

104
117



JOSE R. ZABALETA
AGRIMENSOR - M. 471
LA ALFAM 408 - TARDIL

TRATADO DEL AGRIMENSOR

PRIMER TOMO

PARTE TÉCNICA

=

Requiere un buen mapa

REPÚBLICA ARGENTINA

TRATADO
DE
AGRIMENSURA

TEÓRICO PRÁCTICO Y LEGAL

SEGÚN PROGRAMAS Y TEXTOS OFICIALES

POR

CARLOS DE CHAPEAUROUGE

INGENIERO



BUENOS AIRES

JUAN SCHÜRER-STOLLE, EDITOR

248 - CALLE BOLIVAR - 260

1899

Es propiedad

Jorge Zabaleta		
Fe.	22/7/14	CHA
Inv.	00117	

*Á los Señores, Ingeniero Don Rómulo Otamendi y Doctor
Don Ernesto Quesada.*

Al dedicarles esta pequeña obra, cumplo ante todo con un sentimiento de agradecimiento hacia Vds., que por sus buenos consejos y ayuda moral, me han dado siempre ánimo para sostener esta "lucha por la vida" que parece ser el tributo pagado por "el derecho de vivir".

Por otra parte; dedicar su trabajo á dos sinceros amigos, es ponerlo bajo su protección, es nombrarle padrinos. Ellos sabrán disculpar los defectos que contenga y hacer comprender que su autor no ha tenido la pretensión de producir una obra perfecta ni presentarse como escritor y que su ánimo ha sido simplemente hacer un trabajo que cree de alguna utilidad para sus colegas.

En él encontrarán Vds. condensados: todos los estudios que se exigen para la profesión del Agrimensor, todo lo que la práctica de casi cuarenta años ha podido enseñarme y finalmente lo que parece indispensable conocer de nuestra legislación para tener conciencia del cargo que se desempeña como perito y como funcionario público en un asunto judicial.

Deseo que mis esfuerzos no hayan sido inútiles y que el resultado corresponda al mérito de mis distinguidos amigos.

Carlos de Chapeaurouge.

General Sarmiento, Noviembre 1898.

INTRODUCCION

Cuando un Agrimensor se halla en el caso de practicar el deslinde de una fracción de tierra determinada por los términos del título, ó de hacer su división, se encuentra con frecuencia preocupado por la falta de un libro compendiado que contenga: tanto los procedimientos más aceptables para resolver las dificultades y problemas que se presentan en la práctica de la mensura, como las disposiciones legales que le conviene tener presente para el desempeño de su cometido judicial.

Reunir todos estos elementos bajo una faz práctica y verdaderamente útil, es cosa seria; sólo una larga experiencia podrá indicar las mejoras á introducirse en los primeros ensayos que de ello se haga. Sin embargo, como todo requiere un punto de origen, me he propuesto crearlo haciendo ya tiempo que he venido preparando esta obra, la que creo podrá ser de alguna utilidad para mis colegas.

Tres son las divisiones de la obra: la técnica, la práctica y la legal. En la primera y segunda se ha estudiado y detallado la teoría y la práctica, extractando todo lo esencial de las diferentes ramas de estudios que exigen

nuestros programas y analizando los diferentes medios de ejecución aplicables á nuestro país. En la tercera he procurado dar una explicación lógica de los diferentes términos de mayor consecuencia en el desempeño de un cometido pericial, así como de las varias disposiciones dictadas al efecto, apoyándome para ello en todo lo que hasta hoy se ha escrito sobre la materia, y definido por sentencias especiales.

He creído también de la mayor importancia ocuparme de reproducir aquellos artículos del Código Civil que se refieren á los derechos reales que asisten á un propietario, ya en sí mismo, ya ante tercero; como también lo concerniente á los derechos sucesorios y á la partición de herencia. Para terminar esta parte, llamada de Agri-mensura legal, he reproducido las instrucciones generales redactadas por todos los Departamentos Topográficos de las Provincias y de la Capital, así como las disposiciones especiales tomadas sobre la materia; concluyendo con una exposición del proceder y formas que hay que llenar en cada provincia para hacerse cargo del expediente, ejecutar la mensura y efectuar su presentación.

En la parte teórica he procurado ceñirme á las expresiones de algunos textos especialmente escritos para nuestras facultades, conservando las mismas notaciones y símbolos con el fin de mantener la armonía entre las fórmulas estudiadas y su aplicación.

He reunido también una serie de datos y demostraciones diseminadas en diferentes obras, las cuales podrán

ser útiles en muchos casos y podrán servir para aclarar ciertas dudas.

Agregué en un capítulo detallado los procederes del método taquimétrico reconcentrando ó simplificando en cuanto ha sido posible el procedimiento y sus fórmulas.

Acompaño también una serie de tablas de uso frecuente, de manera que en un solo volumen pueda encontrarse lo que se necesite en campaña excepción hecha de la tabla de logaritmos y del almanaque náutico.

Finalmente, á fin de que la presente obra sea también de utilidad en la República Oriental del Uruguay, he reproducido las instrucciones generales que rigen allí y algunas disposiciones indispensables al ejercicio de la profesión.

La primera edición que en forma de ensayo hice de este mismo trabajo, me ha permitido notar sus deficiencias y así atender las indicaciones de algunos colegas que, reconociendo la utilidad de esa obra, han tenido la deferencia de hacérmelas.

Excuso entrar en mayores detalles, lo que casi implicaría un sentimiento vanidoso, y me limito á declarar que el móvil que me ha guiado ha sido utilizar en favor del gremio, al que me honro de pertenecer, los datos y experiencia adquirida en mi larga práctica profesional.

Si el juicio de mis colegas me es favorable, habré así obtenido la mayor recompensa de mis esfuerzos.

EL AUTOR

ALFABETO GRIEGO

A	α	alfa
B	β	beta
T	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	landa
M	μ	mu

N	ν	ni
Ξ	ξ	xi
O	$\omicron$	omicron
Γ	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	epsilon
Φ	φ	fi
X	χ	ji (chi)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

ALGEBRA

Definiciones. El álgebra es la aritmética generalizada mediante la cual pueden obtenerse soluciones generales de todas las proposiciones.

Los números son representados por letras y por medio de transformaciones y signos abreviativos, se llega á establecer una fórmula general en la que, sustituyendo los valores de las letras, se obtiene una *solución*.

Los signos empleados en álgebra son:

$+$ (más) para adicionar

$-$ (menos) » restar

$\times, (.) (.)$ » multiplicar , multiplicado por....

$:\frac{a}{b}, -$ » dividir , a dividido por b.

$=$ » igualdad .. igual á.....

$\sqrt{\quad}$ (radical » extracción de raíz , $\sqrt[n]{a}$, raíz n de a.

a^n (potencia ó exponente) a potencia , a potencia n

Coficiente, es el número que se coloca antes de la letra y significa el número de veces que ésta tiene que ser sumada á sí misma.

$$3a = a + a + a , \text{ ó también } 3a = 3 \times a$$

Exponente es el número que se coloca arriba de la letra, é indica la potencia ó sea el número de veces que la letra debe multiplicarse por ella misma

$$a^3 = a \times a \times a$$

Hay coeficientes enteros, fraccionarios, negativos, positivos, etc., etc.

$2a$, $\frac{3}{4}a$, $-3a$, $3a$
y exponentes de la misma clasificación

$$a^2 , \frac{3}{a^4} a^{-3} , a^3$$

Término algebraico es toda cantidad algebraica no separada por signo alguno, ab^2 , $3ab^n$, $\frac{2}{3}\sqrt[n]{ab}$

El *monomio* es la cantidad de un solo término $3ab^3$

El *binomio* » » » de dos términos, $a^3 + 3ab^2$

El *trinomio* » » » de tres » $a^2 + 3ab^2 - xc$

El *polinomio* es la cantidad de varios términos, $a^2 + 4bc^2 - c^3 + \sqrt{a^2b} - n$

El *grado* de un polinomio es el de su mayor exponente.

Ordenar un polinomio es colocar sus términos por orden, de manera que los exponentes de la misma letra por la cual se ordena el polinomio, vayan decreciendo.

$$5a^3b + 2a^2b^2 + a, \text{ ordenado por la letra } a$$

Términos semejantes son los que están compuestos de las mismas letras con iguales exponentes.

$$+ 5a^2b^2, - a^2b^2, + 2a^2b^2 \dots \text{son términos semejantes}$$

$$+ 5a^2b^2, - a^2b, + 2ab^2 \dots \text{no lo son.}$$

Reducir los términos semejantes, es efectuar con ellos las operaciones indicadas por *sus signos*;

$$\text{Reduciendo ; } 3ab^2 - 4a^2c \times 3a^2c - ab^2 - 5a^2c \times 7bc$$

$$\text{se tendrá : } 2ab^2 - 7a^2c \times 7bc$$

ADICIONAR

Adicionar es reunir dos ó más cantidades en una sola expresión que se llama *suma*; ese resultado varia según la semejanza de los términos y sus signos.

1.º Siendo semejantes:

$$+ 7ab^2mas - 3ab^2 \text{ será ; } 7ab^2 - 3ab^2 = 4ab^2$$

2.º No siendo semejantes los términos, sólo se indica la operación; sumar, $ax, 2cx, - 4dx$ se pondrá

$$ax + 2cx - 4dx.$$

$$ax + 3cx - 2ax + a^3 - ax - 7a^3 = - 2ax + 3cx - 6a^3$$

es la suma y reducción.

SUBSTRACCIÓN

Para sustraer una cantidad de otra, basta cambiar los signos de la primera y efectuar la suma

de $3ax + 2y$, restar $ax - 2y$

$$3ax + 2y - (ax - 2y) = 3ax + 2y - ax + 2y = 2ax + 4y$$

de $5m - b^2 + c$, restar $2m + b - c^2$

$$(5m - b^2 + c) - (2m + b - c^2) = 3m - b^2 + c - 2m - b + c^2 = 3m - b^2 - b + c + c^2$$

$$(2ax) - (mx) = 2ax - mx = (2a - x) m$$

$$(ax + by) - (bxy) = ax + by - bx + y = (a - b) x + (b + 1) y$$

MULTIPLICAR

Para multiplicar deben tenerse presentes cuatro reglas.

1.º la de los signos que afectan las cantidades

$$\left. \begin{array}{l} (+) \times (+) = + \\ (-) \times (-) = + \end{array} \right\} \text{signos iguales dan más}$$

$$\left. \begin{array}{l} (+) \times (-) = - \\ (-) \times (+) = - \end{array} \right\} \text{signos contrarios dan menos.}$$

2.º Los coeficientes se multiplican como números independientes.

3.º Los exponentes de las letras iguales se suman; las letras sin exponente llevan siempre la unidad como tal.

4.º Las letras se escriben á continuación las del multiplicador con las del multiplicando.

$$\begin{array}{r}
 (+ 2ab) \times + a = + 2a^2b \\
 (4a^2m - 3cd^2) \times (3ac^2) = - 12a^3mc^2 - 9ac^3d^2 \\
 \begin{array}{r}
 x^m + y^n \\
 x^m - y^n \\
 \hline
 x^{2m} + x^m y^n \\
 - x^m y^n - y^{2n} \\
 \hline
 x^{2m} \qquad - y^{2n}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 - ab - b^2 \\
 \hline
 a^2 \qquad - b^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Los términos iguales y de signo contrario se eliminan.
La multiplicación se efectúa de izquierda á derecha.

DIVISIÓN

Se efectúa teniendo presente:

1.º que observándose la regla de los signos para el producto del cociente por el divisor, hay también que tener presente que para efectuar la resta debe cambiarse el signo: así $6a^4 \mid \div 2a$ se tendrá como cociente $-3a^3$ pues $-2a \times -3a^3 = + 6a^4$ como producto y para restarlo del dividendo resultará:

$$(+ 6a^4) - (+ 6a^4) = + 6a^4 - 6a^4 = 0.$$

2.º Los coeficientes se dividen como números independientes.

3.º Los exponentes de las letras iguales se restan esto es: los del divisor de los del dividendo.

$$\frac{6a^4b^2}{2a^2b} = + 3a^2b;$$

$$\frac{12a^mb^n}{2a^nb} = 6a^{m-n}b^{p-1}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - a^4 \quad | \quad x - a \\ - x^4 + ax^3 \quad + x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\ \hline + ax^3 - a^4 \\ - ax^3 + a^2x^2 \quad + a^2x^2 - a^4 \\ \hline + a^2x^2 - a^4 \\ - a^2x^2 + a^3x \quad + a^3x - a^4 \\ \hline + a^3x - a^4 \\ - a^3x + a^4 \quad + a^4 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30a^3 - 24a^2 + 5a^2b + 2ab + b^2 \quad | \quad 6a + b \\ 30a^3 - \dots - 5a^2b \quad \\ \hline - 24a^2 \quad + 2ab + b^2 \\ + 24a^2 \quad + 4ab \\ \hline + 6ab + b^2 \\ - 6ab - b^2 \\ \hline \end{array}$$

De las reglas que preceden se desprende: que la *recíproca* de una cantidad es el cociente de la unidad por esa cantidad; así $\frac{1}{x}$ es la recíproca de x .

También se tiene $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

Si $m < n$ se tiene $m + d = n$ ó sea $m = n - d$

luego $\frac{a^m}{a^{m+d}} = a^{m-(m+d)} = a^{-d}$ (exponente negativo);

pero esta expresión puede también escribirse así:

$$\frac{a^m}{a^m \cdot a^d} = \frac{1}{a^d}, \text{ de donde } a^{-d} = \frac{1}{a^d}$$

de la misma manera se tiene $a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$

Si se hace $m = m$, será:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1; \text{ pero también sería: } \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

$$\text{luego } a^0 = 1$$

de esa relación puede deducirse:

$$\frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

$$\text{pero } \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{luego } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

II Fracciones

Las notaciones y operaciones se hacen como en aritmética.

1 ADICIÓN

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a^2}{3} + \frac{a+x^2}{a+x} = \frac{a^3 + a^2x + 3a^2 + 3x^3}{3a+x}$$

2 SUBTRACCIÓN

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}; \quad \frac{3x}{7} - \frac{2x}{9} = \frac{27x - 14x}{63} = \frac{13x}{63}$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an-bm}{mn}; \quad \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 - b^2}$$

Cambiando los signos del 2.º miembro se tendrá :

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}$$

3 MULTIPLICACIÓN

$$\frac{a}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{cd} = \frac{a}{d}; \quad x^2 - y^2 \times \frac{x}{x+y} = \frac{x^3 - xy^2}{x+y}$$

$$\frac{a}{b} \times a^{-1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$$

4 DIVISIÓN

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \quad \frac{9y^3 - 3y}{5} \div \frac{y^2}{5} = \frac{45y^3 - 15y}{5y^2} = \frac{9y - 3}{y}$$

$$\frac{a^{\frac{mn}{m}} c^{\frac{m^2}{m}}}{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{m}{m}}} = a^{\frac{n}{1}} c^{\frac{m}{1}}$$

5 REDUCCIÓN DE FRACCIONES

1.º $\frac{\frac{a}{ax} - 1}{1 - \frac{a}{a+x}}$ multiplicando por $a^2 - x^2$, se tiene

$$\frac{a^2 + ax - a^2 + x^2}{a^2 - x^2 - a^2 + ax} = \frac{ax + x^2}{ax - x^2} = \frac{a+x}{a-x}$$

2.º $\frac{a + \frac{b}{c}}{a + \frac{c}{b}}$ multiplicando por $b c$, $\frac{ach + b^2}{acb + b^2}$

$a^2 - x^2$ y bc son el mínimo común múltiplo de los respectivos denominadores.

III Potencias y Raíces de las cantidades

Para elevar un monomio á una potencia, se elevan á esa los coeficientes y se multiplican por ella los exponentes.

$$(3a^2bc)^2 = 9a^4b^2c^2, \left(\frac{3a}{b^2}\right)^2 = \frac{9a^2}{b^4}, \left(\frac{3a}{b}\right)^3 = \frac{27a^3}{b^3}$$

$$\left(3a^2b\sqrt{c}\right)^m = 3^m a^{2m} b^m \sqrt{c^m}$$

Para elevar un polinomio se efectúa parcialmente la operación ó se emplea la fórmula del binomio de Newton.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a^m)^n &= a^{mn}, \quad (x^m)^n = x^{mn}\end{aligned}$$

En la elevación á potencia se tiene: toda potencia de cantidad positiva es positiva = de cantidad negativa será positiva en los pares y negativa en los impares —

$$\begin{aligned}(+a)^2 &= +a^2, \quad (-a)^2 = +a^2, \quad (+a)^3 = +a^3 \\(-a)^3 &= (-a)^2 \times (-a) = -a^3, \quad (-a)^4 = (-a^3)(-a) = +a^4 \\(-x^n)^5 &= -x^{5n}, \quad (-3x^2)^3 = -27x^6\end{aligned}$$

EXPONENTES NEGATIVOS

Recordando que:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Se tiene: } (a^{-m})^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}; \quad \frac{1}{(a^m)^n} = (a^{-m})^{-n} = a^{+mn}$$

EXTRACCIÓN DE RAÍCES

Procediendo inversamente á la elevación se divide el exponente de la letra por el radical; $\sqrt[n]{a^m}$ Se dice

= raíz m de a potencia n y se pone $\frac{n}{m}$

Si los coeficientes no son raíz perfecta se dejará indicada la operación

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a^m} &= a^{\frac{m}{m}}, \sqrt[n]{a^m b^r} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}} \\ \sqrt[2]{-4a^6 b^2} &= \pm 2a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{2}{2}} = \pm 2a^3 b; \sqrt[n]{\frac{3a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{3a}}{\sqrt[n]{b}}; \\ \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^6}} &= \pm \frac{3a}{2b^2} \\ a^{-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}; \quad a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \\ a^{-\frac{n}{m}} &= \frac{1}{\sqrt[m]{a^{\frac{n}{m}}}}; \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{m}}} \end{aligned}$$

todo exponente fraccionario puede ser sustituido por una expresión radical, y el exponente fraccionario negativo por el radical bajo la unidad.

Se llama *Raíz racional* la que puede extraerse exactamente

$$\text{como ser } \sqrt{9} = 3, \sqrt[3]{27} = 3$$

Se llama *Raíz irracional* la que no puede extraerse exactamente y se compondrá de una parte entera y una fraccionaria con más ó menos aproximación, como $\sqrt{2}$

Se llama *Raíz imaginaria* la que se conoce ser imposible por el signo que lleva la cantidad, como $\sqrt{-a}$, pues ninguna cantidad elevada á una potencia par, puede dar un resultado negativo.

Toda raíz impar de una cantidad racional es real y tiene el mismo signo que la cantidad. $\sqrt[3]{27} = +3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$

Toda raíz par de una cantidad positiva es real y puede ser positiva ó negativa, $\sqrt[2]{a^2} = (+a)(+a) = +a$, ó también; $(-a) \times (-a) = +a^2$

Toda raíz par de una cantidad negativa es imaginaria, pues $(+a)(+a)$ ó $(-a)(-a)$ puede dar $+a^2$.

RAÍZ CUADRADA DE LOS POLINOMIOS

Después de ordenados los términos según las potencias de una de las letras, extraíase la raíz del primer término; réstese de la cantidad dada el cuadrado de la raíz hallada y bájense dos ó más términos para un nuevo dividendo. Divídase el 1.^{er} término de ese dividendo por el duplo de la raíz hallada y escríbase el cociente en la raíz y en el divisor.

Multiplíquese el divisor así encontrado por la última raíz hallada, sustraíase del dividendo el producto y si quedase alguna resta procédase como con el anterior.

Extraer la raíz cuadrada de:

$ \begin{array}{r} 4x^4 - 12ax^3 + 23a^2x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\ \underline{-4x^4} \\ 0 - 12ax^3 + 25a^2x^2 - 24a^3x \\ \quad \underline{+12ax^3 - 9a^2x^2} \\ \quad \quad 0 \quad \quad \quad +16a^2x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\ \quad \quad \quad \underline{-16a^2x^2 + 24a^3x - 16a^4} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2x^2 - 3ax + 4a^2 \text{ Raíz} \\ \hline 4x^2 - 3ax \text{ 1.º divisor} \\ \times -3ax \text{ 2.º cociente} \\ \hline 4x^2 - 6ax \text{ 2.º divisor} \\ \quad \quad \quad +4a^2 \\ \quad \quad \quad \times +4a^2 \end{array} $
---	---

RAÍZ CÚBICA DE LOS POLINOMIOS

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{\begin{array}{r} 8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1 \\ - 8x^6 \\ \hline -36x^5 + 66x^4 - 63x^3 \\ + 36x^5 - 54x^4 + 27x^3 \\ \hline + 12x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 9x + 1 \\ - 12x^4 + 36x^3 - 33x^2 + 9x - 1 \\ \hline 0 \end{array}} & \begin{array}{l} + 2x^2 - 3x + 1 \text{ (Raíz)} \\ \hline 12x^4 - 18x^3 + 9x^2 \\ \hline \quad \times -3x \\ \hline 12x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 9x + 1 \\ \hline \quad \quad \times +1 \end{array}
 \end{array}$$

Regla general á seguirse —

1.^{er} término de la raíz sería $\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$, esta se resta del polinomio el 1.^{er} divisor se forma con 3 veces el cuadrado del 1.^{er} término, sea

$$3(2x^2)^2 = 12x^4; \text{ de manera que } \frac{36x^5}{12x^4} = -3x$$

Segundo término de la Raíz

Para sustituir el verdadero divisor se tiene

$$\begin{array}{l}
 \text{el cuadrado del primero } (2x^2)^2 = 4x^4 \\
 \text{más, 3 veces } 2x^2 \times -3x = -18x^3 \\
 \text{más, cuadrado del segundo } (-3x) = +9x^2
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} 4x^4 - 18x^3 + 9x^2 \\ \quad \times -3x \\ \hline 12x^5 - 18x^4 - 27x^3 \end{array} \right.$$

El tercer término de la raíz se tiene empleando siempre 3 veces el cuadrado del 1.^{er} término $3(4x^4) = 12x^4$; y dividiendo el 1.^{er} miembro del polinomio $\frac{12x^4}{12x^4} = 1$. será el tercer término de la raíz.

Para constituir el 2.^o divisor se tendrá =

3 veces el cuadrado de la suma de los dos primeros términos de la raíz, más 3 veces el producto de los dos

primeros por el tercer término, más el cuadrado del tercer término, sea:

$$3 (2x^2 - 3x)^2 = 12x^4 - 36x^3 + 27x^2$$

$$+ 3 \left[(2x^2 - 3x) (1) \right] = 6x^2 - 9x \quad \text{de donde}$$

$$12x^4 - 36x^3 + 27x^2 + 6x^2 - 9x + (1)^2 = 12x^4 - 36x^3 + 33x^2 - 9x + 1$$

Esta cantidad multiplicada por el tercer término se restará del polinomio ó dividendo.

La marcha á seguirse para formar los divisores una vez deducidos los términos de la raíz y llamando éstos sucesivamente: el 1.º a, el 2.º b, el 3.º c....

$$1^{\text{er.}} \text{ divisor} \dots \dots a^2 \times a$$

$$2.^{\circ} \quad \gg \quad \dots \dots 3 (a)^2 + 3 (a + b) \times b^2$$

$$3^{\text{er.}} \quad \gg \quad \dots \dots 3 (a + b)^2 + 3 \left[(a + b) (c) \right] + c^2$$

CANTIDADES RADICALES

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \text{ radical de } 2.^{\circ} \text{ grado}$$

$$\sqrt[3]{a + b} = (a + b)^{\frac{1}{3}} \text{ radical de } 3^{\text{er.}} \text{ grado}$$

$$3 \sqrt[3]{a + b^2}, \sqrt[3]{a - b^2} \text{ son radicales semejantes.}$$

Reducción separen en dos ó más grupos la cantidad subradical de manera que uno de ellos contenga todas las raíces perfectas y el otro las que no lo son; luego extraíase la raíz del grupo y escribáse el otro bajo el radical.

$$\sqrt{48a^6x^3} = \sqrt{16a^6x^2 \times 3x} = \sqrt{16a^6x^2} \times \sqrt{3x} = 4a^3x \sqrt{3x}$$

$$3 \sqrt[3]{27 a^2 x^3} = 3 \sqrt[3]{9 a^2 x^2 \times 3x} = 3 \times 3ax \sqrt[3]{3x} = 9ax \sqrt[3]{3x}$$

Para reducir una cantidad racional á un radical, elévese aquella á una potencia igual al radical y multiplíquese la cantidad subradical por el nuevo término.

Pasar $a^2 b^3$ bajo un radical de 2.^o grado, será

$$(a^2 b^3)^2 = \sqrt{a^4 b^6}$$

Pasar $a - cx$ bajo un radical de 3.^{er} grado será

$$\sqrt[3]{a^3 - c^3 x^3}$$

Pasar un coeficiente bajo un radical,

$$4a \sqrt{2xy} = \sqrt{16a^2 \times 2xy} = \sqrt{32a^2 xy}$$

$$3x^2 \sqrt[3]{x-y} = \sqrt[3]{27a^6 \times (x-y)} = \sqrt[3]{27x^7 - 27x^6 y}$$

No se altera el valor de un radical ó de una expresión de exponente fraccionario, si se multiplican ó dividen ambos términos del exponente por una misma cantidad.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}, \text{ multiplicando el exponente por } r,$$

$$a^{\frac{nr}{mr}} = \sqrt[mr]{a^{nr}}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}, \text{ multiplicando por } 2; a^{\frac{2 \times 2}{3 \times 2}} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}$$

ó dividiendo por 3.

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3} : 3} = a^{\frac{2}{1}} = a^2$$

Para reducir varios radicales á igual índice

$\sqrt[3]{a^2 c}$, $\sqrt[4]{x^3 y^2}$ se multiplicará el 1.º por 4 y el 2.º por 3, resultando $\sqrt[12]{a^8 c^4}$, $\sqrt[12]{x^9 y^6}$

reducir á igual índice $\sqrt[3]{a x}$, $\sqrt[m]{x y}$, $\sqrt[n]{c x}$,

se tiene $\sqrt[3mn]{a^{\frac{3mn}{3}} x^{\frac{3mn}{3}}}$, $\sqrt[3mn]{x^{\frac{3mn}{m}} y^{\frac{3mn}{m}}}$, $\sqrt[3mn]{c^{\frac{3mn}{n}} x^{\frac{3mn}{n}}}$

ADICIÓN

Si los radicales son iguales se suman los coeficientes.

$$3\sqrt{a b^3} + 5\sqrt{a b^3} = 5 + 3\sqrt{a b^3} = 8\sqrt{a b^3}$$

Si no lo son sólo se indica la suma.

SUSTRACCIÓN

$$\begin{aligned} 5\sqrt{a b^3} - 3\sqrt{a b^3} &= 2\sqrt{a b^3}; 3\sqrt{16 a^4 b} - 3\sqrt{a^2 b} \\ &= 3(4 a^2)\sqrt{b} - 3 a \sqrt{b} = (12 a^2 - 3 a)\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} &= \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN

$$\begin{aligned} a\sqrt{x} \times b\sqrt{x} &= a b \sqrt{x}, \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a b} \\ 3\sqrt{5 a^2 b} \times -5\sqrt{a b} &= -15\sqrt{5 a^3 b^2} \end{aligned}$$

Si no tienen índice semejante se reducen á uno común.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \times \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

$$a \sqrt{x} \times b \sqrt[3]{x^2 y} = a \sqrt[6]{x^3} \times b \sqrt[6]{x^4 y^2} = \\ ab \sqrt[6]{x^7 y^2} = abx \sqrt[6]{xy^2}$$

DIVISIÓN

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{12ac \sqrt{6xc}}{4c \sqrt{2x}} = 3a \sqrt{\frac{6xc}{2x}} = 3a \sqrt{3c} \\ \frac{6a^2 \sqrt{bc}}{3a \sqrt{c}} = 2a \sqrt{\frac{bc}{c}} = 2a \sqrt{b}$$

Si los índices no son iguales, redúzcanse.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt{x y}} = \frac{\sqrt[6]{x^4 y^2}}{\sqrt[6]{x^3 y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^4 y^2}{x^3 y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$$

POTENCIAS

Multiplíquese el índice ó su exponente fraccionario equivalente por la potencia.

$$\left(\sqrt{a} \right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^{\frac{2}{2}} = a \\ \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^r = a^{\frac{m}{n} \times r} = a^{\frac{mr}{n}} = \sqrt[n]{a^{mr}} \\ \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}} = \sqrt[n]{a^{mr}}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2 b^2} \right)^2 = \left[\left(a^2 b^2 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = \left(a^2 b^2 \right)^{\frac{1}{3} \times 2} = \left(a^2 b^2 \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{(a^2 b^2)^2} = \sqrt[3]{a^4 b^4}$$

$$\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = a^{\frac{3}{4} \times 5} = a^{\frac{15}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}$$

EXTRACCIÓN DE RAÍZ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{(ac)^2}} = (ac)^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = (ac)^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{2}{12} = (ac)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{ac}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{5n}}; \quad \sqrt[3]{a^6 b^3 c} = a^2 b \sqrt[3]{c};$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{9}}$$

$$\sqrt[6]{16a^4 x^4} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{16a^4 x^4}} = \sqrt[3]{4a^2 x^2} = ; \quad \sqrt[3]{a^4 \sqrt[4]{a^2 x^3}} =$$

$$= \sqrt[12]{a^6 x^3} = \sqrt[4]{a^2 x} \quad (\text{dividiendo por 3})$$

EXPONENTES FRACCIONARIOS

Del principio de que la raíz de un radical se obtiene dividiendo el exponente de la cantidad por el índice, se tiene

$$\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2 \quad \text{luego} \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$$

y resulta que el exponente fraccionario equivale á un radical y que las operaciones hechas con ellos son idénticas.

$$\text{Suma} \quad a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}; \quad a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[2]{a}$$

$$\text{Resta} \quad a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0; \quad 2a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Multiplicación} \quad a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}} = a^{\frac{5}{5}} = a$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a; \quad 2a^{\frac{1}{3}} \times 3a^{\frac{1}{6}} = 6a^{\frac{6+3}{18}} = 6a^{\frac{9}{18}} = 6a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{6a}$$

División

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}; \quad \frac{a^{1 - \frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{3-2-2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\frac{4a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{3}}} = 2a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2a^{\frac{3-2}{6}} = 2a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2a}$$

$$\text{Potencia} \quad \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{1}{m} \times n} = a^{\frac{n}{m}}; \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = a^{\frac{18}{12}} = a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$$

$$\left(a^2\right)^{\frac{2}{3}} = a^{2 \times \frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\text{Extracción} \quad \sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

ECUACIONES

Dos igualdades unidas por el signo = constituyen una ecuación

$$3 + 4 = 10 - 3$$

$3 + 4$ se llama 1er miembro y $10 - 3$, 2º miembro.

Las ecuaciones son susceptibles de muchas transformaciones, pero siempre debe subsistir la igualdad.

Cuando uno de los términos de la ecuación es desconocido, su resolución permite hallar el valor de esa incógnita.

Raíz de una ecuación, es el valor que asignado á la incógnita satisface la ecuación;

así en : $x + 2x = 15$, si se pone en vez de x su valor 5 se tendrá; $5 + (2 \times 5) = 15$.

5 es la raíz buscada.

Ecuación numérica, es la que se expresa por números.

Ecuación literal, es aquella en la cual las cantidades conocidas se representan por letras

$$3x^3 - x^2 + 2x = 17 \quad ; \quad ax^2 - 3^b x = 5^d$$

(numérica) (literal)

Resolver una ecuación es buscar el valor de la incógnita y todas las soluciones que es posible darle.

La resolución de las ecuaciones está basada en las combinaciones del cálculo algebraico y en los siguientes principios:

1.º No se altera el valor de una ecuación si se aumenta ó disminuye de una misma cantidad los dos miembros,

lo mismo sucede si se multiplica, divide ó se hacen operaciones idénticas en ambos miembros.

2.º Nó se altera el valor de una ecuación si se traslada un término de un miembro á otro cambiándole de signo.

$$x + a = b, \quad x = b - a; \quad -x = -b + a, \quad x + a - b = 0$$

Para efectuar la resolución de una ecuación pueden tenerse presente las siguientes reglas:

1.º Hacer desaparecer todos los denominadores.

2.º Trasladar los términos, esto es, pasar á uno de los miembros, todos los términos que contienen la incógnita; en el otro se mantendrán los términos conocidos.

3.º Efectuar las operaciones indicadas: reducción de términos semejantes, procurando así dar á la incógnita un coeficiente único.

Ejemplo: 1.º desaparecen los denominadores.

$$\frac{a x}{b} + \frac{x}{c} - 2 = 8 - \frac{x}{d}$$

$$a x c d + x b d - 2 b c d = 8 b c d - x b c$$

$$2.º \quad a c d x + b d x + b c x = 8 b c d + 2 b c d = 10 b c d$$

$$3.º \quad (a c d + b d + b c) x = 10 b c d$$

resolución:
$$x = \frac{10 b c d}{a c d + b d + b c}$$

2.º Ejemplo:
$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} = 10$$

$$12 x + 16 x - 18 x = 240$$

$$10 x = 240 \quad ; \quad x = \frac{240}{10} = 24$$

Pueden haber en una ecuación dos ó mas incógnitos, pero en ese caso habrán tantas ecuaciones como incógnitas y la resolución se efectua por diferentes métodos.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN Y ELIMINACIÓN

$$(1) \quad 3x + 2y = 16$$

De la segunda se tiene

$$(2) \quad 5x - 3y = 14 \quad x = \frac{14 + 3y}{5}$$

Sustituyendo ese valor de x en la primera

$$3 \frac{14 + 3y}{5} + 2y = 16, \quad \text{efectuando la operación}$$

$$\frac{42 + 9y}{5} + 2y = 16, \quad \text{multiplicando todo por 5}$$

$$42 + 9y + 10y = 80, \quad \text{pasando los términos conocidos}$$

$$9y + 10y = 80 - 42 \quad \text{sea} \quad 19y = 38$$

$$y = \frac{38}{19} = 2$$

Sustituyendo el valor de $y = 2$ en la ecuación 1

$$3x + 4 = 16 \quad x = \frac{16 - 4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{verificación} \quad 3(4) + 2(2) = 16, \quad 12 + 4 = 16$$

$$5(4) - 3(2) = 14, \quad 20 - 6 = 14$$

2. MÉTODO DE COMPARACIÓN

$$(1) \quad 3x + 2y = 16, \quad \text{de la primera} \quad x = \frac{16 - 2y}{3}$$

$$(2) \quad 5x - 3y = 14 \quad \text{de la segunda} \quad x = \frac{14 + 3y}{5}$$

igualando esos 2 valores de y

$$\frac{16 - 2y}{3} = \frac{14 + 3y}{5} \quad \text{efectuando las operaciones}$$

$$80 - 10y = 42 + 9y, \quad -10y - 9y = 42 - 80, \quad -19y = -38$$

$$\text{cambiando los signos}, \quad 19y = 38$$

$$\text{de donde} \quad y = \frac{38}{19} = 2$$

y sustituyendo ahora el valor hallado $y = 2$
se obtendrá $x = 4$

3. MÉTODO DE ADICIÓN Ó SUSTRACCIÓN

Consiste en igualar el valor de los coeficientes de una incógnita; así

1.º	$3x + 2y = 16$	Multiplicando la 1. ^a por 5 y la 2. ^a por 3 que son los coeficientes de x y restando la 4 de la 3 para lo cual se cambiarán los signos de la 4. ^a
(2)	$5x - 3y = 14$	
(3)	$15x + 10y = 80$	
(4)	$15x - 9y = 42$	
resta	$\begin{array}{r} 0 \\ 19y = 38 \end{array}$	

se tiene así $19y = 38$, $y = \frac{38}{19} = 2$

ECUACIONES CON MAS DE DOS INCÓGNITOS

Con 3 incógnitos deben haber 3 ecuaciones.

Se aplican los mismos métodos tomando sucesivamente dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo: $\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2x + 4y + 4z = 18 \\ (2) \quad 3x + 3y + 2z = 17 \\ (3) \quad 5x + 6y + 5z = 32 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Operando sobre la 1.ª y 2.ª} \\ \text{sea multiplicando la 1.ª por} \\ \text{3 y la 2.ª por 5 y luego res-} \\ \text{tando la 2.ª de la 1.ª} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 6x + 12y + 12z = 54 \\ (6x + 6y + 4z = 34) \\ \hline 0 + 6y + 8z = 20 \end{array} \quad (4)$$

Efectuando las mismas operaciones con la 1.^a y 3.^a resulta

$$\begin{array}{r} 10x + 20y + 20z = 90 \\ - (10x + 12y + 10z = 64) \\ \hline 0 + 8y + 10z = 26 \end{array} \quad (5)$$

Con el resultado 4 y 5 se forma un nuevo sistema de ecuaciones con solo 2 incógnitas, el que puede tratarse de la misma manera.

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} 6y + 8z = 20 \\ 87 + 102 = 26 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 48y + 64z = 160 \\ 487 + 602 = 156 \end{array} \right\} \text{ dif. } \begin{array}{l} 4z = 4 \\ z = 1 \end{array}$$

Sustituyendo el valor de $z = 1$ en la ecuación (4) se deducirá el valor de y ; $6y + 8 = 20$

$$y = \frac{20 - 8}{6} = 2.$$

Sustituyendo ahora el valor de $7 = 2$ y $z = 1$ en la ecuación 1

$$2x + 8 + 4 = 18$$

$$x = \frac{18 - 12}{2} = 3$$

Luego (1) $6 + 8 + 4 = 18$

(2) $9 + 6 + 2 = 17$

(3) $15 + 12 + 5 = 32$

RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE BEZOUT

Este método consiste en multiplicar cada ecuación por una *cantidad indeterminada*, sumar las ecuaciones que resultan, igualar á cero los coeficientes obtenidos y hallar el valor de los coeficientes.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2x + 4y + 4z = 18 \\ (2) \quad 3x + 3y + 2z = 17 \\ (3) \quad 5x + 6y + 5z = 32 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Multiplíquese la primera por } m \\ \text{,, segunda ,, } n \\ \text{,, tercera ,, } r \end{array}$$

$$2mx + 4my + 4mz = 18m$$

se tiene $3nx + 3ny + 2nz = 17n$

$$5rx + 6ry + 5rz = 32r$$

Sumandolos y separando los coeficientes de : x, y, z

$$(2m + 3n + 5r)x + (4m + 3n + 6r)y +$$

$$(4m + 2n + 5r)z = 18m + 17n + 32r$$

igualando á cero los coeficientes de x é y

$$\left. \begin{array}{l} (6) \quad 2m + 3n + 5r = 0 \\ (7) \quad 4m + 3n + 6r = 0 \end{array} \right\} \text{reduciéndolas} \left\{ \begin{array}{l} 8m + 12n + 20r = 0 \\ 8m + 6n + 12r = 0 \\ \hline 6n + 8r = 0 \end{array} \right.$$

de donde $n = \frac{8r}{6}$ y haciendo $n = 8$ y $r = -6$ quedará satisfecha la ecuación, luego introduciendo estos valores de n y r en la ecuación (6) se tendrá

$$2m + 24 - 30 = 0, \quad m = 3$$

conocidos los valores de m , n , r facil es hallar el valor de z en la ecuación que resulta de la suma del grupo (a)

$$m = 3, \quad n = 8, \quad r = -6$$

$$z(4m + 2n + 5r) = 18m + 17n + 32r$$

$$z(12 + 16 - 30) = 54 + 136 - 192$$

$$z = \frac{190 - 192}{28 - 30} = \frac{2}{2} = 1$$

Valor hallado anteriormente para z . Así sucesivamente se hallarán los demás valores para x é y .

V. ECUACIONES DE 2.º GRADO

Las ecuaciones de 2.º grado son aquellas que contienen la incógnita elevada á la 2.^a potencia —

$$3x^2 = 8 \text{ de donde } x = \sqrt[2]{\frac{8}{3}}$$

Estas ecuaciones se dividen en completas é incompletas.

Son *incompletas* las que contienen solamente la incógnita elevada á la 2.^a potencia.

$$2x^2 - 8 - 3x^2 + 72 = 6x^2 - 384, \text{ reducida queda}$$

$$7x^2 = 488, \text{ de donde } x = \sqrt{\frac{488}{7}} = \sqrt{64} = 8$$

Son *completas* las que contienen la incógnita á la 2.^a y 1.^a potencia : $x^2 + 10x = 25$

Toda ecuación completa de 2.^o grado puede ser reducida á la forma general $ax^2 + 6x + c = 0$ (1)

Para resolver la ecuación y buscar otra fórmula general, hágase desaparecer el coeficiente de x^2

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

haciendo $\frac{b}{a} = p$; $\frac{c}{a} = q$, se tiene $x^2 + px + q = 0$ (3)

pero como $(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$, la ecuación ante-

rior puede escribirse $(x + \frac{p}{2})^2 + q = 0 + \frac{p^2}{4}$

de donde $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{y finalmente la fórmula general}$$

$$(4) \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

que dice: la incógnita es igual: á la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario, más ó menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho medio coeficiente, menos el tercer término (este último siempre con signo contrario al que lleva en el primer miembro).

El signo $\pm$ que precede al radical indica que la incógnita x tiene dos valores.

Si se continúa operando con la ecuación 2 aplicándole la fórmula 4, se tendrá

$$\text{de, } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5) \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones 3 casos se presentan:

1.º Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, sea positivo, las dos raíces serán reales.

2.º Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, las dos raíces son iguales y representadas por $-\frac{p}{2}$

3.º Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, sea negativo, las dos raíces serán imaginarias de la forma $\sqrt{-A}$

Ejemplo: $5x^2 + 4x - 204 = 0$

Aplicando la fórmula (5) en lo que: $a=5$, $b=4$, $c=-204$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4080}}{10} = \frac{-4 \pm 64}{10}; \quad x = \frac{60}{10} = 6.,$$

$$x = \frac{-68}{10} = \frac{-34}{5}$$

Las dos raíces son pues: 6 y $-\frac{34}{5}$

Otro $x^2 - 28x + 80 = -115$, sea $x^2 - 28x + 195 = 0$

Se tendrá $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c}$

$$\text{sea, } x = 14 \pm \sqrt{(14)^2 - 195} = 14 \pm \sqrt{1} = 14 \pm 1$$

Así las dos raíces serán

$$x = 14 + 1 = 15$$

$$x = 14 - 1 = 13$$

Otro $x^2 + 11x = 80$, $x = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + 80} = -\frac{11}{2} \pm \frac{21}{2}$

$$\text{de donde } x = \begin{cases} +\frac{10}{2} = +5 \\ -\frac{32}{2} = -16 \end{cases}$$

Las ecuaciones de 2.º grado pueden también resolverse completando el cuadrado del 1.º miembro y observando la siguiente regla = Siendo la ecuación: $ax^2 + bx = c$

Si b es par, multiplíquese la ecuación por a y añádese á ambos miembros el cuadrado de $\frac{b}{2}$

Si b es impar, multiplíquese la ecuación por 4 veces a y súmese á ambos miembros el cuadrado de b

Ejemplo 1.º

$$5x^2 + 4x = 204$$

Multiplíquese por 5 = $a \dots \dots \dots 25x^2 + 20x = 1020$

Añádese $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \dots \dots 25x^2 + 20x + 4 = 1024$

Extrayendo la raíz $\dots \dots \dots x = \frac{32 \pm 2}{5} = \frac{34}{5} \text{ ó } x = +6$

Ejemplo 2.º

$$2x^2 - 5x = 117$$

Multiplíquese por $(4 \times 2 = 8)$. $16x^2 - 40x = 936$

Añádese $(b)^2 = (5)^2 = 25 \dots \dots 16x^2 - 40x + 25 = 961$

Extrayendo la raíz $\dots \dots \dots x = \frac{31 \pm 5}{4} = +9 \text{ ó } -\frac{26}{4}$

Ejemplo 3.º

$$x^2 - 7x = 8$$

Multiplicando por 4 = a $\times$ 4... $4x^2 - 28x = 32$

Sumándole $b^2 = 7^2 = 49$ $4x^2 - 28x + 49 = 32 + 49 = 81$

Estrayendo la raíz..... $2x - 7 = 9$

$$x = \frac{9+7}{2} = +8, \text{ ó } -1$$

Casos compuestos:

1.º Ecuaciones de 1.º y 2.º grado con dos incógnitas.

$$\begin{array}{l|l} (1) \ 5x^2 - 6xy = 8 & \text{de la segunda se deduce} \\ (2) \ 3x - 2y = 6 & x = \frac{6+2y}{3} \end{array}$$

sustituyendo este valor de x en la primera

$$5\left(\frac{6+2y}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{6+2y}{3}\right)y = 8 \ . \ , \text{ efectuando las operaciones se tiene}$$

$$180 + 120y + 20y^2 - (108y + 36y^2) = 72$$

de donde cambiando de signos..... $16y^2 - 12y = 108$

dividiendo por 4..... $4y^2 - 3y = 27$

ahora multiplicando por 4 $\times$ a = 4 $\times$ 4 = 16.... $64y^2 - 48y = 432$

aumentando el cuadrado de b = $3^2 = 9$ $64y^2 - 48y + 9 = 432 + 9 = 441$

Extrayendo la raíz..... $8y - 3 = 21$

de donde $y = \frac{21+3}{8} = +3 \text{ ó } -\frac{9}{4}$

sustituyendo los valores de y en la ecuación (2) . se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 6 = 6 \\ 3x + \frac{9}{4} = 6 \end{array} \right\} \text{ de donde } x = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = 6 - \frac{9}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ECUACIONES BICUADRADAS

D: la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$

haciendo, $x^2 = y$ se tendría, $ay^2 + by + c = 0$.

Luego aplicando las fórmulas conocidas se tendrá para y

$$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

conocido el valor de y se tendrá de $x^2 = y$, $x = \sqrt{y}$.

VI — PROPORCIONES

Puede establecerse la relación numérica de dos cantidades de la misma especie, encontrando cuantas veces la una contiene la otra; esa relación se llama RAZÓN y se espresa

$$a : b \text{ ó } \frac{a}{b}$$

La igualdad de dos razones constituye una *proporción*

así $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ó también $a : b :: c : d$

razón = 4 $\frac{24}{6} = \frac{28}{7}$ » $24 : 6 :: 28 : 7$

De la forma $a : b :: c : d$ se desprenden las siguientes consecuencias:

El producto de los extremos es igual al de los medios

$$a \times d = b \times c \text{ } 24 \times 7 = 28 \times 6$$

se deduce de ahí $a = \frac{b \times c}{d}$, $b = \frac{a d}{c}$

En una proporción establecida, el 1.^{er} y 3.^{er} miembro han de ser de una misma especie, así como el 2.^o y 4.^o también de una misma aunque diferente de la primera.

Si á los términos de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se agrega una unidad á cada uno no se altera el valor y se tiene

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1, \text{ de donde } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ sea } a+b : b :: a+c : d \text{ (1)}$$

igualmente se tendrá

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1, \text{ de donde } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ sea } a-b : b :: a-c : d \text{ (2)}$$

Igualando los valores de 1 y 2

$$a + b : a - b :: c + d : c - d \quad \text{de donde}$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d} \quad (3)$$

forma que encuentra su aplicación en la transformación de ecuaciones, toda vez que sus miembros afectan la forma proporcional.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Se llama así una serie de números que aumentan ó disminuyen constantemente de una misma cantidad llamada *razón*

$$a . b . c . d . e . . . u \quad , \quad \text{sean} \quad 2 . 4 . 6 . 8 . . . u \quad (1)$$

en ella $b = a + r$ (siendo $r =$ la razón) $d = c + r$, $e = d + r$

$$b = a + r \quad , \quad c = b + 2r . . . d = c + 3r \quad , \quad e = d + 4r$$

$$u = a + (n - 1) r \quad (2)$$

siendo n el número de términos y $(n - 1)$ el de los términos que preceden al que se quiere hallar.

De la fórmula 2 se deduce el valor de la razón

$$r = \frac{u - a}{n - 1} \quad (3)$$

Para interpolar 8 números ó términos entre dos cantidades, sean $a = 1$ y $b = 10$, hay que hallar la razón

$$r = \frac{u - a}{(n - 1)} = \frac{10 - 1}{10 - 1} = 1$$

La suma de los términos de una progresión aritmética es igual á la semi-suma de los términos extremos por el número de los términos

$$s = \frac{(a + u) n}{2} \quad \text{sea, suma} = \frac{(10 + 1) 8}{2} = 44$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Se llama así una serie de números en que cada uno es igual al precedente multiplicado ó dividido por la razón r).

$$a : b : c : d : e : \dots u \quad \text{sea} \quad 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : \dots u$$

se tiene $b = a \times r$, $c = b \times r = (ar)r = ar^2$, $d = c \times r$
 $= ar^2 \times r = ar^3$, $u = ar^{(n-1)}$ (1)

un término cualquiera igual al primero por la razón á una potencia igual al número de términos menos uno ($n-1$)

De (1) se deduce

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

de donde para *interpol*ar 8 números entre $1=a$ y $10=b$ la razón será, atendiendo á que $n=8+2=10$

$$r = \sqrt[10-1]{\frac{10}{1}} = \sqrt[9]{10} = 1,31$$

La suma de los términos de una progresión de n términos y razón r , tiene por expresión

$$s = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

« de la progresión $a : b : c : d : \dots u$ se tiene; $b = ar$, $c = br$,

« $d = cr \dots$ sumando esos términos ($b + c + d + e \dots u$)

« $= (+a + b + c + d + e) r$

« En el 1.^{er} miembro no figura a, luego la suma es $(s-a)$
 « en el 2.^o miembro no figura u, luego la suma será $(s-u)r$
 « por lo tanto $s-a=(s-u)r$
 « de donde $s-a+ur=sr$, $ur-a=s(r-1)$ $s=\frac{ur-a}{(r-1)}$
 « pero sustituyendo u por su valor que es $u=ar^{(n-1)}$
 « se tiene $s=\frac{(ar^{n-1} \times r)-a}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

COORDINACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Se llaman coordinaciones ó arreglos los diferentes grupos que con m letras ú objetos se pueden formar tomando cada vez 12 objetos y de modo que cada uno no entre más una vez en cada grupo, y uno de estos se diferencie de los demás en los objetos que lo forman ó en el orden en que están colocados.

Con a. b. c. d. se hacen 12 arreglos de dos letras.

ab, ac, ad, ba, bc, bd; ca, cb, cd; da, db, dc.

El número de arreglos de m objetos tomados de n en n, se expresa A_m^n y la fórmula que lo resuelve es

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots [(m-n)+1]$$

1.^o Con 9 objetos cuantos arreglos pueden hacerse tomando tres de ellos cada vez.

$$A_9^3 = 9 + (9-1) \times [9-n] + 1]$$

$$A_9^3 = 9 + 8 \times 7 = 504$$

Ese número de arreglos es pues igual al producto de los 12 números naturales decrecientes á partir de m.

2. Con 12 objetos tomados por grupos de 5

$$A \frac{n}{m} = A \frac{5}{12} = \underset{1}{12} \times \underset{2}{11} \times \underset{3}{10} \times \underset{4}{9} \times \underset{5}{8} = 95040$$

Permutaciones se llaman los diferentes grupos que pueden formarse con m objetos colocándolos de manera que en cada una entren los m objetos y solo se diferencien en el orden de su colocación.

Con a. b. c. se tiene abc, acb, cab, bac, bca, cba

El número de permutaciones de m objetos es igual al producto de los números enteros consecutivos desde 1 hasta m .

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \dots [(m-m)+1]$$

1.º Con 7 objetos cuantas permutaciones pueden hacerse

$$P_m = m \cdot (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-m+1)$$

$$\text{Sea } P_m = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Combinaciones son los diferentes grupos que pueden formarse con m objetos, de manera que en cada uno no entren más que n objetos y que la diferencia entre ellos sea por un objeto y no en el orden en que esten colocados.

Asi con $m=3$, a.b.c. solo pueden hacerse 3 combinaciones

ab, ac, bc.

El número de combinaciones de n objetos que pueden formarse con m objetos es igual al cociente de dividir

el número de arreglos de m objetos tomados n á n por
el número de permutaciones de n objetos

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}$$

7.º Con 7 factores distintos, cuantas combinaciones de
3 cifras pueden hacerse.

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$$

LOGARITMOS

Los logaritmos representan los esponentes á que es
menester elevar una cantidad base para producir todos
los números imaginables.

Asi, tomando por base $10=a$ se tiene $a^x=y$, si al
esponente x se le da sucesivamente todos los valores
desde 1 se tendrá $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000\dots$

x es pues, el logaritmo de y en el sistema cuya base es a

Esta propiedad puede espresarse también combinando
dos progresiones, una geométrica con 10 por razón y otra
aritmética con 1 por razón; asi

1: 10: 100: 1000: 10.000: 100.000: 1.000.000 números

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. logaritmos

lo que es idéntico á

$$10^0: 10^1: 10^2: 10^3: 10^4: 10^5: 10^6$$

los esponentes siguen la progresión aritmética

Si la expresión $a^x = y$ se multiplica por $a^n = z$ resulta

$$yz = a^{x+n}, \text{ luego: } \log y \times z = x + n$$

y puesto que $x = \log y$, se tiene,

$$\log. (y \times z) = \log. y + \log. z$$

Lo que indica que el producto de dos cantidades es igual á la suma de sus logaritmos.

Asi mismo se tiene

$$\log. \text{ de } \frac{y}{z} = \log. y - \log. z$$

$$\log. \text{ de } y^m = mx = m \log. y$$

$$\log. \sqrt[n]{y} = \frac{\log. y}{n}$$

todo lo que se expresa diciendo

La división de dos cantidades igual á la diferencia de sus logaritmos.

La elevación á potencia de un número, igual á su logaritmo por esa potencia y la extracción de la raíz, á la división del logaritmo por la raíz.

Los dos sistemas de logaritmos más usuales son:

Los *vulgares* ó *de Briggs* cuya base $a = 10$

Los *naturales* ó *Neperianos* cuya base $e = 2.71828$

LOGARITMOS VULGARES

Escribiendo la progresión geométrica creciente y decreciente

$$\frac{1}{100000} : \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000$$

$$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$\text{también } 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

Luego todo número mayor que la unidad tiene por logaritmo un número positivo entero ó fraccionario y, toda cantidad menor que la unidad un número negativo.

Las cantidades comprendidas entre los números de la progresión geométrica sea entre 10 y 100 tendrán por logaritmo una cantidad mayor que 1 y menor que 2 sea una cantidad fraccionaria; la parte entera se llama *característica* y la fraccionaria *mantisa*.

La característica indica así el número de cifras que tiene la cantidad, así la característica 2 corresponde al número 10 que tiene 2 cifras.

Con estas indicaciones se encuentran los siguientes logaritmos: $\log. 68 = 1.832509$; $\log. 680 = 2.832509$; $\log. 6800 = 3.832509$; $\log. 6.80 = 0.832509$; $\log. 0.680 = 9.832509$; $\log. 0.068 = 8.832509$; lo mismo se obtendría para las fracciones

$$\begin{aligned} \log. 0.680 &= \log. \frac{680}{1000}; \text{ sea } \log. 680 = 2.832509 \\ &\quad - \log. 1000 = 3.000000 \\ \hline \log. 0.680 &= 9.832509 \end{aligned}$$

para hacer uso de las tablas, se empieza por escribir la característica y luego buscar en la columna N la cantidad indicada =; enfrente se encuentra el logaritmo ó sea la mantisa. logarit. de 35678, tendrá 4 de característica y será; 4.55239. El desarrollo de la mantisa depende de la tabla que se emplee, las hay que dan desde 5 decimales hasta 10. Toda tabla de logaritmos contiene: la columna de las cantidades de 1 á diez ó cien mil, las columnas que contienen la mantisa y la columna ó simplemente indicación de la diferencia entre dos mantisas consecutivas,

1.º Hallar el logaritmo de 0.0118564 (en tablas de 5 cifras)

$$\text{Log. } 0.0118564 = -2.07372 \quad (100 : 37 :: 64 : x = 23.6)$$

$$+ 23$$

$$-2.07395 \text{ ó también } 8.07395$$

2.º Log. de 3.785.678 = 6.57807 (se ha tomado sólo 3785 ahora)

$$\begin{array}{r} + 7 \\ \hline 6.57814 \end{array}$$

$$1000 : 11 :: 678 : x = 7.46$$

$$3.^\circ \log. \left(\frac{0.042}{0.529} \right)^3 = 3(\log. 0.042 - \log. 0.529) \dots$$

$\log. 0.042 = -2.62325 \dots$	8.62325
$\log. 0.529 = -1.72345 \dots$	9.72345
$-2.89980 \dots$	8.89980
$\times 3$	$\times 3$
$-4.69940 \dots$	6.69940

En efecto, $-2 \times 3 = -6 + 2 = -4$

$$4.^\circ \log. 125^{\frac{1}{3}} = \log. \sqrt[3]{125} = \frac{1}{3} \log. 125 = \frac{2.093910}{3} = 0.698970$$

$$5.^\circ \log. 64^{\frac{3}{2}} = \log. \sqrt[2]{63^3} = \frac{3 \log. 64}{2} = \frac{1.80618 \times 3}{2} = \frac{5.41854}{2} = 2.70927$$

Hallar el número correspondiente á un logaritmo.

1.º log. dado 4.55239— En las tablas que dan 5 números se encuentra 55230 correspondiente á 3567

la diferencia de las tablas es 12, luego 55239

$$- 55230$$

$$12 : 100 :: 9 : x = 75$$

$$\text{dif. } \frac{9}{9}$$

log. 4.55239 corresponde así á 35677,5 pues que se necesitan 5 cifras por la característica 4.

2.º log. dado 2.57814

57807 corresponde á 3785

11 : 100 :: 7 : x = 636, luego 2,57814 corresponde á 378,5636.

3.º log. dado 0.69897 corresponde á 5.00.

4.º log. dado —4.69941 corresponde á 0,0000 5005.

Complemento logaritmico—Para evitar la sustracción de logaritmos se hace uso del complemento logaritmico del sustraendo sea su diferencia á 10 de característica y la resta se trasforma en suma.

$$\log. \text{ de } 560 = 2.74819$$

$$\text{Cap. log. de } 560 = 7.25191$$

$$\log. 560 - \log. 5803 = \log. 560 = 274819 \text{ ó también } \log. 560 = 2.74819$$

$$\begin{array}{r} - \log. 5803 = 3.76440 \\ \hline 8.98379 \\ 0.09633 \end{array} \quad + \text{ C. log. } 5803 = 6.23560$$

$$\begin{array}{r} 8.98379 \\ \hline 0.09633 \end{array}$$

Logaritmos Neperianos ó hiperbólicos tienen por base

$$e = 2.71828, \log. \text{ natural de } 2.71828 = 0.434294$$

y como el logaritmo de la base 10 es 1, la relación entre

$$\text{esos dos logaritmos es } \frac{1}{0.434294} = 2.3025809$$

De ahí para pasar del log. hiperbólico á su log. vulgar

$$\text{se tiene: } \log. x = \frac{\log. \text{ hiper. } x}{2.3025}$$

$$\text{de donde } \log. \text{ hiper. } x = \log. x \times 2.3025$$

$$\text{El módulo se llama, á la relación } \log. e = \frac{1}{2.3025} = 0.434294$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llama así una ecuación en la cual la incógnita viene como exponente, así $a^x = b$

Para su resolución se emplean los logaritmos.

Sea $2^x = 10$, si se tomáran los logaritmos de ambos miembros siendo x el índice de una potencia se tendría

$$x \log. 2 = \log. 10, \text{ luego } x = \frac{\log. 10}{\log. 2}$$

$$\begin{array}{rcl} \log. 10 & = & 1.00000 \\ - \log. 2 & = & -0.30103 \\ \hline \log. x & = & 0.69897 \\ x & = & 3.3219 \end{array}$$

1.^{er} ejemplo $5^{\frac{2}{x}} = \frac{3}{7}$, esta expresión puede escribirse también

$$\sqrt[x]{5^2} = \frac{3}{7} \text{ y también } 5^2 = \frac{3^x}{7^x}$$

Luego aplicando los logaritmos

$$\log. 25 = x \log. 3 - x \log. 7 = x (\log. 3 - \log. 7)$$

$$\text{de donde } x = \frac{\log. 25}{(\log. 3 - \log. 7)}$$

$$\begin{array}{rcl} \log. 25 & \dots\dots\dots & 1.39784 \text{ su log.} = 0.14551 \\ \log. 3 & = & 0.47712 \\ - \log. 7 & = & 0.84510 \\ \hline \text{dif.} & = & -0.36798 \dots\dots\dots \text{ su logaritmo...} = 9.56573 \\ & & \log. x = -0.57978 \\ & & x = -3.800 \end{array}$$

2.^o ejemplo $= r a^x = b^2 c$ aplicando los logaritmos
 $\log. r + x \log. a = 2 \log. b + \log. c$
 de donde $x = \frac{2 \log. b + \log. c - \log. r}{\log. a}$

3.^{er} ejemplo $2^{3^4 x} = 512$, considerando el exponente como una sola

$$\text{cantidad } 3^{4^x} = \frac{\log. 512}{\log. 2} = m, \text{ luego } 4^x = \frac{\log. m}{\log. 3} = n$$

$$\text{finalmente } x = \frac{\log. n}{\log. 4} = 0.50$$

4.^o ejemplo $= 3.41^{(5x-1)} = 532.24$ $(5x-1) \log. 3.41 = \log. 532.24$

$$5x-1 = \frac{\log. 532.24}{\log. 3.41} = \frac{2.7261075}{0.5327544}$$

$$\begin{array}{rcl} \log. 2.7261075 & = & 0.8610009 \quad 5x-1 = 13.6293 \\ - \log. 0.5327544 & = & 9.7265271 \quad 5x = 14.6293 \\ \hline \log. 5x-1 & = & 1.1344738 \quad x = 2.92586 \\ 5x-1 & = & 13.6293 \end{array}$$

$$5.^\circ \text{ ejemplo } \frac{\sin 58}{\sin 46} = \left(\frac{\text{tang. } \frac{58}{2}}{\text{tang. } \frac{46}{2}} \right)^x$$

$$\log. \sin 58^\circ - \log. \sin 46^\circ = x (\log. \text{tang. } 29 - \log. \text{tang. } 23^\circ)$$

$$x = \frac{\log. \sin 58 - \log. \sin 46}{\log. \text{tang. } 29 - \log. \text{tang. } 23} = \frac{9.9284205 - 9.8569341}{9.7453245 - 9.6299149} = \frac{0.0714864}{0.1154096}$$

$$\log. 0.0714864 = 8.8542210$$

$$\log. 0.1154096 = 9.0622434$$

$$\log. x = 9.7919776$$

$$x = 0.61941$$

$$6.^\circ \text{ ejemplo } x = \frac{\log. \sin 32^\circ 30' - \log. \sin 32^\circ 10'}{\log. \text{tang. } 16^\circ 05' - \log. \text{tang. } 16^\circ 15'} = \frac{9.73022 - 9.72622}{9.45987 - 9.46224} = \frac{400}{237}$$

$$\log. 400 = 2.60206$$

$$\log. 237 = 2.37475$$

$$\log. x = 0.22731$$

$$x = 1.6877$$

Se han tomado los logaritmos de las cifras dadas y efectuado con ellos las operaciones indicadas; tomando después el logaritmo de esos resultados y efectuando la nueva operación indicada, se ha conseguido el resultado buscado.

LOGARITMOS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

El uso de estos logaritmos aplicados por Gauss es de gran auxilio para la resolución de muchas fórmulas.

Como se verá más adelante se han construido varias tablas con argumento diferente aunque el resultado es el mismo para el cálculo.

Las tablas de Houël, basadas en las mismas de Gauss y

las de Zech, presentan ciertas ventajas que las hacen recomendables.

Se dividen en dos partes: la de *adición* y la de *sustracción*.

La tabla de *adición* da para cada cantidad llamada *argumento* el valor correspondiente del logaritmo de la cantidad $(1 + \frac{1}{x})$ mayor que la unidad.

Sea a y b dos cantidades conocidas y conocidos también sus log. vulgares; admitiendo que a sea mayor que b.

La expresión $(a + b)$ puede expresarse también por $a(1 + \frac{b}{a})$

luego $(a + b) = a(1 + \frac{b}{a}) = a(1 + \frac{1}{\frac{a}{b}})$ y haciendo $\frac{a}{b} = x$

se tiene $(a + b) = a(1 + \frac{1}{x})$ de donde

$$\log. (a + b) = \log. a + \log. (1 + \frac{1}{x})$$

pero de $x = \frac{a}{b}$ se deduce $\log. x = \log. a - \log. b$

de manera que en la columna R de las tablas figura la cantidad $(\log. a - \log. b)$ y enfrente, en la columna L. ad. el log. correspondiente a $(1 + \frac{1}{x})$

Se deduce de ahí que para hacer uso de esa tabla, basta restar del log. mayor a el log. menor b.—Buscar en la columna R la cantidad *residuo* tomando enfrente el log. expresado, el que se sumará luego al log. de a —

$$\log. a = 3.15186$$

$$\log. b = 2.91843$$

$\log. \frac{a}{b} = 0.23343$ á ese número de la columna R, corresponde el

log. ad. 0.19997 al que hay que restar por diferencia, 16— y se tendrá 0.19981; luego: $\log a = 3.15186$

$$\log. \text{ tabular} = + 0.19981$$

$$\log. (a + b) = 3.35167 = 2247,33$$

El mismo resultado podría obtenerse por los logaritmos vulgares aplicando la expresión equivalente $\log. (a + b) = a \left(1 + \frac{b}{a}\right)$

$$\log. b = 2.91843$$

$$\log. a = 3.15186$$

$$\log. a = 3.15186$$

$$\log. \frac{b}{a} = -1.76657, \quad \frac{b}{a} = 0.58421, \quad \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 0.19982$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1.58421, \quad \log. (a + b) = 3.35168$$

Para hallar la resolución de $\log. (a - b)$ en la que siempre $a > b$ supóngase dos números positivos xx' , cuya relación entre sí es: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = 1$

haciendo $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ se puede poner $\frac{b}{a} + \frac{a-b}{a} = 1$

pero de $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ se tiene $x = \frac{a}{b}$ y $\log. x = \log. a - \log. b$

también, de $\frac{1}{x'} = \frac{a-b}{a}$ se tiene $x' = \frac{a}{a-b}$ y $\log. x' = \log. a - \log. (a - b)$

$$\text{luego } \log. (x - b) = \log. a - \log. x'$$

Para tener el logaritmo de la diferencia de dos cantidades, se halla la diferencia entre el log. del menor y del mayor; se busca en la tabla, columna R el logaritmo (L. sust.) correspondiente y este se resta del logaritmo mayor dado.

Sean los logaritmos de las cantidades dadas $\log. a = 1.81620$
 $\log. b = 1.38196$

$$\log. a = 1.81620$$

$$\log. b = 1.38196$$

$$\log. \frac{a}{b} = 0.43424$$

Esta diferencia 0.4342 se encuentra en la columna R

y frente á ella el log. 0.19926 pero por el 4 corresponde una diferencia 2 que debe restarse y el log. sust. será 0.19924

$$\text{luego} \quad \log. a = 1.81620$$

$$\log. x' = 0.19924$$

$$\log. (a - b) = 1.61696$$

El argumento menor que aparece en la columna R es 0.3000, esto es diferencia entre $\log. a - \log. b$, de manera que si en la práctica resultara una diferencia menor se observará el mismo proceder en el uso de la tabla, haciendo la lectura de abajo arriba en la columna respectiva R.

$$\text{Asi} \quad \log. a = -3.17192 \text{ a } 7 \text{ b}$$

$$\log. b = -4.91706$$

$$\log. \frac{a}{b} = 0.25486$$

al valor de $R = 0.2548$ Tomado desde abajo se encuentra 0.3527 y por la cifra 6 y diferencia 8 resulta 7 sea 0.35277

$$\text{luego} \quad \log. a = -3.17192$$

$$- \log. x = 0.35277$$

$$\log. (a - b) = -4.81915$$

Las primeras tablas de este género confeccionadas por *Gauss*, según las inspiraciones de *Leonelli* se componían de 3 columnas designadas A B C que respectivamente representaban: $\log. x -$, $\log. \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\log. (1 + x)$

Entre esas cantidades existía la relación $A + B = C$ porque x representa un valor variable de 1 al infinito

$$\text{haciendo } A = \log. \frac{a}{b} \text{ se tendrá } \log. (a + b) = \log. a + B = \log. b + C$$

$$\text{siendo } \frac{a}{b} < 2 \quad \log. \frac{a}{b} = B \quad \log. (a - b) = \log. a - C = \log. b - A$$

$$\text{siendo } \frac{6}{6} \quad 7 \cdot 2 \log. \frac{a}{b} = C \quad \log. (a - b) = \log. a - B = \log. b + A$$

El problema de la sustracción presentaba, pues dos soluciones, por esto uso de aquellas tablas ofrecia sus dificultades y complicaciones; por esto se han modificado aquellas separando las tablas de adición de las de sustracción y conservando para esta última el argumento C, en estas disposiciones difieren las actuales tablas de las primitivas.

Existen también otras tablas muy manuales, las de *Müller y Rajna* cuya disposición es como sigue:

log. a y log. b son las dos cantidades dadas, siendo a > b

de $a + b = a \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ se tiene $\log. (a + b) = \log. a + \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$

de $a - b = a \left(1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}}$, se tiene $\log. (a - b) = \log. a - \log. \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1}\right)$

Las tablas se hallan divididas en la *de adición* y en la *de sustracción*—en la primera figuran los argumentos

$$A = \log. x \quad y \quad B = \log. (1 + x) \quad x = \log. \left(\frac{b}{a}\right)$$

En la segunda figuran los argumentos $A = \log. x$ y $C = \log. \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

Como se vé el argumento varía del de las anteriores, en una se tiene $\frac{a}{b}$ en la otra $\frac{b}{a}$, pero la marcha de las operaciones es la misma—

I Así sea $\log. a = 1.33289$ y $\log. b = 0.50652$

se tiene $\log. b = 0.50652$

$\log. a = 1.33289$

$\log. \frac{b}{a} = 9.17363$ buscada esta cantidad en la co-

lumna A con 9.17 y enfrente bajo la columna 3, se halla 0.06030, al pié de la página se encuentran las diferencias proporcionales, así: la diferencia tabular es 13, frente

á dif. 13 y bajo el 6 se encuentra 7.8 que sumados al log. encontrado dá: 0.06028

$$\text{luego } \log. a = 1.33289$$

$$- \log. x = 0.06038$$

$$\log. (a + b) = 1.39327$$

II $\log. a = 3.15186$ $\log. b = 2.91843$

$\log. b = 2.91843$ frente á A = 9.76 y bajo el 6 se encuentra 0.19960

$\log. a = 3.15186$ en frente dif. 37 — y bajo 6 — 22

$$\log. \frac{b}{a} = 9.76657 \qquad \log. x = 0.19982$$

$$+ \log. a = 3.15186$$

$$\log. a + b = 3.35169$$

SUSTRACCIÓN

I $- \log. a = 2.84975$ $\log. b = 1.68541$

$$\log. b = 1.68541$$

$$\log. a = 2.84975$$

$$\log. \frac{b}{a} = 8.83566 \text{ buscado en la columna A y bajo}$$

columna 5 se halla 0.03077 y por aumento de diferencia por los 66; 0.03082

$$\text{luego } \log. a = 2.84975$$

$$- \log. x = 0.03082$$

$$\log. (a - b) = 2.81893$$

II $\log. b = 1.38196$

$$- \log. a = 1.81620$$

9.56576 frente á ese argumento corres-

ponde 0.19879 más 45 por diferencia

$$\text{luego } - \log. a = 1.81620$$

$$- \log. x = 0.19924$$

$$\log. (a - b) = 1.61696$$

III log. a = - 3.17192, log. b - 4.91718

log. b = - 4.91716 ó también = 6.91716 - 10

log. a = - 3.17192 7.17192 - 10

log. $\frac{b}{a}$ = - 1.74524 9.74524 - 10 le corresponde 0.35282

log. a = - 3.17192 ó también = 7.17192 - 10

- log. x 0.35282 0.35282

- 4.81910 6.81910 - 10

IV Aplicación de los logaritmos de adición y sustracción á fórmulas trigonométricas, por ejemplo :

cot. $\frac{1}{2} (B - C) = \frac{b+c}{b-c} \text{ tang. } \frac{1}{2} A$ en la cual se tiene para

log. b = 0.43285, log. c = 0.12856, A = 85° 12'

log. c = 0.12856

log. b = 0.43285

log. $\frac{c}{b}$ = 9.69571

log. adic. B = 0.17533

log. sustr. C = 0.29778

log. adic. B = 0.17533

log. sustr. C = 0.29778

log. $\left| \text{ang. } \frac{1}{2} A \right|$ = 9.96357

log. cot. $\frac{1}{2} (B - C)$ 0.43668

$\frac{1}{2} (B - C) = 20^{\circ} 6' 15''$ 658 10

TEORÍA DE LAS ECUACIONES

Si efectuamos los siguientes productos se obtiene por resultado:

$$(x-2)(x+3)(x-5) = x^3 - 6x^2 - 11x + 30$$

$$(x+3)(x+2)(x-4) = x^3 + x^2 = 14x - 24$$

En los cuales los resultados representan ecuaciones de cuyo examen se desprende que toda ecuación de grado m, es igual al producto de m factores binomiales, que en los factores binomiales (x - 2) el término 2 es raíz de la

ecuación, pues que sustituido en lugar de x la ecuación se reduce á cero.

Teorema — Si (a) es raíz de una ecuación su primer miembro es exactamente divisible por $(x - a)$; por consiguiente si el primer término es divisible por $(x - a)$, a es raíz de la ecuación.

$$\text{Tenemos } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 0.$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ac + bc + ab)x + abc.$$

Se vé: que los esponentes de la letra principal van disminuyendo, correspondiendo al 1.^{er} término un esponente igual al número de raíces y 1 para el último; que el coeficiente del 1.^{er} término es 1; que el del segundo es la suma de las raíces, el del 3.^o la suma de los productos binarios de las raíces, el cuarto la suma de los productos ternarios de las raíces y el último el producto de todas las raíces.

Regla — Para averiguar si una cantidad es raíz de una ecuación hay que dividir esta por esa cantidad; si el resultado es cero, es una raíz.

Para efectuar esa división conviene operar así: probar si

$$x + 2 \text{ es raíz de: } 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

dividiremos;

$$\begin{array}{r} 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5 \quad \Big| \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ + 2 \times - 2 = - 4 \\ + \\ - 3 \times - 2 = + 6 \\ + \\ - 4 \times - 2 = + 8 \\ + \\ + 5 \times - 2 = - 10 \\ + \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline \text{Cociente} \quad - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5^1. \end{array}$$

El coeficiente cualquiera, es igual al del término anterior multiplicado por el divisor (raiz) cambiado de signo y menos el coeficiente del término de la potencia que se busca.

En la ecuación $x^8 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^2 + 2x - 8$.

Faltan los términos potencias x^7 , x^6 y x^3 .

Se incluirán así: $x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 2x - 8$
y busquemos ahora si $x - 2$ es raíz:
para esto

$$\begin{array}{r}
 x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 13x^2 + 2x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x + 2 \\ \text{sea por } + 2 \end{array} \right. \\
 \underline{1 \times + 2 = + 2} \\
 + 0 \\
 \underline{+ 2 \times + 2 = 4} \\
 + + 0 \\
 + 4 \times 2 = + 8 \\
 + - 13 \\
 - 5 \times 2 = - 10 \\
 - 3 \times 2 = - 6 \\
 + + 0 \\
 - 6 \times 2 = - 12 \\
 + + 13
 \end{array}$$

Otro $2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ \text{Sea } + 3 \end{array} \right.$

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4$$

Teorema — Si una ecuación con coeficientes reales tiene una raíz imaginaria $+ B\sqrt{-1}$ sean $a + Bi$, posee también otra raíz conjugada $a - Bi$ sea $- B\sqrt{-1}$

Así:

$$(x - a + Bi)(x - a - Bi) = (x - a)^2 + B^2 = x^2 - 2ax + a^2 + B^2$$

Teorema — Una ecuación de grado *impar* tiene á lo menos 1 raíz real y ella es positiva ó negativa según sea el último término negativo ó positivo, sea

$$x^5 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Tendrá á lo menos 1 raíz real negativa que será $- 2$.

Teorema — Si la ecuación es de grado *par* tiene á lo menos 4 raíces reales, una positiva y otra negativa si su último término es negativo; siendo positivo todas las raíces pueden ser imaginarias.

Sea $x^2 + x - 6$ sus dos raíces serán $(x + 3)(x - 2)$.

REGLAS DE DESCARTES

1.^a En una ecuación algebraica con coeficientes reales, el número de raíces positivas no puede ser mayor que el número de variaciones; y si lo fuera la diferencia será de un número par:

$$(1) \text{ en } \underbrace{x^5}_{1 \text{ var.}} - \underbrace{3x^4}_{1 \text{ perm.}} - \underbrace{2x^3}_{1 \text{ var.}} + \underbrace{x^2}_{1 \text{ per.}} + \underbrace{7x}_{1 \text{ var.}} - 8 = 0$$

hay 3 variaciones y 2 permanencias, podrá pues existir 3 raíces positivas ó 1.

$$(2) \text{ En } \underbrace{x^6}_{1 \text{ per.}} + \underbrace{4x^3}_{1 \text{ var.}} - 3 = 0 \text{ hay una variación y 1 per-}$$

manencia podrá tener pues 1 raíz positiva ó ninguna.

Si en la ecuación propuesta se cambia x por $-x$ se tendrá una nueva ecuación llamada «La transformada» y los signos habrán cambiado según las potencias de x ; así si en la ecuación (1) hacemos $x = -x$ su transformada será:

$$-x^5 - 3(+x^4) - 2(-x^3) + x^2 - 7x - 8$$

$$\text{Sea: } \underbrace{-x^5}_{1 \text{ per.}} - \underbrace{3x^4}_{1 \text{ var.}} + \underbrace{2x^3}_{1 \text{ per.}} + \underbrace{x^2}_{1 \text{ var.}} - \underbrace{7x}_{1 \text{ per.}} - 8 = 0$$

donde hay 2 variaciones y 3 permanencias, admite pues dos *raíces negativas* y si no las tiene no tiene ninguna.

Así la ecuación (1) que tiene 5 raíces puede tener 3 raíces positivas y 2 negativas.

La ecuación (2) cuya transformada es

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

tiene una sola variación, tiene pues una sola raíz negativa; luego como no tiene más que una raíz positiva, esta ecuación tendrá solo dos raíces reales y cuatro imaginarias.

RAICES COMUNES Á DOS ECUACIONES

Para hallar si dos ecuaciones tienen raíces comunes y para conocer éstas, búsquese el máximo común divisor de las dos ecuaciones, si este común divisor es del 1.^{er} grado no tendrá más que una raíz y las ecuaciones no tendrán más que una raíz común; si el común divisor D es del 2.^o grado habrán 2 raíces comunes.

Hallar las raíces comunes de las ecuaciones:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0; \quad 2x^3 - 5x^2 - x + 2 = 0;$$

multipliquemos la 1.^a por 2 para facilitar la división y tendremos:

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 4}{2x^3 - 5x^2 - x + 2} = (x - 1) + x^2 - 3x + 2$$

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} = (2x + 1) + 0$$

luego el divisor común $D = x^2 - 3x + 2$, ecuación de 2.^o grado que resulta; da por raíces 1 y 2, luego las dos raíces comunes á las dos ecuaciones son $(x - 1)$ y $(x - 2)$.

Raíces iguales — Para hallar si una ecuación tiene raíces iguales, $(x-2)(x-2)$ búsquese el máximo común divisor entre la ecuación y su primer derivada, si este existe habrán raíces iguales ó sea repetidas. Igualando á cero el máximo común divisor **D**, se busca sus raíces y cualquier cantidad que resulte ser una ó dos veces raíz de la ecuación **D** lo será dos ó tres veces en la ecuación **X**.

Averiguar si en la ecuación :

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$$

hay raíces iguales.

$$\begin{array}{l} \text{X} = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 \\ \text{1.ª derivada X'} = 4x^3 - 6x^2 - 14x + 20. \end{array} \quad \begin{array}{l} = \text{D} = x-2 \\ \text{de donde } x=2 \end{array}$$

luego la $(x-2)$ es dos veces raíz de la ecuación **X** pues que lo es una vez de la derivada; así pues la ecuación **X** es divisible dos veces por:

$$(x-2) \text{ sea } (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

Efectuando esa división :

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12}{x^2 - 4x + 4} = x^2 + 2x - 3$$

y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, la ecuación **X** puede escribirse :

$$\text{X} = (x^2 - 4x + 4) \times (x^2 + 2x - 3)$$

en el primer factor las raíces son, 2 y 2, buscándolas en el 2.º factor se halla 1 y -3 , luego las cuatro raíces de la ecuación serán 1. 2. 2 y -3 .

$$\text{sean } (x-2)(x-2)(x-1)(x+3) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12.$$

RAICES CONMENSURABLES

Son las que pueden expresarse por un número exacto de unidades ó partes de la unidad.

Teorema. — Toda ecuación que tiene la unidad por coeficiente del 1.^{er} término y números enteros para todos los otros, tiene números enteros para sus raíces comensurables.

Como el último término es el producto de todas las raíces, para hallar las raíces de una ecuación, sea:

$$x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 10 = 0$$

puede procederse así:

último término.....	- 10								
Divisores del último término y demás	10.	5,	2,	1,	- 1	- 2	- 5	- 10	
Cocientes	- 1	- 2	- 5	- 10,	10	5	2	1	
Súmese el coeficiente del término siguiente..	+ 8								
	7,	6,	3.	- 2,	18,	13,	10,	9	
divídase por el divisor correspondiente 1, - 1, - 5					2 - 18		- 2		
sumese el otro coeficiente.....					3 - 3		- 3		
					- 5 - 21		- 5		
divídase nuevamente 1, - 1, - 5					- 5 + 21		+ 1		
					+ 4 + 4		+ 4		
					- 1 + 25		+ 5		
divídase por 1 - 1 - 5,.....					- 1 - 25		- 1		

hay pues dos cocientes iguales a - 1 y los dos divisores correspondientes son 1 y - 5 estos serán las raíces conmensurables de la ecuación.

Para buscar ahora las demás raíces, divídase la ecuación por el producto de esas raíces:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 8x - 10}{(x - 1)(x - 5)} = x^2 - 2 \text{ de donde } x = \pm \sqrt{2}$$

Así, pues, las 4 raíces serán: $1, -5, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

2.º Hallar las raíces de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

divisores.....	+6, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -6
cocientes.....	-1 -2 -3 -5, 6, 3, 2, 1
2.º coef.....	+11
	+10. 9. 8. 5. 17. 14. 13. 12
cocientes.....	+3, 4, 5+17-7 -2
	6
3.er coeficiente	-3 -2 -1 -23 -13 -8
cocientes.....	-1 -2 -1 +23

Ecuaciones recíprocas—Se llaman ecuaciones recíprocas y negativamente recíprocas aquellas que no cambian reemplazando:

$$x \text{ por } \frac{1}{x} \text{ ó por } -\frac{1}{x};$$

Así pues si en una ecuación $A(x)=0$.

se cambia x por $\frac{1}{x}$ y se obtiene el mismo resultado $A\left(\frac{1}{x}\right)=0$ serán recíprocas.

Para que una ecuación sea recíproca es necesario y suficiente que: siendo la ecuación de grado *par*, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos sean iguales y de signos iguales; ó iguales y de signos contrarios con tal que en ese caso la ecuación no tenga término medio. Siendo el grado *impar*, basta que el coeficiente de los términos equidistantes de los extremos sean iguales y de signos iguales ó contrarios.

Teorema de Sturm—Su objeto es determinar el número de raíces reales de una ecuación y también el número de

guarismos de estas raíces ó sus guarismos iniciales cuando las raíces son irracionales.

Llamaremos X la eduación dada y X_1 su derivada. Dividiendo X por X_1 tendremos un residuo que llamaremos X_2 y al que cambiaremos los signos; dividamos en seguida X_1 por X_2 y llamemos X_3 el residuo con signos cambiados; si seguimos haciendo esta operación se llegará á un resultado cero ó independiente de x . Sea por ejemplo

$$X = x^3 + 3x^2 - 12x + 24$$

$$\text{Será } X_1 = 3x^2 - 6x - 12 = x^2 - 2x - 4$$

dividiendo y cambiando signos $X_2 = x - 2$ y $X_3 = 4$.

Ahora si en los primeros términos de cada una de estas expresiones sustituimos $x = -\infty$ y enseguida $+\infty$, los signos que corresponden á esos primeros términos serán:

$$X \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$= . \quad - \quad . \quad + \quad . \quad - \quad . \quad + \text{ hay 3 variaciones}$$

$$= . \quad + \quad . \quad + \quad . \quad + \quad . \quad + \text{ hay 0 variaciones, luego}$$

para $x = -\infty = - + - +$ hay 3 variaciones

para $x = +\infty = + + + +$ hay 0 variaciones; luego hay 3 raíces reales; y como en la ecuación dada hay 2 variaciones y 1 permanencia, de estas 3 raíces, 2 serán positivas y 1 negativa.

—Sea otro ejemplo. Hay raíces reales y cuantos en $x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 16$.

efectuando las operaciones resulta :

$$X = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 15x - 16$$

$$X_1 = x^4 - 3x^2 + 4x - 3;$$

$$X_2 = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$$

$$X_3 = 2x - 17$$

$$X_4 = -153$$

luego formando la nueva ecuación y sustituyendo se tiene

$$\times_1 \times_1 \cdot \times_2 \cdot \times_3 \cdot \times_4$$

$$\begin{array}{l} \text{para } x = - \dots\dots - + - - = 2 \text{ varia.}^{\text{ns}} \\ \text{para } x = + \dots\dots + + + + - = 1 \text{ varia.}^{\text{ns}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ raíz real} \end{array} \right.$$

Para conocer ahora la situación de las raíces, sustitúyase en cada una de las ecuaciones $\times \cdot \times_1 \times_2 \times_3 \dots$ los valores sucesivos de $x=0 \ x=1 \ x=2 \dots$ inscribiendo en seguida el signo de cada resultado. En el ejemplo (1) hagamos sucesivamente $x=0$. En las 4 ecuaciones:

	$\times \cdot \times_1 \times_2 \times_3$	
$\times = x^3 - 3x^2 - 12x + 24$	para $x=0 \dots + - - + \dots$	2 variac.
$\times_1 = x^2 - 2x - 4$	$x=1 \dots + - - + \dots$	1 »
$\times_2 = x - 2$	$x=2 \dots - - \underline{+} + \dots$	1 »
$\times_4 = 4$	$x=3 \dots - - + + \dots$	1 »
	$x=4 \dots - + + + \dots$	1 »
	$x=5 \dots + + + + \dots$	0 »

Se vé que se pierde una variación entre:

$$x=1 \text{ y } x=2 \text{ y otra entre } x=4 \text{ y } x=5$$

luego debe haber una raíz positiva entre 1 y 2 y otra entre 4 y 5.

Ahora para conocer la situación de la raíz negativa, hágase la misma sustitución anterior, pero con cantidades negativas:

	$\times \cdot \times_1 \times_2 \times_3$	
$x = 0$	$= + - - + \dots$	2 varia +
$x = -1$	$\dots + - - + \dots$	2 »
$x = -2$	$\dots + + - + \dots$	2 »
$x = -3$	$\dots + + - + \dots$	2 »
$x = -4$	$\dots - + - + \dots$	3 »

luego la raíz negativa se halla entre -3 y -4 .

Resulta, pues, que las tres raíces de la ecuación propuesta tienen por guarismos iniciales 1, 4 y — 3.

Interpolando entre 1 y 2 otro 4 y 5 y — 3, — 4 un número de factores ó partes de la unidad y resolviendo la ecuación, se encontrará la parte fraccionaria de cada raíz.

Raíces inconmensurables

Son aquellas que representan una cantidad mayor ó menor que la unidad, pero que no pueden expresarse por un número exacto de unidades.

Al tratarse de la averiguación de las raíces conmensurables, puede decirse que se ha expuesto la manera de hallar las raíces inconmensurables, pues que toda vez que las raíces que se hallen no sean enteras, habrá que buscar su aproximación y esas raíces serán las inconmensurables.

Los teoremas de Sturñ y Newton, pueden aplicarse para esos casos, llevando la interpolación hasta el grado de precisión requerido.

Así, pues, la determinación de las raíces inconmensurables se divide en dos partes, la 1.^a que tiene por objeto averiguar para cada raíz dos números entre los cuales está comprendida la raíz verdadera y la 2.^a que sirve á valuar la parte fraccionaria de la raíz con el grado de aproximación que se quiera.

Determinado el número de raíces reales en una ecuación, su situación y su primer guarismo, si la raíz es inconmensurable, solo queda que valuar la parte fraccionaria y en esto consisten varios métodos de aproximación.

Volviendo al ejemplo (1) resuelto por el método de Sturn, sea $x^3 - 3x^2 - 12x + 24 = 0$.

para el cual se averiguó que las 2 raíces positivas se hallaban comprendidas entre 1 y 2 y entre 4 y 5 y la negativa entre -3 y -4 . hay que buscar ahora la parte fraccionaria ó decimal.

Si se resuelve la ecuación (1) sustituyendo x por una de sus raíces aproximadas, p. 2. 4. resulta $f(x) = -96$, haciendo igual operación con raíz 5 resulta $f(x) = +14$ luego la raíz verdadera es mayor que 4, pero con menos de una unidad; efectivamente habría que disminuir la raíz 5 ó sea aumentar la raíz 4 para hacer disminuir el resultado de 14, luego haciendo $\frac{14}{96 + 14} = \frac{14}{110} = 0.12$, puede probarse $x = 4.12$, así se obtendrá;

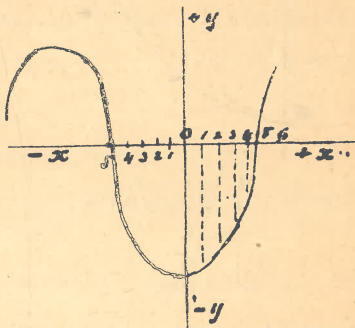
$69.93 - 50.91 - 49.44 + 24 = -20.42$, lo que demuestra que 4.12 es aun débil, haciendo nuevamente $\frac{14}{20.42 + 14} = 0.406$, puede ensayarse 4.52, lo que daría $92.34 - 61.29 - 54.24 + 24 = -0.81$, lo que demuestra la conveniencia de llevar la parte decimal de la raíz mas alla de los centésimos.

Igual proceder de interpolación podría emplearse para determinar las otras raíces entre -1 y 2 y entre -3 y -4 .

Podría también emplearse á más de este método de interpolación, los diferentes métodos de aproximación.

Método gráfico — Sea el sistema y, x . de coordenadas rectangulares, sobre los cuales se ha adoptado la notación de las $\pm x$ y $\pm y$ y una escala cualquiera para la unidad. — luego resolviendo la ecuación sustituyéndose

en ella diferentes números desde 0 hasta $+\infty$ y hasta $-\infty$, se obtendrán diferentes valores de y desde 0 hasta $\pm\infty$, en el ejemplo anterior se tenía que para $+4$ resultaba $y = -96$, y para $x = 5$, $y = +14$, si se hubiera cal-

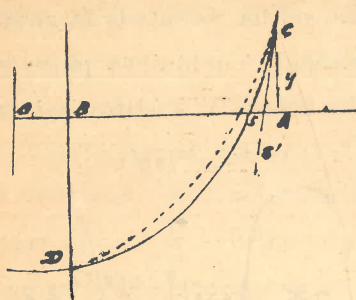


culado y para $x = 3$ ó 2 y $x = 6$ y 7 , se hubieran conseguido diferentes valores de $-y$ y de $+y$ permitiéndose así trazar la verdadera curva y tener de esta manera el punto exacto por el cual la curva cortaría el eje de las abscisas x ; luego midiéndose á la escala, la distancia $O. P.$ se obtendrá un valor muy aproximado de la raíz buscada. Fácil es comprender que repitiéndose igual operación para las raíces mencionadas de 0 á $\pm\infty$, puede determinarse rápidamente el número de raíces buscadas.

Método de Newton — Este método tiene mucha semejanza con el anterior y su diferencia consiste que en vez de construir la curva por los diferentes valores de y , medir en seguida el valor de x para $f(x) = 0$, lo calcula directamente.

Para esto, conocida la situación de la raíz buscada, sea como en el caso anterior entre 4 y 5 en la que 4 da

$y = -96$ y 5 da $y = +14$, se hace uso de la tangente; sabido es en efecto que la tangente á la curva en el punto



c tiene por expresión:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

haciendo $y = 0$ se deduce

$$x - x_0 = \frac{-y_0}{f'(x_0)} = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \alpha$$

obtenido este valor de la raíz

se resuelve la ecuación y su derivada con ese nuevo va-

lor, se calcula una nueva

$$OB = x = B.$$

$$OA = x = h.$$

$$BA = h.$$

$$OA = x.$$

$$cS' = \text{tang.}$$

tangente, con más aproximación.

En el ejemplo anterior se tenía:

$$x^3 - 3x^2 - 12x + 24 = 0$$

en la cual un límite era 5, introduciendo este valor en la ecuación y su derivada se tiene:

$$f_x = 125 - 75 - 60 + 24 = +14.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 12 = 75 - 30 - 12 = +33.$$

$$\text{luego } \alpha = -\frac{14}{33} = -0.424 \text{ y se tiene } 5 - 0.424 = 4,575$$

con este nuevo valor de $x = 4,576$, resulta:

$$f(x) = +4,387 \text{ y } f'(x) = +49,122$$

$$\text{luego } \alpha = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{4,387}{49,122} = -0.089 \text{ resulta como nue-}$$

va raíz $x = 4.487$.

Nuevas aplicaciones darán mayor aproximación.

FRACCIONES CONTINUAS

Se llama fracción continua toda expresión compuesta de un número entero, (que puede ser 0) más una fracción que tenga la unidad por nominador y por denominador un entero, más una fracción que..... y así sucesivamente.

Sea reducir $\frac{271}{608}$ si se divide ambos miembros por 271 se tendrá como resultado $\frac{1}{2 + \frac{66}{271}}$, efectuando igual operación se tendrá $\frac{1}{4 + \frac{7}{66}}$, operando otra vez sobre $\frac{7}{66}$ será $\frac{1}{9 + \frac{3}{7}}$ y finalmente $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ luego toda la operación puede escribirse como sigue: $\frac{271}{608} =$

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}$$

Para formar una reducida cualquiera, multiplíquese por el cociente incompleto correspondiente los dos términos de la reducida precedente y agréguese respectivamente á los dos términos de la fracción que resulte los dos términos de la reducida antepenúltima.

Esta regla será aplicable á la formación de la segunda reducida, si se hace preceder á la primera de $\frac{1}{0}$, si es mayor que la unidad ó $\frac{0}{1}$ si es menor.

1.^a Sea la fracción continua $\frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}$

hallar la cantidad de que procede: el 1.º término es 1 luego $\frac{0}{1}$, y primer reducido $\frac{1}{2}$, aplicando la regla;

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1.4 + 1}{2.4 + 0} = \frac{4}{9}; \frac{4.9 + 1}{9.9 + 2} = \frac{37}{83}; \frac{37.2 + 4}{83.2 + 9} = \frac{78}{175};$$

$$\frac{78.3 + 37}{3 + 83} = \frac{271}{608}$$

cantidad buscada.

Hallar el valor de la siguiente fracción continua a menos de $\frac{1}{7500}$.

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{3}$$

La raíz de 7500 = 87, luego convendrá detenerse en la reducida que tenga ese denominador.

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 = 1}}}}} \quad \text{cuyas reducidas son:}$$

$$2, \frac{5}{7}, \frac{17}{7}, \frac{56}{23}, \frac{185}{76}, \frac{241}{99}$$

Convieni, pues, detenerse en $\frac{185}{76}$ y el error cometido en la aproximación será error $< \frac{1}{76 + 99 \frac{1}{7524}}$.

De lo que precede se deduce, que, las fracciones continuas dan el medio de hallar una fracción ordinaria que difiera tan poco como se quiera del valor de una cantidad que no es entera y tal que ningrna fracción, cuyos términos sean más simples que los suyos, pueda aproximarse tanto como ella á la cantidad.

Ejemplo:—sea calcular en menos de $\frac{1}{2}$ diez milésimos el valor de $\frac{5 + \sqrt{37}}{3}$

$\frac{1}{2}$ diez milésimos es $= \frac{1}{20000} \sqrt{20000} = < 142$, denominador de la reducida conveniente:

$$\frac{5 + \sqrt{37}}{3} > \frac{5 + 6}{3} = \frac{11}{39} < \frac{5 + 7}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3} \text{ ó simplemente } 3 + \frac{1}{x} = 3 \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 1}}}}}} \text{ etc.}$$

las reducidas son: $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{37}{10}, \frac{48}{13}, \frac{133}{26}, \frac{447}{121}, \frac{580}{157}$.

luego el valor será $\frac{447}{121}$ en menos, pues el error será:

$$\frac{1}{121 \cdot 157} = \frac{1}{18997} \text{ en vez de } \frac{1}{20000}$$

$$\frac{447}{121} = 3 + \frac{86}{121}$$

POLINOMIOS DERIVADOS

Si en la siguiente ecuación considerada como polinomio

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots \dots \dots + sx^2 + tx + u = 0$$

se multiplica cada término por el exponente de x en ese término, disminuye el exponente de una unidad y se tiene un nuevo polinomio

$$max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + 2sx + t = 0 = \times_1$$

Si se repite con este nuevo polinomio igual operación se tiene

$$m(m-1)ax^{m-2} + (m-1)(m-2)bx^{m-3} + (m-2)(m-3)cx^{m-4} + \dots + 25 = 0 = \times_2$$

Puede así seguirse formando nuevos polígonos que por ser todos derivadas del primero se llaman *derivadas* y llamando X el polinomio dado; se tiene $\times_1$ es el primer derivado polinomial de X

$\times_2$ = primer derivado de $\times_1$ ó segunda de X

$\times_3$ = " " " $\times_2$ " tercera " X.

y así sucesivamente.

Luego para formar una derivada, multiplíquese cada término de X dado por el exponente de x en ese término y disminúyase ese exponente de una unidad.

Hallar las derivadas de $3x^5 + 5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 8x + 5 = 0$.

$$\times = 3x^5 + 5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 8x + 5$$

$$\times_1 = 15x^4 + 20x^3 - 27x^2 + 14x - 8$$

$$\times_2 = 4x + 15x^3 + 3.20x^2 - 2.27x + 14 = 60x^3 + 60x^2 - 54x + 14$$

$$\times_3 = 3.60x^2 + 2.60x^1 - 54x \dots\dots\dots = 180x^2 + 120x - 54$$

$$\times_4 = 2.180x + 1.120 \dots\dots\dots 360x + 120$$

$$\times_5 = 360 \dots\dots\dots$$

ECUACIONES NUMÉRICAS

Una ecuación con coeficientes numéricos tiene generalmente raíces reales y raíces inconmensurables; en la expresión $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ de una raíz imaginaria, α y β representan cantidades racionales ó irracionales.

No pudiéndose obtener exactamente el valor de las raíces inconmensurables, se vé que para resolver una ecuación, es decir, buscar sus raíces, hay gran conveniencia en apartar las raíces conmensurables y determinar en seguida las inconmensurables con un suficiente grado de aproximación y finalmente las imaginarias,

Son raíces conmensurables los números:

$$1. \ 2. \ 3. \dots\dots - 1 - 2 - 3 \dots$$

que sustituidos á la incógnita dan por resultado cero, pero como ese proceder es engorroso y largo es preferible buscar los límites inferiores y superiores de las raíces positivas

ó negativas de la ecuación, teniendo presente que las raíces positivas están comprendidas entre 0 y $+\infty$ y las negativas entre 0 y $-\infty$.

Para obtener un límite á las raíces, es decir, el número más inmediato á la verdadera raíz, hay que tener presente las siguientes reglas:

1.^a En una ecuación que no tenga términos negativos, no puede haber raíces positivas.

2.^a Si se sustituye por x un número menor que la menor raíz, en una ecuación, el resultado será positivo cuando la ecuación sea de grado par y negativo cuando la ecuación sea de grado impar.

3.^a Si en una ecuación se sustituyen dos números sucesivamente por x , y los resultados tienen signos contrarios, debe haber á lo menos una raíz real entre estos dos números.

4.^a Si en una ecuación se sustituye por x un número mayor que la mayor raíz, el resultado será positivo en todos los casos.

5.^a Si N representa el valor numérico del mayor coeficiente negativo, y (n) el número de términos que preceden al 1.^{er} coeficiente negativo, entonces $\sqrt[n]{N} + 1$ será un límite superior de las raíces positivas de la ecuación.

6.^a Para determinar el límite superior de las raíces negativas de una ecuación, cambiense los signos de los términos alternativos, contando los términos que falten cuando la ecuación sea incompleta, y luego aplíquese lo expuesto en el número 5.

EJEMPLOS

1.º Hallar el límite superior de las raíces positivas en la ecuación: $x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 27x + 10 = 0$.

Según número 5, $N = -27$ y $n = 3$ luego

$$\sqrt[n]{N} + 1 = \sqrt[3]{-27} + 1 = -3 + 1 = -2$$

que será la raíz

2.º Hallar el límite superior de las raíces positivas de la ecuación: $x^4 + 5x^3 - 25x^2 - 12x + 68 = 0$, en la cual $N = 25$ y $n = 2$. luego $\sqrt{25} + 1 = 6$ que será la raíz mayor.

3.º $x^3 + x^2 + 3x - 8 = 0$ $N = 8$ $n = 3$ luego:

$$\sqrt[3]{8} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

4.º Hallar el límite superior de las raíces negativas de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 5x + 7 = 0$ substituyendo; x por $-x$ $-x^3 + 3x^2 - 5x - 7 = 0$, luego $1 + \sqrt[3]{7} = 2 + 1 = 3$ luego el límite de las raíces negativas será -3 .

Para hallar el límite inferior de las raíces positivas de una ecuación, se divide el último término por la suma aritmética de éste más el mayor coeficiente de signo contrario. Para hallar el límite inferior de las raíces negativas se aplicará la regla anterior á la transformada de la ecuación dada.

$x^4 + 5x^3 + 25x^2 - 12x + 68 = 0$ lim. inf. pos. $\frac{68}{68 + 25} = \frac{+68}{93}$
transformada

$$x^4 + 5x^3 + 25x^2 - 12x - 68 = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{68}{68 + 25} = \frac{-68}{93}$$

TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES

Disminuir de 1 ó n todas las raíces de una ecuación

$$(1) \ x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0.$$

hágase $x = y + n$ ó sea $x = (y + 1)$ y substituyendo en

$$(1), (y + 1)^3 - 2(y + 1)^2 - 9(y + 1) + 18 = 0 \text{ desarrollando:}$$

$$(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (2y^2 + 4y + 2) - 9(y + 1) + 18 = 0$$

$$\text{reduciendo resulta: } y^3 + y^2 - 10y + 8 = 0 \quad (2).$$

La ecuación (1) tiene por raíces 2. 3. - 3, mientras que la ecuación (2) tiene por raíces 1. 2. - 4, si fuera para aumentar se procedería con $x = (y - n)$

Hacer desaparecer de una ecuación deducida un término cualquiera.

Sea por ejemplo hacer desaparecer el 2.º término de la ecuación $(1) \ x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

substitúyase $x = (y + h)$

$$(y + h)^3 - 2(y + h)^2 - 9(y + h) + 18 = 0,$$

$$y^3 + (3h + 2)y^2 + (3h^2 - 4h - 9)y + (h^3 - 2h^2 - 9h + 18) = 0$$

á fin de eliminar el 2.º término, hágase $(3h + 2) = 0$

de donde $h = -\frac{2}{3}$ y substituyendo:

$$y^3 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3} + 9\right)y + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 9\left(-\frac{2}{3}\right) + 18 = 0$$

efectuando y reduciendo resulta:

$$y^3 + \frac{41}{3}y + \frac{308}{27} = 0 \quad (2)$$

Las raíces de esta nueva ecuación son los $\frac{2}{3}$ de las de la ecuación (1).

4 = Para deducir de una ecuación dada, otra que ten-

ga sus raíces un número (n) de veces mayores que la dada.

Sustitúyase x por $\frac{y}{n}$; así se transformará la ecuación en; (1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$, póngase $x = \frac{y}{4}$

$$\left(\frac{y}{4}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{4}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{4}\right) + 18 = 0$$

que tendrá sus raíces 4 veces mayores, así en la (1) una de las raíces es 3 en la (2) será 12.

Así con 3, la 1.^a es $27 - 18 - 27 + 18 = 0$

$$\text{con } 12 \text{ la } 2.^a $\left(\frac{12}{4}\right)^3 - 2\left(\frac{12}{4}\right)^2 - 9\left(\frac{12}{4}\right) + 18 = 0$$$

Si hubiera que transformar una ecuación en otra que tuviera sus raíces n veces menores que las de la dada, sustitúyase x por n .

$$\text{y así en } x^3 - 3x^2 - 9x + 20 = 0,$$

se tendrá $x(ny)^3 - 3(ny)^2 - 9(ny) + 20 = 0$, y si $n = 4$

$$64y^3 - 48y^2 - 36y + 20 = 0,$$

con $x = 4$, la primera da $64 - 48 - 36 + 20 = 0$,

con $x = 4 = 1$ la 2.^o da $64 - 48 - 36 + 20 = 0$,

CÁLCULO DIFERENCIAL

De las funciones algebraicas

$$1.^{\circ} \quad y = \int (x) = x^m (1)$$

Agregando á cada miembro el incremento: dy ó dx ;

$$y + dy = (x + dx)^m \text{ desarrollando:}$$

$$(2) y + dy = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} (dx)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} (dx)^3 \dots$$

restando la 1.^a de la 2.^a y despreciando los términos 3.^o y

siguientes $y + dy - y = (x^m + mx^{m-1}dx) - x^m$, resulta

$$dy = mx^{m-1}dx \text{ y como derivada } \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

2.^o Cuando el exponente es fraccionario; $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$
elevando ambos miembros á la potencia q , $y^q = x^p$

tomando la diferencial de ambos:

$$q y^{q-1} dy = p x^{p-1} dx; \frac{dy}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{q y^{q-1}}$$

Sustituyendo y por su valor $x^{\frac{p}{q}}$ resulta $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

3.^o Cuando el exponente es negativo:

$$y = x^{-m}$$

aplicando el resultado anterior:

$$dy = -mx^{-m-1}dx$$

Luego la regla general es: que la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una

Pero cuando dx tiende á cero, v hace otro tanto y la cantidad $(1 + v) \frac{1}{a}$ llega á igualar e , y como $Le = 1$

la expresión $\frac{a^x La}{v(1+v) \frac{1}{v}}$ se convertirá en $\frac{a^x La}{Le=1}$

$$\text{luego } \frac{dy}{dx} = a^x La$$

Este mismo resultado se puede obtener de este modo, $y = a^x$, tomando los logaritmos $Ly = x La$ diferenciando y recordando que, $Ly = \frac{dy}{y}$

$$\text{tenemos } Ly = \frac{dy}{y} = dx La.$$

de donde $dy = y dx La$.

sustituyendo el valor $y = a^x$ tendremos:

$$dy = a^x dx La$$

$$\text{ó la derivada } \frac{dy}{dx} = a^x La$$

Si sustituimos e base del sistema Neperiano en vez de a la expresión $y = a^x$ será $y = e^x$ y la diferencia será:

$$dy = e^x Lx.$$

pero $Le = 1$ luego la expresión quedará en:

$$dy = e^x dx.$$

y la derivada de e^x es pues $\frac{dy}{dx} = e^x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$y = \sin x$$

dando al arco x un incremento dx , será:

$$y + dy = \sin (x + dx) \quad (2) \text{ restando } (1) \text{ (de } (2))$$

el incremento de la función será pues:

$$dy = \sin (x + dx) - \sin x$$

y también $\frac{d y}{d x} = \frac{\sin (x + d x) - \sin x}{d x}$

transformando la diferencia de los senos en un producto

y haciendo; $x + d x = p$ y $x = q$;

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{1}{2} (p + q) \sin \frac{1}{2} (p - q)$$

$$\text{pero } \frac{1}{2} (p + q) = x + \frac{d x}{2}, \quad (p + q) = x + \frac{d x}{2}$$

$$\frac{1}{2} (p - q) = d x, \quad (p - q) = \frac{d x}{2}$$

$$\text{sustituyendo } \frac{d y}{d x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{d x}{2} \right) \sin \frac{d x}{2}}{d x}$$

$$\text{ó también } \frac{d y}{d x} = \frac{\cos \left(x + \frac{d x}{2} \right) \sin \frac{d x}{x}}{\frac{d x}{2}}$$

Como la razón $\frac{d x}{2}$ tiene por límite 1 la expresión anterior ó su límite será

$$\frac{d y}{d x} = \cos \left(x + \frac{d x}{2} \right)$$

pues que; $\sin \frac{d x}{2}$ se reduce á 0.

Pero en esta expresión $\frac{d x}{2}$ puede despreciarse por ser de orden infinito; así es que tendremos:

$$\frac{d y}{d x} = \cos x$$

luego $d y = \sin x = \cos x d x$:

Procediendo del mismo modo se hallarán las siguientes derivadas: $d. \cos x = - \sin x d x$; $d. \text{tang. } x = \frac{1}{\cos^2 x} d x$

$$d. \text{cotang. } x = \frac{1}{\sin^2 x} d x$$

$$d. \text{sec. } x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} d x$$

FUNIONES CICLOMÉTRICAS

$$y = \text{arc. sin } x.$$

lo que significa el arco y cuyo seno es x.

$$y = \text{arc. sin } x$$

$$\text{luego } x = \sin y.$$

diferenciando ambos miembros:

$$d x = \cos y \, d y$$

$$\text{de donde } d y = \frac{d x}{\cos y}$$

$$\text{pero } \cos y = \sqrt{1-x^2} \text{ luego } d y = \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{por consiguiente } d. \arcsin x = \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}}$$

De la misma manera se hallará,

$$d. \arccos x = \frac{-d x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d. \arctan x = \frac{d x}{1+x^2}$$

$$d. \operatorname{arcsec} x = \frac{d x}{x \sqrt{x^2-1}}$$

REGLAS PARA LA DIFERENCIACIÓN

1.^a La derivada y la diferencial de un factor ó cantidad constante es nula:

$$d. y = a x^m; \, d y = m x^{m-1} d x; \, \frac{d y}{d x} = m x^{m-1}$$

2.^a La derivada y la diferencial de una suma de varias funciones, son respectivamente la suma de las derivadas ó diferenciales de esas funciones.

$$y = x^3 + 2x^2 - x + 4$$

$$y = L. x + \sin x + x^m$$

$$d y = (3x^2 + 4x - 1) d x$$

$$d y \frac{d x}{d x} = \cos x d x + m x^{m-1} d x$$

3.^a La diferencial de un producto de cualquier número de funciones de una misma variable, es el producto de la diferencial de cada factor por todos los demás factores y sumando; sea $y = u v$ en la cual puede ser que:

$$u = \sin x = f(x)$$

$$v = \log x = f(x)$$

$$\text{será: } d y = v d u + u d v.$$

y = v. u. z. en la que v. u. z. representa cada una una función de x:

$$\text{será: } dy = u v dz + u z dv + v z du.$$

4.^a La diferencial de un cociente es igual al denominador por la diferencial del nominador, menos el nominador por la diferencial del nominador y el todo partido por el cuadrado del denominador.

$$y = \frac{u}{v} \quad dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

1.^a Aplicación: $y = \log. (\sin x)$ haciendo $\sin x = u$

$$\text{tenemos: } y = \log. u \quad dy = \frac{\log. e}{u} du$$

$$\text{de: } u = \sin x; \quad du = \cos x$$

sustituyendo du y u tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log. e \cos x}{\sin x} \quad \text{luego } \frac{dy}{dx} = \frac{\log. e}{\tan x}$$

$$2.^o \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} \quad \text{hagamos } 1-3x^2 = u, \quad du = -6x dx$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2} \quad dy = \frac{1}{2} u^{-3/2} du, \text{ sustituyendo los va-}$$

$$\text{lores de } u \text{ y } du: dy = \frac{1}{2} (1-3x^2)^{-3/2} (-6x dx) \quad \text{eliminando } y \\ \text{efectuando: } dy = \frac{3x dx}{\sqrt{(1-3x^2)^3}}$$

$$3.^o \quad y = \sin (Lx)$$

$$\text{haciendo } Lx = u, \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$\text{se tendrá } y = \sin u, \quad dy = \cos u du$$

sustituyendo los valores de u y du :

$$dy = \frac{\cos(Lx) dx}{x} = \frac{1}{x} \cos(Lx) dx$$

$$4.^o \quad y = \lg(\log. x) \quad u = \log. x \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$y = \lg u \quad dy = \frac{du}{u} = \frac{\frac{dx}{x}}{\log. x} = \frac{dx}{x(\log. x)}$$

5.º $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ elevando ambos al cuadrado y diferenciando ambos:

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad 2y \, dy = 2x \, dx \quad \text{luego } dy = \frac{x \, dx}{y}$$

reemplazando y por su valor $dy = \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Podría tratarse este caso de otra manera, haciendo:

$$a^2 - x^2 = u$$

de donde

$$du = 2x \, dx$$

$$\text{Ahora tendríamos: } y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

sustituyendo los valores:

$$dy = \frac{2x \, dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$6.º \, y = \arctan \left(\frac{x-a}{b-x} \right) \text{ hagamos } \frac{x-a}{b-x} = u$$

al mismo tiempo $\frac{x-a}{dx} = \frac{v}{dv}$; luego $u = \frac{v}{z}$; $\frac{b-z}{dx} = \frac{z}{dz}$

$$y = \arctan u \quad du = \frac{z \, dv - v \, dz}{v^2}$$

$$dy \frac{du}{1+u^2} (a) \quad du = \frac{(b-x) - (x-a) \, dx}{(b-x)^2}$$

sustituyendo en (a) los respectivos valores:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{(b-x) - (x-a) \, dx}{(b-x)^2} \cdot \frac{(b+a) \, dx}{(b-x)^2} = \frac{(b+a) \, dx \cdot (b-x)^2}{1 + \frac{(x-a)^2}{(b-x)^2} \cdot \frac{(b-x)^2 + (x-a)^2}{(b-x)^2}} \\ &= \frac{(b+a) \, dx}{(b-x)^2 + (x-a)^2} \end{aligned}$$

7.º $y = e^{\sin x}$ haciendo $\sin x = u$ $du = \cos x$ tenemos:

$$y = e^u \quad dy = e^u \, du = e^{\sin x} \cos x \, dx$$

8.º $y = \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$ haciendo $u = \sqrt{1-x^2}$ para hallar du hacemos:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} n^2 &= 1-x^2 \\ 2u du &= 2x dx \\ \frac{du}{dy} &= \frac{2x dx}{2u} = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

9.º $y = x \sin x + \cos x$; hagamos $u = x \sin x$, y como es un producto, pondremos $u = vz$, siendo $v = x$ $z = \sin x$,
 $dv = dx$, $dz = \cos x$, $du = vdz - zdv$, $du = x \cos x dx - \sin x dx$.

$$y = u + \cos x$$

$$dy = \int^1 (u) + \int^1 (\cos x)$$

$$dy = x \cos x dx - \sin x dx + \sin x dx$$

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Se llama función implícita aquella que se presenta bajo la forma $\int (u) = 0$ y que no puede tomar la forma

$$\int^1 (x) = y$$

Estas funciones pueden igualarse á las funciones de dos ó más variables $z = \int (x, y)$ en cuanto á su resolución se expresa por la siguiente regla:

La diferencial de una función de dos ó más variables, es igual á la suma de las diferenciales parciales; es decir: la diferencial de la función propuesta con razón á una de las variables, considerando las demás como constantes, más la diferencial de la misma función con relación á otra variable, considerando las demás como constantes.

$$\int (xy) = 0 = \int_x (x, y) dx + \int_y (x, y) dy = 0$$

Aplicación 1.^a $y^2 = 2px \quad y^2 - 2px = 0$

diferenciando con relación a y como variable:

» » » $\int_y (y^2 - 2p \cdot x) = 2ydy$

ahora » » » $\int_x (y^2 - 2px) = 2pdx$

Luego $\int_x (x \cdot y) + \int_y (x \cdot y) = 2ydy + 2pdx = 0$

$$2ydy = -2pdx \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{y}$$

Aplicación 2.^a $a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$

$$dy = -\frac{b^2 x dx}{a^2 y} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Diferenciación de una función de varias funciones de una variable:

$u = f(y, z)$ en que y i z son funciones de x,

se tendrá $du = df. \left(\frac{x \cdot y}{dy}\right) dy + df. \left(\frac{x \cdot y}{dz}\right) dz$

pero teniendo en cuenta que dy i dz corresponden á y i z que son funciones de (x) habrá que expresarlos con relación a x lo que dá $dy = y' dx \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$; $dz = z' dx = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$ y se

tendrá $du = df. \left(\frac{xy}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) + df. \left(\frac{xy}{dz}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$

Así la diferencial de una fracción de varias variables que son á su vez función de una misma variable independiente, es igual á la suma de las diferenciales parciales con respecto á dichas variables.

DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS

Sea $f(x)$ la función primitiva, su primer derivada será, $f'(x)$ ó $\frac{df}{dx}$ ó $\frac{dy}{dx}$ — diferenciando esta nueva función se tendrá la diferencial ó derivada segunda,

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

la tercera será $f'''(x) = \frac{d^3 (f)}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3}$

y así sucesivamente.

Sean $f(x) = ax^m$ la 1.^a derivada será $\frac{dy}{dx} = ma x^{m-1}$

la 2.^a $f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = am(m-1)x^{m-2}$

la 3.^a $\frac{d^3 y}{dx^3} = am(m-1)(m-2)x^{m-3}$

1.^a $y = cx - x^2$; $\frac{dy}{dx} = c - 2x$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = -2$

2.^a $y = x^3 - 3x + 1$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$ $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6$

3.^a $y = L.x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{ax^2}{x^4}$; $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{dx^4}{x^4}$; $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dx^n}{x^n}$

4.^a $y = \sin x$

$dy = \cos x dx$

$dy^2 = -\sin x dx^2$

$d^3 y = -\cos x dx^3$

$dy^4 = \sin x dx^4$

$dy^5 = -\cos x dx^5$

5.^a $y = \cos x$

$dy = -\sin x dx$

$dy^2 = -\cos x dx^2$

$dy^3 = \sin x dx^3$

$dy^4 = -\cos x dx^4$

$dy^5 = \sin x dx^5$

6.^a $fx = a^x$

$dy = a^x \ln a dx$

$dy^2 = a^x (\ln a)^2 dx^2$

$dy^3 = a^x (\ln a)^3 dx^3$

$dy^4 = a^x (\ln a)^4 dx^4$

en algunos casos conviene hallar las derivadas por el proceder siguiente; igualando $f'(x)$ á una cantidad cualquiera $f'(x) = u$ sea $fx = y^2 + x^2 - r^2$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

haciendo $\frac{dy}{dx} = u$ tenemos $u = \frac{-x}{y} - x = u y$

diferenciando $-x = u y$, tenemos $-dx = u dy + y du$

dividiendo por dx ; $-1 = u \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} y$

$$\frac{du}{dx} = -1 - u \frac{dy}{dx} \text{ pero } \frac{dy}{dx} = u \text{ luego } \frac{du}{dx} = \left(\frac{-1 - u^2}{y} \right)$$

$$\text{pero } u^2 = \frac{x^2}{y^2} \text{ y } \frac{du}{dx} = - \left(\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{\frac{y^2}{y}} \right) = - \left(\frac{y^2 + x^2}{y^3} \right)$$

$$\text{luego } f'(x) = \frac{dy^2}{dx^2} = - \left(\frac{y^2 + x^2}{y^3} \right)$$

SÉRIE DE TAYLOR

La fórmula general de la série de Taylor ó sea el desarrollo de la $f(x+h)$ se expresa por

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3.} + f^{IV}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4.} \dots$$

$$+ f^n(2)\frac{h^n}{1.2.3\dots n}$$

en la que h es el incremento finito de la función. Esta fórmula indica el desarrollo de $f(x+h)$ según las potencias enteras y crecientes de (h) siendo entera la función; el desarrollo para la derivada de orden (n) que es el grado ó potencia de la función.

La misma forma de desarrollo se aplica á una función continua, pero en este caso este continúa indefinidamente y constituye una série.

1.º desarrollar

$$f_x = y = (x+a)^m; \text{ tenemos } f^1(x) = mx^{m-1}; f^2(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

$$f^3(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

y aplicando la fórmula:

$$f. (x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \dots$$

SÉRIE DE MACLAURIN

Si en la función $y = f(x+h)$ y en su desarrollo por la série de Newton, se sustituye x por 0 y h por x .

La fórmula anterior toma la siguiente forma:

$$y = f(0+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(0)}{1.2.3} \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\dots n} \frac{x^n}{n}$$

fórmula conocida por el nombre de Maclaurin.

Desarrollar por ejemplo:

$$y = \sin x; f^1(x) = \cos x;$$

$$f^2(x) = -\sin x; f^3(x) = -\cos x; f^4(x) = \sin x.$$

haciendo $x=0$ resulta:

$$f(x)=0; f'(x)=1; f''(x)=-0; f'''(0)=-1; f^4(x)=0$$

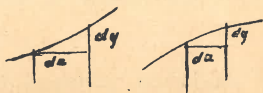
luego

$$f \sin (0+x) = 0 + x + \left(+0 x \frac{x^2}{2} \right) + -1 \left(\frac{x^3}{1.2.3.} \right) + 0 \frac{x^4}{1.2.3.4.} \dots$$

$$\dots \text{ sea } x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4} \dots$$

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE LAS CURVAS

Tomemos la función $f(x)$ que representa una curva plana y para la cual x es la ordenada e' y su abscisa.



La derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ que representa el incremento de la ordenada es la tangente trigonométrica del ángulo formado por la curva y la abscisa dx luego $\frac{dy}{dx}$ es el coeficiente angular de la tangente y fácil es percibir que cuando $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es positiva, la ordenada dy crece, la curva sube y el coeficiente angular indica un ángulo agudo.

Cuando $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es negativa, la ordenada dy decrece, la tangente forma un ángulo obtuso y la curva baja.

Cuando $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$; indica naturalmente una tangente horizontal sea paralela al eje de las abscisas.

Cuando $f(x) = 0$ es decir cuando el valor de x anula la ordenada, es evidente que la curva corta el eje de las abscisas.

Cuando $f(x)$ tiene raíces repetidas, estas convienen también á $f'(x)$ y en los puntos correspondientes habrá contacto con el eje de abscisas.

El mismo significado de $f'(x)$ se tiene con respecto á $f''(x)$ en relación con $f'(x)$ pues cuando $f''(x)$ crece el coeficiente angular aumenta y la curva presenta su curvatura hacia arriba; $f''(x)$ es negativa ó decrece, el coeficiente decrece y la curva tiene la concavidad hacia abajo; si $f''(x)$ corresponde generalmente cuando la curva pasa de cóncava á convexa, ó sea á un punto de inflexion.

Si se cambia de variable independiente y tomamos

$f(y) = x$, las mismas consideraciones sucederán teniendo presente que se aplicarán al eje de las ordenadas.

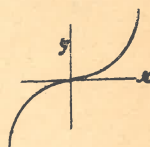
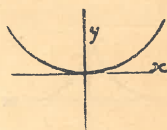
$y = f(x) = x^m$ la derivada es $\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$

supongamos m par; sea $m = 4$ $\frac{dx}{dy} = 4x^3$

positiva, $\frac{dx^2}{dy} = f''(x) = 12x^2$ siempre positi-

va aunque x sea positivo ó negativo luego la curva tiene su concavidad hacia arriba.

Si m es impar pero positivo, $f(x)$ cambia de signo, $f'(x)$ no cambia y $f''(x)$ cambia cuando x pasa de positivo á negativo, luego la curva es como lo indica la figura.



$f_x = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ se presentan 4 casos, dos en que q es par y dos en que es impar según p lo sea ó no.

para $y = \sqrt[2n]{x^{2m+1}}$

$$f' = a x^{\frac{2m-2n+1}{2n}}; f''(x) = a b x^{\frac{2m-4n+1}{2n}}$$

la curva afectará la forma de la figura 3.



(3)

$$y = x^{\frac{2m}{2n+1}} \quad y' = a x^{\frac{2m-2n-1}{2n+1}}$$

$$y'' = a b x^{\frac{2m-4n-2}{2n+1}}$$

la curva será la de la figura 4.

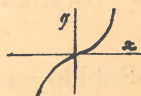


(4)

$$f y = x^{\frac{2m+1}{2n+1}}$$

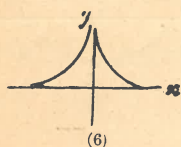
$$f' x' = a x^{\frac{2m-2n}{2n+1}} \quad f' x = a b x^{\frac{2m-4n-1}{2n+1}}$$

la curva será figura 5



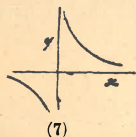
(5)

CON EXPONENTE m. NEGATIVO



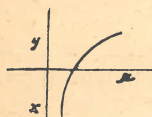
$$y = x^{\frac{1}{m}} \quad y' = -x \cdot \frac{m}{n+1}$$

$$y'' = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}}$$



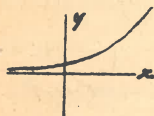
Si m es par la curva será figura 6
y si m es impar, la figura 7

CON FUNCIÓN LOGARÍTMICA



sea ahora $y = L x$

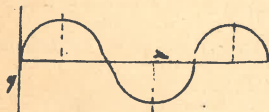
$$y' = \frac{1}{x} \quad y'' = \frac{1}{x^2}$$



para $y = a^x$

$$y' = \ln a^x$$

$$y'' = (\ln a)^2 a^x$$



para $y = \sin x$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

TANGENTES Y NORMALES Á LAS CURVAS PLANAS

Sabido es que la diferencial $\frac{dy}{dx}$ representa el coeficiente angular de la tangente, para el incremento de y en función de x, facil es por este medio determinar las tangentes á curvas cuyas ecuaciones son dadas.

De la geometría analítica se tiene para la ecuación de una tangente en el punto cuyas coordenadas son $y' x'$

$$y - y' = a (x - x')$$

en la cual a es el coeficiente angular que en este caso puede sustituirse por su equivalente $\frac{dy}{dx}$

$$\text{luego } y - y' = \frac{dy}{dx} (x - x') \quad (1)$$

que es la ecuación general de la tangente á una curva cualquiera. De la misma manera se obtiene para la normal:

$$y - y' = \frac{dx}{dy} (x - x') \quad (2)$$

1.º Ejemplo: Tangente á la circunferencia $y^2 + x^2 = r^2$

diferenciando $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

y para el punto dado $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'}{y'}$

Sustituyendo ese valor en la ecuación general 1

$$y - y' = -\frac{x'}{y'} (x - x') \quad \text{transformando:}$$

$$y y' - y'^2 = -x x' + x'^2 \quad y y' + x x' = x'^2 + y'^2$$

pero también $y y' + x x' = y'^2 + x'^2 = r^2$

luego $y y' + x x'$ ó $y'^2 + x'^2$ es constante é igual á r^2 .

2.º Tangente á la Elipse.

Su ecuación es $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

de donde $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$; y p.^a el punto de contacto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

luego la ecuación de la tangente:

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x')$$

y la de la normal. $y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x')$

Para la hypérbola se tiene; tang. $(y - y') = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x')$

normal $(y - y') = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x')$

3.º Para la Parábola — cuya ecuación es $y^2 = 2px$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

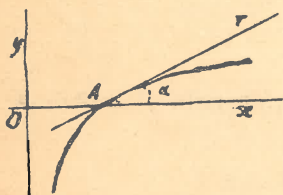
$$\text{tang. } (y - y') = \frac{p}{y'} (x - x')$$

$$\text{normal } (y - y') \frac{y'}{p} (x - x')$$

4.—Para la logarítmica:

$$y = \log. x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log. e}{x} = \frac{0.4343}{x}$$

$$\text{tangente } (y - y') = \frac{0.4343}{x'} (x - x')$$



$$\text{Siendo } x' = 0 \quad y' = \log. x' = -\infty$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = \infty$$

lo que indica que el eje de las y es asíntota á la curva del lado

de las y negativas.

para $x' = 1$

$$y' = \log x' = 0 \quad \text{luego } \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = \log. e$$

luego en el punto A donde la curva corta el eje x se tiene

$$\text{tang } \varphi = 0,4323$$

para $x' = \infty$

$$y' = \log x' = \infty \quad y \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x'} = 0$$

luego la curva se alza constantemente del eje de las x y al infinito llega á ser paralela á ese eje,

5.º Para la sinuosidad $y = \sin x$

$$\text{Se tiene } \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\text{y la tang } (y - y') = \cos (x - x')$$

si $x' = 0$

$$y' = \sin x' = 0; \quad y \frac{dy}{dx} = \cos x'$$

luego la curva pasa por el origen o y la tangente φ se hace $= 1$ luego $\tan \varphi = 1 = 45^\circ$,

Para $x' = \pi = 180^\circ$

$$y' = \sin x' = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \cos x' = \cos \pi = -1$$

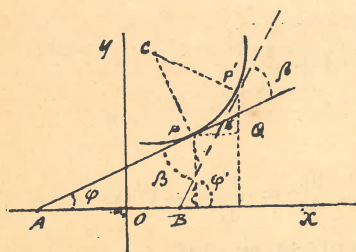
Así en el punto B que dá $x' = \pi$ sostiene $\tan \varphi' = -1 = 135^\circ$

$$\text{para } x' = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ \quad \cos x' = 0 \quad \text{y } \tan \varphi = 0$$

lo que indica que en los puntos A y C la tangente es paralela al eje de las x.

RADIO DE CURVATURA

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva PP'M, y PA, P'B las tangentes de dos puntos tan próximos que casi se confunda la curva con las tangentes.



PO, P'O las normales de los puntos P, P' que concurren al centro C de curvatura, CP será el radio de

curvatura del punto P y será perpendicular á PA.

$$\text{Luego: } \tan \beta = \frac{PP'}{CP}, \text{ de donde } CP = \frac{PP'}{\tan \beta} \quad [1]$$

Pero, $\tan \beta = \tan \beta'$ pues que los dos triángulos POP' y AEB tienen sus lados recíprocamente perpendiculares; así se tendrá $CP = \frac{PP'}{\tan \beta} \quad [2]$, pero $\beta = (\varphi - \varphi')$

$$\text{luego } \tan \beta = (\varphi - \varphi') = \frac{\tan \varphi - \tan \varphi'}{1 + \tan \varphi \tan \varphi'} \quad [3]$$

haciendo, $\text{tang. } \varphi = n \dots$ y $\text{tang. } \varphi' = n'$, y atendiendo que en el presente caso las dos tangentes difieren solo en la diferencial dn , se tiene $n' = n + dn$, luego sustituyendo este valor en la (3)

$$\text{tang. } \beta = \frac{n + dn - n}{1 + n(n + dn)} = \frac{dn}{1 + n^2 + n + dn}$$

Por otra parte en el triángulo rectángulo $P'QP$ se tiene

$$PP' = \sqrt{P'Q^2 + PQ^2} = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sustituyendo en [1] estos valores de PP' y $\text{tang. } \beta$.

$$CP = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dn}{1 + n^2 + n + dn}} = dx \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} (1 + n^2 + n + dn)}{dn}$$

$n + dn$ puede despreciarse con relación á $1 + n^2$, así que dividiendo por dx

$$\text{Radio } R = CP = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} (1 + n^2)}{\frac{dn}{dx}}$$

Haciendo ahora,

$$n = \text{tang. } \varphi = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dn}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

la relación anterior puede expresarse por

$$R = \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2} (1 + [f'(x)]^2)}{f''(x)} = \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}^3}{f''(x)} \quad [4]$$

que es la ecuación general del radio de curvatura.

Aplicación á la parábola $y^2 = 2px$

$$n' = f'(x) = \frac{dn}{dx} = \frac{p}{y} \cdot (f'(x))^2 = \frac{p^2}{y^2}$$

pero de $n = \frac{p}{y}$ se tiene $yn = p$ diferenciando

$$y \frac{dn}{dx} + n \frac{dy}{dx} = 0; \text{ sea } y \frac{dn}{dx} + n^2 = 0$$

de donde $y \frac{dy}{dx} = \frac{-n^2}{y}$ pero $n^2 = \frac{p^2}{y^2}$

luego $\frac{dn}{dx}$ ó sea $f''(x) = \frac{-n^2}{y} = \frac{-p^2}{y^3}$

y substituyendo esos valores en la fórmula (4)

$$R = \frac{V \left[1 + \left(\frac{p^2}{y^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{-p^2}{y^3}} = \frac{-y^3 (y^2)^{\frac{3}{2}} + (p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2 (y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

para $y=0$ por consiguiente en el vértice de la curva

$$R = \frac{(p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{p^{\frac{6}{2}}}{p^2} = \frac{p^3}{p^2} = p$$

luego para el vértice el radio es igual al parámetro.

NOTA.—El signo de R depende del de $f''(x)$, así cuando $f''(x)$ sea positivo R lo será y la curva tendrá su convexidad hacia arriba; cuando R resulte negativo la convexidad será hacia abajo.

Ejemplo 2.º — El radio de curvatura de la Elipse será

$$\text{de } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad f'(x) = \frac{b}{a} \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

de donde:

$$R = \frac{V \left[a^2 - x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{-ab} \text{ como fórmula general.}$$

Si se tiene $x=0$, es decir, para el extremo del eje menor

$$\text{se tendrá: } \varphi = \frac{-b^2}{b}$$

lo mismo para $x=a$, al extremo del eje mayor:

$$r = \frac{-b^2}{a}$$

Ejemplo 3.º — Para la circunferencia resulta:

$$y^2 + x^2 = r^2 \quad f'(x) = \frac{-x}{y} \quad f''(x) = \frac{-(y^2 + x^2)}{y^3}$$

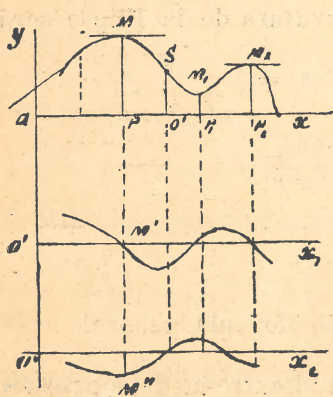
$$R = \frac{\sqrt{\left(1 + \left[\frac{x}{y}\right]^2\right)^3} y^3}{-\frac{(y^2 + x^2)}{y^3}} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} y^3}{-\frac{(y^2 + x^2)}{y^2}} = \frac{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} y^3}{-(y^2 + x^2)(y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y^2 + x^2}$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Se llama *valor máximo* de una función al que es mayor que el que le precede y que el que le sigue; del mismo modo, *valor mínimo*, es el que es menor que el precedente y siguiente.

La figura adjunta representa el desarrollo de la función



y = f(x), así como el de su primera y segunda derivada.

La curva C, representativa de la función y = f(x), indica que la tangente va creciendo hasta el punto M donde llega á ser paralela al eje de abscisas, esto es, $y = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es creciente hasta llegar á M, donde $\frac{dy}{dx} = 0$ y

luego decreciente hasta llegar á M, donde también siendo paralela al eje de abscisas vuelve á ser $\frac{dy}{dx} = 0$.

Los puntos M M₂ son máximos y M₁ es mínimo.

Luego todo máximo ó mínimo de la función y = f(x)

responde á una derivada de primer orden de valor nulo,
 $y^1 = f^1(x) = \frac{dy}{dx} = 0$.

Así los puntos M' M'_1 M'_2 de la curva C_1 se encuentran sobre el eje $o_1 x^1$.

Para distinguir un máximo de un mínimo hay que recurrir á la derivada segunda representada por la curva C_2 y por ella se vé: que á un máximo P M corresponde en la curva C_2 una ordenada negativa, mientras que al mínimo M_1 P_1 corresponde una ordenada positiva P'' M'' ; de donde se deduce que es el signo de la derivada segunda $y'' = f''(x)$ el que hace distinguir un máximo de un mínimo, siendo así que para el primero corresponde la derivada de signo negativo y positivo para el segundo.

La regla general á seguirse puede espresarse así: dada una función y de una sola variable x , tómese la derivada primera de y con relación á x y se iguala á cero ese valor, así:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

Resuelta esta ecuación, dará para x valores que corresponderán á máximos y á mínimos, para determinarlos se deduce la derivada segunda $y'' = f''(x)$, y según sea esta derivada negativa ó positiva, resultará un máximo ó un mínimo.

Ejemplo 1.º — $y = cx - x^2$; tomando las derivadas primera y segunda

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = c - 2x = 0, \text{ de donde } x = \frac{c}{2}$$

$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -2$, siendo negativa esta derivada el valor $x = \frac{c}{2}$ corresponde á un máximo.

Ejemplo 2.^o $y = 2ax^2 + 2bx^{-1}$, corresponde á $y = f(x)$

derivada primera $f'(x) = 4ax - 2bx^{-2} = 0$, de donde $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$

» segunda $f''(x) = 4x + \frac{4b}{x^3}$ valor positivo,

luego el valor hallado para x , corresponde á un mínimo.

Ejemplo 3.^o — Supóngase que la curva M S M, responde á la ecuación

$y = x^3 - 3x + 1$ [1] relacionada á los ejes $O'y'$ $O'x$

La primera derivada es $f'(x) = y' = 3x^2 - 3$

la segunda » » $f''(x) = y'' = 6x$

haciendo $3x^2 - 3 = 0$ se tiene $x = \pm 1$

de $y'' = 6x = 0$ se tiene $x = 0$.

Sustituyendo el valor de x , en la ecuación [1]

$$y = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y = -1 + 3 + 1 = +3$$

Así las coordenadas de los puntos M y M_1 serán

para el máximun M $\left\{ \begin{matrix} y = +3 \\ x = -1 \end{matrix} \right.$ para M_1 mínimun $\left\{ \begin{matrix} y = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right.$

El punto de inflexión S se halla determinado por la resolución de la derivada segunda, pues teniendo

$$y'' = 6x = 0, \text{ de donde } x = 0,$$

resulta que S se hallará sobre el eje de las y sea $O'y$ así mismo por la resolución de la ecuación [1] con $x = 0$

se tiene $y = +1$

DIFERENCIALES

DE LAS FUNCIONES SIMPLES Y MÁS COMUNES

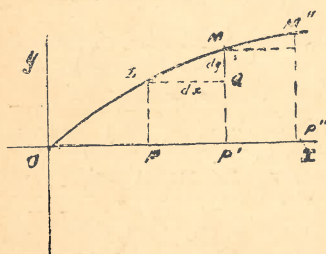
FUNCIONES	DIFERENCIALES
$y = x^m$	$dy = mx^{m-1} dx$
$y = e^x$	$dy = e^x dx$
$y = m^x$	$dy = m^x \text{ Lm. } dx$
$y = \text{L. } x$	$dy = \frac{dx}{x}$
$y = \sin. x$	$dy = \cos x. dx$
$y = \cos. x$	$dy = -\sin x. dx$
$y = \text{tang. } x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$y = \text{arc. sin. } x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc. cos. } x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc. tang. } x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
$y = \log. x$	$dy = \log. \left(1 + \frac{dx}{x}\right)$
$y = \frac{u}{v}$	$dy = \frac{v. du - u. dv}{v^2}$
$y = u. v.$	$dy = u. dv + v. du$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{1}{x^2}$

CÁLCULO INTEGRAL

El cálculo integral tiene por objeto el encontrar la función de que procede una derivada ó diferencial conocida; esto es dada una diferencial hallar la función que la produjo; $\int f(x) dx = f(x)$

Como dos funciones $y = \int (x)$ y $y = f(x) + C$ dan la misma diferencial $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y que en si no se diferencian más que por la constante arbitraria C , se deduce que; dada una diferencial $y' = f'(x)$ su función primitiva debe ser de la forma $y = f(x) + C$. Luego para integrar $\int f'(x)$, se tiene $f(x) + C$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA INTEGRAL



Supongamos que se dé una diferencial $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y que se quiere buscar la función primitiva; supongamos también el problema resuelto y que esa función represente la curva LM

M'' dibujada con relación á sus ejes de coordenadas y y x .

Si consideramos un pequeño incremento $PP' = dx$ se comprende que la ordenada y variará en una proporción dada de una cantidad dy , luego en el presente caso la ordenada $P'M = LP + dy = y_x dy$; pero en el triángulo

L Q M, $dy = dx \text{ tang. } (M L Q)$; la tang. (L M Q) se deduce de 1: tang. $\therefore dx : dy$, tang. $= \frac{dy}{dx}$ luego, $dy = dx \frac{dy}{dx} = dx \int (x) = y' dx$

Como el aumento de todas las ordenadas sigue la misma proporción, resulta que la ordenada final M' P' es la suma de L P = y, más los incrementos dy, luego

$$dy = \Sigma y' dx$$

que también puede escribirse $\int dy = \int y' dx$, lo que dice: integral de dy igual integral de y dx.

Límites de una integral. — En el presente caso se desea calcular esa suma $\Sigma y' dx$ solo entre las abcisas L P y M' P' para las cuales las ordenadas son respectivamente $x = AQ = a$ y $x' = OP = b$, luego serán estos los límites entre los cuales deberá calcularse la integral y se escribirá la expresión anterior:

$$\int_a^b dy = \int_a^b y' dx.$$

Si en el origen de las abcisas y ordenadas O debe empezar el cálculo, es evidente que a será o, luego:

$$\int_o^b dy = \int_o^b y' dx.$$

del mismo modo si empezára el cálculo á la izquierda de o, a sería negativo:

$$\int_{-a}^b dy = \int_{-a}^a y' dx.$$

El uso de esos límites es sustituir esos valores en la integral hallada, dándole así dos valores para luego restar el uno del otro si fuera necesario.

Cuando los límites entre los cuales se calcula una integral son conocidos, se dice que la *Integral es definida*, en caso contrario toma el nombre de *Integral indefinida*.

Reglas de integración

FUNCIONES SIMPLES

Una integral monomía se obtiene aumentando una unidad al esponente de la variable y dividiéndola por ese esponente aumentado

$$\text{así } \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

como prueba de esta regla tenemos $y = x^m$, su diferencial es $dy = mx^{m-1} dx$, luego si se busca la integral:

$$dy = \int mx^{m-1} dx$$

es evidente que aplicando la regla se tiene

$$\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = \frac{m x^m}{m} = x^m + c$$

$$dy = \int (x-a)^m, \quad y = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + c$$

$$dy = \int \sin^m x dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + c, \quad \text{para } dy = \int (a + bx^m)^p$$

haciendo $a + bx^m = z$, se tiene $dz = mbx^{m-1} dx$

por otra parte teníamos $dy = \int z^p$ de donde

$$y = \frac{z^{p+1}}{p+1} + c, \quad \text{sustituyendo } y = \frac{(a + bx^m)^{p+1}}{p+1} + c$$

La misma regla es aplicable cuando en una integral dada hay dos factores de los cuales el uno es diferencial del otro; con escepción de los factores, como en:

$$y = \int x^{m-1} dx (a + bx^m)^p$$

en que x^{m-1} es diferencial de $a + bx^m$

En efecto, haciendo $a + bx^m = z$ tenemos $dz = mbx^{m-1} dx$,

de donde $x^{m-1} dx = \frac{dz}{mb}$; sustituyendo:

$$y = \int \frac{dz}{mb} z^p = \frac{1}{mb} \int z^p dz = \frac{z^{p+1}}{mb(p+1)}$$

y dando á z su valor

$$y = \frac{(a + bx^m)^{p+1}}{mb(p+1)} + c$$

La integral de una suma de diferenciales de una misma variable x , se obtiene haciendo la suma de los integrales de las deferenciales parciales.

$$\int d(u + v - z) = \int du + \int dv - \int dz + c$$

$$y = \int x^m dx + \int x^n dx - \int x^0 dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$dy = \frac{\log e}{x} dx + \cos x dx \text{ será; } y = \int \frac{\log e}{x} dx + \int \cos x dx$$

$$y = \log. x + \sin x + c$$

$$dy = (ax + x^2)^2 dx = \int a^2 x^2 + \int 2ax^3 + \int x^4 dx = \frac{a^2 x^3}{3} + \frac{3ax^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c$$

Se deduce de estas aplicaciones que los factores independientes ó constantes de la diferencial, son conservados en la integral obtenida.

INTEGRALES LOGARÍTMICAS

Cuando bajo el signo de la integral hay una diferencial de una función partida por la función, esa integral se expresará por logaritmos.

$$\int \frac{dx}{x} = L. x + c$$

$$dy = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + -L \cos x + c \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = z \\ \sin x dx = dz \\ \frac{dx}{z} = (L \cos x + c) \end{array} \right.$$

$$dy = \int \frac{x dx}{(x^2 - a)} = L. (x^2 - a) + c \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - a = z \\ 2x dx = dz \\ x dx = \frac{dz}{2} \end{array} \right. \text{ luego } dy = \int \frac{dz}{2z}$$

$$y = Lz = L(x^2 - a) + c$$

$$dy = \int \frac{x^{m-1} dx}{(a + bx^m)} \text{ haciendo } a + bx^m = z \text{ } dz = mbx^{m-1} dx.$$

$$y; \quad x^{m-1} dx = \frac{dz}{mb} \text{ luego } \int \frac{x^{m-1} dx}{a + bx^m} = \frac{1}{mb} \int \frac{dz}{z}$$

y entonces la integral de esa forma será:

$$y = \frac{1}{mb} L. (a + bx^m) + c$$

pero dividir un logaritmo por una cantidad es la extracción de la raíz del número, luego $\frac{1}{mb} Lz = L \sqrt[mb]{z}$. luego tenemos que $\frac{1}{mb} L (a + bx^m) + c = \frac{L \frac{c}{mb}}{\sqrt[mb]{a + bx^m}}$

INTEGRALES EXPONENCIALES

$$dy = e^x dx; \quad y = \int e^x dx = e^x + c$$

$$dy = a^x L. adx; \quad y = \int a^x L. adx = a^x + c$$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Estas integrales son las de la forma:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

INTEGRALES CICLOMÉTRICAS

Son las de la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc.} \sin x + c$

$$y = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \text{ sacando } a^2 \text{ del radical:}$$

$$\int \frac{a \, dx}{a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

haciendo $\frac{x}{a} = z$ a $z = x$ a $dz = dx$; y $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = z^2$

luego substituyendo:

$$\int \frac{a \, dz}{\sqrt{1 - z^2}} = a \arcsin z + c$$

sea.....a $\arcsin \frac{x}{a} + c$

DIFERENTES MÉTODOS. — FRACCIONES RACIONALES. — INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN Ó CAMBIO DE LA VARIABLE

$y = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$ poniendo $x^2 + p^2 = u^2$; $u \, du = x \, dx$

podrá escribirse $\int \frac{u \, du}{\sqrt{u^2}} = \int \frac{u \, du}{u} = \int du = u + c$

reemplazando u por su valor $\sqrt{x^2 + p^2}$

se tendrá $y = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \sqrt{x^2 + p^2} + c$

Integración por partes = Así como para diferenciar un producto $d(uv)$ se tiene $dy = u \, dv + v \, du$, la integral de un producto $\int (u \, dv)$, ambas funciones dx , será;

$$\int (u \, dv) = u \, v - \int v \, du.$$

$\int x \cos x \, dx$ haciendo $(x = u)$, $(\cos x \, dx = dv)$, $(\sin x = v)$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \int (u \, dv) = u \, v - \int v \, du = \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

2.º $y = \int l x \, dx$ haciendo $l. x = u$ y; $dx = dv$ y aplicando la fórmula $u \, v - \int v \, du$ tenemos $du = \frac{dx}{x} x = v$.

$$y = x l. x - \int x \frac{dx}{x} = x l x - x.$$

$$3.^\circ \quad y = \int x \sin x \, dx; \quad u = x; \quad du = dx \quad L v = \sin x \, dx \, v = \\ = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$\text{de donde } y = \int x \sin x \, dx = \int (u \, dv) = u v - \int v \, du \\ = x \cos x - \int \cos x \, dx = x \cos x + \sin x + c$$

$$4.^\circ \quad y = \int l. x \, dx. \text{ haciendo } l x = u; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad dx = dv; \quad x = v$$

$$\text{luego } y = \int l x \, dx = \int (u \, dv) = x l x - \int \frac{x dx}{x} = \\ = x l x - \int dx = x l x - x$$

$$5.^\circ \quad y = \int x^2 \cos x \, dx \quad \text{haciendo } u = x^2 du = x \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx \quad v = \sin x$$

$$\text{luego } x^2 \sin x - \int \sin x \, dx$$

haciendo nuevamente la integración del producto:

$$\int x \sin x \, dx$$

en el cual

$$x = u \quad dv = x \sin x \, dx$$

$$dx = du \quad v = \cos x$$

$$\text{tenemos: } \int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int \cos x \, dx = x \cos x - \sin x.$$

$$\text{luego: } \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - (-x \cos x + \sin x) = \\ = x^2 \sin x + x \cos x - \sin x$$

INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES

Sea

$$y \int \frac{5x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

1.º Efectuar la división si hubiese lugar á ello, para reducir la fracción (será preciso que el esponente mayor esté con el denominador).

2.º Buscar las raíces enteras del denominador. En el presente caso estas son tres, á saber:

$$= (x - 1) (x + 1) (x + 2)$$

3.º Sustituir la función dada por la suma de nuevas — fracciones representando el numerador por A.B.C.... en el presente caso $5x^2 - x - 3 = A.... B.... C$, sean pues

$$\int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

4.º Reducir estas fracciones al común denominador

$$A(x+2)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x-2) = Ax^2 - Ax - 2A - Bx^2 - B - Cx^2 - 3Cx + 2C = 5x^2 - x - 3$$

5.º Separando los factores de x^2 de x y de 3 cambiando los signos é igualando los factores;

$$\begin{aligned} x^2 (A + B + C) &= 5 \\ -x (A + B + 3C) &= 1 \\ - (2A + 2B - 2C) &= 3 \end{aligned}$$

y resolviendo ahora estas ecuaciones se tiene;

$$\begin{aligned} A + B &= 7 & A &= -8 \\ 2A + B &= 7 & B &= +5 \\ 2C &= 1.5 & C &= +2 \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} &= \int \frac{8dx}{(x-1)} + \int \frac{15dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x+2} \\ &= 8 \log. (x-1) + 15 \log. (x+1) + 2 \log. (x+2) + c \end{aligned}$$

Así se vé que siempre que pueda descomponerse una fracción empleando factores indeterminados se le convertirá á la forma:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = \int \frac{A}{(x-a)} \pm \int \frac{B}{(x+b)} \pm \int \frac{C}{(x-c)} \dots$$

Cuyas integrales serán siempre de la forma logarítmica

$$L(x+a)$$

Si la fracción racional dada tuviera raíces reales y repetidas:

Por ejemplo, $F(x) = (x-a)^3(x-b)(x-c)$ lo que indica una ecuación de quinto grado, podrá ponerse bajo la siguiente forma para tener cinco funciones:

$$\int \frac{f_x}{F(x)} = \int \frac{A}{(x-a)^3} + \int \frac{B}{(x-a)^2} + \int \frac{C}{(x-a)} + \int \frac{D}{x-\varphi} + \int \frac{C}{x-\beta}$$

Las dos primeras fracciones pueden integrarse, haciendo $(x-a) = z$ de donde:

$$dx = dz \text{ y } \int \frac{A dz}{z^3} = A \int z^{-3} dz = \frac{1}{2} A z^{-2} = \frac{1}{2} A (x-a)^{-2} = \frac{A}{2(x-a)^2}$$

$$\int \frac{B dx}{(x-a)^2} = -\frac{B}{x-a} \text{ los demas } \int \frac{C}{x-a} = \log. (x-a)$$

y se tendrán:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{2(x-a)^2} - \frac{B}{x-a} + l(x-a) + l(x-\varphi) + \lg. (x-\beta) + c$$

Luego la integral de una fracción cuyo denominador tiene sus raíces reales, da origen á integrales parciales que son logaritmas ó monomías.

Si la fracción dada tuviera raíces imaginarias

$$x = a + b \sqrt{-1}$$

con su conjugada $a - b \sqrt{-1}$ que dan lugar á la existencia de un factor real de 2.º grado en $F(x)$ de la forma:

$$(x-a)^2 + b^2;$$

Así podrá la fracción descomponerse como sigue:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = \int \frac{A + Bx}{(x-a)^2 + b^2} + \int \frac{A' + B'x}{(x-a')^2 + b^2} + \int \frac{c}{x-\alpha'} + \dots$$

para integrar:

$$\int \frac{A + Bx}{(x-a)^2 + b^2} dx = \int \frac{A dx}{(x-a)_{(1)}^2 + b^2} + \int \frac{x B dx}{(x-a)_{(2)}^2 + b^2}$$

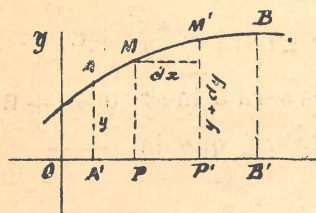
a primera es de la forma de; arc. tang. y la segunda se integra haciendo $(x-a) = Z$; $\frac{x}{dx} = \frac{Z-a}{dz}$ de donde:

$$A \int \frac{dz}{z^2 + b^2} = B \int \frac{x dx}{(x-a)^2 + b^2} = B \int \frac{(a+z) dz}{z^2 + b^2} = Ba \int \frac{dz}{z^2 + b^2} + B \int \frac{z dz}{z^2 + b^2}$$

y por fin sustituyendo:

$$\int \frac{A + Bx dx}{(x-a)^2 + b^2} = \left(A + Ba \right) \int \frac{dz}{z^2 + b^2} + B \int \frac{z dz}{z^2 + b^2} = \frac{A + Ba}{b} \text{arc. tang. } \frac{x-a}{b} + B \text{lg. } \left((x-a)^2 + b^2 \right)$$

CUADRATURA DE LAS ÁREAS PLANAS



Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva AB que limita una figura AA' BB' cuya superficie se desea conocer; tomándose dos puntos MM' muy próximos entre si, cada

uno tendrá por coordenadas:

$$M, (y \ x) \quad M' (y + dy) (x + dx)$$

luego formarán un trapecio MPP'M', cuya área es:

$$ds = \frac{y + (y + dy)}{2} dx$$

pero la superficie total S, será la suma de los elementos

$$ds, \text{ y podrá expresarse: } S = \int ds = \int \frac{y + (y + dy)}{2} dx$$

En su estado de límite dy puede ser despreciada y la expresión $\frac{y + (y + dy)}{2} dx$ convertirse en $y dx$

luego se tendrá como ecuación general para la cuadratura de las areas (1) $\int = \int y dx$

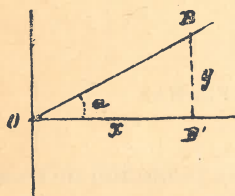
Esta integral se halla casi siempre definida por conocerse los límites de la area que se desea conocer y entonces si se conoce, $0 A' = X$ y $0 B' = X'$

se expresara $S = \int_X^{X'} y dx$

y siendo conocido $AA' = Y$ y $BB' = Y'$

$$S = \int_Y^{Y'} y dy$$

1.^a Aplicación—Superficie de un triángulo rectángulo.



La ecuación de la línea $\int(a) = y = ax$ sustituyendo en la ecuación general $S = \int y dx$ el valor de y é integrando:

$$S = \int_0^b ax dx = \frac{ax^2}{2} + C$$

tomando $x = 0$ y $x = b$, para $x = 0$ S será 0; luego $0 = 0 + C$ de donde $c = 0$ queda sólo el límite $< \int$, que dá

$$S = \frac{ab^2}{2} + c - (0 + c) = \frac{ab^2}{2}$$

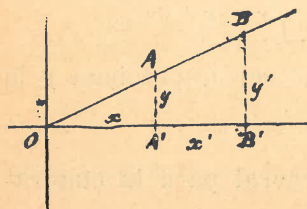
buscando el valor del coeficiente a con relación á

$$0 B' = b \text{ y } BB' = h \quad r: \text{ tang. } a :: b : h \quad a = \frac{h}{b}$$

y sustituyendo $S = \frac{hb^2}{2} = \frac{hb}{2}$

que es realmente la superficie buscada.

2.^a Superficie de un trapecio.



La ecuación de la línea AB es $y = ax$ y la ecuación general $S = \int y dx$ sustituyendo (y) por su valor, é integrando dentro de los límites:

$$0 A' = X \text{ y } 0 B = X'$$

$$S = \int_X^{X'} ax \, dx; \text{ pero para } X \text{ se tiene } \int_0^X ux \, dx = \frac{a X^2}{2}$$

$$\text{y para } X' \int_0^{X'} ax \, dx = \frac{a X'^2}{2}$$

$$\text{luego } \int_X^{X'} ax \, dx = \int_0^{X'} ax \, dx - \int_0^X ax \, dx = \frac{a X'^2}{2} - \frac{a X^2}{2} = \frac{a}{2} (X'^2 - X^2)$$

Resultando:

$$S = \int_X^{X'} ax \, dx = \frac{a}{2} (X'^2 - X^2) \quad (n)$$

Para hallar el valor del coeficiente a

llamando $BB' = Y$ y $AA' = Y'$

$$a = \frac{Y}{X'}, \text{ y } a = \frac{Y'}{X} \text{ de donde } Y' = a X' \text{ y } Y = ax$$

sumando ambas expresiones:

$$Y' + Y = a (X' + X) \text{ de donde } (X' - X) = \frac{Y' + Y}{a}$$

y substituyendo este valor de $X' + X$ en (n)

$$S = \frac{a (Y' + Y) (X' + X)}{2 a} = \frac{(Y' + Y) (X' + X)}{2}$$

y efectivamente Y y Y' son las dos alturas y $X' - X$ la

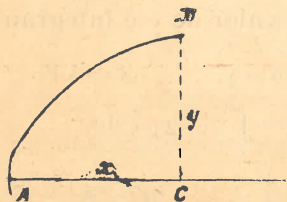
base b lo que permite escribir $S = \frac{(h' + h) b}{2}$

3. Superficie de la Eclipse.

Cuya ecuación es $ax^2 + bx^2 = a^2 b^2$

$$\text{de donde } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

valor que substituido en la fórmula general dá



$$\int y \, dx = \int_0^X \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

desde ya se vé que para $x = 0$, S será 0 y $C = 0$

ahora integrando:

$$S \int_0^x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{a} \times \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

para $x = a$; $y = b$ luego substituyendo x por a se tiene solo

$$S = \frac{ab}{2} \arcsin 1, \text{ pues } \frac{b}{a} \times \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - a^2} = 0$$

$$\text{y finalmente } S = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi ab}{4}$$

que es la superficie de la $\frac{1}{4}$ parte, así es que la fórmula para el total es:

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi ab \dots$$

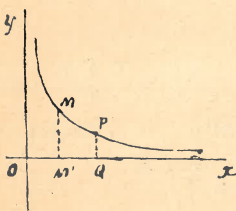
si se hiciera $a = b = r$, la ecuación última se transformaría en $S = \pi r^2$ que sería la del círculo.

4.º Superficie de la hipérbola, cuya ecuación referida á

sus asíntotas es $p = xy \quad y = \frac{p}{x}$

$$s = \int y dx = \int \frac{p}{x} dx = p \log x + c$$

contando la superficie desde $x = a$ se



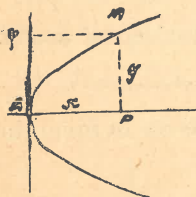
tiene $p \log a + c = 0 \quad y \quad c = -p \log a$; para

$$MNPQ; \quad p \int_a^x \frac{dx}{x} = p \log x - p \log a = p \log \left(\frac{x}{a} \right)$$

ó finalmente $S = p \log \left(\frac{x}{a} \right)$.

5.º Superficie de la Parábola, cuya ecuación referida á

su vértica es $y^2 = 2px; \quad y = \sqrt{2px}$



Substituyendo ese valor de y é integran-

do entre los límites 0 - y ; $x = A^2$:

$$S = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2px} dx$$

$$\int_0^x \sqrt{2px} dx = \int \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2 \frac{\sqrt{2px^3}}{3} + c =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2px} + x + c = \frac{2}{3} yx + c$$

como para $x=0$, $s=0$ resulta $C=0$

y substituyendo y e' x por Y y X

$$S = \frac{2}{3} X Y$$

es decir que el area de una media parábola ó segmento AMF son los $\frac{2}{3}$ del rectángulo de los coordenados x . y .

la parábola entera es $\frac{4}{3} X Y$ siendo $Y=2Y$

6.º Superficie de la Logarítmica

$$y = \log. x$$

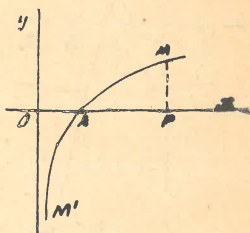
$$S = \int y dx = \int \log. x dx =$$

$$= (\log. x - \log. e) + c = x \log. \frac{x}{e} + c$$

ó tomando logaritmos neperianos

para los cuales $\log. e = 1$

$$S = \int L. x dx = x L. x - x + c (m)$$



como para $x=0$ la superficie s es 0 se tendrá $0=0+c$ y $c=0$ la relación (m) se convierte pues en $S = x L. x - x$ integrando entre los límites $x=1=OA$ y $x=X=OP$ se tiene para la area AMP

$$S = \int_1^X L. x dx = X L. X - X - (1 - 1) = X L. X - X + 1$$

y para la parte OAM' entre los límites:

$$x=0 \text{ y } x=1=OA$$

$$S = \int_0^1 L. x dx = 0 - 1 = -1$$

Según esta expresión la area de OM' equivale al area del cuadrado que tiene por costado OA tomado por unidad. Si á la escala, OA mide 10 centímetros, por ejemplo, la area OM' será = 100 centímetros cuadrados.

AREAS POR APROXIMACIÓN

Para muchos casos, ya sea por complicación en el cálculo ya sea por no requerir una gran exactitud, se emplea para la cuadratura de las áreas limitadas por una ó varias curvas, el método de aproximación por medio de

la *fórmula de Simpson*.



Dividiendo la base en un número par de partes iguales = δ , sea ahora $\delta = 8$.

$$S = \frac{\delta}{3} \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 \dots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_{n-2}) \right]$$



Así mismo se procedería en caso de dos curvas, trazando las ordenadas de y_0 á y_4 perpendiculares á una

base AB.

La fórmula aproximativa, que será más exacta cuanto más pequeña sea δ , dice que la superficie es igual al producto del tercio de δ , por la suma de las ordenadas extremas, más cuatro veces la suma de las ordenadas impares, más dos veces la suma de las ordenadas pares.

Para calcular con facilidad y aproximación suficiente las ordenadas $y_0 \dots$ conviene á veces emplear la fórmula de interpolación, sean x_1, x_2, x_3, x_4 .

y $y_1 - y_2 - y_3 - y_4$ los valores simultáneos que toman las ordenadas con relación á las abcisas según una ley particular de las relaciones entre ellas.

La ley que liga entre ellos todos esos valores y sus intermedios, puede ser representada por:

$$y = A y_1 + B y_2 + C y_3 + D y_4 \dots (4)$$

fórmula fácil de aplicar conociendo los valores de los coeficientes A. B. C. D. dependientes de los valores de x.

Según Lagrange, se tiene la siguiente ley para ligar y conocer esos coeficientes:

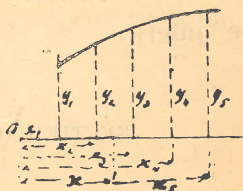
$$A = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots}$$

$$B = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots}$$

$$C = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \dots}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots}$$

$$D = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots}$$

Ley fácil de observar, pues en el numerador y denominador hay tantos factores como términos menos uno, x, que no entra en el numerador del coeficiente A, es por lo contrario



el primer término de cada diferencia de su denominador; x_2 que no se halla en el numerador del segundo coeficiente B, es a su vez el primer término de las diferencias de su denominador y así sucesivamente.

Supóngase como ejemplo que se conozcan algunas coordenadas y se desee interpolar otras en sus intervalos.

Téngase $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ como abscisas y y como ordenadas correspondientes

$$y_1 = 4, y_2 = 20, y_3 = 35, y_4 = 84.$$

buscando la relación ó valor de los coeficientes, en número igual al de términos conocidos (en este caso 4), se obtendrá el valor de ellos en función de un término x no conocido aún, así que dándole después diferentes valores, como ser

$$x = 2 \text{ ó } x = 3, 5 \text{ ó } x = 5$$

para el presente caso; se obtendrá por la fórmula (4) el valor de y correspondiente a esa x .

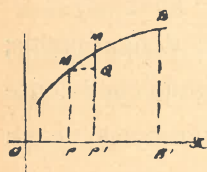
En el presente caso resultaría substituyendo en (4) A. B. C... por sus valores:

$$y = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} \times 4 + \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} \times 20 \\ + \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} \times 35 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} \times 84$$

que se reduce a $y = \frac{1}{6} (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

que dará el valor de y con sólo dar a x el valor que se quiera.

RECTIFICACIÓN DE LAS CURVAS PLANAS



Sea en la curva AB dos puntos M y M' cuyas coordenadas son:

$$M_1 (x_1, y); M^1 (x + dx) (y + dy)$$

puede atribuirse á dx un valor tan pequeño que llegará un momento en que la hipotenusa del triángulo MM^1 se confundirá con la curva MM^1 — y tomando ese instante, se tendrá

$$\overline{MM^1}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M^1Q}^2$$

y llamando d' L, el elemento MM

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y también $dL = dx \sqrt{1 + \left(\int (dx)\right)^2}$

Por lo tanto el largo del arco AB para $x = 0$ A = a
y $x = 0$ B = b

$$\text{será } 4 = \int_a^b dx \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad (s)$$

que es la ecuación general de la rectificación a las curvas.

1.º Aplicación:

Hallar el largo de la curva OM de una parábola, su ecuación relacionada al vertice es $y^2 = 2px$ de donde:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{p}{y} \text{ y } (f'(x))^2 = \frac{p^2}{y^2}$$

$$\text{También } dx = \frac{y dy}{p}$$

Sustituyendo en la fórmula general (s) y tomando como límites $y = 0$, $y = MF = y$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^y dx \sqrt{1 + (fx)^2} = \int_0^y \frac{y dy}{p} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \frac{1}{p} \int_0^y dy \sqrt{y^2 + p^2} + c \\ &= \frac{1}{p} \int dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{p}{4} + \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2 \log. e} \log. (y + \sqrt{y^2 + p^2} + c \end{aligned}$$

pero como para $y = 0$ esta integral se anula,

$$\text{resulta } C = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \frac{\log. p}{\log. e}$$

valor de C que sustituido en la anterior dá

$$L = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2 \log. e} \log. \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}$$

y tomando logaritmos Neperianos en que $\log. e = 1$

$$L = \frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} L \left(\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} \right)$$

2.º Aplicación para la eclipse:

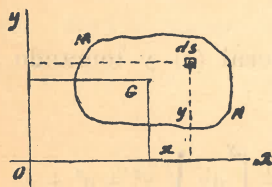
$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 f^1(x) = \frac{b^2 x}{a^2 y} (f'x)^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}$$

CENTROS DE GRAVEDAD

Centro de gravedad de un cuerpo ó de una figura, es el punto por el cual pasa la resultante de las fuerzas paralelas, debidas á la gravedad y que obran sobre todas las moléculas de ese cuerpo ó plano.

También puede definirse geométricamente sustituyendo las fuerzas que obran sobre cada molécula por su momento ó relación á un sistema dado de ejes de coordenadas.

Sea un cuerpo ó un plano M N.



o y, o los ejes: cada elemento ds infinitamente pequeño y que componen la superficie entera, tiene por momento $y ds$, luego el momento de

toda la superficie M N será:

$$sy - \Sigma y ds = \int y ds$$

y como es sabido en mecánica que la suma de los momentos de diferentes fuerzas es igual al momento de la resultante de aquella, y que esa resultante pasa por el centro de gravedad del medio en el cual obran aquellas fuerzas, resulta que la expresión hallada representa esa resultante y que por su intermedio puede determinarse el punto de aplicación al que corresponde y .

Como aplicación sea hallar el centro de gravedad de un triángulo:

Suponiendo un elemento $m m'$; tiene por superficie $ds = m m' dy$ y su momento será $y ds = y m m' dy$ de los triángulos $A m m'$ y $A B C$ se saca

$$y : m n' :: h : B C = b$$

$$m m' = \frac{y b}{h}$$

$$\text{luego } y ds = y \times \frac{y b}{h} dy = \frac{b y^2 dy}{h}$$

y de la fórmula se saca

$$s y = \int y ds = \int \frac{b y^2 dy}{h}$$

integrando entre los límites 0 y h se tiene

$$s Y = \int_0^h \frac{b y^2 dy}{h} = \frac{b h^3}{3 h} + c - (0 + c) = \frac{b h^3}{3 h} = \frac{b h^2}{3}$$

$$\text{y como } S = \frac{b h}{2}$$

$$s y = \frac{b h}{2} Y = \frac{b h^2}{3} \quad Y = \frac{\frac{b h^2}{3}}{\frac{b h}{2}} = \frac{2 b h^2}{3 b h} = \frac{2}{3} h$$

luego el punto G del centro de gravedad se hallará al tercio de la altura empezando de la base.

2.º Hallar el centro de gravedad de un paralelógramo;

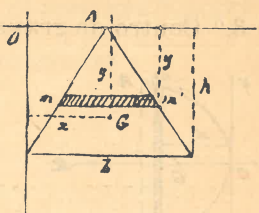
$$\text{fórmula general } S Y = \int y ds$$

un elemento $m n$ tiene por superficie $m n = b dy$ luego $ds = b dy$ siendo:

$$s = b h, \quad b h Y = \int_0^h y b dy = \frac{b}{2} h^2 + c \quad (0 + c) = \frac{b h^2}{2}$$

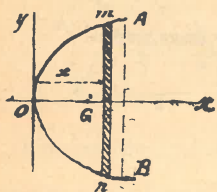
$$\text{de donde } b h Y = \frac{b h^2}{2} \quad Y = \frac{h}{2}$$

y como repitiendo igual operación con relación al eje $o y$



se obtiene $X = \frac{b}{2}$ resulta que el punto G se halla en el centro mismo del paralelogramo.

3.º Centro de gravedad de un segmento de parábola:



A O B

$$SY = \int y dS$$

$$m n' dx = 2 y dx = dS$$

$$x dS = 2 y x dx$$

como superficie de A O B = $S = \frac{4}{3} X Y$

o o' = X y designando por X' la abscisa al centro de A B = Y gravedad G se tiene

$$\frac{4}{3} X Y. X' = \int_0^X 2 y x dx =$$

teniendo presente que y en una parábola cuya ecuación es

$$y^2 = e p x \quad y = \sqrt{2 p x}$$

y sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^X 2 \sqrt{2 p x} x dx &= 2 \int \sqrt{2 p x}^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2 \sqrt{2 p x}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \\ &= \frac{4 \sqrt{2 p x}^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{4 \sqrt{2 p x} x^2}{5} \end{aligned}$$

é integrando entre los límites X y o = $\frac{4}{5} \sqrt{2 p x} x$

pero $\sqrt{2 p x} = Y$ luego

$$\frac{4}{5} X X X^1 = \frac{4}{5} Y X^2$$

$$X^1 = \frac{\frac{4}{5} Y X^2}{\frac{4}{5} X Y X^1} = \frac{12 Y X^2}{20 Y X} = \frac{3}{5} X \text{ desde } 0$$

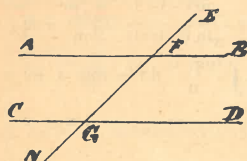
CUADRO DE LAS FUNCIONES SIMPLES CON SUS DIFERENCIALES

É INTEGRALES QUE Á ELLAS CONDUCE

$y = \int (x)^m$	$dy = mx^{m-1} dx$	$dy = \int x^{m-1} dx = \frac{x^m(-1+1)}{x^m(-1-1)} = \frac{x^m}{m} + c$
$y = \log x$	$dy = \frac{\log. e}{x} dx = \log. \left(1 + \frac{dx}{x}\right)$	$dy = \int \frac{\log. e}{n} dx = \log. x + c$
$y = L x$	$dy = \frac{dx}{x} =$	$dy = \int \frac{dx}{x} = 4 x + c$
$y = a^x$	$dy = a^x Lm dx$	$dy = \int a^x Lm dx = a x + c$
$y = e^x$	$dy = e^x dx$	$dy = \int e^x dx = e x + c$
$y = \sin x$	$dy = \cos x dx$	$dy = \int \cos x dx = \sin x + c$
$y = \cos x$	$dy = \sin x dx$	$dy = \int \sin x dx = \cos x + c$
$y = \text{tang } x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$dy = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang. } x + c$
$y = \cot x$	$dy = \frac{-dx}{\sin^2 x}$	$dy = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot. x + c$
$y = \text{arc sin } x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + c$
$y = \text{arc cos } x$	$dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos } x + c$
$y = \text{arc tang } x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$	$dy = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x + c$
$y = \text{arc cot } x$	$dy = \frac{-dx}{1+x^2}$	$dy = \int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc cot } x + c$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$dy = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

MEMORANDUM DE GEOMETRÍA PLANA

LINEAS Y ÁNGULOS



Angulo $E F B =$ ángulo opuesto
 $A F G = F G D = C G N$.

Angulo $B F G =$ ángulo alterno-in-
 terno $F G C = D G N = A F E$.

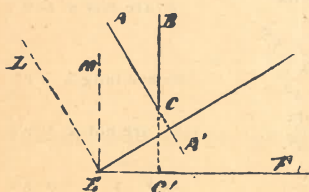
Angulo $A F G =$ ángulo alterno-interno $E G D$.

$$A F G + G F B = 180$$

La suma de los ángulos de un triángulo es igual á
 $180^\circ = 180 (n - 2)$; siendo n el número de ángulos ó lados.

La suma de los ángulos de un polígono es igual á tan-
 tas veces dos rectos como lados menos dos

$$180 (n - 2)$$

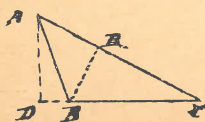


Dos ángulos que tienen sus
 lados respectivamente perpen-
 diculares son iguales entre sí ó
 suplementarios.

$$\text{Ang. } A C B = \text{áng. } D E F,$$

$$L E M = A C B.$$

$$\text{Ang. } A' C B = \text{suplemento } A C B \text{ ó } D E F.$$



En un triángulo rectángulo $A D C$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

En el triángulo $A B C$ se tiene:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 BC \times BD$, siendo AC lado opuesto al ángulo obtuso.

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 AC \times AE$, siendo BC lado opuesto al ángulo agudo.

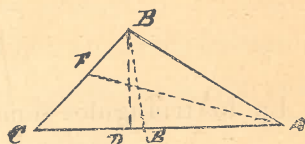
AF = bisectriz de BAC,

BE = bisectriz de ABC.

$$\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 = 2 \overline{BE}^2 + 2 \overline{CE}^2$$

$$\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 = 2 AC \times DE$$

$$\overline{BA}^2 + \overline{CE}^2 = 2 \overline{AF}^2 + 2 \overline{BF}^2$$



La bisectriz BE divide AC en partes desiguales, de donde

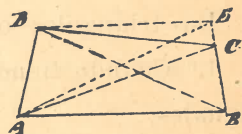
$$BC \times BA = \overline{BE}^2 + CE \times EA$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 (AB \times DC)$$

En el paralelogramo AB DE

$$\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DB}^2$$

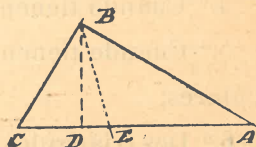
cuadrado lados = cuadrado diagonales.



ABC = triángulo rectángulo,

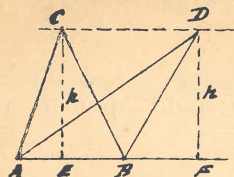
BD = perpendicular á la hipotenusa

BE = bisectriz ángulo ABC.



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 AC \times AD, \quad \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 = 2 \overline{BC}^2 \times 2 \overline{CE}^2$$

$$\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 = 2 AC \times DE, \quad BC \times BA = \overline{BE}^2 + CE \times EA$$

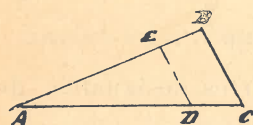


Dos paralelógramos ó dos triángulos de igual altura ó de igual base, son entre sí como sus bases ó sus alturas recíprocamente:

$$ABC : BDF :: AB : BF$$

$$ACB : ADB :: CE : CF$$

En dos triángulos semejantes los lados son entre sí como



sus ángulos opuestos: $BAC = EAD$ y
 $BCA = EDA$

$$AB : AE :: AC : AD; \quad AC : CB :: AD : DE$$

$$CB : ED :: AC : AD$$

SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes:

1.º Cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales;

2.º Cuando tienen sus tres lados proporcionales;

3.º Cuando tienen un ángulo igual formado por dos lados proporcionales;

4.º Cuando tienen sus lados paralelos;

5.º Cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares;

6.º Dos triángulos rectángulos son semejantes, cuando además del ángulo recto tienen otro igual ó común.

IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS

Dos triángulos son iguales:

1.º Cuando tienen dos lados iguales é igual también el ángulo opuesto al mayor de ellos;

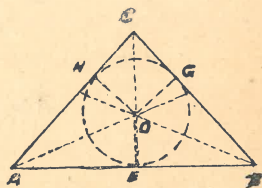
2.º Cuando tienen dos ángulos iguales y el ángulo opuesto al menor de ellos, con tal que en ambos triángulos sea de la misma especie el ángulo opuesto al mayor lado; esto es: que en ambos sea agudo ú obtuso;

3.º Cuando tienen dos lados iguales é igual un ángulo opuesto á uno de ellos, con tal que el ángulo opuesto al otro de los lados iguales sea de una misma especie en ambos triángulos;

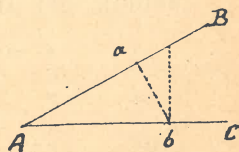
4.º Cuando tienen un lado igual é iguales también dos ángulos;

Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cruzan en un punto común, centro del círculo que puede inscribirse en ese triángulo. Resultando también:

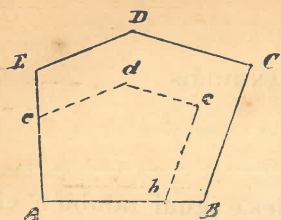
$$GO = HO = EO$$



Las superficies de dos triángulos semejantes son entre sí como el cuadrado de sus lados omólogos:



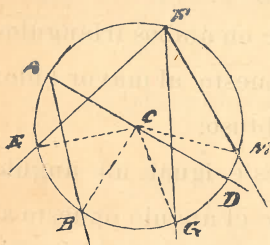
$$\text{Sup. } ABC : \text{Sup. } ADE :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{AE}^2$$



Así mismo en polígonos semejantes se tiene:

$$\text{Sup. : } ABCDE : \text{sup. } abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

MEDIDA DEL ÁNGULO INSCRITO

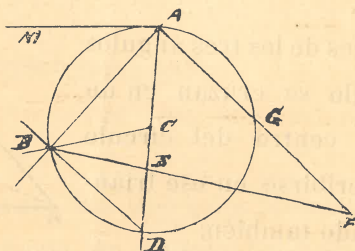


Todo ángulo inscrito puede considerarse formado por dos cuerdas y su medida es igual á la mitad del ángulo del centro que comprende el mismo arco:

$$\text{Medida del ángulo } BAD = \frac{1}{2} \text{ áng. } BCD = \frac{1}{2} \text{ arco } BD$$

$$» » » EFG = \frac{1}{2} » ECG = \frac{1}{2} » EG$$

$$» » » GFM = \frac{1}{2} » GCM = \frac{1}{2} » GM$$



$$\text{Medida del ángulo al centro } ACB = \text{arco } AB$$

$$» » \text{ segmento } MAB = \frac{1}{2} » AB$$

$$» » » BDA = \frac{1}{2} » AB$$

$$» » » BAD = \frac{1}{2} » BD$$

$$» » \text{ ángulo excéntrico } BEA = \frac{AB + DF}{2}$$

$$» » » \text{ circuscrito } BPA = \frac{1}{2} (AB - FG)$$

$$AM = \text{tang. en } A. \text{ Medida áng. } MAD = \frac{1}{2} \text{ arco } AD = 90^\circ$$

DEL CÍRCULO

Todo radio perpendicular á una cuerda, divide ésta y su arco en dos partes iguales.

Toda tangente es perpendicular al radio del punto de tangencia.

Las circunferencias son entre sí como sus diámetros y sus superficies como el cuadrado de sus diámetros:

Circunf. ABCDE : circunf. a.b.c.d.e. :: diám. AB : diám. a.b.

$$2 \pi R : 2 \pi r :: 2 R : 2 r$$

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: (2 R)^2 : (2 r)^2$$

El lado de un cuadrado es igual al diámetro del círculo inscrito en él y el lado del cuadrado inscrito en un círculo es á su radio como $\sqrt{2}$ es á 1.

$$\text{Lado AB} = R \sqrt{2}$$

El lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo es

$$\text{Lado AB} = R \sqrt{3}$$

Y el lado del triángulo equilátero circunscrito

$$\text{Lado AB} = 2 R \sqrt{3}$$

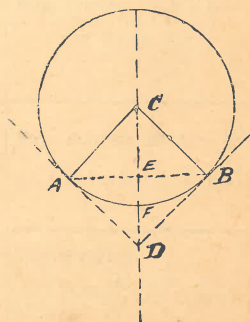
$$AE = EB, \text{ arco AF} = \text{arco FB}$$

Angulo en D formado por las tangentes B y A es el complemento del ángulo al centro.

Los 4 ángulos de ACBD suman 360° sean 4 rectos; los ángulos en A y B son de 90° y suman 180° , luego ángulo $ACB + ADB = 180^\circ$

$$ADB = 180 - ACB.$$

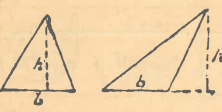
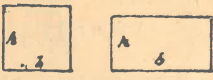
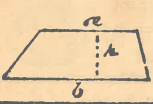
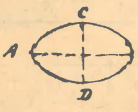
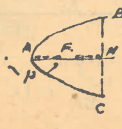
$$CAB = CBA = \frac{1}{2} (180^\circ - ACB)$$



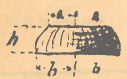
La relación de la circunferencia al diámetro es $\pi = 3.1415926$.

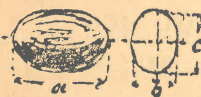
La circunferencia es pues, $C = \pi D = 2\pi R$ y la superficie del círculo considerado como un polígono regular inscrito de un número infinito de lados tan pequeños que se confunden con la circunferencia, será:

$$\text{Superficie círculo} = C \times \frac{R}{2} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2$$

FIGURA	PERÍMETRO	SUPERFICIE
		$\text{Sup.} = \frac{1}{2} \text{ base por altura}$ $S = \frac{1}{2} b \times h$
		base por altura $S = b \times h$
		Sup. trapezio $S = \frac{a+b}{2} \times h$
 <i>circulo</i>	$C = 2 \pi R. = n D$ $n = 3.1415929$	$S = \pi R^2$
 <i>Corona.</i>	$P = 2 \pi R + 2 \pi r$	Sup. Corona $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$
	$\text{Arco } AB = \frac{n R n^\circ}{180^\circ}$ $\text{arc. } A B = 0.01745 (R n)$ $\text{peri. Segmento } C O E$ $p = 0.01745 (R n)$ $\text{cuerda } DC = 2 \sqrt{h (2R - h)}$	$\text{Sup. sector } A O B$ $S = \text{arco} \times \frac{R}{2} = 0.0087 n R^2$ $\text{Segmento } C O D$ $\text{Sup.} = \frac{n R^2 n}{360} - \frac{CD \times O G}{2}$ $S = 0.0087 n R^2 - \frac{1}{2} (CD \times O G)$
 <i>Trapezio</i>		$\text{Sup. trapezio } A B C D = \text{dif. dos segmentos}$
 <i>Elipse</i>	$p = \pi (a + b)$	$\text{Sup. Eclipse, diam.} = 2a, 2b$ $S = \pi a b = \frac{\pi}{4} a^2$
 <i>Parábola</i>	$L = t \left(1 + \frac{8 h^2}{3 l^2} \right)$	Sup. Parábola $S = \frac{4}{3} x \sqrt{2 p x}$ $\text{ó } S = \frac{2}{3} l h$

VOLUMEN DE LOS CUERPOS

CUERPO	SUPERFICIE LATERAL	VOLUMEN
 Cilindro recto	$S = 2 \pi r h$	$V = \pi r^2 h = 0.785 d^2 h$
 Cilindro recto con Sección oblicua	$S = \pi r (h + h')$	$V = \pi r^2 \left(\frac{h + h'}{2} \right)$
 Cilindro hueco	$S = 2 \pi h (r + r')$	$V = \pi h (r^2 - r'^2)$
 Uña cilíndrica	Superf. A B C D $S = 2 \pi r h$	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$
 Esfera de Radio r.	$S = 4 \pi r^2 = \pi d^2 = 12.56 r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6} = 0.5236 d^3$
 Esfera hueca de espesor $R - r = \gamma$	$S \text{ (media)} = 12.56 \gamma^2$	$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$
 Sector Esférico	$S = \frac{\pi r}{2} (4 h + c)$	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h = 2.0944 r^2 h$
 Segmento Esférico	$S = 2 \pi r h = \frac{\pi}{4} (c^2 + 4 h^2)$	$V = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right) = \pi h \left(\frac{c^2}{8} + \frac{h^2}{6} \right)$
 Zona Esférica r = radio Esf. a = radio paralelo h = " "	$S = 2 \pi r h$	$V = \frac{1}{6} \pi h (3 a^2 + 3 b^2 + h^2)$
 huso a = angulo de los planos	$S = \frac{\pi r^2 a}{90} = r^2 a + 0.0349$	$V = \frac{\pi r^3 a}{270} = (r^3 a) 0.04165$

CUERPO	SUPERFICIE	VOLÚMEN
 Cubo Prisma recto	$S = 6 h^2$	$V = h^3$ $V = a \times b \times h$ = superficie base por altura
 Pirámide	$S = \text{perímetro base} \times \frac{1}{2} \text{ altura triangulares.}$ $S = p \frac{a}{2}$	$V = \text{sup. base} \times \frac{h}{3}$
 Tronco de Pirámide Faces paralelas	$S = \frac{p + p'}{2} a$ $p = \text{perímetro mayor}$ $p' = \text{perímetro menor}$	$V = \frac{h}{3} (S' + s + \sqrt{S' s})$ $S \text{ y } s = \text{superficies bases}$
 Cono	$S = n r a$ $= n r \sqrt{r^2 + h^2}$	$V = n r^2 \frac{h}{3}$
 Tronco de Cono	$S = n a (R + r)$	$V = \frac{n h}{3} (R^2 + r^2 + r R)$
 Cuña	$S = \text{suma de los dos trapecios y los dos triángulos}$	$V = (2 a + a') \frac{6 h}{b}$
 Elipsoide de revolución con 3 ejes		$V = \frac{4}{3} n a b c$
 Tonel	$S = [n (D + d)] r$	$V = \frac{4}{3} l (D + d + \sqrt{D d})$ $V = 4.0453 l (0.4 D^2 + 0.2 d D + 0.45 d^2)$
 paraboloi-de de revolución		$V = \frac{n}{2} a^2 h$

PRINCIPALES FÓRMULAS FUNDAMENTALES

De los triángulos COc y EOB y haciendo $OC = R = 1$

$$\overline{OC}^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Oc}^2 \text{ sea } R^2 = \text{sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a \text{ ó } 1 = \text{sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a$$

$$OB : BE :: Oc : cC \text{ ó sea } R : \text{tang. } a :: \text{cos. } a : \text{sen. } a$$

$$\text{se deduce } \text{tang. } a = \frac{R \text{ sen. } a}{\text{cos. } a} = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} \text{ y } \text{cotang } a = \frac{\text{cosa}}{\text{seno}}$$

$$\text{secante } a = \frac{R^2}{\text{cos. } a} = \frac{1}{\text{cos. } a} \text{ y } \text{cosenante } a = \frac{R^2}{\text{sen. } a} = \frac{1}{\text{sen. } a}$$

VALOR DE LAS LINEAS DE LA SUMA, DIFERENCIA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE DOS Ó MÁS ARCOS

$$\text{arc. } a = AM$$

$$\text{arc. } b = MN$$

$$\text{sen. } a = MP$$

$$\text{sen. } b = NQ$$

$$\text{cos. } a = OP$$

$$\text{cos. } b = OQ$$

$$\text{cos. } (a + b) = OR$$

$$\text{sen. } (a + b) = NN$$

De los triángulos semejantes MOP y QOI

$$OM : OQ :: MP : QI$$

$$OI : OP :: OQ : OM$$

$$QI = \frac{OQ \times MP}{OM}$$

$$QI = \frac{\text{cos. } b \text{ sen. } a}{1}$$

$$OI = \frac{OP \times OQ}{OM}$$

$$OI = \frac{\text{cos. } a \text{ cos. } b}{1}$$

De los triángulos MOP y NQH

$$NH : OP :: NQ : OM$$

$$QH : MP :: NQ : OM$$

$$NH = \frac{OP \times NQ}{OM}$$

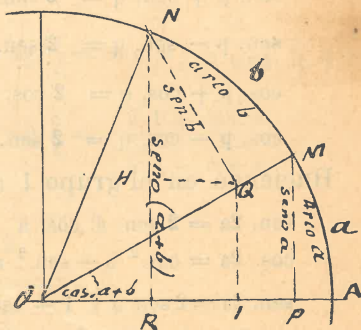
$$QH = \frac{MP \times NQ}{OM}$$

$$NH = \frac{\text{cos. } a \text{ sen. } b}{1}$$

$$QH = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{1}$$

Pero $NR = NH + QI$ sea $\text{sen. } (a + b) = \text{cos. } a \text{ sen. } b + \text{cos. } b \text{ sen. } a$

$OR = OI - QH$ $\text{cos. } (a + b) = \text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b$



Ahora haciendo $b = -b$ se tendría

$$\text{sen. } (a - b) = \text{sen. } a \cdot \cos. b - \text{sen. } b \cdot \cos. a.$$

Así se tiene el grupo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 \left\{ \begin{aligned} \text{sen. } (a + b) &= \text{sen. } a \cdot \cos. b + \text{sen. } b \cdot \cos. a \\ \cos. (a + b) &= \cos. a \cdot \cos. b - \text{sen. } a \cdot \text{sen. } b \\ \text{sen. } (a - b) &= \text{sen. } a \cdot \cos. b - \text{sen. } b \cdot \cos. a \\ \cos. (a - b) &= \cos. a \cdot \cos. b + \text{sen. } a \cdot \text{sen. } b \end{aligned} \right. \\ 2 \left\{ \begin{aligned} \text{sen. } (a + b) + \text{sen. } (a - b) &= 2 \text{ sen. } a \cdot \cos. b \\ \text{sen. } (a + b) - \text{sen. } (a - b) &= 2 \cos. a \cdot \text{sen. } b \\ \cos. (a + b) + \cos. (a - b) &= 2 \cos. a \cdot \cos. b \\ \cos. (a + b) - \cos. (a - b) &= 2 \text{ sen. } a \cdot \text{sen. } b \end{aligned} \right.$$

Haciendo $a + b = p$ y $a - b = q$

$$a = \frac{1}{2} (p + q) \quad b = \frac{1}{2} (p - q) \quad \text{se obtiene}$$

$$\text{sen. } p + \text{sen. } q = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p + q) \cos. \frac{1}{2} (p - q)$$

$$\text{sen. } p - \text{sen. } q = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p - q) \cos. \frac{1}{2} (p + q)$$

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{1}{2} (p + q) \cos. \frac{1}{2} (p - q)$$

$$\cos. p - \cos. q = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p + q) \text{ sen. } \frac{1}{2} (p - q)$$

Haciendo en el grupo 1 $a = b$

$$\text{sen. } 2a = 2 \text{ sen. } a \cdot \cos. a$$

$$\cos. 2a = \cos.^2 a - \text{sen.}^2 a$$

$$\text{sen. } 2a = 2 \text{ sen. } a \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a} = 2 \cos. a \sqrt{1 - \cos.^2 a}$$

$$\cos. 2a = 1 - 2 \text{ sen.}^2 a = 2 \cos.^2 a - 1$$

Haciendo $b = 2a$

$$\text{sen. } 3a = \text{sen. } a \cdot \cos. 2a + \cos. a \cdot \text{sen. } 2a$$

$$\cos. 3a = \cos. a \cdot \cos. 2a - \text{sen. } a \cdot \text{sen. } 2a$$

y substituyendo $2a$ por su valor

$$\text{sen. } 3a = 3 \text{ sen. } a \cos.^2 a - \text{sen.}^3 a$$

$$\cos. 3a = \cos.^3 a - 3 \text{ sen.}^2 a \cdot \cos. a$$

y en función del seno ó del coseno

$$\text{sen. } 3a = 3 \text{ sen. } a - 4 \text{ sen.}^3 a$$

$$\cos. 3a = 4 \cos.^3 a - 3 \cos. a$$

De la combinación de las precedentes se deduce

$$\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$$

$$\text{tang. } (a - b) = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a \text{ tang. } b}$$

$$\text{cotang. } (a + b) = \frac{\text{cot. } a \text{ cot. } b + 1}{\text{cot. } b \pm \text{cot. } a}$$

De éstas se deduce sucesivamente

$$\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang. }^2 a} \quad \text{cotang. } 2a = \frac{\text{cotang. }^2 a - 1}{2 \text{ cotang. } a}$$

$$\text{tang. } 3a = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. }^2 a}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. }^2 a} = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. }^3 a}{1 - 3 \text{ tang. }^2 a}$$

Sustituyendo $a = \frac{a}{2}$

$$\cos.^2 \frac{1}{2} a + \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a = 1 \quad \text{y} \quad \cos.^2 \frac{1}{2} a - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a = \cos. a$$

se deduce

$$\text{sen. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{2}} \quad \cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos. a}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{tang. }^2 a}}{\text{tang. } a} \quad \text{cotg. } \frac{a}{2} = \text{cotg. } a \pm \sqrt{\text{cotg. }^2 a + 1}$$

$$\text{tang. } \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos. a}}{1 + \cos. a} \quad \cot. \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \cos. a}}{\sqrt{1 - \cos. a}}$$

$$\text{ó también } \text{sen. } \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}{2}}$$

$$\cos. \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}{2}}$$

RESUMEN; ESPRESIONES FUNDAMENTALES

$$\text{sena} = \sqrt{1 - \cos.^2 a}$$

$$\text{cosa} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}$$

$$\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } a}{\cos. a}$$

$$\text{cotag. } a = \frac{\cos. a}{\text{sen. } a}$$

$$\text{secante } a = \frac{1}{\cos. a}$$

$$\text{cosec. } a = \frac{1}{\text{sen. } a}$$

De las diferentes analogías establecidas entre esas líneas, sus valores y sus transformaciones se deducen las fórmulas representadas en el cuadro siguiente:

VALOR DE LAS LINEAS TRIGONOMETRICAS

EN FUNCION DE						
Arco a	sen. a	cos. a	tang. a	cotang. a	sec. a	cosec. a
sen. a	sen. a	$\sqrt{1 - \cos.^2 a}$	$\frac{\text{tang. a}}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 a}}$	1	$\frac{\sqrt{\sec.^2 a - 1}}{\sec. a}$	$\frac{1}{\csc. a}$
cos. a	$\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}$	cos. a	$\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 a}}$	cot. a	$\frac{1}{\sec. a}$	$\sqrt{\csc.^2 a - 1}$ cosec. a
tang. a	$\frac{\text{sen. a}}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos.^2 a}}{\cos. a}$	tang. a	$\frac{1}{\cotang. a}$	$\frac{\sqrt{\sec.^2 a - 1}}{\sec. a}$	1
cotang. a	$\frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}{\text{sen. a}}$	$\frac{\cos. a}{\sqrt{1 - \cos.^2 a}}$	$\frac{1}{\text{tang. a}}$	cot. a	1	$\sqrt{\csc.^2 a - 1}$
sec. a	$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}$	$\frac{1}{\cos. a}$	$\frac{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 a}}{\text{tang. a}}$	$\frac{1 + \cotang.^2 a}{\cotang. a}$	sec. a	cosec. a
cosec. a	$\frac{1}{\text{sen. a}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos.^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 a}}{\text{tang. a}}$	$\frac{1}{1 + \cotang.^2 a}$	$\frac{\sqrt{\sec.^2 a - 1}}{\sec. a}$	$\sqrt{\csc.^2 a - 1}$

RELACIÓN ENTRE LOS ARCOS

$$\text{arco sen. } a = \text{arc. cos. } \sqrt{1 - a^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sen. } a$$

$$\text{arco cos. } a = \text{arc. sen. } \sqrt{1 - a^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sen. } a$$

$$\text{arco tang. } a = \text{arc. sen. } \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \text{arc. cotg. } \frac{1}{a}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Sean a , b y c los tres lados de un triángulo cualquiera y ABC sus ángulos respectivamente opuestos á los lados respectivos.

1.º Relación entre los tres lados y un ángulo:

$$\text{de } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A \text{ se deduce } \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

igual relación existe entre cada lado y su coseno opuesto

$$\cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

luego haciendo

$$\frac{a + b + c}{2} = p, \text{ se tendrá } b + c - a = (p - a); a + c - b = (p - b)$$

y entonces

$$\text{sen. } \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \cos. \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos. \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \text{sen. } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\text{tang. } \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{tang. } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

2.º Relación entre dos lados y un ángulo opuesto.

De $a : \text{sen. } A :: b \text{ sen. } B$ se deduce

$$a = \frac{b \text{ sen. } A}{\text{sen. } B} \quad \text{sen. } A = \frac{a \text{ sen. } B}{b}$$

esto es la proporcionalidad entre los lados y sus ángulos opuestos.

3.º Relación entre dos lados y el ángulo comprendido.

De la proporción $(a + b) : (a - b) :: \text{tang. } \frac{A + B}{2} : \text{tang. } \frac{A - B}{2}$

se hallará el otro ángulo, pues siendo C el ángulo conocido

$$A + B = 180^\circ - C \text{ y que}$$

$$\text{tang. } \frac{A - B}{2} = \frac{\text{tang. } \frac{A + B}{2} \times (a - b)}{a + b} \text{ hará conocer la diferencia}$$

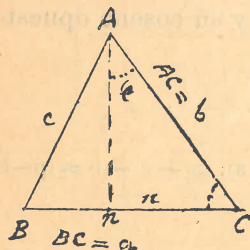
entre A y $B = d$

Conocida esa diferencia se tiene el menor

$$= \frac{1}{2} (A + B) - d$$

llegándose así á conocer los tres ángulos; los demás elementos se calcularán por las fórmulas generales.

También puede resolverse este caso por el siguiente procedimiento:



Se conocen los lados $Bc = a$ $AC = b$ y el ángulo comprendido C cuyo complemento es $\varphi = 90^\circ - C$

En el triángulo CAn donde se conoce la hipotenusa b y los ángulos C y el recto en n se tiene

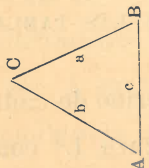
$$Cn = b \cos. C; \quad \text{y} \quad An = h = b \text{ sen. } C$$

con lo que puede formarse el nuevo triángulo BnA con $Bn = BC - Cn = p$, del que se deduce

$$r : \text{tang. } B :: p : h \text{ sea } \text{tang. } B = \frac{h}{p} \text{ luego}$$

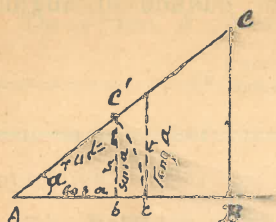
$$r : \cos B :: BA : Bn = p; \quad BA = \frac{p}{\cos. B}$$

proceder preferible principalmente cuando el ángulo comprendido es muy obtuso:

CUADRO PARA LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS		
Datos	Desconocidos	Fórmulas
a, b, c 	A, B, C.	$\frac{a+b+c}{2} = p$ $\cos. \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ó también $\tan g. \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\tan g. \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$
a, b, A.	c, B, C.	$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } A \cdot b}{a}$ $\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } A \cdot c}{a}$ $c = \frac{\text{sen. } C \cdot a}{\text{sen. } A}$
a, b, C.	c, A, B.	$(A+B) = 180^\circ - C = n$ $\text{el ángulo menor } A = \frac{n-d}{2}$ $\tan g. \left(\frac{A-B}{2} \right) = \frac{\tan g. \left(\frac{A+B}{2} \right) (a-b)}{a+b}$
a, b, c, y A.	B, C.	$a : \text{sen. } \frac{1}{2} A :: (b+c) : \cos. \frac{1}{2} (B-C)$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Siendo recto uno de los ángulos, todos los casos se resuelven por la sola semejanza del triángulo dado y del



formado con un radio igual á la unidad.

Así formados los dos triángulos $A b c$ y $A B C$ rectos en B y en b , se tendrán las siguientes proporciones:

$$r : \text{sen } a :: AC : CB$$

$$r : \text{tang } a :: AB : BC$$

$$r : \cos a :: AC : AB$$

de las cuales se deduce, haciendo $r = 1$

1.º Conocidos AC y ángulos A y B (hipotenusa y dos ángulos)

$$CB = AC \text{ sen. } a$$

$$AB = AC \cos. a$$

2.º Conocidos AB y ángulos A y B

$$AC = \frac{AB}{\cos a} \quad CB = AB \text{ tang } a$$

3.º Conocidos BC y A y B

$$AC = \frac{CB}{\text{sen } a} \quad AB = \frac{BC}{\text{tang } a}$$

DISPOSICIÓN Y USO DE LAS TABLAS

Si se calculára el valor numérico de cada una de las líneas trigonométricas de la figura 1.^a considerando el radio igual á uno y asignando al ángulo a un valor variable de 0° grados hasta 90° , se habrían obtenido las espresiones *naturales* de las líneas trigonométricas y podría así confeccionarse una *Tabla de los valores naturales de las espresiones trigonométricas*.

Estas cantidades son fracciones menores que la unidad para el seno y coseno pues que en un ángulo de 90° el seno $= 1 = r$ y coseno $= 0$ mientras que para 0° seno $= 0$ y coseno $= r = 1$

Son pues solo la tangente y cotangente que llegan á ser mayores que el radio $= 1$

Para los cálculos las operaciones se hacen como en aritmética efectuando las operaciones indicadas.

Pero las tablas más usuales y más cómodas son las logarítmicas, esto es que contienen el logaritmo de aquellos valores naturales; así una tabla dará:

sen natural $21^\circ 10'$ = 0.36108	cos natural $21^\circ 10'$ = 0.93253
en la otra : log. sen $21^\circ 10'$ = 9.55761	log. cos $21^\circ 10'$ = 9.96966
ó también = - 1 55761	ó también - 1.96966

Todas las tablas logarítmicas de las líneas trigonométricas contienen el logaritmo de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de 0° á 90° combinados de tal manera que las expresiones de las líneas de arco mayores de 45° son el complemento de las menores; así la tangente de $36^\circ 20'$ que se busca en la página encabezada con 36° corresponde á la cotangente de $53^\circ 40'$, encontrándose 53° escrito al pié de la misma página del 36° . A la izquierda se encuentran los minutos correspondientes al grado expresado arriba de la página y á la derecha de abajo arriba los minutos que corresponde á la graduación indicada al pié de la página.

Por la misma combinación se tiene

log. secante de A = comp. log. de coseno A
log. cosecante de A = comp. log. de seno A

por lo que la expresión $\frac{b}{\text{sen. } a}$ puede traducirse de dos maneras

$$\log. b + \text{comp. log.} - \text{sen. } A \text{ ó } \log. b + \log. \text{cosec. } A.$$

Podría distinguirse dos clases de tablas en cuanto á su mayor ó menor extensión, las unas como las de Callet, las de Hoüel con siete decimales para la mantisa y que permiten buscar directamente el logaritmo de cantidades de cinco cifras y los logaritmos de líneas trigonométricas de 10'' en 10''; las otras más reducidas como ser las de Lalande, Muller y otras, con cinco cifras decimales para la mantisa y que dan directamente el logaritmo de cantidades de cuatro cifras y para las líneas trigonométricas solo de minuto en minuto.

Dos problemas pueden presentarse:

1º Dado el número de los grados, minutos y segundos de un arco cualquiera, hallar el logaritmo de cada una de sus líneas trigonométricas.

2º Dado el logaritmo de un seno, de una tangente, de un coseno, ó de una contangente, hallar el valor del arco que le corresponde.

Problema — primer caso. — Hallar el logaritmo de seno 36°28'30''. El número de grados siendo menor que 45° se le buscará arriba de la página; después fijándose sobre la primera columna, que contiene los minutos, se le recorrerá de arriba abajo, deteniéndose á 28'; pasando en seguida á la columna de los segundos y también recorriéndola entre la parte que corresponde, á 28' y

á 29', uno se detendrá al número 30; el logaritmo buscado estará sobre la misma línea horizontal que este número 30 y en la tercera columna que arriba de la página está marcado *sen*.

Luego logaritmo $\text{sen. } 36^{\circ}28'30'' = 9.7741314 \text{ ó } \overline{1}.7741314$ (el signo — colocado arriba de una cifra, indica que esta cifra sola es negativa).

Del mismo modo se encontrarán:

$$\text{Log. tang. } 14^{\circ}7'20'' = 9.4007020 = \overline{1}.4007020$$

$$\text{Log. cotang. } 41^{\circ}19'10'' = 0.0559504$$

Hallar el logaritmo de $\text{cos. } 71^{\circ}22'20''$.

El número de grados siendo superior á 45° tómese 71° abajo de las páginas, tómese también los 22' en la primer columna de la derecha, y siempre subiendo los 20'' en la columna vecina; después fijándose sobre las indicaciones colocadas abajo de las columnas de cada página se tomará la columna que tiene por nombre *coseno* y el logaritmo pedido será el mismo que esté sobre la línea horizontal que tiene en una de sus extremidades 20''.

$$\text{Luego log. cos. } 71^{\circ}22'20'' = 9.5043604 = \overline{1}.5043604$$

Hallar el arco cuyo

$$\text{log. sen.} = 9.0405331$$

Búsquese el logaritmo dado en una cualquiera de las dos columnas que tienen por nombre las líneas trigonométricas cuyo logaritmo se ha dado. Si este logaritmo se encuentra en la tercera columna vertical de la izquierda, tómese el número de grados arriba de la página y el de los minutos y segundos en la primera y segunda de izquierda. Pero si el nombre de la línea del logaritmo dado se en-

cuentra en la parte inferior, se tomará los grados de abajo y los minutos y segundos de las dos últimas columnas de la derecha.

Luego $\log. \text{sen. } 9.0405331 = \text{sen. } 6^{\circ}18'10''$.

También tendremos $\log. \text{tang. } 0.3452695 = \text{tang. } 65^{\circ}41'50''$.

Hallar el seno del arco que tiene por

$$\log. 9.7198862$$

Este logaritmo no se encuentra en las tablas, tómese la cantidad que más se aproxime al logaritmo dado, tómese luego la diferencia correspondiente á $10''$, dada por las tablas, búsquese la diferencia entre el logaritmo dado y el próximo menor hallado.

Tendremos: $\log. \text{sen. } 31^{\circ}38'40'' = 9.7198667$

diferencia en más por $10'' = 342$

logaritmo dado 9.7198862 — logaritmo hallado $9.7198667 = 195$

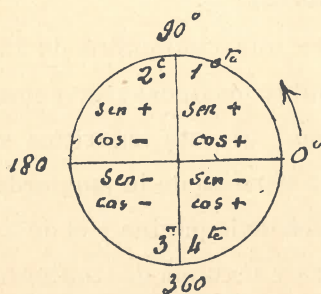
luego la proporción $342 : 10 :: 195 : x$; $x = 5''7$

De consiguiente, $\log. \text{sen. } 31^{\circ}38'40'' = 9.7198667$

$$+ 5''7 = 0.0000195$$

$$\log. \text{sen. } 31^{\circ}38'45''7 = 9.7198862$$

SIGNO DE LOS ARCOS EN LOS CÁLCULOS TRIGONOMÉTRICOS



Con $a < 90^{\circ}$ todas las líneas son positivas; con $a = 90 + x$ cae el arco en el 2° , $\text{sen. } (90 + x) = \cos. x$
 $\cos. (90 + x) = \text{sen. } x$

y signos alternados;

con $a = 180 + x$ cae el arco en el 3° y $\cos. (180 + x) = \text{sen. } x$
 $\text{tang. } (180 + x) = \cot. x$;

con $a = 270 + x$ cae en el 4° , y $\cos. (360 - x) = \text{sen. } x$.

1 ^{er} CUADRANTE $a = 90$	2 ^o CUADRANTE $a = 90 + x$	3 ^{er} CUADRANTE $a = 180 + x$	4 ^o CUADRANTE $a = 270 + x$
$+ \text{sen. } x$	$+ \text{cos. } a$	$- \text{sen. } x$	$- \text{cos. } x$
$+ \text{cos. } x$	$- \text{sen. } a$	$- \text{cos. } x$	$+ \text{sen. } x$
$+ \text{tang. } x$	$- \text{cot. } x$	$+ \text{tang. } x$	$- \text{cot. } x$
$+ \text{cot. } x$	$- \text{tang. } x$	$+ \text{cot. } x$	$- \text{tang. } x$
$+ \text{sec.}$	$- \text{cosec. } x$	$- \text{sec. } x$	$+ \text{cosec. } x$
$+ \text{cosec. } x$	$+ \text{sec. } x$	$- \text{cosec. } x$	$- \text{sec. } x$

Para la fijación del cuadrante en que termina un arco, basta tener presente los signos del seno y coseno que le han determinado; para esto son positivos los cosenos del 1^o y 4^o cuadrante y positivos los senos del 1^o y 2^o. Son negativos todos los demás.

La tangente de un arco resultará positiva si los signos del coseno y seno del arco tienen el mismo signo, y negativa en caso contrario, fijándose en este caso el cuadrante á que pertenece por el signo del seno.

PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

1.^o—Datos conocidos $BC = a = 138^m 25$
 $B = 58^\circ 4'$ y $C = 51^\circ 15' 5''$; hallar el lado c
 se tiene $A = 180^\circ - (B + C) = 70^\circ 40' 55''$

$$c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A} = \frac{138^m 25 \times \text{sen. } 51^\circ 15' 5''}{\text{sen. } 70^\circ 40' 55''}$$

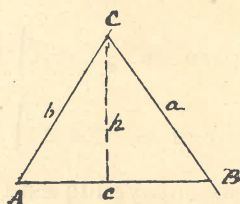
$$\log. 138^m 25 = 2.1406651$$

$$+ \log. 51^\circ 15' 55'' = 9.8920387$$

$$\hline 12.0327038$$

$$- \log. \text{sen. } 70^\circ 40' 55'' = 9.9748324$$

$$\log. c = 2.0578714 = 114^m 25$$



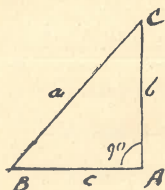
2.º—Conocido $BC = a = 597^m 40$ $B = 14^\circ 27' 18''$ hallar c

$$c = a \cos. B = 597 \ 40 \cos. 14^\circ 27' 18''$$

$$\log. a = 2.776265$$

$$\log. \cos. B = 9.986029$$

$$\log. c = 2.762294 = 578^m 10$$



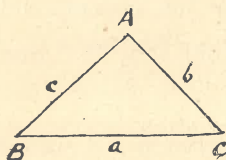
SUPERFICIES

La superficie de un triángulo puede expresarse: ya en función de dos lados y el ángulo comprendido; ya de un lado y dos ángulos ó de los tres lados.

1^{er} Caso, datos b c y A

$$S = \frac{A B \times h}{2} = c \times h; \text{ pero } h = b \sin. A$$

$$\text{luego } S = \frac{c b \sin. A}{2}$$



2º Caso, datos c , C y B

$$A = 180 - (C + B)$$

$$b = c \frac{\sin. B}{\sin. C}; h = b \sin. A = c \frac{\sin. B \sin. A}{\sin. C}$$

$$S = \frac{c}{2} \times \left(\frac{c \sin. B \sin. A}{\sin. C} \right) = \frac{c^2 \sin. B \sin. A}{2 \sin. C}$$

3^{er} Caso, los tres lados a b c

$$\text{de } \sin. 2 C = 2 \sin. C \cos. C, \text{ se tiene; } \sin. C = 2 s n. \frac{c}{2} \cos. \frac{c}{2}$$

$$\text{pero } \sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \text{ y; } \cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\text{luego } \sin. C = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2 b^2}}$$

substituyendo este valor en $S = \frac{a b \sin. C}{2}$ se tiene

$$S = a b \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2 b^2}}$$

Cálculos

EJEMPLOS DE LA MANERA DE RESOLVER ALGUNAS FÓRMULAS

Convergencia de Meridianos = $P (\text{sen. } m - \cos. m \text{ tang. } \frac{1}{2} d \text{ sen. } 1'')$

P = diferencia de longitud entre ambos puntos = $0.^{\circ} 38' 46'', 55 = 2326'', 55$

m = latitud del último punto = $49.^{\circ} 04' 54''$

$\frac{1}{2} d$ = media distancia entre ambos puntos = $0.^{\circ} 9' 24'' 14 = 542'', 14$

log. P (2326'') = 3.36671

log. P = 3.36671

log. sen. m = 9.87826

log. cos. m = 9.81633

log. número 1.º ter. = 3.24497

log. tang. $\frac{1}{2} d$ = 2.73411

número = 1758'', 80

log. sen. $1''$ = 4.68557

= 0 29' 14'', 831

log. número 2.º ter. = 0.60274

número = 4'', 006

1.º ter. = 0.29' 14'', 831

— 2.º » = 0 0 4, 006

conver. = 0 29' 10'', 825

$c = 58.^{\circ}$, $2 c = 116.^{\circ}$

log. sen. $2 c$ = 9.95366

— log. sen. $1''$ = 4.68557

5.26809

+ log. $\frac{e^2}{2 - e^2}$ = 7.53498

log. producto = 2.80307

producto = 635'', 43

= 0' 10' 35'', 43

$c = 58.^{\circ}$

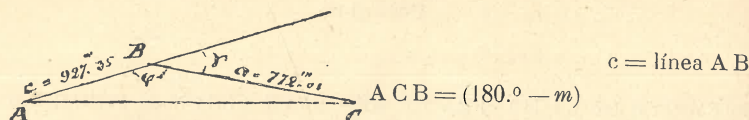
$c' = 58.^{\circ} 10' 35'', 43$

$$c' = c + \frac{e^2}{2 - e^2} \left(\frac{\text{sen. } 2 c}{\text{sen. } 1''} \right)$$

$$\text{Costado } c = (a + b) - \frac{a b m^2 \text{ sen.}^2 1''}{2(a + b)}$$

$$a = 772. m 027, b = 927. m 352$$

$$(180 - \widehat{ABC}) = t = 2.^\circ 17' 27'', 40$$



$$\log. a = 2.88763$$

$$\log. b = 2.96724$$

$$\log. m^2 = 7.83263$$

$$\log. \text{sen.}^2 1'' = 9.37115$$

$$c.^\circ \log. 2 = 9.69897$$

$$c.^\circ \log. (a + b) = 6.76971$$

$$\log. \text{número} = 9.52733$$

$$\text{número} = 0.337$$

$$a + b = 1699.379$$

$$\text{número} = 0.337$$

$$c = AB = 1699.042. ms$$

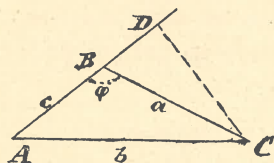
fórmula aplicable siempre que m
no exceda de 3 á 4 grados.

$$ABC = 177.^\circ 42' 33''$$

$$t = 2.^\circ 17' 27''$$

EJEMPLOS DE CÁLCULOS

La resolución del triángulo rectilíneo, en el cual se conocen *dos catetos* y el ángulo comprendido, puede efectuarse con menos complicación que con la fórmula de las tangentes



sea ABC el triángulo en el cual se conoce $AB = c$, $BC = a$ y ángulo $ABC = m$; si se calcula la proyección de un lado sobre el otro se convertirá el triángulo ABC en

otro rectángulo ADC , así

$$CD = a \text{ sen. } (180 - m) = a \text{ sen. } t$$

$$BD = a \text{ cos. } (180 - m) = a \text{ cos. } t$$

En triángulo ADC

$$AD = c + BD = c + a \text{ cos. } t$$

el ángulo DAC tendrá por valor

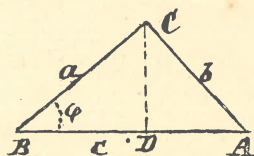
$$\text{tang. } A = \frac{CD}{AD} = \frac{a \text{ sen. } t}{c + a \text{ cos. } t} \quad (1)$$

fórmula fácil á tener presente y calcularse.

Si el ángulo $A B C = m$ fuera menor que 90° la proyección de un lado sobre el otro caería dentro del triángulo, en ese caso se tendría $A D = A B - B D = c - a \cos. t$

$$\text{y tang. } A = \frac{a \text{ sen. } t}{c - a \cos. t} \quad (2)$$

Conocido el ángulo A y como consecuencia el C ; el lado $A C = b$, tendrá dos expresiones



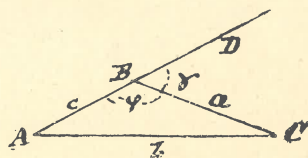
$$A C = b = \frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen } A},$$

$$b = \frac{c \text{ sen. } B}{\text{sen } C}$$

En caso de ser muy obtuso el ángulo B , de lo que resultaría el ángulo t inferior á 4 grados puede emplearse la siguiente fórmula que dá directamente el lado $A C = b$ en función de la suma de los otros dos catetos

$$b = (a + c) - \frac{a c t^2 \text{ sen.}^2 1''}{2 (a + c)} \quad (3)$$

como en los casos anteriores el ángulo $t = (180 - m)$ pero figu-



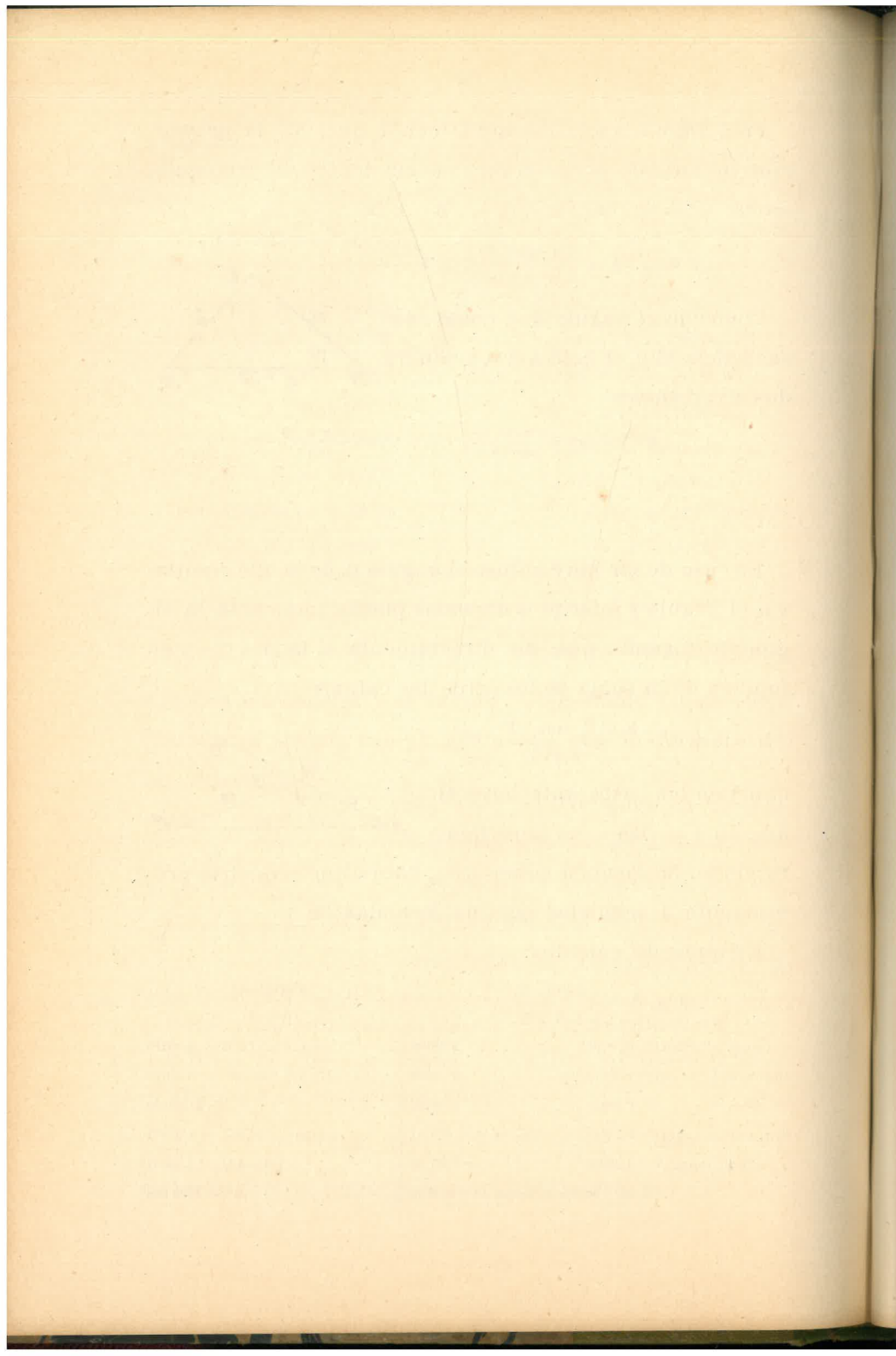
rando en la fórmula como arco, habrá que reducirlo previamente á segundos por las fórmulas de 1.

Ejemplo de cálculos:

$$\text{tang. } A = \frac{a \text{ sen. } t}{c + a \cos. t};$$

$$A C = \frac{a \text{ sen. } m}{\text{sen. } A}$$

$\log. a (772.03) = 2.8763$		2.88763	$\log. a = 772.03 = 2.88763$
$\log. \text{sen. } 2^\circ 17', 27 = 8.60175$	cos	9.99966	+ $\log. \text{sen. } 177^\circ 42' 33'' = 8.60175$
1.48938		2.88729	11.48938
$\log. (c + a \cos. t) = 3.23013$	$a \cos. t = 771.41$		$\text{sen. } 1^\circ 2' 26'' = 8.25901$
$\log. \text{tang. } A = 8.25925$	$c = 927.35$		$\log. A C = 3.23037$
$A = 1^\circ 2' 26'', 60$	$(c + a \cos. t) = 1698.76$		$A C = 1699.038$



TRIGONOMETRÍA ESFERICA

ECUACIÓN FUNDAMENTAL

$$\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A.$$

igualmente $\cos. b = \cos. a. \cos. c + \sin. a. \sin. c. \cos. B.$

$$\cos. c = \cos. a. \cos. b + \sin. a. \sin. b. \cos. C.$$

se deduce de estas ecuaciones

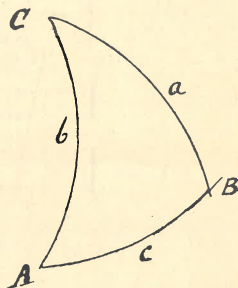
$$\cos. A = \frac{\cos. a. - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c}$$

Pero de $\sin.^2 A = 1 - \cos.^2 A$ se deduce

$$\sin.^2 A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b. \sin. c} \right)^2$$

$$\text{y por fin } \frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}$$

de donde los senos de los ángulos son proporcionales á los senos de los lados opuestos.



De la combinación de estas ecuaciones se deducen las siguientes analogías:

Relación entre los cinco elementos de un triángulo.

$$\cos. a. \sin. b - \sin. a. \cos. b. \cos. C = \sin. c. \cos. A.$$

$$\cos. b. \sin. a - \sin. b. \cos. a. \cos. C = \sin. c. \cos. B.$$

$$\cos. b. \sin. c - \sin. b. \cos. c. \cos. A = \sin. a. \cos. B.$$

$$\cos. c. \sin. b - \sin. c. \cos. b. \cos. A = \sin. a. \cos. C.$$

$$\cos. c. \sin. a - \sin. c. \cos. a. \cos. B = \sin. b. \cos. C.$$

$$\cos. a. \sin. c - \sin. a. \cos. c. \cos. B = \sin. b. \cos. A.$$

Relación entre dos lados, el ángulo comprendido y un ángulo opuesto á uno de ellos.

$$\text{sen. } c. \cotg. a = \cos. c. \cos. B + \cotg. A. \text{sen. } B.$$

$$\text{sen. } a. \cotg. c = \cos. a. \cos. B + \cotg. C. \text{sen. } B.$$

$$\text{sen. } b. \cotg. c = \cos. b. \cos. A + \cotg. C. \text{sen. } A.$$

$$\text{sen. } c. \cotg. b = \cos. c. \cos. A + \cotg. B. \text{sen. } A.$$

$$\text{sen. } a. \cotg. b = \cos. a. \cos. C + \cotg. B. \text{sen. } C.$$

$$\text{sen. } b. \cotg. a = \cos. b. \cos. C + \cotg. A. \text{sen. } C.$$

Las precedentes fórmulas no son calculables por logaritmos; efectuadas las transformaciones para adaptarlos á ese fin se obtienen las siguientes fórmulas deducidas todas de la fundamental

$$\cos. a = \cos. b. \cos. c. + \text{sen. } b. \text{sen. } c. \cos. A.$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-b) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } b. \text{sen. } c.}} \quad \cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-a)}{\text{sen. } b. \text{sen. } c.}}$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } a. \text{sen. } b.}} \quad \cos. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } a. \text{sen. } c.}}$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } a. \text{sen. } b.}} \quad \cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } a. \text{sen. } b.}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-b) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-a)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-b)}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } p. \text{sen.}(p-c)}}$$

ANALOGÍAS DE DELAMBRE

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (A + B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a + b)}{\cos. \frac{1}{2} c}$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c}$$

ANALOGÍAS DE NEPER

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. \frac{1}{2} (a + b)}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (A - B) = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (a - b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} (a + b)}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (a + b) = \text{tang. } \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B)}{\cos. \frac{1}{2} (A + B)};$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (a - b) = \text{tang. } \frac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} (A - B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} (A + B)}$$

Estas fórmulas son aplicables á la resolución de triángulos toda vez que se conocen los dos lados y el ángulo comprendido, ó un lado y los dos lados adyacentes.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Si en las ecuaciones fundamentales se hace $A = 90^\circ$ resultará

$$\text{sen. } A = 1, \quad \cos. A = 0, \quad \text{tang. } A = \infty,$$

$$\text{sece. } A = 0, \quad \cotg. A = 0, \quad \text{cosec. } A = 1$$

y se tendrán las siguientes relaciones:

1.º—Conocida la hipotenusa a y el cateto b .

$$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}, \quad \text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}, \quad \cos. C = \frac{\text{tang. } b}{\text{tang. } a}$$

$$\text{y también } \text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\text{tang. } \frac{1}{2} (a - b) \text{ tang. } \frac{1}{2} (a + b)}$$

2.º—Conocidos los dos catetos b y c .

$$\cos. a = \cos. b \cos. c, \quad \text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } a}$$

$$\text{ó } \text{tang. } a = \frac{\text{tang. } b}{\cos. C}, \quad \text{tang. } B = \frac{\text{tang. } b}{\text{sen. } c}, \quad \text{tang. } C = \frac{\text{tang. } c}{\text{sen. } b}$$

$$\text{tang. } a = \frac{\text{tang. } c}{\cos. B}, \quad \cos. B = \frac{\text{tang. } c}{\text{tang. } a}, \quad \cos. C = \frac{\text{tang. } b}{\text{tang. } a}$$

3.º—Conocida la hipotenusa y el ángulo B—

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B, \quad \text{cos. } C = \frac{\text{cos. } a}{\text{cos. } b}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } a}$$

$$\text{tang. } b = \text{tang. } a \text{ cos. } C, \quad \text{tang. } c = \text{tang. } a \text{ cos. } B,$$

$$\text{tang. } C = \frac{\text{cotg. } B}{\text{cos. } a}, \quad \text{tang. } b = \text{tang. } B \text{ sen. } c$$

4.º—Conocido un cateto b y el ángulo opuesto B.

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}, \quad \text{sen. } c = \frac{\text{cos. } a}{\text{cos. } b}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } a}$$

$$\text{sen. } c = \frac{\text{tang. } b}{\text{tang. } B}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{cos. } B}{\text{cos. } b}$$

$$\text{también} \quad \text{tang. } \left(45 + \frac{1}{2} C \right) = \pm \sqrt{\frac{\text{sen. } (B + b)}{\text{sen. } (B - b)}}$$

$$\text{tang. } \left(45 + \frac{1}{2} C \right) = \pm \sqrt{\text{cotg. } \frac{1}{2} (B + b) \text{cotg. } \frac{1}{2} (B - b)}}$$

5.º—Conocido un cateto b y el ángulo adyacente C.

$$\text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C, \quad \text{tang. } a = \frac{\text{tang. } C}{\text{cos. } c}, \quad \text{tang. } B = \frac{\text{tang. } c}{\text{tang. } b}$$

$$\text{tang. } c = \text{sen. } b \text{ tang. } C, \quad \text{cos. } B = \text{cos. } b \text{ sen. } C$$

$$\text{tang. } a = \frac{\text{tang. } b}{\text{cos. } C}, \quad \text{cotg. } B = \text{cos. } a \text{ tang. } C$$

6.º—Conocidos los dos ángulos B y C y el recto A.

$$\text{cos. } a = \text{cotg. } B \text{cotg. } C, \quad \text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B, \quad \text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C$$

$$\text{cos. } b = \frac{\text{cos. } B}{\text{sen. } C}, \quad \text{cos. } c = \frac{\text{cos. } C}{\text{sen. } B}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{cos. } (180 - B - C)}{\text{cos. } (B - C)}}$$

Todos los casos de la resolución de triángulos rectángulo pueden deducirse de las siguientes fórmulas.

$$\text{cos. } a = \text{cos. } c \text{ cos. } b \quad \text{tang. } c = \text{tang. } C \text{ sen. } b$$

$$\text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C \quad \text{cos. } a = \text{cotg. } C \text{cotg. } B$$

$$\text{tang. } c = \text{tang. } a \text{ cos. } B \quad \text{cos. } C = \text{cos. } c \text{ sen. } B$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS OBLICUÁNGULOS

Cuando de los 6 elementos que constituyen un triángulo se conocen 3, pueden hallarse ó deducirse los otros 3, siempre que se satisfagan á algunas de las siguientes condiciones:

1.º que á los lados mayores se opongan los ángulos mayores y recíprocamente.

2.º que la suma de los lados sea menor que una circunferencia.

3.º que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

4.º que la suma de los ángulos sea menor que seis rectos y mayor que dos.

Para la resolución de un triángulo pueden presentarse los siguientes casos:

1.º Conocidos los tres lados a. b. c. — hallar los 3 ángulos. A B C

puede resolverse siempre que:

$$a + b + c < 360^\circ$$

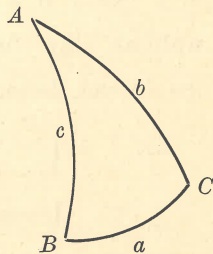
y que un costado cualquiera sea

por ejemplo $\angle b + c$

De la ecuación fundamental se deducirá, para cada ángulo

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c}$$

que puede calcularse por los logaritmos de adición y sustracción.



Puede transformarse esa ecuación en otra más aplicable al cálculo logarítmico; haciendo $2p = a + b + c$ y efectuando las transformaciones se obtienen las siguientes fórmulas:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{sen. } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-b) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } b \text{sen. } c}} \quad \text{cos. } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{sen.}(p-a)}{\text{sen. } b \text{sen. } c}}$$

$$\text{sen. } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } a \text{sen. } c}} \quad \text{cos. } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } a \text{sen. } c}}$$

$$\text{sen. } \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } a \text{sen. } b}} \quad \text{cos. } \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } a \text{sen. } b}}$$

$$\text{Tang. } \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-c) \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } p \text{sen.}(p-a)}}$$

$$\text{Tang. } \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-c)}{\text{sen. } p \text{sen.}(p-b)}}$$

$$\text{Tang. } \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen.}(p-a) \text{sen.}(p-b)}{\text{sen. } p \text{sen.}(p-c)}}$$

2.º Caso—Conocidos los tres ángulos calcular los tres lados.

Se tendrá presente que debe tenerse: $A + B + C > 180^\circ$, el ángulo menor debe satisfacer á la expresión $A + 180^\circ > B + C$ y haciendo $P = \frac{A + B + C}{2}$ se llegará á aplicar las fórmulas del caso anterior sustituyendo las letras de los lados por la de los ángulos y vice-versa.

$$\text{sen. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos. } P \text{cos.}(P-A)}{\text{sen. } A \text{sen. } C}} \quad \text{cos. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos.}(P-B) \text{cos.}(P-C)}{\text{sen. } B \text{sen. } C}}$$

$$\text{sen. } \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos. } P \text{cos.}(P-B)}{\text{sen. } A \text{sen. } C}} \quad \text{cos. } \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos.}(P-A) \text{cos.}(P-C)}{\text{sen. } A \text{sen. } C}}$$

$$\text{tang. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos.}(P \text{cos.}(P-A))}{\text{cos.}(P-B) \text{cos.}(P-C)}}$$

$$\text{tang. } \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{cos. } P \text{cos.}(P-B)}{\text{cos.}(P-A) \text{cos.}(P-C)}}$$

También haciendo uso del Exeso esférico

$$E = \frac{A + B + C - 180}{2}$$

$$\text{sen. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } E \text{ sen. } (A-E)}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \quad \cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } (B-E) \text{ sen. } (C-E)}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}}$$

$$\text{sen. } \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } E \text{ sen. } (B-E)}{\text{sen. } A \text{ sen. } C}} \quad \cos. \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } (A-E) \text{ sen. } (C-E)}{\text{sen. } A \text{ sen. } C}}$$

$$\text{tang. } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } E \text{ sen. } (A-E)}{\text{sen. } (B-E) \text{ sen. } (C-E)}}$$

$$\text{tang. } \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } E \text{ sen. } (B-E)}{\text{sen. } (A-E) \text{ sen. } (C-E)}}$$

3^{er} Caso—Conocidos los dos lados a. b y el ángulo comprendido C.

Puede resolverse este caso de diferentes maneras.

1^o Por las analogías de Neper que dan :

$$\frac{\text{tang. } \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{cotg. } \frac{C}{2}} = \frac{\cos. \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos. \left(\frac{a+b}{2}\right)}; \quad \frac{\text{tang. } \left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{cotg. } \frac{C}{2}} = \frac{\text{sen. } \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{sen. } \left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Con estas fórmulas se hallará la tangente de la semi suma y de la semi diferencia de los ángulos A y B; luego sumando esos dos resultados se tendrá el ángulo mayor opuesto al lado mayor, y restándolos se tendrá el ángulo menor.

2^o De la fórmula fundamental

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$$

se deducirá :

$$\begin{aligned} \cos. c &= \cos. a \left(\cos. b + \frac{\text{sen. } a}{\cos. a} \text{sen. } b \cos. C \right) \\ &= \cos. a \left(\cos. b + \text{tang. } a \text{ sen. } b \cos. C \right) \end{aligned}$$

pero haciendo para simplificar, $\text{tang. } a \cos. C = \text{tang. } b$, se puede poner $\cos. c = \cos. a (\cos. b + \text{tang. } b \text{ sen. } b)$

$$= \cos. a \left(\frac{\cos. b \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b}{\cos. b} \right)$$

ó finalmente las dos fórmulas á emplear:

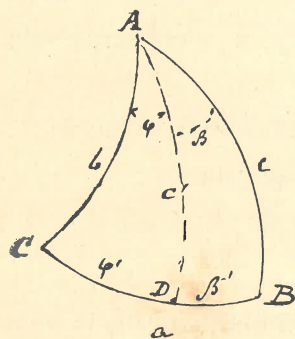
$$(1) \text{ Tang. } m = \text{ tang. } a \cos. C$$

$$(2) \cos. c = \frac{\cos. a \cos. (bm)}{\cos. m}$$

3^{er} Dividiendo el triángulo en dos rectos por medio de un arco perpendicular á uno de los lados conocidos.

En el triángulo A B C en el cual son conocidos los lados A C = b, C B = a y el ángulo A C B = C se baja

desde A un arco A D = d perpendicular sobre C B — En el triángulo A C D se conoce la hipotenusa b y los ángulos en C y D luego



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tang. } CD = \text{tang. } n = \text{tang. } b \cos. c \\ \text{sen. } AD = \text{sen. } d = \text{sen. } b \text{ sen. } c \\ \text{ángulo } CAD = m \quad \text{tang. } m = \frac{\text{tang. } n}{\text{tang. } b} \end{array} \right.$$

ó también; $\cotang. m = \cos. b \text{ tang. } c$

Para el triángulo A B D se tendrá:

$$m = (a - n) \quad \text{y} \quad AD = d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos. c = \cos. d \cos. m \\ \text{tang. } b = \frac{\text{tang. } m}{\text{sen. } d} \\ \text{tang. } B = \frac{\text{tang. } d}{\text{sen. } m} \end{array} \right.$$

como verificación se tendrá: $\text{sen. } C : \text{sen. } c :: \text{sen. } (m + b) \text{ sen. } a$

$$\text{ó} \quad \text{sen. } A = (m + b) = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } a}{\text{sen. } c}$$

4.^o Caso—Conocido el lado c y los ángulos adyacentes A y B puede resolverse este caso de diferentes maneras:

1.^o De la fórmula fundamental se tiene

$$\cos. C = - \cos. A \cos. B + \text{sen. } A \text{ sen. } B \cos. c$$

de la cual, haciendo las mismas transformaciones que

en el caso anterior se tiene

$$(1) \quad \text{tang. } b = \text{tang. } A \cos. c$$

$$(2) \quad \cos. C = \frac{\cos. A \cos. (B - b)}{\cos. b}$$

$$(3) \quad \cotg. a = \frac{\cos. c (\cos. B + \text{sen. } B \frac{\cotg. A}{\cos. c})}{\text{sen. } c}$$

y haciendo $\frac{\cotg. A}{\cos. c} = \text{tang. } t$

$$(4) \quad \cotg. a = \frac{\cos. c \cos. (B - t)}{\cos. t}$$

2.º Por la aplicación de las analogías de Neper

$$\frac{\text{tang. } \left(\frac{a+b}{2}\right)}{\text{tang. } \frac{c}{2}} = \frac{\cos. \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos. \left(\frac{A-B}{2}\right)}; \quad \frac{\text{tang. } \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{tang. } \frac{c}{2}} = \frac{\text{sen. } \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{sen. } \left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

que permitirán hallar la semisuma y semidiferencia de los lados *a. b.* luego el lado opuesto al ángulo mayor = suma de las semidiferencias, y el lado opuesto al ángulo menor = resta de las semidiferencias; conocidos así los lados *a. b.* el ángulo *C* tendrá por:

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}$$

5.º *Caso*—Conocidos los lados *a y b* y el ángulo *A* hallar los demás elementos. De la proporcionalidad entre los ángulos y los lados, se tiene:

$$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}, \quad \text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } a}{\text{sen. } A}$$

$$\cotg. \frac{C}{2} = \frac{\text{sen. } \left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ tang. } \left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{sen. } \left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

2.º De la fórmula fundamental se deduce también

$$\cotg. a \text{ tang. } b = \cos. C + \frac{\cotg. A}{\cos. b} \text{ sen. } C$$

de manera que siguiendo el mismo orden de sustituciones de casos análogos se tienen:

$$(1.º) \quad \text{tang. } m = \frac{\cotg. A}{\cos. b}$$

$$(2.º) \quad \cos. (C - m) = \cotg. a \text{ tang. } b \cos. m$$

Haciendo también la sustitución de $\text{tang. } n = \text{tang. } b \cos. A$
se tendría como deducción de la fundamental

$$\cos. a = \frac{\cos. b \cos. (c - n)}{\cos. n} \quad \text{de donde}$$

$$\cos. (c - n) = \frac{\cos. a \cos. n}{\cos. b}$$

Este caso puede presentarse sin solución y antes de ocuparse de su resolución debe consultarse el cuadro adjunto:

A < 90°	b < 90°	$\left. \begin{array}{l} a > b, a = 180^\circ - b \\ a > 180 - b \dots\dots \end{array} \right\} \text{sin solución}$	
		$\left. \begin{array}{l} a > b, a < 180 - b \dots\dots \text{una solución y será } B < 90^\circ \\ a = b \dots\dots\dots \text{ " " " } B = A \\ a < b \text{ y } a > 180 - b \dots\dots \text{dos soluciones — será } B < 90, \text{ ó } B > 90^\circ \end{array} \right\}$	
	b = 90°	$\left. \begin{array}{l} a > b \dots\dots\dots \text{sin solución} \\ a = b \dots\dots\dots \text{ " " } \\ a < b \dots\dots \text{dos soluciones — será } B < 90, \text{ ó } B > 90^\circ \end{array} \right\}$	
		$\left. \begin{array}{l} a > b \dots\dots\dots \text{sin solución} \\ a = b \dots\dots\dots \text{ " " } \end{array} \right\}$	
	b > 90°	$\left. \begin{array}{l} a < b \text{ y } a < 180^\circ - b \dots\dots \text{dos solcs. será } B < 90^\circ \text{ ó } B > 90 \\ a < b \text{ y } a = 180^\circ - b \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{una solución será } B > 90 \end{array} \right. \\ a > 180 - b \dots\dots \end{array} \right\}$	
		$\left. \begin{array}{l} a > b, a = 180 - b \\ a < 180 - b \dots\dots \end{array} \right\} \text{una solución y será } B \angle 90$	
	b < 90°	$\left. \begin{array}{l} a > b, a > 180 - b \dots\dots \text{dos " -- " } B \angle 90 \text{ ó } B > 90 \\ a = b \dots\dots\dots \text{sin " } \\ a < b \dots\dots\dots \text{sin " } \end{array} \right\}$	
	b = 90°	$\left. \begin{array}{l} a > b \dots\dots\dots \text{dos " } B \angle 90, \text{ ó } B > 90 \\ a = b \dots\dots\dots \text{sin " } \\ a < b \dots\dots\dots \text{sin " } \end{array} \right\}$	
	b > 90°	$\left. \begin{array}{l} a > b \dots\dots\dots \text{dos " .. } B \angle 90, \text{ ó } B > 90 \\ a = b \dots\dots\dots \text{una " .. } B = A \\ a < b, a > 180 - b \dots\dots \text{una " .. } B > 90^\circ \end{array} \right\}$	
		$\left. \begin{array}{l} a < b, a = 180 - b \\ a < 180 - b \dots\dots \end{array} \right\} \text{sin " }$	

6.º *Caso*—Conocidos los ángulos A y B y el lado a opuesto á uno de ellos.

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}$$

El valor de c y C puede hallarse por las analogías de Neper ó deduciendo su valor de la ecuación fundamental que dá: haciendo; $\text{tang. } m = \cos. B \text{ tang. } a$

$$\text{cotg. } a \frac{(\text{sen. } c = m)}{\cos. m} = \text{sen. } B \text{ cotg. } A$$

de donde; $\text{sen. } (C - m) = \text{sen. } B \text{ cotg. } A \text{ tang. } a \cos. m$

Así mismo puede calcularse directamente el ángulo C por:

$$\text{cotg. } m = \text{tang. } B \cos. a$$

$$\text{sen. } (C - m) = \frac{\cos. A \text{ sen. } m}{\cos. B}$$

TRIÁNGULOS ISÓSCELES

Por sus propiedades resulta $B = C$ y $c = b$, luego considerando el medio triángulo

$ABD = ACD$ se han deducido las siguientes fórmulas aplicables segun los datos conocidos:

si se conoce: A. B. C., $\text{sen. } \frac{1}{2} a = \text{sen. } \frac{1}{2} A \text{ sen. } B$;

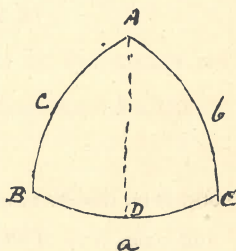
» » » BC y b, $\text{tang. } \frac{1}{2} a = \text{tang. } b \cot. B$,

» » » B. C y a, $\cos. \frac{1}{2} A = \cos. \frac{1}{2} a \text{ sen. } B$

si se conoce C. a b y c, $\cos. \frac{1}{2} A = \frac{\cos. b}{\cotg. B}$

» » » A. a. b. c; $\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} a}{\text{sen. } \frac{1}{2} A}$, $\cos. B = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} a}{\text{tang. } b}$

$\text{tang. } B = \frac{\cotg. \frac{1}{2} A}{\cos. c}$; $\cotg. B = \cos. c \text{ tang. } \frac{1}{2} A$

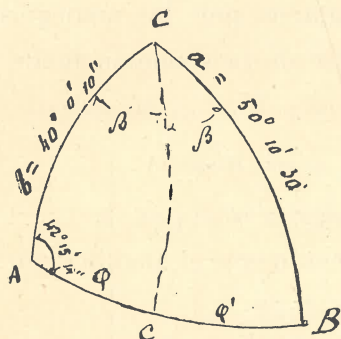


APLICACIONES

1.^{er} Problema—Datos conocidos $b = 40.^{\circ} 0' 10''$

$$a = 50.^{\circ} 10' 30''$$

$$A = 42.^{\circ} 15' 14''$$



hallar c , B y C'

descomponiéndolo en 2 triángulos rectángulos

$$\log. \text{tang. } m = \log. \text{tang. } b + \log. \cos. A$$

$$\log. \text{tang. } b = 40.^{\circ} 0' 10'' = 9.923856$$

$$+ \log. \cos. A = 42.^{\circ} 15' 14'' = 9.869333$$

$$\log. \text{tang. } m = 9.793189$$

$$m = 31.^{\circ} 50' 46''$$

$$\cos. m' = \frac{\cos. a \cos. m}{\cos. b} = \log. \cos. a + \log. \cos. m' - \log. \cos. b$$

$$\log. \cos. 50.^{\circ} 10' 30'' = 9.806481$$

$$+ \log. \cos. 31.^{\circ} 50' 46'' = 9.929147$$

$$19.735628$$

$$- \log. \cos. 40.^{\circ} 0' 10'' = - 9.884236$$

$$\log. \cos. m' = - 9.851392$$

$$m' = 44.^{\circ} 44' 50''$$

$$m = 31.^{\circ} 50' 46''$$

$$m' = 44.^{\circ} 44' 50''$$

$$c = 76.^{\circ} 35' 36''$$

$$\cotg. B = \cos. b. \text{tang. } A$$

$$\log. \cos. b = 9.884236$$

$$\log. \text{tang. } A = 9.958306$$

$$\log. \cotg. B = 9.842542$$

$$B = 55.^{\circ} 9' 59''$$

$$\log. \text{tang. } b = 9.923856$$

$$\log. \cotg. a = 9.921118$$

$$9.844974$$

$$\log. \cotg. B = 9.756785$$

$$\log. \cotg. b' = 9.601759$$

$$b' = 66.^{\circ} 26' 21''$$

$$b' = 66.^{\circ} 26' 21''$$

$$B = 55.^{\circ} 9' 59''$$

$$C = 121.^{\circ} 36' 20''$$

2.º *Problema*—Conociendo los tres lados y empleando la fórmula:

$$\text{sen. } \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p - a) \text{ sen. } (p - b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}}$$

$$a = 76.^\circ 35' 36''$$

$$b = 50.^\circ 10' 30''$$

$$c = 40.^\circ 0' 10''$$

$$2 p = 166.^\circ 46' 16''$$

$$p = 82.^\circ 23' 08''$$

$$p - a = 6.^\circ 47' 32'' \quad \dots \quad \log. \text{ sen. } (p - a) = 9.072871$$

$$p - b = 33.^\circ 12' 32'' \quad \dots \quad \log. \text{ sen. } (p - b) = 9.738556$$

$$18.811427$$

$$\log. \text{ sen. } a = 9.988000$$

$$\log. \text{ sen. } b = 9.385363$$

$$19.873363$$

$$\text{comp. } 0.126637$$

$$\log. \text{ sen. } \frac{c^2}{2} = 18.938064$$

$$\log. \text{ sen. } \frac{c}{2} = 9.469032$$

$$\frac{c}{2} = 17.^\circ 7' 31''$$

$$C = 34.^\circ 15' 2''$$

Por la fórmula de la proporcionalidad de los senos de los ángulos, con los de sus costados opuestos se hallarán los demás elementos.

3.er *Problema*—Conocidos los tres lados hallar los tres ángulos:

$$a = 113.^\circ 2' 56'' \quad b = 82.^\circ 39' 28'' \quad c = 74.^\circ 54' 31''$$

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c) = 135.^\circ 18' 28'' \quad \log. = 9.84714$$

$$(p - a) \dots\dots\dots = 22.^\circ 15' 31'' \quad \log. = 9.57840$$

$$(p - b) \dots\dots\dots = 52.^\circ 38' 59'' \quad \log. = 9.90034$$

$$(p - c) \dots\dots\dots = 60.^\circ 23' 57'' \quad \log. = 9.92926$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p - a) \text{ sen. } (p - c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p - b)}}$$

$$\log. \text{sen. } (p - a) = 9.57840$$

$$\log. \text{sen. } (p - c) = 9.93260$$

$$19.51766$$

$$\text{comp. log. sen. } p = 0.15286$$

$$\text{comp. log. sen. } (p - b) = 0.09966$$

$$\log. (\text{tang } \frac{1}{2} B)^2 = 19.77018$$

$$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} B = 9.88509$$

$$\text{arco } \frac{1}{2} B = 37^{\circ}30'25''$$

$$\text{angulo } B = 75^{\circ}0'50''$$

de la misma manera se obtendría

$$A = 116^{\circ}20'20'' \quad \text{y} \quad C = 70^{\circ}6'59''$$

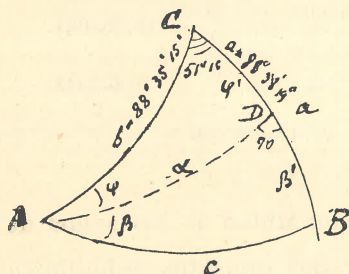
Verificación:

$$\frac{1}{2} E + (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} E) + (\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} E) + (\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} E) = 90^{\circ}0'0''$$

4.º Problema — Conocidos a b y C , hallar A B y c , por medio del ángulo auxiliar.

$$a = 88^{\circ}39'19'' \quad b = 88^{\circ}35'15''$$

$$C = 51^{\circ}15'$$



$$\text{tang. } m' = \text{tang. } b \cos. C$$

$$\log. \text{tang. } b = 1.6080464$$

$$+ \log. \cos. C' = 9.7965212$$

$$\text{tang. } m' = 1.4045676$$

$$m' = 87^{\circ}44'38''$$

$$\text{tang. } m = \frac{\text{tang. } m'}{\text{tang. } b}$$

$$\text{tang. } m' = 1.4045676$$

$$- \text{tang. } b = 1.6080464$$

$$\text{tang. } m = 9.7965212$$

$$m = 32^{\circ}02'36''$$

$$b' = a - m' \quad \text{sen. } A D = \text{sen. } m = \text{sen. } b \cos. C; \quad \cos. C = \cos. m \cos. b'$$

$$a = 88^{\circ}39'19''$$

$$\text{sen. } b = 9.9998680$$

$$\cos. a = 9.7967025$$

$$- m' = 87^{\circ}44'38''$$

$$+ \text{sen. } C' = 9.8920303$$

$$+ \cos. b' = 9.9999451$$

$$b' = 0^{\circ}54'41''$$

$$\text{sen. } a = 9.8918983$$

$$\cos. C = 9.7966656$$

$$A D = a = 51^{\circ}1344$$

$$C = 51^{\circ}14.05''$$

$$A = m + b$$

$$\text{tang. } b = \frac{\text{tang. } b'}{\text{sen. } a}$$

$$\text{tang. } B = \frac{\text{tang. } a}{\text{sen. } b'}$$

$$m = 32^{\circ}02'46''$$

$$\text{tang. } b' = 8.2016177$$

$$\text{tang. } a = 0.0951640$$

$$b = 1^{\circ}10'08''$$

$$- \text{sen. } a = 9.8918983$$

$$\text{sen. } b' = 8.2015628$$

$$A = 33^{\circ}12'54''$$

$$\text{tang. } b = 8.3097194$$

$$\text{tang. } B = 1.8936012$$

$$b = 1^{\circ}10'8''$$

$$B = 89^{\circ}16'05''$$

EXCESO ESFÉRICO

Como consecuencia de este caso, es la oportunidad de exponer diferentes fórmulas para determinar el *exceso* esférico de tanta importancia en las aplicaciones de la trigonometría á la geodesia.

En función de dos lados y el ángulo comprendido

$$\text{tang. } \frac{1}{2} E = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} a \text{ tang. } \frac{1}{2} b \text{ sen. } C}{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} a \text{ tang. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } C}$$

En función de los tres lados

$$\left. \begin{aligned} \text{sen. } \frac{1}{4} E &= \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{p}{2} \text{ sen. } \left(\frac{p-a}{2}\right) \text{ sen. } \left(\frac{p-b}{2}\right) \text{ sen. } (p-c)}{\text{cos. } \frac{1}{2} a \text{ cos. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } \frac{1}{2} c}} \\ \text{cos. } \frac{1}{4} E &= \sqrt{\frac{\text{cos. } \frac{1}{2} p \text{ cos. } \frac{1}{2} (p-a) \text{ cos. } \frac{1}{2} (p-b) \text{ cos. } \frac{1}{2} (p-c)}{\text{cos. } \frac{1}{2} a \text{ cos. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } \frac{1}{2} c}} \\ \text{tang. } \frac{1}{4} E &= \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} p \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-a) \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-b) \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-c)}{\text{cos. } \frac{1}{2} a \text{ cos. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } \frac{1}{2} c}} \end{aligned} \right\}$$

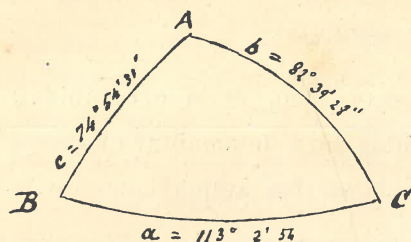
Como consecuencia de las anteriores

$$\left. \begin{aligned} \text{tang. } \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} E\right) &= \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (p-b) \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-c)}{\text{tang. } \frac{1}{2} p \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-a)}} \\ \text{tang. } \left(\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} E\right) &= \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (p-c) \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-a)}{\text{tang. } \frac{1}{2} p \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-b)}} \\ \text{tang. } \left(\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E\right) &= \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (p-a) \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-b)}{\text{tang. } \frac{1}{2} p \text{ tang. } \frac{1}{2} (p-c)}} \end{aligned} \right\}$$

Aplicación de las fórmulas del caso 2.º

datos conocidos: $a = 113.^\circ 2' 56'', 64$, $b = 82.^\circ 39' 28'', 40$,
 $c = 74.^\circ 54' 31'', 06$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = 135.^\circ 18' 28'', 05$ log. sen. = 9.84714
 $(p - a)$ = $22.^\circ 15' 31'', 41$ log. sen. = 9.57840
 $(p - b)$ = $52.^\circ 38' 59'', 65$ log. sen. = 9.90034
 $(p - c)$ = $60.^\circ 23' 56'', 99$ log. sen. = 9.93926



$$A = 116^{\circ} 20' 02'', 20$$

cálculo de $\tan \frac{1}{2} A$

$$\log. \text{sen. } (p - b) \dots 9.90034$$

$$\log. \text{sen. } (p - c) = 9.93926$$

$$c. \log. \text{sen. } (p - a) = 0.42160$$

$$c. \log. \text{sen. } p \dots \dots = 0.15286$$

$$\hline 0.41406$$

$$\log. \tan. \frac{1}{2} A = 0.20703$$

$$\frac{1}{2} A = 58^{\circ} 10' 1'' 10$$

Cálculo de $\frac{1}{2} B$

$$\log. \text{sen. } (p - a) = 0.57840$$

$$\log. \text{sen. } (p - c) = 9.93926$$

$$C \log. \text{sen. } (p - b) = 0.09966$$

$$C \log. \text{sen. } p = 0.15286$$

$$\log. \text{sen.}^2 \frac{1}{2} B = 9.77018$$

$$\log. \text{sen. } \frac{1}{2} B = 9.88509$$

$$\frac{1}{2} B = 37^{\circ} 30' 25''. 8$$

$$B = 75^{\circ} 00' 51''. 6$$

Cálculo de $\frac{1}{2} C$

$$\log. \text{sen. } (p - a) = 9.57840$$

$$\log. \text{sen. } (p - c) = 9.90034$$

$$C \log. \text{sen. } (p - b) = 0.06073$$

$$C \log. \text{sen. } p = 0.15286$$

$$\log. \text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = 9.69234$$

$$\log. \text{sen. } \frac{1}{2} C = 9.84617$$

$$\frac{1}{2} C = 35^{\circ} 03' 29''. 58$$

$$C = 70^{\circ} 06' 50''. 16$$

$$A = 116^{\circ} 20' 02''. 20$$

$$B = 75^{\circ} 00' 51''. 60$$

$$C = 70^{\circ} 06' 59''. 16$$

$$\hline 261^{\circ} 27' 52''. 96$$

$$\hline - 180^{\circ}$$

$$E = 81^{\circ} 27' 52''. 96$$

Aplicación de las fórmulas a y b en las cuales entra el valor medio de los anteriores elementos sea, $\frac{1}{2} p$

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c) = 135^{\circ} 18' 28''. 05$$

$$\frac{1}{2} p = 67^{\circ} 49' 14''. 025 \dots \dots \log. \tan. \frac{1}{2} p = 0.38608$$

$$\frac{1}{2} (p - a) = 11^{\circ} 07' 45''. 705 \dots \dots \log. \tan. \frac{1}{2} (p - a) = 9.29386$$

$$\frac{1}{2} (p - b) = 26^{\circ} 19' 29''. 825 \dots \dots \log. \tan. \frac{1}{2} (p - b) = 9.69441$$

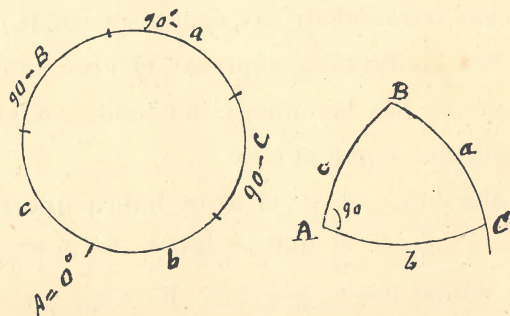
$$\frac{1}{2} (p - c) = 30^{\circ} 11' 58''. 495 \dots \dots \log. \tan. \frac{1}{2} (p - c) = 9.76493$$

Cálculo del exceso E ; por fórmula

de a	de b
log. tan. $\frac{1}{2} p \dots 0.38608$	log. tang. $\frac{1}{2} (p - b) \dots 9.69344$
log. tang. $\frac{1}{2} (p - a) \dots 9.29386$	log. tang. $\frac{1}{2} (p - c) \dots 9.76493$
log. tang. $\frac{1}{2} (p - b) \dots 9.69441$	log. cotang. $\frac{1}{2} (p - a) \dots 0.70614$
tang. tang. $\frac{1}{2} (p - c) \dots 9.76493$	log. cotg. $\frac{1}{2} p \dots 9.51392$
log. $(\text{tang. } \frac{1}{2} E)^2 = \dots 9.13927$	9.77940
log. tang. $\frac{1}{4} E = 9.56965$	log. tang. $(\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} E) = 9.88970$
$\frac{1}{4} E = 20.^\circ 21' 58''.25$	$\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} E = 37.^\circ 48' 02''.87$
$E = 81.^\circ 27' 53''$	$\frac{1}{2} A \dots 58.^\circ 10' 01''.12$
	$\frac{1}{4} E = \dots 20.^\circ 21' 58''.25$
log. tang. $\frac{1}{2} (p - a) \dots 9.29386$	log. tang. $\frac{1}{2} (p - b) \dots 9.29386$
log. tang. $\frac{1}{2} (p - c) \dots 9.76493$	log. tang. $\frac{1}{2} (p - a) \dots 9.69441$
log. cotg. $\frac{1}{2} (p - b) \dots 0.30559$	log. cotg. $\frac{1}{2} (p - b) \dots 0.23507$
log. cotg. $\frac{1}{2} p \dots 9.61392$	log. cotg. $\frac{1}{2} p \dots 9.61392$
8.97830	8.83726
log. tang. $(\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} E) 9.48915$	log. tang. $(\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E) 9.41863$
$\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} E = 17.^\circ 08' 27''.55$	$\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E = 14.^\circ 41' 31''.34$
$\frac{1}{2} B = 37.^\circ 30' 25''.80$	$\frac{1}{2} C = 35.^\circ 03' 29''.59$
$\frac{1}{4} E = 20.^\circ 21' 58''.25$	$\frac{1}{4} E = 20.^\circ 21' 58''.25$
$\frac{1}{4} E + (\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} E) + (\frac{1}{2} B - \frac{1}{4} E) + (\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E) = 90.^\circ 00' 00''.01$	

REGLA MNEMOTÉCNICA DE NEPER

1.^a Regla—El seno de una parte es igual al producto de las tangentes de las partes adyacentes:



Datos conocidos

$$\begin{aligned}
 A. c. a. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90.^\circ - B) = \text{tang. } c. \text{ tang. } (90 - a) \\ \cos. B = \text{tang. } c. \text{ cotg. } a \end{array} \right. \\
 A. b. a. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90.^\circ - C) = \text{tang. } (90.^\circ - a) \text{ tang. } b \\ \cos. C = \text{tang. } b. \text{ cotg. } a \end{array} \right. \\
 A. B. b. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } c = \text{tang. } (90.^\circ - B) \text{ tang. } b. \\ \text{sen. } c = \text{cotg. } B. \text{ tang. } b. \end{array} \right. \\
 A. C. c. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } b = \text{tang. } c. \text{ tang. } (90.^\circ - C) \\ \text{sen. } b = \text{tang. } c. \text{ cotg. } C \end{array} \right. \\
 A. B. C. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90 - a) = \text{tang. } (90 - B) \text{ tang. } (90 - C) \\ \cos. a = \text{cotg. } B \text{ cotg. } C. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

2.^a Regla—El seno de una parte es igual al producto de los cosenos de las partes opuestas.

$$\begin{aligned}
 A. c. C. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } c = \cos. (90 - a) \cos. (90 - C) \\ \text{sen. } c = \text{sen. } a. \text{ sen. } C \end{array} \right. \\
 A. B. c. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90.^\circ - C) = \cos. c. \cos. (90.^\circ - B) \\ \cos. C = \cos. c. \text{ sen. } B \end{array} \right. \\
 A. C. b. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90 - B) = \cos. b. \cos. (90.^\circ - C) \\ \cos. B = \cos. b. \text{ sen. } C \end{array} \right. \\
 A. c. b. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } (90.^\circ - a) = \cos. c. \cos. b \\ \cos. a = \cos. c. \cos. b \end{array} \right. \\
 A. B. a. & \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. } b = \cos. (90.^\circ - B) \cos. (\cos. (90.^\circ - a)) \\ \text{sen. } b = \text{sen. } B \text{ sen. } a. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Nota.—Expresión de un arco en función del radio R.

Cuando en una fórmula figuran á la vez un arco y líneas trigonométricas, es indispensable para hacer homogénea la fórmula, expresar el arco en función del radio como lo son las líneas, haciendo en grados, minutos ó segundos, según el caso.

Siendo $x.^\circ$, x' , x'' el arco, habrá que reemplazarlo por $\frac{x.^\circ}{R.^\circ}$, $\frac{x'}{R'}$, $\frac{x''}{R''}$ ó lo que es igual $x.^\circ \times \text{arc. } 1.^\circ$, $x'' \times \text{arc. } 1''$ de donde $R.^\circ = \frac{1}{\text{arc. } 1.^\circ}$; $R' = \frac{1}{\text{arc. } 1'}$; $R'' = \frac{1}{\text{arc. } 1''}$

expresando en partes del radio el valor del arco y haciendo $R = 1$ y arco $180.^{\circ} = 3.1415926 = \pi$

$$1.^{\circ} = \frac{\pi}{180.^{\circ}} = 0.01745329 \dots R.^{\circ} = 57.^{\circ}295779$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \times 180} = 0.00029088 \dots R' = 3437'.74677$$

$$1'' = \frac{\pi}{3600'' \times 180} = 0.000004848 \dots R'' = 206264.806$$

de manera que para un arco $x.^{\circ}$ su valor será

$$\text{arco } x.^{\circ} = 0.017453 \times x.^{\circ} \frac{x.^{\circ}}{57.^{\circ}295779}$$

$$\text{arco } x' = 0.00029088 \dots \frac{x'}{3437' 7467}$$

$$\text{Sea log. arco } x = (8.241877) x.^{\circ}$$

$$x' = (6.463726) x'$$

$$x'' = (6.685575) x''$$

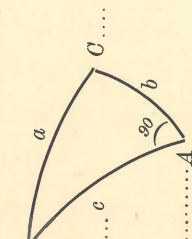
$$\text{sea log. arc. } x.^{\circ} = 8.241877 + \log. x.^{\circ}$$

la cantidad entre paréntesis es log. factor constante.

Triángulos esféricos rectángulos

VALOR DE CADA ELEMENTO EN FUNCIÓN DE OTROS DOS

Valor de	a y b	a y c	a y B	a y C	en función de			b ó y B	b ó y C
cos. a						$= \cotg. B. \cotg. C$	$= \cos. b \cos c$		
sen. a						$= \frac{\cotg. B}{\tan g. C}$		$= \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}$	$= \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C}$
tang. a								$= \frac{\tan g. c}{\cos. B}$	$= \frac{\tan g. b}{\cos. C}$
sen. b			$= \text{sen. } a \text{ sen. } B$						$= \frac{\tan g. c}{\tan g. C}$
cos. b		$= \frac{\cos. a}{\cos. c}$			$= \cos. B$	$= \frac{\cos. B}{\text{sen. } C}$			
tang. b				$= \tan g. a \cos. C$				$= \text{sen. } c \tan g. B$	
sen. c				$= \text{sen. } a \text{ sen. } C$				$= \frac{\tan g. b}{\tan g. B}$	$= \frac{\cotg. B}{\cotg. b}$
cos. c	$= \frac{\cos. a}{\cos. b}$				$= \cos. C$	$= \frac{\cos. C}{\text{sen. } B}$			
tang. c			$= \tan g. a \cos. B$						$= \text{sen. } b \tan g. C$



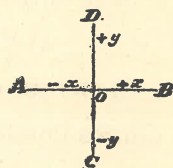
sen. B = $\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

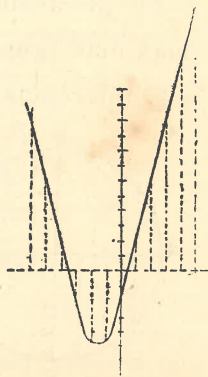
La geometría analítica trata de la representación geométrica de las expresiones algebraicas, á la par que del análisis algebraico de las expresiones geométricas.

Los valores de las variables se representan por coordenadas rectilíneas paralelas y perpendiculares entre sí ó por coordenadas polares.

Para las coordenadas polares se adopta: la línea AB como eje de las *abscisas* x , admitiendo que la parte OB sea para las x positivas y la parte AO para las x negativas de la misma manera la línea CD es el eje de las *ordenadas* y , siendo la parte OD para las y positivas y la parte OC para las y negativas.



En una ecuación $y = x^2 + 3x - 2$, por ejemplo, y representa la ordenada, pero también es una variable dependiente del valor de x ; así resolviendo la ecuación anterior asignando para ello á x valores sucesivos desde 0 hasta $+6$ y desde 0 hasta -6 se tendrán los valores correspondientes á y , de manera que adoptando una escala convencional para representar los valores de y y x se obtendrán una serie de puntos que unidos representan la curva de la ecuación.



Así aplicando á la ecuación $y = x^2 + 3x - 2$ los valores indicados se tiene para $x = 0$; $y = -2$.

para -1 , $y = +1 - 3 - 2 = -4$	para $+1$, $y = 1 + 3 - 2 = +2$
» -2 , $y = +4 - 6 - 2 = -4$	» $+2$, $y = 4 + 6 - 2 = +8$
» -3 , $y = +9 - 9 - 2 = -2$	» $+3$, $y = 9 + 9 - 2 = +16$
» -4 , $y = +16 - 12 - 2 = +2$	» $+4$, $y = 16 + 12 - 2 = +26$
» -5 , $y = +25 - 15 - 2 = +8$	» $+5$, $y = 25 + 15 - 2 = +38$
	» $+6$, $y = 36 + 18 - 2 = +52$

para $y = 0$
 » $-x = -3.5616$
 » $+x = +0.5616$

representando á la escala estos valores, se tendrá la curva indicada en la figura 2ª.

Si se entra á considerar la ecuación

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \text{ se tiene: } y = \sqrt{16 - x^2}$$

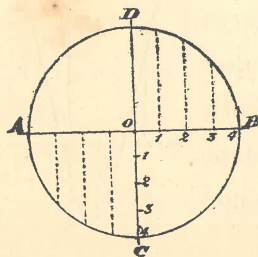
Si en esta ecuación se busca el valor de $y = 0$, esto es, los puntos donde la curva cortará los ejes, se tendrá:

$$y = 0 = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{luego } x = \pm \sqrt{16 - y^2}$$

pero si se busca el valor de y correspondiente á $x = 0$ se tendrá, $x = \sqrt{16 - y^2}$; luego $0 = \sqrt{16 - y^2}$

$$\text{de donde } y = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

Lo que demuestra que siendo las ordenadas y abscisas máximas, iguales entre sí é iguales á 4, la curva será una circunferencia.



Adoptando para x diferentes valores se tiene:

para $x = -1$, $y = \sqrt{16 - 1} = 3.87$
 » $x = -2$, $y = \sqrt{16 - 4} = \pm 3.46$
 » $x = -3$, $y = \sqrt{16 - 9} = \pm 2.64$
 » $x = -4$, $y = \sqrt{16 - 16} = 0$

para $x = + 1$, $y = \sqrt{16 - 1} = 3,87$

» $x = + 2$, $y = \sqrt{16 - 4} = \pm 3,46$

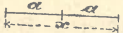
» $x = + 3$, $y = \sqrt{16 - 9} = \pm 2,64$

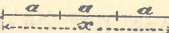
» $x = + 4$, $y = \sqrt{16 - 16} = 0$

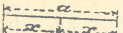
Luego construyendo por puntos esta curva resultará como ya se ha dicho una circunferencia representada por la figura 3.

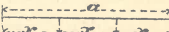
CONSTRUCCION GEOMÉTRICA DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Después de adoptada la escala que ha de representar la unidad, sean los siguientes ejemplos:

1.º $x = 2a$  ;

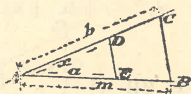
$x = 3a$  ;

2.º $x = \frac{a}{2}$  ;

$x = \frac{a}{3}$  ;

3.º $x = \frac{ab}{m}$ es una *cuarta proporcional* y se obtiene el valor de la semejanza de los triángulos ABC y

AED en los que siendo $AB = m$, $AC = b$, $AE = a$ y $AD = x$ se tiene



$m : b :: a : x$, lo que dá $x = \frac{ab}{m}$

4.º $x = \sqrt{ab}$, expresión de una *media proporcional*— Siendo $a = AB$ y $b = BC$ sobre una misma línea recta

si en B se levanta una perpendicular BD, se tendrá de los dos

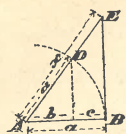
triángulos ABD, CBD $AB : BD :: BD : BC$



sea $a : x :: x : b$ de donde $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$

si $a = 2$ y $b = 3$, $x = \sqrt{ab} = 2,449$

5.º — La expresión $x = \frac{a^2}{b}$ es la de una *tercera pro-*



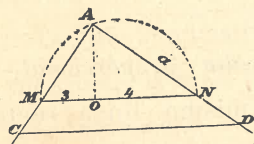
porcional. De la construcción adjunta formando dos triángulos semejantes contruidos con un ángulo cualquiera como lo indica la figura, entonces :

$AB : AC :: AE : AD$, sea $a : b :: x : a$
de donde $x = \frac{a^2}{b}$

6.º — La expresión $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la representación de una hipotenusa.

7.º — La expresión $x = \sqrt{ab + c^2}$ puede ser descompuesta en $x = \sqrt{ab} + \sqrt{c^2}$ pero $\sqrt{ab}$ es una media proporcional y puede hacerse $\sqrt{ab} = p$; luego en la expresión general substituyendo este valor se tendrá $x = \sqrt{p^2 + c^2}$ que es la expresión de una hipotenusa. Sería, pues, el valor de la línea DE de la figura 5 pues, que $p = BD$ representa la media proporcional entre a y b , y DE la hipotenusa del triángulo DBE en el cual $BE = c$.

8.º — La expresión $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; esta puede transformarse en $x^2 = \frac{4a^2}{3}$ ó también $\frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3}$



Si se construye AO como media proporcional entre las líneas MO, NO = 4 y 3 y se tiran las líneas AD = a y Dc paralela á MN, se tiene por el teorema de que la línea AO divide la línea MN en partes proporcionales á los cuadrados de los catetos

$MO : NO :: \overline{AM}^2 : \overline{AN}^2$ así mismo $\overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 :: \overline{AM}^2 : \overline{AN}^2$
ó sea también haciendo $AC = x$.

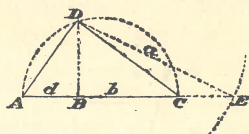
$x^2 : a^2 :: 4 : 3$ de donde $x^2 = \frac{4a^2}{3}$ $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

9.º—Sea $x = \sqrt{a^2 - bd}$; si se hace $bd = n^2$ se tendrá $x = \sqrt{a^2 - n^2}$ expresión de un cateto siendo a la hipotenusa y n el otro cateto.

Ahora como $n = \sqrt{db}$, n es una media proporcional entre d y b fácil de construirse

$$AB = d, \quad BC = b \quad \text{y} \quad DB = n$$

Si desde D se tira la línea $AE =$ de manera que corte en E la prolongación de la línea ABC , se tendrá del triángulo ABE



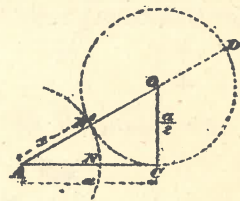
$$BE = \sqrt{DE^2 - DB^2} \quad \text{sea} \quad x = \sqrt{a^2 - n^2}$$

ó finalmente $x = \sqrt{a^2 - bd}$

10.—Sea ahora la expresión $x^2 = ax + a$ ecuación de 2.º grado que puede ponerse bajo la forma

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a}$$

sea $AC = a$ y $OC = \frac{a}{2}$. Del triángulo



ACO se tiene $AO = \sqrt{AC^2 + OC^2}$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a + \frac{a}{2}; \quad \text{pero haciendo } AN' = AN \text{ se tendrá:}$$

$$AN = x = OA - ON' = OA - \frac{a}{2} \quad \text{pero}$$

$$OA - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}; \quad \text{luego } AN = x$$

Esta expresión es adoptando el signo $+$

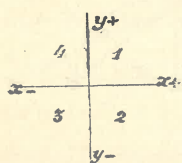
Si ahora se toma el signo $-$ se tiene:

$$AD = AO + OD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}; \quad \text{luego } AD = x$$

Ecuación del punto.—Llamando x e y las coordenadas de un punto con relación á los ejes rectangulares, es evidente que si $x = 0$, el punto M se hallará sobre el eje de las ordenadas y .

De la misma manera si $y = 0$, el punto M se hallará sobre el eje de las abscisas x .

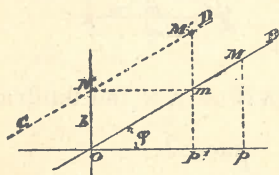
Ejes de coordenadas y signos de éstas.—Considerando los ejes rectangulares formando 4 cuadrantes, numerados de 1 á 4 en los cuales se adopta que las ordenadas y de la parte superior serán positivas mientras que las inferiores serán negativas. De la misma manera las abscisas de la derecha serán positivas y negativas las de la izquierda.



Así se tendrá la siguiente clasificación:

1. ^{er} Cuadrante	2. ^o Cuadrante	3. ^{er} Cuadrante	4. ^o Cuadrante
$+ y$	$- y$	$- y$	$+ y$
$+ x$	$+ x$	$- x$	$- x$

2.^a *Ecuación de la línea recta.*—Sea OB la línea con-



siderada, que corta en o el eje de la abscisa bajo un ángulo m . El punto M , tendrá por coordenadas

$$MP = y, \quad OP = x$$

Del triángulo MOP se tendrá $y = x \text{ tang. } m$; lo que indica que el valor de y variará con x y que para cualquier punto de la línea OB el valor de $\text{tang. } m$ será constante; haciendo $\text{tang. } m = a$ se puede escribir la ecuación de la línea pasando por el origen o .

$$y = ax \quad (1)$$

Si la línea considerada fuera la CD que corta el eje de las ordenadas, en N, á una distancia $ON = b$, del eje de abscisas, pero con el mismo coeficiente angular $\text{tang. } m = a$

Un punto M' tendrá por coordenadas

$$y = M'P' = M'm + m p' = Mm + Mo = y' + b; \quad x = Op'$$

Pero para el valor de y' según la fórmula (1) se tiene $y' = ax$, de donde

$$y = ax + b \quad (2)$$

que es la ecuación general de la línea recta.

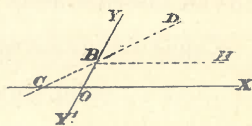
Coefficiente angular.— De la fórmula general $y = ax + b$ se deduce $a = \frac{y - b}{x} = \text{tang. } m \quad (3)$

Si los ejes fueran oblicuos, haciendo el ángulo

$\angle YOX = \angle YBH = n$ se tendrá para

$DBH = n - m$ luego

$$a = \frac{\text{sen. } m}{\text{sen. } n - m}$$

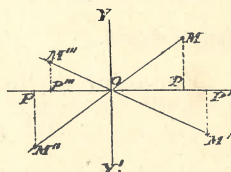


Efectivamente, si se hace $n = 90^\circ$ se tendrá:

$$a = \frac{\text{sen. } m}{\text{sen. } (90^\circ - m)} = \frac{\text{sen. } m}{\cos. m} = \text{tang. } m$$

Generalidad de la ecuación $y = ax + b$.

Si a es un número positivo, todos los puntos M . se hallarán en el primer cuadrante, o' como prolongación en el 3.^{er}—pues las coordenadas resultan de signos iguales.



Si a fuera negativa, las coordenadas resultarán de signos contrarios y los puntos de la línea $M' M''$ caerán en el 2.^o y 4.^o cuadrante.

Siendo b la constante BO , $NO...$ que indica la distancia de la línea al origen O sobre el eje de las ordenadas, toda ecuación de la forma $y = ax$, representa una línea pasando por el origen O .

forma a	forma
$2y + 3x = 0$	$2x = 3y + 5 = 0, \quad 3y = 2x + 5$
para $x = 0, \quad y = 0$	para $x = 0, \quad y = +\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} M$
» $x = 2, \quad y = -3 = M'$	» $x = 2, \quad y = +\frac{9}{3} = +3$
» $x = 4, \quad y = -6$ »	» $x = 4, \quad y = +\frac{13}{3} = +4\frac{1}{3}$
» $x = -2, \quad y = +3 = M''$	» $x = 2, \quad y = -\frac{1}{3}$
» $x = -4, \quad y = +6$	» $x = 4 \quad y = -\frac{3}{3} = -1$

Ecuación de las rectas que pasan por un punto dado M cuyas coordenadas son x' y'

Ecuación general de la línea $y = ax + b$

» del punto dado $y' = ax' + b$

de la segunda $b = y' - ax'$; sustituyendo este valor en la 1.^a
 $y = ax + y' - ax'$ y transformando se obtiene la ecuación general

$$y - y' = a(x - x') \quad (4)$$

2.º — *Por un punto dado trazar una línea paralela á otra línea dada.*

Ecuación de la línea dada $y = ax + b$

» del punto dado $y' = a'x' + b$

la línea que pasará por el punto dado será según (4)

$y - y' = a'(x - x')$ pero, como ambas deben ser paralelas, el coeficiente angular debe ser igual en los dos casos $a = a'$ luego la ecuación buscada será

$$y - y' = a(x - x').$$

3.º — *Trazar una recta por dos puntos dados.*

Coordenadas del punto $M \dots y' \ x'$

» » » $M' \dots y'' \ x''$

Ecuación de la recta que pasa por cada punto independiente: para $M' \dots x'$;

» $M' \dots -x''$.

La diferencia entre los valores dará el del coeficiente angular que la línea pedida con el eje de abscisas.

$$\text{Será } a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

Sustituyendo este valor en la primera se tendrá la fórmula general $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$ (5)

Expresión que también puede escribirse

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

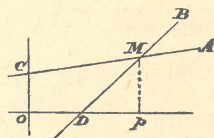
Si un punto de los dados fuera el origen O siendo para ese punto $x' = 0, y' = 0$; la ecuación (5) se reduciría á

$$y = \frac{y''}{x''} x.$$

4.º — *Hallar el punto de intersección de dos líneas dadas.*

A C una línea, B D la otra, M = punto intersección.

$$y = a x + b \quad y' = a' x + b'$$



Siendo M el punto de intersección de ambas líneas, sus coordenadas son una sola, luego para ese punto

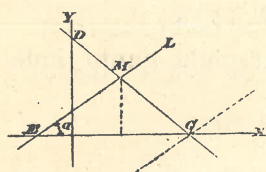
$$a x + b = a' x + b'$$

de donde $a x - a' x = b' - b$

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \quad (6)$$

que es la ecuación buscada.

5.º *Calcular el ángulo formado por dos rectas dadas por sus ecuaciones*



$$y = ax + b; \quad y = a'x + b'$$

El ángulo $EMG = MGX - MEG$

sea $V = a' - a$

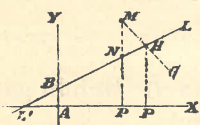
de donde $\operatorname{tg.} V = \operatorname{tg.} (a' - a) = \frac{\operatorname{tg.} a' - \operatorname{tg.} a}{1 + \operatorname{tg.} a' \operatorname{tg.} a}$

y si los ejes son rectangulares $\operatorname{tang.} V = \frac{a' - a}{1 + a'a} \quad (7)$

» » » » oblicuos $\operatorname{tang.} V = \frac{(a' - a) \operatorname{sen.} n}{1 + aa' + (a + a') \cos. n} \quad (8)$

si el ángulo $V = 90.^\circ$, $\operatorname{tang.} V = a$; de donde $\frac{a' - a}{1 + a'a} = a$ sea $1 + aa' = 0$

6.º *De un punto dado M, bajar una perpendicular á una línea dada y calcular la distancia de ese punto á la línea.*



El punto M tiene por coordenadas $x'y'$. La línea dada BL responde a'; $y = ax + b$. De M se bajará la perpen-

dicular MHG á BL.

La ecuación de la línea que pasará por el punto M será $y - y' = a'(x - x')$, en la cual es desconocido el coeficiente a' .

Siendo los ejes rectangulares y el ángulo $v = 0$ se tiene $1 + aa' = 0$ de donde $a' = -\frac{1}{a}$ que sustituido en la ecuación anterior da para la *ecuación de la perpendicular*

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \quad (9)$$

Conocidas las coordenadas de M, si se conocieran las de H, fácil sería deducir la distancia MH por la ecuación

$$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

así que empleando esta fórmula y haciéndole sufrir algunas transformaciones se obtiene la fórmula general del caso

$$D = \frac{\pm (y' - ax' - b)}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (10)$$

y' representa la ordenada $MP = y'$, luego la expresión $ax' - b$ la ordenada NP que corresponde á la abscisa $AP = x'$ luego la expresión $y' - ax' - b$ representa la ordenada MN .

Si el punto M se encuentra á la parte superior de la línea BL , será positiva su ordenada, se tendrá

$$y' - ax' - b > 0 \quad \text{y} \quad D = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Si M estuviera en la parte inferior sería

$$y' - ax' - b < 0 \quad \text{y} \quad D = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Si el punto desde donde debe bajarse la perpendicular fuera el origen de las coordenadas; se tendría $x' = 0$, $y' = 0$

$$\text{luego } D = \frac{\pm b}{\sqrt{1 + a^2}}$$



el resultado será *positivo* si el punto B' se halla en la parte superior del origen y *negativo* estando en B en la parte inferior.

Si fuera la línea dada BL la que pasa por el origen A entonces, $b = 0$ de donde: $D = \frac{y' - ax'}{\sqrt{1 + a^2}}$; ó $D = \frac{ax' - y'}{\sqrt{1 + a^2}}$

Si los ejes de coordenadas *no fueran rectangulares*, se tendría para la relación $1 + aa' = 0$; $1 + aa' + (a + a') \cos. \theta = 0$

de donde $a' = - \frac{(1 + a \cos. \theta)}{a + \cos. \theta}$

expresión que sustituida general da

$$D = \frac{(y' - ax' - b) \text{ sen. } \theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos. \theta}}$$

7.º Por un punto dado fuera de una recta dada, trazar otra línea que forme con esta un ángulo dado

La ecuación de la recta dada es $y = ax + b$

» » » » » á trazar es $y - y' = a'(x - x')$ (p)

y como éstas dos líneas deben hacer entre sí un ángulo determinado m, se tiene $\frac{a' - a}{1 + aa'} = m$; ó sea $\frac{a - a'}{1 + aa'} = m$

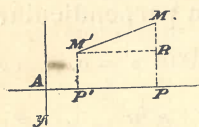
pero las dos relaciones pueden reducirse á una

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = \pm m \text{ de donde } a' = \frac{a \pm m}{1 + am}$$

expresión que sustituida en la ecuación (p)

$$\text{da } y - y' = \frac{a \pm m}{1 + am} (x - x') \quad (11)$$

8.º Hallar la distancia D que separa dos puntos dados M. M'



$$\begin{aligned} MP &= y' \\ AP &= x' \\ M'P &= y'' \\ AP &= x'' \end{aligned}$$

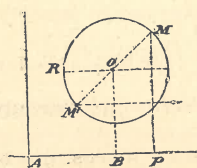
del triángulo M' M R, $MM'^2 = MR^2 + M'R^2$;

pero $MR = MP - RP = y' - y''$ también

$M'R = P'P = x' - x''$ luego si $MM' = D$

se tiene $D = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2} \quad (12)$

ECUACIÓN DEL CÍRCULO



Sea un círculo de radio = r; si se llama A B = P, O B = q coordenadas del centro O. y se hace M O = y, A P = x las coordenadas de un punto cualquiera M de la circunfe-

rencia se tendrá, como expresión de O M según fórmula (12)

$$r^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 \quad (13)$$

que es la ecuación del círculo y que caracteriza cualquier punto de la circunferencia, siendo las constantes las coordenadas del centro.

Si los ejes de coordenadas fueran oblicuos se tendría

$$r^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 + 2(x - p)(y - q) \cos. B \quad (14)$$

La ecuación 13 puede tomar una forma más simple según los siguientes casos:

a Si el origen de las coordenadas se encuentra en un punto M' de la circunferencia $r^2 = p^2 + q^2$ lo que convierte la 13 en $x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$ de donde suprimiendo las cantidades p^2, q^2, r^2 se tiene

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$$

b Si el origen estuviera en el punto R extremo del diámetro $p = r, q = 0$. de donde se tendrá; $y^2 = 2rx - x^2$

c Si el origen estuviera en el centro O se tendría

$$r^2 = x^2 + y^2, \text{ o } y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Desarrollando la fórmula (13) se tiene

$$r^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2 - 2yq + q^2$$

$$y^2 - 2yq = r^2 - x^2 + 2px - p^2 - q^2$$

de donde $y = q \pm \sqrt{q^2 + r^2 - x^2 + 2px - p^2 - q^2}$

que es la ecuación de la circunferencia en coordenadas rectilíneas rectangulares y, haciendo $r^2 - q^2 - p^2 = C., - 2p = A; 2q = B$, puede escribirse la misma ecuación bajo la forma

$$y^2 + x^2 + Ax + By + C = 0$$

$$\text{de donde, } y = \frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - x^2 + Ax + C}$$

Lugar geométrico, se llama así la línea recta ó curva cuyos puntos responden á la misma ley de generación y cuya expresión algebraica que es la *ecuación de lugar* y de la forma: $F(y, x) = 0$, es la misma para todos los puntos.

Toda ecuación de primer grado, entre dos variables x ó y que representan coordenadas de proyección, tiene por lugar geométrico una línea recta.

Así la ecuación $y = ax + b$ en la cual siempre, $a = \text{tang. } a$, lo que conduce á decir que cualquier valor que se asigne á la variable x , el resultado para y será siempre el de una ordenada de una línea recta en que a es constante.

Toda ecuación de 2.º grado de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

que no comprende el producto xy , de las variables y en la cual los coeficientes de los cuadrados son iguales á la unidad ó iguales entre sí, tiene por lugar geométrico una *circunferencia*.

De la ecuación general del círculo relacionada á los ejes rectangulares $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

se tiene efectuando la operación, $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$ y haciendo $-2p = A$, $-2q = B$, $p^2 + q^2 - r^2 = C$ de donde $p = -\frac{A}{2}$, $q = -\frac{B}{2}$, $r^2 = p^2 + q^2 - C$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 - C} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - C}$$

Lo que indica que si en un sistema de ejes rectangulares se construyen las coordenadas $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ y del punto O se describe una circunferencia con el radio, $r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - C}$ ésta será el lugar geométrico de la ecuación.

Ejemplo. — En un sistema de ejes rectangulares, construir la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$ dividiendo por 2; $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y = \frac{1}{2}$

agregando á ambos miembros $\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$ se tiene $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{33}{16} = \frac{1}{4}\sqrt{33}$

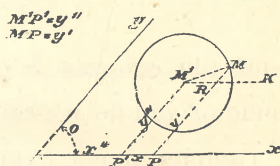
Luego el punto O tendrá por abcisa $\frac{3}{4}$ — y por ordenada $y = -1$, fijado así ese punto O, si desde él se describe una circunferencia con el radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{33}$ se tendrá representado el lugar geométrico pedido, por dicha circunferencia.

Si los ejes fueran oblicuos se tendría $\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2 - 2MR \times M'R \cos. MRM'$ pero como, $MR = y' - y$,

$$M'R = x' - x, MM' = r$$

$$\cos. MRM' = - \cos. MRK = - \cos. \theta$$

Así la ecuación anterior puede escribirse $r^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + 2(y' - y)(x' - x) \cos. \theta$



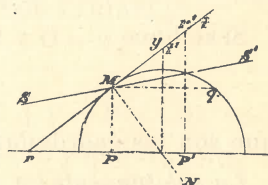
$M'P' = y'$
 $MP = y'$
 $AP = x'$
 $AP = x$

TANGENTE AL CIRCULO

La secante SMM'S' que pasa por los puntos MM' cuyas coordenadas son respectivamente $y'x'$, $y''x''$, tiene por ecuación como línea recta

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$$

Haciendo variar el coeficiente angular $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ desde cero hasta que se confunda con el de una tangente



$Mc =$ radio
 $Tt =$ tangente
 $TP =$ subtangente
 $MN =$ normal
 $PC =$ subnormal
 $CT = y'$
 $ct' = x'$ de la tang. buscada.

cualquiera Tt y recordando también que para cada uno de los puntos M, M' se tiene $x'^2 + y'^2 = r^2$

$$x''^2 + y''^2 = r^2$$

Restándolas una de otra, $x''^2 - x'^2 + y''^2 - y'^2 = 0$

ó sea también $(x'' + x')(x'' - x') + (y'' + y')(y'' - y') = 0$

$$\text{de donde } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{x' + x'}{y' + y'}$$

Ahora si se admite que y', x' sean las coordenadas del punto de tangencia lo que implica hacer $x'' = x', y'' = y'$

$$\text{se tendrá } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{x'}{y'}$$

y la ecuación primera se reduce á

$$y - y' = - \frac{x'}{y'} (x - x')$$

que es la *ecuación de la tangente* al círculo, con su centro como origen de coordenadas.

También puede expresarse la tangente, relacionada al mismo origen haciendo

$$\text{de; } x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{y de } y - y' = - \frac{x'}{y'} (x - x')$$

se puede deducir $yy' + xx' = y'^2 + x'^2$

ó simplemente $xx' + yy' = r^2$

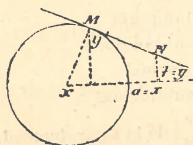
ecuación en la cual figuran los rectángulos xx', yy' en vez de los cuadrados x^2, y^2

Si se hace $y = 0$ y luego $x = 0$, la última ecuación dará

$$x = \frac{r^2}{x'}, \quad y = \frac{r^2}{y'}$$

que son las coordenadas $TC = x, Ct' = y$ de la tangente.

La *sub-tangente* en este caso, siendo $PT = CT - CP$ sea



$$\frac{r^2}{x'} - x^2 \text{ se tiene } PT = \frac{r^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'} \quad \text{que}$$

es la ecuación buscada.

Como aplicación de lo que precede, sea

trazar desde un punto dado, una tangente á una circunferencia. Para el punto N se tiene: abscisa = a, ordenada = b y para el punto de tangencia M, x' y'

La ecuación de la tangente en M, $yy' + xx' = r^2$ y la del punto N $ax' + by' = r^2$ de la cual $y' = \frac{r^2 - ax'}{b}$ valor sustituido en $x'^2 + y'^2 = r^2$

y después de ordenado por x' da

$(a^2 + b^2) x'^2 - 2r^2 ax' = r^2 b^2 - r^2$ ó reduciendo

$$x' = \frac{r (ra \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - r^2})}{a^2 + b^2}$$

asignando á x' diferentes valores se tendrá

$$y' = \frac{r (br \mp a \sqrt{a^2 + b^2 - r^2})}{a^2 + b^2}$$

ó también para la ordenada y del punto de tangencia en M

$$y = \frac{ra \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{rb \mp a \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}$$

De estas expresiones se deduce que pueden trazarse dos tangentes desde el punto N y que dicho punto tiene que estar fuera de la circunferencia.

DISCUSIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS REPRESENTADAS POR LA ECUACION DE 2.º GRADO CON DOS VARIABLES

Sea la ecuación general:

$$Ay^2 + Bx + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (1)$$

que representa todas las curvas de 2.º grado y que resuelta con respecto á y , puede ponerse bajo la forma

$$y = ax + y \pm \frac{1}{2A} \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = ax = b \pm Y \quad (2)$$

esto es haciendo; $Y = \frac{1}{2A} \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \quad (3)$

Para construir la curva, se trazará la recta

$$y = ax + b; \quad (4)$$

y á partir de ella se levantarán en ambos sentidos las ordenadas Y , según los diferentes valores que toma al sustituirse en la cantidad subradical, valores sucesivos de x ; pero los valores de x dependerán de la naturaleza de la curva que la ecuación represente.

Es pues necesario conocer la forma de la curva y para esto supongamos resuelta la ecuación; $Mx^2 + 2Nx + P = 0$ (5) que resulta de igualar á cero el término subradical de la (3); por otra parte, sean α y β las raíces (en la hipótesis de ser $\alpha < \beta$) de manera que la (3) puede expresarse por

$$Y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{M(x - \alpha)(x - \beta)} \quad (6)$$

Dando ahora á x , valores comprendidos entre α y β se tiene: $\alpha < x < \beta$, de donde, $x - \alpha > 0$; $x - \beta < 0$; y el producto $(x - \alpha)(x - \beta)$ será negativo.

Si se dá á x , valores menores que α y con más razón menores que β , los factores binomios $(x - \alpha)$ y $(x - \beta)$ serán negativos.

Si x toma valores mayores que β y de consiguiente mayores que α , los mismos factores binomios serán ambos positivos y el producto $(x - \alpha)(x - \beta)$ también positivo para todos los valores de x no comprendidos entre α y β .

De lo que precede se deduce; que anulándose el binomio subradical para $x = \alpha$ y $x = \beta$, se tiene $Y = 0$. lo que significa que en este caso los puntos de la curva están sobre la recta (4).

Para que otros puntos sean de la curva, es necesario que los valores de sus abscisas, sustituidas en vez de x en la (6), den resultados reales. Hay, pues, que dar á x valores tales, que hagan siempre positiva la cantidad subradical: así es, que determinado ya el signo del producto $(x - \alpha)(x - \beta)$ para las variaciones de x , resta considerar el coeficiente M en la triple hipótesis de ser $M \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$.

1.^a $M < 0$; el término subradical sólo se conservará positivo para valores de x comprendidos entre α y β ; luego la curva será limitada en el sentido de las abscisas. Además no figurando x en el denominador, los valores de y no pueden hacerse infinitos; de consiguiente, la curva es también limitada á ambos lados de la recta ó sea en el sentido de las ordenadas.

2.^a $M > 0$; la cantidad subradical sólo se conserva positiva para valores de x no comprendidos entre α y β , lo que significa que la curva se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas desde $x = \alpha$ y $x = \beta$.

Además, los valores reales de y pueden crecer hasta el infinito, de suerte que la curva se extiende también indefinidamente en el sentido de las ordenadas.

3.^a $M = 0$; esta hipótesis reduce la ecuación (3) á la forma:

$$y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{2Nx + P}$$

lo que significa consideraciones respecto al signo de N para reconocer la forma de la curva que la ecuación que precede representa.

Para $N > 0$, y permanecerá real para todos los valores

positivos de x , lo que significa que la curva se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas; también y crece hasta el infinito, luego la curva se extiende á la vez indefinidamente en el sentido de las ordenadas á ambos lados de la recta (4). Para el punto donde la recta (4) es cortada por la curva se tiene

$$x = -\frac{P}{2N}$$

Para $N < 0$, se encontraría que la curva se extiende en el sentido de las abscisas negativas.

La discusión hecha, supone completa la ecuación general (1); pero en el caso de que faltase uno ó dos de los términos de 2.º grado (no pueden faltar los tres porque la ecuación se reduciría al 1.º grado), fácil sería comprobar la generalidad de la clasificación establecida.

Respecto á las raíces de la ecuación $Mx^2 + 2N + P = 0$ se las ha supuesto, en lo que antecede, reales y desiguales; pero en el sentido de ser iguales se verificaría con sencillez que la curva se reduce á un punto ó al sistema de dos rectas. En el caso de ser las raíces imaginarias, la ecuación representa una elipse imaginaria ó una hipérbola real.

La ecuación general (1) representa, pues, tres géneros de curvas de 2.º grado, caracterizadas por el signo del valor de: $M = B^2 - 4AC$, las que son:

- | | | | | | |
|-----|--------|-------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1.º | género | ($M < 0$) | curvas limitadas | en todo sentido | <i>Elipses</i> |
| 2.º | » | ($M > 0$) | » ilimitadas | » » » | <i>Hipérbola</i> |
| 3.º | » | ($M = 0$) | » | » en sólo dos | <i>Parábola</i> |

Centro, diámetros y ejes de las curvas de 2.º grado

Centro.—Se dá el nombre de centro á un punto fijo que se encuentra á igual distancia de los de la curva considerando éstos dos á dos y simétricamente colocados con respecto á él.

La elipse y la hipérbola tienen centro y puede averiguarse si una curva de 2.º grado representada por la ecuación general tiene un centro; también puede hacerse directamente esa averiguación.

Este método está fundado en el principio de que: *cuan- do el origen de las coordenadas es centro de una línea de 2.º grado, la ecuación de la línea á que pertenece, no contiene términos de 1.º grado.*

Sea:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0 \quad (1)$$

la ecuación de una línea de 2.º grado que tiene su centro por origen; la ecuación de la recta que pasa por su origen es de la forma $y = a x$. (2)

Eliminando x entre ésta ecuación y la de la curva resultará la siguiente:

$$(A + 2 B a + C a^2) x^2 + 2 (D + E a) x + F = 0 \quad (3)$$

que fija las abscisas de los dos puntos de contacto.

Hallándose el *origen* en el medio de aquella recta, la (3) debe tener dos raíces iguales y de signos contrarios, lo que exige que el coeficiente de la primera potencia de

x sea igual á cero; de donde: $(D + E a) = 0$, pero como ésta expresión debe satisfacer á infinidad de valores de a se tendrá $D = 0$, $E = 0$.

Como consecuencia de lo que precede, cuando la ecuación resulta tener dos raíces iguales y de signos contrarios, cualquiera que sea el valor de a el origen de la curva se halla en su centro.

Diámetros.—Si se considera una curva de 2.º grado cortada, por una serie de cuerdas, la línea recta, que pasa por el medio de todas ellas es un *diámetro*.

Sea a el coeficiente angular de esas cuerdas paralelas y la ecuación de la curva:

$$f(x, y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

Transportando los ejes paralelamente, por un punto I del plano, teniendo m, n por coordenadas; la ecuación se convierte en:

$$(A + 2 B a + C a^2) x'^2 + [f'_m(m, n) + f'_n(m, n)a] x' + f''(m, n) = 0 \quad (3)$$

por esta ecuación se hallarán las abscisas de los puntos de contacto.

Cuando el valor de a , no anula el trinomio $(A + 2 B a + C a^2)$ cada una de las secantes corta la curva en dos puntos.

Si se supone el origen I en el medio de una de las cuerdas, las raíces de la ecuación serán iguales y de signos contrarios por lo que se tendrá:

$$f'_m(m, n) + a f'_n(m, n) = 0$$

Esa ecuación que deberá hallarse satisfecha por las coordenadas del punto medio de todas las cuerdas consideradas, es la ecuación del lugar.

Reemplazando en esa ecuación m n, por x y se convierte en

$$f'_x(x, y) + a f'_y(x, y) = 0$$

y finalmente en

$$(A x + B y + D) + a (B x + C y + E) = 0 \quad (3)$$

Como esta ecuación es de primer grado, se deduce que el diámetro que corresponde á una serie de cuerdas paralelas es una *recta* y si a' es el coeficiente angular de ese diámetro se tendrá:

$$a' = - \frac{A + B a}{B + C a} \quad (4)$$

ó también: $C a a' + B (a + a') + A = 0 \quad (5)$

- a) Cuando los valores de x é y satisfacen á las ecuaciones simultáneas $(A x + B y + D) = 0$; $(B x + C y + E) = 0$ la ecuación (3) se encuentra resuelta cualquiera que sea el valor de a , lo que indica que si la curva tiene un centro único, todos los diámetros pasan por él.
- b) Cuando la curva es una *Elipse*, el trinomio $A + 2 B a + C a^2$ teniendo raíces imaginarias, difiere siempre de cero, y á toda dirección de las cuerdas corresponde un diámetro definido por la ecuación. (3)
- c) En el caso de una *Hipérbola*, el trinomio, $A + 2 B a + C a^2$ se anula para dos valores reales de a justamente cuando éste es el coeficiente angular de las asínto-

tas y si en la ecuación (3) se atribuye á a un valor como parámetro, ésta representará todas las rectas que pasan por el centro; de donde se deduce que todas esas rectas, menos las asíntotas, son diámetros.

d) Para una *Parábola*, $B^2 - AC = 0$, ó sea $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$; de donde resulta que el valor de a' de la (4) corresponde á $-\frac{B}{C}$ de suerte que todos los diámetros de la parábola son paralelos entre sí. La ecuación (3), en la cual a , considerado como parámetro, representará todas las rectas paralelas á la dirección $-\frac{B}{C}$; de donde: toda recta paralela á esa disección es un diámetro de la parábola.

Diámetros conjugados. — Cuando dos diámetros que se cortan, dividen en dos partes sus respectivas paralelas se les llama á causa de esa propiedad, *diámetros conjugados*.

La elipse y la hipérbola tienen infinidad de diámetros conjugados.

Ahora, todo diámetro perpendicular á las cuerdas que corta en dos partes iguales es un *Eje* de simetría. Como la parábola tiene todos sus diámetros paralelos, si se imagina una serie de cuerdas perpendiculares á aquellos, el que divida esas cuerdas en partes iguales será eje de la curva. El coeficiente angular de esos diámetros es $-\frac{B}{C}$; luego si los ejes de las coordenadas son rectangulares, el eje de la curva es el diámetro de las cuerdas teniendo $\frac{C}{B}$ por coeficiente angular, y su ecuación es:

$$B(Ax + By + D) + C(Bx + Cy + E) = 0 \quad (7)$$

Cuando la curva es una elipse ó una hipérbola, á todo eje determinado en un sentido corresponde otro que le es perpendicular formando así un sistema de diámetros conjugados.

Las curvas de segundo grado referidas á ejes especiales

I.—*La elipse ó la hipérbola referida á un sistema de ejes conjugados.*

Si en esas dos curvas (curvas con centro) se toma por eje de abscisas un diámetro de la curva, siendo cualquiera el origen de las coordenadas y por eje de ordenadas una paralela á las cuerdas conjugadas de dicho diámetro; para cada valor de x resultará para y dos valores iguales y de signo contrario. Para que eso se cumpla, necesario es que la ecuación de la curva, resuelta con respecto á y , tenga raíces iguales, lo que exige que no existan en ella término de primer grado en y .

Así, la ecuación general de segundo grado

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = 0 \quad (1)$$

que por la condición que antecede debe tener $B x + D = 0$; pudiendo ser separadamente, $B = 0$, $D = 0$ (porque x es variable), quedará reducida á $A y^2 + C x^2 + E x + F = 0$.

Si ahora, quedando fijo el eje de las x , se traslada el origen de coordenadas al centro de la curva, el eje de las y pasará á ser el diámetro conjugado del que se ha tomado por eje de las x . La condición establecida debe cumplirse también para las abscisas, lo que implica hacer $E = 0$, re-

duciéndose la ecuación (1) á $A y^2 + C x^2 + F = 0$, ó sea la elipse y la hipérbola referida á un sistema de diámetros conjugados.

II.—*La parábola referida á un diámetro y la tangente en el extremo de éste.*

Por las consideraciones hechas con respecto á la elipse y á la hipérbola; la parábola, referida á un sistema de ejes en que el de las x sea un diámetro, el origen en un punto de éste y al eje de las y una paralela á las cuerdas conjugadas de dicho diámetro, la ecuación (1) queda reducida á la forma: $A y^2 + C x^2 + E x + F = 0$ (2).

Resuelta ahora la ecuación con respecto á x , como el diámetro y por lo tanto las cuerdas paralelas á éste, no cortan la parábola más que en un sólo punto, debe resultar para cada valor de y un sólo valor para x , lo que implica que el término del cuadrado de x debe desaparecer, siendo por consiguiente: $C x^2 = 0$, ó sea $C = 0$, por cuanto x , no puede perder su carácter de variabilidad.

Esto reduce la ecuación (2) á la forma

$$A y^2 + E x + F = 0 \quad (3)$$

Trasladado por fin el eje de las y paralelamente hasta el extremo del diámetro tomado por eje de las x , pasará á ser tangente á la curva como posición límite del sistema de cuerdas conjugadas con dicho diámetro; pero el origen entonces á estar sobre la curva y para $x = 0$, debe tenerse: $y = 0$, lo que implica $F = 0$, quedando así reducida la ecuación á $A y^2 + E x = 0$ (4) ó sea la parábola referida á un diámetro y á la tangente en el extremo de éste.

Reducción de la ecuación general de las curvas de segundo grado por transformación de coordenadas

Demostrado ya que la ecuación general de segundo grado (1), puede ser reducida para la elipse y la hipérbola á la forma: $A y^2 + E x = 0$, y siendo ventajoso paaa estudiar las propiedades de estas curvas, tenerlas en sus expresiones más sencillas, conviene exponer el método para llegar á ellas.

La ecuación (1) $A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = 0$ representa la curva referida generalmente á ejes oblicuos; pero por una sola transformación se le puede referir á ejes rectangulares sin cambiar el origen.

Estas fórmulas reducidas á la forma de las (3) y (4) precedentes serán:

$$M y^2 + N x^2 + P = 0 \qquad M y^2 + S x = 0$$

representando la elipse y la hipérbola referidas á su sistema de diámetros conjugados perpendiculares, ó sea á sus ejes y la *parábola* referida al diámetro que forma eje de simetría de la curva y á la tangente perpendicular á él en su extremo.

Se ha visto ya que la condición de confundirse el eje de las x , con un diámetro, implica la anulación del término $x y$, en la ecuación de las tres curvas; dadas las fórmulas de traslación paralela de ejes, igual cosa se verificará tomando el eje de las x paralelo á un diámetro.

Haciendo, pues, girar los ejes de un ángulo α , de suerte

que desaparezca el término en $x y$, se tendrá el eje de las x paralelo á un eje de la curva. Sustituídas así en la ecuación general (1) en vez de x é y ; los valores expresados en las fórmulas de rotación de ejes rectangulares serán:

$$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$$

$$y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$$

y se obtendrá una ecuación de la forma

$$M y_1^2 + L x_1 y_1 + N x_1^2 + R y_1 + S x_1 + F = 0$$

en la que

$$(a) \quad M = A \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$(b) \quad N = A \sin^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

$$(c) \quad L = 2 A \sin \alpha \cos \alpha + B^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2 C \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(d) \quad R = D \cos \alpha - E \sin \alpha$$

$$(e) \quad S = D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

Siendo el objeto de la transformación hecha, la desaparición del término $x y$, el ángulo α quedará determinado por

$$u = 2 A \sin \alpha \cos \alpha + B^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2 C \sin \alpha \cos \alpha$$

$$y \text{ se tendrá: } M y^2 + N x^2 + R y + S x + F = 0 \quad (6)$$

Transformaciones

La ecuación general (1) puede también ponerse bajo la forma $(A - C) 2 \sin. \alpha \cos. \alpha + B (\cos.^2 \alpha - \sin.^2 \alpha) = 0$ y transformarse luego en

$$(A - C) \sin. 2 \alpha + B \cos. 2 \alpha = 0$$

$$\text{de donde se deduce} \quad \text{tang. } 2 \alpha = \frac{B}{A - C}$$

de la cual á su vez se deduce

$$\cos. 2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 2 \alpha}}; \quad \sin. 2 \alpha = \frac{\text{tang. } 2 \alpha}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 2 \alpha}}$$

ó simplemente

$$\cos. 2 \alpha = \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}; \quad \text{sen. } 2 \alpha = \frac{-B}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$$

Por otra parte, sumando y restando entre sí las ecuaciones (a) y (b), recordando que $\cos.^2 \alpha + \text{sen.}^2 \alpha = 1$; y $M + N = A + C$ se llega á tener

$$M - N = (A - C) \cos. 2 \alpha - B \text{ sen. } 2 \alpha$$

en la que sustituyendo $\text{sen. } 2 \alpha$ y $\cos. 2 \alpha$ por sus valores se llega á $M - N = \sqrt{(A - C)^2 + B^2}$

De los valores de $(M + N)$ y $(M - N)$, se deduce

$$M = \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + B^2}$$

$$N = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + B^2}$$

$$M N = \frac{4 A C - B^2}{4} = \frac{B^2 - 4 A C}{4}$$

Según el valor que resulte para $B^2 - 4 A C$, sea

$$B^2 - 4 A C \leq 0, \quad B^2 - 4 A C = 0$$

será, pues, siempre posible hacer desaparecer los términos en x é y , relacionar al nuevo sistema de ejes y volver á la ecuación primitiva

$$M y^2 + N x^2 = P \quad \text{ó á la} \quad y^2 = Q x$$

Así, pues, de la ecuación general puede deducirse que

según $B^2 - 4 A C < 0$ la curva será una *Elipse*

» $B^2 - 4 A C > 0$ » » » *Hipérbola*

» $B^2 - 4 A C = 0$ » » » *Parábola*

Ejemplo de una transformación en la que $B^2 - 4 A C < 0$

$$y^2 - 2 x y + 3 x^2 + 2 y - 4 x - 3 = 0$$

se tiene $A = 1, B = 2, C = 3, D = 2, E = -4, F = -3$

$$B^2 - 4 A C = 4 - (4 \times 1 \times 3) = 4 - 12 = -8$$

luego la curva es una *elipse*.

Aplicando las fórmulas se tiene:

$$a = \frac{2 A E - B D}{B^2 - 4 A B} = \frac{-8 - (-4)}{8} = \frac{1}{2};$$

$$b = \frac{2 C D - B E}{B^2 - 4 A C} = -\frac{1}{2}$$

APLICACIONES

Transformación correspondiente á $B^2 - 4 A C < 0$

$$y^2 - 2 x y + 3 x^2 + 2 y - 4 x - 3 = 0$$

haciendo

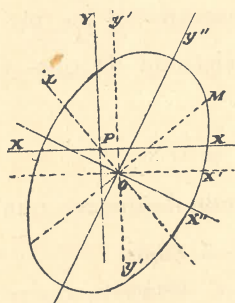
$$A = 1, B = -2, C = 3, D = 2, E = -4, F = -3$$

se tiene

$$B^2 - 4 A C = 4 - (4 \times 1 \times 3) = 4 - 12 = -8$$

que es una *ellipse*.

Aplicando ahora las fórmulas anteriores para transformación:



$$a = \frac{2 A E - B D}{B^2 - 4 A B} = \frac{-8 - (-4)}{8} = \frac{1}{2};$$

$$b = \frac{2 C D - B E}{B^2 - 4 A C} = -\frac{1}{2}$$

$$F' = F + \frac{D b + E a}{2} = -3 + \frac{(-1 - 2)}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Sea sobre } x x', \quad A C = P t = \frac{1}{2};$$

$$C O = t O = b = -\frac{1}{2}$$

Por O se llevarán los nuevos ejes $O x', y' O$; así la curva se hallará relacionada á los nuevos ejes y será:

$$\text{tang. } 2 \alpha = -\frac{B}{A - C} = \frac{2}{-2} = -1,$$

de donde

$$\text{tang. } P O x' = -1$$

El tercer sistema de ejes será O X'', O Y'', dividiendo en 2 partes iguales el ángulo L O X'.

Se tiene también

$$M = \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + B^2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$N = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + B^2} = 2 - \sqrt{2}$$

que dan para la ecuación final:

$$(2 + \sqrt{2}) y^2 + (2 - \sqrt{2}) x^2 = \frac{9}{2} = M y^2 + N x^2 = P$$

Para compararla con la fundamental:

$$A^2 y'' + B^2 x^2 = A^2 B^2$$

y deducir de ella los ejes principales 2 A y 2 B, hay que multiplicarla por

$$h = \frac{P}{M N} = \frac{9}{2 (2 + \sqrt{2}) (2 - \sqrt{2})} = \frac{9}{4}$$

se tendrá pues:

$$\frac{9 (2 + \sqrt{2})}{4} y^2 + \frac{9 (2 - \sqrt{2})}{4} x^2 = \frac{81}{8}$$

luego

$$A = \frac{3}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2.25; \quad y, 2 A = 5.50$$

$$B = \frac{3}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 1.10 \quad y, 2 B = 2.20$$

Así el eje de la elipse se hallará en la dirección

$$O X'', O Y''$$

2.º ejemplo. — Relacionar el sistema Y Y, X X, con el x'' x'', y'' y'', que pasan por O.

$$y^2 + 2 x y - 2 x^2 - 4 y - x + 10 = 0$$

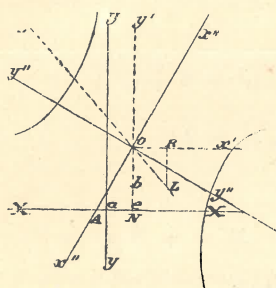
aquí es

$$A = 1, B = + 2, C = - 2, D = - 4, E = - 1, F = 10$$

$$\text{luego} \quad B^2 - 4 A C = 4 + 8 = 12 \quad \text{lo que indica}$$

que se trata de una *hipérbola*.

Efectuando la aplicación de las anteriores fórmulas, resulta $a = + \frac{1}{2}$; $b = + \frac{3}{2}$; $F' = \frac{27}{4}$



Sobre A X, téngase

$$A N = a = \frac{1}{2}; \quad N O = b = + \frac{3}{2}.$$

O será el nuevo origen de las coordenadas Y' O, X' O, y la primera transformada será

$$y^2 + 2 x y - 2 x^2 + \frac{27}{4} = 0$$

de donde

$$\text{tang } 2 a = \frac{B}{A - C} = - \frac{2}{3}$$

Luego el segundo sistema de coordenadas se trazará dividiendo con el eje O X'' el ángulo L O X' en dos partes iguales.

Siendo B positivo, resulta:

$$M = - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{13}; \quad y \quad N = - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{13}$$

de donde la transformada final:

$$\frac{\sqrt{13+1}}{2} y^2 - \frac{\sqrt{13-1}}{2} x^2 = \frac{27}{4}$$

y como la ecuación aquí es $M y^2 - N x^2 = + P$ y se cambia en x y viceversa, resulta que el eje principal B B' se halla sobre la línea O Y''.

3.^{er} ejemplo. — En el que se tiene $B^2 - 4 A C = 0$

$$y^2 - 4 x y + 4 x^2 + 2 y - 7 x - 1 = 0$$

se tiene $A = 1, B = -4, C = 4, D = 2, E = -7, F = -1$

$B^2 - 4 A C = 16 - 16 = 0$, se trata de una *parábola*.

Aplicando las fórmulas

$$\operatorname{tang} 2 \alpha = - \frac{-B}{A-C} = - \frac{4}{5}$$

$$\cos x \alpha = - \frac{3}{5} \quad \text{siuus } x \alpha = + \frac{4}{5}$$

de donde $\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos 2 \alpha}}{2} = \frac{2}{5} \sqrt{5}$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{1 + \cos 2 \alpha}}{2} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$$

$$M = \frac{A-C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A-C)^2 + B^2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5.$$

$$N = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$R = D \cos \alpha - E \sin \alpha = \frac{16}{5} \sqrt{5}$$

$$S = D \sin \alpha + E \cos \alpha + E \cos \alpha = - \frac{3}{5} \sqrt{5}$$

y por primer transformada

$$5 y^2 + \frac{16}{5} \sqrt{5} = \frac{3}{5} \sqrt{5} x - 1 = 0$$

Sobre A X tómesese A C = 1 y C D = $-\frac{4}{3}$ y trácese la línea D A B, de donde $\operatorname{tang} B A X = -\frac{4}{3}$

Dividiendo en dos partes iguales el ángulo B A X por la línea A X' se tiene el segundo sistema de coordenadas.

$$\text{Luego } a = \frac{B - 4 M F}{4 M S} = \frac{89}{75} \sqrt{5} = -2.7$$

y $b = -\frac{R}{2 M} = -\frac{8}{25} \sqrt{5} = -0.7$

y la 2.^a transformada $5 y^2 - \frac{3}{5} \sqrt{5} x = 0$

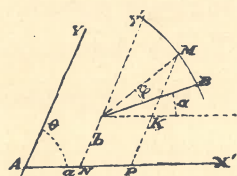
$$S = -\frac{3}{5} \sqrt{5} = -1.3.$$

Por fin, tomando sobre A X', A E = -2.70, y tra-

zando la perpendicular $E A' = -0.7$ y desde A' los paralelos $A' X''$ $A' Y''$ se tendrá el sistema de ejes á los cuales corresponde la ecuación $5 y^2 = 1.3 x = 0$ de la parábola cuyo vértice está en A' y cuyo parámetro es, pues, 1.3.

Coordenadas polares

Si sobre una línea adoptada como base y desde un punto O llamado Polo, se obtiene el ángulo φ que forma la línea OM con la OB , y la



distancia OM radio vector $= r$ del polo á un punto M de una línea

dada, se comprende fácilmente que la línea ó curva MB se hallará determinada si se establece una relación entre r y φ que sea verdadera para cada punto; pues dando á φ una serie de valores, se obtendrá de la relación $f(r, \varphi) = 0$, valores correspondientes de r .

Las variables φ y r son llamadas coordenadas polares.

Para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares á otro de coordenadas polares es preferible siempre suponer que ya la curva es definida por sus coordenadas rectilíneas: sean, pues, $A X$ y $A Y$ los ejes oblicuos con relación á los cuales la ecuación es $f(x, y) = 0$; OB y O el Polo y la base de las coordenadas polares; $O x'$ y $O y'$, paralelas á los ejes pasando por el Polo O .

a y b las coordenadas del polo O, α el ángulo B O X',
 θ el ángulo de los ejes V A X, O M = radio vector = r.

$$M O B = \varphi, O M K = (\theta - \varphi - \alpha), M O K = (\varphi + \alpha)$$

Las coordenadas del punto M, serán:

$$A P = X \quad a + O K, \quad y \quad M P = b \quad M K = y$$

En O M K, se tiene:

$$O K : \sin O M K :: O M : \sin M K O, \quad K O = \frac{r \sin (\theta - \varphi - \alpha)}{\sin \theta}$$

también

$$M K : \sin M O K :: O M : \sin M K O \quad M K = \frac{r \sin (\varphi - \alpha)}{\sin \theta}$$

Sustituyendo esos valores:

$$x = a + \frac{r \sin (\theta - \varphi - \alpha)}{\sin \theta}; \quad y = b + \frac{r \sin (\varphi + \alpha)}{\sin \theta} \quad (2)$$

Llevando ahora estos valores de x ó y en la ecuación dada, $f(x, y) = 0$, se obtendrá la nueva ecuación polar

Si los ejes fueran rectangulares, $\theta = 90^\circ$; luego

$$\sin \theta = 1; \quad \sin (\theta - \varphi - \alpha) = \cos (\varphi + \alpha)$$

y las fórmulas (2) se convierten en

$$x = a + r \cos (\alpha + \varphi)$$

$$y = b + r \sin (\varphi + \alpha)$$

Si la base O B es paralela al eje A X, el ángulo $\alpha = 0$;
 entonces $x = a + r \cos \varphi; \quad y = b + r \sin \varphi$

Por fin, si se confunde el polo O con el origen A de los ejes, a y b desaparecen y queda

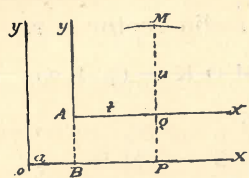
$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

Transformación de las coordenadas

Es decir, pasar de un sistema de coordenadas á otro.

1.^{er} Caso.—Traslación del origen ó transporte paralelo

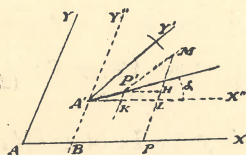
de los ejes; sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva con



relación á los ejes rectangulares, o y o x, en el cual $x = OP$ $y = MP$ pasar ahora á otro sistema Y A, X A cuyo origen A tiene por coordena-

das $OB = a$, $AB = b$.

Las nuevas coordenadas de M serán $AQ = t$, $MQ = u$, de donde $x = a + t$, $y = b + u$, sustituyendo esos valores en $f(x) = y$. $b + u = f(a + t)$; $u = f(a + t) - b$.



Siendo ejes oblicuos y teniendo el primitivo A Y, A X, pasar al nuevo A' Y', A' X'.

Para el 1.º, $AP = x$, $MP = y$, son las coordenadas.

Para el 2.º, $A'L' = x'$, $M'L' = y'$ serán las coordenadas.

$$AB = a; A'B = b; Y'A'X'' = \alpha' \quad X'A'X'' = \alpha$$

$$Y''A'X'' = YAX =$$

Son conocidos a , b , θ , α y x' .

$$AP = x = a + BP = a + A'K + P'H$$

$$MP = y = b + ML = b + MH + P'K$$

se tiene $A'P'K = P'A'Y'' = \theta - \alpha$

$$A'KP' = A'LM = 180^\circ - MLX'' = 180^\circ - \theta$$

sea: $\sin \theta$. $P'MH = \theta - \alpha' = Y'A'Y''$

$$P'HM = A'LM = 180^\circ \theta$$

entonces $A'K : A'P' :: \sin(A'P'K) : \sin(A'R'P')$

$$A'K : x' :: \sin(\theta - \alpha) : \sin \theta; \quad A'K = \frac{x' \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}$$

$$P'K : A'P' :: \sin P'A'K : \sin A'KP'$$

$$P'K : x' :: \sin \alpha : \sin \theta$$

$$P'K = \frac{x' \sin \alpha}{\sin \theta}$$

$$P' H' : M P' :: \sin P' M H : P' H M$$

$$P' H : y' :: \sin (\theta - \alpha') : \sin \theta$$

$$P' H = \frac{y' \sin (\theta - \alpha')}{\sin \theta}$$

$$M H : M P' :: \sin M P' H : \sin P H M; \quad M N : y' :: \sin \alpha : \sin \theta$$

$$M H = \frac{y' \sin \alpha'}{\sin \theta}$$

Instituyendo ahora, se tiene:

$$(3) \quad x = a + \frac{x' \sin (\theta - \alpha) + y' \sin (\theta - \alpha')}{\sin \theta}$$

$$y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \theta}$$

Tal es la ecuación general para la transformación, cuya aplicación puede comprobarse por los siguientes casos:

1.º Los dos sistemas de coordenadas son paralelos entre sí

$$\alpha = 0 \quad y \quad \theta = \alpha'$$

de donde $\sin (\theta - \alpha) = \sin \theta, \quad \sin (\theta - \alpha') = 0$

$$\sin \alpha = 0; \quad \sin \alpha' = \sin \theta$$

Las fórmulas (3) se convierten en

$$x = a + x', \quad y = b + y' \quad (4)$$

2.º Se pasa de un sistema rectangular á uno oblicuo; en este caso; $\theta = 90^\circ$, de donde

$$\sin \theta = 1, \quad \sin (\theta - \alpha) = \cos \alpha, \quad \sin (\theta - \alpha') = \cos \alpha')$$

y las fórmulas (3) se reducen á

$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha' + b$$

$$(B) \quad x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' + a$$

y conservando el mismo origen a y b = 0 se obtiene:

$$y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'$$

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha'$$

3.º Pasar de un sistema rectangular á otro igual.

$$\theta = 90^\circ$$

En este caso

$$\begin{aligned} \alpha' &= Y' A' X'' = Y' A' X' + X' A' X'' = 90^\circ + \alpha \\ y \sin \theta &= 1 \sin (\theta = \alpha) - \cos \alpha \\ \sin (\theta - \alpha') &= \sin (90^\circ - 90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin \alpha' &= \sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Luego las fórmulas (3) se convierten en:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ (C) \quad y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{aligned}$$

y si el origen de ambas fuera el mismo, sería: a y $b = 0$
entonces vendría

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

4.º Pasar de un sistema oblicuo á uno rectangular.

En este caso $\alpha = Y' A' X''' = 90^\circ + \alpha$, de donde

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= \cos \alpha \\ \sin (\theta - \alpha') &= \sin (\theta - 90^\circ - \alpha) = -\sin [90^\circ - (\theta - \alpha)] = -\cos (\theta - \alpha) \end{aligned}$$

y se tiene entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin (\theta = \alpha) - y' \cos (\theta - \alpha)}{\sin \theta} + a \\ (D) \quad y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \theta} + b \end{aligned}$$

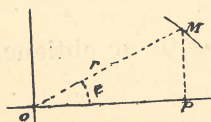
5.º Pasar de un sistema de coordenadas rectangulares á otro polar, adoptando como polo el origen y el lado positivo de las abscisas de los ejes primeros.

Las coordenadas del punto M.

son: $OP = x$, $MP = y$ ya conocidos.

y como se da el ángulo φ , resulta

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$



y si el polo tuviera coordenadas, es decir, no estuviera sobre el eje de abscisas se tendría:

$$x = h + r \cos \varphi \quad y = h + r \sin \varphi$$

Si al contrario hubiera que pasar de coordenadas polares á rectangulares se tendría:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{tang. } \varphi = \frac{y}{x} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Líneas de 2.º grado ó funciones de 2 variables.

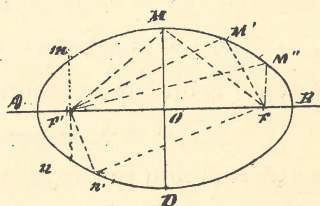
LA ELIPSE

Es una curva cerrada que tiene todos sus puntos situados de tal manera, que si desde cualquiera de ellos, se trazan 2 radios vectores á los focos F, la suma de ellos será siempre constante é igual al eje mayor.

A B = eje mayor; F y F' = los focos

F O = F' O = la excentricidad.

M D = eje menor. F M, M' F M'' F = radios vectores, m n = el parámetro



propiedad:

$$F' M + F M = A B \quad \text{de donde}$$

$$F' M = F M = \frac{1}{2} A B.$$

haciendo ahora

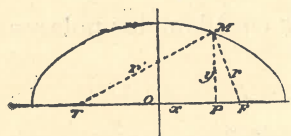
$$\frac{A B}{2} = a; \quad O M = b; \quad O F = c$$

se tiene por el triángulo M O F en el cual

$$F M = \frac{1}{2} A B = a$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad b^2 = a^2 - c^2; \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Para buscar ahora la ecuación de la elipse tomando los dos ejes por ejes de coordenadas se tendrá:



$$\begin{aligned} F'P &= e + x & FP &= e - x \\ F'M^2 &= r_1^2 = F'P^2 + MP^2 = (e+x)^2 + y^2 = \\ & y^2 + e^2 + 2ex + x^2 \\ FM^2 &= r_2^2 = MP^2 + PF^2 = y^2 + (e-x)^2 = \\ & y^2 + e^2 - 2ex + x^2 \end{aligned}$$

restando una de la otra; $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$

$$(r_1^2 - r_2^2) = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4ex \quad \text{de donde}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{4ex}{r_1 + r_2} = \frac{4ex}{2a} = \frac{2ex}{a}$$

sumando los dos valores

$$(r_1 + r_2) = 2a, \text{ y } (r_1 - r_2) = \frac{2ex}{a}$$

se tiene:

$$2r_1 = \frac{2ex}{a} + 2a$$

de donde

$$r_1 = \frac{ex}{a} + a; \quad r_2 = \frac{e^2 x^2}{a^2} + a^2 + 2ex$$

pero ya se conocía otro valor de r_2 luego igualándoles

$$y^2 + e^2 + 2ex + x^2 = \frac{e^2 x^2}{a^2} + a^2 + 2ex \quad \text{sea}$$

$$a^2 y^2 + a^2 e^2 + 2a^2 ex + a^2 x^2 = e^2 x^2 + a^4 + 2a^2 ex,$$

sacando el término comun $2a^2 ex$

$$a^2 y^2 + a^2 e^2 + a^2 x^2 = e^2 x^2 + a^4,$$

lo que también puede escribirse

$$a^2 y^2 + (a^2 - e^2) x^2 = a^2 (a^2 - e^2)$$

pero como se tiene según la figura 1

$$F'M = a \quad MO = b \quad \text{y} \quad OF' = e \quad \text{resulta que: } b^2 = a^2 - e^2$$

luego puede ponerse la ecuación general

$$(4) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Ecuación general de la Elipse con relación á su centro y sus ejes.

De ella se saca

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

la fórmula (4) se acostumbra también poner bajo esta forma:

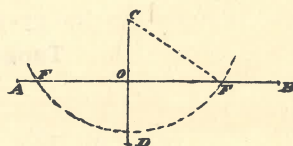
$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2 \quad \text{ó también} \quad A y^2 + B x^2 = C$$

2.^a Con frecuencia se llega, en la busca de un lugar geométrico, con relación á sus ejes rectangulares, á la ecuación (5) $M y^2 + N x^2 = P$ en la cual M, N, P son positivas.

Si se hace en esta ecuación $y = 0$ resulta

$$x = \pm \sqrt{\frac{P}{N}} \quad \text{y para} \quad x = 0, \quad y = \pm \sqrt{\frac{P}{M}}$$

Sobre dos líneas que se cortan á ángulo recto tómesese $OA = OB = A$ y $OC = OD = B$: desde C con un radio $= A$ describese un arco de círculo, los puntos F, F' serán los focos.



pues

$$OF = OF' = \sqrt{CF'^2 - CO^2} = \sqrt{A^2 - B^2} = e = \sqrt{\frac{P(M-N)}{MN}}$$

como x llega hasta $OB = A'$, e y hasta B , puede ponerse

$$A = \sqrt{\frac{P}{N}} \quad \text{y} \quad B = \sqrt{\frac{P}{M}} \quad \text{de donde} \quad N = \frac{P}{A^2}, \quad \text{y} \quad M = \frac{P}{B^2}$$

luego la ecuación (5) puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{P}{B^2} y^2 + \frac{P}{A^2} x^2 = P \quad \text{ó reduciendo; } A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$$

ecuación de la elipse cuyos ejes son

$$2 \sqrt{\frac{P}{N}} \quad \text{y} \quad 2 \sqrt{\frac{P}{M}}$$

3.^o Para convertir la ecuación $M y^2 + N x^2 = P$ á la forma general (4) basta multiplicar sus dos términos por

$$h = \frac{P}{MN}$$

En efecto, resulta $\frac{P}{N} y^2 + \frac{P}{M} x^2 = \frac{P^2}{M N}$

pero $A^2 = \frac{P}{N}$ $B^2 = \frac{P}{M}$ $A^2 B^2 = \frac{P}{M} \times \frac{P}{N} = \frac{P^2}{M N}$

y $e^2 = A^2 - B^2 = \frac{P}{N} - \frac{P}{M} = \frac{P (M - N)}{M N}$

luego quedará $A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$

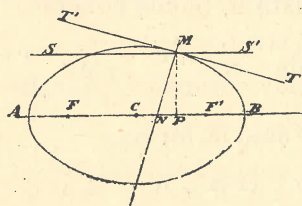
4.º Sea la ecuación $5 y^2 + 3 x^2 = 6$, multiplicando por

$$\frac{6}{5 \times 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \text{resulta} \quad 2 y^2 + \frac{6}{5} x^2 = \frac{12}{5}$$

de la cual $A = \sqrt{2}$; $B = \frac{1}{5} \sqrt{30}$; $e = \frac{2}{5} \sqrt{5}$

Tangente á la Elipse

Siendo la ecuación general reducida á sus ejes y á su centro: $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ (1), hallar la tangente y la normal á un punto M (x, y), así como la subtangente y la subnormal.



T' T = tangente
M N = normal
T P = subtangente
N P = subnormal
 $x = C T$
 $x' = C P$

Calculando primeramente la secante S S' que pasa por los puntos M' M'', se tiene

$$S S' = y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x}, (x - x') (2)$$

Como para cada uno de los puntos M' M'' corresponde la misma ecuación, se tiene para ellos:

$$\left. \begin{aligned} a^2 y'^2 + b^2 x'^2 &= a^2 b^2 \\ a^2 y''^2 + b^2 x''^2 &= a^2 b^2 \end{aligned} \right\} \text{ y restando la segunda de la pri-}$$

mera, resulta
$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{b^2 x' + x''}{a^2 y' + y''}$$

Por consiguiente, se obtendrá la ecuación buscada si se hace coincidir el punto M' con M'' , llegando á tener $y'' = y'$, $x'' = x'$, lo que dá para la ecuación de la tangente:

$$y - y' = - \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \quad (5)$$

ó también $a^2 y' y + b^2 x' x = a^2 b^2 \quad (6).$

De esta ecuación se deduce la de la normal:

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x') \quad (7).$$

Haciendo en (6) $y = 0$ resulta la abcisa

$$C T = \frac{a^2}{x'} = x$$

y por lo tanto, la ecuación de la subtangente:

$$x' - x = x' - \frac{a^2}{x'} \quad (8)$$

La abcisa del punto N se halla deducida de (7)

$$C N = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$$

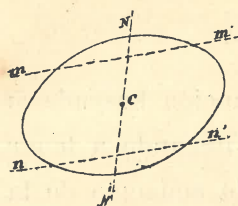
y la ecuación de la subnormal:

$$S_{11} = x - x' = - \frac{b^2}{a^2} x'.$$

La normal en un punto M es la bisectriz del ángulo formado en ese punto por los dos radios vectores.

La tangente, siendo perpendicular á la normal, es á su vez la bisectriz del ángulo formado por uno de los radios vectores del punto y la prolongación del otro.

Problema. — Teniendo una elipse trazada, hallar su centro, sus ejes y sus focos.

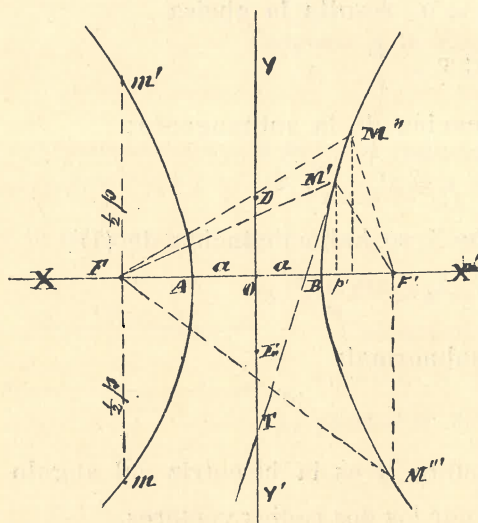


Sea A B C D la elipse; trácense dos cuerdas paralelas, $m m'$, $n n'$, tómense las mitades de éstas y tírese una línea $H H'$, que será un diámetro; el punto medio C de ese diámetro, será el centro de la elipse.

HIPÉRBOLA

Se llama así una curva tal, que la diferencia entre las distancias de cada uno de sus puntos á dos focos F y F' es igual y constante á una distancia 2 a:

$$F M - M F' = A F - A F' = 2 A = A O + O B$$



A y B = vértices

F y F' = focos

$F F' = 2 c$ = distancia focal

O = centro de la hipérbola

$A B = 2 a$ = eje transversal

$O A = O B = a$

Excentricidad $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$

$m m'$ = parámetro p

$F M, F' M$ = radios vectores

$F M - F' M = 2 a$

$M' T$ = Tang. al punto M' = bisectriz del ángulo $F M' F'$

Para hallar su ecuación con relación á sus ejes y su centro O. Siendo:

$$O P = x, \quad M P = y$$

$$r - r_1 = 2 a$$

$$r = F' P = e + x$$

$$F P = (x - e) = r_1$$

$$r^2 = y^2 + (x + e)^2$$

$$r_1^2 = y^2 + (x - e)^2$$

restándolas después de desarrolladas, resulta $r^2 - r_1^2 = 4 e x$ sea

$$(r + r_1)(r - r_1) = 4 e x$$

Pero dividiendo por

$$(r - r_1) = 2 a$$

queda

$$r + r_1 = \frac{2 e x}{a}$$

sumándole

$$(r - r_1) = 2 a$$

se tendrá $r = \frac{e x + a^2}{a}$ y substituyendo este valor en (1), sea $r^2 = y^2 + (x + c)^2$ se tiene

$$y^2 + (x + e)^2 = \frac{(e x + a^2)^2}{a^2}$$

ó también $a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 = -a^2 (e^2 - a^2)$.

Si para simplificar se pone $e^2 - a^2 = b^2$ se tendrá para la ecuación pedida:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \quad \text{ó} \quad A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2$$

ó también $A y^2 - B x^2 = -C$

Tangentes

Sea M' , $(y' x')$ un punto de la hipérbola cuya ecuación es

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

y trácese una secante que pase por los puntos

$$N' \text{ y } M'' (x'' y'')$$

la ecuación será:

$$y - y'' = \frac{y' y''}{x' x''} (x - x') \quad (2.)$$

Para cada uno de estos puntos M' y M'' hay la ecuación:

$$\left. \begin{aligned} a^2 y'^2 &= b^2 x'^2 - a^2 b^2 \\ a^2 y''^2 &= b^2 x''^2 - a^2 b^2 \end{aligned} \right\} \text{ las que restándose}$$

se obtiene el valor $y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x')$

ó sea $a^2 y' y + b^2 x' x = -a^2 b^2 \quad (3)$

que es la de la tangente.

Esta ecuación es igual á la de la elipse, con la diferencia del signo de b' . Para la subtangente $T P'$

$$x' - x = x' - \frac{a^2}{x'}$$

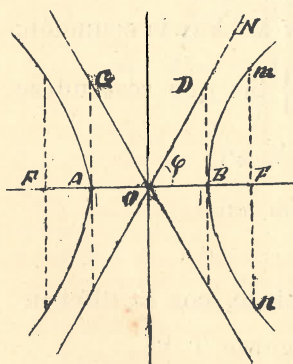
De estas últimas ecuaciones se desprende que la tangente cortará el eje xx siempre entre O y B , porque x' nunca será menor que $a = OB$, pero por $x' = a$ resultará en $\frac{a^2}{x'} = OT'$, $a = OT$, luego $\frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \infty$ y la subtangente $= 0$, es decir, la tangente al vértice será perpendicular al eje.

También, como en la elipse, la tangente en un punto cualquiera de la curva, es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores en ese punto:

Asintota

Es toda línea que se acerca sin cesar á una curva sin alcanzarla jamás, sino en el ∞

La hipérbola tiene dos asíntotas que se pueden construir fácilmente. En los vértices A ó B se levantan las perpendiculares.



$BD = AG = OI$ semi diámetro menor $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{OF^2 - OB^2}$ y las rectas OD y OC son las asíntotas cuya ecuación es:

$y = \pm \frac{b}{a} x$ y el ángulo será:

$$\text{tang } \varphi = \frac{b}{a}$$

PARÁBOLA

Es una curva en la cual cada uno de sus puntos dista igualmente de un punto fijo llamado foco y una línea recta llamada directriz.

$$Fm = m'm', OA = AF, NM = FM,$$

Para hallar su ecuación general con relación á sus ejes y origen en el vértice A se tiene $AP = x$; $MP = y$

$$y, AF = \frac{p^1}{4} = OA, \quad \text{pero}$$

$$FM = MN = OP = OA + AP = \frac{1}{4}p + x$$

$$y \quad FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$$

Ahora como

$$\overline{MP^2} + \overline{FP^2} = \overline{FM^2} \quad \text{sea}$$

$$y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2 = (\frac{1}{4}p + x)^2$$

$$\text{desarrollando} \quad y^2 + x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{8} = x^2 + \frac{px}{2} + \frac{p^2}{8}$$

$$\text{de donde} \quad y^2 = x^2 + \frac{px}{2} + \frac{p^2}{8} - x^2 + \frac{px}{2} - \frac{p^2}{8} \quad \text{y finalmente}$$

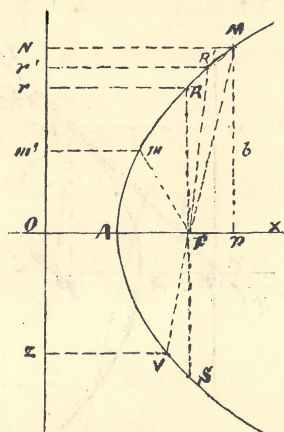
$$\text{la ecuación} \quad y^2 = px \quad y \quad y = \pm \sqrt{px} \quad (1)$$

si se adoptára para la representación del parámetro $2p$ en vez de p resultaría $OA = AF = \frac{1}{2}p$; y la ecuación final sería:

$$y^2 = 2px \quad y = \pm \sqrt{2px} \quad \text{también} \quad y^2 = \frac{2b^2}{a}x$$

de todas maneras el parámetro es igual á $4AF$ ó 2 veces la excentricidad OF . Si se hace $x = \frac{1}{2}p$ se tendrá

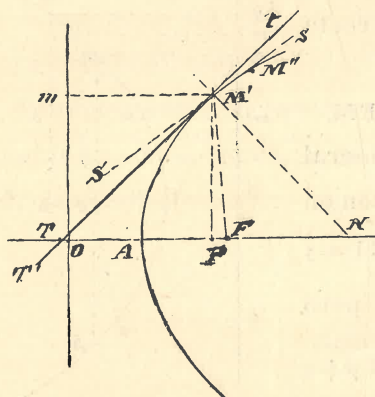
$$y^2 = 2p + \frac{p}{2} = p^2; \quad y = \pm p.$$



F = Foco
O X = Eje
NO Z = Directriz
R F S = parámetro = $2p$
R F = F S = O F = p
O A = A F = $\frac{1}{2}p$

Tangente

Dado un punto M de la parábola sus coordenadas $x' y'$ y la ecuación $y = \sqrt{p x}$ hallar la tangente, subtangente, normal y subnormal.



T t tangente
P T = subtangente
M N = normal
P N = subnormal

Adoptándose para ello otro punto $M'' (x'' y'')$ la ecuación de la secante S_s que pasa por M'' y M' será:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \quad (1)$$

$y' = p x' y''^2 = p x''$; restando una de la otra

$$y'^2 - y''^2 = p' (x - x'') \quad \text{sea}$$

$$(y' - y'')(y' + y'') = p (x'' - x'')$$

de donde $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{p}{(y' + y'')}$

Substituyendo este valor en (1) $y - y' = \frac{p}{y' + y''} (x - x')$ para la secante y, haciendo coincidir ésta con la tangente hasta tener en M, $y' = y''$, se tiene

$$y - y' = \frac{p}{2 y'} (x - x') \quad (6)$$

ó multiplicando todo por $2 y'$ y recordando que $y'^2 = p x'$, $2 y y' - 2 y'^2 = p x - p x'$; sea: $2 y y' = p x - p x' + 2 p x'$ de donde la ecuación general de la tangente

$$y y' = \frac{1}{2} p (x - x')$$

Si se hace $y = 0$ para hallar el punto T de intersección de la tangente y del eje A x, se tiene $x = -x' = A T$, y por lo tanto $A T = A P$, pero

$$F T = \frac{1}{4} p + A T \quad y \quad F M' = M' S = \frac{p}{4} + A P$$

luego $FT = FM'$ y los ángulos $FM'T = S'M'T$, de manera que toda tangente divide en dos partes iguales el ángulo $SM'F$.

Si en el punto M' se levanta una perpendicular MN á la tangente, MN será la *normal* y PN la *subnormal*; por consiguiente, siendo

$$FT = OP, AF = OA \quad \text{y} \quad FP = OT,$$

se tiene $AP = AT = x$ y $TP = 2x$. En el triángulo rectangular TMN se tiene, haciendo la subnormal $PN = S$, considerando y como media proporcional entre PN y TP :

$$y^2 = PN \times TP = S \times TP = S \times 2x = 2Sx.$$

La ecuación del punto M es también $y^2 = 2px$.

Así, igualando esos dos valores de y^2 se tiene $2px = 2Sx$, de donde $S = p$, es decir, que la subnormal es constante é igual al medio parámetro

En la ecuación (6) el coeficiente $\frac{p}{2y}$, es la tangente geométrica del ángulo MTX .

Por lo tanto, de la semejanza de los triángulos

$$TM'P \quad \text{y} \quad PM'N$$

se deducen los siguientes valores:

$$\text{Tangente, } T = \sqrt{(p + 4x')x'}$$

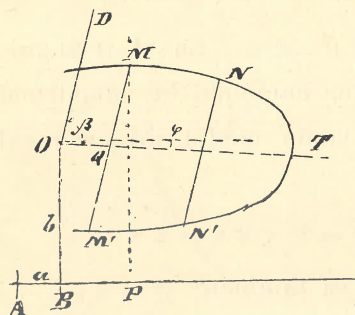
Subtangente, $t = 2x'$, pues que $AT = AP$ y que la subtangente es AP .

$$\text{Normal, } N = \sqrt{px' + \frac{p^2}{4}} \quad \text{Teniendo } AN' = x' + \frac{1}{2}p.$$

$$\text{Subnormal, } S = \frac{1}{2}p.$$

Diámetros

Por expresión de diámetro de una curva, se entiende toda recta que divide cuerdas paralelas en dos partes iguales.



Sean MM' , NN' partes de una curva. La línea OT que divide en partes iguales las cuerdas paralelas entre sí MM' , NN' , es un diámetro; teniendo conocidas las coordenadas a, b del punto O y los ángulos φ y β y las coordenadas de M , sean $AP = x$, $MP = y$, pueden calcularse las nuevas coordenadas $OQ = t$ y $MQ = u$, de la ecuación de la curva $y = \int (x)$.

Según lo expuesto en la transformación de coordenadas,

$$x = a + t \cos \varphi + u (\varphi + \beta) \quad (1)$$

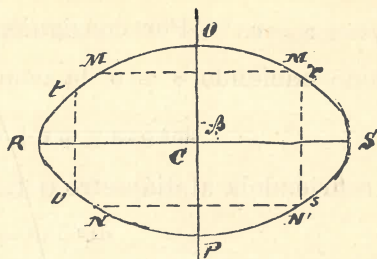
$$y = b + t \sin \varphi + u (\varphi + \beta) \quad (2)$$

La nueva ecuación entre t y u de $f(x) = y$ será del 2.º grado afectando la forma: $Au^2 + Bt^2 + Ct + D = 0$

de donde $u = \pm \sqrt{-\frac{(Bt^2 + Ct + D)}{A}}$

Se llaman diámetros conjugados, dos diámetros que se cortan de tal manera, sea formando entre sí un ángulo tal, que cada uno de ellos divide en partes iguales las cuerdas paralelas al otro.

Siendo MM' y NN' dos cuerdas paralelas entre sí, OP que las divide en partes iguales será un diámetro; ahora si r s t y u son otras cuerdas paralelas á



OP , la línea RS que los divide en partes iguales será otro diámetro que cortará el primero OP en el punto C y bajo un ángulo β llamado ángulo de conjunción.

Averiguar si la parábola tiene diámetros. En la ecuación $y = px$ sustitúyase x é y por los valores

$$(1) \quad y^2 [b + t \sin \varphi + u \sin (\varphi + \beta)]^2 - p [a + t \cos \varphi + u \cos (\varphi + \beta)] = 0.$$

Desarrollando esta ecuación, ordenándola y destruyendo los términos afectados de a t y u haciéndoles $= 0$, á fin que la ecuación tenga la forma (2) resulta

$$(3) \quad 2 \sin \varphi \sin (\varphi + \beta) = 0.$$

$$(4) \quad 2 b \sin (\varphi + \beta) - p \cos (\varphi + \beta) = 0.$$

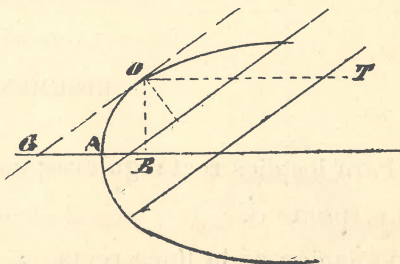
De manera que dos de los cuatro valores, a , b φ y β quedan indeterminados y arbitrarios.

De ahí

$$\tan (\varphi + \beta) = \frac{p}{2b}$$

así que para que la ecuación (4) satisfaga lo que se quiere, es preciso que φ sea 0. Haciendo, pues,

$AB = a$ y $OB = b$, la ecuación del punto O será



$b^2 = p a = 0$. Por consiguiente $\tan \beta = \frac{p}{2b}$; pero como haciendo $\varphi = 0$ la ecuación (a) se transforma en:

$$\sin^2 \beta u^2 - p t + n^2 - p m = 0$$

y refiriéndola al diámetro O T, se obtienen:

$$\sin^2 \beta u^2 = p t.$$

De éstas fórmulas se obtienen:

$$\tan \beta = \frac{p}{2b} = \frac{b^2}{2ba} = \frac{b}{2a}$$

haciendo así $AO = AB = a$ será $\tan \beta = \frac{OB}{BG}$

La recta O G indicará la dirección de las cuerdas divididas por el diámetro O T.

Por consiguiente se deduce, que toda recta O T que pasa por cualquier punto O de la parábola, para ser un diámetro deberá ser paralela al eje, y las cuerdas que le corresponderán serán paralelas á la tangente que pasa por el punto O.

La elipse tiene infinidad de diámetros y diámetros conjugados, siendo todas líneas rectas que pasan por el centro.

En la hipérbola todos los diámetros son líneas rectas que pasan por el centro.

RESÚMEN

Para los ejes rectangulares; con origen de coordenadas en el punto O.

Ecuación de la línea recta — $y = x \tan \varphi$

ó $y = x \tan \varphi + b$

Ecuación del círculo, para el centro, sus coordenadas son a b para un punto M

$$y = b \pm \sqrt{b^2 + r^2 - x^2 + 2 a x - a^2 - b^2}$$

Si el origen de coordenadas es el centro:

$$r^2 = y^2 + x^2, \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ecuación de la elipse relacionada á su centro y sus dos ejes: $a^2 b^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$.

Ecuación de la parábola relacionada á sus ejes, vértice A ,

$$y = \pm \sqrt{2 p x}; \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola relacionada á su centro O , y ejes: $- a^2 b^2 = a^2 y^2 - b^2 x^2$.

Secciones cónicas

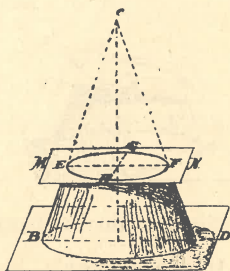
Si se corta un cono recto por un plano, el perímetro de la sección obtenida representará cuatro curvas características llamadas: *Círculo*, *Elipse*, *Parábola* é *Hipérbola*.

Si el plano $M N$ es completamente paralelo á la base $B D$ del cono recto, la sección $E F G H$, es un círculo cuyo radio:

$$r = O F = O H = O G \dots$$

La ecuación de un punto de la circunferencia, tomando el punto E extremo del diámetro como origen de las abscisas x .

$$\text{es: } y = \pm \sqrt{2 r x - x^2}$$



y si el origen de abscisas lo es el centro de la circunferencia, se tendrá:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

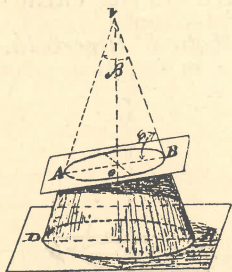
En el dibujo se traza esta curva con el compás siempre que el radio lo permita.

Si el radio fuera demasiado grande, puede emplearse el compás con regla ó el trazado por puntos.

Para trazar una curva sobre el terreno, siendo el radio mayor del que puede manejarse con una simple cinta que sirve de radio, hay que proceder por fijación de puntos, á cuyo efecto se puede hacer uso de varios procedimientos que se expondrán más adelante.

Elipse

Si el plano que corta el cono recto no es paralelo al de la base, pero corta las dos aristas, la sección será una elipse.



Llamando:

ángulo en V = β

» A B V = φ

» V C D = d

$\sin D R V = \cos \frac{1}{2} \beta$

$\sin A B R = \sin (\pi - \varphi)$

Siguiendo la figura se llamará:

A B, eje mayor = 2 a, C D, eje menor = 2 b, F y F' focos situados á igual distancia del centro O; M F y F' M = radios

vectores Condición funda-

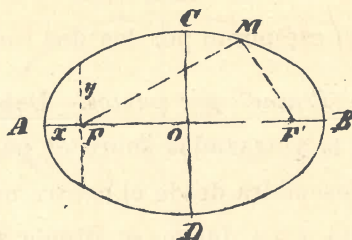
mental: $FM + MF' = AB$

$= 2a$, esto es: la suma de los

radios vectores, es igual al

eje mayor; ecuación gene-

ral $y^2 = \pm \frac{b^2}{a^2} (2a \pm x)$



si el origen de abscisas es el extremo del eje mayor. Si el

origen fuera el centro, la ecuación se transformaría en:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

y siendo el origen, el vértice del eje menor:

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2} (2b \pm x)$$

Parámetro.—

$$\text{del eje mayor } p = \frac{2b^2}{a}$$

$$\text{del eje menor } p = \frac{2a^2}{b}$$

y la ecuación de la elipse con relación al eje mayor:

$$y^2 = \frac{p}{2a} (2a \pm x)$$

Excentricidad.—

$$\text{distancia focal } FF' = 2c$$

$$\text{y excentricidad } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Los límites de la excentricidad son: 0 y 1.

Con el límite 0, la elipse se convierte en una circunfe-

rencia y el 1, en una recta $C = \sqrt{a^2 - b^2}$

El radio de un círculo de igual superficie á la de una

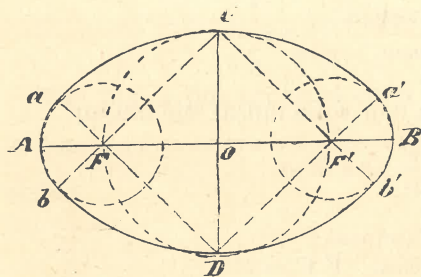
elipse $r = \sqrt{ab}$

Toda tangente á un punto de la elipse, es perpendicu-

lar á la bisectriz (que es la normal) del ángulo formado en ese punto por los dos radios vectores.

Trazado por puntos.—Determinados los dos ejes $2a$ y $2b$, y trazados sobre el papel á la escala adoptada, se describirá desde el centro una circunferencia con un radio $r = a$, luego se divide (a) en un número de partes iguales y calcúlese la ordenada $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ó sea, multiplíquese el valor de cada abscisa por la constante $\frac{b}{a}$; se obtendrá así el trazado por puntos.

Trazado continuo.—Colocando en los dos focos $F F'$ los extremos de un hilo de longitud igual á $2a$, se estira luego éste con la punta de un lápiz, haciéndole describir la curva, según lo permita la tirantez del hilo.



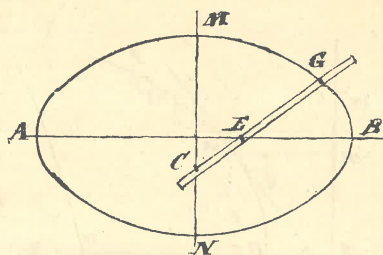
Otro.—Fijados los puntos locales $F F' = 2c$ así como el largo de los ejes:

$AB = 2a$ y $CD = 2b$
se describe tomando como centro los focos; un arco $a b$ con un radio

igual á $r = a - c$, luego tírense las líneas CF y CF' y DF y DF' , desde los extremos de eje menor á los focos; así quedará determinado el largo del arco $a b$; y desde los extremos C y D con un radio igual al eje menor CD , se describirán los dos arcos $a C a'$ y $b D b'$.

Otro método.—Sobre una regla delgada márquense los tres puntos $C E G$ de tal manera que $CG = a$, y $EG = b$ lue-

go de trazados los dos ejes, se moverá la regla de manera que el punto C permanezca siempre sobre M N y el punto E sobre A B; entonces el punto G describirá la curva elíptica.



Parábola

Si el plano que corta el cono forma un ángulo cualquiera con el de la base y no corta más que una de las aristas, la sección será una parábola.

A. X. eje de la parábola y de las abcisas.

A. Y. eje de la parábola y directriz.

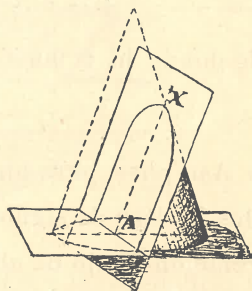
F = foco; B = vértice

F M, F M'. M m, M' m'

son radios vectores = r.

A B = B F = $\frac{1}{4}$ parte del parámetro.

Parámetro $2p = 2 (A F) = 4. B F$.



El parámetro es, pues, igual al doble de la constante A. F. del foco á la directriz.

M. T. = tangente al punto M. Toda tangente divide en dos partes iguales el ángulo $m M. F = \varphi$.

M N = n, normal del punto M. Toda normal es perpendicular á la tangente del mismo punto.

La tangente $T = \sqrt{2px + 4x^2} = \sqrt{y^2 + 4x^2}.$

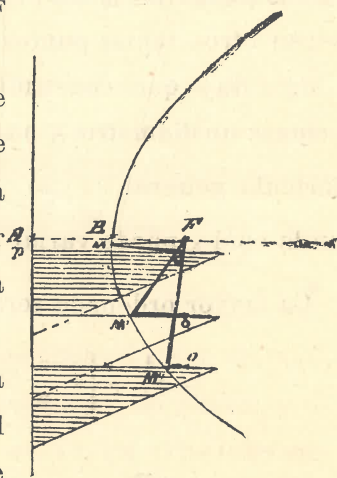
El radio de curvatura $R = \frac{n^3}{p^2}$

Trazado continuo para dibujos

Después de trazadas la directriz y el eje de abscisas, así como fijado el foco F; se fija en el punto F el extremo de un hilo de longitud igual á A F medio parámetro.

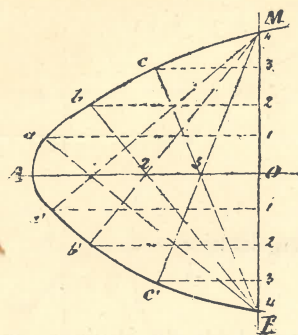
El otro extremo del hilo se fija á una escuadra que debe correr sobre una regla puesta sobre la directriz debiendo estar el extremo O sobre la escuadra frente á F, esto es: $OP = FA.$

Luego con un lápiz, cuya punta se coloca en B (mitad del medio parámetro) se le hace correr de manera de arrastrar el hilo y la escuadra. La curva trazada será la parábola.



Trazados prácticos

1.º Se tiene el eje A O y la ordenada $y = OB = OM,$ son estas las dimensiones que debe abarcar la parábola.



Divídanse ambas líneas A O y B O en un número de partes iguales, 4 por ejemplo y por cada uno de los puntos 1, 2 y 3 de B O, trácense paralelas al eje A O.

Luego desde B tírense las líneas B' 1, B' 2 y B' 3 por los respectivos puntos A O, las que se prolongarán hasta encontrar las líneas paralelas á A O, la intercesión de las líneas B 1 a con 1 a, B 2 b con 2 b y B 3 c con 3 c, etc., serán otros tantos puntos de la curva.

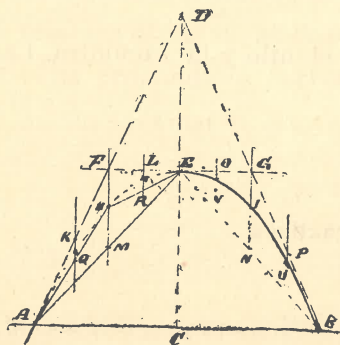
2.º Hay que construir una parábola para la cual se conoce: un diámetro A B = a y la abcisa C E, dados por la

fórmula general $y = \frac{1}{2} p (a x - x^2)$

en la cual x puede variar desde O hasta a.

La mayor ordenada será para $x = \frac{a}{2}$ en cuyo caso:

$$y = \frac{1}{2} p \left[a \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} p = C E.$$



A una escala dada se asignará á la línea A B el largo que le corresponde y en su medio C se levantará la perpendicular C E de una longitud equivalente á su valor; hágase E D = C E y trácense las líneas A D y B D, así como por el punto E una paralela á A B, línea F G.

Después trácense las líneas A E y B E y desde F y G otras paralelas á C E.

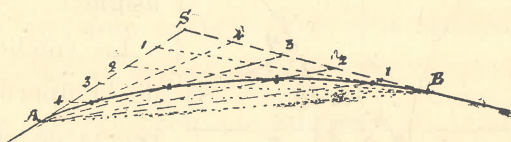
Los puntos H y I, mitad de las líneas F M y G N, serán puntos de la parábola.

Únase luego H é I por las líneas A H, H E y E I, I B trácense por H una paralela K L á A E y por I otra paralela á E B, bájense de los puntos K, L, O, P, líneas paralelas á C E y por mitad de las líneas K Q, L R, O V, P U, pasará la curva buscada.

Restará finalmente ligar todos estos puntos para tener el trazado de la parábola.

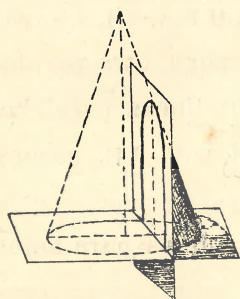
Si los puntos señalados no fueran suficientes, se seguirá el mismo orden de operación para señalar otros tantos.

3.º Para ligar por un arco parabólico los puntos a b siendo co-



nocidas las direcciones de las tangentes a S y b S; divídanse las líneas a S y b S, en un número igual de partes, y tírense las líneas b 1, b 2, b 3... y a 1, a 2, a 3... la intersección de las líneas de igual numeración, determinarán los puntos de la curva, como fácilmente se deducirá de la figura.

Hipérbola



$BB' = 2a =$ eje primero

$AA' = 2b =$ eje segundo

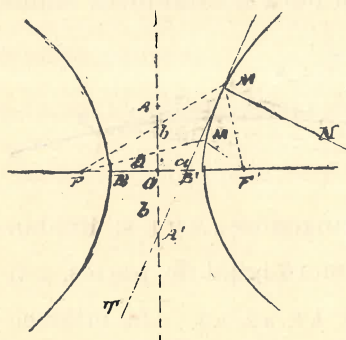
$O =$ el centro

F y $F' =$ focos

$FO = F'O = C$ distancia del centro á los focos.

$FM, F'M,$ son los radios vectores,

$c^2 = a^2 + b^2$ sea $C = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ en la cual a será conocido y b sujeto al valor que se le asigne.



La condición fundamental de la hipérbola es que la diferencia de sus radios vectores, es constante é igual á la distancia $2a$ de sus vértices. Sea:

$$FM - MF' = BB' = 2a$$

$$FM' - M'F = 2a$$

La ecuación de la hipérbola tomando por ejes de coordenadas, los dos ejes de la curva, se deduce de la ecuación general y resulta ser:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

tomando por origen de abscisas el centro O .

$$y = \pm \sqrt{2ax + x^2}$$

tomando por origen el vértice B ó B' .

Los radios vectores de un punto M, serán;

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} + a \quad \text{y} \quad v' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - a$$

La hipérbola es una curva de dos ramas simétricas é infinitas.

La distancia $2c = F'O + OF'$ se llama distancia focal; y la excentricidad e , es la relación existente entre la distancia focal y el eje primero, $2a$.

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$$

Si se hace $b = a$ la hipérbola es *Equilátera*.

El Parámetro, es una tercera proporcional de un eje al otro; se tendrá, pues, para el eje primero $p = \frac{2b^2}{a}$ esto es, la doble ordenada que pasa por los focos.

La Tangente, en un punto cualquiera M' es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores.

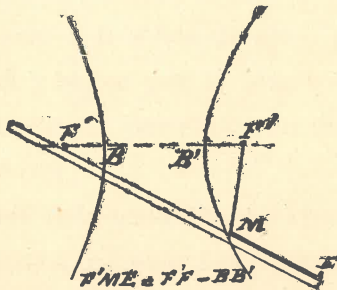
La Normal, es la perpendicular á la tangente en el punto indicado.

Trazado

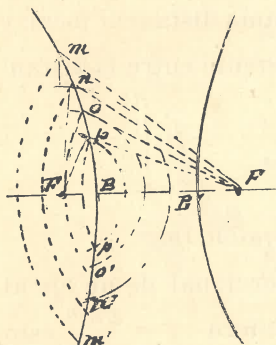
Por un movimiento continuo.—Establecidos: el eje primero, los focos y los vértices B B', se fija en un foco F el extremo de una regla de una longitud, tal que se tenga,

$$FE = BB' + F'ME$$

luego tomando un hilo de longitud igual á FME y fijando uno de sus extremos en E y



otro en F' y aplicando contra la regla la punta de un lápiz que al mismo tiempo tenga tirantes las dos fracciones $F' M$, $M E$ del hilo, se trazará la curva deseada sin interrupción alguna.



Por puntos. — De F con radios $b m$, $b n$, $b o$ trácense varios arcos equidistantes y luego desde F' con radio igual á

$F M - B B$, $F N$, $- B B$ etc....

se describen otros arcos que fijarán los puntos:

m' , n' , o' , etc....

de la curva.

GEOMETRIA ANALÍTICA DEL ESPACIO

La geometría analítica de tres dimensiones tiene por objeto estudiar las superficies y líneas, sean planas ó de doble curvatura. En este estudio se siguen métodos análogos á los que se expusieron en la geometría de dos dimensiones.

Proyecciones.—Ya sabemos que la proyección de un punto sobre una recta es el pié de la perpendicular bajada desde el punto á la recta.

La proyección de una recta de longitud determinada sobre otra situada en el mismo plano que la primera ó que esté fuera de él, es en *valor absoluto*, la distancia comprendida entre las proyecciones de los extremos de la primera. Las proyecciones tienen mucha importancia en la geometría y es bueno recordar los siguientes teoremas fáciles de demostrar.

I. La proyección de una recta AB sobre un eje OX está representada en magnitud y signo por la longitud absoluta de la recta AB multiplicada por el coseno del ángulo que forma AB con el eje OX .

II. La suma algebraica de las proyecciones de varias rectas consecutivas sobre un eje OX es igual á la proyección de la resultante.

III. La suma de los cuadrados de las proyecciones de una recta sobre los ejes rectangulares es igual al cuadrado de esta recta.

IV. La suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos que forma una recta con tres ejes rectangulares es igual á la unidad

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

V. El coseno del ángulo de dos rectas es igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos que éstas rectas forman con los tres ejes rectangulares.

Problema.—Conociendo las proyecciones p q r de una recta sobre tres ejes rectangulares, hallar la longitud de ésta recta y los ángulos que su dirección forma con los ejes. En virtud de los teoremas precedentes tendremos

$$\frac{p}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \beta} = \frac{r}{\cos \gamma} = D \quad \text{de donde}$$

$$\frac{p^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{q^2}{\cos^2 \beta} = \frac{r^2}{\cos^2 \gamma} = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{1} = D^2 = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} ; \quad \cos \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Proyección de las áreas.— La proyección de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

La proyección de una línea sobre un plano es el lugar de las proyecciones de todos los puntos de esta línea sobre el plano.

La proyección de una *área* plana sobre un plano es el área limitada por la proyección del contorno de la proyectada.

I. La proyección de una recta sobre un plano es igual á la longitud de la recta multiplicada por el coseno del ángulo agudo que la recta forma con el plano.

II. La proyección de un área sobre un plano es igual al producto de esta área por el coseno del ángulo de los dos planos.

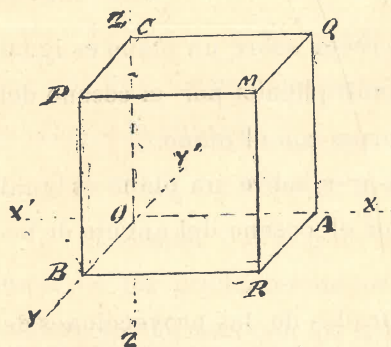
III. La suma de los cuadrados de las proyecciones de una área plana sobre tres planos perpendiculares es igual al cuadrado de esta área.

De las coordenadas rectilíneas

Representación de un punto.—El sistema de coordenadas más usado, es el de coordenadas rectilíneas que comprenden esencialmente tres rectas fijas, no situadas en un mismo plano, que pasan por un mismo punto o llamado *origen*, y que se llaman ejes, distinguiéndose los unos de los otros con los nombres de ejes de las x , ejes de las y y ejes de las z .

Los tres ejes, tomados dos á dos, determinan tres planos $X O Y$, $X O Z$, $Y O Z$, que se llaman *planos coordenados*. Cuando cada eje es perpendicular al plano determinado por los otros dos, el sistema de coordenadas se llama *rectangular*, en caso contrario *oblicuo*.

La coordenada de un punto relativo á un eje es la porción de este eje interceptada entre el plano de los



otros dos ejes y un plano paralelo tirado por el punto que se considera.

O A, O B y O C son las coordenadas del punto M. También se puede decir que las coordenadas de un punto son también

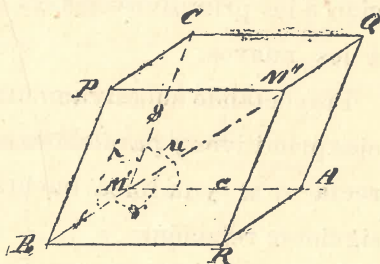
las distancias de este punto á los tres planos coordenados, estando medida cada distancia paralelamente al eje no situado en el plano de que se trate. Generalmente se representan las coordenadas de un punto colocándolas entre paréntesis, por ejemplo: M (x , y , z ,) que quiere decir $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Toda ordenada estará representada por un número acompañado de un signo. El número representará el *valor absoluto* de esta longitud con relación á una cantidad convenida; y el signo el *sentido* en que se ha de contar esta longitud en el eje correspondiente á partir del origen. Se ha convenido que la parte positiva sea O X, O Y, O Z y la negativa O X', O Y', O Z'.

Dadas las coordenadas $x' y' z'$, $x'' y'' z''$ de dos puntos M' M'' hallar la distancia que los separa. Tirando planos paralelos á los coordenados formaremos un paralelepípedo que tiene M' M'' por diagonal y que sus aristas estarán determinadas en valor absoluto por $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$.

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

Supongamos ahora que los ejes son oblicuos. Hagamos $M' A = c$, $M' B = f$, $M' C = g$. Llamando h, u, v , los ángulos que forman entre sí los ejes y a, b, c , los de los ejes con la diagonal $M' M''$ y proyectando sobre $M' M''$ la poligonal $M A R M''$ se tendrá:



$$\begin{aligned} d &= e \cos a + f \cos b + g \cos c \\ d^2 &= e d \cos a + f d \cos b + g d \cos c \end{aligned} \quad [1]$$

Pero si se proyecta $M' M''$ y $M' A R M''$ sobre $M' A$ se tiene:

$$\begin{aligned} d \cos a &= e + f \cos v + g \cos u \\ \text{lo mismo: } d \cos b &= e \cos v + f + g \cos a \\ d \cos c &= e \cos u + f \cos a + g \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación [1] tendremos:

$$d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + 2 f g \cos a + 2 e g \cos u + 2 e f \cos v$$

y reemplazando e, f, g , por $x'' - x', y'' - y', z'' - z'$ y extrayendo la raíz cuadrada:

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 + 2 (y'' - y') (z'' - z') \cos a + 2 (x'' - x') (z'' - z') \cos u + 2 (x'' - x') (y'' - y') \cos v}$$

Transformación de coordenadas

Cambio de origen.—Si se quiere sustituir á los tres ejes $O X, O Y, O Z$ los nuevos $O' X', O' Y' O' Z'$ respectivamente

paralelos; el nuevo origen O' se hallará fijado por las coordenadas m, n, p con respecto á los primitivos ejes.

Sean x, y, z las coordenadas de un punto M con relación á los primitivos ejes, y $x' y' z'$ las correspondientes á los nuevos.

Proyectando sucesivamente sobre cada uno de los tres ejes primitivos y paralelamente al plano de los dos otros, la recta OM y la línea quebrada $OO'M$, se establece la siguiente relación:

$$x = m + x'; \quad y = n + y'; \quad z = p + z'$$

Cambio de dirección de los ejes conservando el mismo origen.—Si conservando el origen, se cambia de dirección de los ejes, llamando: a, b, c los cosenos de los ángulos formados por el eje OX' con los tres ejes primitivos

$$OX, OY, OZ; \quad a' b' c' \quad y \quad a'' b'' c''$$

los ángulos análogos formados respectivamente por los ejes OX', OZ' . Llamando también γ, ρ, λ los ángulos que entre sí forman los ejes primitivos, al proyectar el punto M del espacio sobre los nuevos ejes por sus coordenadas x', y', z' , la proyección de esas coordenadas sobre los ejes primitivos, dá origen á las tres relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x &+ y \cos \gamma + z \cos \rho = a x' + a' y' + a'' z' \\ x \cos \gamma + y &+ z \cos \lambda = b x' + b' y' + b'' z' \\ x \cos \rho + y \cos \lambda + z &= c x' + c' y' + c'' z' \end{aligned} \right\} 1$$

Tanto los ángulos a, b, c , como los a', b', c' , y a'', b'', c'' se encuentran ligados por una ecuación de condición y sujeta al sistema de coordenadas admitido.

Cuando los ejes primitivos son rectangulares se tiene:
 $\cos \lambda = \cos \rho = \cos \gamma = 0$ y las ecuaciones (1) se convierten en

$$\begin{aligned}x &= a' x' + a'' y' + a''' z' \\y &= b' x' + b'' y' + b''' z' \\z &= c' x' + c'' y' + c''' z'\end{aligned}$$

Si los nuevos ejes son también rectangulares, se tendrá atendiendo á que la relación de los ángulos es:

$$\left. \begin{aligned}a' a'' + b' b'' + c' c'' &= 0 \\a'' a + b'' b + c'' c &= 0 \\a a' + b b' + c c' &= 0\end{aligned} \right\} \begin{aligned}x' &= a x + b y + c z \\y' &= a' x + b' y + c' z \\z' &= a'' x + b'' y + c'' z\end{aligned}$$

Para facilitar la transformación de un sistema rectangular á otro rectangular de igual origen, puede recurrirse al siguiente cuadro en el que entran los cosenos ó constantes.

	x'	y'	z'
x	a	a'	a''
y	b	b'	b''
z	c	c'	c''

De él se desprende la formación de cada ecuación, sea:

$$\begin{aligned}y' &= a' x + b' y + c' z \\y &= b x' + b' y' + b'' z'\end{aligned}$$

Fórmulas de Euler.—En el caso de pasar de un sistema rectangular á otro también igual, el empleo de las fórmulas generales de la transformación es largo y laborioso por las eliminaciones sucesivas que requieren las nueve constantes que existen entre las seis ecuaciones de condición.

Euler ha resuelto el problema, estableciendo fórmulas en la que sólo entran tres constantes.

Sea $O(z, x, y)$ el sistema actual y $O(z, x, y)$ la posición del nuevo.

La relación entre ambas posiciones se halla fijada:

(a) Por el ángulo ϕ que hace la traza del nuevo plano $x y$ sobre el primitivo.

(b) Por el ángulo δ que forman los dos planos $x_1 y_1$ formados por los dos planos de las z .

(c) Por el ángulo φ que forma el nuevo eje de las x con la traza del nuevo plano $x y$ sobre el primitivo.

Por medio de tres rotaciones puede llegar el sistema primitivo á la posición del sistema nuevo; en efecto, siendo $o (x y z)$ el sistema primitivo, hagamos girar:

1.º—Los primitivos ejes $o x, o y$, de un ángulo ϕ en un plano alrededor del eje $o z$, que permanece fijo; los nuevos ejes serán $o x_1, o y_1$.

2.º—Los ejes $o y_1, o z$ de un ángulo δ alrededor del eje $o x$ que permanece fijo y serán $o y_2, o z_2$ los nuevos ejes.

3.º—Los ejes $o x, o y_2$ de un ángulo φ en un plano alrededor del eje z_2 que permanece fijo á los nuevos ejes, $o x_3, o y_3$.

El nuevo plano $x y$, es ahora el que determina los ejes $o x_3, o y_3$ que son á la vez los nuevos ejes de las x , y de las y . La traza del nuevo plano $x y$ sobre el primitivo es la recta $o x_1$.

El nuevo plano de las z , es la perpendicular $o z_3$ al plano de $o x_3, o y_3$. Luego las tres rotaciones han llevado los ejes primitivos á la posición de los nuevos ejes por los ángulos $\phi \delta \varphi$.

Se tiene, pues, ahora

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \psi - y_1 \operatorname{sen} \psi \\ y &= x_1 \operatorname{sen} \psi + y_1 \cos \psi \\ z &= z_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_2 \cos \delta - z_2 \operatorname{sen} \delta \\ z_1 &= y_2 \operatorname{sen} \delta + z_2 \cos \delta \\ x_1 &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_3 \cos \varphi - y_3 \operatorname{sen} \varphi \\ y_2 &= x_3 \operatorname{sen} \varphi + y_3 \cos \varphi \\ z_2 &= z_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Eliminando entre estas ecuaciones (1) (2) (3), x_1 y_1 z_1 ; x_2 y_2 z_2 ; se obtienen finalmente las *fórmulas de Euler*

$$\begin{aligned} x &= x_3 (\cos \psi \cos \varphi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \delta) \\ &+ y_3 (-\cos \psi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \cos \delta) + z_3 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \delta \\ y &= x_3 (\operatorname{sen} \psi \cos \varphi + \cos \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \delta) \\ &+ y_3 (-\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \delta) + z_3 (-\cos \psi \operatorname{sen} \delta) \\ z &= x_3 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + y_3 \cos \varphi \operatorname{sen} \delta + z_3 \cos \delta \end{aligned}$$

Los ángulos ψ , φ , δ , pueden ser positivos ó negativos; se consideran positivos cuando la rotación de los planos se efectúa en el sentido de las agujas de un reloj, para una persona que se encontrara con los pies en el origen y recostado de espaldas sobre el eje de rotación.

Representación de las superficies y de las líneas

Toda ecuación que no contenga más que una variable representa uno ó varios planos paralelos al de los ejes cuyas coordenadas no entran en la ecuación.

$x = c$ representa un plano paralelo al $X O Y$
 $f(z) = 0$ $z = c$ $z = c'$ $z = c''$
 $z = 0$ representa el plano de las $x y$; $y = 0$ el de las
 $x z$; $x = 0$ el de los $y z$.

Una ecuación con dos variables representa una superficie cilíndrica engendrada por una recta paralela al eje cuya variable no entra en la ecuación $f(x, y) = 0$

Si $f(x, y) = 0$ es de primer grado, representa un plano.

Así que podemos decir: toda ecuación de primer grado con dos variables representa un plano paralelo al eje cuya variable no entra en la ecuación.

Toda ecuación con tres variables $f(x, y, z) = 0$ representa una superficie.

Ecuaciones de la línea recta.—A no ser que una línea recta sea paralela á uno de los planos coordenados, se podrá siempre imaginar dos planos que la contengan; por ejemplo, el uno paralelo al eje de las y y el otro al de las x , y que tendrán respectivamente por ecuaciones

$$x = a z + p \quad y = b z + q$$

y estas dos ecuaciones serian las de la recta.

Así que toda recta se puede representar por dos ecuaciones con una ó dos variables; y reciprocamente, dos ecuaciones con una ó dos variables, representan una recta.

También se puede decir que: dos ecuaciones de primer grado con tres variables representan una recta, porque eliminando sucesivamente x é y entre ellas se llega á dos ecuaciones que no contiene, cada una, más que dos variables.

Ecuación del plano.—Toda ecuación de primer grado

$$A x + B y + C z = D$$

representa un plano.

Ecuación de la esfera.—Si (a, b, c) es el centro y R el radio de una esfera, la ecuación en el caso general será:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2(y - b)(z - c) \cos h + \\ + 2(x - a)(z - c) \cos u + 2(x - a)(y - b) \cos v = R^2$$

cuando los ejes son rectangulares

$$\cos h = 0 \quad \cos u = 0 \quad \cos v = 0$$

y la ecuación se deduce á

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

De la línea recta y del plano

Problemas sobre las líneas rectas.—Siempre una recta se representa por dos ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= a z + p \\ y &= b z + q \end{aligned} \right\} (1)$$

que representa sus proyecciones sobre los planos coordenados de las xz é yz . En las dos ecuaciones [1] eliminando z , tendríamos la proyección de la recta sobre el plano de las xy .

Cuando la recta pasa por el origen, p , y q son nulos y se tiene: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$.

Se hallarán las trazas de una recta dada por sus ecuaciones:

$$\frac{a - p}{a} = \frac{y - q}{b} = z$$

sobre uno de los planos coordenados igualando á cero en

estas ecuaciones, la variable que se refiere al eje no situado en el plano de que se trata.

Se puede hallar la distancia de una recta dada por sus ecuaciones:

$$x = a z + p$$

$$y = b z + q$$

al origen, por medio de la siguiente fórmula, llamando d á dicha distancia ó sea la perpendicular bajada desde el origen á la recta:

$$d = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + (b p - a q)}{a^2 + b^2 + 1}}$$

Cuando se conocen las ecuaciones de una recta en coordenadas rectangulares, se pueden determinar los ángulos que la recta forma con los ejes coordenados.

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \\ \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

Dadas las ecuaciones de una recta en coordenadas rectangulares, se puede hallar los ángulos que esta recta forma con los planos coordenados.

Siempre se puede hacer pasar una paralela á la recta que pase por el origen y fácil es ver que los ángulos que forma con los planos coordenados son los complementos de los que forma con los ejes, luego tendremos:

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

Las ecuaciones de una recta que pase por un punto dado y sea paralela á una recta dada, son:

$$x - x' = a' (z - z') \quad (1)$$

$$y - y' = b' (z - z')$$

llamando α , β , γ , los ángulos que la recta forma con los ejes, se tendrá:

$$a' = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \quad b' = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

y se podrán poner las ecuaciones [1] bajo la forma:

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha} = \frac{y - y'}{\cos \beta} = \frac{z - z'}{\cos \gamma}$$

Las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados (x', y', z') y (x'', y'', z'') son las siguientes:

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}$$

Cuando dos líneas se cortan, las coordenadas de sus puntos de intersección verifican á la vez las ecuaciones de estas líneas, pero para que dos rectas se corten es necesario tener la relación

$$\frac{p - p'}{a - a'} = \frac{q - q'}{b - b'} ;$$

relación que debe existir entre los coeficientes de las ecuaciones de las rectas.

Si existe esta relación tendremos para las coordenadas del punto de intersección

$$x = \frac{a p' - p a'}{a - a'} \quad y = \frac{b q' - q b'}{b - b'} \quad z = \frac{p - p'}{a - a'} = - \frac{q - q'}{b - b'}$$

El ángulo de dos rectas dadas por sus ecuaciones en coordenadas rectangulares, llamándolo v , es igual:

$$\cos V = \frac{a a' + b b' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \times \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}$$

El coseno de un ángulo es igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos que los dos lados del ángulo forman con tres ejes rectangulares.

Centros.—Centro de una superficie puede decirse es un centro de simetría, de donde: toda recta ó cuerda que toca una superficie de 2.º grado en dos puntos y pasa por el centro, se encuentra dividida por éste en dos partes iguales.

Si se toma el centro por origen y se combina la ecuación de la superficie: $\int (x, y, z) = 0$ con las de una recta que pasa por el origen: $x = m z$; $y = n z$, resulta una ecuación de dos raíces iguales y de sentido contrario.

Para saber si una superficie tiene un centro, se trasladarán los ejes paralelamente á un punto M y se vé si se puede determinar a, b, y c, de manera que se cumpla la propiedad indicada.

Este principio aplicado á la fórmula general de las superficies, se obtiene por la traslación paralela

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B x y + 2 B' x z + 2 B'' y z + \int_a (a b c) x + \int_b (a b c) y + \int_c (a b c) x + \int (a b c) = 0$$

siendo las coordenadas del centro dadas por las ecuaciones

$$\int_a (a b c) = 0 \quad ; \quad \int_b (a b c) = 0 \quad ; \quad \int_c (a b c) = 0$$

ó sea, reemplazando a, b, c, por x, y, z, y dividiendo por 2.

$$\left. \begin{aligned} A x + B y + B' z + C &= 0 \\ A' y + B x + B'' z + C' &= 0 \\ A'' z + B' x + B'' y + C'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Cada una de estas ecuaciones representa un plano y el

centro de la superficie es el punto común á los tres planos.

Suponiendo resuelto el sistema de ecuación (b), pongamos:

$$x = \frac{G}{D} ; \quad y = \frac{H}{D} ; \quad z = \frac{K}{D} \quad (7)$$

La condición de tener las ecuaciones (6) una sola solución, ó sea de existir un centro único, se tiene: $D \leq 0$; entonces la ecuación de la superficie referida á ese centro se reduce á:

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B x y + 2 B' x z + 2 B'' y z + F_1 = 0 \quad (8)$$

Si á lo menos uno de los numeradores G, H, K , es diferente de 0, siendo $D = 0$; el centro está en el infinito.

Si se tiene á la vez: $G = H = K = D = 0$; los valores de (7) son indeterminados, quiere decir, que la superficie tiene una infinidad de centro. En este caso sucede:

- a) Que los tres planos (6) se cortan según una misma recta que es el lugar de los centros; y entonces el sistema (b) se reduce á dos ecuaciones, siendo la tercera una consecuencia de éstas.
- b) O que los tres planos se confunden en uno sólo, que es el lugar de los centros, reduciéndose el sistema (6) á una sola ecuación.

Planos Diametrales

Se llama *superficie diametral*, el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una superficie, paralelas á una misma dirección. Suponiendo una superficie

de m^o orden cortada por una recta, hay en general m puntos de intersección, los que, combinados de dos en dos, dan $\frac{m(m-1)}{2}$, cuerdas y por consiguiente, $\frac{m(m-1)}{2}$ puntos medios pertenecientes á la superficie diametral. Luego, considerando la misma recta como una secante de la superficie diametral, ésta es de orden $\frac{m(m-1)}{2}$.

Para, $m=2$, la superficie diametral es plana y las cuerdas paralelas correspondientes á un plano diametral son conjugadas con éste.

Sea una secante á una superficie de 2^o grado:

$$x = mz + u \quad ; \quad y = nx + v$$

se transporta los ejes paralelamente al punto medio $M \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$ de la cuerda que ella determina en la superficie y se combinan las ecuaciones de dicha recta, entonces reducida á:

$$x = mz \quad ; \quad y = nz$$

con la de la superficie, resulta:

$$(Am^2 + A'm^2 + A'' + 2Bmn + 2Bm' + 2B''n)z^2 + (m \int_a + n \int_b + \int_c)z + \int(abc) = 0 \quad (9)$$

Como debe dar dos raíces iguales y de sentido contrario, lo que implica que se tenga:

$$m \int_a + n \int_b + \int_c = 0$$

ó sea poniendo x, y, z en vez de: a, b, c

$$m \int_x(x, y, z) + m \int_y(x, y, z) + \int_z(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

ó diferenciando y reduciendo

$$(mA + nB + B')x + (mB + nA' + B'')y + (mB' + nB'' + A'')z + (mC + nC' + C'') = 0$$

Esta es la ecuación del *plano diametral conjugado con la disección dada por una recta*.

Como la ecuación (10) se verifica independientemente de m y n , por los valores de x , y , z , que satisfacen las ecuaciones (6) del centro, se sigue que: todos los planos diametrales pasan por el centro ó por el lugar de los centros.

Un plano diametral se llama *principal*, cuando es *perpendicular* á la disección de las cuerdas conjugadas.

La intersección de los planos diametrales, es un *diámetro*, el que es *principal* y toma el nombre de *Eje*, si los dos planos son principales.

El punto en que *un eje* corta la superficie se llama *vértice*.

Tomando por planos de las x y, un plano diametral y por *eje* de las z una paralela á las cuerdas conjugadas la ecuación, para valores cualesquiera de x , y , debe dar para z dos valores iguales y de signo contrario, siendo así dicha ecuación toma la forma

$$L z^2 + \varphi(x, y) = 0. \quad (a)$$

en la que $\varphi(x, y)$ es de 2.º grado, pero se puede siempre reducir $\varphi(x, y)$ á una de las formas:

$$\left. \begin{aligned} M y^2 + N x^2 &= T \\ M y^2 &= Q x \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

luego substituyendo estos valores en la ecuación (a)

$$\left. \begin{aligned} L z^2 + M y^2 + N x^2 &= T \\ L z^2 + M y^2 &= Q x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Planos principales

La ecuación de una cuerda conjugada con un plano diámetro será

$$x = \frac{\cos \alpha}{\cos \delta'} z; \quad y = \frac{\cos \beta}{\cos \delta} z$$

ó haciendo $\cos \alpha = \lambda, \quad \cos \beta = u; \quad \cos \delta = \gamma$

sea
$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{u} = \frac{z}{v}$$

La ecuación del plano diametral viene entonces á ser

$$\lambda \int x + u \int y' + v \int z' = \lambda (A x + B y + B' z + C) \\ + u (A' y + B x + B'' z + C') + v (A'' z + B' x + B'' y + C'') = 0$$

ó sea

$$(\lambda A + u B + v B') x + (\lambda B + u A' + v B'') y \\ + (h B' + u B'' + v A'') z + (h C + u C' + v C'') = 0 \quad (13)$$

Recordando que las condiciones de perpendicularidad entre el plano y la cuerda son

$$m = \frac{h}{v} \frac{h A + u B + v B'}{h B' + u B'' + v A''}; \quad n = \frac{v}{u} = \frac{h B + u A' + v B''}{h B' + u B'' + v A''}$$

ó sea

$$\frac{h A + u B + v B'}{h} = \frac{h B + u A' + v B''}{u} = \\ = \frac{h B' + u B'' + v A''}{v} = S \quad (14)$$

siendo S la razón común.

De estas últimas ecuaciones se deduce

$$\left. \begin{aligned} h(A-S) + uB + vB' &= 0 \\ hB' + u(A'-S) + vB'' &= 0 \\ hB' + uB'' + v(A''-S) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

De las ecuaciones (13) se deduce

$$h s_x + u s_y + v s_z + (hC + uC' + vC'' = 0$$

ó sea

$$S(hx) + uy + vz + (hC + uC' + vC'' = 0 \quad (16)$$

$$\text{Teniéndose: } h^2 + u^2 + v^2 = 1$$

las tres incógnitas h, u, v del sistema (15) no puede ser = 0 á la vez, debiendo ser á lo menos, una diferente de 0.

Suponiendo que ésta sea v , las ecuaciones (16) divididas por v , contendrán los cocientes $\frac{h}{v} \frac{u}{v}$; y, si determinamos éstos en las dos primeras ecuaciones y que sustituimos sus valores en la tercera, resultará una ecuación en S , que resuelta permite determinar h, u, v .

También se puede para obtener la ecuación en S , sustituir los valores h, u , sacados de las dos primeras del (14), en la tercera resulta una ecuación de la forma; $D'v = 0$, ó sea: $D' = 0$.

Se ve que D' es el dominador común de las ecuaciones (14) resueltas, de modo que se tiene:

$$\begin{aligned} (A-S)(A'-S)(A''-S) - (A-S)B''^2 - (A-S)B'^2 - \\ - (A''-S)B^2 + 2BB'B' = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

de donde:

$$\begin{aligned} S^3 - (AA' + A'')S^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)S + \\ + (AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - 2AA'A'' - 2BB'B') \end{aligned} \quad (18)$$

Como la ecuación (17) tiene á lo menos una raíz real,

hay siempre á lo menos un sistema de cuerdas principales; suponiendo referida la superficie á un sistema de ejes, en que el de las z sea paralela á dichas cuerdas se tiene:

$$h = 0; \quad u = 0; \quad v = 1$$

y la ecuación (14) se reduce á

$$\frac{B'}{O} = \frac{B''}{O} = \frac{A''}{1} = S \quad \text{de donde} \quad B' = B'' = O$$

de modo que la ecuación general de las superficies de 2.^o grado se reduce á la forma:

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B x y + 2 C x + \\ + 2 C' y + 2 C'' z + F = O \quad (19)$$

que corresponde á todas las superficies de 2.^o grado; y como por medio de una rotación puede desaparecer el rectángulo, aquella se reduce á :

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z + 2 C' x + 2 C'' z + F = O \quad (20)$$

La hipótesis de ser: $B = B' = B'' = O$
da por raíces de S en la (17)

$$S = A; \quad S' = A'; \quad S'' = A''$$

de modo, que una reducción de la ecuación general haciendo desaparecer los rectángulos, da para raíces de S , los coeficientes de los cuadrados.

Si una de estas raíces, por ejemplo A'' , es igual á 0, resulta; $D = 0$; quiere decir que la superficie no tiene centro y su ecuación se reduce á

$$A x^2 + A' y^2 + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = O \quad (21)$$

Por otra parte el plano diametral, conjugado con las cuerdas cuya dirección es dada por los valores de h, u, v , correspondiente al de $S = 0$; está en el infinito, como se deduce de la ecuación (16), teniendo así la superficie sólo dos planos principales.

Si además se tuviera en la misma (16),

$$h C + u C' + v C'' = 0$$

habría una infinidad de planos principales, paralelos todos entre sí. La ecuación (21) se reduce entonces á

$$A x^2 + A' y^2 + 2 C x + 2 C' y + F = 0 \quad (22)$$

que representa un cilindro de base elíptica ó hiperbólica, y de generatrices paralelas á o z.

Si dos raíces de S son = 0, por ejemplo A' y A'', la ecuación (21) tomará la forma:

$$A x^2 + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = 0 \quad (23)$$

que se reconoce como una superficie cilíndrica de base parabólica, pues basta poner y = 0 para tener una directriz: $A x^2 + 2 C x + 2 C'' z + F = 0$ y cortar la superficie por planos; $x = \alpha$, $x = \alpha' \dots$ que dan las rectas paralelas: $L y + M z = M$; $L y + z = N' \dots$ etc.

Reducción de la ecuación general

Si la ecuación general de 2.^o grado se quiere reducir á la forma de la ecuación (12 p) mediante la transformación de coordenadas, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} L x^2 + M y^2 + N z^2 &= T \\ L x^2 + M y^2 &= 2 Q z \end{aligned} \right\} (a)$$

Pueden presentarse tres casos para esa transformación:

1.^o — *Para superficies que tienen centro*

Por una traslación de los ejes, que se suponen rectan-

gulares, al centro de la superficie, se reduce la ecuación general á la forma

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B x y + 2 B' x z + 2 B'' y z + F_1 = 0 \dots (b)$$

siendo $F_1 = f(a_1 b_1 c_1)$; y el sistema (6) de ecuaciones da una solución sola, siendo el denominador común $D \geq 0$.

Si se multiplican las ecuaciones (6) del centro respectivamente por a , b , c ... y luego se suman, resulta:

$$\begin{aligned} A x^2 + A' b^2 + A'' c^2 + 2 B x b + 2 B' a c + 2 B'' b c + C a + \\ + C' b + C'' c = F_1 - (F + C a + C' b + C'' c) = 0 \\ F_1 = F + C a + C' b + C'' c \dots (24) \end{aligned}$$

Si ahora se cambia la dirección de los ejes, tomando por nuevos ejes las tres direcciones de los tres sistemas de cuerdas principales, correspondientes á las tres raíces de S (11), hay que poner los valores de los cosenos que contiene, iguales respecto á los valores de h , u , v , que éstos toman para las raíces de S , y que son dados por las ecuaciones (15) y la segunda de la (11); de modo que llamando dichos valores: h' , u' , v' ; h'' , u'' , v'' , las fórmulas serán:

$$\left. \begin{aligned} x &= h x' + h' y' + h'' z' \\ y &= u x' + u' y' + u'' z' \\ z &= v x' + v' y' + v'' z' \end{aligned} \right\} (c)$$

La sustitución de estas fórmulas (c) en la fórmula (b) la convierte en otra de la forma

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2 B_1 x y + 2 B'_1 x z + 2 B''_1 y z + F_1 = 0 (d)$$

que representa la superficie referida á su centro y los ejes principales; luego, según (12), debe tenerse:

$$B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$$

y las tres raíces de S son iguales á A_1, A'_1, A''_1 ; lo que es fácil verificar; calculando, por ejemplo, A_1 en la ecuación transformada, se halla :

$$A_1 = A h^2 + A' u^2 + A'' v^2 + 2 B h u + 2 B' h v + 2 B'' u v \dots (e)$$

y multiplicando, por otra parte, las ecuaciones (14) respectivamente por h, u, v, y sumándolas, resulta la expresión (e) igual á S, esto es: $S = A_1$.

Así la ecuación (d), será en definitiva:

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + F_1 = 0. \quad (f)$$

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$25 x^2 + 22 y^2 + 16 z^2 - 20 x y - 4 y z - 26 x - 40 y - 44 z + 44 = 0. \quad (1)$$

Trasladando los ejes paralelamente, se hallan por coordenadas del centro: $x = 1; \quad y = 1; \quad z = 1$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (24), se tiene:

$$F_1 = 44 - 13 - 20 - 22 = - 11$$

de modo que la ecuación viene á ser

$$25 x^2 + 22 y^2 + 16 z^2 - 20 x y - 4 x z + 16 y z - 11 = 0. \quad (2)$$

Para obtener la forma de la ecuación (f), se calcula la ecuación en S, y se tiene (11)

$$\begin{aligned} - (A + A' + A'') &= - (25 + 22 + 16) = - 63; \\ + (A A' + A A'' + A' A'' - B^2 - B'^2 - B''^2) &= (25 \cdot 22 + 25 \cdot 16 + \\ &\quad + 22 \cdot 16 - 10^2 - 2^2 - 8^2) = 1134; \\ (A B'^2 + A' B^2 + A'' B^2 - A A' A'' - 2 B B' B'') &= (25 \cdot 8^2 + \\ &\quad + 22 \cdot 2^2 + 16 \cdot 10^2 - 25 \cdot 22 \cdot 16 - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 8) = 5832. \end{aligned}$$

Resulta pues: $S^3 = 63 S^2 + 1134 S - 5832 = 0$.

Esta ecuación da las raíces 9, 18, 36; de modo que

poniendo en la ecuación (f): $A_1 = 9$; $A'_1 = 18$; $A''_1 = 36$, la ecuación queda reducida finalmente á

$$9x^2 + 18y^2 + 36z^2 - 11 = 0.$$

2.º—*Para superficies que no tienen centro*

Se empezará en este caso por cambiar la dirección de los ejes para hacer desaparecer los términos de los rectángulos. Siendo una de las raíces de S , igual á cero, la hipótesis de tomar, el eje de las z por ejemplo, paralelo á la dirección determinada por el valor de $S = 0$, implica la desaparición del término z^2 (12), reduciendo así la ecuación general á:

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + 2 C_1 x + 2 C'_1 y + 2 C''_1 z + F = 0 \quad (a)$$

donde A_1 , A'_1 son las raíces de la ecuación en S , que es de 2.º grado y C_1 , C'_1 , C''_1 , tienen los valores:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C h + C' u + C'' v \\ C'_1 &= C h' + C' u' + C'' v' \\ C''_1 &= C h'' + C' u'' + C'' v'' \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Ahora mediante una traslación paralela se puede hacer desaparecer de la ecuación (a), los términos en x , y , así como el término constante, reduciéndose la ecuación á la forma final:

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + 2 C''_1 z = 0 \quad (c)$$

Ejemplo.—Sea la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy + 4xz + 4yz + 6x + 6y - 3z = 0 \quad (1)$$

La ecuación en S viene á ser:

$$S^2 - 18S + 81 = 0$$

que da dos raíces iguales á 9, siendo así:

$$A_1 = A'_1 - 9$$

Para hallar el valor de C'' se calculan los valores de h, u, v correspondientes á la raíz $S = 0$, mediante las ecuaciones (15) que dan:

$$\left. \begin{aligned} 5h - 4u + 2v &= 0 \\ -4h + 5u + 2v &= 0 \\ h + u + 4v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (d)}$$

á las que hay que añadir: $h^2 + u^2 + v^2 = 1$.

La primera de las ecuaciones (d), es una suma de las otras dos; el sistema da:

$$h = \frac{2}{3}; \quad u = \frac{2}{3}; \quad v = -\frac{1}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la tercera de las ecuaciones (b) resulta:

$$C'' = 3 - \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

Así la ecuación (1) se reduce finalmente á:

$$9x^2 + 9y^2 + 9z = 0$$

ó sea:

$$x^2 + y^2 + z = 0$$

3.º—*Para superficies con infinidad de centros*

Suponiendo formadas las ecuaciones del centro (6), habrá una infinidad de centros; si el sistema se reduce á dos ecuaciones distintas ó á una sola. En el primer caso, el lugar de los centros es una recta y la superficie cilíndrica cuya ecuación se reduce á las formas (22 y 23); en el segundo caso puede decirse que la superficie es formada por dos planos paralelos.

Luego para el cambio de dirección de los ejes, se forma la ecuación en S . Si ésta tiene una raíz igual á cero, se puede tomar el eje de las z paralelo á la dirección determinada por dicha raíz: y, si además se tiene $C'' = 0$ la ecuación general se reduce á:

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + 2 C_1 x + 2 C'_1 y + F = 0$$

que representa un cilindro elíptico ó hiperbólico siendo A_1 , A'_1 , las otras dos raíces de S .

Si al mismo tiempo resultára una segunda raíz, por ejemplo, A'_1 igual á cero, sin ser $C'' = 0$, resulta la ecuación (23).

Ejemplo.—Sea la ecuación:

$$x^2 + 2 y^2 + 4 z^2 - 2 x y - 4 y z + 2 x - 2 y - 4 = 0 \quad (1)$$

Las del centro son:

$$x - y + 1 = 0; \quad 2 y - 2 z - x - 1 = 0; \quad y - 2 z = 0$$

siendo la tercera igual á la suma de las dos primeras el sistema se reduce á dos ecuaciones. La ecuación S viene á ser:

$$S^2 - 73 + y = 0$$

quedando en
$$S = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Si se calcula ahora C''_1 se hallará un valor cero.

Así la ecuación (I) viene á ser:

$$\frac{7 + \sqrt{13} x^2}{2} + \frac{7 - \sqrt{13} y^2}{2} + 2 C_1 + 2 C'_1 y - 4 = 0$$

donde habrá que calcular los valores de C_1 y C'_1 por las fórmulas 2 de la (15). Pero si antes del cambio de la dirección de los ejes, se efectúa una traslación paralela para

hacer desaparecer los términos en x , y , se halla para la ecuación (1) siendo: $a = 1$, $b = c = 0$

$$x^2 + 2y^2 + 4x^2 - 2xy - 4yz - 5 = 0$$

de modo que finalmente se tiene:

$$\frac{7 + \sqrt{13}x^2}{2} + \frac{7 - \sqrt{13}y^2}{2} - 5$$

ó sea: $(7 + \sqrt{13})x^2 + (7 - \sqrt{13})y^2 - 10 = 0$

que es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje de las z , siendo su base una elipse en x y.

La reducción de la ecuación general puede tener por objeto conocer el *género* de la superficie que ella representa, así como la *especie* que tiene cada género. Los géneros los constituyen las superficies con un sólo centro, sin centro y con infinitud de centros; luego *para determinar el género*, se examinarán las ecuaciones del centro.

Las especies dependen de los signos de los coeficientes de la ecuación reducida, ó sea de las raíces de S , luego para determinarlas se aplicará la regla de Descartes.

Clasificación de las superficies con centro

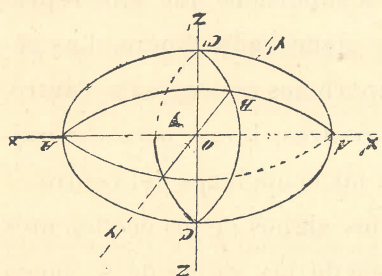
Todas las superficies que tienen centro están comprendidas en la ecuación

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = T$$

Suponiendo que el término conocido pasado, al segundo miembro, sea positivo, condición que siempre se puede satisfacer, se pueden examinar tres casos.

Primer caso.—*Los tres coeficientes del primer miembro son positivos.*—*Género elipsoide.*—Se llama elipsoide la superficie engendrada por una elipse de ejes variables, que se mueve paralelamente á sí misma, apoyando constantemente sus cuatro vértices sobre otras dos elipses fijas que tienen un eje común y cuyos planos son perpendiculares al de la elipse generatriz

Si hacemos $y = 0$, $z = 0$ tendremos $x = \pm \sqrt{\frac{T}{L}}$; cantidad real que puede representarse por $\pm a$. Lo mismo encon-



trariamos: $b = \pm \sqrt{\frac{T}{M}}$

$c = \pm \sqrt{\frac{T}{N}}$, que representan los puntos donde la superficie corta á los ejes coordenados. Estos puntos se llaman vértices.

Reemplazando en la ecuación de la superficie, L, M, N, por $\frac{T}{a^2}$, $\frac{T}{b^2}$, $\frac{T}{c^2}$ y dividiendo por T tendremos la ecuación del elipsoide referido á sus ejes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Segundo caso.—*Un solo coeficiente negativo.*—*Género hiperboloide de una hoja.*—Se llama hiperboloide de una hoja la superficie engendrada por una elipse de ejes variables que se mueve paralelamente á sí misma, apoyando constantemente sus cuatro vértices sobre dos hipérbolas que

tienen un mismo eje segundo y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz:

$$L x^2 + M y^2 + N z^2 = T$$

coordenadas en el origen:

$$x = \pm \sqrt{\frac{T}{L}} ; y = \pm \sqrt{\frac{T}{M}} , z = \pm \sqrt{\frac{T}{N}}$$

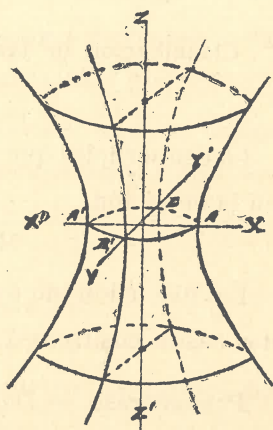
Los dos primeros valores son reales é indican que la superficie es encontrada por el eje de las x en dos puntos igualmente distantes del origen y lo mismo sucede respecto al eje de las y . Siendo imaginarios los dos últimos valores, el eje de las z no encuentra á la superficie, luego el hiperboloide de una hoja no tiene más que cuatro vértices.

Suponiendo como en el primer caso:

$$a = \sqrt{\frac{T}{L}} ; b = \sqrt{\frac{T}{M}} ; c = \sqrt{\frac{T}{N}}$$

$2a, 2b, 2c$, serán los ejes del hiperboloide, siendo los dos primeros reales y el tercero imaginario; introduciendo estos valores en la ecuación de la superficie, tendremos la ecuación del hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$



Tercer caso.—*Dos coeficientes negativos.*—*Género hiperboloide de dos hojas.*—Se llama hiperboloide de dos hojas, la superficie engendrada por una elipse de ejes variables,

que se mueve paralelamente á sí misma, apoyando constantemente sus cuatro vértices sobre dos hipérbolas que tienen un mismo eje primero y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz

$$L x^2 - M y^2 - N z^2 = T$$

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{T}{L}} & y &= \pm \sqrt{\frac{-T}{M}} & z &= \pm \sqrt{\frac{-T}{N}} \\ a &= \sqrt{\frac{T}{L}} & b &= \sqrt{\frac{T}{M}} & c &= \sqrt{\frac{T}{N}} \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación de la superficie tendremos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ecuación del hiperboloide de dos hojas.

Clasificación de las superficies que no tienen centro

Las superficies que no tienen centro están comprendidas en la ecuación

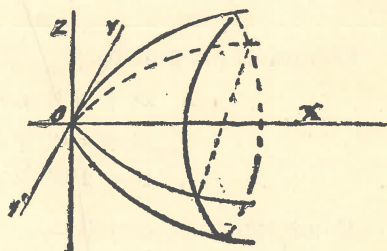
$$M y^2 + N z^2 = 2 u x$$

La discusión de esta ecuación no comprende más que dos casos positivos ó el uno positivo y el otro negativo.

Primer caso. — *Dos coeficientes positivos.* — *Paraboloide elíptico.* — Se llama paraboloide elíptico, la superficie engendrada por una parábola que se mueve paralelamente á sí mismo, teniendo siempre su vértice sobre otra parábola

cuyo plano es perpendicular al de la primera y su eje paralelo y del mismo sentido al de ésta.

Esta superficie no admite más que un solo eje, que es el de las x , y este eje no encuentra á la superficie más que en un punto que es el origen O y que se



llama vértice

$$z = 0; \quad y^2 = \frac{2u}{M}x; \quad y = 0; \quad z^2 = \frac{2u}{N}x$$

ecuaciones que representan dos parábolas.

Si llamamos $2p$; $2q$ los parámetros de las dos secciones principales, puede ponerse la ecuación de esta superficie bajo la forma

$$\frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{2q} = x$$

Segundo caso.—Dos coeficientes de signos contrarios.—Paraboloide hiperbólico.—Se llama paraboloide hiperbólico la superficie engendrada por una parábola que se mueve paralelamente á sí misma, teniendo su vértice sobre otra parábola, cuyo plano es perpendicular al de la primera, y de sentido contrario al de ésta.

$$\begin{array}{ll} y = 0 & -Nz^2 = 2ux \\ x = 0 & My^2 = 2ux \end{array}$$

Designando por $2p$ y $2q$ sus parámetros, podremos dar á la ecuación de esta superficie la forma

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x$$

RESUMEN

Ecuación propuesta.

$$\left. \begin{aligned} A x^2 + 2 B y z + 2 C x \\ A' y^2 + 2 B' x z + 2 C' y \\ A'' z^2 + 2 B'' x y + 2 C'' z \end{aligned} \right\} + F = 0$$

Ecuación característica.

$$s^3 + P s^2 + Q s + R = 0$$

Valores de los coeficientes de la ecuación característica.

$$P = -A - A' - A''$$

$$Q = A A' + A A'' + A' A'' - B^2 - B'^2 - B''^2$$

$$R = A B^2 + A' B'^2 + A'' B''^2 - A A' A'' - 2 B B' B''$$

Ecuaciones que determinan el centro.

$$F' x = A x + B' y + B' z + C = 0$$

$$F' y = B'' x + A' y + B z + C' = 0$$

$$F' z = B' x + B y + A' z + C'' = 0$$

Ecuación reducida de las superficies que tienen centro.

$$L x^2 + M y^2 + N z^2 = T$$

Ecuación reducida de las superficies que no tienen centro.

$$M y^2 + M'' z^2 = 2 U x$$

Raíces de la ecuación característica.

$$L. M. N.$$

x, y, z, coordenadas del centro.

$$T = F + C x_1 + C' y_1 + C'' z_1$$

l, m, n, valores sacados de las ecuaciones que hacen conocer la dirección de los ejes correspondientes á s = 0.

$$V = -C l - C' m - C'' n$$

$R \geq 0$ Superficies con un sólo centro.	$T > 0$ centro no situado en la superficie	$\left\{ \begin{array}{l} L > 0, M > 0, N > 0 \dots \text{Elipsoide real.} \\ L < 0, M < 0, N < 0 \dots \text{Elipsoide imaginario.} \\ L > 0, M > 0, N < 0 \dots \text{Hiperboloide de una hoja.} \\ L > 0, M < 0, N < 0 \dots \text{Hiperboloide de dos hojas.} \end{array} \right.$
	$T = 0$ centro situado en la superficie	$\left\{ \begin{array}{l} L, M, N, \text{ no todos del} \\ \text{mismo signo} \end{array} \right\} \dots \text{Cono.}$ $\left\{ \begin{array}{l} L, M, N, \text{ todos} \\ \text{del mismo signo} \end{array} \right\} \dots \text{Punto.}$
$L = 0$ Superficies que tienen una infinidad de centros	<i>En línea recta:</i> Las ecuaciones que determinan el centro se reducen á dos	$\left\{ \begin{array}{l} M > 0, N > 0 \left\{ \begin{array}{l} T > 0 \dots \text{Cilindro elíptico.} \\ T = 0 \dots \text{Una recta.} \end{array} \right. \\ M < 0, N < 0 \left\{ \begin{array}{l} T > 0 \dots \text{Cilindro imaginario.} \\ T = 0 \dots \text{Una recta.} \end{array} \right. \\ M > 0, N > 0 \left\{ \begin{array}{l} T > 0 \dots \text{Cilindro hiperbólico.} \\ T = 0 \dots \text{Dos planos que se cortan.} \end{array} \right. \end{array} \right.$
	<i>Sobre un plano:</i> Las ecuaciones que determinan el centro se reducen á una sola	$\left\{ \begin{array}{l} M = 0, N > 0 \left\{ \begin{array}{l} T > 0 \dots \text{Dos planos paralelos.} \\ T = 0 \dots \text{Un sólo plano.} \end{array} \right. \\ M = 0, N < 0 \left\{ \begin{array}{l} T > 0 \dots \text{Dos planos imaginarios.} \\ T = 0 \dots \text{Un sólo plano.} \end{array} \right. \end{array} \right.$
$R = 0; L = 0$ Superficies de un centro colocado en el infinito	<i>Una de las ecuaciones que determinan el centro, es incompatible con las otras dos</i>	$\left\{ \begin{array}{l} M > 0, N > 0 \dots \text{Paraboloide elíptico.} \\ M > 0, N < 0 \dots \text{Paraboloide hiperbólico.} \\ M = 0, N \geq 0 \dots \text{Cilindro parabólico.} \end{array} \right.$

ÍNDICE DEL TOMO PRIMERO

	<u>PÁGINA</u>
Introducción.....	VII
Alfabeto griego.....	10

ÁLGEBRA

Definición	11
Adicionar	12
Sustracción	13
Multiplicar	13
División.....	14
Fracciones — Adición.....	16
Sustracción.....	16
Multiplicación.....	17
División.....	17
Reducción.....	17
<i>Potencias y raíces</i>	17
Exponentes negativos.....	18
Extracción de raíces.....	18
Raíz cuadrada de los polinomios.....	20
<i>Cantidades radicales</i>	22
Adición.....	24
Sustracción	24
Multiplicación.....	24
División	25
Potencias.....	25

	PÁG.
Extracción de raíces.....	26
<i>Exponentes fraccionarios</i> ...	26
Suma, resta, multiplicación, división, potencia y extracción....	27
<i>Ecuaciones, definiciones y su resolución</i>	28
1.º Por sustitución y eliminación.....	30
2.º „, comparación.....	30
3.º „, adición y sustracción.....	31
Ecuaciones con dos incógnitas	31
Método de Bezout	32
<i>Ecuaciones de 2.º grado y su resolución</i>	33
<i>Proporciones</i>	38
<i>Progresiones aritméticas</i>	39
„ geométricas.....	40
Coordenaciones, permutaciones y combinaciones.....	41
<i>Logaritmos</i>	43
Logaritmos vulgares.....	44
Complemento logarítmico.....	47
Logaritmo Neperiano.....	47
<i>Ecuaciones exponenciales</i>	47
Logaritmos de adición y sustracción.....	49
<i>Teoría de las ecuaciones</i>	55
Reglas de Descartes	58
Raíces comunes á dos ecuaciones	59
Raíces iguales	60
Raíces conmensurables	61
Ecuaciones recíprocas.....	62
Teorema de Sturmn.....	62
Raíces inconmensurables.....	65
Método gráfico.....	67
„ de Newton.....	67
Fracciones continuas.....	69

	PAG.
Polinomios derivados.....	71
Ecuaciones numéricas.....	72
Ejemplos.....	74
Transformación de las ecuaciones.....	75

CÁLCULO DIFERENCIAL

De las funciones algebraicas	77
Diferencial de las funciones Logarítmicas	78
Funciones exponenciales	79
„ trigonométricas	80
„ ciclométricas	81
Reglas para la diferenciación	82
Funciones implícitas.....	85
Derivadas y diferenciales sucesivas	87
Série de Taylor	88
„ de Maclaurin	89
Concavidad y convexidad de las curvas.....	89
con exponente negativo	92
con función Logarítmica.....	92
Tangentes y normales á las curvas planas.....	92
Radio de curvatura.....	95
Máximos y Mínimos	98
Tabla de diferenciales.....	101

CÁLCULO INTEGRAL

Interpretación geométrica de una integral.....	102
Reglas de integración	104
Integrales logarítmicas	105
„ exponenciales	106
„ trigonométricas.....	106
„ ciclométricas	106

	PAG.
Polinomios derivados.....	71
Ecuaciones numéricas.....	72
Ejemplos.....	74
Transformación de las ecuaciones.....	75

CÁLCULO DIFERENCIAL

De las funciones algebraicas.....	77
Diferencial de las funciones Logarítmicas.....	78
Funciones exponenciales.....	79
„ trigonométricas.....	80
„ ciclométricas.....	81
Reglas para la diferenciación.....	82
Funciones implícitas.....	85
Derivadas y diferenciales sucesivas.....	87
Série de Taylor.....	88
„ de Maclaurin.....	89
Concavidad y convexidad de las curvas.....	89
con exponente negativo.....	92
con función Logarítmica.....	92
Tangentes y normales á las curvas planas.....	92
Radio de curvatura.....	95
Máximos y Mínimos.....	98
Tabla de diferenciales.....	101

CÁLCULO INTEGRAL

Interpretación geométrica de una integral.....	102
Reglas de integración.....	104
Integrales logarítmicas.....	105
„ exponenciales.....	106
„ trigonométricas.....	106
„ ciclométricas.....	106

Diferentes métodos, fracciones racionales, integración por cambio de variable.....	107
Integración de fracciones racionales.....	108
Cuadratura de las áreas planas	111
Áreas por aproximación.....	116
Rectificación de las curvas planas	118
Centro de gravedad.....	120
Cuadro de las funciones con sus diferenciales é integrales	123

GEOMETRÍA PLANA

Memorandum de ciertos teoremas fundamentales.....	124
Semejanza de los triángulos.....	126
Igualdad „ „	127
Medida del ángulo inscrito	128
Del círculo	129
Cuadro de perímetros y superficies de las figuras planas.....	131
Cuadro, volumen de los cuerpos.....	132

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

Líneas trigonométricas.....	134
Fórmulas fundamentales.....	135
Cuadro del valor de las líneas trigonométricas.....	138
Relación entre las áreas	139
Resolución de triángulos	139
Triángulos rectángulos.....	141
Disposición y uso de las tablas.....	142
Signo de los arcos en los cálculos trigonométricos	146
Problemas	147
Superficies	148
Ejemplo de la manera de resolver algunas fórmulas	149

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Ecuación fundamental	153
Analogías de Delambre	154
„ „ Neper	155
Resolución: triángulos rectángulos	155
„ „ oblicuángulos	157
„ „ isósceles	163
Aplicaciones	164
Exceso Esférico	167
Regla Mnemotécnica	169
Cuadro para la resolución de triángulos esféricos	172

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Principios	175
Construcción geométrica de expresiones algebraicas	177
Ecuación del punto	180
„ de la línea recta	180
Generalidad en la ecuación $y = ax \times b$	181
Ecuación del círculo	186
Lugar geométrico	188
Tangente al círculo	189
Discusión de las curvas representadas por la ecuación de 2.º grado con dos variables	191
Centro, diámetros y ejes de curvas de 2.º grado	195
Curvas de 2.º grado referidas á ejes especiales	199
Reducción de la ecuación general de las curvas de 2.º grado por transformación de coordenadas	201
Transformaciones	202
Aplicaciones	204
Coordenadas polares	208
Transformación de coordenadas	209

	Pág.
Líneas de 2.º grado ó fracción de dos variables. La elipse.....	213
Tangente á la elipse.....	216
Hipérbola.....	218
Tangentes.....	219
Asintotas.....	220
Parábola.....	221
Tangentes.....	222
Diámetros.....	224
Resúmen.....	226
<i>Secciones Cónicas.....</i>	<i>227</i>
Círculos.....	227
Elipse.....	228
Trazado.....	230
Parábola.....	231
Trazado.....	233
Hipérbola.....	236
Trazado.....	237
<i>Geometría Analítica del Espacio.....</i>	<i>239</i>
Proyección de las áreas.....	240
Coordenadas rectilíneas.....	241
Transformación de coordenadas.....	243
Fórmulas de Euler.....	245
Representación de las superficies y líneas.....	247
Ecuación de la línea recta.....	248
Ecuación del plano.....	249
,, de la esfera.....	249
Problemas sobre líneas rectas.....	249
Centros.....	252
Planos diametrales.....	253
,, principales.....	256
Reducción de la Ecuación general.....	259

	<u>Pág.</u>
1.º Para superficies que tienen centro.....	259
2.º „ „ que no tienen centro.....	262
3.º „ „ con infinidad de centros.....	263
Clasificación de las superficies con centro.....	265
1.er Caso.....	266
2.º Caso.....	266
3.er Caso.....	267
Clasificación de las superficies que no tienen centro.....	268
1.er Caso.....	268
2.º Caso.....	269
Resúmen.....	270
