8, 10-12), de **medios decímetros** (figs. 6, 7, 12), **decimetradas** (fig. 6), utilizándose las centimetradas para nivelaciones corrientes, las milimetradas, de dobles milímetros y las de medios centímetros exclusivamente para nivelaciones y taquimetría de precisión, y las de medios decímetros y decimetradas para taquimetría común.

Según la manera de realizar la división, distínguense **miras a trazos** (figs. 5, 8, 9, 10 y 20), y **miras a campos** (figs. 6, 7, 8, 10, 11, 12, 16, 18 y 19), de colores alternados, blancos y negros, o blancos y rojos; de **fila simple**

(figs. 7 y 16), o de **fila doble** (figs. 6, 8 y 10), adosadas o separadas, quedando blanco frente a negro (o colorado) y viceversa. Existen también miras a trazos y campos (ver figs. 8 y 10).

La disposición a campos, de fila simple, presenta el inconveniente del fenómeno de la **irradiación**, apareciendo un campo blanco fuertemente iluminado más ancho que los campos negros vecinos, lo que reduce la precisión de la estima. La disposición a doble fila es elegida para evitar esta fuente de error.

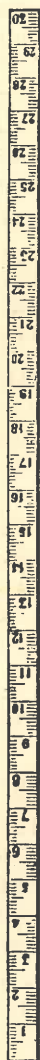
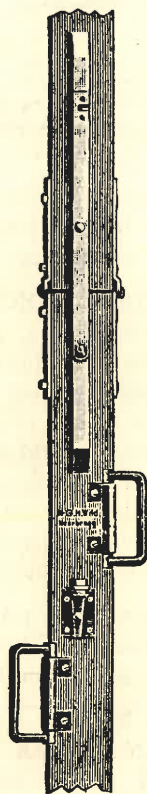


Fig. 5
Mira
a trazos



Frente



Dorso

Se ve en el dorso de la mira la disposición de las manijas, el listón y el nivel esférico.

Fig. 6
Mira plegable
según Wild.



Fig. 7
Mira de
enchufe

El cero de la graduación generalmente coincide con el plano inferior de la mira, pero sin que esta coincidencia constituya una necesidad. Pero cuando se utilizan dos miras para la determinación de una diferencia de nivel, una para el "golpe de nivel atrás" y la otra para el "golpe de nivel adelante" (lo que es el caso general), es necesario conocer la posición de los ceros.

Grupo de división. Con el objeto de aumentar la rapidez de la lectura, evitando el trabajo de contar gran número de divisiones, suelen agrupárselas, por ejemplo, de 5 en 5, en forma de **E**, colocando alternativamente uno de estos grupos a la izquierda, otro a la derecha del eje longitudinal de la mira (ver figs. 6 y 18).

Numeración. Las cifras deben ser claras y suficientemente grandes para que

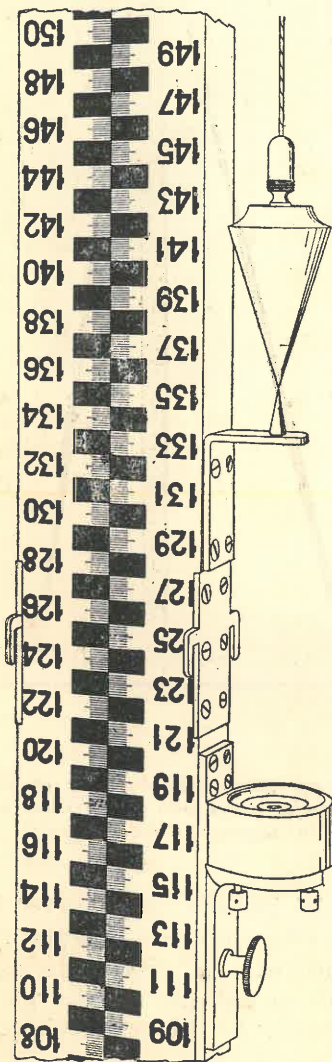
ellas sean fácilmente legibles a gran distancia. Las cifras indican generalmente **decímetros** (medios decímetros, ejemplo fig. 9, o **dobles decímetros**,

ejemplo fig. 19), escribiéndoselos directamente encima de la raya de separación (ver, por ejemplo, fig. 11).

6. CONOCIDOS TIPOS DE MIRA.

Ejemplos de miras de primer orden

Fig. 8.— *Mira de Kern en uso en el Departamento Topográfico suizo. Con visuales cortas y aumento fuerte del anteojo (40 y más) pueden todavía leerse fracciones de milímetro.*



Mira de segundo orden pro-
puesta por el autor

Fig. 10.— *Mira de invar de Kern con doble graduación de centímetros. Para distancias cortas utilizase la división milimetrada. (La división con campos rayados es de color rojo en el original.) Diferencia constante entre las dos graduaciones: 29,20 dm.*

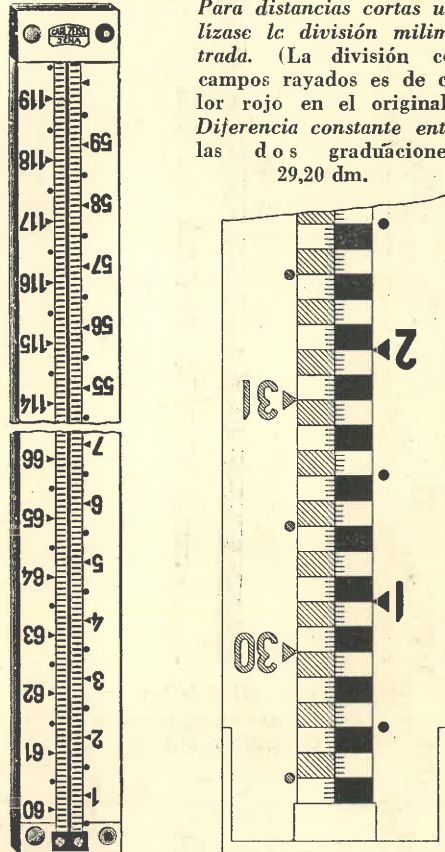


Fig. 9.—

Mira de invar de la casa Zeiss.

La cinta de invar tiene un ancho de 25 mm y un espesor de 0,7 mm. Lleva una doble división de $\frac{1}{2}$ cm, desplazadas la una con respecto a la otra en 2,5 mm redondos. La numeración de la división derecha asciende de 0 a 60, y la de la izquierda de 60 a 120. Tales números significan medios decímetros.

Está en uso en el Instituto Geográfico Militar Argentino y el Ministerio de Obras Públicas de la Nación.

Miras de 3er. y 4º orden

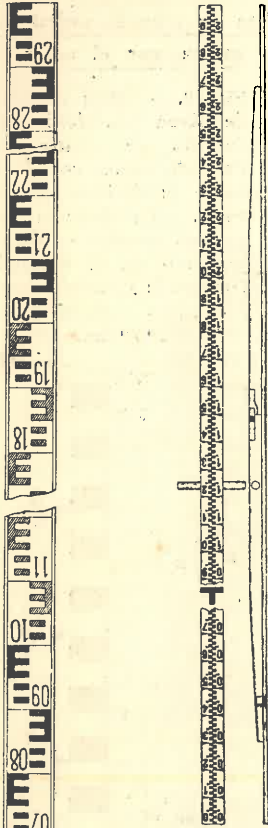


Fig. 12. — Mira de 3er. orden en uso en el Instituto Geográfico Militar.



Fig. 13. — "Sapo" de nivelación.

Fig. 11 Mira alemana.

mado "tetón", en el centro de la parte superior. Es en este tetón que se apoya la mira.

7. APOYOS DE MIRA ("SAPOS" Y PIQUETES). En las nivelaciones de primer orden hasta las de segundo y tercer orden, en las cuales se efectúan las lecturas de mira al milímetro o medios centímetros (tercer orden), respectivamente, es aconsejable el uso de un

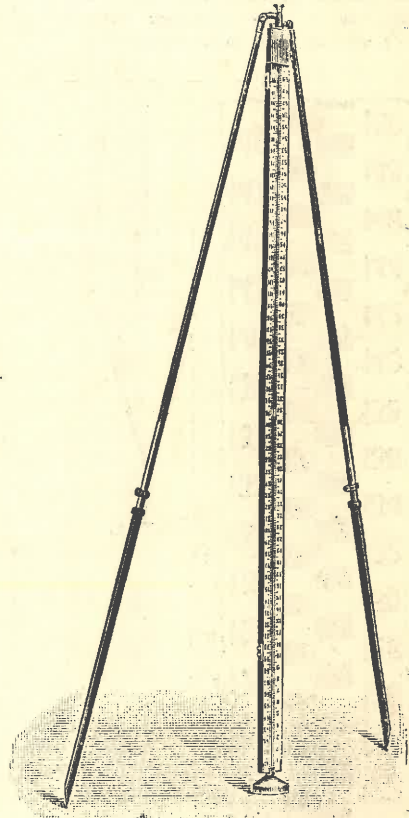


Fig. 14. — Nueva mira suiza de invar en posición de trabajo, con ayuda de un nivel esférico y un soporte-trípode especial.

apoyo especial llamado "sapo" (ver fig. 13). Consta este apoyo de una placa de fundición provista de uñas en la parte inferior y de un saliente esférico llama-

mado "tetón", en el centro de la parte superior. Es en este tetón que

Con el objeto de obtener puntos de cambio de permanencia temporal (ver N.º 2, § 2) utilizanse **piquetes** o **estacas** (con o sin clavo en la cabeza).

8. **ACCESORIOS PARA COLOCAR LA MIRA EN POSICION VERTICAL (PLOMADA Y NIVEL ESFERICO). PRECISION DE LA VERTICAL.** Sólo en la nivelación de cuarto orden la mira puede colarse a ojo en posición vertical. Ya en la nivelación de tercer orden conviene aplicar a la mira el **nivel esférico**. El inconveniente que tiene el nivel esférico consiste en que puede estar descorregido sin que haya indicio de ello. Para

su comprobación utilizase la **plomada**. En casos especiales se puede recurrir al **balanceo de la mira** (ver fig. 17), hacia adelante y hacia atrás con el objeto de obtener la lectura mínima correspondiente a la posición vertical de la mira.

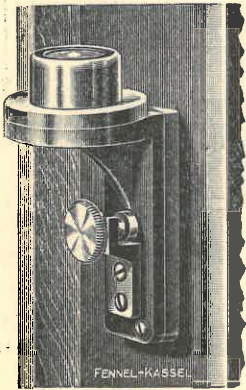


Fig. 15.— Colocación del nivel esférico en una mira de precisión de Fennel.

Precisión de la vertical.

Valen para las desviaciones de la vertical establecida con ayuda de diversos medios los siguientes errores medios:

Usando nivel esférico con soporte-trípode	± 2',
» nivel esférico y apoyo de tacuara	± 4',
» nivel esférico, sin apoyo.	± 6',
Mira sostenida a mano libre.	± 1º,

Fig. 16.— Mira con manija; su colocación vertical con ayuda de nivel esférico y tacuaras.



9. **ACCION DEL VIENTO.**

Viento suave, mientras no haga trepidar el instrumento, no molesta en la nivelación de primer orden, siendo, al contrario, favorable para la precisión de los resultados, por mover las capas de aire en la proximidad del suelo e impedir las oscilaciones tan molestas en las lecturas de mira.

En las nivelaciones de 2.º y 3er. orden, recomiéndase el uso de un jalón o tacuara (fig. 16), para poder con su ayuda sostener mejor la

mira en posición vertical, en caso de levantarse viento.

Mediante este sostén y la ayuda de un nivel esférico, podrá mantener el portamira tranquila la mira aún cuando sople fuerte viento, siendo así, a veces, posible continuar un trabajo que sin este simple recurso quedaría interrumpido.

10. MODO DE EFECTUAR LAS LECTURAS DE MIRA. Para efectuar una lectura de mira, se procederá del siguiente modo:

1) Se buscará primeramente el número del decímetro al cual pertenece la posición del hilo.

2) Se contarán los centímetros que preceden a la posición bisectada.

3) Se determinará por estima la fracción de centímetro.

Es decir, la lectura consta de 4 cifras, las centenas de unidades de centímetros, las decenas, las unidades (cm) y décimos de éstas, hallándose escritas las dos primeras de estas cifras en la mira misma; la tercera se obtendrá contando los centímetros a partir de la raya del decímetro que corresponda, y la cuarta, por estima, en el campo del centímetro bisectado.

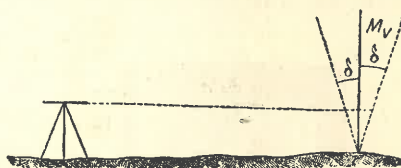


Fig. 17.— Se ilustra el "balanceo de la mira".

Siendo, por ejemplo, la posición del hilo medio h_m la representada en figura 18, se leerá: 0346 = 0.346 m. La colocación de la coma resulta superflua.

Precisión. Con mediana práctica se llega a leer los décimos de centímetro con gran precisión, dependiendo ésta, sin embargo, algo del grosor del hilo con respecto a la magnitud de la imagen del campo de la división.

11. ERRORES DE LECTURA QUE MAS FRECUENTEMENTE OCURREN EN LA PRACTICA, Y SU INFLUENCIA SOBRE LA ADECUADA DISPOSICION DE LAS UNIDADES DE DIVISION Y NUMERACION DE LAS ESCALAS.

1) La falta de un metro, no fijándose bien en la primera cifra, leyendo, por ejemplo, 1346 en lugar de 0346.

2) Por estar invertida la imagen de la mira en el anteojo, las divisiones deben contarse sobre la misma de arriba hacia abajo y no de abajo hacia arriba. Operadores poco experimentados suelen leer por eso 0454, por ejemplo, en lugar de 0546.

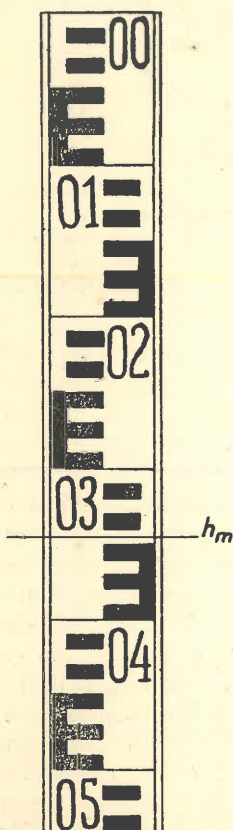


Fig. 18.— Lectura: 0346.

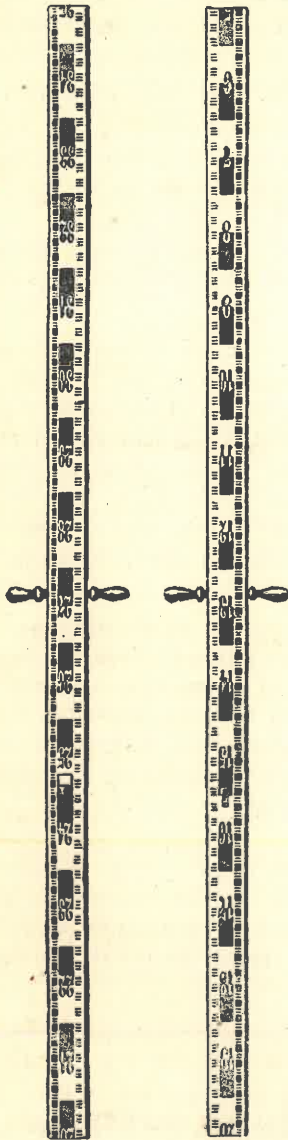


Fig. 19. — Mira reversible de Seibi.

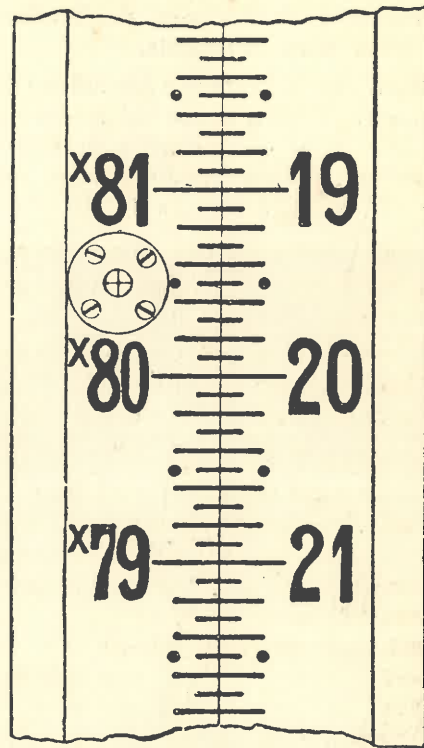


Fig. 20. — Imagen de la mira a numeración decádica, en uso en la nivelación de precisión de Prusia (hoy "Landesaufnahme").

Ejemplo de la lectura:

* 7965 = 7965 — 10 000 = — 2035, indicando, así, el asterisco * la unidad decimal a restar.

3) Error de casilla de decímetro, leyendo 10, por ejemplo, en lugar de 11, o viceversa, lo que puede ocurrir cuando el hilo medio caiga cerca del límite. Con el objeto de evitar en lo posible este error, se coloca a veces el número del decímetro en el extremo y no en el medio de la casilla de decímetro.

4) Otro error que frecuentemente se comete consiste en la confusión de límite de casilla de decímetro con límite de grupo de 5 cm, o viceversa, error éste que también se trata de evitar por la disposición de la numeración indicada en 3).

12. MIRAS ESPECIALES DE NIVELACION DE PRECISION; MIRA CON NUMERACION DECADICA Y MIRA REVERSIBLE. Con el objeto de proteger mejor contra los errores de lectura y aumentar la

precisión de las mediciones, se han ideado **dos tipos de miras especiales** destinadas a nivelaciones de precisión, la dotada de **numeración decádica** y la **mira reversible**.

Mira con numeración decádica (figs. 20 y 21). En este tipo de mira corresponden a cada trazo de medio decímetro dos números, de los cuales cada uno es el complemento del otro a 100 medios decímetros, corriendo una de las dos numeraciones a la izquierda del eje de la mira, de abajo hacia arriba, y la otra, a la derecha, de arriba hacia abajo.

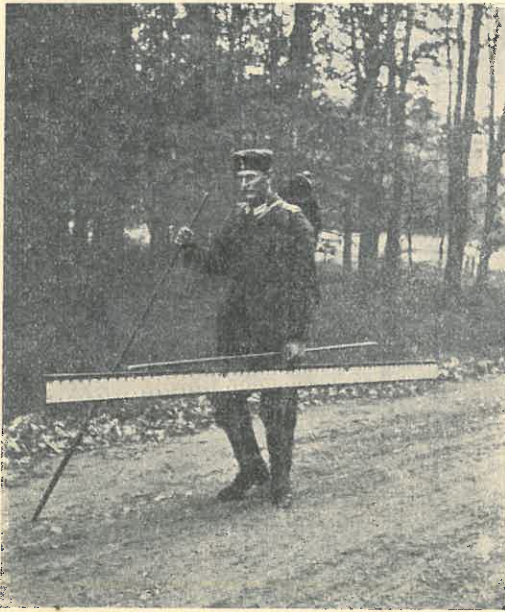


Fig. 21. — Porta mira de nivelación de precisión.

La diferencia 04,94, es decir una altura de la visual de 0,494 metros.

Como ejemplo de **mira reversible** daremos la de **Seibt** (fig. 19).

Está dividida y numerada esta mira en **dobles decímetros**, con campos de 4 mm. Ambas divisiones tienen en la base de la mira el origen 20, aumentando la numeración en el frente de la mira hasta 35 (dobles **dm**), bajando la otra en el reverso de 20 hasta 5.

La suma de las lecturas en ambas caras correspondientes a un mismo horizonte, da el **número constante 40**, expresando su **diferencia la altura de la visual en decímetros simples**.

Leyendo, por ejemplo, en el frente: 22,47 y en el reverso: 17,53, tendremos en la **suma la constante 40,00** y en la

§ 13

ERRORES DE LA NIVELACION GEOMETRICA, COMPENSACION Y PRECISION

1. PASANDO REVISTA A LOS PRINCIPALES ERRORES Y CAUSAS QUE LOS ORIGINAN; ERRORES DE ESTIMA, ERRORES DE LECTURA, EFECTOS DEL HUNDIMIENTO DEL INSTRUMENTO Y DE LOS PUNTOS DE CAMBIO, EFECTO DE LA DIFERENCIA DE REFRACCION; TOLERANCIAS. Cada lectura de mira está afectada de un pequeño error originado por la acción de un conjunto de múltiples causas ópticas o mecánicas: errores de estima, errores de lectura de mira

y nivel, error de centrado del nivel tubular, error de bisección debidos a las oscilaciones del aire u otros más de origen desconocido aún.

Especial mención merecen los errores que provienen de la desigualdad de la refracción (en la visual hacia atrás y la visual hacia adelante), la que se presenta muy a menudo: actúa la refracción, a veces, de una manera distinta en los golpes de nivel atrás y los golpes adelante, pudiendo alcanzar su efecto el décuplo de su **valor normal** ($k = 0,13$). Este valor se obtuvo a raíz de numerosas observaciones de nivelación trigonométrica. Ocurre este temible error principalmente en las visuales muy rasantes, máxime en los casos de terreno completamente heterogéneo, suelo firme hacia atrás y agua hacia adelante, o viceversa.

Tolerancia. Prescríbese, por consiguiente, como por ejemplo en los trabajos de nivelación del Instituto Geográfico Militar Argentino, que las visuales que excedan de 25 metros de longitud no puedan aproximarse al suelo a más de 50 cm, las más cortas hasta 30 cm solamente.

Los errores que provienen del hundimiento del instrumento y de los apoyos de mira (de carácter más bien mecánico) ocurren durante la medición, ocasionando pequeñas inclinaciones del eje de colimación, en el intervalo de tiempo que transcurre entre el centrado del nivel y la lectura de mira.

2. EFECTO DEL HUNDIMIENTO DEL INSTRUMENTO; METODO DE ELIMINACION EMPLEADO EN LAS NIVELACIONES DE PRECISION; SU INFLUENCIA EN LA NIVELACION DE TERCER ORDEN.

En las nivelaciones de precisión se emplean miras reversibles o miras de doble graduación (ver § 12, figs. 19 y 9), determinando el desnivel Δh , correspondiente a cada estación, por medio de dobles lecturas de mira, de espalda (o "atrás") a , y de frente (o "adelante") b , en el siguiente **orden uniforme**: a_1, b_1, b_2, a_2 , de tal modo que los dos golpes de nivel adelante, b_1 y b_2 , vengan a quedar abrazados por los dos de atrás, a_1 y a_2 .

Se supone ahora que el instrumento se hunde un poco en la estación, mientras se efectúen los dos golpes de nivel a_1 y b_1 , b_2 y a_2 , respectivamente.

Admítse, además, que se produzca un pequeño hundimiento entre las lecturas b_1 y b_2 .

Por medio del indicado procedimiento operatorio, lógrase eliminar la principal parte de la influencia de este error.

En caso de no efectuarse las lecturas en la forma indicada, sino simplemente $a-b$, que es el caso normal en las **nivelaciones de tercer y cuarto orden**, dicho error actuaría siempre en el mismo sentido, haciendo demasiado pequeñas las lecturas de frente, es decir, como **error sistemático de signo positivo**, con un efecto tanto más pronunciado en el resultado final cuanto más estaciones se ejecuten.

3. INFLUENCIA DEL HUNDIMIENTO DE LOS PUNTOS DE APOYO. CONVENIENCIA DE LAS NIVELACIONES DE IDA Y VUELTA. DISCREPANCIA SISTEMATICA DE CIERRE Δ .

Además del error sistemático que acabamos de indicar y que principalmente reduce las lecturas de frente, es necesario considerar otro error de la misma característica, que es debido al **hundimiento de los puntos de cambio**, movimientos que ocurren durante el tiempo que se emplea para el transporte del instrumento de una estación a la estación siguiente. Y como estos movimientos tienen por consecuencia una mayor lectura sobre la mira de espalda, resulta que tal error tiene por efecto un aumento de las alturas de todos los puntos de cambio relacionados. La influencia de este error es tanto mayor cuanto mayor sea el número de estaciones que se ejecuten.

Siendo P_1 y P_2 dos puntos fijos, $+\Delta h$ y $-\Delta h$ los desniveles correspondientes a las nivelaciones de ida y vuelta, respectivamente, los que suponemos libres de error casual, y σ el **efecto total del error de hundimiento de los puntos de cambio**, sobre un tiro de r metros de longitud (r metros de la ida y r metros de la vuelta), tendremos para los resultados de la ida h_i y vuelta, h_v :

$$(1) \quad \begin{aligned} h_i &= +\Delta h + \sigma \\ h_v &= -\Delta h + \sigma \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones, obtendremos la **discrepancia sistemática de cierre Δ** correspondiente a la longitud de $2r$ metros::

$$(2) \quad h_i + h_v = \Delta = 2\sigma$$

Y, promediando los resultados de ida y vuelta e invirtiendo para ello el signo del resultado de la vuelta, resulta:

$$(3) \quad \frac{h_i - h_v}{2} = \Delta h_{\text{promedio}}$$

con lo cual quedará evidenciado que la **media aritmética** está libre de este error sistemático y que la **discrepancia sistemática de cierre Δ** es el duplo del error sistemático σ que afecta a cada desnivel Δh de ida y vuelta (ver "C. de C.", pág. 278).

4. DEDUCCION DE LA LEY FUNDAMENTAL SOBRE LA PROPAGACION DEL ERROR EN LA NIVELACION. VISUAL DE LONGITUD CONSTANTE.

Sea L la longitud de una línea a nivelar, v el largo de la visual, y $\pm m_v$ el error accidental medio (ver "C. de C.", pág. 25) que afecta una lectura de mira.

Siendo, además, Δh el desnivel entre dos puntos de cambio consecutivos, a y b las lecturas de espalda (atrás) y frente (adelante), respectivamente, tendremos:

$$(4) \quad \Delta h = a - b$$

Tanto a como b están afectados de un error medio accidental m_v , que trataremos ahora de combinar.

Según el **teorema de Pitágoras del cálculo de compensación**, sabemos que el error medio $\pm m_{\Delta h}$ del desnivel Δh (ver "C. de C.", págs. 51 y 52) es igual a:

$$(5) \quad m_{\Delta h} = \sqrt{m_v^2 + m_v^2} = m_v \sqrt{2}$$

Efectuando n estaciones en la nivelación de la línea L , tendremos, para el error medio $\pm m_H$ del desnivel total ΔH , según la misma ley:

$$(6) \quad m_{\Delta H} = m_v \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}$$

$$(7) \quad = m_v \sqrt{2n}$$

Cuando suponemos la visual v de largo constante, podremos substituir n por $L/2v$, resultando entonces:

$$(8) \quad m_{\Delta H} = m_v \sqrt{\frac{L}{v}}$$

$$(9) \quad = \frac{m_v}{\sqrt{v}} \cdot \sqrt{L}$$

Los errores medios seguirán esta ley tanto mejor cuanto mejor se cumpla la igualdad de las longitudes de las visuales, lo que condujo a la adopción general de la visual de longitud constante en la nivelación geométrica.

La fórmula (9) traduce la más importante ley de errores que dice: **Para un mismo instrumento, un mismo operador, condiciones uniformes y visual constante, el error medio del desnivel ΔH , entre los puntos extremos de una línea L , es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia L ; o, en otros términos: el error de la nivelación geométrica crece sólo proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia.**

5. EL PESO DE LA NIVELACION GEOMETRICA, CON UN EJEMPLO DE APLICACION PRACTICA. Para otra línea de longitud L' tendremos entonces que el error medio será proporcional a $\sqrt{L'}$.

Teniendo en cuenta la definición del peso (ver "C. de C.", pág.198), que dice: **El peso de las nivelaciones es inversamente proporcional al cuadrado del correspondiente error medio**, resultará, para los pesos p y p' de las nivelaciones de las líneas L y L' , respectivamente:

$$(10) \quad p : p' = \frac{1}{m^2_{\Delta H}} : \frac{1}{m'^2_{\Delta H}} = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'}$$

es decir: **Los pesos de las nivelaciones de las líneas L y L' efectuadas con visual de longitud constante y condiciones uniformes, son proporcionales a las recíprocas de las distancias L y L' (grandes para líneas cortas y pequeños para líneas largas).**

Ejemplo práctico aplicando la media aritmética general.

Imaginase nivelado un punto P (cruce de tres líneas L_1 , L_2 , y L_3), desde los 3 puntos fijos A , B y C , siendo las longitudes de los caminos recorridos y las cotas de P obtenidas las que a continuación se indican:

Desde A , recorrido	$L_1 = 24,4$ km,	cota	$H_1 = 80,627$ m,
» B ,	» $L_2 = 18,5$ »	»	$H_2 = 80,621$ »
» C ,	» $L_3 = 13,3$ »	»	$H_3 = 80,610$ »

Se pregunta: **¿Cuál es la cota compensada x del punto P ?**

Según "C. de C.", pág. 217, sabemos que:

$$(11) \quad x = \frac{p_1 H_1 + p_2 H_2 + p_3 H_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Luego, según ecuación (10):

$$(12) \quad x = \frac{\frac{H_1}{L_1} + \frac{H_2}{L_2} + \frac{H_3}{L_3}}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}} = \left[\frac{H}{L} \right]$$

Substituyendo los valores del problema, resulta:

$$x = 80,000 \text{ m} + \frac{\frac{627}{24,4} + \frac{621}{18,5} + \frac{610}{13,3}}{\frac{1}{24,4} + \frac{1}{18,5} + \frac{1}{13,3}} \text{ mm} = 80,618 \text{ m.}$$

6. NIVELACION DE TERCER O CUARTO ORDEN: SUPONESE m_v CONSTANTE. FORMULA PERTINENTE. EJEMPLO PRACTICO; CRITERIO SOBRE EL CASO. Si el valor m_v para un determinado instrumento y operador y ciertas condiciones uniformes fuera constante, es decir una cantidad que **no dependiera del largo de la visual**, la ecuación (9) exigiría que la visual fuera lo más larga posible, resultando así menor el número n de estaciones y, por consiguiente, menor el trabajo a realizar en el terreno.

Pero esta suposición:

$$m_v = \text{constante,}$$

sólo es admisible cuando intencionalmente la lectura de mira es grosera, leyendo, por ejemplo, sólo los medios centímetros o los centímetros en miras centimetradas.

En este supuesto y hasta visuales de 100 metros, m_v no dependerá esencialmente del largo de la visual; siendo, en ello además, despreciable un pequeño error del centrado del nivel, de efecto reducido en vista del error inherente a la lectura grosera de mira.

Cuando se trata entonces de **nivelaciones de tercer o cuarto orden**, basadas en las de precisión superior, valdrá la regla: **Visual tan larga como las condiciones ópticas del instrumento (aumento) lo permitan.**

Aplicando la fórmula (9) por ejemplo a una línea de 1000 metros de largo, tendremos para el **error medio kilométrico $m_{1\text{km}}$** :

$$(13) \quad m_{1\text{km}}^2 = \frac{m_v^2}{v} \cdot 1000$$

Suponiendo lecturas al centímetro, tendremos, según vimos en "C. de C.", pág. 42 para el **error probable** de redondeo en el intervalo de 1 cm:

$$(14) \quad m_{\text{red. prob.}} = 0,25 \cdot 1 \text{ cm} = \pm 2,5 \text{ mm,}$$

y para el **error medio de redondeo** calculado en base a 100 valores, con el fin de demostrar que este error de redondeo **no** sigue la ley de errores de Gauss:

$$(15) \quad m_{\text{redondeo}} = \pm 2,9 \text{ mm o s a } \pm 3 \text{ mm, redondeado.}$$

Luego:

$$(16) \quad m_{1km}^2 = 3^2 \cdot \frac{1000}{v} = \frac{9000}{v}$$

$$(17) \quad m_{1km} = \sqrt{\frac{9000}{v}}$$

Ejemplo numérico. Para $v = 50$ metros resultaría:

$$m_{1km} = \sqrt{\frac{9000}{50}} = \pm 13 \text{ mm.}$$

Es decir: En caso de satisfacerse con esta precisión las necesidades de un determinado trabajo, no sería racional efectuar con precisión mayor que al centímetro las lecturas de mira.

7. NIVELACION DE PRECISION Y SEGUNDO ORDEN: SUPONESE m_v DEPENDIENTE DEL LARGO DE LA VISUAL. DEDUCCION DE LA CORRESPONDIENTE FORMULA. CRITERIO SOBRE LA VISUAL MAS FAVORABLE PARA LA PRECISION. Al efectuar la lectura de mira al milímetro, la suposición de $m_v = \text{constante}$ no se verifica: el error de lectura de mira evidentemente **depende**, en este caso, **del largo de la visual** y de la influencia del error del centrado del nivel. El efecto de este último error depende del largo de la visual y deja de ser despreciable en la determinación del error medio del desnivel.

Las experiencias prácticas han demostrado que se puede aproximadamente admitir que **el error medio de un golpe de nivel m_v es proporcional al largo de la visual**, es decir:

$$(18) \quad m_v = c \cdot v$$

donde **c** es una **constante de proporcionalidad**.

Tendremos entonces para el **error** de un desnivel Δh , en el supuesto de ser $v_{\text{atrás}} = v_{\text{adelante}}$:

$$\text{Error de un desnivel } \Delta h = \pm c \cdot v \pm c \cdot v$$

Pasando a **errores medios**:

$$(19) \quad m_{\Delta h}^2 = c^2 \cdot v^2 + c^2 \cdot v^2 = 2c^2 v^2$$

y para el error medio $m_{\Delta H}$ del desnivel ΔH correspondiente a la línea L de $n = \frac{L}{2v}$ estaciones:

$$(20) \quad m_{\Delta H}^2 = 2n \cdot c^2 v^2$$

$$(21) \quad = 2c^2 v^2 \cdot \frac{L}{2v} = c^2 \cdot v \cdot L$$

$$(22) \quad m_{\Delta H} = \pm c \sqrt{v \cdot L} = \pm c \sqrt{v} \cdot \sqrt{L}$$

Vale decir: **El error de nivelación crece proporcionalmente a la raíz de la distancia L** . Con el objeto de obtenerlo pequeño, conviene entonces elegir el **camino más derecho**, empleando **visuales cortas**.

Visual más favorable. La longitud de la visual más favorable dependerá naturalmente del aumento del instrumento empleado y de la división de la mira, debiendo dicho aumento hacer posible la lectura de los milímetros, y tener el nivel tubular una sensibilidad tal que, repitiendo la operación de nivelación, con mira situada a la distancia más favorable y nivel centrado, se obtenga siempre dentro de ciertos límites la misma lectura.

Por otra parte el nivel tubular no debe ser demasiado sensible, para que el nivelador no pierda demasiado tiempo en el centrado del nivel.

En nivelación de alta precisión, esta distancia más favorable oscila alrededor de 40 metros.

8. ERROR MEDIO KILOMETRICO m_o , QUE CARACTERIZA UN DETERMINADO INSTRUMENTO Y TRABAJO TECNICO. DETERMINACION DE m_o EN BASE A UN ERROR DE CIERRE DE TIRO DE NIVELACION.

Siendo $m_{\Delta h}$ el error medio de un desnivel, l ($= 2v$) la longitud entre dos puntos de cambio consecutivos, tendremos para el error medio $m_{\Delta H}$ correspondiente a la línea L :

$$\begin{aligned} m^2_{\Delta H} &= m^2_{\Delta h} + m^2_{\Delta h} + m^2_{\Delta h} + \dots \text{ (n veces)} \\ &= n \cdot m^2_{\Delta h} \end{aligned}$$

$$(23) \quad m_{\Delta H} = m_{\Delta h} \sqrt{n}$$

$$(24) \quad = m_{\Delta h} \cdot \sqrt{\frac{L}{l}}$$

$$(25) \quad = \frac{m_{\Delta h}}{\sqrt{l}} \cdot \sqrt{L}$$

donde el error $\frac{m_{\Delta h}}{\sqrt{l}}$ está referido a la **unidad de medida lineal**, el que, con visual v sin variar llegaría a ser una constante en el trabajo.

Acostúmbrase, sin embargo, no referir $\frac{m_{\Delta h}}{\sqrt{l}}$ a la unidad de medida lineal, sino a 1000 metros, error éste que designamos por m_o , siendo entonces: $\frac{m_{\Delta h}}{\sqrt{l}} = m_{lkm} = m_o$

Tendremos así para el error medio del desnivel de una línea de L km, en lugar de la ecuación (25), esta otra:

$$(26) \quad m_{\Delta H} = m_o \sqrt{L_{km}}$$

Inversamente, tratándose de hallar m_o , estando dado el error $M_{\Delta H}$ o error de cierre Δ de un tiro de nivelación, entre puntos de cotas exactas conocidas, tendremos:

$$27) \quad m_o = \frac{m_{\Delta H}}{\sqrt{L_{km}}} = \frac{\text{Error de cierre}}{\sqrt{L_{km}}} = \frac{\Delta}{\sqrt{L_{km}}}$$

Júzgase sobre la calidad de un instrumento de nivelación y la calidad de un trabajo efectuado con el mismo según el valor m_o que le corresponde.

El valor m_o deberá estar en armonía con el carácter de las operaciones a ejecutar, considerándose generalmente aceptable un trabajo de **nivelación técnica** cuando el error kilométrico que le corresponde no sobrepasa ± 1 cm, lo que es fácil de conseguir con un nivel simple de nivelación de tercer orden.

Para **nivelaciones urbanas** se exige generalmente una precisión de ± 4 ó ± 5 mm de error medio kilométrico.

9. ERROR MEDIO M_x DE LA MEDIA ARITMETICA x .

Siendo

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot l_1 + \frac{1}{n} \cdot l_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot l_n$$

y suponiendo las cantidades l afectadas del error medio $\pm m$, tendremos para el **error medio $\pm M_x$** de la **media aritmética x** :

$$M_x^2 = \frac{1}{n^2} \cdot m^2 + \frac{1}{n^2} \cdot m^2 + \frac{1}{n^2} \cdot m^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \cdot m^2 \quad (n \text{ veces})$$

$$= n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot m^2 = \frac{1}{n} \cdot m^2$$

$$(28) \quad M_x = m \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

Siendo $n = 2$, resulta:

$$(29) \quad M_x = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

La (28) nos dice: **El error medio M_x de la medida aritmética se obtiene del error medio m de una observación aislada, dividiendo éste último por la raíz cuadrada del número n de observaciones; en otros términos: La precisión de la media aritmética de n observaciones es \sqrt{n} veces más grande que la de una observación aislada (por más detalles, ver: "C. de C.", págs. 171 - 172).**

10. CALCULO DE LA PRECISION EN BASE A LA DISCREPANCIA DE CIERRE Δ DE UN TIRO DE NIVELACION.

Ejemplo práctico. Siendo la longitud de un tiro de nivelación, entre los puntos fijos **A** y **B**, $L = 16$ km ($L_{ida} = L_{vuelta} = 16$ km), y habiéndose

obtenido, en la operación de ida el desnivel $\Delta h = + 25,435$ m y en la de vuelta $\Delta h = - 25,413$ m, se pregunta:

- 1°. ¿Cuál es el valor del desnivel Δh compensado?
- 2°. » » » » » error medio kilométrico m_0 ?
- 3°. » » » » » » » M_x de la media aritmética x ?
- 4°. » » » » » » » $M_{\Delta H}$ del desnivel ΔH doblemente determinado?

Respuestas:

$$1^\circ. \quad \Delta H = \frac{\Delta h_i - \Delta h_v}{2} = \frac{25,435 + 25,413}{2} = 25,424 \text{ m}$$

$$2^\circ. \quad m_0 = \frac{\Delta h_i + \Delta h_v}{\sqrt{2L}} = \frac{22}{\sqrt{32}} = \pm 3,9 \text{ mm}$$

$$3^\circ. \quad M_x = \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm 2,8 \text{ mm}$$

$$4^\circ. \quad M_{\Delta H} = m_0 \sqrt{L} = \pm 2,8 \sqrt{16} = \pm 11,2 \text{ mm.}$$

11. COMPENSACION DE UN ERROR DE CIERRE Δ . DOS EJEMPLOS PRACTICOS. TOLERANCIAS ESTABLECIDAS EN LOS TRABAJOS DE NIVELACION DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR ARGENTINO. La compensación de un trabajo de nivelación es muy sencilla cuando las operaciones arrancan en un punto fijo y vuelven al mismo, formando una malla o polígono cerrado; o cuando el trabajo termina en otro punto de cota conocida. En el primer caso, que es el tratado en nuestro ejemplo práctico de planilla de cálculo (30), la suma de los desniveles Δh deberá ser igual a cero, teniéndose en el segundo ejemplo un valor de antemano conocido: **cota del punto terminal menos cota del punto de arranque.**

Debido a los inevitables errores de observación, estas dos condiciones generalmente no se cumplen en la práctica.

Llámase "error de cierre" la discrepancia Δ que se revela en la comparación de estos dos valores: **Valor medido y valor ideal**, siendo:

Error de cierre = valor medido menos valor ideal (ver "C. de C.", pág. 30).

Según vimos en el N° 5, sabemos que las líneas largas tienen peso menor que las cortas, debiendo, en consecuencia, corresponder a sus desniveles una corrección mayor. **Se repartirá, por consiguiente, la discordancia de cierre Δ sobre los distintos desniveles proporcionalmente a las distancias que les corresponden.**

Siendo d_1, d_2, d_3, \dots las distancias parciales, D la distancia total y Δ el error de cierre, tendremos para la **corrección** a aplicar a la **unidad de medida lineal**: $= -\frac{\Delta}{D}$, siendo entonces las **correcciones correspondientes a las distancias parciales d_1, d_2, d_3, \dots** :

$$-\frac{\Delta}{D} \cdot d_1; -\frac{\Delta}{D} \cdot d_2; \dots$$

Tolerancia relativa a m_0 .

El error medio kilométrico m_0 , para nivelaciones de segundo y tercer orden, no debe, por ejemplo, (*) sobrepasar ± 1 cm y ± 3 cm, respectivamente, siendo menester repetir las líneas en las cuales los errores excedan de dichos valores.

§ 14

CONTRALORES DE MEDICION EN LA NIVELACION GEOMETRICA**1. CONTRALORES FUNDAMENTALES.**

a) Repetición completa de las **grandes líneas de nivelación**, siguiendo en sentido inverso el orden de los puntos de cambio.

b) Nivelación de ida y vuelta de cada trozo de línea llamado **tiro de nivelación**, comprendido entre puntos fijos sucesivos.

c) El tiro aislado arranca y cierra en puntos de cotas conocidas, de precisión superior, pudiendo éstos coincidir, formando entonces la línea nivelada una **mallá o polígono cerrado**.

2. CONTRALORES LOCALES.

a) **Nivelación por dobles puntos de cambio**, es decir, eligiendo cada vez, para el golpe adelante o golpe atrás, no un sólo punto de cambio, sino dos, en lo posible a distintas alturas y relativamente próximos (fig. 1), siendo el inconveniente de este procedimiento que recién en la estación siguiente se obtendrá la comprobación buscada en el desnivel entre los dos puntos de cambio elegidos.

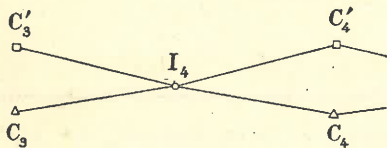


Fig. 1. — Se ilustra el procedimiento con dobles puntos de cambio próximos uno de otro.

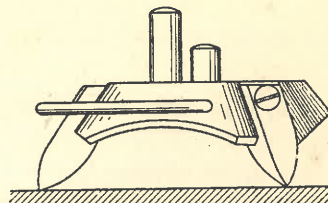


Fig. 2. — Sapo con doble punto de cambio a diferentes alturas y desnivel conocido.

Sálvase este inconveniente por el empleo de **sapos** provistos de **dos puntos de apoyo** (fig. 2) de desnivel conocido, perdiéndose, en cambio, con ello la ventaja de la independendencia de las dos operaciones.

b) Nivelación con **miras reversibles** (fig. 19, § 12), o **miras con doble graduación** (fig. 9, § 12). Suministra la doble lectura de mira sólo un con-

(*) Tolerancias en vigor para los trabajos del Instituto Geográfico Militar Argentino.

tralor sobre ésta, pero no del buen centrado del nivel correspondiente a cada una. Lógrase evitar el peligro de la falta de centrado del nivel en el momento de leer, descentrando intencionalmente el nivel antes de efectuar la segunda lectura, volviendo a centrarlo mediante un movimiento del tornillo de elevación en sentido contrario al que se hizo en la primera; procedimiento éste que, no obstante producir generalmente errores más fuertes de la constante de graduación, es sin embargo muy recomendable por los resultados más seguros que proporciona. Ver 2º contralor de campo, pág. 158.

c) Una nivelación con dobles estacionamientos para cada medición de desnivel, entre puntos de cambio consecutivos, protege eficazmente contra errores de lectura de mira y errores de lectura de nivel.

d) Las dobles lecturas de mira provista de numeración decádica (fig. 20, § 12), en cambio, no aumentan muy sensiblemente la seguridad de las efectuadas en la numeración normal.

§ 15

NIVELACION DE PRECISION

1. OBJETO y SUBDIVISION DE LAS NIVELACIONES DE PUNTOS FIJOS. La nivelación de nuevos puntos fijos, generalmente basada en otra de orden superior, constituye una de las principales tareas iniciales de todo trabajo de levantamiento para fines prácticos, técnicos o topográficos, tarea que debe ser efectuada con gran cuidado y las precauciones que el caso particular reclame.

Abarcan estas nivelaciones básicas las de alta precisión, de precisión, las de segundo y tercer orden.

Nos ocuparemos en el presente párrafo especialmente de las nivelaciones de precisión (ver N.º. 9, §1).

2. MEDIOS TECNICOS QUE CONDUCEN AL MAXIMO RENDIMIENTO. Los recursos técnicos de que se dispone para alcanzar la gran exactitud que las nivelaciones de precisión requieren, pueden concretarse en los siguientes 3 puntos. Se deberá emplear:

- a) instrumentos de gran rendimiento;
- b) miras especiales, muy finamente divididas, reversibles o de doble graduación, de ínvar o de madera;
- c) procedimientos operatorios adecuados.

3. INSTRUMENTOS DESTINADOS PARA NIVELACION DE PRECISION. ALGUNAS DE SUS MAS IMPORTANTES CARACTERISTICAS.

El anteojo debe tener considerable aumento (30 a 45), ser de gran poder separador (ver N.º. 16, § 10, Optica, tomo II, 2ª. edición), estar provisto de un nivel tubular de gran sensibilidad (de 5" a 10"), de cámara (ver fig.2), reversible o de coincidencia. Un nivel esférico (de 10' a 8') o niveles cilíndricos cruzados (de 2'), facilitan la rápida verticalización del eje prin-

cipal, y un tornillo de elevación el exacto centrado de la burbuja del nivel tubular o la bisección precisa de un campo blanco o trazo de mira, según el caso

4. MIRAS REVERSIBLES DE MADERA Y MIRAS DE DOBLE GRADUACION, DE INVAR. CONTRASTES QUINCENALES DE LAS MIRAS DE MADERA Y CONTRASTES ANUALES DE LAS DE INVAR. Emplease siempre un par de miras de precisión, reversibles o de doble graduación, verticalmente colocadas sobre "sapos", apoyos cónicos de acero o apoyos de sección cuadrada, miras que se hacen avanzar en el trabajo de tal modo que sirven alternativamente como "mira atrás" y "mira adelante" o "mira espalda" y "mira frente". Un nivel esférico de aproximadamente 1 metro de radio, facilita la verticalización de la mira, usándose, además, una o dos tacuaras (ver fig. 16 y 21, § 12) como puntales, en las nivelaciones de alta precisión, a veces un soporte-trípode especial (fig. 14, §12).

División de la mira. Las divisiones son a campos (figs. 8 y 10, § 12) o a trazos (figs. 9 y 14, § 12). Tienen estas últimas una doble graduación en doble fila, generalmente desplazada la una con respecto a la otra en una magnitud aproximadamente igual al medio intervalo de la mira (medio campo), disposición ésta que contribuye al aumento de la precisión y seguridad de las lecturas.

Miras de madera. En todas las miras de madera varía la longitud de las mismas debido al cambio de temperatura (para pino, el coeficiente de dilatación es, según vimos en "C. de C.", pág. 59, igual a $3,6 \cdot 10^{-6}$), pero principalmente debido al cambio de humedad que sufre en el transcurso de los meses que dura una campaña, pudiendo llegar la variación a varios decímetros por metro.

Como hasta ahora no fué posible hallar una relación entre la humedad del aire y el cambio de la unidad métrica de las miras de madera, es necesario **contrastar periódicamente** (cada 15 días) la longitud de las miras con un **metro normal**, utilizándose en tales contrastes marcas metálicas especiales encastradas en el cuerpo de la mira (ver fig. 20, § 12).

Los inconvenientes de estos frecuentes contrastes de miras quedan subsanados por el uso de otro tipo de mira con divisiones ejecutadas sobre una **cinta de invar.**

Las casas **Zeiss, Kern, Fennel** y otras construyen hoy esta clase de miras con cinta de invar de doble división desplazadas una con respecto a la otra en 2,5 mm. La cinta hállase en ella bajo una tensión de 20 kg. Tales divisiones de mira representan entonces medidas independientes de los cambios de temperatura y humedad, necesitándose sólo de tanto en tanto (después de una campaña o una vez por año) un contraste en un aparato especial llamado comparador, con el objeto de cerciorarse si no ocurrió un cambio brusco en el metal invar.

5. CARACTERISTICAS DE LOS PRINCIPALES METODOS DE MEDICION EN USO EN LAS NIVELACIONES DE PRECISION. He aquí los principales métodos en uso:

Primer método. Nivelación con nivel tubular centrado y correspondiente lectura de mira, usando miras de doble graduación. Se puede emplear para

este método con ventaja nuestro formulario de nivelación N° 5, pág. 161.

Segundo método. Nivelación con visual levemente inclinada. Distínguese dos casos diferentes: Biséctase un **campo blanco** (1er. caso) con hilo central simple (método **Seibt**, ver Nos. 10-13), o un trazo de división (2° caso) con doble hilo central (método empleado por la "Landesaufnahme") o cuña (ver fig. 5, pág. 118), usando **miras reversibles de madera** (ver fig. 19, § 12) o miras de madera con numeración decádica (ver fig. 20, § 12) y graduación de medios centímetros, o **miras de ínvar** con doble graduación de medios centímetros, desplazada la una con respecto a la otra (ver fig. 9, § 12).

Tercer método. Nivelación con **nivel tubular centrado y visual horizontal desplazada**. Se bisectará en ello un campo blanco de la mira de ínvar de medios centímetros que acabamos de mencionar (método empleado en los trabajos de nivelación de precisión del **Instituto Geográfico Militar Argentino** y del **Ministerio de Obras Públicas de la Nación**), o se bisecta un trazo de división de dicha mira mediante la cuña del retículo. Nuestro formulario de nivelación N° 3, en uso general en los trabajos del citado Ministerio de Obras Públicas, está especialmente adaptado a este método.



Fig. 1. — Se ilustra la ejecución de la nivelación de precisión.

Cuarto método. Combinación de los métodos 2° y 3°. Según se desprende de nuestra somera descripción dada en el párrafo 11, el nivel **Zeiss A** de reciente introducción permite **combinar** ventajosamente los métodos 2° y 3°, pudiendo con el mismo ser desplazada verticalmente la visual y ser medido por medio del desplazamiento de las dos semi-imágenes de la burbuja, el ángulo que todavía queda entre la horizontal y la visual levemente inclinada. Se puede emplear para este método combinado nuestro formulario de nivelación N° 6.

6. ORDEN EN QUE DEBEN SER EFECTUADAS LAS OBSERVACIONES DE NIVELACION DE PRECISION. DOS CONTRALORES DE CAMPO QUE EL USO DE LA MIRA DE INVAR CON DOBLE GRADUACION PROPORCIONA; CONDICION IMPRESCINDIBLE PARA SU EFICACIA. ELIMINACION DE LOS EFECTOS DE HUNDIMIENTOS DEL INSTRUMENTO Y DE LOS APOYOS DE MIRA. TERCER CONTRALOR DE CAMPO. Deben ser efectuadas las lecturas de mira espalda, a_1 y a_2 ("mira atrás") y mira de frente, b_1 , b_2 , ("mira adelante") invariablemente en el siguiente orden:

- 1) lectura de mira atrás, a_1 , sobre la primera división,
- 2) » » » adelante, b_1 , » » » »
- 3) » » » » , b_2 , » » segunda »
- 4) » » » atrás, a_2 , » » » »

obteniéndose con ellas dos importantes contralores de campo.

El **primer contralor** consiste en el cálculo de la constante c_0 , debiendo verificarse con suficiente aproximación la ecuación:

$$(1) \quad a_2 - a_1 = c_0 = b_2 - b_1$$

contralor éste que debe ser ejecutado con todas las cifras anotadas, puesto que su eficacia estaría sensiblemente reducida con efectuárselo sólo con las dos últimas cifras.

Tolerancia para la constante c_0 . Admítase para la nivelación de precisión según el primer método usando miras de invar de medios centímetros, con constante $c_0 = 592,5 \frac{1}{2} \text{cm}$, una **tolerancia** de 3 unidades en la última cifra ($= 3 \frac{1}{2} \text{mm}$), y de dos unidades ($= 2 \text{mm}$) usando miras centimetradas con la constante $29,20 \text{ dm}$ (ver fig. 10, pág. 139); en las operaciones de alta precisión según el método 3° , con constante $c_0 = 592,50 \frac{1}{2} \text{cm}$ una **tolerancia** de 10 unidades en la última cifra ($= \frac{1}{2} \text{mm}$). Ver ejemplos prácticos consignados en Form. N° 5, pág. 161 y Form. niv. N° 3, pág. 169.

El **segundo contralor de campo** lo da la comparación del segundo valor para el desnivel Δh obtenido por lecturas de mira efectuadas sobre la segunda división con el obtenido mediante las lecturas sobre la primera:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta h = a_1 - b_1 \\ \quad \quad = a_2 - b_2 \end{cases}$$

Es de observar que estos dos contralores de campo carecen de valor cuando en el momento de efectuarse las lecturas b_1 o b_2 sobre la segunda división la burbuja hubiera dejado de estar centrada exactamente.

Con el objeto de eliminar esta posibilidad y al mismo tiempo aumentar la precisión de la nivelación, es aconsejable descentrar a propósito la burbuja en cada golpe de nivel y no efectuar la lectura sino en el preciso momento de estar centrada la burbuja del nivel (ver § 14, 2, b), pág. 155).

Eliminación de los efectos de los hundimientos del instrumento y de los apoyos de mira. Mientras la influencia del hundimiento del instrumento que puede haber ocurrido en el transcurso del tiempo que dure el trabajo en una estación, puede considerarse eliminado por el indicado **orden de las observaciones** de una nivelada completa (ver N° 2, § 13), quedará eliminado, en su mayor parte, también el efecto de los hundimientos de los

apoyos de mira pueden haber ocurrido durante el traslado del instrumento de una estación a la otra, por medio de una **nivelación de ida y vuelta** (ver N° 3, § 13).

El **tercer contralor de campo** se lo obtiene por la comparación del promedio de las lecturas de los hilos estadimétricos con la lectura del hilo central.

La diferencia de tales lecturas de hilos estadimétricos multiplicada por **k** nos da la longitud de la visual **v** tomada (ver ejemplos consignados en Form. niv. 3, pág. 169, Form. 5, pág. 161, Form. 6, págs. 170 y 171).

7. SUSTITUCION DE LOS NUMEROS NEGATIVOS POR SUS COMPLEMENTOS DECADICOS. IMPORTANCIA DE ESTOS COMPLEMENTOS DECADICOS EN EL CALCULO DE LA NIVELACION. Con el fin de simplificar el cálculo de la nivelación de precisión se hace uso de la transformación de los números negativos en la suma de dos números, de los cuales el primero es la más próxima potencia inferior negativa de 10 con exponente entero ($-10^0, -10^1, -10^2, -10^3, \dots$), siendo el segundo un número positivo que **complementa** el número negativo a la correspondiente potencia de 10 ó sea: 1; 10; 100; 1000,...

Ejemplos:

$$\begin{aligned} - 0,91 &= - 1 + 0,09 = - 10^0 + 0,09 \\ - 8,92 &= - 10 + 1,08 = - 10^1 + 1,08 \\ - 48,37 &= - 100 + 51,63 = - 10^2 + 51,63 \\ - 386,42 &= - 1000 + 613,58 = - 10^3 + 613,58 \end{aligned}$$

Esta sustitución de los números negativos por sus **complementos decádicos** fué introducida en la práctica del cálculo de la nivelación geométrica por el General O. **Schreiber** en la siguiente forma convencional:

$$\begin{array}{r} - 0,91 = \quad *09 \\ - 8,92 = \quad *1,08 \\ - 48,37 = \quad *51,63 \\ - 386,42 = \quad *613,58 \\ \hline \text{Sumas} - 444,62 \quad *555,38 - 1000 = - 444,62 \end{array}$$

ejemplos de los cuales el primero se lee así: “**asterisco, coma, cero, nueve**”.

Este signo (*) puede por lo tanto conceptuarse como nueva cifra decádica, **el menos uno**, la que aparecerá siempre, igual que las demás cifras decádicas, multiplicada por aquella potencia de 10 que corresponde a su lugar. Esta nueva cifra **-1** puede sumarse algebraicamente a las de la misma columna como cualquier otro número de la misma.

Con el objeto de ilustrar las ventajas de este cálculo que permite invariablemente formar:

$$\underline{\text{Diferencia de nivel}} (\Delta h) = \underline{\text{lectura espalda}} (a) \underline{\text{menos lectura frente}} (b)$$

ejecutaremos en el siguiente cuadro el cálculo de desnivel Δh correspondiente a las estaciones 1 y 6 (de los ejemplos de pág. 169) dos veces, primero en columna (3) y luego en la forma más práctica de columna (4), la que se sigue en la nivelación de precisión.

Estación	a (espalda)	b (f.ente)	Δh	Δh
	(1)	(2)	(3)	(4)
1	280,45	247,41	+ 33,04	33,04
	872,99	839,93	+ 33,06	33,06
6	216,17	518,66	— 302,49	*697,51
	808,71	1111,19	— 302,48	*697,52
		Sumas:	+ 66,10	1461,13
			— 604,97	— 2000,00
			— 538,87	— 538,87

8. EJEMPLOS PRACTICOS CONSIGNADOS EN NUESTRO FORMULARIO DE NIVELACION N° 5 EJECUTADOS DE ACUERDO AL PRIMER METODO DE NIVELACION DE PRECISION. (Se supone el empleo de la mira representada en fig. 10, pág. 139).

9. NIVELACION CON VISUAL LEVEMENTE INCLINADA; SU IMPORTANCIA. CALCULO DE LA CORRECCION Δl . El exacto centrado de la burbuja de un nivel tubular de gran sensibilidad (de 5", por ejemplo) es laborioso y engorroso. Se ha introducido por eso en los trabajos de nivelación de alta precisión un procedimiento operatorio más rápido, por medio del cual tal centrado de la burbuja no se necesita realizar sino muy aproximadamente, efectuándose al mismo tiempo la lectura de la burbuja que corresponde a la posición de la visual. Tal lectura de burbuja nos da el valor del ángulo de inclinación con el cual podemos calcular la corrección para reducir la visual inclinada al horizonte.

Sea α el pequeño ángulo de inclinación de la visual, d la distancia y l la lectura de mira bruta. Tendremos para la lectura de mira corregida:

$$(3) \quad l + \Delta l = l + \frac{d \cdot \alpha''}{206\,265''}$$

donde Δl tiene signo positivo cuando la visual está inclinada debajo del horizonte y negativo en caso contrario.

Suponemos un nivel corregido, es decir, un instrumento en el cual la visual es horizontal cuando la burbuja del nivel tubular está centrada.

Obtiénesse entonces el ángulo α que se necesita directamente con ayuda de la desviación de la burbuja del nivel y con tener en cuenta el valor angular γ de una división del nivel tubular previamente determinado.

Estando en los niveles de esta clase el **cero de la graduación generalmente situado del lado del objetivo** (ver fig. 2), el punto medio de dicha graduación en el número 25 y el 50 del lado del ocular, tendremos la burbuja centrada cuando la lectura del extremo de la burbuja situada cerca

Desde: P. F. 453 Hasta: P. F. 454

Nivelador: Apuntador:

Nivel: Kern III, N.º 28328 Miras: 16/17 Dif. const. = 29,20 dm.

Tiempo: nublado Fecha: 28 VIII 1935 Hora: 16^h 30^m

Punto esp. Nº estación 1ª mira fr.	Largo Visual Esp. Front. m	Hilos estadimétricos		Espalda		Frente		Comprobación		Desniveles parciales		
		Espalda mm	Frente mm	dm	mm	dm	mm	Espalda Frente		dm	mm	
								dm	mm			
P. F. 453 1	63	2789	935	24	73	06	22	29	19	18	51	
		2158	309									
17	63	4947	1244	53	92	35	42	29	20	18	50	
		63,1	62,6									
2	96	2460	1745	19	78	12	54	29	20	7	24	
		1496	762									
	16	98	3956	2507	48	98	41	75	29	21	7	23
3	97	2311	1912	18	26	14	29	29	21	3	97	
		1342	944									
17	97	3653	2856	47	47	43	50	29	21	3	97	
4	95	1990	2100	15	13	16	27	29	20	*8	86	
		1037	1153									
16	95	3027	3253	44	33	45	47	29	20	*8	86	
5	71	1717	1971	13	62	16	19	29	19	*7	43	
		1008	1266									
P. F. 454	70	2725	3237	42	81	45	39	29	20	*7	42	
	845	422,6	422,9	329	03	277	04			91	99	
		422,9		$2\Delta h = + 51,99 \text{ dm}$						—	40	00
	d =	845,5		$\Delta h = + 2,5995 \text{ m}$						$2\Delta h = +$	51	99
										$\Delta h = + 2,5995 \text{ m}$		

Form. niv. N.º 5

del objetivo + lectura del extremo situado cerca del ocular es igual a 50, es decir:

$$(4) \quad \text{obj} + \text{oc} = 50$$

o también:

$$(5) \quad \frac{\text{obj} + \text{oc}}{2} = 25$$

resultando entonces para la magnitud de la descentración del nivel, en divisiones del nivel tubular, la expresión:

$$(6) \quad \frac{\text{obj} + \text{oc}}{2} - 25$$

o sea:

$$(7) \quad \frac{1}{2} [(\text{obj} + \text{oc}) - 50]$$

Resulta entonces para la distancia d (expresada en metros) la corrección Δl a aplicar a la lectura bruta l :

$$(8) \quad \Delta l = \frac{(\text{obj} + \text{oc}) - 50}{2} \cdot \frac{\gamma''}{206\,265''} \cdot d \quad (\text{en metros})$$

donde γ'' expresa, según dijimos, el valor angular de una división del nivel tubular.

Poniendo para simplificar la notación $[(\text{obj} + \text{oc}) - 50] = \Delta n$, tenemos para la corrección Δl en **milímetros**:

$$(9) \quad \Delta l = \Delta n \cdot \frac{\gamma \cdot d \cdot 1000}{2 \cdot 206\,265} = \Delta n \cdot \frac{d}{412,53 \gamma}$$

o sea:

$$(10) \quad \Delta l = \frac{d}{C} \cdot \Delta n$$

donde designamos por C al divisor $\frac{412,53}{\gamma}$ que es una **constante** del instrumento.

En caso de disponerse de una mira graduada en $\frac{1}{2}$ cm (que es el caso más general en las nivelaciones de alta precisión), tendremos en lugar de las (8) y (9) estas otras:

$$(11) \quad \Delta l = [(\text{obj} + \text{oc}) - 50] \cdot \frac{\gamma \cdot d}{206\,265} \quad (\text{en medios metros})$$

y

$$(12) \quad \Delta l = \Delta n \cdot \frac{d \cdot \gamma}{206,265} \quad (\text{en medios milímetros})$$

y siendo en este caso la constante $C' = \frac{206,265}{\gamma}$

resulta:

$$(13) \quad \Delta l = \Delta n \cdot \frac{d}{C'}$$

Las expresiones (10) y (13) se calculan con ayuda de la regla de cálculo común con gran comodidad y rapidez (ver ejemplo 3, pág. 27 de

nuestro folleto sobre la regla de cálculo, tipo técnico, 3ª edición).

La nivelación con visual levemente inclinada (con inclinaciones que generalmente no sobrepasan de $\pm 50''$) ofrece múltiples ventajas no sólo en lo concerniente a la **precisión** de las nivelaciones de primer orden (o de alta precisión) y nivelaciones especiales, como ser **cruces** de anchos ríos, sino principalmente por la **rapidez** de las operaciones. Lo único que es necesario suponer es que los operadores tengan una muy buena práctica en el manejo de la regla de cálculo, debiendo exigírseles una práctica tal que sean capaces de ejecutar los simples cálculos de corrección de un modo completamente mecánico y por tanto rapidísimamente.

10. SEGUNDO METODO DE NIVELACION DE ALTA PRECISION CON VISUAL LEVEMENTE INCLINADA. SEGUNDO CASO: BISECCION DE UN CAMPO BLANCO SEGUN EL SISTEMA DE SEIBT. Mientras que en el primer método (ver Nos. 5 y 8) se lee la posición del hilo nivelador sobre la mira, el sistema de **Seibt** se caracteriza por la bisección de un campo blanco (de 4 mm). Como tal bisección puede efectuarse con más precisión que la simple lectura de mira, el procedimiento de la bisección da un notable aumento de la precisión de la nivelación (ver pág. 130, tomo II, 2ª edición).

Instrumento. Puede utilizarse para ese método cualquier instrumento provisto de tornillo de elevación y nivel tubular de una sensibilidad de $5''$ aproximadamente, con graduación corrida, **cero del lado del ocular del anteojo** (ver fig. 2) y 25 en el medio de la división.

El nivel de la casa **Breithaupt** especialmente construído para la aplicación del sistema **Seibt**, tiene en su construcción modernizada (ver fig. 4, pág. 110) un anteojo de 45 aumentos con lente de enfoque interior. El nivel tubular es reversible y de $5''$ de sensibilidad. Es del tipo de los de cámara (ver fig. 2), de tal modo que aun con temperatura muy variable puede mantenerse el largo de la burbuja de unas 20 divisiones constantes.

Mira Seibt. La mira **Seibt** posee, según ya dijimos en párrafo 12, una numeración de dobles decímetros (ver fig. 19, § 12), la que comienza en ambas caras abajo con el número 20, aumentando en la cara de frente (cifras negras y blancas) hasta 35, disminuyendo en el reverso (cifras rojas y blancas) hasta 5.

(Estas cifras pueden expresar también unidades de la mira, o sea dobles milímetros: 2000, 2100, 2200, . . . 3500, en el frente, y 2000, 1900, 1800, . . . 500, en el reverso.)

Suma de las lecturas de la mira correspondientes a una misma inclinación del eje de colimación.

Designando por l_f la lectura hecha sobre el frente de



Fig. 2. — Se ilustra un nivel de cámara (el 0 se halla del lado del ocular del anteojo).

mira y l_r la efectuada sobre el reverso (expresadas en dobles metros de mira), h_f y h_r las correspondientes alturas (expresadas en metros), tendremos:

$$(14) \quad h_f = 2(l_f - 2000) \quad h_r = 2(2000 - l_r)$$

Cuando las lecturas l_f y l_r están libres de errores, las alturas h_f y h_r son iguales:

$$(15) \quad h_f = h_r$$

Sumando sus valores dados por las (14), tenemos:

$$(16) \quad 2(l_f - 2000) = 2(2000 - l_r)$$

Luego:

$$(17) \quad l_f + l_r = 4000$$

Es decir: **La suma de las lecturas l_f y l_r hechas sobre ambas caras de una mira reversible Seibt con la misma inclinación del eje de colimación, es igual al duplo de la lectura correspondiente al pie o sea 4000.**

Corresponde en este caso a la bisección de un espacio blanco de 4 mm, en el frente, la bisección de un espacio negro de 4 mm, en el reverso de la mira.

Pero, siendo una característica esencial del sistema **Seibt** la bisección invariable de un espacio blanco, tanto en el frente como en el reverso de la mira, será necesario modificar la inclinación del eje de colimación para la lectura l_r hasta poder bisectar el próximo espacio blanco del reverso de la mira, bisección ésta que dista 4 mm o sea 2 dobles milímetros del medio del espacio negro opuesto al espacio blanco bisectado.

Primer contralor de campo.

Obtendremos entonces en la suma de las lecturas l_f y l_r ya no 4000 sino el número 4002 para una visual inclinada hacia abajo y 3998 para una visual inclinada hacia arriba, números éstos que nos proporcionan el **primer contralor de campo**.

Sumando ahora las ecuaciones (14) y dividiendo por 2, obtenemos:

$$(18) \quad \frac{h_f + h_r}{2} = l_f - l_r$$

Es decir: **La diferencia de las lecturas de mira l_f y l_r nos da la media aritmética de las alturas h_f y h_r expresada en metros.**

11. ORDEN DE LAS LECTURAS EN EL SISTEMA SEIBT. Efectúanse las lecturas en el sistema **Seibt** originario en el siguiente orden:

$$\begin{array}{l} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ doble golpe atrás, frente y reverso de la mira,} \\ 1^{\text{er}} \text{ » » adelante, » » » » » } \end{array} \right. \\ \text{II} \left\{ \begin{array}{l} 2^{\circ} \text{ » » adelante, reverso y frente de la mira,} \\ 2^{\circ} \text{ » » atrás, » » » » » } \end{array} \right. \end{array}$$

Es decir, se ejecuta una verdadera nivelación doble, de **ida** (I) y **vuelta** (II), en cada estación de nivel.

Con el objeto de **simplificar** el trabajo de campo y de gabinete y **acelerar** las operaciones en el terreno, redujéronse en las nivelaciones de precisión del **Instituto Geográfico Militar Argentino** con buen éxito las ocho observaciones del método original a la mitad, las que se consideraban necesarias y suficientes, a saber:

1 ^{er}	golpe simple atrás,	lectura de mira de frente,	l_f
1 ^{er}	» » adelante,	» » » » »	l'_f
2 ^o	» » » ,	» » » de reverso,	l'_r
2 ^o	» » atrás,	» » » » »	l_r

consiguiéndose así mayor rapidez y, por ende, mayor precisión y mayor rendimiento de las operaciones.

Bisécetase cada vez con el hilo medio el campo blanco de 4mm más próximo a la horizontal, leyéndose en el instante de realizar con toda precisión la bisección la posición de ambos extremos de la burbuja.

12. DETERMINACION DE LA CORRECCION A APLICAR AL DES-NIVEL DE UNA ESTACION. Por ser difícil la lectura directa correspondiente al centro de la burbuja de un nivel tubular, por una parte, y algo insegura, por la otra, la determinación de la desviación de la burbuja en base a la lectura de un solo extremo de la misma, se leen cada vez ambos extremos de la burbuja.

Sean oc_1, obj_1 las lecturas de burbuja correspondientes al golpe sobre la cara de frente y oc_2, obj_2 las correspondientes al golpe sobre la cara de reverso, tendremos:

$$(19) \quad \frac{oc_1 + obj_1 + oc_2 + obj_2}{2} = N$$

donde N expresa la doble magnitud de la descentración de la burbuja referida al punto cero situado cerca del ocular. $N/2$ expresa entonces la desviación media de la burbuja.

Cuando se puede suponer que en el corto tiempo que duran los golpes l_f y l_r, l'_f y l'_r , no se haya modificado el largo de la burbuja, que designamos por e , se puede poner:

$$(20) \quad obj_1 = oc_1 + e \quad obj_2 = oc_2 + e$$

o sea:

$$(21) \quad e = obj_1 - oc_1 \quad e = obj_2 - oc_2$$

Con tener en cuenta las (20), la (19) se transforma en:

$$(22) \quad N = \frac{1}{2} (2 oc_1 + e + 2 oc_2 + e) = oc_1 + oc_2 + e$$

la que, con sustituir los valores de e según las (21), nos da:

$$(23) \quad \begin{cases} N = oc_1 + oc_2 + obj_1 - oc_1 = \frac{oc_2 + obj_1}{2} \\ N = oc_1 + oc_2 + obj_2 - oc_2 = \frac{oc_1 + obj_2}{2} \end{cases}$$

Se obtiene así el valor de la doble desviación media por doble cálculo según las ecuaciones (23) de acuerdo a la siguiente regla: **Se forman las sumas en cruz de las lecturas de ambos extremos de la burbuja.** La media de ambas sumas la designamos por N cuando corresponde a los golpes atrás, l_f y l_r ; y la designaremos por N' cuando corresponde a los golpes adelante, l'_f y l'_r . (ver formulario de nivelación N° 2, pág. 166).

Cuando

$$(24) \quad N = 50 \quad \text{o sea:} \quad N/2 = 25$$

la visual media sería horizontal.

Designando por α el ángulo de inclinación de la visual media (en divisiones del nivel tubular), tendremos:

$$(25) \quad \alpha = 25 - \frac{N}{2}$$

de valor positivo cuando el extremo del ocular del antejo es más alto y de valor negativo en caso contrario.

Designando por a la longitud de la visual (conservándose con ello la notación original del sistema **Seibt**), por γ el valor angular de una división del nivel tubular (previamente determinado con un mínimo de 10 mediciones), resulta para la **corrección de la visual inclinada** por reducción a la horizontal:

$$(26) \quad \frac{d \cdot \gamma}{206\,265} \cdot a = (25 - \frac{1}{2}N) \cdot \frac{\gamma}{206\,265} \cdot a \quad (\text{en metros})$$

Cuando la distancia a hasta la mira atrás es igual a la de la mira adelante, y siendo $\frac{1}{2}N$ y $\frac{1}{2}N'$, según dijimos, las desviaciones de la burbuja correspondientes a los dobles golpes o visual media atrás y adelante, respectivamente, tendremos para la **corrección del desnivel Δh** de una estación:

$$(27) \quad \text{Corrección} = (25 - \frac{1}{2}N) - (25 - \frac{1}{2}N') \cdot \frac{\gamma}{206\,265} \cdot a = (\frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}N) \frac{\gamma}{206\,265} \cdot a$$

$$(28) \quad = (N' - N) \frac{\gamma}{2 \cdot 206\,265} \cdot a = (N' - N) \frac{\gamma}{412\,530} \cdot a \quad (\text{en metros})$$

$$(29) \quad = (N' - N) \frac{1000 \gamma}{412\,530} \cdot a = (N' - N) \frac{\gamma}{412,53} \cdot a \quad (\text{en milímetros})$$

$$(30) \quad = (N' - N) \frac{a}{\frac{412,53}{\gamma}} = (N' - N) \cdot \frac{a}{b}$$

donde b (conservando la notación original del sistema **Seibt**) significa una **constante del instrumento**:

$$(31) \quad b = \frac{412,53}{\gamma}$$

Luego:

$$(32) \quad \text{Corrección del desnivel } \Delta h: = - \frac{a}{b} (N - N')$$

En el nivel **Breithaupt** N° 3438 (ver pág. 167) resultó para la constante b :

$$(33) \quad b = \frac{412,53}{5,25} = 78,5.$$

Las ecuaciones (18) y (32) nos dan el desnivel Δh corregido.

Ejemplos prácticos:

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &= 740 - 1724 - \frac{20,4}{78,5} (45,0 - 46,3) \quad (\text{ver estación 1, planilla de pág. 167}) \\ &= -984 + 0,3 = -983,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

13. **FORMULARIO DE NIVELACION DE PRECISION N° 2 Y EJEMPLOS PRACTICOS CALCULADOS EN EL MISMO. TRABAJOS EFECTUADOS SEGUN EL METODO SEIBT POR EL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR ARGENTINO.** Como ejemplos de aplicación del método

Desde: P.F. 758 F.C.P.B. Rosario Hasta: P.F. 757
 Nivelador: Roberto Müller Ayudante: Jorge Böhner
 Instrumento: Breithaupt 3438 Fecha: 2. VIII. 1918
 1 parte del nivel: 5" 25 (b = 78,5) Hora: 6 59 a. m.
 Constantes: k = 100 c = 0,78 m
 Miras: 395 y 396 Condiciones atmosféricas: despejado

Número de la estación	Distancia estadim. a		DE ESPALDA			DE FRENTE			N-N'	$\frac{a}{b}(N-N')$ mm
	en dobles mm		Mira	Burbuja		Mira	Burbuja			
	de espalda	de frente	L (mm)	N		L (mm)	N'			
1	2920	2912	2371	120	400	2863	130	410		
	2822	2815	1631	48	331	1139	51	335		
	98	97	4002	448	451	4002	461	465		
			0740	N = 450		1724	N' = 463		-1,3	+0,3
2	2749	2753	2651	124	414	2655	95	385		
	2553	2557	1351	81	371	1343	135	425		
	196	196	4002	495	495	3998	520	520		
			1300	N = 495		1312	N' = 520		-2,5	+1,3
3	2657	2661	2559	130	429	2563	112	411		
	2461	2465	1443	91	388	1439	74	369		
	196	196	4002	520	518	4002	485	481		
			1116	N = 519		1124	N' = 483		+3,6	-1,8
4	2717	2730	2619	117	415	2631	88	387		
	2521	2532	1383	78	378	1367	123	421		
	196	198	4002	493	495	3998	510	509		
			1236	N = 494		1264	N' = 510		-1,6	+0,8
5	2737	2729	2639	73	370	2631	125	423		
	2541	2533	1359	110	409	1371	83	383		
	196	196	3998	480	482	4002	506	508		
			1280	N = 481		1260	N' = 507		-2,6	+1,3
6	2745	2721	2647	65	361	2623	80	379		
	2549	2525	1351	101	399	1375	120	419		
	196	196	3998	462	464	3998	499	499		
			1296	N = 463		1248	N' = 499		-3,6	+1,8
Suma =		1078	1079	+ 6968						+3,7
		1079			- 7932					
		2157			- 964 mm					
		431,4 m			+ 3,7 "					
12c =		9,4 "	$\Delta h =$		- 960,3 mm					
d =		440,8 m								

Seibt damos en nuestro registro de nivelación N° 2 un trozo de un tiro de nivelación de precisión perteneciente al polígono de la ciudad de Rosario ejecutado por el autor en el año 1918. Después de las explicaciones que anteceden, nos parecen superfluas mayores detalles sobre el cálculo de los resultados.

Según este método efectuáronse por el autor en los años 1913-1918. en la Provincia de Santa Fe, trabajos de nivelación de alta precisión, cerrando los primeros dos grandes polígonos de esta categoría de trabajos de una extensión total de 1000 kilómetros y con errores de cierre menores que los que permiten las tolerancias internacionales (ver: Anuario del Instituto Geográfico Militar Argentino, 2° Volumen, año 1913, págs. 6-9, 3er. Volumen, 1914, págs. 8-14, y los volúmenes siguientes).

14. **TERCER METODO DE NIVELACION DE PRECISION: BISECCION DE ESPACIO BLANCO (PRIMER CASO) O BISECCION DE TRAZO DE DIVISION DE MIRA CON AYUDA DE LA CUÑA FILAR (SEGUNDO CASO). MODO DE OPERAR.** Dirigido el anteojo hacia la mira atrás, se centrará el nivel tubular por medio del tornillo de elevación. Luego se desplazará la visual paralelamente a la horizontal con ayuda del tornillo micrométrico (ver fig. 3, pág. 117) hasta bisectar el próximo espacio blanco de $\frac{1}{2}$ cm (primer caso) cuando se nivela con visuales más largas que 40 metros, o hasta bisectar el próximo trazo de mira con ayuda de la cuña filar (segundo caso) cuando se nivela con visual muy corta.

15. **EJEMPLOS PRACTICOS CONSIGNADOS EN NUESTRO FORMULARIO DE NIVELACION DE PRECISION N° 3 PARA ILUSTRAR LA APLICACION DEL TERCER METODO CON BISECCION DE ESPACIOS BLANCOS.** Ver pág. 169.

16. **EJEMPLOS PRACTICOS CONSIGNADOS EN NUESTRO FORMULARIO DE NIVELACION DE PRECISION N° 6 PARA ILUSTRAR LA APLICACION DEL CUARTO METODO CON NIVEL ZEISS A. NOTA EXPLICATIVA.** Ver págs. 170 y 171.

17. **CRUCE DE ANCHOS RIOS POR MEDIO DE LA NIVELACION DE PRECISION. NIVELACION RECIPROCA Y SIMULTANEA. EJEMPLO PRACTICO. RESULTADOS DE CRUCES DE RIOS EFECTUADOS EN LA REPUBLICA ARGENTINA.** La práctica enseña que un anteojo de 40 aumentos permite todavía estimar los milímetros sobre una mira centimetrada situada a una distancia de unos 200 metros. Pero cuando la longitud de la visual excede en mucho de tal magnitud, la inseguridad de la lectura de mira común impide la aplicación de los métodos de nivelación de precisión que acabamos de explicar. En tales casos se recurre a otro procedimiento.

Se supone que se ha llevado por medio de la nivelación de precisión común el horizonte hipsométrico (pág. 83) a ambos lados del río a atravesar hasta la proximidad de la orilla del agua y que se han colocado sobre cada orilla un sólido punto fijo de mampostería (ver N° 7 y fig. 6, pág. 92). Trátase entonces de determinar el desnivel Δh entre ambos puntos fijos opuestos.

2805

Desde: P.F. nodal 51. Paraná... Hasta: P.F. 1.....

Nivelador Apuntador:

Nivel: Zeiss III. 3611... Miras: 136/37... Fecha: 23. IX. 21 Hora: 15.05

Dif. const. = 592.50 $\frac{1}{2}$ cm, C = 0.20 m, k = 100., Tiempo: nublado.....

N° Estación	Punto Espalda Mira	Largo visual, v	Hilos estadimétricos		Espalda		Frente		Comprobación		Desniveles parciales					
			Espalda	Frente	Mira	Tamb.	Mira	Tamb.	espalda		frente					
									$\frac{1}{2}$ mm	$\frac{1}{2}$ mm	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{dmm}{2}$	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{dmm}{2}$	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{dmm}{2}$
Chapa 551	1	25	3051	2724	28045		24741		59254		3304					
			2559	2226												
			5610	4950	87299		83993		59252		3306					
136			0492	0498												
2	25	24	3353	2798	31028		25542		59248		5486					
			2857	2312												
			6210	5110	90276		84795		59253		5481					
			0496	0486												
3	25	25	3962	2241	37163		19992		59253		17171					
			3468	1749												
			7430	3990	96416		79242		59250		17174					
			0494	0492												
4	50	49	5674	3428	51773		09323		59258		42450					
			4676	0442												
			10350	1870	111031		68571		59248		42460					
			0998	0986												
5	50	49	5610	2548	51114		20537		59246		30577					
			4620	1562												
			10230	4110	110360		79780		59243		30580					
			0990	0986												
6	49	50	2656	5683	21617		51866		59254	x69751						
			1673	4687												
			4329	10370	80871		111119		59253	x69752						
			0983	0996												
Sumas	446	4453	4444	79699	3659501					337492						
		8897		$\Delta h = +$	137492					-	2000					
		4448 m								$\Delta h = +$	137492					
12c =		24 "														
d =		4472 m														

P° atr. N° Est. Mira	LARGO VISUAL Esp. Fr. pasos	Hilos estadimétricos		Hilo medio Lectura 1 sin correg.		Lectura burbuja y desviación Δn .					
		Espalda d_e $\frac{1}{2} m$	Frente d_f $\frac{1}{2} m$	Espalda $\frac{1}{2} cm$	Prente $\frac{1}{2} cm$	Espalda			Frente		
						izq. n_i	der. n_d	desv. $\pm \Delta n$	izq. n_i	der. n_d	desv. $\pm \Delta n$
		(1)	(2)	(3)		(4)		$n_d - n_i = \Delta n$ (5)			$n_d - n_i = \Delta n$
Chapa 30 1 238	65	3,240	3,222	258,93	257,34	13,1	10,9	-2,2	13,4	10,6	-2,8
		1,940	1,923								
	65	5,180	5,145	851,07	849,27	11,5	12,4	+0,9	11,1	12,9	+1,8
2	65	3,037	3,577	238,84	292,63	11,8	12,4	+0,6	12,3	11,9	-0,4
		1,739	2,275								
	65	4,776	5,852	831,71	885,26	13,2	10,9	-2,3	12,9	11,4	-1,5
		129,8	130,2								
		259,8	260,1	2180,55	2284,50						
		260,4		Δh sin corr. = - 103,95							
		520,2	$\frac{1}{2} m$	Corrección - 2							
		$\Sigma d = 260,1 m$		Δh corr. - 103,97							

Nota explicativa: Cálculo de la corrección Δh . Según vimos en pág. 123, en el nivel **Zeiss A** la división del nivel tubular está dispuesta de tal modo que la diferencia de las lecturas correspondientes a los dos extremos de la burbuja nos da, en divisiones del nivel, la magnitud del descentrado de la burbuja: Si la lectura del extremo izquierdo n_i es mayor que la del extremo derecho n_d , la visual está inclinada hacia arriba (siendo entonces la corrección Δl de la lectura de mira 1 de signo negativo). Para una visual inclinada hacia abajo n_i es menor que n_d (siendo entonces la corrección Δl de signo positivo). Es decir: la corrección Δl a aplicar a la lectura 1 tiene siempre el signo de la diferencia:

$$(34) \quad \Delta n = n_d - n_i$$

Siendo d [ver columna (3) del registro de págs. 170 y 171] la distancia

Empléase para ello un procedimiento llamado **nivelación recíproca y simultánea**, en la forma que pasamos a explicar.

Los mencionados puntos fijos de la nivelación de precisión, constituyen los puntos de apoyo de mira en dicha nivelación recíproca y simultánea. Para que tales miras puedan ser bisectadas exactamente por encima de un

Corrección Δl		Lectura I corregida		Control	Desniveles	Observaciones
Esp.	Fr.	Espalda a	Frente b	Espalda Frente	$\Delta h = a - b$	
$\frac{1}{2}$ dmm	$\frac{1}{2}$ dmm	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{1}{2}$ cm	
(6)		(7) = (4) + (6)		(8)	(9)	(10)
-28	-35	258,65	256,99	592,53	1,66	$\Delta l = \Delta n \frac{2''}{20,6265''} d$ $= \Delta n \cdot d \cdot 0,097 (\frac{1}{2} \text{ dmm})$
+11	+23	851,18	849,50	592,51	1,68	
+8	-5	238,92	292,58	592,50	*46,34	
-29	-19	831,42	885,07	592,49	*46,35	
-38	-36	2180,17	2284,14		96,03	
Corr. tot. -2		$\Delta h = -103,97$			$\frac{-200,00}{-103,97}$	

Form. riv. 6

entre el instrumento y la mira (d_e la que corresponde al golpe atrás y d_f la del golpe adelante) expresada en medios metros, y $2''$ el valor angular de una división del nivel tubular (de 0,4 mm), tendremos para la corrección Δl en medios decimímetros ($\frac{1}{2}$ dmm):

$$(35) \quad \Delta l = \Delta n \cdot \frac{2}{20,6265} \cdot d = \Delta n \cdot 0,097 \cdot d$$

Ejemplo numérico: Para $d_e = 130 \frac{1}{2} \text{ m}$ y $\Delta n = -2,2$, resulta: $\Delta l = -28 \frac{1}{2} \text{ dmm}$ [ver columnas (5) y (6) del mencionado registro de campo].

Efectúanse estos sencillos cálculos con ayuda de la **regla de cálculo**.

gran río de un ancho de 750 metros, como en nuestro ejemplo, es necesario que se disponga, aparte de la división normal de $\frac{1}{2}$ cm de otra división de mira visible a gran distancia. A este objeto se le aplica a la mira un dispositivo a corredera, con tablilla o mejor con una **placa de vidrio esmerilado** (de 4 mm de espesor); sobre la cual puede dibujarse o fijarse en su cara

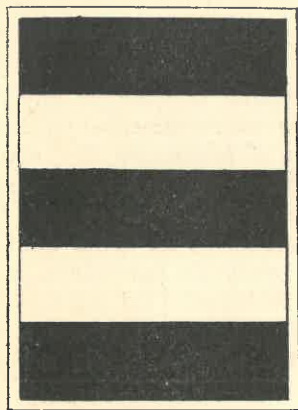


Fig. 3.— Tablilla señal.

delantera una faja horizontal negra sobre fondo blanco (ver fig. 3), o blanca sobre fondo negro, en forma tal que resulte ser horizontal cuando la mira es vertical.

Para que una faja negra pueda bisectarse fácil y nítidamente, se elige para ella una medida tal que a cada centenar de metros de la longitud de la visual a través del río, corresponda un centímetro (a una visual de 750 metros, como la de nuestro ejemplo práctico, corresponde entonces una altura de la faja de $7\frac{1}{2}$ cm ó 15 medios centímetros), apareciendo entonces, en el campo del anteojo de aumento A , dicha faja bajo el mismo ángulo visual $\alpha = \frac{1}{10\,000} \cdot A$ (radianes) que

el campo de un centímetro a la distancia de 100 metros.

La tablilla porta-faja puede ser desplazada a fricción sobre el cuerpo de la mira dentro de una guía constituida por dos listones, llevando arriba y abajo un índice de latón que permite colocar dicha tablilla en una determinada división de la mira.

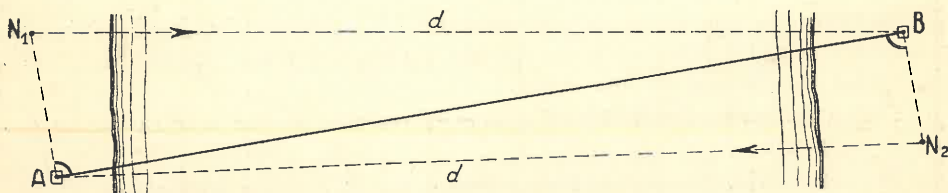


Fig. 4.— Se ilustra la situación relativa de los puntos fijos A y B y de los puntos de estación de nivel N_1 y N_2 . $N_1B = d$, visual larga directa; $N_2A = d$, visual simultánea y recíproca.

En la proximidad de los puntos fijos A y B (ver fig. 4), se eligen los puntos de estación de nivel N_1 y N_2 de tal modo que desde cada uno de ellos sea visible la mira lejana sobre la otra orilla opuesta y la mira cercana de la misma orilla que el punto de estación. En la mejor forma tales puntos de estación constituyen pilares de mampostería contruídos a propósito.

La práctica ha aconsejado la conveniencia de construir en los puntos A y B ángulos de 90° , aproximadamente, y de hacer $AN_1 = BN_2$.

Con ayuda de un pequeño teodolito universal de 9 cm y una base de 50 ó 100 metros (según la longitud del cruce) se determina previamente la distancia AB con una precisión de 2 ó 3 dm, así como la magnitud aproximada del desnivel entre A y B. Tal desnivel, entre la horizontal del instrumento en punto N_1 y el apoyo de la mira en B no puede exceder de la longitud de la mira de tres metros.

Cooperan en esta medición recíproca y simultánea por lo menos dos niveladores y dos ayudantes, observando primero el nivelador I en el punto N_1

(ver fig. 4), operando al mismo tiempo el nivelador II en el punto N_2 sobre la otra orilla. Dos ayudantes se encargan de colocar la tablilla de la mira, en **A** y **B**, y de anotar la altura correspondiente en el registro de campo (ver planillas de págs. 176 y 177).

Modo de operar. En cada una de las 4 series que suponemos que se efectúen en nuestro ejemplo, se colocará la tablilla sucesivamente en tres distintas posiciones de la mira, correspondientes a 3 posiciones del nivel tubular del instrumento de la orilla opuesta, de cuyas posiciones la primera debe corresponder a la de burbuja aproximadamente centrada (o eje de colimación aproximadamente horizontal del instrumento de la orilla opuesta). Dicha posición de la tablilla se determina con ayuda de las señales con banderas que el ayudante de la opuesta orilla va recibiendo del nivelador. La segunda y tercera posición de la tablilla se obtienen de acuerdo a la siguiente **regla práctica**: Se desplazará en uno u otro sentido (hacia arriba o hacia abajo) en tantos centímetros (o dobles medios centímetros para el caso considerado en nuestro ejemplo) cuantos centenares de metros tenga la longitud de la visual a través del río (o sea 15 medios centímetros en nuestro ejemplo).

Bisección de la mira próxima (a 12,6 metros de distancia en nuestro ejemplo). La bisección de la mira próxima se efectúa dos veces a diferentes alturas en cada serie de observaciones, en la primera (ver pag. 176) y tercera serie al principio y en la segunda (ver pág. 177) y cuarta al final de las mismas.

Cambios de operadores e instrumentos. Una vez terminadas la primera y segunda serie, se efectuará un cambio de operadores e instrumentos, pero sin variar la posición de las miras.

Orden de las mediciones. El orden de las mediciones resulta ser entonces el siguiente:

Primera serie. Nivelador **I** estacionado en N_1 (orilla izquierda), el que bisectará:

Mira **A** (cercana, sobre la misma orilla) dos veces; luego:

Mira **B** (lejana, sobre la otra orilla) 6 veces, en las posiciones de la tablilla 1, 2, 3, 3, 2, 1.

Segunda serie. Nivelador **II** estacionado en N_2 (orilla derecha), el que bisectará:

Mira **A** (lejana, sobre la orilla izquierda) 6 veces en las posiciones 1, 2, 3, 3, 2, 1, debiendo estas bisecciones efectuarse **simultáneamente** con las correspondientes efectuadas sobre la mira **B** desde la orilla izquierda (ver planilla de pág. 177); luego:

Mira **B** (cercana, sobre la misma orilla), dos veces.

Después de esta **primera nivelación recíproca y simultánea** se efectúa un cambio de operadores y niveles, trasladándose el nivelador **I** a la orilla derecha y el nivelador **II** a la orilla izquierda, llevando cada uno consigo su instrumento con el objeto de ejecutar una segunda nivelación recíproca y simultánea en la misma forma, a saber:

Tercera serie. Nivelador **I** en N_2 (orilla derecha); el que bisectará:

Mira **B** (cercana) 2 veces,

Mira **A** (lejana) 6 veces en las posiciones 1, 2, 3, 3, 2, 1.

Cuarta serie. Nivelador **II** en **N₁** (orilla izquierda), el que bisectará:

Mira **B** (lejana) 6 veces en las posiciones 1, 2, 3, 3, 2, 1, debiendo ser estas bisecciones simultáneas con las correspondientes efectuadas sobre la mira **A** de la tercera serie:

Mira **A** (cercana) 2 veces.

Por ser recíprocos y simultáneos los dos golpes de nivel a través del río e iguales las correspondientes longitudes **d** (ver fig. 4), serán iguales los errores de curvatura y refracción terrestre pero de signo contrario, eliminándose por tanto en la semisuma de los desniveles. En efecto:

Designando por **a** y **b** (fig. 5) los promedios de las lecturas hechas desde **N₁** sobre las miras **A** y **B**, respectivamente, y por **a'** y **b'** las correspondientes lecturas hechas desde **N₂**, por Δh_1 el desnivel de **A** y **B** resultante de la primera serie, por $\Delta h'_1$ el que resulta de la segunda con la visual larga simultánea y recíproca, y por Δh_1 el promedio de ambos o sea el resultado de la 1ª nivelación simultánea y recíproca; y por ser, además, despreciable la influencia de la curvatura y refracción terrestre en la visual a la mira próxima (ver planillas de cálculo **I** y **I^a**), obtenemos:

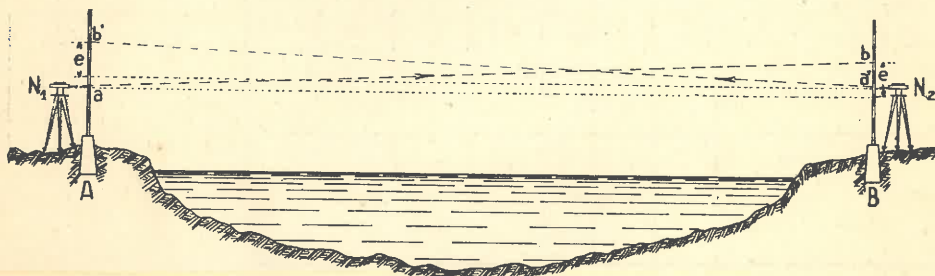


Fig. 5.—Croquis esquemático ilustrando la compensación del error *e* por curvatura y refracción terrestre correspondiente a las visuales simultánea y recíproca (**N₁B** y **N₂A**).

Δh_1 = lectura atrás **a** sobre **A** menos [lectura adelante **b** sobre **B** — curvatura y refracción];

$\Delta h'_1$ = [lectura atrás **a'** sobre **A** — curvatura y refracción] menos lectura adelante **b'** sobre mira **B**.

e sea, designando por *e* la corrección por curvatura y refracción (ver fig. 5):

$$(36) \quad \Delta h_1 = a - \left[b - \frac{d^2}{2R} (1 - k) \right] = a - (b - e)$$

$$(37) \quad \Delta h'_1 = \left[a' - \frac{d^2}{2R} (1 - k) \right] - b' = (a' - e) - b'$$

Sumando y dividiendo por 2, obtendremos:

$$(38) \quad \Delta h_I = \frac{\Delta h_1 + \Delta h'_1}{2} = \frac{a - b + a' - b'}{2}$$

y análogamente, para el resultado $\Delta h_{II} = \frac{\Delta h_2 + \Delta h'_2}{2}$ correspondiente a una

NIVELADOR II (orilla derecha)

Desde: A (a 750 m; golpe atrás)

Fecha: 22 VII 31

Hasta: B

Hora: 5^h a - 5^h30

Planilla de cálculo I^a

Est. de nivel	Longitud visual m	Direcc. visual	Hacia mira	Pos. tabl. señal	Nivelación 1 ^a de A a B					Desviación ±Δn	Promedios a' y b' Fórmulas para el cálculo de la corrección Δl
					Lect. I	Lectura de nivel			±Δl		
					± Δl ½ m	Obj.	Oc.	Obj. +Oc.			
N ₂	750	at.	A	1	3,1500 - 149 3,1351	135	357	492	- 8	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Corrección Δl = Δn $\frac{750.5,137}{206,265}$ = Δn . 18,68 </div> <p style="text-align: center;">Prom.: 3,1357 ½ m</p>	
		at.		2	3,0000 + 1345 3,1345	175	397	572	+ 72		
		at.		3	3,3000 - 1644 3,1356	94	318	412	- 88		
		at.		3	3,3000 - 1625 3,1375	95	318	413	- 87		
		at.		2	3,0000 + 1345 3,1345	175	397	572	+ 72		
		at.		1	3,1500 - 131 3,1369	135	358	493	- 7		
En la mira A el punto bisectado se halla arriba del índice en: 0,2090 ½ »											
	12,6	ad.	B		4,5800 - 30 4,5770	92	314	406	- 94		a' = 3,3447 ½ m
		ad.			4,5750 + 20 4,5770	171	393	564	+ 64		b' = 4,5770 ½ m
											<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> Δl = Δn $\frac{12,6.5,137}{206,265}$ = Δn . 0,316 </div>

Mira A: Punto bisectado, borde inf.: 0,0742 m Δh'₁ = a' - b' = -1,2323 ½ m
 " sup.: 0,1348 " Δh₁ = a - b = -1,2224 "

Arriba índice, promedio: 0,2090 ½ m Prom. Δh₁ = -1,2274 ½ m
 Dif. de nivel entre orilla izquierda A y derecha B: Δh₁ = -0,6137 m

2ª nivelación simultánea y recíproca, series 3 y 4, con cambio de operadores (nivelador I en N_2 y nivelador II en N_1).

Cálculo de la corrección Δl de una lectura de mira l por inclinación. Cada lectura l debe ser corregida por descentración de la burbuja del nivel o inclinación de la visual. A este fin conviene calcular una tablilla para la visual larga (750 metros en nuestro ejemplo) y otra para la visual corta (12,6 metros). Siendo en nuestro caso el valor de una división del nivel igual a $5,137''$, tendremos para una división del nivel como efecto lineal Δl en la lectura de mira l:

$$(39) \quad \Delta l = \frac{750,5,137}{206,265} \quad (\text{en milímetros})$$

y para una descentración de Δn divisiones del nivel según (12):

$$(40) \quad \Delta l = \Delta n \frac{750,5,137}{206,265} = \Delta n,18,68 \quad (\text{medios milímetros})$$

Con el objeto de evitar la coma decimal y facilitar el cálculo se dan en nuestro formulario de nivelación N° 7 (planillas de cálculo I y I^a, págs. 176 y 177) los valores Δn , los que, de acuerdo a la (7), expresan la doble inclinación, en décimos de la división, resultando así la corrección Δl a aplicar expresada en unidades de la cuarta decimal, o sea en $\frac{1}{2}$ dmm, como lo muestra el siguiente ejemplo numérico:

Ejemplo numérico: $\Delta n = +10$, luego: $\Delta l = +187 \frac{1}{2}$ dmm (ver planilla de cálculo I).

Análogamente para la distancia corta de 12,6 m:

$$\Delta l = \Delta n \frac{12,6,5,137}{206,265} = \Delta n,0,316 \quad (\text{medios milímetros})$$

Ejemplo numérico: $\Delta n = -105$, luego: $\Delta l = -33 \frac{1}{2}$ dmm (ver planilla de cálculo I).

He aquí los resultados Δh_I y Δh_{II} de las dos nivelaciones simultáneas y recíprocas:

$$\Delta h_I (A-B) = -0,6137 \text{ m} \quad (\text{día 22 VII, 31, } 5^h - 5^h 30, \text{ prom. de 2 idas})$$

$$\Delta h_{II} (B-A) = +0,6186 \text{ »} \quad (\text{mismo día, } 6^h 10 - 6^h 35, \text{ » 2 vueltas})$$

$$\text{Error de cierre} = +4,9 \text{ mm}$$

$$\text{Promedio} = -0,61615 \text{ m compensado (con el signo de las idas)}$$

Los resultados que se obtienen en otras horas del día, en otros días y otras circunstancias atmosféricas suelen diferir sensiblemente entre sí.

Tolerancias. Los numerosos cruces de ríos efectuados en nuestro país y otros extranjeros permiten fijar como **tolerancia 1 cm** por 1000 metros de longitud de la línea, es decir, se exige que el promedio o resultado definitivo de las operaciones del cruce de río no tenga un error medio mayor que 1 cm por 1000 metros. Tal tolerancia queda generalmente satisfecha cuando los pares de valores Δh_I y Δh_{II} determinados sucesivamente en un mismo día no difieran entre sí en más de 1 mm por cada 100 metros de la línea de cruce (lo que hace 7,5 mm en nuestro ejemplo).

Resultados (errores medios) de cruces de ríos argentinos.

En los croquis de figs. 6 y 7 (págs. 179 y 180) se ilustra la planimetría

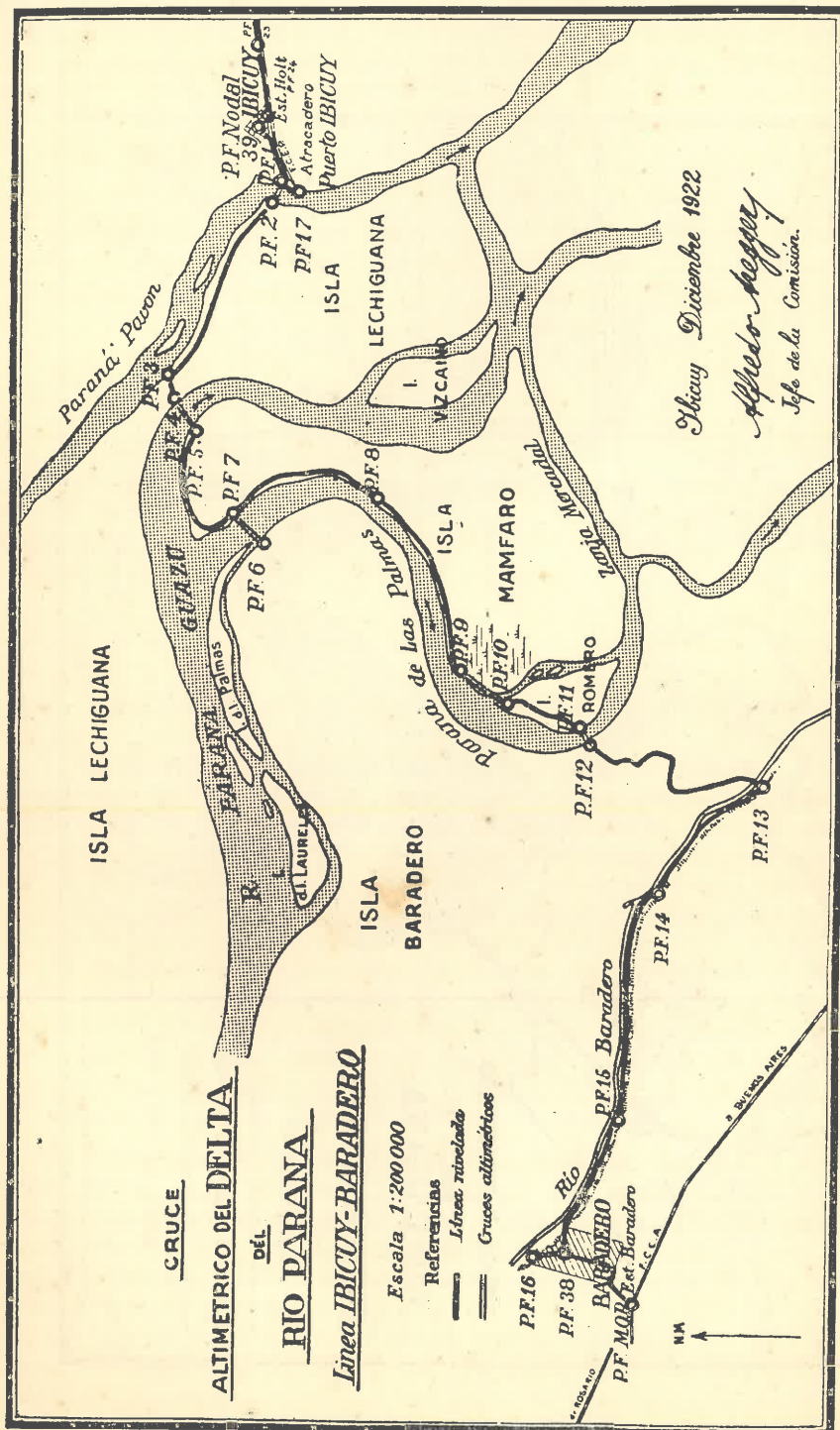


Fig. 6.

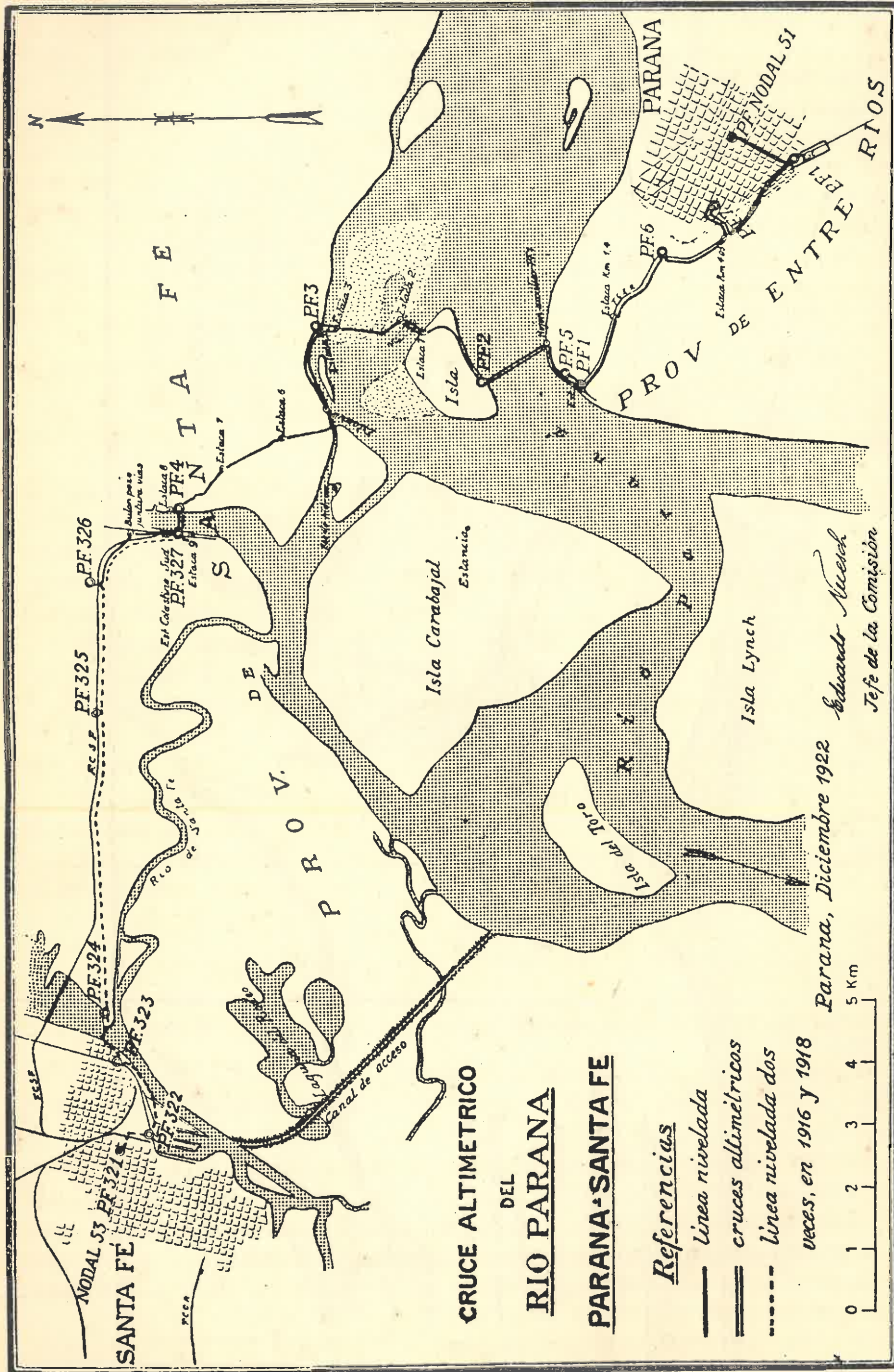


Fig. 7.

de importantes cruces de ríos argentinos ejecutados en los años 1922 y 1910 por el Instituto Geográfico Militar (I. G. M.) y el Ministerio de Obras Públicas de la Nación (M. O. P.) respectivamente. En la siguiente planilla se dan los errores medios correspondientes a los resultados finales de dichos cruces.

Cruce		Longitud	Error medio de la diferencia de nivel Δh	Observaciones
Línea	entre ps. fijos			
Baradero - Ibicuy	12 y 11	313,5 m	0,66 mm	I.G.M.
» »	10 y 9	1345,1 »	3,18 »	»
» »	5 y 4	814,2 »	1,56 »	»
» »	2 y 1	514,4 »	0,60 »	»
Paraná - Santa Fe	1 y 2	1163,5 »	2,50 »	»
» »	10 y 11	1592,8 »	3,00 »	M.O.P.

§ 16

LEVANTAMIENTO Y TRAZADO DE PERFILES

1. IMPORTANCIA PRACTICA DE LAS TRES CLASES DE NIVELACIONES: NIVELACIONES DE PUNTOS, NIVELACIONES DE LINEAS (PERFILES) Y NIVELACIONES DE SUPERFICIES. Las múltiples tareas de la técnica hacen imprescindiblemente necesarias, en los distintos casos, una de las tres clases de nivelaciones: El contralor de la estabilidad de los grandes edificios y construcciones de puentes, reclama cuidadosas nivelaciones de precisión; el trazado de líneas de ferrocarriles y caminos (redacción de los proyectos, ubicación de tierras, etc.) requieren nivelación de perfiles; los trabajos de urbanización, canalización, desagüe y riego se fundamentan en nivelaciones de grandes superficies; no pudiendo, por fin, racionalmente ejecutarse estudios de regímenes de aguas, perfiles de ríos y otros análogos de índole hidráulico e hidrométrico, sino en base a prolijas nivelaciones de puntos fijos altimétricos de precisión.

2. DEFINICION GEOMETRICA DEL PERFIL. TRAZA O EJE LONGITUDINAL. HORIZONTAL PRINCIPAL DE COTA CERO. HORIZONTAL AUXILIAR SOBREALZADA DE COTA ARBITRARIA. Con el objeto de obtener una definición geométrica del perfil, imagínese trazados planos verticales por los puntos extremos de los distintos trozos en que se supone dividida la línea a levantar.

Las intersecciones de estos planos con la superficie terrestre nos suministran, en la proyección horizontal, una línea quebrada, una poligonal lla-

mada traza o eje longitudinal del perfil (fig. 1).

Girando ahora el plano vertical P_1 , correspondiente al primer trozo, alrededor de la línea de intersección con el segundo, P_2 , hasta coincidir con éste, y éste, conjuntamente con el primero, hasta la coincidencia con el tercero P_3 , y así sucesivamente, quedará la línea quebrada transformada en recta. A esta recta se le supone situada en el horizonte, de cota cero, atribuyéndosele, en otros casos, una cota redonda, arbitraria, conveniente

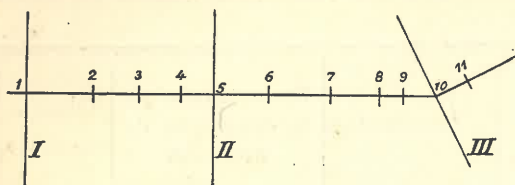


Fig. 1.—Traza de un perfil longitudinal.

para el ejemplo práctico (47,00 metros, como en figura 2), llamándosela **horizontal principal** en el primer caso y **horizontal auxiliar** en el segundo.

Las intersecciones de estos planos con el terreno natural forman en su sucesiva unión el **perfil natural**, cuya representación gráfica, a escala reducida, se denomina **perfil de nivelación**.

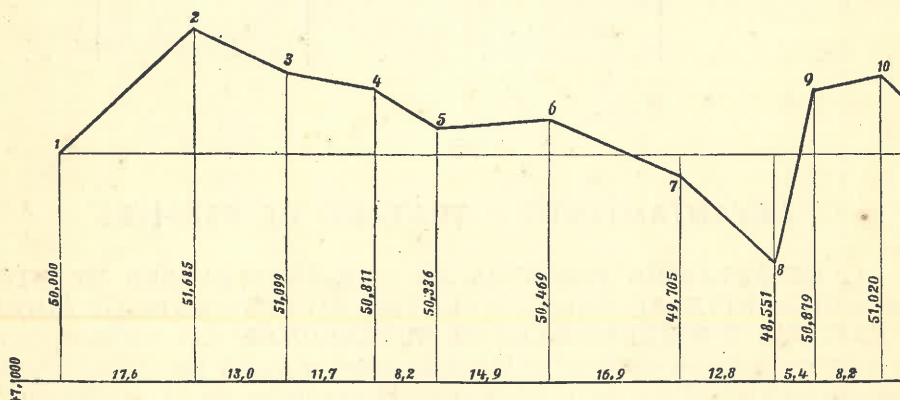


Fig. 2.—Perfil longitudinal con horizontal sobrealzada.

Escalas para $\left\{ \begin{array}{l} \text{Alturas} \quad 1 : 100. \\ \text{Distancias} \quad 1 : 1000. \end{array} \right.$

Es fácil de comprender que estos perfiles no pueden representar nunca cortes fieles de terreno natural, por no ser posible considerar los múltiples pequeños movimientos del mismo, siendo su valor técnico tanto mayor cuanto mayor haya sido el número de los diversos característicos **puntos de cambio** de pendiente considerados.

Distínguense **perfiles longitudinales** y **perfiles transversales**.

3. SUBDIVISION DE LA TRAZA DE LOS PERFILES LONGITUDINALES EN TROZOS UNIFORMES; MARCACION Y NUMERACION DE LOS PUNTOS DE ESTACION. PUNTOS INTERMEDIOS Y PUNTOS DE ARRANQUE DE PERFILES TRANSVERSALES. Jalonada la traza poligonal de una línea a levantar, se la medirá con cinta de acero, elevando al mismo tiempo las estacas intermedias necesarias. Mídense los ángulos poligonales con teodolito, empleando en ello los procedimientos operatorios de-

talladamente explicados en tomo II.

Subdivídense generalmente las líneas en trozos de 100 metros, llamados **hectómetros**, a veces marcados por **estacas** clavadas hasta la cabeza, acompañando cada una de una fuerte **estaca auxiliar** colocada próxima a aquélla, en un sitio más protegido, con el objeto de facilitar la búsqueda de la estaca principal, la que lleva la numeración o distancia correspondiente a la misma.

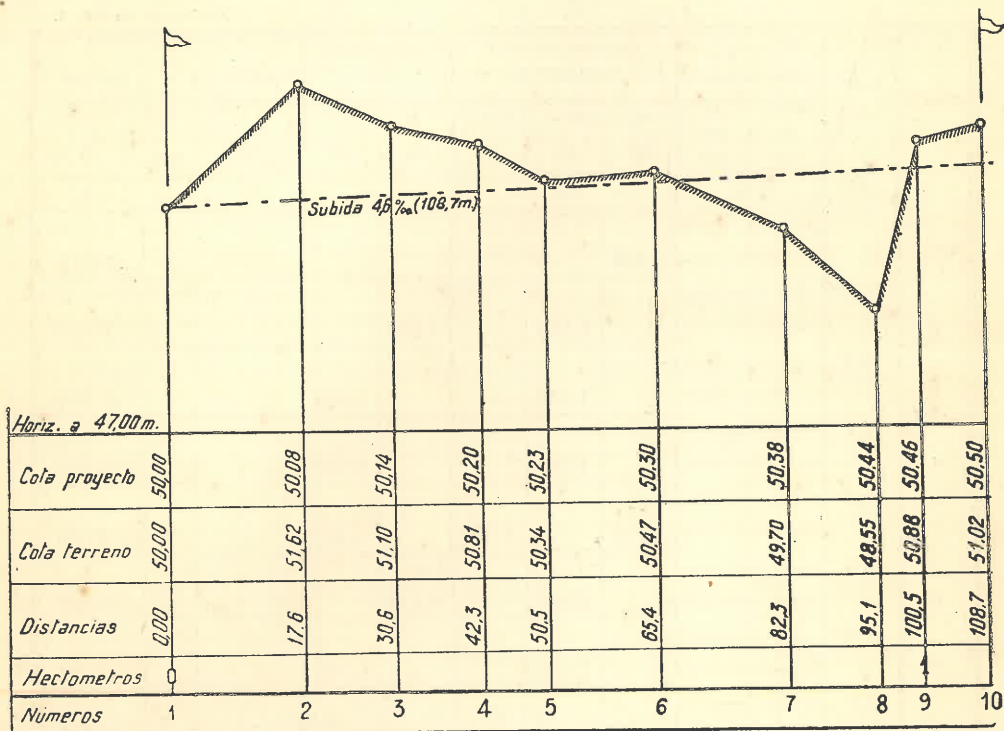


Fig. 3.— Se ilustra un trazado de perfil longitudinal con todos los datos diversos que en el mismo interesan.

Se elegirán, además, los puntos intermedios en que han de arrancar perfiles transversales con marcados cambios de pendiente.

Las marcaciones de los puntos intermedios son análogas a las de los puntos hectométricos, con la diferencia de que las estacas acompañantes llevan el número del punto hectométrico inmediatamente anterior más la distancia que lo separa de éste, por ejemplo, para un punto que dista 570,2 m del origen: 5 + 70,2.

Los puntos del perfil longitudinal son, como dijimos, numerados sucesivamente o se les designa por sus distancias al origen. En terreno accidentado han de medirse perfiles transversales en la mayor parte de los puntos del perfil longitudinal, siendo, en cambio, aquéllos muy escasos en regiones llanas.

4. NIVELACION DEL EJE LONGITUDINAL. PUNTOS DE CAMBIO. CALCULO PARTICULAR DE LOS PUNTOS INTERMEDIOS. La

nivelación del eje longitudinal se ejecuta en la forma conocida, leyendo a veces hasta los milímetros. Siempre que sea posible, refiérese la altimetría del perfil al horizonte hipsométrico general del país, ejecutando una nivelación de arranque desde un punto fijo de cota conocida. Pudiendo establecer un cierre, en una marca de esta categoría, bastará una nivelación

Planilla de cálculo o I.

PUNTO	DIST. PASOS	HILOS DISTANCIOM.		LECTURA DE MIRA HILO MEDIO			DESNIVELES Δh		COTAS PROVISION. m	CORRECCION mm	COTAS CORREGIDAS m
		ATRAS INF. SUR.	ADEL. INF. SUP.	ATRAS m	INTERM. m	ADEL. m	+	-			
(1)	(2)	(3)		(4)			(5)		(6)	(7)	(8)
I I				2,345							50,000
2	17,6				0,660		1,685				51,685
3	13,0				1,246			0,586			51,099
4	11,7				1,534			0,288			50,811
5 II	8,2			0,795		2,009		0,475			50,336
6	14,9				0,662		0,133				50,469
7	16,9				1,426			0,764			47,705
8	12,8				2,580			1,154			48,551
9	5,4				0,252		2,328				50,879
10 III	8,7			1,216		0,111	0,141				51,020
11	9,0				2,082			0,866			50,154
12	15,1				0,632		1,450				51,604

Form. niv. N° 1

de ida. Cuando no se puede obtener el contralor que proporciona el cierre altimétrico, será imprescindible efectuar también una nivelación de vuelta, para dicho contralor.

Mientras que los puntos hectométricos pueden servir, en terreno llano, para puntos de cambio, nivelando desde el medio, los puntos intermedios

serán relacionados siempre como “golpes intermedios”; y como al proceder así resultarán siempre fuertes las desequidistancias, será conveniente procurar que se mantenga el nivel corregido.

Cálculo particular de los puntos intermedios. Con el objeto de poder calcular los desniveles de los puntos intermedios en la misma forma empleada para los puntos de cambio, considéranse las lecturas intermedias efectivamente tomadas sobre aquéllos, también como lecturas atrás fingidas (ver ejemplo práctico calculado en Form. niv. 1). Las dobles lecturas de mira, adelante y atrás, en los puntos marcados con cuadraditos, sirven para vincular las distintas estaciones de instrumento de un perfil longitudinal.

En el Form. niv. 4 (planilla de cálculo 2), especial para perfiles, utilízase el concepto “altura de la visual” para el cálculo de las cotas, resul-

Planilla de cálculo 2.

PUNTO	DIS- TANCIA PASOS	HILOS DISTANCIOMETRICOS		LECTURA DE MIRA			ALTURA DE LA VISUAL m	COTAS m	Observaciones
		ATRÁS	ADELAN.	HILO MEDIO					
		INF. SUP.	INF. SUP.	ATRÁS m	INTERM. m	ADE- LANTE m			
(1)	(2)	(3)			(4)		(5)	(6)	(7)
1	17,6			2,345			52,345	50,000	
2	13,0				0,660			51,685	
3	11,7				1,246			51,099	
4	8,2				1,534			50,811	
5	14,9			0,795		2,009	51,131	50,336	
6	16,9				0,662			50,469	
7	12,8				1,426			49,705	
8					2,580			48,551	

Form. niv. N° 4.

tando así el cálculo quizás más práctico aún que el de Form. niv. 1 (planilla de cálculo 1).

5. PERFILES TRANSVERSALES; SU DIRECCION Y EXTENSION. MEDICION CON NIVEL DE ANTEOJO Y POR “RESALTOS HORIZONTALES”. El perfil transversal consiste generalmente en un solo plano vertical que se extiende a ambos lados del perfil longitudinal, hasta una distancia de 10 a 50 metros, según la finalidad del trabajo y la naturaleza del terreno.

La **dirección** en que se toman los perfiles es perpendicular a la del eje, y^e de dirección radial en las curvas.

Los puntos de cambio de pendiente no se marcan en los perfiles transversales.

La nivelación de los perfiles transversales se hace generalmente separada de la del eje longitudinal. Efectúanse para cada perfil una o dos estaciones de nivel, colocando la mira directamente en el suelo, en los puntos de cambio de pendiente del perfil, bastando en ello lecturas de mira al centímetro. Las distancias referidas al eje del perfil longitudinal, se miden simultáneamente con cinta de tela.

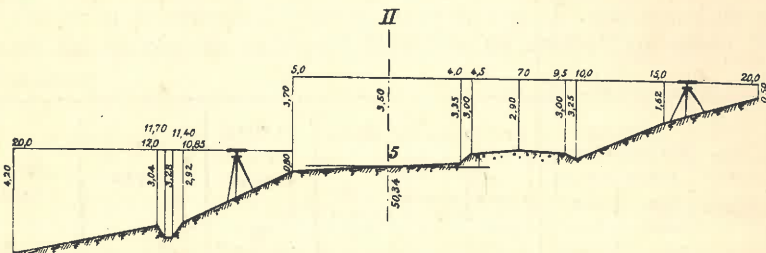


Fig. 4. — Se ilustra el levantamiento de un perfil transversal con ayuda de un nivel de anteojo.

Levantamiento de un perfil transversal por el método de “resaltos horizontales”. El equipo más práctico para levantar rápidamente perfiles transversales lo constituye una mira horizontal de 4 metros provista de nivel tubular encastrado (o nivel de albañil), para medir las distancias horizontales y un jalón, pintado en zonas alternativamente blancas y coloradas de 10 cm (usándolo con punta hacia arriba) para los desniveles. Se leerán en dicha mira los decímetros y sobre el jalón los centímetros. Con este sencillo procedimiento llamado “**por resaltos horizontales**” (ver fig. 9, pág. 31, tomo I), pueden levantarse fácilmente 20 perfiles de 24 m por hora, lo que no es posible realizar con nivel de anteojo y procedimiento ilustrado en fig. 4.

Utilízase generalmente un **croquis**, para dejar constancia de las observaciones tomadas, el que representará siempre el aspecto del terreno en el supuesto de contemplarlo en la dirección de la traza, detalle de relativa importancia para la fijación inequívoca de “izquierda” y “derecha” en los perfiles transversales.

6. DIBUJO DE LOS PERFILES. En las figuras 2 y 3 se representa un perfil longitudinal (escalas 1:100 para las alturas y 1:1000 para las longitudes), en base a los valores consignados en el ejemplo práctico calculado en nuestros formularios de nivelación Nos. 1 y 4.

Con el objeto de hacer resaltar las diferencias de nivel empleáanse diversas escalas para las alturas y las longitudes, por ejemplo: 1:50; 1:100; 1:200; para las alturas y 1:500; 1:1000; 1:5000; para las longitudes.

El perfil longitudinal nos da por eso una imagen desfigurada, lo que, sin embargo, no ofrece serios inconvenientes, por ser el objetivo principal de este perfil poder sacar del mismo con toda precisión requerida las alturas, lo que sólo es posible valiéndose de dos escalas distintas.

Empleóse en las citadas figuras 2 y 3 una horizontal sobrealzada de

cota 47,00 metros, a la cual van referidas (en el dibujo) todas las cotas del perfil, por no ser prácticamente posible referirlas al plano principal de cota cero en la escala elegida para las alturas. Las grandes dimensiones del dibujo para ello necesarias no ofrecerían ninguna ventaja práctica.

Debido a la reducida longitud (15 a 50 m) que suelen tener los perfiles transversales y la conveniencia práctica de su representación gráfica con cierta amplitud, acostúmbrase emplear en el dibujo de los perfiles transversales la misma escala de reducción para las distancias y las alturas, siendo para ello conveniente utilizar la escala de alturas del perfil longitudinal.

7. DISTINTAS FORMAS DE INDICAR PENDIENTES. Suelen indicarse las **pendientes** de los distintos trozos del trazado de un perfil longitudinal por medio de la tangente del ángulo de inclinación con respecto al horizonte, es decir, por un quebrado cuyo numerador es el desnivel, siendo el denominador igual a la distancia, quebrado que se acostumbra también transformar en otro con numerador igual a 1 o en **porcentaje** o el **tanto por mil**.

Para el trecho 1-10 (fig. 3), por ejemplo, con un desnivel de 0,5 m, tendremos:

$$\frac{0,5}{108,7} = \frac{1}{217,4} = 0,0046 = 0,46\% = 4,6\text{‰}$$

§ 17

NIVELACION TRIGONOMETRICA

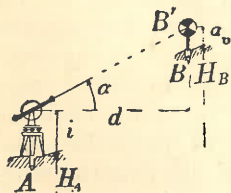
1. PRINCIPIO DE LA NIVELACION TRIGONOMETRICA. DEFINICIONES: ANGULO DE ALTURA Y DISTANCIA CENTAL. FORMULAS FUNDAMENTALES.

Mientras que en la **nivelación geométrica** se determinan los **desniveles** por medio de **visuales horizontales** (exceptuando el caso en que se los obtiene mediante pequeñas inclinaciones medidas con fino nivel de burbuja), en la **nivelación trigonométrica** se los determina por medio de **ángulos verticales** y las correspondientes **distancias horizontales**.

Definiciones: Los dos lados de un ángulo vertical deben estar situados siempre en un plano vertical, llamándose a dicho ángulo **ángulo de altura** α , o **distancia cenital** z , según que el lado fijo sea horizontal o vertical. El ángulo de altura α y la distancia cenital z , referidos a un mismo punto, son **complementarios** ($z = 90^\circ - \alpha$).

Sean **A** y **B** (fig. 1) dos puntos en el terreno, cuya diferencia de nivel Δh se trata de determinar. Siendo i la altura del instrumentó en estación **A**, a_v la del objeto apuntado **B'** sobre la vertical de **B**, el ángulo de elevación y d la distancia horizontal entre los dos puntos **A** y **B** considerados, H_A y H_B sus altitudes, tendremos las siguientes **fórmulas fundamentales** válidas para pequeñas distancias d :

Fig. 1. — Principio de la nivelación trigonométrica.



$$\begin{aligned} \Delta h &= i + d \cdot \text{tg } \alpha - a_v \\ &= (i - a_v) + d \cdot \text{tg } \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

o también:

$$(2) \quad \Delta h = i + d \cdot \text{ctg } z - a_v$$

y para la altitud H_B del nuevo punto **B**:

$$(3) \quad H_B = H_A + i + d \cdot \text{tg } \alpha - a_v$$

$$= H_A + (i - a_v) + d \cdot \text{tg } \alpha$$

$$(4) \quad = H_A + i + d \cdot \text{ctg } z - a_v$$

Inversamente, cuando se trate de determinar la altitud H_A del nuevo punto **A**, estando dada H_B de **B**, tendremos:

$$(5) \quad H_A = H_B + a_v - d \cdot \text{tg } \alpha - i$$

$$= H_B - (i - a_v) - d \cdot \text{tg } \alpha$$

$$(6) \quad = H_B + a_v - d \cdot \text{ctg } z - i$$

Para ejemplos de aplicación práctica pertinentes, ver: "C. de C." págs. 113 y 114 y N° 3, § 11, Cap. V de este tomo.

Los más importantes de los instrumentos destinados a la medición de ángulos verticales son la **alidada de plancheta** (ver Cap. V de este tomo) y el teodolito provisto de círculo vertical llamado también **teodolito universal de agrimensor**, del cual explicaremos aquí sólo aquellos órganos pertenecientes al sistema vertical, suponiendo conocido todo lo relativo al sistema horizontal tratado en tomo II de este compendio.

2. CONDICIONES TEORICAS CONSTRUCTIVAS QUE DEBEN ESTAR CUMPLIDAS EN EL INSTRUMENTO.

Para la medición de ángulos verticales mediante un teodolito universal, deben estar satisfechas en el instrumento ciertas condiciones teóricas constructivas, las que, si no estuvieran satisfechas, no podrían ser establecidas con el auxilio de los órganos de corrección.

El eje horizontal (eje secundario) del anteojo debe ser perpendicular al círculo vertical (1ª condición), pasar por el centro de la graduación (2ª condición) y estar situado en el plano visual del hilo horizontal o plano de mira horizontal (3ª condición).

La primera de estas condiciones puede considerarse llenada con suficiente precisión en todo buen instrumento, siendo entonces vertical el círculo de alturas cuando el instrumento está correctamente estacionado.

La influencia del no cumplimiento de la **segunda condición** (excentricidad de la alidada vertical) queda eliminada en el promedio de las lecturas de los nonios diametralmente opuestos y en el promedio de las lecturas correspondientes a las posiciones I y II cuando el instrumento posea un sólo nonio, siempre que la visual sea aproximadamente horizontal. Con visual inclinada, la eliminación del error de excentricidad será sólo **parcial** y tanto más incompleta cuanto mayor sea la inclinación. La influencia del no cumplimiento de la tercera condición es pequeña; exáminesela verificando la horizontalidad del eje horizontal del instrumento.

El **tornillo de presión** sirve para fijar el anteojo en una determinada posición, permitiendo dar todavía un pequeño movimiento con ayuda de un **tornillo de aproximación**.

3. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA GRADUACION DE CIRCULOS VERTICALES.

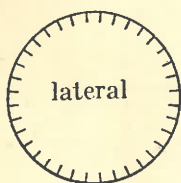


Fig. 2.

Graduación:
frontal

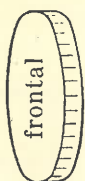


Fig. 3.

lateral

La graduación del círculo vertical puede ser lateral (figs. 2 y 9) o frontal (figs. 3 y 8), debiendo el centro de la misma, como dijimos, coincidir con el punto de intersección del eje horizontal y plano de círculo vertical. Un dispositivo apropiado, nonio o microscopio (ver: **Aparatos lectores de círculos graduados**, § 18 del tomo II), facilita la lectura.

En todas las cuestiones relacionadas con las lecturas de círculo vertical, es menester tener en cuenta el hecho de que dicho círculo generalmente está rígidamente unido al anteojo, al que acompaña en sus movimientos de giro alrededor del eje horizontal, contrario a lo que ocurre en el sistema acimutal.

4. GRADUACIONES CORRIDAS. FORMULARIOS TRIGONOMETRICOS 17 y 18, CON EJEMPLOS PRACTICOS EN ELLOS CALCULADOS. CASO PARTICULAR DEL TEODOLITO DE WILD.

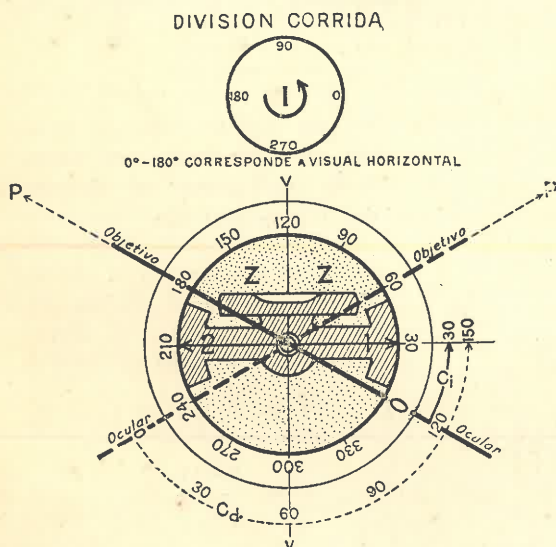


Fig. 4.—Con C y nonio I se lee directamente el ángulo de altura $\pm \alpha$ ($+30^\circ$ en el ej.).

Cuando sea necesario obtener los ángulos verticales, contando desde la izquierda hacia la derecha, análogamente a lo que sucede en la medición de ángulos horizontales, la numeración del círculo vertical debe correr en **sentido contrario** al de la marcha de las agujas del reloj (fig. 4).

$$(7) \quad 2z = II - I \text{ o } C_d - C_i$$

$$(8) \quad z = \frac{II - I}{2}$$

$$(9) \quad 2i = II + I \text{ o } C_d + C_i$$

$$(10) \quad i = \frac{II + I}{2}$$

Se leerán entonces en la posición normal, I , del anteojo, es decir, con "círculo a la izquierda" C_i , en nonio I o A , próximo al ocular, **directamente** el ángulo de altura.

En el círculo vertical del teodolito Wild corresponde a la visual horizontal: $0^\circ - 90^\circ$, en lugar de $0^\circ - 180^\circ$, y a la dirección cenit-nadir: $45^\circ - 135^\circ$, en lugar de $90^\circ - 270^\circ$.

Es decir, los números indican las mitades de los valores correspondientes a la graduación. Se evitará así la división por 2, reduciéndose las

dos lecturas de índices opuestos a una sola lectura de promedio; pero cuando se mida el ángulo vertical sólo en una posición del círculo,

División corrida según figura 4.

REGISTRO DE CAMPO

Punto estación	Punto visado	Lecturas				Media			2z = II - I			Ángulo vertical			Observaciones
		Nonios							z = $\frac{II - I}{2}$			$\alpha = 90^\circ - z$			
		o	'	''	'''	o	'	''	o	'	''	+	'	''	
P	I	1	20	40	20	50	1	20	45	179	21	00			
	II	180	41	40	41	50	180	41	45	89	40	30	+0	19	30
$2i = 182^\circ 02' 30'' - 180^\circ$ $= +2^\circ 02' 30''$															
B	I	356	30	30	30	40	356	30	35	189	01	20			
	II	185	31	50	32	00	185	31	55	94	30	40	-4	30	40
$2i = 182^\circ 02' 30'' - 180^\circ$															

Form. trig. 17.

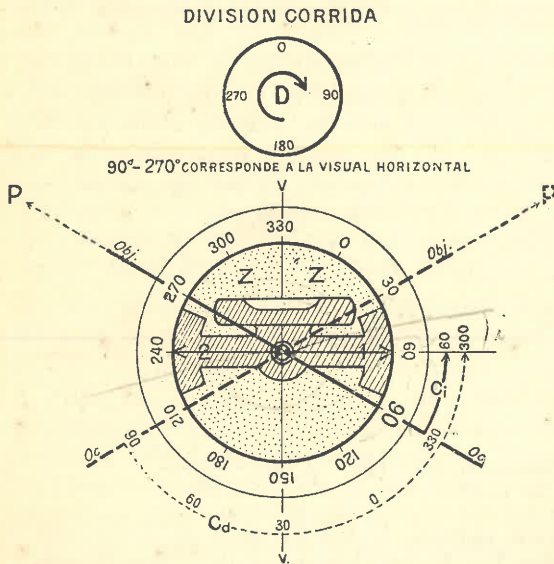


Fig. 5.— Con C_i y nonio 1 se leen directamente distancias cenitales.

lo que frecuentemente ocurre en topografía, es necesario multiplicar el ángulo de altura por 2.

En la llamada “numeración corrida izquierda - derecha” (fig. 5), se leerán en la posición normal C_i directamente distancias cenitales:

$$(11) \quad 2z = I - II \text{ o } C_i - C_d$$

$$(12) \quad z = \frac{I - II}{2}$$

$$(13) \quad 2i = I + II \text{ o } C_i + C_d$$

$$(14) \quad i = \frac{I + II}{2}$$

5. GRADUACION POR CUADRANTES. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL DOBLE NONIO. FORMULARIOS TRIGONOMETRICOS 19 y 20, CON EJEMPLOS PRACTICOS EN ELLOS CALCULADOS.

Usanse en el país también teodolitos en los que la graduación va por

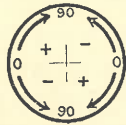
División corrida según figura 5.
REGISTRO DE CAMPO

Punto estación	Punto visado	Lecturas				Media	$2z = I - II$		Angulo vertical		Observaciones			
		Nonios					$z = \frac{I - II}{2}$		$\alpha = 90^\circ - z$					
		1	2	1	2		0	1	0	1				
P A	I	21	22	20	22	00	21	22	40	42	43	25		
	II	338	38	30	39	00	338	38	45	21	21	42	68	38
$2i = 360^\circ 00' 55'' - 360^\circ$														
$= + 00' 55''$														

For m. trig. 18.

cuadrantes, llevando 4 numeraciones, de 0° a 90° cada una. Están provistos de **dobles nonios**, debiendo emplearse los signos + o - para distinguir los ángulos de elevación (+) y los de depresión (-).

DIVISION POR CUADRANTES
CON NONIOS DOBLES



0°-0° CORRESPONDE A VISUAL HORIZONTAL

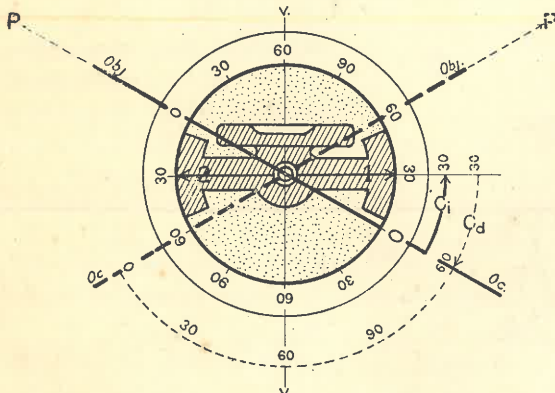


Fig. 6. — Con C₁ y nonio 1 se leen directamente ángulos de altura ± α.

Ventajas. 1) Estando el instrumento corregido, obtiéndose directamente los ángulos de elevación (+α) o de depresión (-α) en la siguiente forma:

$$(15) \quad (\pm) 2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\quad \quad \quad \circ C_i + C_d$$

$$(16) \quad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$(17) \quad 2i = \alpha_1 - \alpha_2$$

(constante)

$$(18) \quad i = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

cal constituye un elemento de **contralor** para la medición (ver ejemplo en el Form. trig. 19).

Inconvenientes. 1) Es necesario tener siempre presente que hay que leer en aquel nonio cuya numeración corre en el mismo sentido que la del círculo.

2) La constancia del doble error de índice, $2i = \alpha_1 - \alpha_2$ para cualquier ángulo vertical

2) El ángulo vertical debe ir acompañado siempre de su signo.
En el modelo inglés (fig. 7), se evita el inconveniente del doble nonio,

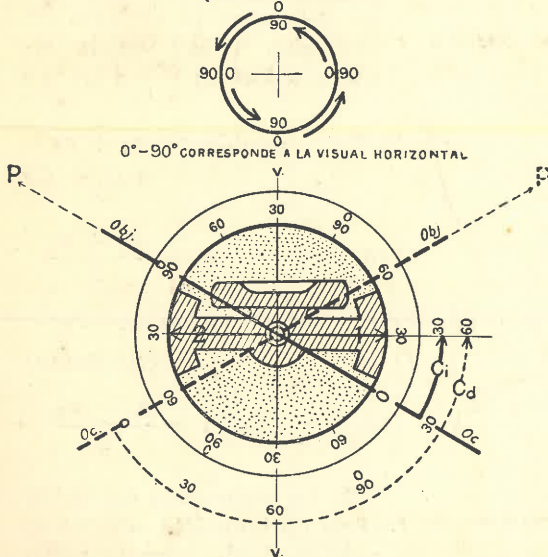
División por cuadrantes según figura 6.

REGISTRO DE CAMPO

Punto estación	Punto visado	Lecturas						Media	Ángulo vertical $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$	Observaciones
		Nonios								
		1	2	1	2	1	2			
P A	I	+5	26 30	24 10	+5	25 20			Hay un fuerte error de excentricidad.	
	II	+5	29 40	27 30	+5	28 35	+5	26 58		
		$2i = -3 15$								
B I	I	-2	52 40	55 00	-2	53 50				
	II	-2	55 50	58 00	-2	56 55	-2	55 22		
		$2i = +3 05$								

Form. trig. 19.

DIVISION POR CUADRANTES (SISTEMA INGLES)



dando ángulos de elevación si el objeto apuntado está por encima del horizonte y distancias nadirales si se halla por debajo.

Ángulos de elevación (+ α), (con C_d se leerán distancias cenitales):

$$(19) \quad + 2\alpha = \alpha_1 + (90^\circ - \alpha_2)$$

$$(20) \quad + \alpha = \frac{\alpha_1 + (90^\circ - \alpha_2)}{2}$$

$$(21) \quad 2i = \alpha_1 + \alpha_2 - 90^\circ$$

$$(22) \quad i = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 90^\circ}{2}$$

(constante)

Fig. 7.—Con C_i y nonio 1 se leen directamente ángulos de elevación o de depresión, que son en este caso distancias nadirales. En el ejemplo se tiene $+ \alpha = 30^\circ$.

Ángulos de depresión ($-\alpha$) (con C_i se leerán distancias nadirales):

$$(23) \quad - 2\alpha = (90^\circ - \alpha_1) + \alpha_2$$

$$(24) \quad - \alpha = \frac{(90^\circ - \alpha_1) + \alpha_2}{2}$$

División por cuadrantes según figura 7.

REGISTRO DE CAMPO

Punto estación	Punto visado	Lecturas				Media			$+\alpha = \frac{\alpha_1 + (90^\circ - \alpha_2)}{2}$ $-\alpha = \frac{(90^\circ - \alpha_1) + \alpha_2}{2}$			Observaciones	
		Nonios 1		Nonios 2		o	'	"	+	o	'		"
PAI		5	26	30	24	10	5	25	20				
	II	84	30	20	32	30	84	31	25	+5	26	58	
		$2i = 89\ 56\ 45 - 90^\circ$ $= -3\ 15$											
BI		87	07	20	05	00	87	06	10				
	II	2	55	50	58	00	2	56	55	-2	55	23	
		$2i = 90\ 3\ 00 - 90^\circ$ $= +03\ 00$											

Form. trig. 20.

La graduación más usada en la actualidad, por ser la más práctica es la representada en figura 5, con numeración corrida, de izquierda a derecha, dando en la posición normal directamente distancias cenitales; es la que supondremos siempre en nuestras consideraciones cuando no digamos expresamente lo contrario.

6. CONDICIONES DE LA ALIDADA VERTICAL QUE DEBEN SATISFACERSE PARA LA MEDICION DE VERDADERAS DISTANCIAS CENTALES.

Por lo visto anteriormente sabemos que la excentricidad de la alidada vertical y la falta de diametralidad de los índices de los nonios no son fuentes de errores muy temibles en la medición de ángulos verticales, eliminándose la influencia de ambos en la media de las lecturas hechas en los dos nonios (ver N° 4, § 25, pág. 202 de Tomo II).

Pero, si la lectura del círculo vertical ha de indicar verdaderas distancias cenitales, deberá responder la alidada a las siguientes condiciones:

1) La línea de unión de los índices de los nonios verticales o simplemente la línea de índices, deberá formar con la dirección de la plomada invariablemente el mismo ángulo.

2) Estando dirigido el eje de colimación hacia el cenit, deberá hacerse en el círculo vertical la lectura 0°.

7. MEDIOS DE CONTRALOR DE LA BUENA POSICION DEL EJE VERTICAL: NIVEL DE SOPORTE Y NIVEL TESTIGO DE LOS NONIOS VERTICALES.

Imaginando bisectado en posición C, un punto objeto P, con hilo horizontal, haciendo lecturas con nonio 1 y nonio 2, cuyo promedio desig-

naremos por I, y operando de idéntica manera en posición C_a , con el objeto de obtener el promedio II, tendremos, por lo visto en el N° 4, según (12), para la distancia cenital z :

$$z = \frac{I - II}{2}$$

Pero, este valor z indicará la distancia cenital verdadera sólo a condición de no haberse movido el brazo portador de los nonios verticales mientras que se ejecutaba la medición.

Esta suposición, en la práctica, generalmente no se verifica con todo rigor: A pesar de haberse efectuado la verticalización del eje principal con todo cuidado, quedará siempre una pequeña desviación de la posición ideal, la que influenciaría con su magnitud íntegra la medición vertical, en caso que aquélla exista en la misma dirección del punto visado. Además, a pesar de una sólida construcción del instrumento, no se podrá garantizar nunca una invariable posición de la línea de índices.

Empléase como **medio de contralor de la posición de la línea de índices**, un nivel tubular, colocado en la dirección del eje de colimación, estando en uso corriente principalmente las dos siguientes disposiciones:

1) Nivel fijo en un soporte del anteojo, llamado, por eso, **nivel de soporte** (*) (ver fig. 8), formando con el de la alidada horizontal un **nivel en cruz**, tan ventajoso para la rápida verticalización del teodolito, cuyo uso es el siguiente:

Dirigido el anteojo hacia el objeto, se centrará el nivel de soporte por medio de un tornillo calante, colocando seguidamente el hilo horizontal en el punto a medir. Se corregirá, así, una eventual pequeña desviación del eje vertical.

Tiene este procedimiento el inconveniente de no poderse al mismo tiempo efectuar mediciones horizontales, por el pequeño desplazamiento que puede sufrir el círculo horizontal, como efecto del movimiento del tornillo calante.

2) La segunda disposición, consistente en un nivel tubular fijado a la alidada vertical, que llamaremos "**nivel testigo**" de los nonios (fig. 9), considérase la más perfecta. En lugar de accionar sobre un calante, existe aquí un tornillo de coincidencia especial, que permite dar a este importante órgano de corrección pequeños movimientos de giro circular.

Ofrece este dispositivo la ventaja de que la verticalización del eje principal sólo necesita ejecutarse con la mediana precisión requerida para mediciones horizontales.

Estando bisectado el objeto a medir por medio de un hilo horizontal, la línea de índices será llevada a su posición ideal centrando la burbuja del nivel testigo, después de lo cual se leerá el círculo. Y como en esto no se modificará en nada la posición del círculo horizontal, no habrá inconveniente en efectuar simultáneamente mediciones horizontales y verticales.

La **sensibilidad del nivel testigo** deberá ser algo menor que la precisión de las lecturas de círculo vertical.

(*) Suponemos corregido este nivel (ver N° 9, § 14, pág. 147, Tomo II), siendo entonces su eje \perp al eje vertical del teodolito.

Evolución de un pequeño teodolito universal.

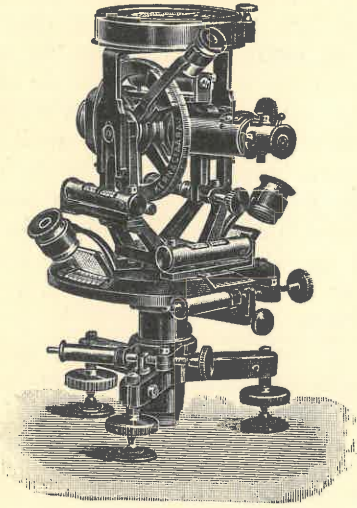


Fig. 8.

Estas figuras ilustran la evolución en la construcción del teodolito Kern 44 de 9 cm.

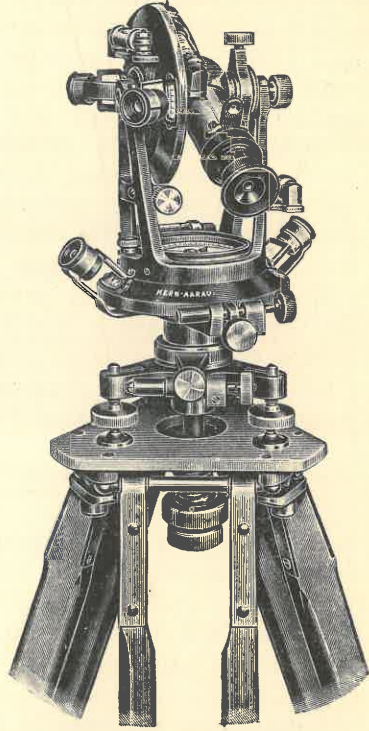
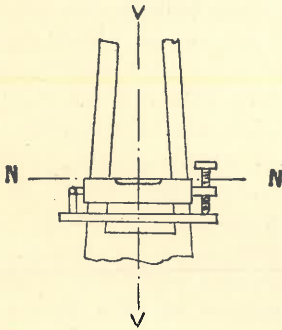


Fig. 9.

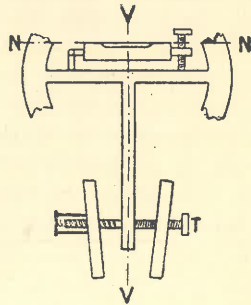


Antes:

Nivel de soporte, formando cruz con el de la alidada horizontal.
Graduación frontal por cuadrantes.

Anteojo con ocular de Ramsden y tiraje ocular exterior.

Nivel de anteojo.
Brújula de caballete.
Taquímetro de 1'.



Ahora:

Nivel testigo, conservándose, además, el nivel en cruz.

Graduación lateral corrida.

Anteojo con ocular ortoscópico y lente de enfoque interior.

Se lo conservó, agregando *visor*.

Brújula central.

Universal completo de 20", con todos los accesorios necesarios para observaciones astronómicas.

8. CORRECCION DEL ERROR DE INDICE. DEFINICION.

La segunda condición indicada en el N° 6, generalmente no estará satisfecha en el instrumento, requiriendo por eso todas las distancias cenitales una corrección llamada **corrección de cenit** o **corrección de índice**.

Tratándose de un círculo vertical destinado a la medición de distancias cenitales, se entenderá por **error de índice** aquella lectura que se obtiene cuando el eje de colimación está dirigido hacia el cenit. Este error de índice puede tener valor cualquiera, puesto que, colocado el anteojo en posición vertical, podemos suponer desplazado el círculo por fricción, siendo por eso posible cualquier lectura. Para comodidad de la práctica, conviene elegir como lugar de cenit un número redondo, 0° (fig. 5) o 90° (fig. 4), según que se quiera obtener, por medio de una sola medición, distancias cenitales o ángulos de altura.

Después de esta primera característica del error de cenit, podemos hacer resaltar su **relativa constancia**, siendo variable sólo cuando las lecturas carezcan de la necesaria fineza, cuando no se haya cada vez cuidadosamente bisectado el punto objeto o, finalmente, cuando no se haya centrado con la debida precisión el nivel testigo antes de efectuar la lectura de círculo.

Puede fácilmente determinarse el error de cenit de un instrumento, midiendo una distancia cenital en las dos posiciones del círculo, C_i y C_d : La suma de las dos lecturas debería dar 360° , siendo la **desviación de dicha suma con 360° igual al duplo del error de cenit del teodolito** (ver ejemplo práctico calculado en For. trig. 18).

Es de observar que no se efectuarán las lecturas sino después de haber **cuidadosamente centrado la burbuja del nivel testigo**, es decir, verticalizado el eje principal del teodolito. Al proceder así, se habrá conseguido que la línea de índices, en ambas posiciones del anteojo, ocupara posiciones simétricas con respecto a la vertical, resultando entonces las lecturas del cenit duplicadas, ya sea demasiado grandes o demasiado pequeñas.

Este hecho de que el doble error de cenit queda determinado por la medición de la distancia cenital de un punto, una vez con C_i y una segunda vez con C_d , y la comparación de la suma de las dos lecturas con 360° , revélase también de la siguiente reflexión:

Con el objeto de aumentar la claridad de esta cuestión, supondremos dos puntos, P y P' (fig. 5, en lugar de P' tenemos en esta figura P punteado), ambos a igual distancia cenital del instrumento estacionado en A . Admitiremos, además, que P esté situado de frente, P' detrás del observador y los tres puntos, P , A y P' , en un mismo plano vertical.

Imaginamos ahora bisectado el punto P , centrando el nivel testigo y efectuando luego la lectura de círculo. Sea $z+i$ esta lectura, siendo i el correspondiente error de cenit. Haremos ahora recorrer el anteojo la distancia cenital z , hasta llegar a la dirección del cenit. La lectura sería entonces i o $360^\circ+i$. Recorriendo luego el anteojo (sin mover la alidada horizontal) la misma distancia cenital, al otro lado del cenit, hasta bisectar el punto P' , una vez centrado el nivel testigo, se leerá: $360^\circ+i-z$, siendo, por consiguiente, la suma de ambas lecturas: $360^\circ+2i$.

Lo que acabamos de explicar en el supuesto de tratarse de dos puntos a igual altura, lógicamente valdrá también para un punto objeto único, siendo, en este caso, necesario mover la alidada horizontal de 180° e invertir el antejo, para poder observar el punto en la segunda posición del círculo.

He aquí un ejemplo de anotación para la determinación y corrección del error de cenit:

Punto visado	Posición	Nonio A	Nonio B	Promedio	Correc.	Lectura corregida
		° ' "	° ' "	° ' "		° ' "
P	I	21 22 30	201 22 00	21 22 15	— 30"	21 21 45
	II	338 38 30	158 39 00	338 38 45	— 30"	338 38 15
	Sumas:	360 01 00	360 01 00	360 01 00	— 60"	360 00 00

La reflexión que antecede puede servir al lector de ejemplo y las ecuaciones (7) a (24) de guía en el estudio de las numerosas cuestiones a que pueden dar lugar los distintos modelos de círculos verticales en uso (figs. 4 - 7).

Para las **operaciones taquimétricas** (ver Cap. VI), el procedimiento eliminatorio, indicado por las ecuaciones (8), (12), (16), (20) y (24), es demasiado engorroso, prefiriéndose generalmente la medición en una sola posición del antejo.

Pero, pretendiendo obtener verdaderas distancias cenitales por medio de observaciones efectuadas en una sola posición del antejo, es necesario **corregir el error de cenit**, lo que prácticamente puede ejecutarse del siguiente modo: Conocida la distancia cenital de un punto objeto por haberla previamente determinado, se bisectará nuevamente el objeto, produciendo la lectura conocida por medio del tornillo de aproximación. Accionando sobre los tornillos de corrección del nivel testigo, se centrará la burbuja, con lo que quedará corregido el error de cenit.

Se repetirá la corrección hasta que se obtenga en posición C_i y nonio i (o A), con nivel testigo centrado, la lectura de la distancia cenital exacta.

9. CINCO PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE LA NIVELACION TRIGONOMETRICA.

a) Aplicando el principio de la nivelación trigonométrica, midiendo la distancia cenital de un objeto y su distancia al punto de observación, se podrá determinar la diferencia de nivel Δh , entre dicho objeto y el eje horizontal del teodolito, conforme nuestras explicaciones en el N° 1, según la fórmula:

$$\Delta h = d \cdot \text{ctg } z$$

Por ejemplos de aplicación práctica, ver: "C de C.", págs. 113 y 114.

b) La doble aplicación de este principio nos proporciona la diferencia de nivel entre dos puntos objetos.

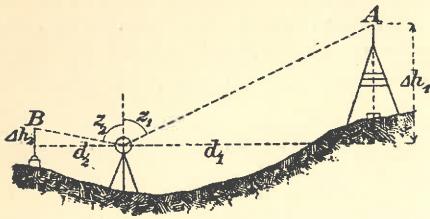


Fig. 10. — Doble aplicación del principio de la nivelación trigonométrica.

Tratándose de determinar, por ejemplo, la altura H_A de la punta de la señal trigonométrica **A**, en base a la marca alimétrica **B**, sobre la cual se supone colocada una mira, se medirán las distancias cenitales, z_1 y z_2 , y las distancias, d_1 y d_2 , a los puntos **A** y **B**, respectivamente, teniendo entonces:

$$\Delta h_1 = d_1 \cdot \text{ctg } z_1$$

$$\Delta h_2 = d_2 \cdot \text{ctg } z_2$$

$$\Delta H = \Delta h_1 - \Delta h_2 = d_1 \cdot \text{ctg } z_1 - d_2 \cdot \text{ctg } z_2$$

Y para la altura H_A del punto **A**: $H_A = H_B + \Delta H$

Estas relaciones valen también para el caso de ser $z_2 > 90^\circ$.

Siendo, por ejemplo, la cota de la marca en **B** = 42,286 m, la de la punta **B**: $H_B = 43,550$ m (= 42,286 + 1,264), $d_1 = 253,87$ m, $d_2 = 36,46$ m, $\Delta h_1 = +48,132$, $\Delta h_2 = -2,341$, resulta:

$$\Delta H = +48,132 + 2,341 = 50,473 \text{ m, luego: } H_A = 43,550 + 50,473 = 94,023 \text{ m}$$

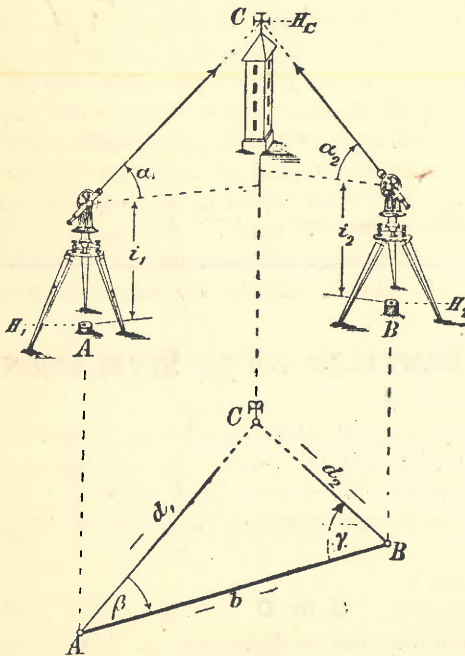


Fig. 11.

c) Tratándose de determinar la altura de una torre, prefiriéndose a veces obtener la distancia horizontal indirectamente, por medio de un triángulo, **ABC** (fig. 11), en el cual se mide la base b y los ángulos horizontales β y γ .

Tendremos entonces para la altura del punto **C** (cruz de la torre) buscada:

$$H_C = H_1 + i_1 + d_1 \cdot \text{tg } \alpha_1 \\ = H_2 + i_2 + d_2 \cdot \text{tg } \alpha_2$$

Ver ejemplo de aplicación práctica: "C. de C.", pág. 115.

d) Pero, puede resolverse este problema también sin medir ángulos horizontales, por la simple determinación de distancias cenitales, en dos puntos de estación situados con el punto objeto en un mismo plano vertical (fig. 12).

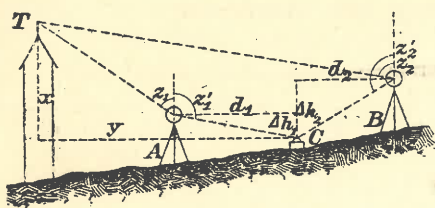


Fig. 12.

Sean **A** y **B** los dos puntos de estación, en los cuales se miden las distancias cenitales z_1, z'_1 y z_2, z'_2 , respectivamente, con el objeto de obtener la diferencia de altura de la torre **T**, con respecto a la marca alimétrica **C**.

Suponiendo conocidas las distancias d_1 y d_2 , tendremos:

$$\Delta h_1 = d_1 \cdot \text{ctg } z'_1$$

$$\Delta h_2 = d_2 \cdot \text{ctg } z'_2$$

Introduciendo la distancia horizontal, y , resulta:

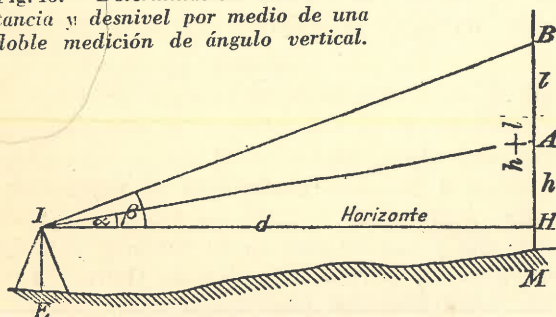
$$y + d_2 = (x - \Delta h_2) \text{tg } z_2$$

$$y - d_1 = (x - \Delta h_1) \text{tg } z_1$$

Restando: $d_1 + d_2 = x \cdot \text{tg } z_2 - \Delta h_2 \cdot \text{tg } z_2 - x \cdot \text{tg } z_1 + \Delta h_1 \cdot \text{tg } z_1$

Luego: $x = \frac{d_1 + d_2 + \Delta h_2 \cdot \text{tg } z_2 - \Delta h_1 \cdot \text{tg } z_1}{\text{tg } z_2 - \text{tg } z_1}$

Fig. 13. — Determinación de la distancia y desnivel por medio de una doble medición de ángulo vertical.



marcados por medio de discos (fig. 14) a una apropiada distancia l redonda, 1 metro, por ejemplo.

Siendo d la distancia a determinar, $HA = h$ y $HB = h + 1$, tendremos:

(25) $h = d \cdot \text{tg } \alpha$

(26) $h + 1 = d \cdot \text{tg } \beta$

Entonces:

$$d \cdot \text{tg } \alpha = d \cdot \text{tg } \beta - 1$$

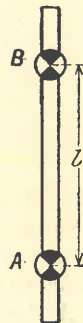
Luego:

(27) $d = \frac{1}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$

Fig. 14.

e) Problema de la doble medición de ángulos verticales.

Suponiendo colocado en **E** (fig. 13) el teodolito, **I**, y en **M** una mira vertical, se medirán los ángulos de altura α y β , hacia los trazos **A** y **B** de la mira,



Introduciendo este valor en las (25) y (26), tendremos

$$(28) \quad h = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$(29) \quad h + 1 = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$$

ambos desniveles, h y $h + 1$, referidos al horizonte H de I .

Y para la diferencia de nivel ΔH , entre el punto de apoyo de la mira M y el punto de estación E :

$$(30) \quad \Delta h = i + h - A = i + (h + 1) - B$$

en donde A y B significan las lecturas de mira referidas al punto cero de la misma. Compárese también págs. 133 a 136 de este tomo.

10. INFLUENCIA DE LA CURVATURA Y REFRACCION TERRESTRES. PRECISION DE LA DETERMINACION DEL DESNIVEL.

Tratándose de distancias mayores de 500 metros, deben tomarse en cuenta, en la nivelación trigonométrica, la curvatura y refracción terrestres. La influencia de aquélla puede calcularse, según vimos en página 85, según la fórmula:

$$\frac{d^2}{2R}$$

en donde R significa el radio de la Tierra ($R = 6370$ km).

La influencia de la refracción terrestre se expresa aproximadamente por la fórmula:

$$k \cdot \frac{d^2}{2R}$$

influencia que generalmente actúa con signo contrario al de la curvatura sobre la diferencia de nivel. El factor k , llamado **coeficiente de refracción**, oscila fuertemente durante el día, entre 0,08 y 0,20, correspondiendo el valor alto a las primeras horas del día y las últimas de la tarde y el bajo a las de mediodía. Adóptase generalmente para k el valor de **Gauss** ($k = 0,13$) que es el promedio de los resultados de muy numerosas determinaciones.

Tendremos entonces la **fórmula fundamental de la nivelación trigonométrica para grandes distancias**:

$$H_B = H_A + d \cdot \operatorname{ctg} z + \frac{d^2}{2R} - k \cdot \frac{d^2}{2R} + (i - a_v)$$

(31)

$$H_B = H_A + d \cdot \operatorname{ctg} z + \frac{d^2}{2R} (1 - k) + (i - a_v)$$

$$H_B = H_A + d \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{d^2}{2R} (1 - k) + (i - a_v)$$

Ver "C. de C.", págs. 116-120 y planilla (33), que ilustra la influencia de la curvatura terrestre y de los distintos valores del coeficiente k .

Dichas influencias pueden eliminarse casi por completo por la nivelación desde el medio.

Distancia d m	Coeficiente de refracción $k =$				
	0 (curv. terr.)	0,11	0,13	0,15	0,20
500	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
1000	0,08	0,07	0,07	0,07	0,06
2000	0,31	0,28	0,27	0,27	0,25
3000	0,71	0,62	0,61	0,60	0,56
4000	1,25	1,12	1,09	1,07	1,00
5000	1,96	1,74	1,70	1,66	1,57
6000	2,8	2,5	2,5	2,4	2,3
7000	3,8	3,4	3,3	3,3	3,1
8000	5,0	4,5	4,4	4,3	4,0
9000	6,3	5,6	5,5	5,4	5,1
10000	7,8	7,0	6,8	6,7	6,3

Precisión. En los trabajos de levantamiento de Prusia (triangulaciones de 3er y 4º orden) se deducen, para las diferencias de nivel entre puntos vecinos (de 3 hasta de 10 km de distancia) determinadas por nivelación trigonométrica simultánea y recíproca, inseguridades medias que oscilan entre $\pm 0,1$ y $\pm 0,2$ m, acusando las similares de Suiza un error medio de sólo $\pm 0,06$ m.

Sobre nivelación trigonométrica simultánea y recíproca así como sobre determinación del coeficiente de refracción k , ver "C. de C.", págs. 121 y 122.

§ 18

NIVELACION BAROMETRICA

1. NOCIONES FUNDAMENTALES SOBRE LA MEDICION DE LA PRESION ATMOSFERICA. DEFINICION DE LA MEDIDA DE COMPARACION. TRES CLASES DE BAROMETROS: BAROMETROS DE MERCURIO, TERMOBAROMETROS Y BAROMETROS METALICOS.

Sabemos que el aire, como todos los cuerpos, pesa y que, en consecuencia de su peso, ejerce presión. Sabemos también que, debido a su compresibilidad, la densidad del aire es mayor en la superficie terrestre que en las capas superiores.

Indicase, para expresar la magnitud de esta presión, la altura de una columna de mercurio capaz de equilibrar una columna de aire de igual sección transversal. Empléase en ello el mercurio por su alto peso específico ($= 13,59$), resultando, así, la columna de comparación de altura relativamente reducida. Diciendo, por ejemplo, que la presión es de 760 mm, en-

tiéndese la que ejerce una columna de mercurio de dicha altura sobre la unidad de superficie.

Esta definición de la medida de comparación de la presión atmosférica es incompleta: Dos columnas de mercurio de igual altura y sección pero de distinta temperatura, no ejercen la misma presión. Si las variaciones de temperatura no produjeran cambios en la densidad del aire, sería siempre la misma en un mismo lugar y la misma también en puntos diferentes de igual altura. Pero como este supuesto nunca se verifica, resulta que las variaciones de temperatura se traducen en cambios de la densidad de la atmósfera.

Hay más: Influye sobre el peso y la presión no sólo la temperatura, sino también la gravedad, y como ésta varía con la altura y latitud geográfica, será necesario completar la definición anterior, introduciendo en ella no sólo la temperatura normal de comparación, 0° C, sino también el valor normal de la gravedad, g. 45°.

Podemos decir entonces que es por la altura de una columna de mercurio (expresada en mm) que ejerce la misma presión al nivel del mar y 0° C, que se mide la presión atmosférica.

Los más importantes instrumentos medidores de la presión atmosférica llamados barómetros (del griego baros = peso, y metron = medida) son:

el barómetro de mercurio,
el termobarómetro o hipsómetro y
el barómetro metálico o anerode,
sirviendo los barómetros de mercurio para la determinación de las constantes, en el gabinete, y el hipsómetro para el contralor de los aneroides.

HIPSOMETRO

2. HIPSOMETRO, TERMOBAROMETRO O TERMOMETRO DE EBULLICION. PRINCIPIO. DESCRIPCION Y USO.

La temperatura de ebullición de un líquido depende de la presión bajo la cual está dicho líquido.

Estando conocida la ley de dependencia entre la temperatura y la presión, puede, a raíz de la determinación de aquélla, deducirse ésta.

Para el agua destilada, esta ley fué experimentalmente hallada por el físico francés **Regnault**.

En la planilla que sigue, consígnanse algunos valores ilustrativos.

Temp. de ebullición °C	Presión atmosférica mm	Diferencia mm
99,5	746,52	2,68
99,6	749,20	2,69
99,7	751,89	2,69
99,8	754,58	2,71
99,9	757,29	2,71
100,0	760,00	2,72
100,1	762,72	2,73
100,2	765,45	2,73
100,3	768,18	2,75
100,4	770,93	2,75
100,5	773,68	

Despréndese de esta planilla que a un cambio de $0,1^\circ$ en la temperatura corresponde una variación de $2,7 \text{ mm}$ de la presión atmosférica. Deberá, por lo tanto, poderse determinar la temperatura con una precisión 10 veces mayor cuando se quiere obtener la presión con la aproximación de $0,3 \text{ mm}$, lo que es fácil conseguir (compárense los conocidos termómetros clínicos).

La graduación del hipsómetro sólo va desde 85° hasta 101° .

Las escalas de los modernos **termómetros de hipsómetros** no están graduadas al décimo de grado de temperatura sino en dobles mm de presión, de tal modo que se pueden leer en ellas, en lugar de la temperatura de ebullición del agua destilada, directamente la correspondiente presión atmosférica reducida a la temperatura normal de 0°C , con la aproximación de $0,2 \text{ mm}$ de presión.

Con el objeto de obtener resultados prácticos fidedignos, efectúanse, en puntos de cotas conocidas (o nivel del mar) series de observaciones, con todos los hipsómetros disponibles, promediando los resultados correspondientes a cada uno. Estos valores promedios nos proporcionan, por su comparación con el valor ideal de antemano conocido, la correspondiente **corrección de estado** de cada instrumento, a tener en cuenta en las mediciones de contralor de las tomadas con aneroide, en las cuales los hipsómetros desempeñan el papel de patrón comparador.

Así el Dr. **Krüger**, al iniciar su **expedición al Río Yelcho** ⁽¹⁾ (Chile), hizo hacer, en Puerto Montt, 13 observaciones con cada uno de los 3 instrumentos de que disponía su comisión y otros 13 a la vuelta, obteniendo con ellas las 3 siguientes correcciones de estado: $-0,58$, $+0,80$ y $-0,58 \text{ mm}$, respectivamente.

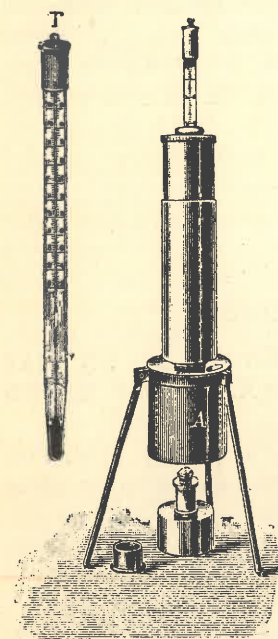


Fig. 1.
Hipsómetro de Fuess.
(Berlín)

Interesante ejemplo de aplicación geodésica. Tratóse, a principios del año 1933, de determinar la altitud de la **base geodésica** del Instituto Geográfico Militar Argentino "**Quiñi Huao**" ⁽²⁾, situada en el cruce del paralelo -40° con el meridiano -70° (Terr. Nac. del Río Negro), sobre una de las desérticas mesetas de la Patagonia, las que cual enormes escalones, superpuestos los unos a los otros, gradualmente ascienden, en dirección al Oeste, hasta el pie de la Cordillera de los Andes, a alturas entre 1000 y 1500 metros (la base se halla a 740 m).

Por no ser económicamente realizable la vinculación altimétrica de dicha base por nivelación geométrica o trigonométrica con el punto fijo nivelítico más próximo, se resolvió efectuar la determinación por medio

(1) Ver: "Petermann's Geographische Mitteilungen", N° 164, año 1909.

(2) "**Quiñi Huao**", nombre indígena (araucano) del lugar que significa: *cañadón de cortaderas*.

de hipsómetros: Se tomó como cota de arranque la de la **chapa Rn. 1198** del Ministerio de Obras Públicas (cota = 264,7863), colocada en el edificio de la Estación de Neuquén (F.C.S.), a 60 leguas de la base, a raíz de la cual se obtuvo mediante nivelación geométrica para la "**estación hipsométrica Neuquén**" la cota **267,52 m.**

Consistió la determinación del desnivel Δh entre esta estación hipsométrica y la establecida en la base a acotar, en una serie de **observaciones hipsométricas simultáneas**, efectuadas en los días 21 y 24 de enero y 2 de febrero de 1933 a las 9 horas. Se eligió esta hora por ser para ella que la "Carta del tiempo" del Ministerio de Agricultura indica las **líneas isobáricas** (*), de las cuales se deducen los elementos del **gradiente**, o sea la **diferencia de presión barométrica** entre dos puntos, en un determinado nivel y momento, por unidad de distancia. Ver también N° 14 de este párrafo. El cálculo del **desnivel Δh** dió por resultado el valor:

$$\Delta h = 472.8 \text{ m} \pm 5.6 \text{ m}$$

el que expresa la **inseguridad media** a esperar en una determinación hipsométrica efectuada en la forma indicada.

BAROMETROS METALICOS O ANEROIDES

3. OBSERVACIONES GENERALES. CONVENIENCIA DE UN MAS AMPLIO CAMPO DE APLICACION. PRINCIPIO. ANEROIDES SEGUN NAUDET, BOHNE Y GOLDSCHMID.

En el año 1847 fué construído por **Lucien Vidie** el primer barómetro metálico, llamado por él **aneroide** (del prefijo privativo griego **a**, y **neros** = húmedo, es decir, barómetro que no contiene líquido), en el cual se midió la presión atmosférica no por el peso de una columna de mercurio, sino por la **elasticidad de una delgada cubierta metálica**, con acañaladuras circulares concéntricas, para aumentar la flexibilidad.

A partir de la introducción de estos instrumentos en la práctica, la nivelación barométrica ha ido ganando cada vez más terreno en los levantamientos expeditivos y topográficos, geológicos y geográficos.

Creemos, sin embargo, que a pesar de las grandes facilidades de su empleo y los resultados muy satisfactorios (ver N° 18) que el método proporciona, no es aún suficientemente conocido y utilizado en los trabajos de levantamiento.

Proponémosnos, por consiguiente, contribuir, con nuestro modesto trabajo, a una mayor difusión, justiciera valuación y racional adopción cada vez que un sano criterio técnico lo reclame.

La **parte principal** de un barómetro metálico es una caja herméticamente cerrada, después de haber hecho en ella el vacío aproximado, con cubierta muy elástica, la que se deprime con el aumento de la presión atmosférica, elevándose con la disminución de la misma, deformaciones éstas que permiten medir las variaciones de la presión por medio de la **transformación de sus movimientos verticales en movimientos de rotación**, realizada por el delicadísimo mecanismo del aparato.

(*) **Líneas isobáricas** (del griego **isos** = igual y **baros** = pesantez), líneas de igual presión barométrica.

Pero, para la variación de la presión atmosférica de 100 mm, la correspondiente deformación de dicha tapa sólo alcanza a $\frac{1}{2}$ mm, siendo entonces necesario poder medir los movimientos de la caja con la precisión de 0,0005 mm, cuando se quiera constatar un cambio de la presión atmosférica de 0,1 mm.

Según la construcción del aparato transmisor del cambio habido, distingúense dos distintos tipos de aneroides:

1) **Aneroide Naudet** (París) o **Bohne** (Berlín), con fuerte amplificación mecánica del movimiento de la caja, por medio de un sistema de palancas articuladas;

2) **Aneroide Goldschmid** (Zürich), en el cual los movimientos verticales de la caja evacuada son medidos por medio de un tornillo micrométrico.

Hemos dicho que la caja debe estar casi evacuada, puesto que el aire interior, debido a los cambios de temperatura ocasionaría fuertes variaciones de la tensión del aire interior, al lado de las cuales las de la presión

atmosférica podría llegar a ocultarse por completo. Esta presión (*) rompería la delgada tapa de la caja, una vez extraído el aire, si no se la reforzara por medio de un poderoso resorte que actúa como contrapeso, equilibrando la presión atmosférica.

Después de estas observaciones de carácter fundamental, pasamos a describir los principales detalles de construcción.

4. DESCRIPCION DEL ANEROIDE. ANEROIDE COMPENSADO. PASO MUERTO.

La parte inferior de la caja **A** (figs. 2 y 3) está unida a la sólida caja exterior. Lleva en su centro una pequeña columna **B**, vinculada con el resorte **R**, sostenido por dos soportes **S** de la caja exterior.

Para poder medir los pequeños movimientos de la ca-

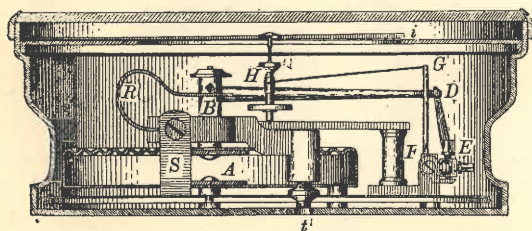
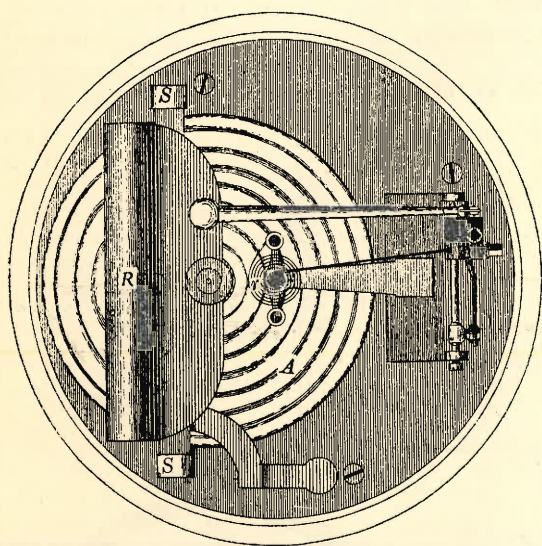


Fig. 2. — Aneroide de Naudet.

(*) $13,59.76 = 1053/\text{gr}/\text{cm}^2$, es decir, de 20 a 50 kg, en cajas cuyo diámetro oscila entre 5 y 8 cm.

ja **A** y leerlos en la escala graduada **L** (fig. 3), es necesario amplificarlos, lo que se realiza por medio de un sistema de palancas, **DE**, **EFG**, **GH**, hasta el índice **i**, que se mueve sobre el limbo **L**.

La primera amplificación se realiza en virtud de la pequeñez del brazo **EF** (punto de giro en **F**), con respecto al brazo **FG** ($EF \sim 1/5 FG$).

Una ampliación mucho más fuerte obtiéndose mediante la delgada cadenita que viene desde **G**, arrollándose en el eje **H**. Y como éste tiene un diámetro muy reducido, un pequeño movimiento de tracción, desde **G**, se traducirá en un considerable movimiento de rotación de **H** y, por consiguiente, del índice **i** de la aguja **a** (fig. 3).

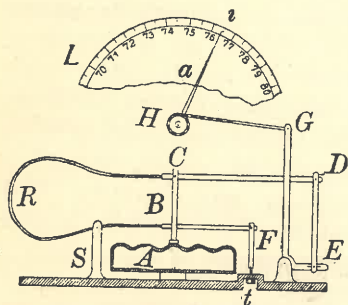


Fig. 3.
Esquema demostrativo del mecanismo del anerode.

Pero, la cadena **GH** sólo puede ejercer una acción tractora, pareciendo entonces que el aparato no pudiera funcionar sino en el sentido de izquierda hacia la derecha. Para que el aparato pueda indicar también movimientos de sentido contrario, el eje **H** está rodeado de un resorte en espiral, **r** (fig. 2, arriba), cuya misión consiste en mantener siempre tirante la cadenita, de tal modo que también un movimiento hacia la izquierda se traduzca en el correspondiente movimiento de la aguja.

De este modo se consigue aumentar y transformar un movimiento vertical de la caja de 0,005 mm (por cada variación de 1 mm en la presión atmosférica) a tal grado que el correspondiente desplazamiento de la punta de la aguja **a**, sobre la escala, represente, un intervalo de 2 mm de ancho, aproximadamente, en un instrumento de 8 cm de diámetro, lo que significa una amplificación de 400.

La posición de la aguja **a** dependerá, además de la presión atmosférica, también de la temperatura interna del instrumento. Enciérrase generalmente el aparato dentro de una caja metálica, con el objeto de mantener constante la temperatura interna del mismo, en todo lo que sea posible.

En los buenos aneroides modernos hállase encastrado, cerca de la escala de las presiones, un termómetro, destinado a indicar la temperatura interna del anerode (fig. 4).

En los aneroides llamados compensados las lecturas del índice son independientes de la temperatura.

El llamado paso muerto del instrumento queda eliminado: 1° por el resorte en espiral **r**, 2° por el poderoso resorte **R**, mediante el cual la columna **B**, conjuntamente con la palanca **CD** quedan alzadas, presionando hacia arriba,

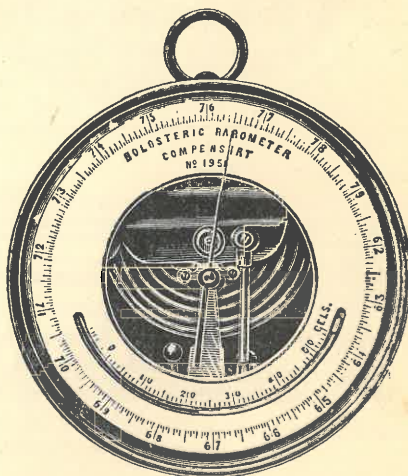


Fig. 4.—Anerode compensado Bohne.

cualquiera que sea la presión atmosférica reinante.

Antes de proceder a la lectura del índice *i*, no debe olvidarse de dar unos ligeros golpecitos en el cristal de la tapa, con el objeto de vencer pequeñas resistencias internas del mecanismo.

5. CORRECCION Y AJUSTE DEL ANEROIDE NAUDET.

Para la corrección y ajuste del instrumento existen dos disposiciones:

1° Mediante un movimiento del tornillo *t* (figs. 2 y 3) puede modificarse la presión del resorte *R* contra la columna *B* y, con ello, la lectura de la aguja *a*.

2° Por un pequeño movimiento de la charnela *E*, mediante dos tornillos, se alargará o acortará el brazo corto de la palanca *EFG*, modificándose, así, la amplificación.

En virtud del considerable aumento del movimiento de la columna *B*, en los aneroides de Naudet y Bohne, y su transformación en movimiento de rotación, originanse ciertas irregularidades en la marcha de la aguja que el mecánico *Goldschmid* supo eliminar.

6. DESCRIPCION Y USO DEL ANEROIDE GOLDSCHMID.

El modelo de *Goldschmid* es uno de los mejores aneroides de precisión, llamados también *barómetros holostéricos* (del griego *holos* = todo, y *stereos* = sólido).

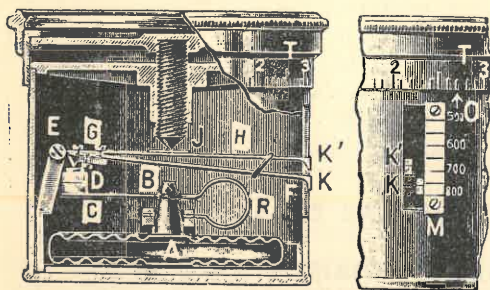


Fig. 5.—Aneroide de Goldschmid.

mientos verticales de la columna *B*, unas 30 a 40 veces aumentadas. El valor **grosero** correspondiente a este movimiento, puede leerse, en dicho índice, sobre la escala *M*, en decenas de *mm* o medias centenas, según el modelo. La **medición fina** de este movimiento podría efectuarse mediante un tornillo micrométrico *J*, cuya punta sería llevada a contacto con la palanca *EF*, leyendo sobre el tambor graduado *T* el correspondiente recorrido. Pero, como no es posible acertar, a pulso, el preciso momento del contacto de la punta del tornillo con la palanca

Los pequeños movimientos de la caja *A* ocasionados por las variaciones de la presión atmosférica, son transmitidos, por medio de la columna *B*, a un poderoso resorte *R* (figs. 5 y 6), que lleva en su extremo *C* una chapa de ágata (fig. 5), sobre la cual descansa la cuchilla de acero *D* de la palanca (de un brazo) *EF*, que gira alrededor de *E*, de tal modo que su extremo *K* (rectángulo de acero bruñido, provisto de índice) indica los movi-

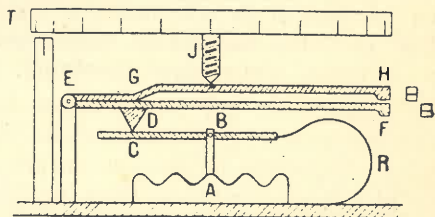


Fig. 6.—Esquema demostrativo del mecanismo del aneroid de Goldschmid.

EF (peligrando, en ello, todavía doblar a ésta), **Goldschmid** atornilló, en el punto **G**, otra palanca, el llamado **resorte sensible GH**, accionando entonces la punta del tornillo micrométrico **J**, ya no sobre **EF** directamente sino sobre **GH**, con rectangulito porta-índice **K'**, idéntico a **K**. La posición de **K**, tanto como la de **K'**, depende de la presión atmosférica, siendo entonces el movimiento del tambor **T** (cabeza del tornillo micrométrico **J**) necesario para llevar el rectangulito **K'** a la posición que el cambio de la presión atmosférica dió a la palanca **EF**, en su extremo **K**, la medida de dicho cambio, leyéndose los giros enteros de la corona en la escala **M** y los parciales en la división del tambor **T**.

Con el objeto de evitar cualquier desajuste en el aparato, durante el transporte, se tendrá la precaución de levantar la punta del tornillo, dándole una vuelta en sentido contrario.

Para la medición de la temperatura interna, sirve un termómetro fijado al lado de la escala.

Uso práctico. Se girará el tornillo micrométrico hasta tocar el resorte sensible. Se dará en la tapa unos golpecitos con el dedo, para eliminar eventuales resistencias en el mecanismo, continuando luego el giro del tornillo cuidadosamente, teniendo la caja en **posición horizontal**, hasta llegar los índices **K'** y **K** a la perfecta coincidencia, lo que debe lograrse siempre con un movimiento de arriba hacia abajo y repitiendo los golpecitos con el dedo. Se hará la primera lectura en la escala **M**, la que generalmente da decenas de **mm** o medias centenas, completándola luego con la del tambor, dando esta última los **mm** y los décimos de **mm**. Los números 2-3 de figura 5 significan **mm**. Siendo, por ejemplo, la primera lectura 750 y la segunda 8,25, la completa sería 758,25 **mm**.

Terminada la medición, se deberá levantar el tornillo micrométrico **J**, dejando el resorte sensible completamente libre.

CORRECCIONES DE LAS LECTURAS DE ANEROIDES.

7. DEFINICIONES Y NOCIONES FUNDAMENTALES SOBRE LAS TRES DIFERENTES CORRECCIONES DE LECTURAS DE ANEROIDE.

Con el objeto de poder armonizar las lecturas de aneroide hechas a la temperatura interna **t°C**, con las correspondientes lecturas efectuadas en barómetro de mercurio (o hipsómetro) reducidas, es necesario conocer tres distintas **constantes instrumentales**, de **temperaturas**, de **graduación** y de **estado** (**constante absoluta**).

Corrección por temperatura. Según vimos en el N° 1, sabemos que es fundamental el conocimiento de la temperatura en la nivelación barométrica. Aumentando aquélla, en un aneroide, aumentará también la lectura en el mismo. Faltando para un instrumento este importante dato, resultaría inútil para el uso práctico.

Corrección de graduación. La exigencia de que el intervalo unitario de la escala en un aneroide correspondiente a 1 **mm** de la del barómetro de mercurio, es decir, que el mismo cambio de presión atmosférica produzca un movimiento de la aguja del aneroide en una división y en el

barómetro de mercurio un cambio de la altura de la columna de mercurio de 1 mm, muchas veces no está satisfecha, debido a un ajuste defectuoso de la amplificación, apareciendo entonces las divisiones del aneroide o demasiado grandes o demasiado pequeñas. Los valores leídos en el instrumento deben, por lo tanto, multiplicarse por un coeficiente β , llamado de **graduación**, para reducirlas, así, a las correspondientes alturas de barómetro de mercurio.

Corrección de estado. A pesar de tener en cuenta las correcciones de temperatura y de graduación, puede todavía existir una diferencia entre las lecturas reducidas de aneroide y las correspondientes de barómetro de mercurio, debido, por ejemplo, a un desplazamiento del cuadrante de división del aneroide. Esta circunstancia obliga a introducir una tercera corrección, γ , llamada de **estado** o **constante absoluta**, a aplicar a las lecturas de aneroide para su reducción a la temperatura normal de 0°C, y presión normal de 760 mm.

8. DETERMINACION DE LA CORRECCION POR TEMPERATURA, α t. VALOR LIMITE DEL COEFICIENTE DE TEMPERATURA α . ANEROIDE COMPENSADO.

Como las variaciones de temperatura, en una misma zona de trabajo, generalmente quedan dentro de estrechos límites, puede considerarse esta corrección **proporcional al tiempo**, es decir $= -\alpha t$ (siendo siempre subtractiva), en donde α significa el **coeficiente de temperatura** referido a 1°C de cambio de temperatura.

La determinación de este coeficiente de temperatura se realiza preferentemente durante el invierno, cuando es muy fácil conseguir lecturas de aneroide con temperaturas muy bajas o muy elevadas. Se compararán estas lecturas de aneroide con las correspondientes B_0 , hechas en barómetro de mercurio o hipsómetro, obteniéndose, así, las cantidades $(A_t - B_0)$ que figuran en la planilla (1) de pág. 210.

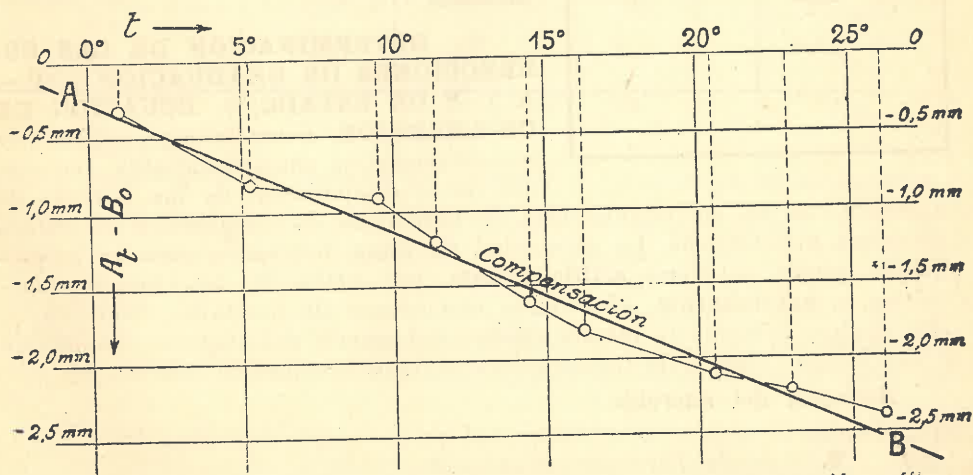


Fig. 7. — Determinación del coeficiente de temperatura α por compensación gráfica.

Sean, por ejemplo, los resultados de una investigación de aneroide **Bohne**, los que se consignan en dicha planilla, en donde A_t expresa la lectura de aneroide a la temperatura t° y B_0 la del barómetro de mercurio, **reducida** a 0°C . Colocados estos valores en un sistema de coordenadas rectangulares (fig. 7), y trazada la **recta de compensación, AB**, tendremos para el **coeficiente de temperatura, α** , el valor aproximado:

$$\alpha = -\frac{2,2}{25} = -0,088$$

Con $t = 25^\circ$, la ordenada de la recta **AB** es, según se desprende de la figura 7, igual a $-2,495$ y para $t=0^\circ$, igual a $-0,255$, siendo entonces para una diferencia de 25° la corrección, αt , igual a $-2,24$ (ó $-2,2$, redondeando), con lo que se saca el valor indicado. El contraste se repetirá durante dos o tres días.

El coeficiente de temperatura, α , es generalmente inferior a $-0,1$, considerándose inútil un instrumento, para fines prácticos, en el que $|\alpha| > 0,15$.

Con temperatura ascendente disminuye la fuerza elástica del resorte **R**, de tal modo que ocasiona aumento de lectura de aneroide.

Dejando entrar un poco de aire al interior de la caja vacía, puede equilibrarse la disminución de la fuerza elástica del resorte, por medio de la dilatación del aire, en el interior de la caja **A**, cuando no se prefiere emplear otro recurso constructivo de compensación, eligiendo para las palancas del aparato metales de distintos coeficientes de dilatación. Esta clase de aneroides perfeccionados llámense **aneroides compensados** (fig. 4).

9. DETERMINACION DE LAS CORRECCIONES DE GRADUACION β ($C - A_0$), Y DE ESTADO, γ . ECUACION DE UN ANEROIDE. Estas dos correcciones suelen determinarse simultáneamente por medio de la comparación de las lecturas de

aneroide con las correspondientes de barómetro de mercurio, a diferentes presiones atmosféricas. La diversidad de éstas, necesarias para la investigación, puede obtenerse **artificialmente**, por medio de una máquina neumática, o **naturalmente**, efectuando ascenciones de montañas, teniendo en ello siempre presente la **inercia elástica** del resorte del aneroide, que obliga a leer recién después de transcurridos algunos minutos de espera.

Ecuación del aneroide.

Siendo:

B_0 = estado barométrico reducido,

A_r = lectura de aneroide reducida,

Temperatura t de aner. $^\circ\text{C}$	Corrección $A_t - B_0$ mm
+ 1,0	— 0,3
+ 5,2	— 0,8
+ 9,5	— 0,9
(1) + 11,4	— 1,2
+ 14,4	— 1,6
+ 16,2	— 1,8
+ 20,5	— 2,1
+ 23,0	— 2,2
+ 26,0	— 2,4

A_t = lectura de aneroide efectuada a la temperatura t° ,

A_o = lectura de aneroide corregida por temperatura,

C = constante de presión barométrica, a la cual está referida la constante absoluta, γ ,
tendremos:

(2)
$$B_o = A_r = A_t - \alpha t + \beta (C - A_o) + \gamma$$

o sea:

(3)
$$B_o - (A_t - \alpha t) = \beta (C - A_o) + \gamma$$

Poniendo:

$$(A_t - \alpha t) = A_o,$$

y

$$\beta (C - A_o) + \gamma = G + \gamma$$

resulta:

(4)
$$B_o - A_o = G + \gamma$$

en donde G significa la corrección por graduación.

(5)

B_o	$A_o = A_t - \alpha t$	$B_o - A_o$ ($G + \gamma$)	$C - A_o$ ($C = 700$)
724,9	722,8	+ 1,8	- 22,8
717,1	715,1	+ 2,0	- 15,1
700,0	697,7	+ 2,3	+ 2,3
690,8	688,4	+ 2,4	+ 11,6
681,4	678,4	+ 3,0	+ 21,6

Siendo, por ejemplo, los resultados de la investigación del aneroide **Bohne** anteriormente mencionado, los que se consignan en la planilla (5), se podrá utilizar, para la compensación gráfica, uno de los dos procedimientos que pasamos a explicar.

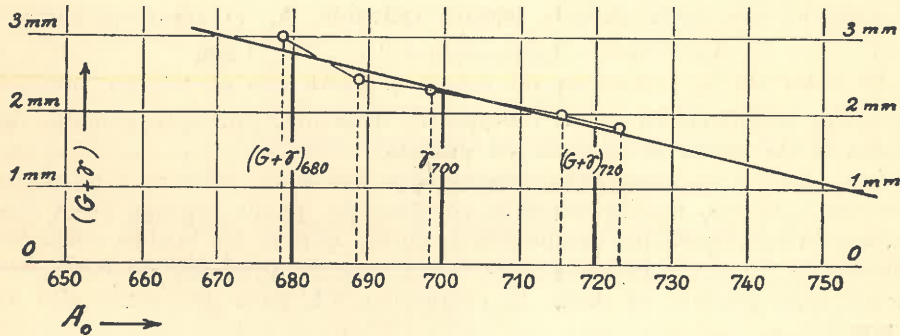


Fig. 8. — Determinación del coeficiente de graduación β con ayuda de las cantidades A_o .

Se transportará, análogamente a lo que se hizo en figura 7, a un sistema de coordenadas rectangulares, las cantidades: $A_o = A_t - \alpha t$ (fig.8) o las $(C - A_o)$ de figura 9, como **abscisas** y las $(B_o - A_o) = G + \gamma$ como **ordenadas**. Uniendo los puntos así obtenidos por medio de una curva, trazando luego la recta de compensación, se podrá sacar, por medio de ésta, para cualquier valor de A_o o $(C - A_o)$ el correspondiente valor de $(G + \gamma)$.

Constante barométrica C. Adóptase generalmente para la cantidad C un valor medio de las presiones registradas en una determinada zona de trabajo, 700 mm, por ejemplo, resultando así, para $A_o = C$:

$$(700 - A_o) = \text{cero},$$

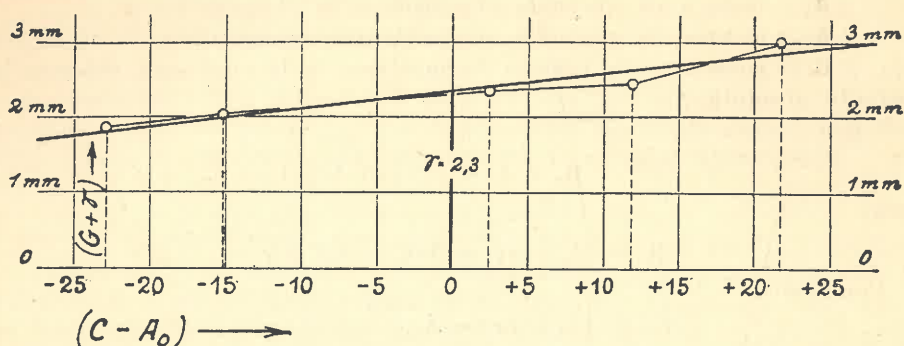


Fig. 9. — Determinación del coeficiente de estado γ con ayuda de las cantidades $C - A_0$.

siendo entonces la correspondiente ordenada $= \gamma =$ corrección de estado buscada. En el presente ejemplo $\gamma = 2,3$ (ver figs. 8 y 9).

Y para el coeficiente de graduación β (que se determina análogamente al de la temperatura α), según fig. 8:

$$\beta = \frac{2,9 - 1,7}{50} = + 0,025$$

Tendremos entonces, para el anerode **Bohne** examinado la siguiente ecuación:

$$(6) \quad A_r = A_t - 0,088 \cdot t + 0,025 (700 - A_0) + 2,3$$

la que, aplicada a una lectura de anerode $A_t = 710,8$ mm, y $t = +20^\circ$, por ejemplo, nos daría para la lectura reducida, A_r , el siguiente valor:

$$A_r = 710,8 - 1,76 - 0,23 + 2,3 = 711,11 \text{ mm}$$

El valor de la corrección de estado γ varía con el tiempo por las inevitables trepidaciones en el transporte, debiendo, por consiguiente, determinarse de nuevo de cuando en cuando.

Para determinaciones barométricas expeditivas de turismo o de levantamientos militares, usando anerode compensado, puede muchas veces despreciarse la corrección por temperatura, puesto que en los buenos anerodes modernos de Naudet y Bohne el coeficiente α oscila alrededor de 0,05 (0,05 mm por cada grado), es decir, la corrección $\alpha \cdot t$, para 10° , sería sólo de 0,5 mm.

FORMULAS BAROMETRICAS, TABLAS NUMERICAS Y TABLAS GRAFICAS

10. FORMULA BAROMETRICA COMPLETA DE JORDAN.

La nivelación barométrica se funda en el hecho de que la presión atmosférica disminuye a medida que nos alejamos del centro de la Tierra. Partiendo de este principio, puede obtenerse la diferencia de altura entre dos puntos situados verticalmente uno arriba del otro, por la determinación simultánea de la presión atmosférica y temperatura en los mismos. La simultaneidad de las observaciones es exigida por la circunstancia de que la presión cambia con el tiempo. Para la medición de la presión uti-

lízase generalmente el **aneroide**. La determinación de la temperatura del aire es más difícil. Empléase en ello generalmente un **termómetro** de los llamados **de honda**, que consiste en un termómetro sujeto al extremo de un fuerte hilo. Antes de leerlo, se girará unas 50 a 100 veces en el aire, hasta no variar más su estado. Para el cálculo se tendrá en cuenta la **media de las temperaturas** observadas en dos puntos vecinos.

Este cálculo de las diferencias de alturas barométricamente determinadas no es muy sencillo, por tener que considerar diversas propiedades del aire. **Laplace**, **Bauernfeind**, **Jordan** y muchos otros establecieron fórmulas barométricas. Las de **Jordan** han encontrado más aceptación, por lo que las emplearemos a continuación exclusivamente.

Midiendo simultáneamente en los dos puntos P_1 y P_2 , las presiones atmosféricas B_1 y B_2 , respectivamente, como asimismo las temperaturas t_1 y t_2 , se tendrá, según **Jordan**, para la diferencia de altura ΔH , entre los puntos P_1 y P_2 :

$$(7) \quad \Delta H = K \log \frac{B_1}{B_2} (1 + \alpha \cdot t_m) (1 + \beta \cdot \cos 2\varphi) \left(1 + \gamma \cdot \frac{e}{B_m}\right) \left(1 + \frac{2H_m}{R}\right)$$

en donde:

$K = 18\,400$, la llamada **constante barométrica**,

$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$, **temperatura media** en °C,

$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$, **presión atmosférica media**.

$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}$, **altura media**,

φ = **latitud geográfica media** de los dos puntos,

e = **tensión media del vapor de agua**, entre P_1 y P_2 ,

$R = 6\,370\,000$ metros, **radio terrestre**,

$\alpha = \frac{1}{273} = 0,003665$, **coeficiente de dilatación del aire**, para 1°C,

$\beta = 0,00264$, **coeficiente de gravedad** dependiente del aplastamiento de la Tierra,

$\gamma = 0,377$, **coeficiente dependiente de la densidad del vapor de agua**.

Como las variaciones de φ , e , B_m y H_m sólo ejercen una influencia pequeña sobre la diferencia de altitud ΔH , pueden considerarse constantes φ , e , B_m y H_m , para extensas zonas de levantamiento, introduciéndose para ellas valores medios redondos, los que figuran en la **fórmula barométrica simplificada** que daremos a continuación.

11. FORMULAS SIMPLIFICADAS DE JORDAN Y BABINET. ALTITUDES BRUTAS. TABLAS DE JORDAN DE ALTITUDES BAROMETRICAS BRUTAS. EJEMPLOS DE APLICACION PRACTICA CON LAS "TABLAS DE JORDAN". Substituyendo, por ejemplo, según **Jordan**, para

$\varphi = 50^\circ$, $\frac{e}{B_m} = \frac{1}{100}$ y $H_m = 500$ metros, resultará la siguiente conocida **fórmula simplificada**:

$$(8) \quad \Delta H = 18\,464 \cdot \log \frac{B_1}{B_2} (1 + \alpha \cdot t_m)$$

$$(9) \quad = 18\,464 (\log B_1 - \log B_2) (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

Amplificando la fracción $\frac{B_1}{B_2}$ por la cantidad **C**, arbitrariamente elegida, tendremos:

$$(10) \quad \Delta H = 18\,464 \log \frac{B_1 C}{B_2 C} (1 + 0,003665 t_m) = 18\,464 \log \frac{\frac{C}{B_2}}{\frac{C}{B_1}} (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

$$(11) \quad \Delta H = 18\,464 \left(\log \frac{C}{B_2} - \log \frac{C}{B_1} \right) (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

Poniendo **C** = 762, presión media al nivel del mar, y

$$(12) \quad H_1 = 18\,464 (\log 762 - \log B_1) (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

$$(13) \quad H_2 = 18\,464 (\log 762 - \log B_2) (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

resultó:

$$(14) \quad \Delta H = 18\,464 [(\log 762 - \log B_2) - (\log 762 - \log B_1)] (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

$$(15) \quad \Delta H = H_2 - H_1$$

Los valores **H₁** y **H₂**, llamadas **altitudes brutas** (por referirse sólo aproximadamente al nivel medio del mar), hállanse calculadas en las conocidas **tablas de Jordán** (*) para presiones barométricas desde 630 hasta 775 mm, y temperaturas hasta 35°.

La página prueba aquí reproducida y que llamaremos "**Tabla de Jordán I**" es un espécimen de otra tabla más reducida y calculada para $t = 15^\circ$, a la cual se agregó una tabla de corrección por temperatura.

Estas tablas, calculadas según fórmulas (12) y (13), valen para la Europa Central y regiones similares en nuestro continente.

Ejemplo práctico 1. $B_1 = 752,7 \text{ mm}$ $t_1 = 16^\circ$ } $t_m = 15^\circ$
 $B_2 = 720,4 \text{ »}$ $t_2 = 14^\circ$ }

La tabla I nos da: $H_1 = 103,9 \text{ m}$
 $H_2 = 474,9 \text{ »}$

Diferencia, $H_2 - H_1 = \Delta H = 371,0 \text{ m}$

Ejemplo práctico 2: $B_1 = 754,6 \text{ mm}$ $t_1 = 14,1^\circ$ } $t_m = 13^\circ\text{C}$
 $B_2 = 745,0 \text{ »}$ $t_2 = 11,9^\circ$ }

Para 754,6 mm, sacamos: $H_1 = 82,6 \text{ m}$

» 745,0 » : $H_2 = 190,9 \text{ »}$

$\Delta H = 108,3 \text{ m}$

De la tabla de corrección por temperatura:

Para $H_2 - H_1 = 100$: corrección = - 0,7 m

» $H_2 - H_1 = 110$: » = - 0,8 »

(*) *Barometrische Hoehentafeln von Jordan, 2. bis 35. erweiterte Auflage, Stuttgart, J. B. Metzler 1886.*

Barometrische Hoehen von Jordan für Tiefland und grosse Hoehen, bis 8000 m. Hannover, 1896.

Luego:
desnivel ΔH coregido: $\Delta H = 108,3 \text{ m} - 0,8 \text{ m} = 107,5 \text{ m}$.

Para valores de t mayores de 15° , la corrección por temperatura sería positiva.

12. GRADAS DE ALTURAS BAROMETRICAS. TABLAS DE JORDAN II CON UN EJEMPLO DE APLICACION PRACTICA. Desarrollando los logaritmos de la fórmula (8) en series y despreciando en ellas las potencias superiores a la primera, resulta la fórmula de Babinet (1850):

Tabla de Jordan I (para $t = 15^\circ \text{ C}$)

B	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	Difer. para 1 mm
720	479,6	478,4	477,3	476,1	474,9	473,8	472,6	471,4	470,2	469,1	11,75
721	467,9	466,7	465,5	464,4	463,2	462,0	460,9	459,7	458,5	457,3	11,73
722	456,2	455,0	453,8	452,6	451,5	450,3	449,1	448,0	446,8	445,6	11,72
723	444,4	443,3	442,1	440,9	439,8	438,6	437,4	436,3	435,1	433,9	11,70
724	432,8	431,6	430,4	429,3	428,1	426,9	425,8	424,6	423,4	422,3	11,68
725	421,1	419,9	418,8	417,6	416,4	415,3	414,1	412,9	411,8	410,6	11,67
726	409,4	408,3	407,1	405,9	404,8	403,6	402,4	401,3	400,1	398,9	11,65
727	397,8	396,6	395,4	394,3	393,1	391,9	390,8	389,6	388,5	387,3	11,64
728	386,1	385,0	383,8	382,6	381,5	380,3	379,2	378,0	376,9	375,7	11,62
729	374,5	373,4	372,2	371,1	369,9	368,7	367,6	366,4	365,3	364,1	11,60
730	362,9	361,8	360,6	359,5	358,3	357,1	356,0	354,8	353,7	352,5	11,59
731	351,3	350,2	349,0	347,9	346,7	345,6	344,4	343,3	342,1	341,0	11,57
732	339,8	338,6	337,5	336,3	335,2	334,0	332,9	331,7	330,6	329,4	11,56
733	328,2	327,1	325,9	324,8	323,6	322,5	321,3	320,2	319,0	317,9	11,54
734	316,7	315,6	314,4	313,3	312,1	311,0	309,8	308,7	307,5	306,3	11,53
735	305,2	304,0	302,9	301,7	300,6	299,4	298,3	297,1	296,0	294,8	11,51
736	293,7	292,5	291,4	290,2	289,1	287,9	286,8	285,7	284,5	283,4	11,49
737	292,2	291,0	289,9	288,8	287,6	286,5	285,3	284,2	283,0	281,9	11,48
738	270,7	269,6	268,4	267,3	266,2	265,0	263,9	262,7	261,6	260,4	11,46
739	259,3	258,1	257,0	255,9	254,7	253,6	252,4	251,3	250,1	249,0	11,45
740	247,8	246,7	245,6	244,4	243,3	242,1	241,0	239,8	238,7	237,6	11,43
741	236,4	235,3	234,1	233,0	231,9	230,7	229,6	228,4	227,3	226,1	11,42
742	225,0	223,9	222,7	221,6	220,4	219,3	218,2	217,0	215,9	214,7	11,40
743	213,6	212,5	211,3	210,2	209,1	207,9	206,8	205,6	204,5	203,4	11,39
744	202,2	201,1	200,0	198,8	197,7	196,5	195,4	194,3	193,1	192,0	11,37
745	190,9	189,7	188,6	187,5	186,3	185,2	184,1	182,9	181,8	180,6	11,36
746	179,5	178,4	177,2	176,1	175,0	173,8	172,7	171,6	170,5	169,3	11,34
747	168,2	167,1	165,9	164,8	163,6	162,5	161,4	160,3	159,1	158,0	11,33
748	156,9	155,7	154,6	153,5	152,3	151,2	150,1	149,0	147,8	146,7	11,31
749	145,6	144,5	143,3	142,2	141,1	139,9	138,8	137,7	136,5	135,4	11,30
750	134,3	133,2	132,0	130,9	129,8	128,6	127,5	126,4	125,3	124,1	11,28
751	123,0	121,9	120,8	119,6	118,5	117,4	116,3	115,1	114,1	112,9	11,26
752	111,8	110,6	109,5	108,4	107,3	106,1	105,0	103,9	102,8	101,6	11,25
753	100,5	99,4	98,2	97,1	96,0	94,9	93,8	92,7	91,5	90,4	11,23
754	89,3	88,2	87,0	85,9	84,8	83,7	82,6	81,4	80,3	79,2	11,22
755	78,1	77,0	75,8	74,7	73,6	72,5	71,4	70,2	69,1	68,0	11,20
756	66,9	65,8	64,6	63,5	62,4	61,3	60,2	59,1	57,9	56,8	11,19
757	55,7	54,6	53,5	52,3	51,2	50,1	49,0	47,9	46,8	45,6	11,17
758	44,5	43,4	42,3	41,3	40,1	38,9	37,8	36,7	35,6	34,5	11,16
759	33,4	32,3	31,1	30,0	28,9	27,8	26,7	25,6	24,5	23,3	11,15
760	22,2	21,1	20,0	18,9	17,8	16,7	15,6	14,5	13,3	12,2	11,13
761	11,1	10,0	8,9	7,8	6,7	5,6	4,4	3,3	2,2	1,1	11,12
762	0,0	-1,1	-2,2	-3,3	-4,4	-5,5	-6,7	-7,8	-8,9	-10,0	11,10
763	-11,1	-12,2	-13,3	-14,4	-15,5	-16,6	-17,7	-18,9	-20,0	-21,1	11,09
764	-22,2	-23,3	-24,4	-25,5	-26,6	-27,7	-28,8	-29,9	-31,0	-32,1	11,07

(16)

$$\Delta H = 8019 \frac{B_1 - B_2}{B_m} (1 + 0,003665 \cdot t_m)$$

Poniendo para abreviación:

(17)

$$8019 \frac{1}{B_m} (1 + 0,003665 \cdot t_m) = \Delta h$$

tendremos para la diferencia de altura ΔH la siguiente sencilla ecuación:

$$(18) \quad \Delta H = (B_1 - B_2) \cdot \Delta h$$

Para $(B_1 - B_2) = 1$ mm, resulta $\Delta H = \Delta h$, es decir Δh es aquel desnivel que es necesario vencer para que la presión atmosférica disminuya 1 mm. Llámase por eso este desnivel Δh grada de altura barométrica.

Tabla de corrección por temperatura.

t	H ₂ - H ₁ en metros															t
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	
-5	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	7,6	8,3	9,0	9,7	10,4	+35
-4	0,7	1,3	2,0	2,6	3,3	4,0	4,6	5,3	5,9	6,6	7,3	7,9	8,6	9,2	9,9	+34
-3	0,6	1,3	1,9	2,5	3,1	3,8	4,4	5,0	5,6	6,3	6,9	7,5	8,1	8,8	9,4	+33
-2	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,1	4,7	5,3	5,9	6,5	7,1	7,7	8,3	8,9	+32
-1	0,6	1,1	1,7	2,2	2,8	3,3	3,9	4,4	5,0	5,6	6,1	6,7	7,2	7,8	8,3	+31
0	0,5	1,0	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,2	4,7	5,2	5,7	6,3	6,8	7,3	7,8	+30
+1	0,5	1,0	1,5	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,8	6,3	6,8	7,3	+29
+2	0,5	0,9	1,4	1,8	2,3	2,7	3,2	3,6	4,1	4,5	5,0	5,4	5,9	6,3	6,8	+28
+3	0,4	0,8	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,8	6,3	+27
+4	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,7	+26
+5	0,3	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,1	3,5	3,8	4,2	4,5	4,9	5,2	+25
+6	0,3	0,6	0,9	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,8	4,1	4,4	4,7	+24
+7	0,3	0,6	0,8	1,1	1,4	1,7	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,2	+23
+8	0,2	0,5	0,7	1,0	1,2	1,5	1,7	1,9	2,2	2,4	2,7	2,9	3,2	3,4	3,6	+22
+9	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	+21
+10	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	+20
+11	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9	2,1	+19
+12	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	+18
+13	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,0	+17
+14	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	+16
+15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+15

t	H ₂ - H ₁ en metros											t			
	150	160	170	180	190	200	300	400	500	600	700		800	900	1000
-5	10,4	11,1	11,8	12,5	13,2	13,9	20,9	27,8	34,8	41,7	48,7	55,6	62,6	69,5	+35
-4	9,9	10,6	11,2	11,9	12,5	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4	66,0	+34
-3	9,4	10,0	10,6	11,3	11,9	12,5	18,8	25,0	31,3	37,6	43,8	50,0	56,3	62,6	+33
-2	8,9	9,5	10,0	10,6	11,2	11,8	17,7	23,6	29,5	35,5	41,4	47,3	53,2	59,1	+32
-1	8,3	8,9	9,5	10,0	10,6	11,1	16,7	22,2	27,8	33,4	38,9	44,5	50,0	55,6	+31
0	7,8	8,3	8,9	9,4	9,9	10,4	15,6	20,9	26,1	31,3	36,5	41,7	46,9	52,1	+30
+1	7,3	7,8	8,3	8,8	9,2	9,7	14,6	19,5	24,3	29,2	34,1	38,9	43,8	48,7	+29
+2	6,8	7,2	7,7	8,1	8,6	9,0	13,6	18,1	22,6	27,1	31,6	36,1	40,7	45,2	+28
+3	6,3	6,7	7,1	7,5	7,9	8,3	12,5	16,7	20,9	25,0	29,2	33,4	37,6	41,7	+27
+4	5,7	6,1	6,5	6,9	7,3	7,6	11,5	15,3	19,1	22,9	26,8	30,6	34,4	38,2	+26
+5	5,2	5,6	5,9	6,3	6,6	7,0	10,4	13,9	17,4	20,9	24,3	27,8	31,3	34,8	+25
+6	4,7	5,0	5,3	5,6	5,9	6,3	9,4	12,5	15,6	18,8	21,9	25,0	28,2	31,3	+24
+7	4,2	4,4	4,7	5,0	5,3	5,6	8,8	11,1	13,9	16,7	19,5	22,2	25,0	27,8	+23
+8	3,6	3,9	4,1	4,4	4,6	4,9	7,8	9,7	12,2	14,6	17,0	19,5	21,9	24,3	+22
+9	3,1	3,3	3,5	3,8	4,0	4,2	6,8	8,3	10,4	12,5	14,6	16,7	18,8	20,9	+21
+10	2,6	2,8	3,0	3,1	3,3	3,5	5,2	7,0	8,7	10,4	12,2	13,9	15,6	17,4	+20
+11	2,1	2,2	2,4	2,5	2,6	2,8	4,2	5,6	7,0	8,3	9,7	11,1	12,5	13,9	+19
+12	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	3,1	4,2	5,2	6,3	7,3	8,3	9,4	10,4	+18
+13	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	+17
+14	0,5	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,4	2,8	3,1	3,5	+16
+15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+15

Las alturas de las gradas de alturas barométricas dependen, como se desprende de la fórmula (16), de la presión media B_m y temperatura media t_m , pudiendo sacar los valores de tablas especiales, calculadas por Jordan, cuyo uso se ilustra por medio de un ejemplo práctico en base al adjunto extracto de aquéllas, que llamaremos **Tabla de Jordan II**.

Sean: $\frac{B_1 + B_2}{2} = 736,6 \text{ mm}$ $\frac{t_1 + t_2}{2} = 15^\circ$ $B_1 - B_2 = 32,3 \text{ mm}$

Tablas de Jordan II: Gradadas de alturas barométricas.

t_m	Estado barométrico medio en mm										
	760	750	740	730	720	710	700	690	680	670	660
o	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
-10	10,13	10,27	10,40	10,54	10,69	10,85	11,00	11,16	11,32	11,49	11,66
-8	10,21	10,35	10,48	10,62	10,77	10,92	11,09	11,25	11,40	11,58	11,75
-6	10,29	10,42	10,56	10,70	10,85	11,01	11,17	11,33	11,49	11,66	11,84
-4	10,36	10,51	10,64	10,77	10,93	11,09	11,26	11,42	11,58	11,76	11,93
-2	10,44	10,58	10,72	10,86	11,02	11,18	11,34	11,50	11,66	11,84	12,02
0	10,52	10,66	10,80	10,94	11,10	11,26	11,42	11,59	11,75	11,93	12,11
2	10,60	10,74	10,89	11,03	11,19	11,35	11,51	11,68	11,85	12,03	12,21
4	10,69	10,83	10,97	11,12	11,28	11,44	11,60	11,77	11,94	12,13	12,31
6	10,77	10,91	11,06	11,20	11,37	11,53	11,69	11,86	12,04	12,22	12,40
8	10,85	11,00	11,15	11,29	11,46	11,62	11,78	11,96	12,13	12,32	12,50
10	10,94	11,08	11,23	11,38	11,55	11,71	11,87	12,05	12,22	12,41	12,60
12	11,02	11,17	11,32	11,47	11,63	11,80	11,97	12,14	12,32	12,51	12,69
14	11,11	11,25	11,41	11,55	11,72	11,89	12,06	12,23	12,41	12,60	12,79
16	11,19	11,34	11,49	11,64	11,81	11,98	12,15	12,33	12,51	12,70	12,89
18	11,27	11,43	11,58	11,73	11,90	12,07	12,24	12,42	12,60	12,79	12,98
20	11,36	11,51	11,67	11,82	11,99	12,16	12,33	12,51	12,69	12,89	13,08
22	11,44	11,60	11,75	11,90	12,08	12,25	12,42	12,61	12,79	12,99	13,18
24	11,53	11,68	11,84	11,99	12,17	12,34	12,51	12,70	12,88	13,08	13,27
26	11,61	11,77	11,93	12,08	12,26	12,43	12,61	12,79	12,98	13,18	13,37
28	11,70	11,85	12,01	12,17	12,35	12,52	12,70	12,88	13,07	13,27	13,47
30	11,78	11,94	12,10	12,25	12,43	12,61	12,79	12,98	13,16	13,37	13,57
32	11,86	12,02	12,18	12,34	12,52	12,70	12,88	13,07	13,26	13,46	13,67

Entrando a la tabla con los argumentos $B = 736,6$ y $t = 15^\circ$, se sacará el valor 11,50 para la altura de la grada barométrica buscada (la tabla completa da 11,49).

Interpolación por presión (—).

D	mm								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	1	3	4	5	6	8	9	10	12
14	1	3	4	6	7	8	10	11	13
15	2	3	4	6	8	9	10	12	14
16	2	3	5	6	8	10	11	13	14
17	2	3	5	7	8	10	12	14	15
18	2	4	5	7	9	11	13	14	16
19	2	4	6	8	10	11	13	15	17
20	2	4	6	8	10	12	14	16	18
21	2	4	6	8	10	13	15	17	19
22	2	4	7	9	11	13	15	18	20
23	2	5	7	9	12	14	16	18	20
24	2	5	7	10	12	14	17	19	22
25	2	5	8	10	12	15	18	20	22
26	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	3	5	8	11	14	16	19	22	24
28	3	6	8	11	14	17	20	22	25
29	3	6	9	12	14	17	20	23	26

Tablas de Jordan II: Gradadas de alturas barométricas.

t_m	Estado barométrico medio en m.m.										
	650	640	630	620	610	600	590	580	570	560	550
°	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
-10	11,85	12,03	12,22	12,42	12,62	12,83	13,05	13,27	13,51	13,75	14,00
- 8	11,94	12,12	12,32	12,51	12,72	12,93	13,15	13,38	13,62	13,85	14,10
- 6	12,03	12,21	12,41	12,61	12,81	13,03	13,25	13,48	13,72	13,95	14,20
- 4	12,12	12,31	12,50	12,71	12,91	13,12	13,35	13,58	13,82	14,06	14,31
- 2	12,21	12,40	12,60	12,80	13,00	13,22	13,45	13,68	13,93	14,16	14,42
0	12,30	12,49	12,69	12,89	13,10	13,32	13,55	13,78	14,03	14,27	14,53
2	12,40	12,59	12,79	13,00	13,21	13,43	13,66	13,89	14,14	14,38	14,64
4	12,50	12,69	12,89	13,10	13,31	13,54	13,77	14,00	14,25	14,50	14,76
6	12,60	12,79	13,00	13,20	13,42	13,64	13,88	14,11	14,36	14,61	14,87
8	12,69	12,89	13,10	13,31	13,52	13,75	13,98	14,22	14,47	14,73	14,99
10	12,79	12,99	13,20	13,41	13,63	13,86	14,09	14,34	14,59	14,84	15,11
12	12,89	13,09	13,30	13,51	13,73	13,96	14,20	14,45	14,70	14,96	15,23
14	12,99	13,19	13,40	13,62	13,84	14,07	14,31	14,56	14,81	15,07	15,35
16	13,09	13,29	13,50	13,72	13,94	14,18	14,42	14,67	14,92	15,19	15,46
18	13,19	13,39	13,61	13,82	14,05	14,28	14,53	14,78	15,04	15,30	15,58
20	13,28	13,49	13,71	13,93	14,15	14,39	14,63	14,89	15,15	15,42	15,70
22	13,38	13,59	13,81	14,03	14,26	14,50	14,74	15,00	15,26	15,53	15,82
24	13,48	13,69	13,91	14,13	14,36	14,60	14,85	15,11	15,37	15,65	15,93
25	13,58	13,79	14,01	14,24	14,47	14,71	14,96	15,22	15,48	15,76	16,05
28	13,68	13,89	14,11	14,34	14,57	14,82	15,07	15,33	15,68	15,97	16,16
30	13,78	13,99	14,22	14,44	14,68	14,92	15,18	15,44	15,71	15,99	16,28

Luego:

Diferencia de nivel $\Delta H = 32,3.11,50 = 371,4$ metros (371,1 m con la tabla completa).

Interpolación por temperatura (+).

D. \ °	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
7	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7
8	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8
9	0	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
10	0	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	7	8	8	8	9	10
11	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
12	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11

13. TABLA GRAFICA PARA EL CALCULO DE LA ALTURA DE GRADA BAROMETRICA

Cuando no se disponga de las tablas numéricas anteriormente citadas, se podrá valerse de la tabla gráfica de figura 10, cuya disposición y uso pasamos a explicar, en base al ejemplo tratado en el número anterior

Estado barométrico medio en mm

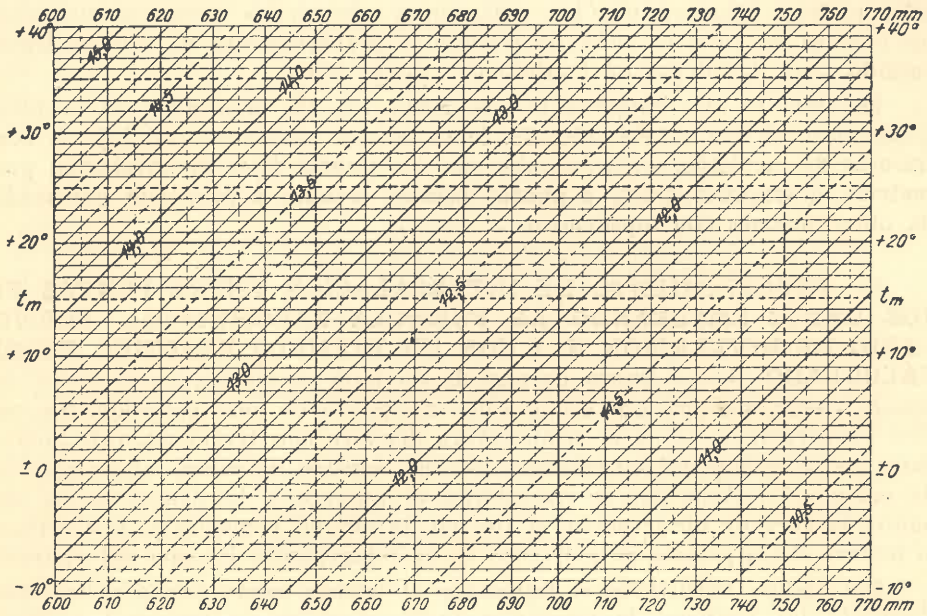


Fig. 10.

Tabla para el cálculo de la altura de gradas barométricas.

Las líneas **verticales** significan presiones medias, B_m o A_m , las **horizontales**, temperaturas medias, t_m , las **oblicuas**, alturas de gradas barométricas Δh . En el punto de intersección de la línea vertical correspondiente al valor $B_m = 736,6$, por ejemplo, con la horizontal $t_m = 15^\circ$, se pasará a la oblicua $\Delta h = 11,50$ buscada.

Ejecución de la nivelación barométrica. Precisión y compensación.

14. **OBSERVACIONES PREVIAS SOBRE LAS DOS PRINCIPALES SUPOSICIONES FUNDAMENTALES: PARALELISMO DE LAS CAPAS DE IGUAL PRESION ATMOSFERICA A LA SUPERFICIE DEL NIVEL DEL MAR, Y VARIACION REGULAR DE LA TEMPERATURA ENTRE PUNTOS VECINOS. CONTRALORES DE MEDICION.** Como en la ejecución práctica de la nivelación barométrica entre dos puntos vecinos P_1 y P_2 , mediante la medición de las presiones atmosféricas A_1 y A_2 y las temperaturas t_1 y t_2 , estos dos puntos generalmente no están situados verticalmente uno arriba del otro, y como la simultaneidad de las mediciones muchas veces tampoco es posible realizar, deberán las observaciones, por lo menos, disponerse de tal modo que las variaciones ocurridas en la

presión y temperatura, en el intervalo de tiempo transcurrido entre las mediciones aisladas, puedan constatarse y tenerse en cuenta, debiendo, además, poderse suponer que las variaciones observadas sean esencialmente las mismas en toda la zona de trabajo y **proporcionales al tiempo transcurrido** (ver definición de "gradiente", pág. 204).

De todo lo que antecede se desprende que los resultados de la nivelación barométrica sólo merecerán fe si pueden verificarse en base a **controladores de medición**, suministrados por los **puntos fijos de nivelación geométrica, o trigonométrica, o puntos básicos creados a propósito por medio de observaciones con hipsómetro.**

15. PROCEDIMIENTO DE INTERCALACION ENTRE PUNTOS FIJOS DADOS EMPLEANDO LA FORMULA BAROMETRICA. FORMULARIO DE NIVELACION N° 8 CON UN EJEMPLO PRACTICO EN ÉL CALCULADO. Como **punto de partida** de toda nivelación barométrica, se deberá elegir, siempre que sea posible, un punto de cota conocida. Se medirá primeramente en él la temperatura del aire con termómetro de honda, dato que se consignará en columna (4) del registro de campo (ver: planilla de cálculo 1). Asimismo se inscribirán el número y la denominación del punto, la hora de observación, el tiempo, la altitud conocida y, por último, la lectura de la presión y la lectura de la temperatura interna del aparato.

Habiéndose trasladado el topógrafo al primer nuevo punto a levantar, efectuará las lecturas de presión y temperatura que correspondan. Pero, en base a estos datos no será posible todavía determinar la altitud del nuevo punto, pudiendo ella ser calculada recién después de haber llegado el operador al **punto de cierre de un tiro poligonal.**

En todos los puntos sucesivos, 2, 3, 4,, se procederá análogamente hasta llegar en lo posible antes de 1½ ó 2 horas o al punto fijo de cierre de tiro o nuevamente al punto de partida. No es conveniente aumentar mucho dicho intervalo de observación, por temor a las posibles variaciones irregulares en el estado de la atmósfera, que inutilizarían las operaciones, tratándose siempre de cerrar cuanto antes las observaciones barométricas en punto fijo.

En base a la **tabla de gradas de alturas barométricas**, o por medio del **gráfico** de figura 10, determinase el valor Δh , anotándolo en columna (11) del formulario. Multiplicando Δh por la diferencia de presión ΔA de columna (8), obtiéndose el producto ΔH a consignar en columna (12).

Sumando el primero de estos desniveles al valor de la cota de partida subrayada de columna (15) y así sucesivamente con todos los demás valores ΔH , se obtendrán las llamadas **altitudes de cálculo H'** de todos los nuevos puntos intercalados. El valor H' del punto terminal concordaría con la cota previamente conocida si no se hubiera producido variación alguna en la presión atmosférica durante la ejecución del trabajo. Pero, como este supuesto generalmente no se realiza, se obtendrá, para la cota del punto de cierre, otro valor distinto. Cuando no se haya excedido del tiempo previamente fijado, puede admitirse generalmente un **cambio regular de dicha presión y repartir**, en consecuencia, **la diferencia revelada proporcionalmente al tiempo transcurrido** desde el principio de las operaciones. En co-

tiempo transcurrido entre las mediciones efectuadas en los puntos **A** y **B**, no sobrepase 2 horas, debiendo sólo agregarse la **corrección por temperatura interna**. La **corrección por graduación** está tácitamente considerada por la interpolación, y para la de **estado** se supone que ella no ha variado en el corto período transcurrido.

Disponiéndose para estas operaciones de un **aneroide compensado**, no sería necesario observar **tampoco la temperatura interna**, limitándose entonces las operaciones a realizar a la medición de la presión en cada punto.

El **ejemplo práctico** colocado en formulario de nivelación N° 9 (planilla de cálculo 2), se ilustra por sí solo, tratándose en él de determinar las altitudes de 3 nuevos puntos, 1, 2 y 3, en base a los puntos fijos **A** y **B** de cotas conocidas.

17. PRECISION DE LA NIVELACION BAROMETRICA Y COMPENSACION DE UN PUNTO NODAL. La precisión de la nivelación barométrica depende esencialmente del trato que se da al instrumento empleado. Numerosas experiencias han demostrado que, no excediendo el desnivel de 200 metros, se puede admitir para una diferencia de nivel determinada con un aneroide **Naudet**, **Bohne** o **Goldschmid** según uno de los dos procedimientos explicados, un error medio que oscila entre $\pm 0,6$ m y ± 2 m.

Para desniveles mayores de 200 metros puede admitirse un error medio de 1% aproximadamente.

En distintas horas del día y diferentes meses del año, se encuentran para un mismo desnivel valores algo distintos debidos a las **variaciones del estado de la atmósfera**, considerándose las horas comprendidas entre las 10 y 16 las más favorables para las operaciones de nivelación barométrica.

Por el **peso de la nivelación barométrica** y la **compensación de un punto nodal** (intersección de varias líneas), ver: "**C. de C.**", pág. 206 y el ejemplo 6, pág. 229, que trata el análogo caso de la nivelación geométrica.

18. MIRADA RETROSPECTIVA SOBRE LAS TRES DISTINTAS CATEGORIAS DE NIVELACIONES RESPECTO A SU PRECISION Y RENDIMIENTO. Echando una mirada retrospectiva sobre las tres clases de nivelaciones tratadas en este capítulo, podemos decir, respecto a la **precisión**, que la máxima es posible realizar mediante la nivelación **geométrica** (errores medios kilométricos de $\pm 0,5$ mm hasta ± 1 cm); le sigue, en el orden, la **trigonométrica** (con error medio de ± 1 dm), siendo la menos precisa la **barométrica** (± 1 m).

Por el **trabajo a realizar**, vale el orden inverso, siendo el **procedimiento barométrico** el más rápido y más cómodo; le sigue el **trigonométrico** y, por último, el **método de la nivelación geométrica**, el más laborioso y más costoso de los tres.

Indice alfabético

(Los números significan páginas; las rayitas (—) sustituyen los términos técnicos impresos en negritas que figuran en este índice)

A

Ajuste del aneroide Naudet 207.
 Altitud, definición 84, su influencia sobre la presión barométrica 202.
 Altura absoluta, definición 84.
 Altura relativa, definición 84.
 Altura de la grada barométrica, definición 217.
 Aneroide, explicación del término 204.
 Aneroide, principio 204, descripción del — Naudet 205, corrección y ajuste del — Naudet 207, — compensado Bohne 206, descripción y uso del — Goldschmid 207, uso práctico del — Goldschmid 208.
 Angulo inscripto, su importancia en la solución del problema de la carta 38.
 Angulo de altura 187.
 Angulo de giro, concepto 75.
 Anteojo biaxial, principales características 111.
 Apoyos de mira de nivelación 140.
 Arco capaz, su importancia en la solución del problema de la carta 38.

B

Babinet, fórmula de — 215.
 Barómetro, explicación del término 202.
 Barómetro aneroide, primer constructor 204.
 Base de triangulación, medición 5, su reducción al horizonte 6.
 Biaxial, anteojo — 111.
 Bisección hacia adelante 8.
 Bisección hacia atrás o problema de la carta 12.
 Bisección lateral 8.
 Bohne, aneroide — 206.
 Breithaupt, nivel Seibt — original 108, nivel Seibt-Breithaupt modernizado 110.
 Características de un instrumento destinado a la nivelación de precisión 155, — de los principales métodos de nivelación de precisión 156, — del método Seibt simplificado 164.

C

Casos favorables para el problema de la carta 18.
 Casos desfavorables para el problema de la carta 18.
 Categorías de puntos fijos altimétricos 92.
 Circunferencia peligrosa en el problema de la carta 18.
 Coeficiente de graduación de un aneroide 209, — de temperatura 209.
 Collins, J., su rol en la solución del problema de la carta 40.
 Comparador de miras 88.
 Compensación de un error de cierre de nivelación 152, — de un error de cierre de triangulación 6, — de un punto nodal de nivelación barométrica 223.
 Complemento decádico, su empleo en el cálculo de la nivelación geométrica 159.
 Comprobación del paralelismo de las tangentes de un nivel reversible 116.
 Comprobación de medición 43.
 Condición principal que debe satisfacer un instrumento de nivelación 96.
 Condición secundaria de un nivel de anteojo 96.
 Condiciones que debe llenar el nivel de collares 106.
 Condiciones constructivas que debe llenar el teodolito destinado a la medición de verdaderas distancias cenitales 188.
 Constante de temperatura de un aneroide 208, — de graduación de un aneroide 208, — de estado de un aneroide 208, — absoluta de un aneroide 208.
 Contralor de medición 80, 220, — de campo 164.
 Contralor de campo en la nivelación de precisión 158, 159.
 Contralores fundamentales en la nivelación geométrica 154, — locales en la nivelación geométrica 154, — que proporciona el empleo de nuestro formulario de nivelación 102, — que proporciona el método Seibt 164.
 Contraste de mira de nivelación 156.
 Conveniencia de la nivelación de ida y

vuelta 146.
Cooke, nuevo nivel Cooke 125.
Corógrafo o station pointer 39.
Corrección principal de un nivel de anteojo 97, 98, — del nivel Egault 105, — del nivel de collares 107, — del nivel Seibt-Breithaupt 109, — del nivel biaxial "Zeiss I" 113, — del nivel de anteojo con nivel reversible 115, — del nivel de coincidencia 116, — del nivel Zeiss A 123, — del nivel-taquímetro 128.
Corrección de las lecturas de aneroides 208, — por temperatura 208, 211, — por graduación 208, — por estado 208, — del aneroides Naudet 207, — de estado de un hipsómetro 203.
Cota, definición 84, — negativa y — positiva 84.
Criterio sobre el estado de corrección de un nivel de anteojo 98, — general sobre el largo de la visual 148, — sobre la visual más favorable 150.
Cruces de anchos ríos, ejemplos prácticos 168, — resultados de importantes cruces de ríos argentinos 181, tolerancias pertinentes 178.
Cuña, retículo de — 118.
Curvatura terrestre, su efecto en la determinación de alturas 84.

D

Definición de bisección hacia adelante 8, — de intersección hacia adelante 8, de bisección o intersección lateral 8, — de bisección o intersección hacia atrás (problema de la carta) 12.
Definición de superficie de nivel 83, — de geoide 83, — de altura absoluta 84, — de altura relativa 84, — de diferencia de nivel o desnivel 84, — de superficie o plano de comparación 84, — de nivelación geométrica 87, — de nivelación trigonométrica 87, — de nivelación barométrica 88, — de la medida de la presión atmosférica 202, — de la nivelación de alta precisión 88, — de la nivelación de precisión 89, — de la nivelación de segundo orden 89, — de la nivelación de tercer orden 89, — de la nivelación de cuarto orden 88, — de golpe de nivel atrás 94, — de golpe de nivel adelante 94, — de punto de cambio 95, — de perfil de nivelación 181.
Densificación de la red de puntos 3.

Dependencia de la precisión de la señalización y centración de puntos de la longitud de la visual 5.
Desnivel, definición 84.
Diferencia de nivel, definición 84.
Diferencia de refracción terrestre 94.
Discrepancia de cierre Δ en la nivelación geométrica, definición 146.
Distancia cenital, definición 187.
División corrida de círculo de teodolito 189.
División por cuadrantes 191.
Doble nonio, sus ventajas e inconvenientes 191.

E

Ecuación de aneroides 212.
Efecto de la curvatura terrestre 85.
Efecto del hundimiento del instrumento 145, su eliminación 145.
Efecto del hundimiento de los puntos de apoyo 144.
Ejemplos prácticos, ver Formularios.
Ejes de un nivel de anteojo 96.
Elección de una base de triangulación 5.
Eliminación del error sistemático Δ 146, — del error de convergencia de un nivel reversible 115.
Elipsoide de revolución de Hayford, sus dimensiones 87.
Error de cruce de un nivel 100.
Error de convergencia de un nivel reversible, tres medios para eliminarlo 115.
Errores de lectura de mira más frecuentes 142.
Errores de la nivelación geométrica 144.
Error de nivelación barométrica 223.
Error de índice, definición 196, su corrección 196.
Error de cenit 196.
Error de cierre Δ , su definición 152, su utilización para el cálculo de precisión de la nivelación geométrica 153.
Error relativo lineal 80.
Error medio angular 80.
Error medio de redondeo 148.
Error medio del promedio M_x en la nivelación geométrica 151.
Error medio kilométrico m_0 , su determinación 150.

F

Factor de proporcionalidad, su empleo 75.
Factor de aumento 75.
Favorable, caso — en la solución del problema de la carta 19.

- Fennel, nivel de precisión — 124, nivel-taquímetro de — 129.
- Ferrero, fórmula de — 80.
- Figura fingida reducida y semejante, su utilización 55, 73.
- Fórmula internacional de Ferrero 80.
- Fórmulas para la bisección hacia adelante 11, 13.
- Fórmula de Kaestner para el problema de la carta 15.
- Fórmulas para la solución del problema de la carta con punto de Collins 20.
- Fórmulas para el problema de Hansen 42.
- Fórmula barométrica de Jordan (completa) 213, (simplificada) 214.
- Fórmula barométrica de Babinet 215.
- Fórmula general relativa a la nivelación geométrica 95.
- Formularios trigonométricos con ejemplos prácticos en ellos calculados.**
- Los formularios trigonométricos de números 1 a 5 y 7 se encuentran en el tomo II de este compendio.
- Form. trig. 6: coordenadas de puntos poligonales 65, 69, 76, 77, 78, 79.
- Form. trig. 8: bisección hacia adelante 11.
- Form. trig. 9: ídem para la máquina 13.
- Form. trig. 10: problema de la carta con ángulo auxiliar μ 17.
- Form trig 11: solución con punto auxiliar de Collins (cálculo logarítmico) 25, 26, 27, 52, 53, 60, 61, 67 y 68.
- Form. trig. 12: solución con punto auxiliar de Collius, para la máquina 29.
- Form. trig. 13: problema de la carta, solución con la ctg 31.
- Form. trig. 14: problema de la carta, solución especial para la máquina 37.
- Form. trig. 15: problema de Hansen con ángulo auxiliar μ 50/51.
- Form. trig. 16: triangulación de enlace 74.
- Form. trig. 17: ángulos verticales, división corrida derecha-izquierda 190.
- Form. trig. 18: ángulos verticales, división corrida izquierda-derecha 191.
- Form. trig. 19: ángulos verticales, división por cuadrantes 192.
- Form. trig. 20: ángulos verticales, división por cuadrantes (sistema inglés) 193.
- Formulario geodésico 1: cálculo de acimut y distancia estando dadas las coordenadas geográficas 48.
- Formularios nivelíticos** (con ejemplos prácticos en ellos calculados) se hallan todos en este primer volumen del tomo III, a saber:
- Form. niv. 1: para nivelación de tercer orden 102, 103.
- Form. niv. 2: para nivelación de precisión (método Se.) 167.
- Form. niv. 3: para nivelación de precisión (con traslación paralelo de la visual horizontal) 169, 172.
- Form. niv. 4: para nivelación de perfiles 185.
- Form. niv. 5: para nivelación de precisión (se supone el uso de una mira centimetrada) 161.
- Form. niv. 6: para nivelación de precisión (con leve inclinación de la visual) 170-171.
- Form. niv. 7: para nivelación de precisión (cruces de anchos ríos) 176, 177.
- Form. niv. 8 (niv. bar. 1): 221.
- Form. niv. 9 (niv. bar. 2): 222.

G

- Gauss, C. F., su contribución a la solución del problema de la carta 32.
- Geoide, definición 83.
- Goldschmid, aneroide de — 207.
- Golpe de nivel atrás 94, — adelante 94.
- Grada de altura barométrica 216.
- Gradiente, definición 204.
- Graduación de círculo vertical 189, — lateral 189, frontal 189, — corrida 189, — por cuadrantes 191.
- Gravedad, su influencia sobre la presión atmosférica 202.

H

- Hansen, problema de — 41.
- Hayford, elipsoide de revolución de — 84.
- Hipsómetro, principio del — 203.
- Holostérico, barómetro —, explicación del término 207.
- Horizontal verdadera, definición 85.
- Horizontal aparente o geométrica 85.
- Horizontal óptica 86.
- Horizontal principal de un perfil longitudinal 182.
- Horizontal auxiliar de un perfil longitudinal 182.
- Horizonte de aguas bajas (cero del mareógrafo del Riachuelo) adoptado por el Ministerio de Obras Públicas 83.
- Horizonte hipsométrico de la República Argentina, su definición 83.

I

- Inconveniente del anteojo biaxial 111, — de las miras de enchufe 137, — del doble nonio 191.

Influencia de la gravedad, latitud y altura sobre la presión atmosférica 202, — de la curvatura terrestre 85, — de la refracción terrestre 86, — de la diferencia de refracción terrestre 94.
Instituto Geográfico Militar Argentino, categorías de puntos fijos altimétricos 90, — tolerancias adoptadas 99, 154, — métodos de nivelación de precisión empleados 164, 169, normas adoptadas para sus trabajos de nivelación 89.
Intersección hacia adelante 8, — hacia atrás 8, — lateral 8.
Irradiación 138.
Isobárica, línea —, explicación del término 204.

J

Jordan, fórmula barométrica de — 213.

K

Kaestner, fórmula de — para la solución del problema de la carta 15.
Kern, nivel Kern I 96, nivel-taquímetro 127, nivel de precisión de construcción antigua 106, — de precisión de construcción moderna 119, nivel "NK 3" 124, teodolito universal de agrimensor, su evolución constructiva en los últimos 10 años 195.

L

Largo de la visual de nivelación geométrica 148.
Lecturas de mira de nivelación, errores que se cometen 142.
Ley fundamental que rige la propagación del error en la nivelación geométrica 147.
Líneas isobáricas 204.
Longitud de la visual de nivelación 148.

M

Marcación natural de puntos trigonométricos 4, — artificial 4, — de los puntos fijos altimétricos 90, 91, — de los puntos hectómetros en perfiles de nivelación 183, — de los puntos intermedios 183, — de los puntos fijos provisionales 90, — de los puntos de cambio 140.
Marcas de los puntos fijos altimétricos 90, 91.
Métodos de nivelación de precisión, primer método 156, ejemplo práctico 161, segundo método (Seibt) 157, ejemplo práctico 167, tercer método 157, ejemplo práctico 169, cuarto método 157,

ejemplo práctico 170-171, ejemplo de nivelación de cruce de ancho río 176, 177.

Ministerio de Obras Públicas de la Nación Argentina, método de nivelación de precisión adoptado 118, 169, resultado de un importante cruce de río 181.
Monografías de puntos fijos altimétricos 92.

N

Nivel medio del mar 83.
Nivel de anteojo Kern I 96, — Zeiss D 100, — Wild I 101, Egault 104, — de precisión (construcción antigua) Kern 106, ídem de construcción moderna Kern III 119, — de precisión Seibt-Breithaupt 108, 110, — (biaxial) Zeiss I 112, — Zeiss B 115, — Wild II 116, — de precisión Wild III 121, — de precisión Zeiss A 122, — "Nuevo nivel Cooke" 125, — "Nuevo nivel Kern" (NK3) 124.
Nivel-taquímetro Kern 127, — Fennel 129, — Zeiss 130.
Nivel de soporte 194.
Nivel testigo de los nonios verticales 194.
Nivelación, definición 87, — de puntos 89, — de líneas 89, — de superficies 89.
Nivelación geométrica, definición 87, — barométrica, definición 88, — trigonométrica, definición 87, — de precisión, definición 88, — de segundo orden 88, — de tercer orden 88, — de cuarto orden 88.
Nivelación simple 93, — compuesta 95, — desde el medio y un extremo 98.
Nivelación desde el medio, importancia del procedimiento 93, 201.
Nivelación de ida y vuelta, su eficacia para la eliminación de los efectos de los hundimientos del instrumento y los apoyos de mira 158, 159.
Nivelación recíproca y simultánea, 170, tolerancias 178, resultados de trabajos prácticos realizados 181.
Nivelación de precisión, primer método 161, — segundo método (Seibt) 167, — tercer método 169, cuarto método 170 y 171, — cruce de río 176 y 177.

O

Orden de las operaciones de nivelación de precisión 158.

P

Paralaje, su eliminación 97.
Paso muerto en el aneroides 206.

Pendiente, distintas formas de indicarla 187.
 Perfil de nivelación 181, su traza 182, — longitudinal 182, — transversal 186, — natural 182.
 Peso de la nivelación geométrica 147.
 Placa de vidrio de caras planas y paralelas 117.
 Plano de comparación 84.
 Poligonal en sistema local 66, — en sistema general 70.
 Polígono de nivelación 154.
 Pothot, problema de la carta 12.
 Precisión de la vertical 141, — de las lecturas de mira 148, — de la nivelación geométrica 152, — de la nivelación técnica 151, — de la nivelación urbana 151, — de la nivelación trigonométrica 201, — de la nivelación barométrica 204, 223.
 Presión atmosférica, su medida 201.
 Principio de la nivelación geométrica 93, — del hipsómetro 203, — del aneroides de Naudet 204, — del aneroides de Goldschmid 207.
 Problemas fundamentales de la nivelación trigonométrica 197.
 Problema de la carta 12-41.
 Problema de Hansen 41-58.
 Problema de Marek 59-71.
 Pruebas de medición 70.
 Punto de cambio 95, 182.
 Puntos intermedios 185.
 Puntos fijos trigonométricos naturales 4, — artificiales 4.
 Puntos fijos niveláticos, de primera categoría 92, de segunda categoría 90, 92, de tercera categoría 90, 92, de cuarta categoría 90.
 Puntos fijos provisionales 90, — definitivos 90.

R

Razón de semejanza 57, 75.
 Reconocimiento de la red trigonométrica 5, de la red de puntos fijos altimétricos 91.
 Reducción de las distancias al horizonte 131.
 Refracción terrestre, su influencia 85, coeficiente de — 87, 94.
 Reichenbach, método según — 131, precisión 132.
 Rendimientos comparativos de las distintas clases de nivelaciones 223.
 Restablecimiento de un punto trigonométrico perdido 38.
 Retículo de cuña 118, 123.
 Rumbo recíproco 9.

S

Sapo de nivelación 140.
 Seibt, método de nivelación de precisión según — 163, método simplificado 164, resultados de trabajos efectuados 168.
 Señalación de puntos trigonométricos 4.
 Sistema local de coordenadas 44.
 Snellius, su papel en la solución del problema de la carta 40.
 Superficie de nivel, definición 83.
 Superficie de comparación 84.

T

Teodolito universal de agrimensor 195.
 Teoría del tornillo tangencial 132.
 Termobarómetro o termómetro de ebullición 202.
 Termómetro de ebullición 202.
 Termómetro de hipsómetro 203, — de honda 213.
 Tiro de nivelación 94.
 Tolerancia para la falta de paralelismo del eje de nivel y del eje de colimación de un nivel de anteojo 99, — para la desequidistancia de las miras de nivelación 99, — para el estado de corrección de un nivel de anteojo 99, — para el error de convergencia de un moderno nivel reversible 114, — para las constantes de graduación de miras de precisión 158, — para el error medio kilométrico 154, — para cruces de anchos ríos 178.
 Tornillo tangencial, teoría 132.
 Triangulación independiente 3, — aislada 3.
 Triangulación de enlace 72.

V

Ventajas del doble nonio 191, — del nivel reversible y nivel de coincidencia 115.
 Viento, su acción en las operaciones de nivelación de precisión 141.

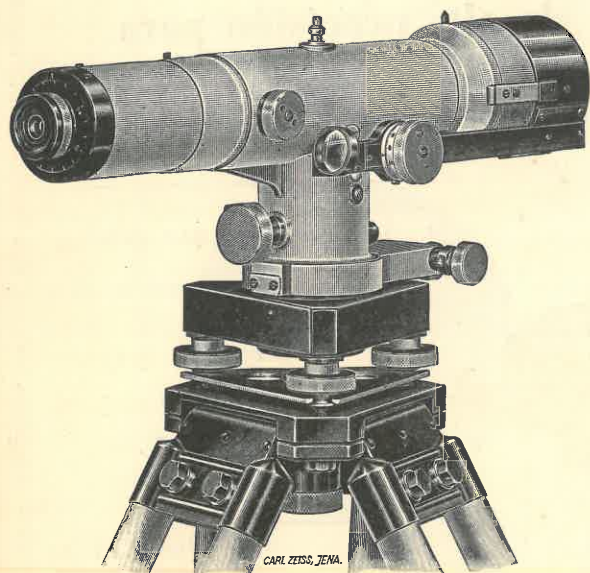
W

Wild, nivel — I 101, nivel — II 116, nivel — III 121.

Z

Zeiss, nivel — D 100, (nivel biaxial) — I 112, nivel — B 115, nivel — A 122, nivel-taquímetro — 130.

ZEISS



**DESTACADOS DATOS
CARACTERISTICOS:**

Abert. objetivo... 55 mm
 Aum. antejo 44
 Constante $k = 100$, $c = 0$
 Sensib. nivel... $10''/2\text{mm}$
 Aum. imag. burb..... 2,5
 Precisión calado $0,2''$
 Visual más corta ... 3,6 m
 Visual más larga
 (lectura con cuña) ~ 80 m
 Largo visual más favorable
 para un rendimiento racional
 en nivelación de
 alta precisión ~ 60 m

Nivel de alta precisión A

El nivel A sirve también
 para *nivelación con visual
 levemente inclinada.*

Lectura:

$13-10 = +3$ interv. de $2''$

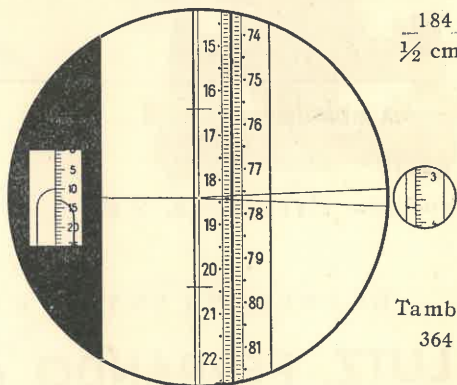


**CARL ZEISS
 ARGENTINA S. A.**

Bernardo de Irigoyen 330
BUENOS AIRES

Lectura mira:

$\frac{184}{\frac{1}{2} \text{ cm.}}$



Tambo
 364

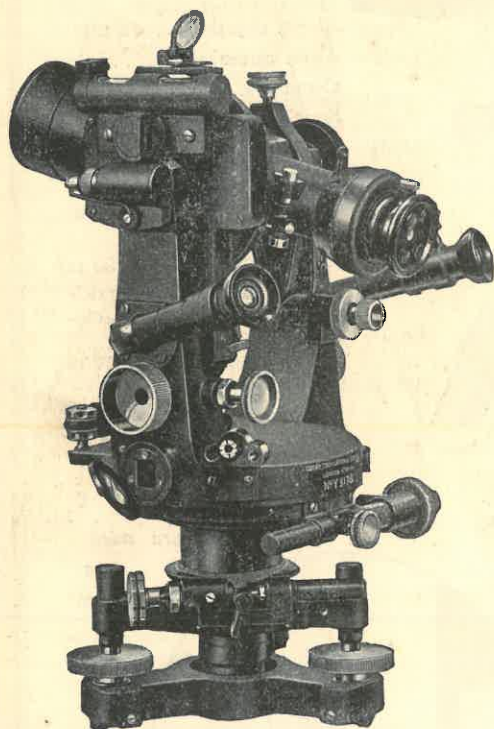
Lectura total:

$184,364 \frac{1}{2} \text{ cm} + 3$ intervalos de $2''$.

COOKE, TROUGHTON & SIMMS LTD.

York - Inglaterra

Instrumentos de alta precisión para
Topografía y Geodesia



Teodolito TAVISTOCK T 65

NUEVOS NIVELES:

S300: *para uso general.*

S400: *de precisión con tornillo de pendiente y brújula.*

S500: *de alta precisión para geodesia.*

NUEVOS

TEODOLITOS:

T63: *para topografía de III^{er} orden.*

T65: *para topografía de III^{er} y II^o orden.*

T68: *para topografía de II^o y I^{er} orden.*

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

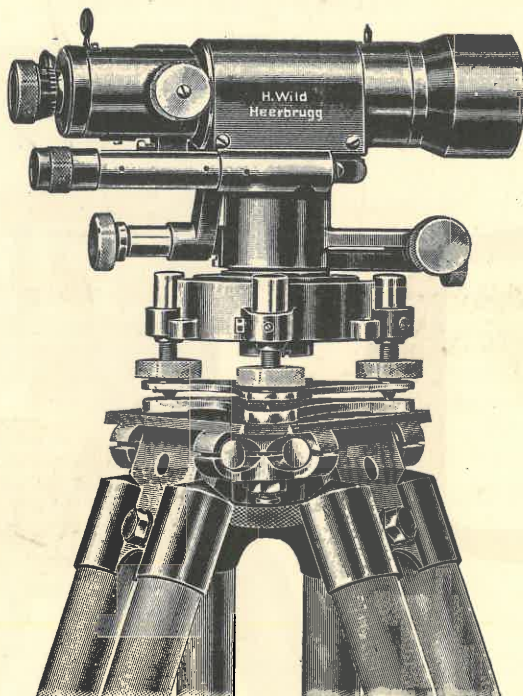
LUTZ, FERRANDO & Cía. S. A.

FLORIDA 240

Con 14 sucursales en la República

H. WILD**HEERBRUGG
SUIZA**

Instrumentos Geodésicos y Topográficos



Nivel Wild II con círculo

Teodolitos Ópticos de 1' a 2/10 de "

Niveles de gran precisión

Instrumentos de fotogrametría

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

CASA OTTO HESS S. A.

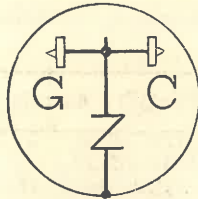
BUENOS AIRES - MAIPU 50

ROSARIO
9 de Julio 118CORDOBA
Córdoba 1057

G. CORADI
ZÜRICH 6 (Suiza) WEINBERGSTRASSE 49
Fundada en 1880

Planímetros

Pantógrafos

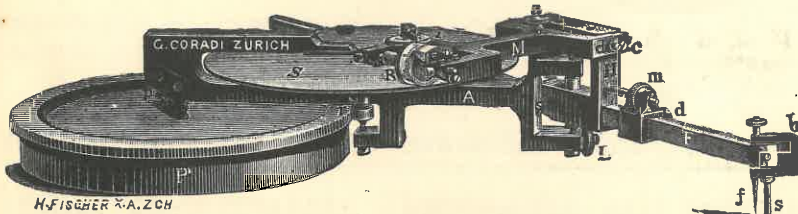
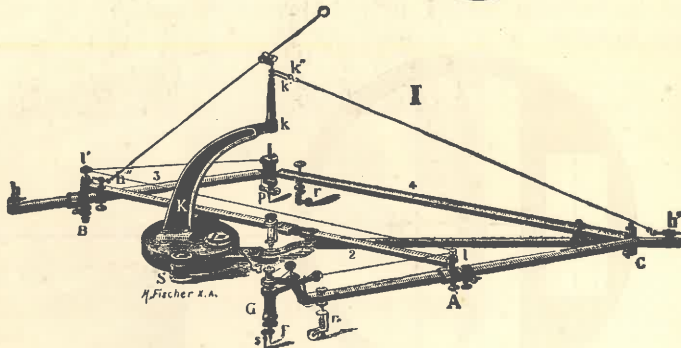


Coordinatógrafos

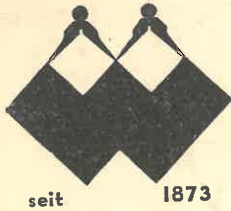
Planímetro polar (con lupa)



Pantógrafo
de
precisión



Planímetro de
precisión
a disco



Gebr. Wichmann

Útiles de dibujo, instrumentos de Agrimensura, papeles técnicos, instalaciones de reproducción.

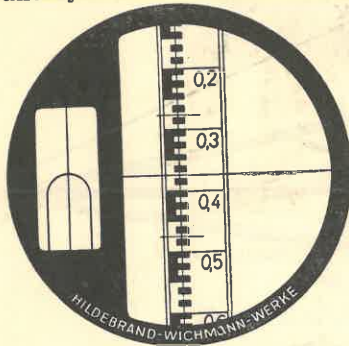
Berlin NW 7, Marienstr. 19-20 Dirección Telegráfica: PLANIMEETER, BERLIN

Instrumentos Geodésicos Para todo trabajo de Agrimensura
Teodolitos, Taquímetros, Niveles, Brújulas, etc.

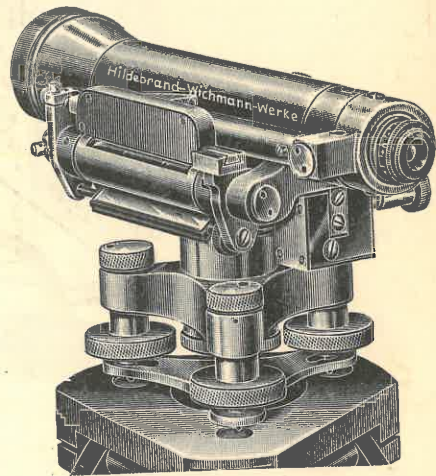
Para Oficinas Técnicas: Planímetros y otros aparatos para cálculo de superficies, Pantógrafos de precisión, Cajas de compases, Reglas de cálculo.

Papeles Técnicos: Chapas para planos originales de toda clase, Papeles transparentes, Papel-tela y Papeles Heliográficos.

Nivel del anteojo N°. 0431. Con lente de enfoque interior, tornillo de inclinación, observación del centrado de la burbuja en el campo visual del anteojo.



Campo visual en el N°. 0431. Se efectúa simultáneamente la centración del nivel y la lectura del hilo nivelador.



Longitud del anteojo	240 mm.
Abertura del objetivo	40 „
Aumento	31

Solicite envío gratuito del nuevo **Catálogo Wichmann**

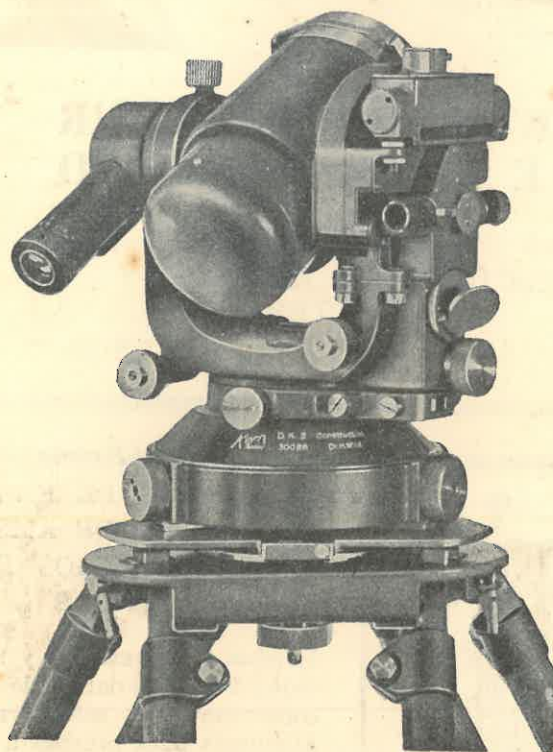
INSTRUMENTOS PARA AGRIMENSURA / APARATOS PARA DIBUJO

KERN & Cía. S. A.

AARAU (Suiza)

*Casa fundada
en 1819*

Kern
AARAU
(SUIZA)



Teodolito de triangulación DK 3

($\frac{1}{3}$ del tamaño natural)

Abertura libre del objetivo... 75 mm	Lectura directa.....	1"
Aumento del antejo 30	» por estima.....	0,1"
Claridad del antejo 6,25		

REPRESENTANTES:

A. Grimoldi, S. A.,

Florida 118,

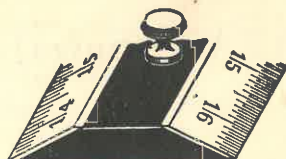
Buenos Aires

SIEGRIST & Cía. S. A.



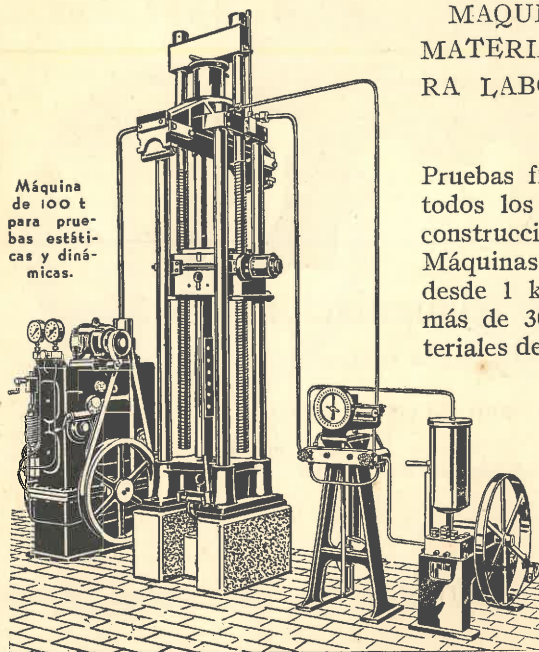
FUNDADA EN 1876

STEIN a/Rhein (Suiza)



ARTICULOS DE MEDIR DE ALTA CALIDAD

MIRAS DE NIVELACION, ESCALAS,
ESCUADRAS, REGLAS "T",
PISTOLETES PARA
DIBUJANTES e INGENIEROS



Máquina
de 100 t
para prue-
bas estáti-
cas y diná-
micas.

MAQUINAS DE ENSAYO DE MATERIALES DE AMSLER PA- RA LABORATORIOS E INDUS- TRIAS

Pruebas físicas exactas y seguras de todos los materiales, de partes de construcciones y soldaduras.

Máquinas para pruebas a la tracción desde 1 kg hasta 750 toneladas con más de 30 diversas muestras de materiales de construcción, así como para la mayor parte de los aparatos auxiliares requeridos para las pruebas de materiales.

**Instrumentos de preci-
sión**, como planímetros,
integradores, instrumen-
tos hidrométricos.

ALFRED J. AMSLER & Co.
SCHAFFHAUSEN (Suiza)

