

*Dr. Alejandro
Lemus*

Roberto Müller

Compendio General de Topografía Teórico Práctica

Tomo I:

Agrimensura y Catastro

CUARTA EDICION



BUENOS AIRES

II

Compendio General de Topografía Teórico Práctica

por

ROBERTO MÜLLER

AGRIMENSOR NACIONAL

*Exprofesor del Curso Libre de Topografía de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Universidad Nacional de La Plata.
Exgeodesta del Instituto Geográfico Militar argentino.*

Tomo I:

Agrimensura y Catastro

con

Tolerancias en Agrimensura Legal

e

Introducción a la Obra

CUARTA EDICION

corregida y aumentada

**Obra premiada con Mención Especial en Ciencias Físicas, Químicas
y Matemáticas por la Comisión Nacional de Cultura.
(22 de agosto de 1945).**

LIBRERÍA "EL ATENEO", FLORIDA 340-44
BUENOS AIRES
1946 (agosto 30)



| | |
|----------------------|-----|
| Don. Martín Heurcade | |
| Fecha: 29/03/13 | MÜL |
| Inv.: 00774 | T.I |

5264

Del mismo autor:

- Tolerancias en Agrimensura Legal* (1), Buenos Aires, 1921.
- Cálculo de compensación y Teoría de los Errores* (2), Buenos Aires, 1924.
- Confección de Catastros*, Buenos Aires, 1925.
- Regla de Cálculo al Alcance de Todos*, Buenos Aires, 1925.
- Regla de Cálculo*, tipo técnico, 5ª edición, Buenos Aires, 1945.
- Compendio General de Topografía Teórico Práctica:*

- Tomo II, Volumen 1: *Optica* (3), 3ª edición, Buenos Aires, 1944.
- „ II, „ 2: *Teodolitos y Poligonación*, 3ª edición, Buenos Aires, 1944.
- „ III, „ 1: *Triangulación y Nivelación*, 3ª edición, Buenos Aires, 1945.
- „ III, „ 2: *Taquimetría y Confección de Planos*, 3ª edición, Buenos Aires, 1945.

- Morfología Argentina*, Buenos Aires, 1934.
- Planímetros Coradi*, 2ª edición, Buenos Aires, 1937.
- Telómetros Zeiss*, Buenos Aires, 1941.
- Triangulación de Orden Menor*, Buenos Aires, 1942.

Libretas de campo:

- Nivelación común (5ª edición),
- „ de precisión (3ª edición),
- Taquimetría común (6ª edición),
- Poligonales Taquimétricas.

Libreta topográfica.

Formularios de cálculo (2ª edición):

- Coordenadas planas,
- Superficies (fórmulas del trapecio),
- „ („ de Gauss),
- Problema de la Carta con punto de Collins.

(1) Usase en el texto la abreviatura "Tol. Agr.", cuando se cita esta obra.
 (2) " " " " " " " " " " " "
 (3) " " " " " " " " " " " " " " " "

Queda hecho por el autor el depósito que marca la ley N° 11.723.



Prefacio del autor para la tercera edición

Nuevamente tengo la satisfacción de poder revisar y corregir la redacción del primer tomo de mi Topografía, el que, en su conjunto, no difiere esencialmente de la segunda edición del mismo. Un solo tema —por cierto no el menos importante— tuvo que ser ampliado. Con el objeto de facilitar la comprensión de la aplicación de las coordenadas Gauss-Krüger, traté en págs. 102 - 137, en forma más extensa, el TEMA CARTOGRÁFICO, incluyendo en la nueva exposición la proyección Mercátor, como primera etapa, y la proyección Lambert, como segunda etapa de un desarrollo que condujo en su etapa final a las coordenadas Gauss-Krüger.

Un auto-análisis de las inclinaciones que me animaban en la redacción de esta nueva edición, me reveló un marcado interés —quizás un síntoma de la mayor edad— por presentar algunos característicos datos biográficos de los grandes sabios de fama mundial, los que con sus geniales creaciones citadas en el texto del tomo, fundamentan mi modesta obra; y por algunos datos personales de aquellos catedráticos de la materia y hombres de ciencia especializados que con su fecunda labor didáctica y por su influencia personal me estimularon poderosamente, dándome con ello la fuerza y la perseverancia para el perfeccionamiento de mi trabajo.

De esta disposición de ánimo nació en mí el plan de preparar un "INDICE DE NOMBRES" particular, rememorando en el mismo mediante muy someros datos biográficos las grandes figuras del pasado, y rindiendo al mismo tiempo un modesto homenaje a las fuerzas vivas del presente, sin cuya colaboración mi obra no podría existir en su forma actual. La favorable acogida que encontró mi trabajo en nuestro país y en el exterior, es, por consiguiente, el fruto de una acción común que nos honra a todos y a cada uno.

Indiqué en ese Índice con alguna extensión los múltiples trabajos realizados por el Ing. Carlos de Chapeaurouge, porque creo que recordar a los destacados hombres del pasado y la jus-

ticiera valoración de su silenciosa obra libre de brillo exterior, contribuye a ennoblecer y enaltecer los esfuerzos de los que actúan en el presente.

Hay más: La Obra de Chapeaurouge es un hermoso ejemplo que nos muestra con toda claridad el alto valor cultural que emana de la labor del agrimensor, cuyo campo de operaciones es el suelo patrio, el patrimonio más sagrado de una nación. Con fundar y delinear colonias, pueblos y ciudades en las más diversas zonas de nuestro país, con construir el primer plano catastral de la República, el Ing. Chapeaurouge no sólo ha contribuido al progreso económico, sino actuó con ello principalmente en el desarrollo del magnífico "árbol genealógico" de la propiedad raíz, erigiéndose en un verdadero "pioneer" de la cultura argentina.

Agradezco a los señores José Romano y Mario Di Marco por su desinteresada colaboración en la confección de dibujos.

Buenos Aires, 22 de septiembre de 1942

R. MULLER.



Prefacio del autor para la cuarta edición

La cuarta edición del presente Tomo no se diferencia en su parte principal de la tercera.

Con la INTRODUCCION (compuesta de dos párrafos) antepuesta por primera vez a la obra, pude satisfacer un deseo que tuve ya al planear mi trabajo: Crear con ella un adecuado sitio para todos aquellos importantes conceptos y nociones relacionados con la figura de la Tierra y la determinación de sus dimensiones, los que, por ser de orden geodésico, no son por eso menos fundamentales también para las operaciones topográficas, cartográficas y catastrales; lo cual constituye el tema del primer párrafo de esa Introducción.

El segundo párrafo me brindó la anhelada oportunidad de consignar algunos datos de la historia geodésico topográfica argentina, con destacar importantes obras de iniciación, conjuntamente con los nombres de sus iniciadores o ejecutores, que merecen ser sacados del olvido. Porque no hay duda, y cabe subrayarlo para hacer justicia, que los progresos y adelantos que actualmente se registran en nuestra materia no son sino perfeccionamientos y continuaciones de los trabajos realizados por aquellos precusores en condiciones mucho menos favorables que las que rigen en la actualidad.

Con gran satisfacción puedo dejar constancia aquí de que se nota en nuestro país marcado progreso y más profunda comprensión de otra necesidad, a la que dediqué mi preocupación durante largos años: Me convencí desde temprano que no basta ofrecer al alumno un libro de texto que le facilite el estudio de la topografía; que era menester crear también el elemento auxiliar de enlace entre los conocimientos teóricos adquiridos y su aplicación práctica en el terreno, mediante adecuados FORMULARIOS y cómodos REGISTROS DE CAMPO. La UNIFICACION de estos elementos auxiliares no depende sólo del que los confecciona, sino de una colaboración eficaz de todos, de los profesores de la materia y principalmente de los ingenieros directores de las grandes reparticiones técnicas, nacionales, provinciales y municipales.

¿Y no son las ventajas de los formularios y registros de campo unificados demasiados evidentes para no sacudir toda indiferencia al respecto? Se ha de lograr que las diversas reparticiones técnicas no sigan manteniendo en uso para las diversas actividades topográficas registros de campo diferentes en tamaño, en las designaciones y nomenclaturas técnicas; lo cual produce el inconveniente de que cuando un joven ingeniero ingresa a una repartición técnica, o cuando pasa de una a otra repartición, se encuentra frente a costumbres y prácticas nuevas, a las cuales se ve obligado a sujetarse sin comprender completamente el por qué. Todo esto redundará en pérdida de trabajo efectivo.

De lograr esa UNIFICACION en forma completa significaría un verdadero progreso de la técnica topográfica argentina, que "redundaría en beneficio de la economía del trabajo y del tiempo al traducirse en una elevación del rendimiento de la labor del profesional". (*) Estas palabras, recientemente escritas sobre el tema, me hacen recordar un elogioso juicio que recibí hace muchos años de un ingeniero director de una de las grandes reparticiones técnicas nuestras, el que se expresó así: "Desde que nosotros usamos sus libretas de nivelación y taquimetría sustentadas en el texto de su Compendio, hemos notado un notable aumento y mejoramiento del trabajo de campo"; palabras que me han servido y me sirven de estímulo para un paulatino perfeccionamiento de mis libretas.

Cabe ser mencionado aquí el hecho de que acaba de aparecer otro importante elemento auxiliar de mi obra, una nueva TABLA DE LOGARITMOS DE 5 DECIMALES, una tabla tal cual yo la había soñado y anhelado desde mucho tiempo. Era siempre mi deseo de contribuir, aunque fuera sólo mediante mis consejos, al mejoramiento de ese elemento auxiliar, colocándolo a la altura de los textos de matemáticas usados en nuestro país en la enseñanza secundaria y universitaria; confeccionando al mismo tiempo una Tabla moderna, libre de bagaje inútil, para la eficiente práctica de cálculo, de campo y gabinete.

Abrigo la esperanza que mi obra logre conquistar siempre nuevos amigos, contribuyendo así a la formación armónica de una conciencia topográfica argentina.

Buenos Aires, agosto de 1946.

R. MÜLLER.

(*) Ver pág. 288 de "La Ingeniería", abril de 1946.



TOMO I.

Indice de Materias

Introducción a la obra

§.1. Figura y dimensiones de la Tierra. Contribución de la Argentina a la obra geodésica internacional.

La Tierra es una esfera.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Etapas de evolución | 1 | 5. Importante caso particular | 2 |
| 2. Esfericidad de la Tierra | 1 | 6. Concepto de la altura del polo | 2 |
| 3. Característica de los filósofos griegos: Inventan métodos, pero no se preocupan mayormente por la precisión de su aplicación | 1 | 7. Eratóstenes | 2 |
| 4. Dos clases de operaciones que intervienen en la determinación de las dimensiones de la Tierra | 2 | 8. Posidonio | 3 |
| | | 9. Snellius. Método de triangulación de Snellius | 4 |
| | | 10. Picard. Primera medición de arco francesa | 5 |

La Tierra es un elipsoide de revolución.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 11. Richer | 6 | 16. Parámetros y magnitudes características del elipsoide de revolución | 8 |
| 12. Cómo la Geodesia colaboró con la Física en el descubrimiento de la ley de Newton | 6 | 17. Necesidad de una compensación | 8 |
| 13. Continuación de los trabajos de Picard | 7 | 18. Compensación de Bessel. Elipsoide que lleva su nombre. Conclusiones de Bessel. Unión Geodésica y Geofísica Internacional | 9 |
| 14. Mediciones de arco del Perú y de Laponia | 7 | 19. Elipsoide de Clarke | 9 |
| 15. Segunda gran medición de arco francesa | 7 | 20. Característica de una verdadera medición de contralor | 10 |

La Tierra es un geoide.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 21. Cálculo del achatamiento de la Tierra por Helmert. Geoide | 10 | 23. Elipsoide de referencia internacional. Recomendaciones de la "Unión" | 12 |
| 22. Desviaciones de la plomada | 11 | | |

Colaboración de la Argentina en la obra geodésica internacional.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 24. Adopción del elipsoide de referencia de Hayford por el Instituto Geográfico Militar argentino | 13 | 27. Félix Aguilar y la Ley del Arco Meridiano a que dió origen | 14 |
| 25. Punto astronómico fundamental de la República Argentina | 13 | 28. Desarrollo del gran arco | 15 |
| 26. Ausencia de modernas mediciones de arco en el Hemisferio Sur | 13 | 29. Operaciones geodésicas | 15 |
| | | 30. Operaciones astronómicas | 16 |
| | | 31. Resumen de la labor realizada por la Comisión hasta fines de 1945 | 16 |

§ 2. Sobre origen de las operaciones de agrimensura, catastro, topografía, cartografía y geodesia en la Argentina.

| | |
|------------------------------------|---------|
| Agrimensura y Catastro | Pág. 16 |
| Topografía y Cartografía | „ 17 |
| Geodesia | „ 19 |

AGRIMENSURA Y CATASTRO.

§ 1. Definiciones y conceptos fundamentales.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Objeto de la Topografía y Geodesia consideradas en conjunto | 1 | por separado | 1 |
| 2. Amplitud de las tareas de Geodesia y Topografía | 1 | 4. Dos grandes grupos de mediciones: Mediciones horizontales y mediciones verticales | 2 |
| 3. Objeto de la Geodesia, Geografía, Topografía y Agrimensura consideradas | | 5. Conceptos fundamentales de Geodesia y Topografía | 2 |

§ 2. Unidades de medida lineal y de superficie.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Definición | 4 | 7. Creación del Prototipo Internacional del Metro | 6 |
| 2. Unidades naturales antiguas de medida lineal | 4 | 8. La República Argentina y el Sistema Métrico Decimal | 7 |
| 3. Unidades naturales de medida itineraria | 4 | 9. Relación entre la longitud del metro y la longitud de la onda de luz | 7 |
| 4. Unidades naturales de medida de superficie | 4 | 10. Múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida métrica y sus abreviaturas | 7 |
| 5. Creación de la unidad natural de medida lineal internacional. El "Metro de los archivos de Francia" | 4 | 11. Transformación, de unidades antiguas, como también de inglesas y norteamericanas en medidas métricas | 8 |
| 6. Defectos e inconvenientes de la medida elegida | 6 | | |

§ 3. Unidades de medida angular.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Definiciones | 9 | 8. Perspectiva de generalización del sistema centesimal | 11 |
| 2. Dos principales unidades de medida angular. Exigencia básica | 9 | 9. El radián o medida analítica del ángulo | 12 |
| 3. Giro positivo y giro negativo; su definición para las matemáticas puras y para Astronomía, Geodesia y Topografía | 9 | 10. Unidad grande y unidad pequeña; constantes de transformación, sus designaciones | 12 |
| 4. Ángulo de giro completo, de semigiro (ángulo llano) y ángulo recto | 10 | 11. El miliradián | 13 |
| 5. División sexagesimal; sus símbolos | 10 | 12. Tabla de conversión de las medidas angulares | 13 |
| 6. División centesimal; sus símbolos. Fórmulas de transformación | 10 | 13. El milésimo | 13 |
| 7. División horaria; sus símbolos. Su transformación en división sexagesimal | 11 | 14. El triángulo angosto; teorema | 13 |
| | | 15. Valores a recordar | 15 |
| | | 16. Ejercicios y problemas prácticos | 15 |

§ 4. Escalas.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Necesidad de las escalas | 17 | 6. Escalas gráficas; su construcción y uso | 19 |
| 2. Elección y uso | 17 | 7. Inseguridad gráfica; tolerancia; su influencia en las distintas escalas | 20 |
| 3. Reglas prácticas y ejemplos | 18 | 8. Clasificación de las escalas según categorías | 21 |
| 4. Determinación de la escala omitida en un plano | 18 | 9. Cartas geográficas y planos topográficos; su diferente misión | 21 |
| 5. El "one inch map" como ejemplo de un plano a escala de medida antigua | 18 | | |

§ 5. Señalización y marcación de los puntos topográficos y catastrales.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Definición | 22 | 7. Puntos topográficos marcados de propósito | 23 |
| 2. Superficie de proyección. Convergencia de la plomada | 22 | 8. El jalón | 24 |
| 3. Punto topográfico; definición | 22 | 9. Instrumentos para verificar la verticalidad de un jalón; plomada y nivel esférico | 24 |
| 4. Línea topográfica; alineación, línea recta en el terreno | 23 | 10. Precisión de la vertical señalada | 24 |
| 5. Superficie topográfica | 23 | | |
| 6. Puntos topográficos naturales | 23 | | |

§ 6. Trazar una recta en el terreno sin usar instrumento, o jalonar una línea.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Definición | 25 | 5. Los puntos extremos son inaccesibles o separados por una loma | 26 |
| 2. La línea a jalonar es visible desde uno de sus puntos extremos | 25 | 6. Los dos puntos están separados por un valle | 27 |
| 3. Precisión de una alineación | 26 | | |
| 4. Alineación por prolongación | 26 | | |

§ 7. Medición lineal directa y los principales instrumentos en uso.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|---|------|
| 1. Clasificación de las mediciones lineales en directas e indirectas | 27 | 12. Distancia inclinada y distancia reducida al horizonte; ángulo de pendiente | 33 |
| 2. Cintas de acero de agrimensur; su descripción | 28 | 13. Medición en pendiente. Tabla de reducción | 33 |
| 3. Normas generales para trabajos de campo | 29 | 14. Inclínómetro | 34 |
| 4. Significado y alcance de la normalización y unificación de los formularios y registros de campo | 29 | 15. Medición en pendiente por resaltos horizontales | 35 |
| 5. Ejecución práctica de la medición con la cinta de acero | 29 | 16. Límite inferior para el ángulo de pendiente y reducción gráfica de distancias a distintas escalas | 36 |
| 6. Ejemplo práctico en correspondiente registro de campo | 31 | 17. Necesidad de los contrastes de medidas lineales | 36 |
| 7. Ruleta de acero | 31 | 18. Autoridad que ejerce los contrastes y sellado de cintas y otorga el correspondiente certificado | 37 |
| 8. Ruleta de tela | 31 | 19. Ventaja de la temperatura de referencia de 20° C | 38 |
| 9. Precauciones a tomar para alcanzar más precisión en la medición con cinta de acero | 31 | 20. Comparador de cintas de acero | 38 |
| 10. Ejemplo práctico de medición de base topográfica | 32 | 21. Mediciones lineales expeditivas; a pasos, con podómetro y troqueómetro | 39 |
| 11. Cintas y alambres de invar | 32 | | |

§ 8. Tolerancias y errores de la medición lineal.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Necesidad de las tolerancias lineales | 41 | 3. Necesidad de distinguir diferentes clases de terreno. Las tolerancias afectadas | |
| 2. Definición de las tolerancias | 41 | | |

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| tan los intereses económicos | 42 | 12. Valores para el error accidental máximo para las distintas clases de terreno, fácil, mediano y difícil y mediciones urbanas y rurales | 46 |
| 4. Carácter empírico de las tolerancias | 42 | 13. El error sistemático básico basado en disposiciones oficiales sobre tolerancias de contrastes | 47 |
| 5. El conocimiento de las leyes de errores proporciona criterio técnico. Trabajo racional | 42 | 14. Valores del error sistemático máximo para las distintas clases de terreno, urbano y rural | 47 |
| 6. Clases de errores de la medición lineal. Ley de Gauss | 42 | 15. Fórmulas de tolerancias lineales | 48 |
| 7. Leyes de errores | 44 | 16. Suplementos a las fórmulas de tolerancias lineales | 48 |
| 8. Acción de conjunto de los errores sistemáticos y accidentales | 44 | 17. Tabla gráfica y ejemplos de aplicación | 49 |
| 9. El error medio accidental en buenas condiciones del terreno | 45 | | |
| 10. Gradación de los valores básicos para las tres clases de terreno | 45 | | |
| 11. Concepto del error accidental máximo | 46 | | |

§ 9. Escuadra a pínulas y pantómetro.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Formas más primitivas de la escuadra de agrimensor | 49 | tancia general | 52 |
| 2. Distintas formas de escuadras a pínulas | 50 | 6. Trazado de un ángulo recto con escuadra falsa | 52 |
| 3. Aplicaciones elementales de la escuadra a pínulas | 51 | 7. Precisión de la perpendicular; longitud máxima de la ordenada | 53 |
| 4. Verificaciones y precisión de la escuadra | 51 | 8. Pantómetro; su descripción, su precisión y restricción de su empleo | 53 |
| 5. Principio de la inversión; su importancia | 51 | 9. Perpendiculares cortas | 54 |

§ 10. Escuadras ópticas y el sextante.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| <i>Escuadras de reflexión.</i> | | | |
| 1. Principio en que se funda la escuadra de reflexión | 54 | 9. Error de índice del sextante | 61 |
| 2. Escuadra de espejo de agrimensor | 55 | 10. Verificación y corrección del sextante | 61 |
| 3. Cruz de espejos | 56 | 11. Error de excentricidad | 62 |
| 4. Aplicación de la escuadra de espejos; su corrección | 56 | <i>Escuadras de prisma.</i> | |
| <i>Sextante de reflexión.</i> | | | |
| 5. Características y ventajas de las mediciones que se ejecutan con el sextante | 57 | 12. Ley en que se funda la escuadra de prisma | 62 |
| 6. Descripción del sextante | 58 | 13. Reflexión total | 63 |
| 7. Sextante de bolsillo | 59 | 14. Prisma de Bauernfeind; el rayo fijo y el rayo móvil | 64 |
| 8. Teoría del sextante | 60 | 15. Reglas de aplicación práctica | 65 |
| | | 16. Pentaprisma simple y pentaprisma doble | 66 |
| | | 17. Resumen sobre los distintos tipos de escuadra | 67 |

§ 11. Métodos de levantamiento de planos.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Definición | 68 | 6. Segundo método: método de coordenadas rectangulares; reglas de anotación | 72 |
| 2. Extensión del levantamiento de planos de parcelas | 69 | 7. Tercer método: método de coordenadas polares | 75 |
| 3. Reconocimiento previo; croquis previo | 69 | 8. Características de los 3 primeros métodos de levantamiento | 76 |
| 4. Normas sobre la confección de croquis originales; lo que debe contener el croquis original; escalas; orientación | 70 | 9. Cuarto método: método de alineaciones | 76 |
| 5. Primer método: método constructivo | 71 | | |

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 10. Quinto método: método poligonal .. | 76 | 12. Signos convencionales para los croquis originales .. | 79 |
| 11. Ventajas e inconvenientes de los tres primeros métodos en uso .. | 78 | | |

§ 12. Problemas de obstáculos.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Los llamados problemas de obstáculos; moderno criterio al respecto .. | 80 | 4. Determinación de varios puntos de una alineación sobre la cual existe un obstáculo .. | 81 |
| 2. Trazado de un trozo de recta paralela para salvar un obstáculo .. | 80 | 5. Trazado del ángulo de 45° como recurso para salvar obstáculos .. | 81 |
| 3. Determinación de varios puntos de una ordenada sobre la cual existe un obstáculo .. | 80 | 6. Trazado de una recta oblicua para salvar obstáculos .. | 82 |

§ 13. Instrumentos de dibujo; su uso para el dibujo de planos. Coordinatógrafos polares. Signos convencionales.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Importancia del plano .. | 83 | 7. Trazado de un rumbo verdadero .. | 87 |
| 2. Reglas sin graduar (reglas T), reglas graduadas (dobledecímetros, etc.), compases, tiralíneas, escalas, escuadras .. | 83 | 8. Rumbos magnéticos .. | 88 |
| 3. Transportador común; su precisión .. | 83 | 9. Ventaja que ofrece el trazado de rumbos en lugar de ángulos poligonales .. | 88 |
| 4. Transportador de precisión .. | 86 | 10. Ventajas del trazado de varios rumbos desde un solo punto .. | 89 |
| 5. Trazado de un ángulo con transportador de precisión .. | 87 | 11. Coordinatógrafo polar .. | 90 |
| 6. Trazado de rumbos con transportador común .. | 87 | 12. Signos convencionales .. | 90 |

§ 14. Reticulado de coordenadas planas. Coordinatógrafos rectangulares.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Definiciones. Sistemas de coordenadas planas .. | 91 | 5. Tamaño de las mallas del reticulado .. | 93 |
| 2. Coordenadas geográficas; definiciones. Su transformación en coordenadas planas .. | 91 | 6. Trazado de un reticulado de coordenadas planas .. | 93 |
| 3. Necesidad de la limitación de un sistema de coordenadas planas .. | 92 | 7. Coordinatógrafo grande .. | 95 |
| 4. Necesidad del reticulado de coordenadas planas .. | 92 | 8. Ubicación de un punto dado por sus coordenadas planas sin usar coordinatógrafo .. | 95 |
| | | 9. Coordinatógrafo rectangular para detalles .. | 97 |

§ 15. Deformación del papel. Chapas de aluminio. Formatos.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Deformación del papel de dibujo; su efecto lineal .. | 98 | 3. Chapas de aluminio como base para el papel de dibujo de los planos catastrales y planos topográficos .. | 100 |
| 2. Efecto de la deformación del papel en la determinación gráfica de superficies .. | 99 | 4. Formato para papeles de dibujo e imprenta .. | 100 |

§ 16. Proyección ortogonal. Generalidades sobre las proyecciones, su doble objetivo. Globo terráqueo.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Finalidad ulterior de los trabajos de levantamiento. Cartas y planos .. | 102 | 3. Concepos cartográficos. Deformaciones .. | 104 |
| 2. Proyección ortogonal para reducidas superficies terrestres; sus límites .. | 102 | 4. Doble objetivo de una proyección. Proyección conforme .. | 105 |
| | | 5. Clasificación de las proyecciones .. | 106 |

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 6. Proyección de puntos básicos para fines geodésicos y cartográficos | 107 | 7. Globo terráqueo; su importancia como elemento de enseñanza superior | 108 |

§ 17. Proyecciones cilíndricas conformes de la esfera terrestre, de Mercátor y Lambert.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Dos reformas en las proyecciones de redes cartográficas | 109 | 4. Fórmula fundamental de Mercátor | 111 |
| 2. Carta plana de Marinus | 109 | 5. Teoría de la proyección Mercátor | 113 |
| 3. Principio de la proyección cilíndrica conforme expresado por Mercátor en 1569 en la leyenda de su carta del mundo | 110 | 6. Aplicación de la proyección Mercátor | 117 |
| | | 7. Proyección Lambert cilíndrica conforme | 117 |
| | | 8. Aplicación de la proyección Lambert cilíndrica transversal conforme | 121 |

§ 18. COODENADAS GAUSS-KRÜGER; sus aplicaciones prácticas en la República Argentina.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Observaciones de orientación previa | 122 | plancheta a 1: 25 000. Indicador de coordenadas | 128 |
| 2. Coordenadas de cuadrícula o coordenadas Gauss-Krüger; su adopción para la República Argentina | 123 | 7. Ventajas de la cuadrícula Gauss-Krüger. Definiciones | 131 |
| 3. Nota histórica sobre el sistema de proyección Gauss-Krüger | 126 | 8. "Salto de cuadrícula" | 133 |
| 4. Nota histórica sobre la adopción del sistema de proyección Gauss-Krüger para la República Argentina | 127 | 9. Designación y numeración de las hojas de la carta oficial según la reglamentación anterior del Instituto Geográfico Militar Argentino | 135 |
| 5. Colocación de la red de cuadrícula en una plancheta a 1: 25 000 en el supuesto de estar provista de red geográfica | 127 | 10. Designación y numeración de las hojas de la carta oficial de diversas escalas según el Reglamento RRM 28 del Instituto Geográfico Militar Argentino | 137 |
| 6. Medición de las coordenadas Gauss-Krüger de un punto situado en una | | | |

§ 19. Copia, reducción y ampliación de planos.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| <i>Copia o reproducción a igual escala.</i> | | | |
| 1. Calcado por medio de papel transparente | 138 | húmedos y ventajas de los procedimientos secos | 140 |
| 2. Calcado en papel tela | 138 | 9. Reproducción con papel "Ozolid" | 140 |
| 3. Calcado al trasluz | 138 | <i>Reproducción a escala distinta.</i> | |
| 4. Copia heliográfica | 138 | 10. Reticulado para reducción o ampliación de planos | 141 |
| 5. Copia con papel ferropusiató | 139 | 11. Compás de reducción | 141 |
| 6. Reproducción con papel sepia | 139 | 12. Tipos de pantógrafos | 143 |
| 7. Reproducción con papel al galato de hierro | 140 | 13. Pantógrafo de precisión; su descripción, teoría y uso | 143 |
| 8. Inconveniente de los procedimientos | | 14. Procedimiento fotográfico | 145 |

§ 20. Cálculo de superficies por fórmulas.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| 1. Superficie del triángulo, rectángulo, trapecio y cuadrilátero irregular | 146 | 5. Ejemplo de aplicación | 151 |
| 2. Cálculo de superficie de parcelas cuyos vértices están dados por medio de coordenadas planas | 147 | 6. Comparación de las fórmulas del trapecio con las de Gauss | 153 |
| 3. Fórmulas generales del trapecio | 148 | 7. Observaciones sobre la ejecución del cálculo | 153 |
| 4. Fórmulas de Gauss | 150 | 8. Precisión del cálculo de superficies | 154 |

§ 21. Determinación mecánica de superficies con planímetro.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|--|------|
| <i>Planímetro polar:</i> | | | |
| 1. Inventor del planímetro polar y principales propulsores de los progresos constructivos del mismo | 155 | 12. Medición relativa con polo externo | 164 |
| 2. Descripción del planímetro polar de Amsler | 156 | 13. Aplicación del planímetro para la determinación relativa de superficies de planos técnicos y catastrales | 165 |
| 3. Algunas indicaciones previas sobre las condiciones de uso y el manejo del planímetro | 156 | 14. Errores instrumentales del planímetro polar | 169 |
| 4. Movimiento de traslación del tambor; tres casos fundamentales | 157 | 15. Verificación y corrección del planímetro polar | 169 |
| 5. Teoría del planímetro polar | 157 | 16. Precisión del planímetro polar | 171 |
| 6. Caso general | 160 | <i>Planímetro a disco y rodillos.</i> | |
| 7. Polo interno | 161 | 17. Directriz del planímetro | 172 |
| 8. Constantes N, k y K | 162 | 18. Descripción del planímetro a disco y rodillos | 172 |
| 9. Cálculo de las constantes k y K | 162 | 19. Teoría del planímetro a disco y rodillos | 174 |
| 10. Determinación de la constante C ² | 163 | 20. Caso general | 177 |
| 11. La Tabla en el estuche | 163 | 21. Observación final | 177 |

§ 22. Cálculo de superficies por el procedimiento gráfico puro.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|--|------|
| 1. Característica del procedimiento | 177 | 4. Criterio sobre la precisión de la determinación gráfica | 178 |
| 2. Influencia de la deformación del papel | 178 | | |
| 3. Superficie S _t del terreno | 178 | | |

§ 23. Cálculo de superficies por el procedimiento semi-gráfico.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|---|------|
| 1. Característica del procedimiento | 179 | 3. Sobre el equilibrio de los efectos de dos distintos tipos de errores | 181 |
| 2. Criterio sobre la aplicación del procedimiento; casos típicos | 179 | | |

§ 24. Comparación de los tres procedimientos 182

§ 25. Tolerancias superficiales.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|---|------|---|------|
| 1. Criterios que se siguen en la compensación de los resultados del doble cálculo de superficies | 182 | 3. Criterio sobre la precisión de la determinación gráfica | 184 |
| 2. Papel preponderante del error lineal en la fijación de las tolerancias superficiales | 183 | 4. Distintos tipos de fórmulas en uso. Fórmulas que rigen en distintos países. Cuadros comparativos | 189 |
| 3. Tolerancias para las máximas diferencias admisibles; suplementos a las fórmulas; tablas numéricas; tabla gráfica | | | |

§ 26. División de parcelas.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|---|------|
| 1. Importancia y antigüedad del problema | 193 | 5. Doble superficie de un cuadrilátero en que se conocen dos lados opuestos y los cuatro ángulos | 196 |
| 2. Enunciado del problema. Distintas condiciones que se plantean | 193 | 6. División de un cuadrilátero por medio de una recta que corte sobre los dos opuestos segmentos proporcionales | 197 |
| 3. Tres problemas típicos sobre el triángulo | 193 | 7. División de parcelas por ensayos en base a un plano exacto | 204 |
| 4. División paralela del cuadrilátero con un ejemplo numérico | 195 | | |

Pág.

§ 27. Rectificación de límites.. 205

§ 28. Planos topográficos y planos catastrales.... 211

§ 29. Los seis principios fundamentales de la organización de un catastro moderno.

| Nº | Pág. | Nº | Pág. |
|--|------|---|------|
| 1. Los seis principios fundamentales de un catastro moderno | 211 | 3. Inconveniente de un catastro no fundado en puntos fijos | 212 |
| 2. Fundamento de un catastro moderno | 212 | 4. Ventajas de un catastro moderno .. | 213 |

§ 30. Variación del objetivo de los planos catastrales en distintas épocas .. 213

Indices alfabéticos.

| | |
|---|-----------|
| <i>Indice alfabético de Agrimensura y Catastro</i> | 214 |
| ” ” <i>de Nombres</i> | 217 - 223 |

Apéndices.

| | |
|---|--------------|
| <i>Apéndice I: Tolerancias lineales</i> | Págs. 1 - 14 |
| ” <i>II: Coordenadas Gauss-Krüger</i> | ” 1 - 22 |
| ” <i>III: Signos convencionales argentinos</i> | ” 1 - 11 |

Introducción a la cuarta edición de la obra.

§ 1.

Figura y dimensiones de la Tierra. Contribución de la Argentina en la obra geodésica internacional.

1. Etapas de evolución.

El concepto que el hombre se ha venido formando de la figura de la Tierra, desde los primeros tiempos de la humanidad hasta nuestros días, estuvo siempre de acuerdo con los conocimientos sobre la Naturaleza que el hombre poseía en cada época. Un aumento de esos conocimientos tuvo siempre por efecto un perfeccionamiento del concepto de la figura de la Tierra.

Estos perfeccionamientos se produjeron por etapas sucesivas. Pero solamente la historia de los hechos es capaz de hacernos comprender las largas y terribles luchas que cada vez costó el triunfo de una teoría mejor.

La Tierra es una esfera.

2. Esfericidad de la Tierra.

Un gigantesco paso adelante sobre el concepto primitivo fué dado por el filósofo griego Eudoxio (408 - 355 a.J.C.), el que notó en sus viajes entre Grecia y Egipto que las alturas de las estrellas cambiaban cuando él cambiaba de posición en la dirección Norte-Sur.

A raíz de estas observaciones y muchas otras más, los filósofos griegos dedujeron que la figura de la Tierra no podía ser de forma plana como se había supuesto antes, debiendo ser de forma esférica.

Pero esta nueva concepción de la figura de la Tierra quedó reservada a los filósofos, mientras el pueblo vulgar, dominado por la impresión de la apariencia, seguía imaginándose que la Tierra era un enorme disco ovalado plano rodeado por el Océano.

Este criterio de la apariencia, ya que no se hallaba en oposición con la Biblia, hizo que poco a poco se perdiera el concepto de la esfericidad de la Tierra en las tinieblas de la Edad Media.

Recién cuando se tradujeron las obras de los filósofos griegos al árabe, primero, y luego al latín, empezó a revivir la idea de la esfericidad de la Tierra. Con el descubrimiento de América en 1492 y el viaje alrededor del mundo por Magallanes en 1520-1522, esa idea se confirmó de un modo definitivo y sin dejar más lugar a duda alguna.

3. Características de los filósofos griegos: Inventan métodos, pero no se preocupan mayormente por la precisión de la aplicación de los mismos.

Una vez aclarada por los filósofos griegos la cuestión de la forma esférica de la Tierra, el próximo paso a dar fué la **determinación** de las dimensiones de la misma.

Algunos autores griegos y árabes atribuyen a los caldeos los primeros ensayos de determinar la magnitud de la Tierra; pero nada nos informan sobre los procedimientos por ellos empleados.

Cabe destacar aquí que tanto entre los caldeos como entre los egipcios las ciencias eran exclusivo patrimonio de una casta, floreciendo aquéllas con ésta y declinando con ella.

Comprendemos entonces que en la antigua Grecia libre, en la que el culto de las ciencias, de las matemáticas, de la filosofía y las artes era uno de los más importantes elementos educativos de toda la nación, y donde nadie podía llamarse filósofo quien no cultivaba las matemáticas, que un pueblo así esclarecido y educado podía ofrecer un campo fértil y propicio para el desarrollo de las matemáticas.

Los filósofos griegos se interesaban por eso más por los métodos que por la aplicación práctica de los mismos y la precisión de los resultados.

Conocieron, por ejemplo, los matemáticos griegos las propiedades de las secciones cónicas (elipse, etc.), pero los instrumentos que usaban para las observaciones astronómicas eran muy rudimentarios y sin precisión. Tenían así aquellos lista toda la herramienta matemática dos mil años antes de que el astrónomo Kepler descubrió en 1618, con ayuda del antejo por él inventado, y en base a las excelentes observaciones de Tycho Brahe, su famosa ley que dice que las órbitas de los planetas son elipses.

4. Dos clases de operaciones que intervienen en la determinación de las dimensiones de la Tierra.

En el supuesto de que la Tierra es una esfera, bastaría, en rigor, la medición del arco de un grado de círculo máximo para obtener las dimensiones de esa esfera.

En toda medición de arco es necesario efectuar siempre dos clases de operaciones: una **operación geodésica**, que consiste en la medición de la distancia que separa dos puntos terrestres elegidos, y otra, **astronómica**, para obtener el **ángulo** (en el centro de la Tierra) correspondiente al segmento que une esos dos puntos.

5. Importante caso particular.

En caso de hallarse los dos puntos elegidos sobre un **mismo meridiano**, y si en ambos puntos se observa para un mismo astro la **distancia cenital** o la **altura sobre el horizonte**, en el momento del pasaje de ese astro por el meridiano del lugar, obtendremos con la diferencia de esos ángulos directamente la **diferencia de latitud o diferencia de alturas del polo**.

6. Concepto de la altura del polo.

Llámase **polo** al punto de intersección del eje de la Tierra con la bóveda celeste. Es alrededor de ese punto que giran las estrellas en su aparente movimiento diario. La **altura del polo sobre el horizonte del lugar** es entonces tanto mayor cuanto más alejado se halle el lugar del ecuador.

7. Eratóstenes.

El matemático griego Eratóstenes (276-195 a. J. C.), de la Escuela de Alejandría, fué el primer geómetra que determinó la magnitud de la Tierra.

Partió de la observación de que en la antigua localidad Syene (ver fig. 1), hoy Asuán, aproximadamente bajo el trópico de Cáncer, el 21 de Junio (periodo del solsticio, ver fig. 2), el Sol se reflejaba, a mediodía, en el mismo medio de

los pozos de agua, y que los objetos no proyectaban sombra a esa hora; mientras que en Alejandría, casi bajo el mismo meridiano que Syene, los objetos proyectaban sombra a esa hora.

Es decir, mientras el día 21 de Junio en Syene la dirección de la vertical coincidía con la del Sol en el cenit, en Alejandría, en cambio, el Sol se hallaba algo alejado del cenit, formando las dos direcciones entre si un ángulo que se trató de averiguar. Eratóstenes encontró para el mismo la 50 -ava parte de la circunferencia completa.

Para la distancia:

Syene - Alejandría

Eratóstenes tomó 5 000 estadios (un estadio = periferie de la palestra olímpica = 185 metros), resultando entonces para la circunferencia de la Tierra:

$$50 \times 5\,000 = 250\,000 \text{ estadios} = 46\,250\,000 \text{ metros}$$

y para el cuadrante:
= 11 562 000 metros,

o sea, una aproximación de sólo 15,62 %.

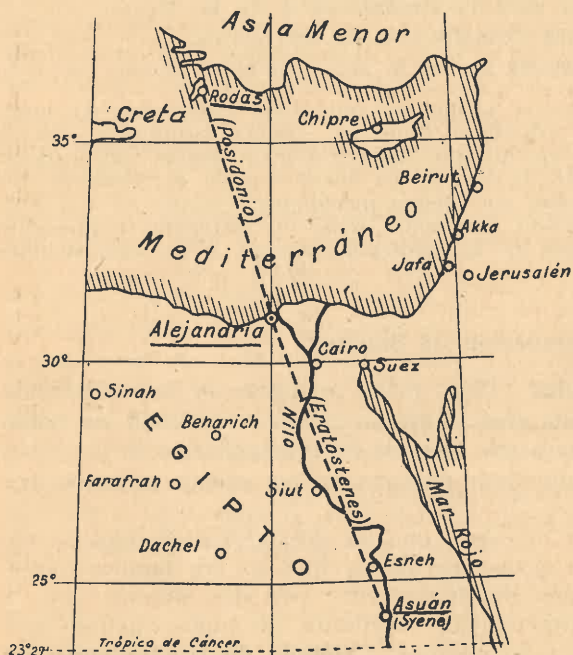


Fig. 1. Situación geográfica de las localidades en que Eratóstenes y Posidonio ejecutaron sus mediciones de las dimensiones de la Tierra.

Escala aprox. 1 : 20 000 000

8. Posidonio.

De un modo análogo procedió 50 años más tarde el matemático griego Posidonio (135 - 51 a. J. C.), valiéndose del arco:

Alejandría - Rodas (ver fig. 1).

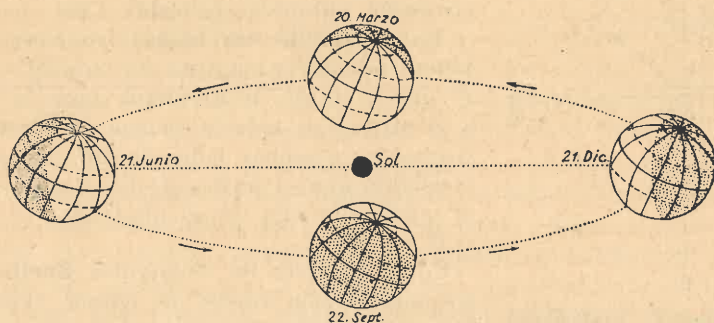


Fig. 2. Periodos de solsticio (21 de junio y 21 de septiembre) y equinoccio (22 de marzo y 22 de diciembre).

Pero, en lugar de medir en Alejandría la distancia cenital del Sol por medio de la sombra (como lo hizo Eratóstenes), Posidonio determinó la diferencia de altura de una misma estrella observada a la misma hora en ambos puntos.

Encontró para esa diferencia $1/48$ de la circunferencia completa. Con este valor del ángulo y la distancia Alejandría — Rodas, la que supuso también de 5 000 estadios, Posidonio obtuvo para la **circunferencia de la Tierra**:

$$48 \times 5\,000 = 240\,000 \text{ estadios} = 44\,400\,000 \text{ metros.}$$

Luego, para el cuadrante: 11 100 000 metros, o sea, una aproximación de 11%.

Quizás los dos filósofos griegos se proponían ante todo comprobar la practicabilidad de sus métodos, sin esforzarse tanto en obtener resultados exactos para las dimensiones de la Tierra, las que necesariamente tenían que carecer de precisión, porque no existían en esa época medios para verificar si los dos puntos se hallaban o no sobre un mismo meridiano.

Agréguese a eso la poca precisión que podía tener la distancia simplemente estimada y la reducida exactitud de la medición angular, y se comprenderá que en tales condiciones no se podía esperar resultados más exactos.

9. Snellius. Método de triangulación de Snellius.

Recién con **Willebrord Snellius** (1581 - 1626) comenzó un nuevo período de la medición de arco. Snellius creó al mismo tiempo el **método de triangulación**. Supo medir por primera vez ángulos de triángulo con la precisión de pocos minutos y efectuó también por primera vez un cálculo trigonométrico completo.

Snellius reconoció que no era necesario que los dos puntos elegidos se encontrasen exactamente sobre un mismo meridiano, que no era tampoco necesario medir directamente la línea de unión entre esos dos puntos, que la misma podía determinarse indirectamente mediante un nuevo método por él ideado, el que por ello lleva su nombre, "**método de triangulación de Snellius**". He aquí los diversos pasos operativos empleados:

Para medir la longitud del **arco de círculo máximo** entre los puntos **A** y **B** (fig. 3), es decir, entre las ciudades holandesas:

Alkmar y Bergen op Zoom,

Snellius midió (en 1615), aproximadamente en el punto medio de ese arco, una **base corta** de 327,85 metros, con reglas de madera y toda la precisión entonces realizable (1er. paso).

Luego **amplió esa base** trigonométricamente, obteniendo así la longitud del lado **OC** (2º paso), el que le sirvió de **arranque** para la medición y el cálculo de toda la cadena de 33 triángulos, dispuestos a ambos lados de **OC**. De éste modo consiguió que el último de los vértices situados al norte coincidía con el punto **A** y el más austral con **B**.

Como vértices de triángulos **Snellius** eligió con preferencia torres de iglesia, desde cuyas alturas la vista abarcaba todo el horizonte. En esos vértices midió todos los **ángulos de triángulo** (3er. paso). Midió también el **acimut** del lado **OC** (4º paso).

Con estos elementos calculó todos los **lados de triángulo** de la red (5º paso), así como las

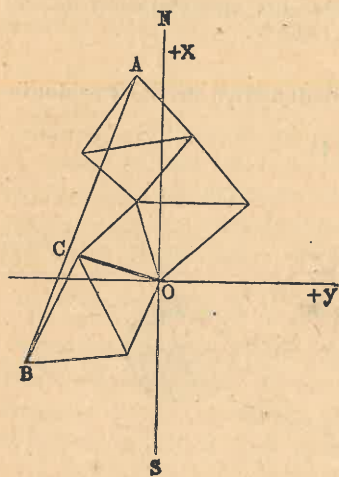


Fig. 3. Esquema explicativo del método de triangulación de Snellius.

AB, arco de círculo máximo,
OC, lado de arranque,
O, origen de coordenadas.

coordenadas, x , y , de todos los vértices (6º paso) y, en base a esas coordenadas el acimut del arco **BA** (7º paso) y, con ayuda de ese acimut, la longitud **BA** (8º paso), como último paso de las **operaciones geodésicas**, el cálculo del **arco meridiano** o sea de la diferencia entre los **círculos paralelos** de esos dos, puntos **A** y **B**, mediante el acimut (**BA**) y la distancia **BA** (9º paso).

El **ángulo en el centro** que correspondió a ese segmento de arco meridiano, **Snellius** lo obtuvo mediante observaciones astronómicas de **alturas del polo**, en los puntos **A** y **B**, midiendo para ello las alturas de varias estrellas (en lugar de una sola, como lo hizo **Posidonio**), de las que conoció las distancias angulares al polo.

De este modo **Snellius** determinó las alturas del polo en ambos puntos, cuya diferencia (igual a la diferencia de latitud de esos puntos), comparada con 360° , le indicó cuántas veces debía ser multiplicada la longitud del arco meridiano calculado para obtener la circunferencia de la Tierra.

10. **Picard. Primera medición de arco francesa.**

Por iniciativa de la **Academia Francesa** (fundada en 1637) fué ejecutada en 1669 y 1670, bajo la dirección del astrónomo Jean **Picard** (1620-1682) la **1ª medición francesa de arco** entre

París y Amiens.

Tratóse esta vez ya no solamente del problema científico de la medición de la Tierra, sino de crear el **fundamento geodésico para la carta de Francia**. Compare pág. 40 del presente Tomo.

Picard empleó el **método de Snellius perfeccionado**: Mientras Snellius había calculado triángulos planos, Picard tomó en cuenta la curvatura de la Tierra calculando triángulos esféricos. Mientras Snellius tuvo que emplear la **dioptra**, Picard pudo utilizar el **anteojo** (inventado por Kepler en 1610). Para la medición de los **ángulos horizontales** Picard empleó un **cuadrante**, dotado de dos anteojos, con retículo (introducido en 1642 por W. **Gascoigne**), uno fijo y otro móvil, siendo ésta la primera oportunidad en que fuera empleado el anteojo en gran escala. Para la medición de **ángulos verticales** Picard usó **sectores** de 10 pies de radio, que permitieron leer directamente los tercios de minuto. La base de 11 km fué medida con 4 **reglas de madera**. Agréguese a todo eso el invento de los **logaritmos de Briggs** (en 1614) con los cuales fueron construídas en 1628 las primeras tablas logarítmicas de los **números naturales**, y en 1633 las primeras tablas logarítmicas de las **funciones trigonométricas**, las que constituyen la base de las famosas tablas "**Thesaurus logarithmorum**", publicadas por Jorge **Vega** en 1794, con las cuales quedó notablemente simplificado el cálculo trigonométrico.

Así no es de extrañar que la medición de arco de Picard entre París y Amiens tuviera una precisión mayor que todas las anteriormente ejecutadas, la que fué todavía considerablemente aumentada por una rara casualidad de haberse en ella compensado un error de la medición astronómica con otro de la operación geodésica.

Esta medición de arco, por la precisión de sus resultados, tuvo una singular **importancia histórica**, porque contribuyó en forma decisiva a la com-

probación de la validez general de la ley de gravitación universal de Newton (ver N° 12).

La Tierra es un esferoide de revolución.

11. Richer.

En la segunda mitad del siglo 17, es decir, después de un "reinado" de casi dos mil años de la idea de que la Tierra era un esfera, surgieron dudas al respecto. Con el objeto de aclarar la cuestión la Academia francesa envió en 1672 al físico Richer a Guyana (Cayenne) con la misión de efectuar mediciones pendulares en esa zona ecuatorial. Richer observó que en Cayenne el péndulo de segundos, traído de París, atrasaba cada día dos minutos, y que por eso el mismo debía ser acortado en $2\frac{2}{3}$ mm para que vuelva a ser péndulo de segundo en la región.

Los dos físicos Huygens (1629 - 1695, ver retrato fig. 27, pág. 98, vol. I del Tomo II) y Newton (1643 - 1727, ver retrato fig. 7, pág. 51) argüían a raíz de esas observaciones pendulares, que la reducción de la gravedad en $1/289$, motivada por la fuerza centrífuga, no podía explicar a esas observaciones sino en parte, y que en la región del ecuador, la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el centro debía ser mayor que en las latitudes más altas y ser por eso menor la intensidad de la gravedad y por ello menor también la longitud del péndulo de segundos. Estas observaciones pendulares de Richer fueron consideradas una comprobación para la nueva concepción de la forma elipsoidal de la Tierra, a la que con anterioridad habían conducido observaciones astronómicas.

12. Cómo la Geodesia colaboró con la Física en el descubrimiento de la ley de Newton.

Ya a la edad de 23 años (1666) el gran sabio inglés Newton tenía la idea de que debía ser la misma fuerza que impide a la luna de seguir su trayectoria rectilínea, obligándola a recorrer su órbita alrededor de la Tierra, la que es la causa de la caída de los cuerpos en la superficie terrestre, cuyas leyes fueron descubiertas por Galilei (1564 - 1642).

Razonó Newton así:

Si esta misma fuerza actúa sobre la Luna igual que sobre la Tierra con una intensidad en razón inversa con el cuadrado de la distancia al centro de atracción, entonces esa fuerza regula todo el Universo, no sólo los movimientos de los planetas alrededor del Sol, sino las órbitas de todos los cuerpos celestes, de los más grandes como de los más pequeños.

Se sabía en la época de Newton que la distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente 60 radios terrestres. En base a este dato y el tiempo empleado por la Luna en su camino alrededor de la Tierra, Newton podía calcular la caída de la Luna hacia la Tierra en cada segundo, primero en partes del radio terrestre y luego, estando conocido éste en alguna otra unidad lineal (por ejemplo en toesas) también en esa unidad.

Cuando Newton efectuó por primera vez el cálculo, la longitud del radio de la Tierra no era conocida sino con bastante imprecisión, de modo que la desviación del valor calculado, comparado con el valor correspondiente a la ley de Galilei, era tan grande que Newton tuvo duda de la validez general de la ley de gravitación, y no se ocupó más de ella.

Recién 15 años más tarde (1681), cuando supo de una medición de arco francesa que, bajo la dirección de Picard, había dado para el radio de la

Tierra un valor más exacto, Newton reanudó sus cálculos, dándose cuenta bien pronto de que el nuevo resultado iba a confirmar la validez general de su ley. Se dice que Newton, al ver comprobada su ley mediante el cálculo de la caída de la Luna hacia la Tierra, experimentó una exaltación de júbilo tal que no podía continuar el cálculo, pidiendo a un amigo de terminarlo.

No hay duda de que éste fué el momento más feliz de la vida de Newton.

El día 28 de abril de 1686 Newton presentó su obra "Principia" a la "Royal Society of London" (fundada en 1660).

Era tan poderosa la luz que irradió este genio con su ley de gravitación universal, aplicando las de Kepler y cimentando muchas otras más del porvenir, que no creemos cometer una exageración con llamar al siglo 17, que vió nacer su obra, el "Siglo de Newton".

13. Continuación de los trabajos de Picard.

De la continuación de los trabajos de Picard, hacia el Norte de Amiens y hacia el Sur de París, por Lahire (1640-1718), Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) y su hijo Jacques Cassini (1676-1759) parecía resultar que la Tierra, en lugar de ser achatada en los polos, era alargada en la dirección Norte-Sur, y que se parecía más a la forma de limón que a la de naranja, como había resultado de las observaciones pendulares de Richer.

14. Mediciones de arco del Perú y de la Laponia.

La duda relativa a la forma de la Tierra dió motivo que el Gobierno de Francia hizo efectuar dos nuevas célebres mediciones de arco, la del Perú (1735-1741), bajo la dirección de Godin, La Condamine y Bouguer, y poco después (1736-1737) la de Laponia bajo la dirección de Maupertuis y Clairaut.

Empleóse en la primera la llamada "toesa del Perú", como patrón de medida lineal, y en la segunda la "toesa del Norte", ambas comparadas con la "toesa de París".

De estas dos mediciones resultó la comprobación inequívoca del achatamiento de la Tierra en los polos.

El buen éxito de estas dos expediciones pronto despertó un interés general para la ejecución de trabajos similares en muchas otras partes del mundo: En la India inglesa, en Sudáfrica, en Norteamérica y en casi todos los países de Europa se emprendieron nuevas mediciones de arco o se efectuaron trabajos complementarios de mediciones anteriores o de partes de ellas. De entre estas mediciones de arco que se repitieron por completo pero con instrumentos más perfectos, debe mencionarse ante todo la francesa, de la que a continuación daremos algunos detalles.

15. Segunda gran medición de arco francesa.

La medición de arco más importante de fines del siglo 18 y principios del 19 (1782-1808), es la que se ejecutó bajo la dirección de Delambre y Méchain (ver Índice de Nombres) con la colaboración de Borda (ver Índice de Nombres) y Laplace. Tuvo la finalidad especial de determinar exactamente la longitud de la unidad de medida lineal; unidad que fué denominada "metro" por Borda. Debía ser según definición la diez millonésima parte del cuadrante de la Tierra. Ver para más detalles pág. 7 (Agrimensura y Catastro).

Para la medición de base empleáronse **4 reglas metálicas** provistas de termómetro, cuya longitud fué determinada previamente por medio de la **toesa de París** (con sus subdivisiones de 6 pies, de 12 pulgadas, de 12 líneas de París), la que había sido proclamada **unidad de medida lineal francesa**. La medición de **ángulos** fué ejecutada por el **círculo de Borda**.

En esta medición de arco se determinó la longitud del arco:

Dunquerque - Barcelona.

Encontróse para el **cuadrante terrestre**:

$$\begin{aligned} & 5\,130\,740 \text{ toesas de París} \\ & = 5\,130\,740 \times 6 \times 12 \times 12 \text{ líneas de París.} \end{aligned}$$

Luego, **longitud del metro**:

$$\begin{aligned} \frac{5\,130\,740 \times 864}{10\,000\,000} &= 443,296 \text{ líneas de París,} \\ &= 1 \text{ metro,} \end{aligned}$$

de lo que resulta la **equivalencia**:

$$1 \text{ toesa de París} = 864 : 443,296 = 1,95 \text{ metros.}$$

16. Parámetros o magnitudes características del elipsoide de revolución.

Siendo indiscutible, a partir de mediados del siglo 18, el achatamiento de la Tierra, no se trató más desde entonces en las mediciones de arco, solamente de la longitud del cuadrante, sino de dos incógnitas, llamadas **parámetros**, del **semi-eje mayor**, a , y del **semi-eje menor**, b , así como de la razón $\frac{a-b}{a}$, o sea del **achatamiento del elipsoide**.

17. Necesidad de una compensación.

Cuando se empezó a comparar entre sí los resultados de las diversas mediciones de arco, se constataron discrepancias tales que no podían ser atribuidas exclusivamente a errores de observación. Se comenzó a dudar de que la Tierra fuera un elipsoide de revolución exacto.

Pero, no obstante esta duda, los geodestas consideraban necesaria una **compensación** de los diferentes resultados existentes, para así obtener valores más generales, los que con mayor probabilidad se acercasen a la verdad, determinando un elipsoide que, más se aproxime a la verdadera forma de la Tierra.

18. Compensación de Bessel; elipsoide que lleva su nombre. Conclusiones de Bessel.

En el año 1841, el astrónomo **Bessel** (fig. 4) sometió a un riguroso examen crítico los resultados de todas las mediciones de arco existentes en esa época con el objeto de compensarlos. Eligió para ello 10 mediciones de arco, a saber: la del Perú, la de la India inglesa, la francesa, la inglesa, la de Hanóver, la danesa, la de la Prusia Oriental, la rusa, la sueca y la de Laponia.

Con este trabajo de compensación de Bessel, las mediciones de arco llegaron a un primer estado de conclusión, en el sentido de que las llamadas **dimensiones de Bessel** han constituido durante mucho tiempo la base de grandes trabajos geodésicos.

Por ejemplo: Todos los trabajos iniciales de triangulación ejecutados en la República Argentina, a principios del presente siglo, fueron basados en el **elipsoide de Bessel**, cuyos parámetros son:

Semieje mayor:

$$a = 6\,377\,397 \text{ m}$$

Semieje menor:

$$b = 6\,356\,079 \text{ m}$$

Achatamiento:

$$\frac{a-b}{a} = 1 : 299,2$$

Las investigaciones de **Bessel** lo condujeron a las siguientes **conclusiones**:

a) Que el **metro**, en su calidad de "**medida natural**", no se halla definido en la Naturaleza de un modo inequívoco, porque los diferentes meridianos terrestres no tienen todos exactamente la misma longitud;

b) que la forma de la Tierra es sólo **aproximadamente un elipsoide de revolución**;

c) que la **verdadera forma de la Tierra** posee desviaciones con respecto a la forma regular;

d) que esas desviaciones sólo pueden ser averiguadas mediante investigaciones especiales ejecutadas de acuerdo a un **plan general** y en gran escala.

Unión Geodésica y Geofísica Internacional.

A raíz de estas indicaciones de **Bessel** fué fundada en 1866 por **Baeyer** la **Comisión de Arco Europea**, la que más tarde se transformó en **Asociación Geodésica y Geofísica Internacional**, actualmente **Unión Geodésica y Geofísica Internacional**. La llamaremos de ahora en adelante simplemente "**Unión**".

La finalidad de la "**Unión**" y de los trabajos que la misma hizo ejecutar era de carácter científico primitivamente. Pero su influencia práctica no tardó en hacerse sentir, principalmente en la **Geodesia**, por el establecimiento de las **tolerancias internacionales**, que debían regir en todas las operaciones fundamentales.

19. Elipsoide de Clarke.

En el año 1880, el astrónomo **A. Clarke** hizo conocer los parámetros de un nuevo elipsoide, que lleva su nombre, y que fué calculado con nuevas y más exactas mediciones de arco.

Los **parámetros** de este nuevo elipsoide son:

$$a = 6\,378\,249 \text{ m}$$

$$b = 6\,356\,515 \text{ m}$$

$$\frac{a-b}{a} = 1 : 293,5$$

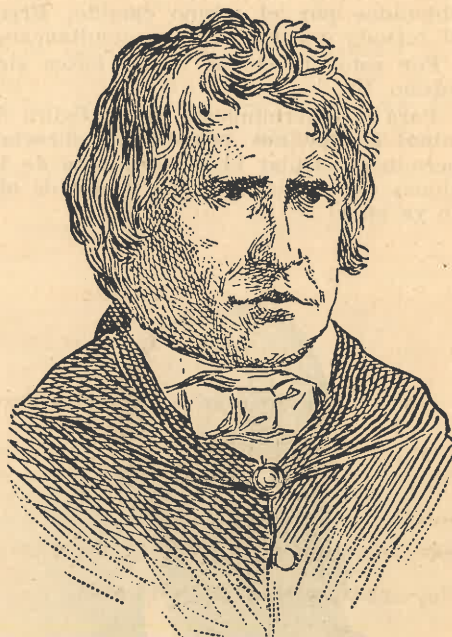


Fig. 4. Friedrich W. Bessel.
1784 - 1846.

Ver también: Índice de Nombres.

Es decir, según **Clarke** el semieje mayor es unos 800 metros más grande que el de **Bessel** y la superficie de la Tierra unos 112 000 km² más grande que la de **Bessel**. Pero según el juicio de **Helmert**, **Clarke** exageró la magnitud del achatamiento de la Tierra.

20. Característica de una verdadera medición de contralor.

Es de observar que el mejor acuerdo entre los resultados de las mediciones puede no ser todavía prueba suficiente para su exactitud si todos ellos fueron obtenidos por el mismo camino. Errores ocultos o desconocidos que afectan el método pueden influir simultáneamente sobre todos los resultados.

Por esto el arte de medir busca siempre nuevos caminos que conduzcan al mismo fin.

Para la determinación de la figura de la Tierra existe efectivamente otro camino, el que nos proporciona directamente los necesarios elementos que nos permiten calcular el achatamiento de la Tierra. —aunque no nos dé las dimensiones de la misma—, por medio de observaciones pendulares, según hemos visto ya en el N° 11.



Fig. 5. *Robert Helmert.*

1843 - 1917.

Ver también: Índice de Nombres.

La Tierra es un geoide.

21. Cálculo del achatamiento de la Tierra por **Helmert**. Geoide.

En el año 1881, el geodesta **Helmert** (fig. 5) publicó su clásica obra: “*Die mathematischen und physikalischen Theorien der Hoheren Geodaesie*” (en 2 tomos), cuyo segundo tomo contiene las investigaciones relativas al problema de la figura de la Tierra. Para la ventajosa solución de este problema **Helmert** preconiza la determinación de las desviaciones de la plomada del geoide con respecto a un elipsoide de referencia convenientemente elegido.

Después de un examen crítico del material de observaciones gravimétricas y del anterior modo de tratarlo, **Helmert** abarcó en una compensación de conjunto todo el material entonces existente, y obtuvo para el **aplanamiento de la Tierra** un valor que con sorprendente aproximación coincidió con el calculado por **Bessel** (ver pág. 9).

El abundante material de observaciones gravimétricas, el que se había duplicado en menos de diez

años, principalmente a raíz de las observaciones de **Hayford** (ver pág. 12) en los Estados Unidos de Norteamérica, indujo a **Helmert**, a principios del presente siglo, a efectuar un nuevo cálculo mediante un nuevo procedimiento de compensación simplificado. Empleó además en este cálculo una **nueva fórmula más exacta**, la que publicó en 1906.

De este modo Helmert obtuvo, como resultado de ese gran cálculo, para el **aplanamiento de la Tierra** el valor:

1 : 298,3 (año 1901)

Más tarde, en 1908, Helmert pudo demostrar, a raíz de las observaciones pendulares de **Heckert**, efectuadas en los mares, que si bien la **verdadera forma de la Tierra** no es un elipsoide de revolución exacto, se le acerca con mucha aproximación, siendo los valores de desviación del orden de sólo 100 metros, hacia arriba o hacia abajo.

Esa verdadera forma de la figura de la Tierra, para la cual **Listing** introdujo el término **geoide**, es entonces una forma irregular, la que no puede ser expresada por fórmula matemática alguna. Es una **superficie de nivel**, es decir, una superficie que en todas sus partes es perpendicular a la dirección de la gravedad (o dirección de la plomada), la que por eso coincide en grandes trozos de su extensión con la superficie media de los mares, a la que se imagina prolongada debajo de los Continentes, en forma de canales unidos entre sí y los mares.

22. Desviación de la plomada.

Es la "Unión" la que se encargó de la investigación relativa al geoide, como una de sus principales tareas.

He aquí una breve explicación de un importante concepto geodésico:

Si la posición geográfica de 2 puntos terrestres ha sido obtenida mediante observaciones astronómicas, de latitud y longitud, y si luego se determina, mediante operaciones geodésicas, la distancia entre esos dos puntos, y el acimut de la línea de unión entre ellos por medio de observaciones astronómicas, se puede calcular, con ayuda de estos elementos y en base a las coordenadas geográficas conocidas del punto de arranque (1er. punto), las coordenadas geográficas del segundo punto.

La pareja de valores (latitud y longitud) así calculados, comparada con la pareja de valores obtenidos directamente mediante observaciones astronómicas para el mismo punto, revela generalmente una desviación más o menos grande, según que el geoide se separe más o menos de la superficie del elipsoide adoptado. Esta desviación o diferencia se llama "desviación de la plomada".

La determinación de esta desviación en muchos puntos terrestres, nos proporciona evidentemente la posibilidad de juzgar si el geoide coincide o no con el adoptado elipsoide. Si no coincide, la desviación de la plomada nos da al mismo tiempo la inclinación del geoide contra el elipsoide. Esta inclinación entre ambas superficies nos permite calcular en qué magnitud la superficie del geoide se levanta o descende con respecto a la superficie del elipsoide, cuando nos trasladamos del primer al segundo punto.

Esta desviación de la plomada, para cualquier punto, puede llamarse también "desviación elipsoidal de la vertical", es decir, el ángulo formado entre la dirección de la vertical dada por las coordenadas verdaderas astronómicas y la dirección de la vertical dada por sus coordenadas geográficas transportadas por triangulación sobre el elipsoide, y el acimut del plano de desviación determinado por las direcciones de esas dos verticales. (*)

Mediante esas investigaciones relativas al geoide, las que consisten como acabamos de expresar, en una comparación cada vez más detallada de las 2 parejas de coordenadas geográficas de un lugar, de las obtenidas astronómicamente con las calculadas geodésicamente, se determinará al mismo tiempo la figura y dimensiones del elipsoide que mejor se adapta al geoide.

(*) *González Fernández, Manuel* (ver Índice de Nombres): "La Medición de la gravedad y la determinación del geoide", Vol. IV, págs. 117 - 150 del *Anuario del Instituto Geográfico Militar Argentino*, Años 1915 - 1918.

23. Elipsoide de referencia internacional. Recomendaciones de la "Unión".

En la Asamblea Constituyente de la "Unión" celebrada en Bruselas, en julio de 1919, el problema del elipsoide de referencia internacional fué tocado por primera vez y recomendado su estudio.

En consecuencia de esa recomendación, reiterada en la Primera Asamblea General de la "Unión", celebrada en 1922 en Roma, la Sección Geodesia de la "Unión" encargó a su Comité Ejecutivo fijar un elipsoide de referencia para todos los países de un Continente.

El Comité Ejecutivo efectuó un serio estudio de la cuestión y presentó el resultado del mismo a la Asamblea General celebrada en Madrid, en octubre de 1924.

Después de largas discusiones, las proposiciones fueron ratificadas por la Sección Geodesia, estando presentes unos 50 miembros representativos de 25 naciones: Casi por unanimidad quedó aprobada la proposición del elipsoide de referencia internacional, en lugar de un elipsoide continental.

En la misma forma se resolvió adoptar el valor de la excentricidad determinado por Haytor (fig. 6), según su obra "Supplementary investigation in 1909 of the Figure of the Earth". Por simple mayoría fué adoptado el valor del semieje mayor dado por Hayford en la citada obra.

En consecuencia fué adoptado el elipsoide de referencia internacional caracterizado por los siguientes parámetros:

Semieje mayor:

$$a = 6\,378\,388 \text{ m} \pm 1,8 \text{ m}$$

Achatamiento: $1 : 297 \pm 0,5$

Este elipsoide así definido es generalmente conocido por la denominación de: "elipsoide de Hayford", y los geodestas norteamericanos pueden estar orgullosos por el significativo honor que con ello fué discernido a uno de sus grandes hombres de ciencia.

Recomendaciones de la "Unión".

Se recomendó:

a) el uso del elipsoide de Hayford a todos los hombres de ciencia, cada vez que su obra involucre la figura y dimensiones de la Tierra;



Fig. 6. John Hayford.
1868 - 1925.

Ver también: Índice de Nombres.

b) a todos los Comités que en esa fecha aun no hubieran resuelto la adopción de algún otro elipsoide de referencia para sus trabajos de triangulación y levantamiento topográfico;

c) a aquellos Comités que deseaban sustituir el elipsoide de referencia anteriormente adoptado por otro más moderno y más exacto.

Colaboración de la Argentina en la obra geodésica internacional.

24. Adopción del elipsoide de referencia internacional por el Instituto Geográfico Militar argentino.

En consecuencia de la **recomendación c)**, de la "Unión", el Instituto Geográfico Militar adoptó por **Disposición Permanente 197** (24 de abril de 1924) para todo el territorio de la República, como superficie de referencia, el **elipsoide de Hayford**, cuyos parámetros se hallan indicados en el número anterior.

Por la misma disposición se adoptó la **proyección conforme de Gauss** y el **sistema de coordenadas Gauss-Krüger**, cuya aplicación práctica constituye una de las principales y más fundamentales tareas del presente Tomo.

25. Punto astronómico fundamental de la República Argentina.

Como **punto astronómico fundamental de la Argentina** (punto de tangencia entre el geoide y el elipsoide), en el cual coinciden las coordenadas astronómicas (latitud y longitud) con las coordenadas geodésicas, se ha elegido el **Observatorio Nacional de Córdoba** (pilar de triangulación).

La **longitud astronómica de Córdoba**, con respecto al **arranque mundial de Greenwich**, se basa en tres determinaciones de longitud, ejecutadas con anterioridad, a saber:

a) diferencia de longitud entre **Greenwich y Potsdam**, determinada en 1903;

b) diferencia de longitud entre **Potsdam y Buenos Aires**, determinada por Aguilar, Jansen y Biedma en los años 1927 y 1928;

c) diferencia de longitud entre **Buenos Aires y Córdoba**, determinada por el Instituto Geográfico Militar en 1927.

Las determinaciones de la **latitud** del punto fundamental, así como del **acimut de una línea de arranque** no ofrecieron dificultad alguna.

A este punto astronómico fundamental se refieren y deben referirse todos los trabajos de triangulación. Ver también pág. 91 del presente tomo.

26. Ausencia de modernas mediciones de arco en el Hemisferio Sur.

Los trabajos que condujeron al conocimiento de la figura y dimensiones de la Tierra pertenecen casi exclusivamente al Hemisferio Norte.

La colaboración de nuestro Hemisferio es hasta hace unos 10 años prácticamente nula, estando representada sólo por la **medición de arco del Perú**, ejecutada por los franceses, y por la ejecutada por los ingleses en

Sudáfrica. La medición del Perú tiene todavía el inconveniente de hallarse situada en terreno muy montañoso, poco apropiado para esa clase de operaciones.

27. Félix Aguilar y la Ley del Arco a que dió origen. (*)



Fig. 7. Félix Aguilar.
1884 - 1943

Ver también: Índice de nombres; sacada de la "Revista Astronómica", Tomo XV, Nº 5, año 1943, de una biografía sobre Aguilar escrita por Virgilio Manganiello.

Seguimos en la brevísima reseña que va a continuación el artículo del Ing. Félix Aguilar ya citado.

El día 6 de Septiembre de 1934, el Ing. Félix Aguilar (ver fig. 7) elevó a la Presidencia de la Universidad Nacional de La Plata su **Proyecto de Medición de Arco**, el que, con fecha 21 de diciembre de 1936 quedó convertido en **Ley de la Nación** bajo el número 12 334, de cuyos once artículos los principales son los siguientes:

Artículo 1º. Procédase a la medición de un arco de meridiano a lo largo de todo el territorio nacional destinada a satisfacer las necesidades prácticas de las obras públicas y de la investigación de la forma y dimensiones de la Tierra.

Artículo 2º. La dirección científica y administrativa de los trabajos está a cargo de una comisión autónoma dependiente del Ministerio de Justicia e Instrucción Pública, que será presidida por la persona o funcionario que designe el Poder Ejecutivo e integrada por sus vocales representantes del Instituto Geográfico

Militar, del Servicio Hidrográfico de la Marina, de la Universidad Nacional de Buenos Aires, de la Universidad Nacional de Córdoba y del Museo de La Plata. Los miembros de esta comisión ejercerán sus cargos **ad honorem**.

Artículo 3º. El Instituto Geográfico Militar, el Servicio Hidrográfico de la Marina y la Universidad Nacional de Buenos Aires y de La Plata, sin desatender sus tareas ordinarias, colaborarán en esta obra con todo su personal y el material disponible.

Artículo 4º. La comisión nombrada queda autorizada a solicitar directa-

(*) Aguilar, Félix: "La medición de un arco de meridiano en la República Argentina"; de la Revista "Servir", abril y mayo de 1934, Buenos Aires.

mente de las diversas reparticiones del Estado el concurso necesario para la mejor realización de la obra que le está encomendada.

Artículo 7º. El Poder Ejecutivo dispondrá la entrega anual de doscientos treinta mil pesos moneda nacional de curso legal (\$ 230 000 %) durante doce años a la comisión expresada en el artículo 2º., con destino a cubrir los gastos que demanda la adquisición de instrumentos y material, la conducción de los trabajos de campo y gabinete y la publicación de los resultados obtenidos por la misma.

28. Desarrollo del gran arco de meridiano.

El trabajo proyectado se desarrolla a lo largo de todo el territorio, desde el Norte siguiendo el meridiano 64° hasta el paralelo 40° , continuando por éste hacia el Oeste hasta el meridiano 70° , y luego por éste hacia el Sur hasta el límite del territorio argentino; logrando así un **desarrollo total de unos 4 400 kilómetros**. Ver cubretapa del Vol. 1 del Tomo III,

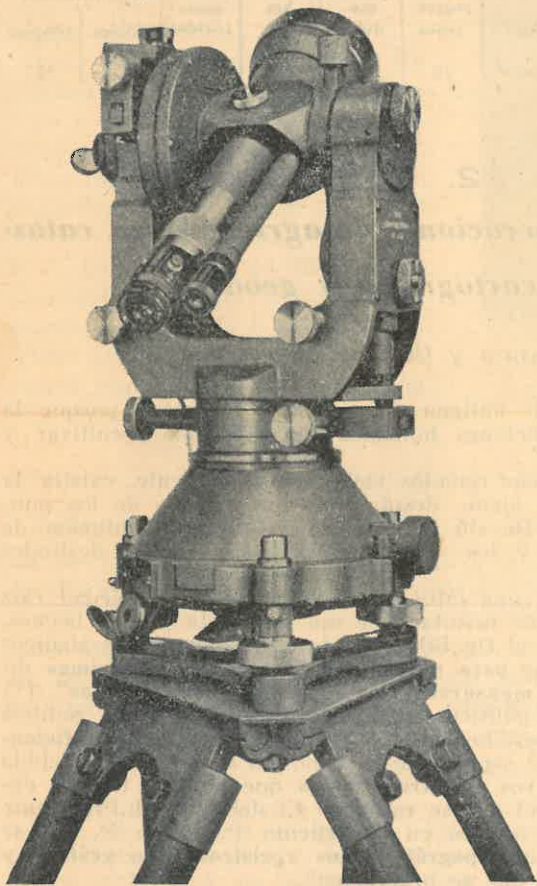


Fig. 8. TEODOLITO WILD T3 (Heerbrugg, Suiza) para triangulación de primer orden.
1/4 del tamaño natural.

29. Operaciones geodésicas.

Reconocimiento trigonométrico.

Se pide al reconocimiento trigonométrico la mejor forma de los triángulos compatible con las exigencias económicas.

Teodolito. Los progresos realizados en la construcción de teodolitos geodésicos, gracias a las ideas geniales del ingeniero suizo H. Wild, permitieron emplear en las mediciones un **nuevo modelo de teodolito de triangulación** (fig. 8), dotado de grandes cualidades ópticas, el que no sólo garantiza la **precisión** de los mejores modelos de construcción clásica, sino un trabajo mucho más cómodo y, por ende, un **rendimiento considerablemente mayor**.

Bases geodésicas. Cada 200 kilómetros de la cadena, aproximadamente, se medirá una **base**.

Nivelación de precisión. La nivelación se desarrolla a lo largo de todo el arco a medir, dando cota a los **puntos de Laplace** y todos los **vértices trigonométricos** que se presten.

Magnetismo terrestre. En todos los **puntos de Laplace** se determinarán las 3 componentes del campo magnético con el **teodolito magnético de viaje**.

En los vértices trigonométricos se determinará la **declinación magnética** con simples lecturas de **declinatoria**.

Gravedad. En todos los puntos de Laplace se determinará la **intensidad relativa de la gravedad**.

30. Operaciones astronómicas.

En uno de los extremos de cada base se efectuarán determinaciones astronómicas de **longitud, latitud y acimut (punto de Laplace)**.

31. Resumen de la labor realizada por la Comisión hasta fines de 1945.

La planilla que va a continuación nos indica, en breve síntesis, la labor realizada por la Comisión del Arco hasta fines del año 1945.

| Astronomía | | Triangulación | | | | Bases geodésicas | | | Nivelación de precisión | | |
|---------------------------------------|-----------------|----------------|-----------------|-------------------|-----------------|------------------|--------------|-----|----------------------------|----------------|---------|
| Puntos de Laplace proyec- tados | ejecu- tados | Reconocimiento | | Medic. 1er. orden | | proyec- tados | me- didas | km | Puntos cons- truidos | . Km nivelados | |
| | | Puntos | km ² | Puntos | km ² | | | | | dobles | simples |
| 20 | 3 | 267 | 191 000 | 129 | 69 000 | 20 | 8 | 127 | 1093 | 2160 | 577 |

§ 2.

Sobre el origen de las operaciones de agrimensura, catastro, topografía, cartografía y geodesia.

Agrimensura y Catastro.

La Agrimensura es quizás la más antigua de todas las ciencias, porque la misma se ejerció desde que agrupaciones humanas se dedicaron a cultivar y explotar el suelo de la Tierra.

En todos los tiempos, en esos más remotos como en el presente, existía la tendencia de apropiarse algo de lo ajeno, desplazando uno u otro de los puntos límites de una propiedad raíz. De ahí las falsas mensuras, la confusión de límites, la intervención de peritos y los interminables pleitos sobre deslindes en litigio.

Un cierto desorden inmobiliario y una falta de seguridad de la propiedad raíz fueron en muchas partes el inevitable resultado de esa tendencia y esos hechos, también en nuestro país. Caracterizó el Dr. Bibiloni esta situación con las siguientes palabras: "Es demasiado doloroso para nuestro patrimonio las gravísimas dificultades que emanan de las falsas mensuras y las superposiciones de ellas". (*)

Comprendemos que los sucesos políticos que agitaron nuestra vida pública durante las primeras décadas del pasado siglo, no dejaron disponibles suficientes energías para crear orden en ese aspecto de la vida con organizar en debida forma un catastro, con sus respectivos registros. No es que hubiera faltado entonces la clara visión de la necesidad de ese catastro: El decreto del Presidente Rivadavia de Junio 26 de 1826, ya ordenó en su artículo 1º, inciso 5º, que se debe "Llevar por el Departamento Topográfico dos registros, uno gráfico y otro escrito, de todas las mensuras que se practiquen".

Pero ese decreto no se aplicó entonces en la práctica con el mismo celo que tuvo el que lo inspiró, y no se logró por eso con el mismo en todas partes y siempre, el efecto deseado.

(*) Bibiloni, Juan Antonio: "Anteproyecto de Reforma al Código Civil Argentino", VII, pág. 117, Buenos Aires 1933.

Recién en 1890 apareció el “Plano Catastral de la República” por el Agrimensor Nacional Carlos de Chapeaurouge (ver fig. 9), el que representa una **exposición gráfica de la propiedad raíz** existente entonces en nuestro país, magna obra de paciente e ingrata labor que hizo época; porque respondía a una imprescindible necesidad a tal punto que, a penas aparecido, no hubo oficina nacional, provincial, municipal u otra entidad ligada directa o indirectamente con el movimiento de la propiedad raíz, que no tuviera un ejemplar de ese plano para consulta.

Vinculó así el ingeniero Chapeaurouge su nombre con toda la propiedad raíz argentina, señalando también el camino hacia nuevas e incalculables riquezas a conquistar mediante la colonización de las enormes extensiones de tierras entonces inexploradas.

Este **Plano Catastral de la República** que por su envergadura y trascendencia sólo puede ser comparado con la **Carta de la República**, es la obra principal de Chapeaurouge (ver **Indice de Nombres**), cuya realización tuvo para él el significado de un **ideal**, al que perseguía con una tenacidad, un espíritu de trabajo y sacrificio sin igual. De haberlo alcanzado constituye para Chapeaurouge su mayor triunfo científico.



Fig. 9. Carlos de Chapeaurouge.
1846 - 1922.

Ver también: **Indice de Nombres.**

Topografía y Cartografía.

Dejamos fundada en nuestra obra nuestra convicción de que la **topografía** no es sólo una **ciencia** sino también un **arte**, y que la **carta** no es sólo un producto del **espíritu** sino también del **alma**; y que, por consiguiente, la Carta no es simplemente una de las tantas obras públicas sino una **obra pública única**, la que es al mismo tiempo quizás la más grande **obra de cultura**, en cuya valoración no es el **costo** que interesa en primer lugar, sino su **calidad**, su **precisión** y su **eficaz y artística representación**, que son las cualidades que fundamentan la **fe y absoluta confianza** que el pueblo deposita en ella y por las que le otórga el **premio de una larga vida**.

La **ciencia topográfica** es la base y punto de partida de otra, cercana pariente de ella, de la **ciencia cartográfica**. Ambas deben estar siempre unidas en armónica e indisoluble unidad. Son ciencias en cuanto expresan la **verdad**, excluyendo la fantasía, y en cuanto se hallan cimentadas sobre principios científicos y teorías matemáticas. Son artes, en cambio, en lo que se refiere a su **estética** y **artística ejecución** y representación. Pero, si el arte, en una u otra, llegase a una indebida supremacía en detrimento de la verdad, sería esto un enorme perjuicio para la seriedad del trabajo realizado.

Ambas **ciencias - artes** tienen sus límites en sus aspiraciones; porque la finalidad de realizar una verdadera copia de la Naturaleza, en miniatura, con la

exigencia de evocar en quien mire la Carta la misma impresión de majestuosa grandeza que recibimos al contemplar la Naturaleza misma, esas aspiraciones y esa exigencia son tan elevadas que no pueden dejar de constituir un ideal, un ideal al cual, sin embargo, podremos acercarnos tanto más cuanto más perfectos sean los recursos técnicos que en ello nos asisten.

..“En los mapas está escrita la historia del mundo”, dijo el Dr. Vicente Gallo en su conferencia sobre “La Cartografía como expresión de la evolución cultural argentina”. Dice en otro párrafo:

“La suma de los esfuerzos que esa historia supone y de los conocimientos científicos y artísticos que la cartografía reclama para llenar con eficacia su cometido, es tan múltiple y compleja que se puede afirmar que cada uno de sus éxitos y cada uno de sus adelantos es un triunfo del espíritu humano iluminado por una alta cultura” (*).

Las primeras cartas topográficas que se hicieron en nuestro país, como en todas partes, obedecieron a las necesidades militares de facilitar la orientación en el terreno para el transporte de las tropas y pertrechos de guerra. Debían por ello esas cartas contener no sólo la situación de las localidades, las vías de comunicación entre ellas, caminos, carreteras, ríos con sus puentes, praderas y cultivos, montes y bosques, etc., o sea su **planimetría**, sino también las alturas de los característicos puntos de la región, es decir, las **formas del terreno**; pudiendo decirse que los grandes acontecimientos políticos que se desarrollaron en una zona, tuvieron siempre estrecha vinculación con la **orografía** e **hidrografía** de la misma, figurando así las formas del terreno entre los más importantes factores de la vida de los pueblos.

Se comprenderá entonces que la **primera oficina topográfica** que se fundara en nuestro país, tuviera carácter militar.

En efecto: El día 5 de diciembre de 1879 creóse por decreto firmado por **Avellaneda** y **C. Pellegrini**, la **Oficina Topográfica Militar**, cuyo primer jefe fué el Teniente Coronel **D. Manuel J. Olascoaga**. Es esa fecha la que se celebra por el **Instituto Geográfico Militar** para conmemorar anualmente el **origen de sus actividades topográficas**.

(Con el objeto de aclarar conceptos, debemos puntualizar aquí que el término “topográfica” usado en “Oficina Topográfica Militar”, es empleado con su sentido estricto, mientras que en la designación de “Departamento Topográfico” del decreto de Rivadavia, anteriormente mencionado, el término “topográfico” es tomado con su sentido lato, según el cual Topografía abarca Agrimensura, Catastro, Topografía (propriamente dicha) y Geodesia Inferior, en contraposición a la **Geodesia Superior** o, simplemente, **Geodesia**, la que trata de todos los trabajos geodésicos fundamentales y de sus respectivas teorías.)

Nos permitimos sugerir que, al celebrar el Instituto Geográfico Militar esa fecha, merecería ser recordado al mismo tiempo el nombre del Teniente Coronel **Manuel J. Olascoaga**, el que por su destacada actuación en el campo de la **topografía** práctica, así como por sus atingentes estudios (**), podría ser llamado “**el primer topógrafo militar argentino**”.

Entre las importantes obras cartográficas modernas que hicieron época, mencionamos las dos siguientes:

1) **Carta de la República Argentina** (dibujada con trazos de color sepia), escala 1:2 000 000, publicada en 1910 por el **Instituto Geográfico Argentino**, (hoy extinto);

2) **Mapa de Comunicaciones**, a escala 1:1 000 000, publicado en el año 1921 por el **Instituto Geográfico Militar**.

(*) “Gaea”, año 1936, pág. 160.

(**) *Estudio topográfico de La Pampa y Río Negro*, por el Teniente Coronel **Manuel J. Olascoaga**, Buenos Aires 1880.

Geodesia.

La **Geodesia** como ciencia independiente, tiene en nuestro país, su primera aplicación en la 3ª División del Gran Estado Mayor del Ejército.

En el plan de reorganización del Estado Mayor General, —tal fué la denominación anterior de aquél—, de fecha 23 de diciembre de 1904, esa 3ª División quedó identificada con el **Instituto Geográfico Militar**.

Fué éste un paso decisivo para la vida del Instituto, el que permitió una primera organización adecuada y un futuro floreciente desarrollo de tan importante nuevo organismo de Estado.

La **Geodesia** formó la primera de las cuatro secciones (Geodesia, Topografía, Cartografía y Talleres Gráficos) del Instituto.

Es verdad que también en la 4ª Sección de la anterior organización se habían efectuado trabajos geodésicos, pero no dentro de un plan orgánico sino tan sólo con el objeto de responder a apremiantes necesidades de urgentes levantamientos topográficos de importancia militar realizados en las fronteras, en las Provincias de Mendoza y Corrientes.

La escasez de recursos y elementos de trabajo, así como la heterogeneidad de las tareas que tuvo que atender esa 4ª Sección, entre las cuales figuraban la inspección y dirección de las construcciones militares, no podían formar un ambiente favorable para una adecuada organización de los trabajos de levantamiento que reclamaba el desarrollo de nuestro país.

Por falta de local apropiado, parte de los componentes de esa 4ª Sección y, más tarde, de la 3ª División (Instituto Geográfico Militar), funcionaban en una oficina instalada en el Parque de Palermo (*).

Actuó en esa oficina, a principios del siglo, el entonces Capitán D. Luis J. **Dellepiane** (ver fig. 10), el que al mismo tiempo siguió estudios de ingeniería en la Universidad Nacional de Buenos Aires, en la que se graduó de **ingeniero civil**. Pudo entonces Dellepiane compenetrarse de la imperiosa urgencia con que nuestro país reclamaba la **solución del problema geodésico**. Y no hubo por cierto en aquella época persona más apropiada y más capacitada que él para estudiar ese problema a fondo y buscar su mejor solución. Establecióse para ello, por Dellepiane el enlace con organizaciones análogas y autoridades eu-



Fig. 10. *Luis J. Dellepiane.*
1865 - 1941.

Ver también: Índice de Nombres.

(*) Es en esa Oficina de Palermo que el Autor se incorporó al personal del *Instituto Geográfico Militar*, a principio del año 1908.

ropeas, con el objeto de aprovechar experiencias ya adquiridas por países más adelantados, que luego fueron adaptadas a las necesidades nuestras.

Dice a este respecto el Coronel Ladislao M. **Fernández** en página 10 del Volumen IV del Anuario del Instituto Geográfico Militar Argentino (años 1915 - 1919): "*El Señor General Dellepiane, fundador de estos servicios, enviado en 1903 a estudiar la organización y funcionamiento de las instituciones análogas en Europa, presentó a su regreso una extensa memoria, en la que preconiza la ejecución inmediata de trabajos fundamentales de triangulación del país, como buena medida de gobierno, y como único medio de dar base científica a los diversos levantamientos que en él se realizan*".

En efecto: Durante ese viaje a Europa Dellepiane entró en contacto con los profesores **Helmert** (ver fig. 5, pág. 10) y **Guillaume** (ver Índice de Nombres) y otros, compenetrándose con ellos del problema geodésico tal como se presentó al principio del siglo.

Trajo Dellepiane a nuestro país los primeros **alambres de ínvar**, los números 1, 2, 3 y 4 para la medición de bases geodésicas; el aparato cuadripéndular **Stückarth**, para determinaciones gravimétricas y un instrumento de pasos **Bamberg**, para la determinación de longitudes geográficas; y algunos otros aparatos más, con los cuales se completaron los equipos instrumentales existentes para emprender los primeros trabajos geodésicos fundamentales.

El más importante paso que fué dado, después del regreso de Dellepiane, es, sin duda alguna, la **medición de la base de Campo de Mayo** de 3071 metros.

Porque es la medición de una base geodésica la que significó siempre y en todas partes el principio de operaciones geodésicas de gran envergadura.

Esa base fué medida en el año 1906, siendo entonces jefe de la Sección Geodesia D. Julio **Lederer**.

En el año 1907 se efectuaron por primera vez, determinaciones astronómicas en gran escala por el Dr. Guillermo **Schulz**. (*)

A fines del año 1909, se inició por el Ingeniero geógrafo D. Hugo **Mazetti**, la **triangulación de primer orden** de una cadena entre Zárate y Chascomús, la que se apoyó en la mencionada base de Campo de Mayo. Los cálculos de ambos trabajos fueron dirigidos por el Dr. J. **Mettler** (ver págs. 86 a 106, Volumen I del Anuario del Instituto Geográfico Militar).

A principios del año 1913, se comenzaron por el Autor, en la ciudad de Santa Fe, los primeros trabajos de **nivelación de alta precisión**.

Quedaron así iniciados los principales trabajos geodésicos fundamentales del Instituto Geográfico Militar Argentino.

(*) "*Las 14 latitudes determinadas en el año 1907/8 en el Litoral Argentino*". Ver Anuario del Instituto Geográfico Militar, Volumen 2, págs. 23 - 123, año 1913.

Agrimensura y Catastro

§ 1.

Definiciones y conceptos fundamentales.

1. Objeto de la Topografía y Geodesia consideradas en conjunto.

La topografía conjuntamente con la geodesia tienen por objeto:

- a) la ejecución de todas las mediciones que conducen a la determinación de la posición relativa de puntos terrestres;
- b) la ejecución de los cálculos a que dan lugar dichas mediciones, y
- c) el aprovechamiento de las mediciones y de los resultados del cálculo para la confección de planos y mapas, satisfaciéndose así necesidades políticas, económicas, técnicas, militares, científicas y culturales.

2. Amplitud de las tareas de Geodesia y Topografía.

Para poder establecer la posición relativa de los puntos levantados, es preciso hacer ciertas suposiciones sobre la forma de la superficie en que se opera (plano, esfera, elipsoide o geoide). Las mediciones sirven a veces para determinar tal superficie de operación (operaciones geodésicas), otras veces ellas pueden tener por finalidad ulterior la determinación del exacto relieve del suelo (operaciones topográficas).

En la ejecución de esta gran diversidad de trabajos, empléanse numerosos útiles, aparatos e instrumentos de toda clase, cuyo manejo y teorías deben ser estudiados.

Para relacionar convenientemente entre sí los puntos determinados y representarlos gráficamente, se los proyecta sobre una hoja de dibujo a escala reducida, que se llama **plano**.

3. Objeto de la Geodesia, Geografía, Topografía y Agrimensura consideradas por separado.

De este vastísimo campo de actividades técnicas, la **geodesia** se encarga de determinar la posición relativa de un cierto número de puntos, convenientemente distribuidos sobre la superficie terrestre, con el objeto de dar a las operaciones de detalle los necesarios puntos de apoyo y calcular, en base a ellos, las dimensiones de la Tierra. Estas operaciones geodésicas se ejecutan en extensas superficies, las que la **geografía** se encarga de describir a grandes rasgos, no descendiendo ni aquélla ni ésta al estudio de los detalles de medición, representación o descripción. La **topografía** apoya sus operaciones de detalle en los puntos geodésicos, suministrando planos

(de superficies generalmente de extensión reducida), con sus múltiples y variados accidentes: valles, montes, barrancas, pantanos, ríos, canales, ferrocarriles, pueblos, ciudades, minas, etc., es decir, con todos aquellos elementos que pueden ser explotados y que son de gran interés para el desarrollo de la riqueza pública y privada de una nación.

La **agrimensura** es aquella parte de la topografía que se encarga del amonajamiento de los terrenos y campos y de la determinación de la ubicación y dimensiones lineales, angulares y de superficie, todo ello de acuerdo a lo estipulado en los respectivos títulos de propiedad, ajustándose a las prescripciones legales, reglamentos técnicos y administrativos en vigor.

4. Dos grandes divisiones de mediciones: Mediciones horizontales y mediciones verticales.

Dividense las operaciones en dos grandes grupos: **mediciones horizontales** (planimetría) y **mediciones verticales** (altimetría). Sirven las primeras para la determinación de la posición relativa de las proyecciones de los puntos sobre el plano y del ulterior aprovechamiento de las mismas.

5. Conceptos fundamentales de Geodesia y Topografía.

Para aclarar los principales conceptos geodésicos y topográficos, valémonos de las figuras 1 y 2.

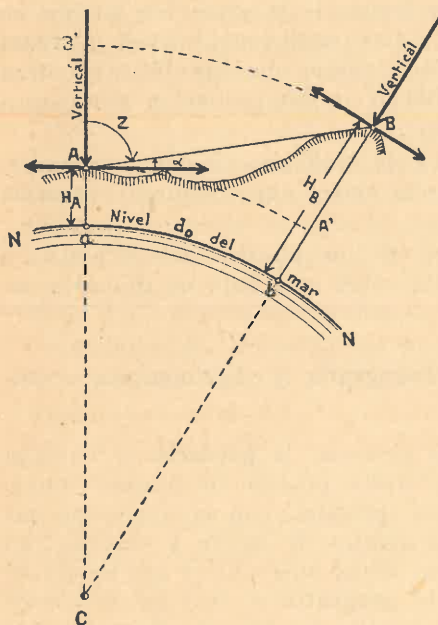


Fig. 1. Superficie esférica

$$d_0 < AA' < BB'.$$

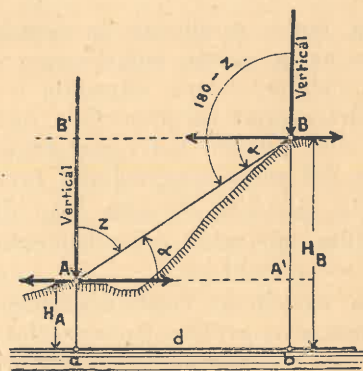


Fig. 2. Superficie plana

$$d = AA' = BB'.$$

Suponemos en fig. 1 que la Tierra es de superficie esférica.

Sean **A** y **B** dos puntos marcados en el terreno, **N-N** un trozo de esfera. Las verticales en los puntos **A** y **B**, que convergen hacia el centro **C** de la esfera, determinan el **plano vertical ACB**, como asimismo las **proyecciones**, **a** y **b**, de dichos puntos.

Entiéndese por **distancia horizontal AB** a la longitud $d_0 = ab$ sobre la esfera. La figura muestra que la longitud d_0 difiere de los arcos **AA'** y **BB'**:

$$d_0 < AA' < BB'.$$

Las **distancias verticales** H_A y H_B de los puntos **A** y **B**, que se cuentan desde el nivel del mar, **N - N**, son las **altitudes** o **alturas** de los puntos, la diferencia ($H_B - H_A$) se llama su **desnivel** o **diferencia de altura**. Las mediciones en los puntos **A** y **B** sólo nos proporcionan el desnivel de los dos puntos. Para determinar su altitud, es necesario relevar puntos a partir del mar, refiriéndolos a un **horizonte origen**, que es el del **nivel medio del mar**.

Además de la distancia y desnivel pueden ser objeto de mediciones en los puntos **A** y **B**, la determinación de las **distancias cenitales**, z , y **ángulos de altura**, α , es decir, los ángulos que la visual **AB** forma, respectivamente, con la dirección de la plomada y las horizontales en los puntos **A** y **B**.

Suponemos que la Tierra es una superficie plana.

Siendo la distancia **AB** relativamente pequeña, la proyección puede hacerse sobre un **plano horizontal** en lugar de una esfera (fig. 2). Las direcciones de la plomada, así como los planos horizontales correspondientes a los puntos **A** y **B**, se consideran entonces **paralelos**. En este supuesto, las alturas H_A y H_B no tienen influencia sobre la determinación de la distancia, d , la que es simplemente la que separa las verticales en los dos puntos considerados:

$$d = AA' = BB'.$$

Para las distancias cenitales y los ángulos de altura en los dos puntos extremos de la línea **AB**, tendremos la siguiente relación sencilla: Las distancias cenitales se complementan a 180° , siendo los ángulos de altura iguales en **A** y **B**, pero de signo contrario, es decir, el ángulo en **B** es de **depresión** cuando el ángulo en **A** es de **elevación**, y viceversa.

Si en el terreno, además de los puntos **A** y **B**, se halla dado otro punto, **C**, las proyecciones de estos tres puntos sobre la esfera forman un **triángulo esférico** y, sobre el plano, un **triángulo plano**.

A los elementos de medición anteriormente mencionados se agregan entonces estos otros: el ángulo que las proyecciones ab y ac forman en el punto **a**, llamado **ángulo horizontal**, que es el mismo ángulo que los dos planos verticales forman en el punto **A** del terreno.

Todos los problemas de topografía se reducen a la medición de **distancias horizontales**, **desniveles**, **ángulos horizontales** y **ángulos verticales**, mediciones para las cuales debemos estudiar primero las correspondientes **unidades de medida**.

§ 2.

*Unidades de medida lineal y de superficie.***1. Definición.**

Medir significa establecer la relación entre magnitudes homogéneas, es decir, hallar cuántas veces una de ellas llamada **unidad**, está contenida en la otra.

2. Unidades naturales antiguas de medida lineal.

En la elección de las unidades de la medida lineal los pueblos procedieron casi todos de igual manera: La figura del hombre proporcionó las dimensiones unitarias, porque todos de igual modo sintieron la necesidad de que las mismas fueran de fácil alcance para cualquiera que se proponía emplearlas. Hace más de 2000 años, los egipcios usaban ya la longitud del brazo, la **vara**, la longitud del **pie** (3 pies = 1 vara), el ancho del pulgar, la **pulgada** (12 pulgadas = 1 pie), el ancho de la mano, la longitud del paso. A estas unidades los griegos agregaron: la longitud de los brazos extendidos, la **toesa** (= 6 pies), la de las manos extendidas, el **palmo**.

3. Unidades naturales de medida itineraria.

Paso de hombre, paso de caballo, cuadra (= 150 varas), legua (= 40 cuardras), milla náutica o milla marina, o sea $1/60$ de un grado en el ecuador ($1/60$ de $\frac{10\ 000\ 856}{90}$ (*) = 1855 m).

4. Unidades naturales de medida de superficie.

Los cuadrados de estas medidas representan las correspondientes medidas de superficie: pie cuadrado, vara cuadrada, legua cuadrada.

5. Creación de la unidad natural de medida lineal internacional. El "Metro de los Archivos" de Francia.

Las medidas antiguas tenían un gran inconveniente: cada pueblo poseía las suyas, que generalmente diferían de las de sus vecinos (pie inglés, pie francés, pie castellano, etc.).

Cabe notar aquí que en la República Argentina las varas no eran medidas oficiales en todas las provincias, y que sus longitudes oscilaban entre 836 y 867 mm.

En el año 1836, se fijó en la ciudad de Buenos Aires la longitud de la vara en 866 mm, medida ésta que tiene relación con el ancho de la nave central de la Catedral. (**)

A medida que iba aumentando el intercambio comercial entre los pueblos, aumentaba también la necesidad de crear unidades de medida internacionales.

(*) Ver pág. 6.

(**) Ver nota en pág. 8.

También para la topografía y demás ciencias que emplean unidades de medida, la gran diversidad de éstas presentaba serias dificultades e inconvenientes. Francia, antes de la Revolución, estuvo en este sentido en pésimas condiciones, por cuanto allí reinaba entonces un verdadero caos babilónico, teniendo cada provincia y a veces cada ciudad de provincia su toesa propia y distinta de las demás. Es por esto que en Francia, por su situación política favorable, antes que en otros países europeos, se reconoció la necesidad y gran conveniencia de introducir unidades de medida comunes para todos los pueblos del mundo.

Al fin del siglo XVIII y principios de la Revolución Francesa, empezaron a surgir pedidos de reforma no sólo de los centros científicos sino también de las esferas del pueblo. Por intermedio del obispo **Tayllerand**, varias ciudades hicieron llegar, a principios del año 1790, a la **Asamblea Nacional** un informe sobre la necesidad de crear unidades de medida generales. La Asamblea Nacional propuso al Rey de Francia que invitara al de Inglaterra a adherirse a la reforma propuesta, esperando que con la cooperación de los ingleses el nuevo sistema encontraría mejor acogida en los distintos países. Pero desgraciadamente el terreno no estaba preparado entonces para la gran idea cosmopolita: Inglaterra declinó tal cooperación, y Francia, por lo tanto, tuvo que proceder por sí sola.

No sintiéndose la Asamblea Nacional lo suficientemente competente para resolver un asunto de tanta trascendencia, se lo encargó a la **Academia de Ciencias de París**, que debía pronunciarse sobre los dos siguientes puntos importantes:

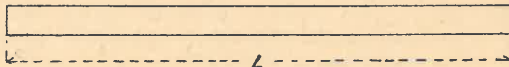
- 1° la escala numérica,
- 2° la unidad de medida a elegir.

Respecto al primer punto era fácil decidirse en favor del sistema decimal, por ser la base del sistema numérico. Referente al segundo punto, la Asamblea Nacional resolvió, en la sesión del 30 de marzo de 1791, la adopción de la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre como unidad de medida lineal. Los matemáticos **Delambre** y **Méchain** fueron encargados de su determinación por medio de la medición de un arco de 10 grados, desde Dunkerque (Norte de Francia), hasta Monjouy, cerca de Barcelona.

Empleóse en esta medición como unidad de medida la **toesa del Perú** (= 6 pies = 6.12 pulgadas = 6.12.12 = 864 líneas de París = 1,949 metros).

Resultó de esta medición la magnitud de **443,296 líneas de París** como la diez millonésima parte del cuadrante, longitud que se adoptó como nueva unidad, la que recibió, a propuesta del matemático francés **Borda**, la denominación de "**metro**". Confeccionóse, con el objeto de materializar la nueva unidad, por el físico **Fortin** una regla de platino de sección rectangular (25 mm de ancho por 4 mm de espesor), en forma de medida entre extremos o patrón sin trazos ("**étalon á bouts**", fig. 1).

Fig. 1. "**Étalon á bouts**" (patrón entre extremos).



Por ley del 10 de diciembre de 1799, esta barra fué declarada “*mètre vrai et définitif*” (metro verdadero y definitivo) y depositada en los Archivos de Francia.

6. Defectos e inconvenientes de la unidad elegida.

El Metro de los Archivos tenía serios defectos: la estructura del metal no era uniforme, la sección mal elegida y demasiado débil. Además, el Metro de los Archivos pertenecía, como dijimos, al llamado tipo “patrón entre extremos”, el que no resultó aconsejable. Se adoptó por esa razón un nuevo tipo, llamado “*étalon á traits*” o patrón con trazos (fig. 2). Por

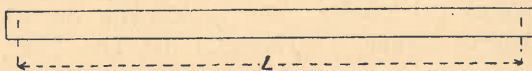


Fig. 2. “*Étalon á traits*” (patrón con trazos).

otra parte, la longitud del Metro de los Archivos resultó no ser suficientemente exacta: El cuadrante de la Tierra, según los cálculos publicados en 1843 por Bessel resultó ser de 10 000 856 metros y según mediciones más modernas (Hayford, año 1909) de 10 002 286 (*) metros, es decir, que resultaría ahora el Metro de los Archivos $\frac{1}{5}$ mm demasiado corto; cantidad relativamente grande que iría cambiando todavía cada vez que un nuevo procedimiento diera una precisión superior a la que el anterior era capaz de dar.

Con toda razón no se llevó a cabo la idea que se habría podido considerar, de corregir la unidad de medida de acuerdo a las nuevas determinaciones del cuadrante, porque con tal procedimiento se habría llegado a una nueva anarquía, aunque en límites más estrechos, la que precisamente se había querido evitar con la introducción del Metro.

7. Creación del Prototipo Internacional del Metro.

La Convención Internacional del Metro de 1875, a la que se adhirieron los principales estados del mundo (entre ellos la República Argentina), creó la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, instalada en Breteuil (cerca de París), encargada de los trabajos de metrología. Se le encomendó la confección de 30 copias del Metro de los Archivos, en una aleación de 90% de platino y 10% de iridio, pero no en forma de patrón de medida entre extremos (como el original), sino como patrón con trazos, eligiéndose para la sección de la regla la representada en fig. 3.



Fig. 3. Sección del Metro Prototipo Internacional, tamaño natural.

Las copias fueron comparadas entre sí y con el Metro de los Archivos.

El 26 de septiembre de 1889, la 1ª Conferencia General adoptó como **Metro Prototipo Internacional**

(*) Semi-eje del elipsoide, $a = 6\,378\,388$ m; semi-eje $b = 6\,356\,909$ m; circunferencia de la elipse meridiana = $40\,009\,144$ m.

a aquella de las 30 copias que mayor concordancia acusaba con el Metro de los Archivos, resultando así el mencionado día la fecha en que se creó la nueva unidad de medida, el llamado **Metro Prototipo Internacional**.

Las otras copias fueron destinadas para **prototipos nacionales** a repartirse entre los Estados adheridos a la Convención.

8. La República Argentina y el Sistema Métrico Decimal.

El sistema métrico decimal adoptado en la República Argentina por Ley 845, de fecha 11 de julio de 1877, está en uso obligatorio en todos los contratos públicos y privados desde el 1° de enero de 1878, en virtud del Decreto Réglamentario de julio 13 de 1877, decreto que fué reemplazado por otro de fecha enero 30 de 1925.

9. Relación entre la longitud del metro y la longitud de la onda de luz.

La circunstancia de que gran número de copias del Prototipo Internacional se hallan repartidas en distintas partes del mundo, ofrece una cierta garantía para la conservación de la unidad internacional. Es de observar, sin embargo que, debido a la aleación originaria común de todas las copias prototipos nacionales, serían posibles alteraciones simultáneas de todas ellas, las que no se revelarían claramente por las comparaciones entre sí ni con el Prototipo Internacional. Es por esta razón que se buscó y se procuró relacionar nuevamente el Metro con una magnitud que existe inalterable en la naturaleza. Tales magnitudes, en el estado actual de la ciencia, se nos presentan en las longitudes de la onda de algunas rayas del espectro, especialmente de la raya roja del cadmio, bajo una determinada presión, temperatura y humedad del aire.

La relación de longitud entre el Metro y la longitud λ de dicha onda está expresada por la siguiente ecuación:

$$1 \text{ metro} = 1\,553\,164,13 \times \lambda$$

a 760 mm de presión barométrica, 15° C y aire seco. (*)

10. Múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida métrica y sus abreviaturas.

Para facilitar la adopción general del nuevo sistema, eligiéronse para la designación de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida métrica, términos de los idiomas neutrales griego y latín, con las correspondientes **abreviaturas** (que no llevan punto de abreviación), según las normas **ISA** (**):

$$\begin{aligned} 1000 \text{ metros} &= 1 \text{ kilómetro (1 km);} \\ 0,1 \text{ m} &= 1 \text{ decímetro (1 dm);} \\ 0,01 \text{ m} &= 1 \text{ centímetro (1 cm);} \\ 0,001 \text{ m} &= 1 \text{ milímetro (1 mm).} \end{aligned}$$

(*) Ver Benoit, Fabry et Perot: Nouvelle détermination du Mètre en longueurs d'ondes lumineuses. C. R. Acad. Sciences, vol. 144, París, 1907.

(**) **ISA** = *International Standardising Association*, la que agrupa actualmente los Comités de *Normas Nacionales* de los siguientes países: Alemania, Austria, Bélgica, Checoslovaquia, Dinamarca, España, Estados Unidos, Finlandia, Francia, Holanda, Inglaterra, Italia, Japón, Noruega, Polonia, Rumania, Rusia, Suecia y Suiza.

Para mediciones de gran precisión se introdujeron todavía otras 2 unidades: la milésima parte del milímetro, llamada **micrón** o **mu** (μ); $0,000\ 001\ m = 1\ \mu$ y la milésima parte del micrón: $1\ m\mu$ (leer: "milimu") = $10^{-9}\ m$.

Las **unidades de medida agrarias** nacen de las lineales formando el cuadrado de éstas:

$$1\ \text{metro cuadrado} = 1\ m^2 = 1\ \text{centiárea (1 ca),}$$

$$1\ \text{área} = (10\ m)^2 = 100\ m^2 = 1\ a,$$

$$1\ \text{hectárea} = (100\ m)^2 = 10\ 000\ m^2 = 1\ ha.$$

11. Transformación de medidas antiguas, como también de inglesas y norteamericanas, en medidas métricas.

Medidas lineales:

$$1\ \text{vara} = 0,866\ m, \quad (*)$$

$$1\ \text{cuadra} = 150\ \text{varas} = 129,90\ m,$$

$$1\ \text{legua} = 40\ \text{cuadras} = 5196\ m,$$

$$1\ \text{yarda} = 3\ \text{pies ingleses} = 36\ \text{pulgadas} = 0,914\ m,$$

$$1\ \text{milla inglesa} = 1760\ \text{yardas} = 1609,33\ m.$$

Medidas de superficie:

$$1\ \text{vara cuadrada} = 0,75\ m^2,$$

$$1\ \text{legua cuadrada} = (5196\ m)^2 = 26\ 988\ 416\ m^2 = 2698,8\ ha \sim 27\ km^2$$

$$1\ \text{acre inglés} = 4046,8\ m^2,$$

$$1\ \text{milla inglesa cuadrada} = 2,5899\ km^2.$$

(*) *Distintos tipos de varas que se usaron en la República Argentina. Capital Federal y Territorios Nacionales: 0,866 m; Provincia de Buenos Aires: 0,866 m, vara oficial; Santa Fe: 0,866 m, vara nacional, 0,862 m, vara rosarina, 0,848 m, vara de Bustinza, 0,836 m, vara castellana; Entre Ríos: 0,866 m, vara oficial; Corrientes: 0,866 m, vara oficial; Córdoba: 0,867 m, vara oficial; San Luis: 0,855 m; La Rioja: 0,866 m, vara oficial, 0,8422 m, vara antigua; Catamarca: 0,866 m, vara oficial; Santiago del Estero: 0,866 m, vara oficial, 0,8673 m, vara antigua; Tucumán: 0,866 m, vara actual, 0,862 m, vara antigua; Salta: 0,866 m, vara actual; Jujuy: 0,866 m, vara actual; San Juan: 0,866 m, vara oficial; Mendoza: 0,866 m, vara oficial.*

§ 3.

Unidades de medida angular.**1. Definiciones.**

Medir un ángulo significa establecer cuántas veces cabe en él otro ángulo que se ha elegido como unidad de medida.

Medir un arco de circunferencia es establecer cuántas veces cabe en él otro arco de igual radio de circunferencia que se ha tomado como unidad de medida.

2. Dos principales unidades de medida angular. Exigencia básica.

Las dos principales unidades de medida angular que se usan en topografía son: la **medida de grado** y el **radián**. Este último también se llama **medida analítica**. Sólo la primera de estas medidas satisface a la exigencia de que la unidad quepa sin residuo en el giro completo. Es por esta circunstancia que la división de grado se emplea hoy con exclusividad en la división de los círculos de los instrumentos topográficos y geodésicos.

3. Giro positivo y giro negativo. Su definición para las matemáticas puras y para Astronomía, Geodesia y Topografía.

Si hacemos girar un rayo **a** (fig.1) alrededor de un punto **C** hasta que ocupe la posición **b**, resulta una figura llamada **ángulo**. Lo esencial en este concepto es el sentido del giro que efectúa el rayo en su paso de la posición **a** a la **b**. Son dos las posibilidades, y por ende, dos los ángulos que se pueden originar: el sentido contrario al de la marcha de las agujas del reloj que en las matemáticas puras se llama sentido **positivo**, y el sentido opuesto (el que está de acuerdo con la marcha de las agujas del reloj), que es llamado **negativo**.

En las ciencias de aplicación práctica de las matemáticas, especialmente en **astronomía, geodesia y topografía**, se definen los sentidos giratorios positivo y negativo justamente en forma contraria a la usada en las matemáticas puras. En esas ciencias prácticas se considera **sentido giratorio positivo** al que está de acuerdo con la marcha de las agujas del reloj.

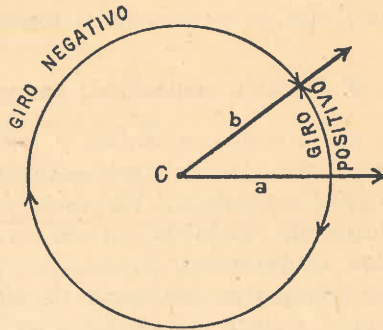


Fig.1. Ilustrando los sentidos giratorios según se definen en las matemáticas puras.

4. Angulo de giro completo, de semi-giro (ángulo llano) y ángulo recto.

Girando el rayo alrededor de su punto inicial hasta que coincida nuevamente con la posición de arranque, decimos que el rayo ha efectuado un giro completo, **1G**. Un punto cualquiera **A**, perteneciente a este rayo, habrá descrito en este giro una circunferencia completa. Llámese **ángulo de giro completo** al que se origina en este giro, **ángulo de semi-giro** al que corresponde a la mitad y **ángulo recto**, **1R**, al que corresponde a la cuarta parte del giro completo:

$$1R = \frac{1}{4} \text{ de giro completo.}$$

5. División sexagesimal; sus símbolos.

Siguiendo una tradición muy antigua, dividimos al ángulo recto en 90 partes llamadas **grados**, con las correspondientes subdivisiones:

$$\frac{1}{90}R = \frac{1}{360} \text{ giro completo} = 1^\circ \text{ (grado), (*)}$$

$$\frac{1}{60}1^\circ = 1' \text{ (minuto; del latín: partes minutæ primæ),}$$

$$\frac{1}{60}1' = 1'' \text{ (segundo; del latín: partes minutæ secundæ),}$$

en las que cada nueva subdivisión es $1/60$ de la inmediatamente superior.

La fracción del segundo de arco se expresa en el sistema decimal (ejemplos: $23^\circ 14' 12,3''$; $16,26''$).

Para medir los ángulos en el plano, se usa el **transportador** y, para medirlos en el terreno, el **teodolito**.

6. División centesimal; sus símbolos. Fórmulas de transformación.

En Francia y Suiza, y recientemente también en Alemania, empléanse para trabajos de agrimensura y catastro, muchas veces teodolitos con división centesimal. En estos instrumentos la circunferencia completa, en lugar de dividirla en 360, está dividida en 400 partes, llamadas **grados centesimales**, designados por g . Cada grado centesimal está dividido en 100 partes (en lugar de 60), llamadas **minutos centesimales**, designados por c y cada uno de éstos en 100 **segundos centesimales**, designados por cc .

Fórmulas de transformación. Siendo $400 = \frac{10}{9} \cdot 360$ y $100 = \frac{5}{3} \cdot 60$, tendremos:

(*) Esta unidad de medida angular es de origen babilónico: Sabían los babilonios que el radio puede colocarse como cuerda 6 veces dentro de la circunferencia. El ángulo en el centro correspondiente a cada una de las partes, lo dividían, de acuerdo a su sistema sexagesimal, en 60 partes, entrando así: $6 \cdot 60 = 360$ de estas unidades en la circunferencia completa.

$$1^{\text{g}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\circ} = 0^{\circ},9$$

$$1^{\text{c}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{27}{50}\right)' = 0',54 \sim \left(\frac{1}{2}\right)'$$

$$1^{\text{cc}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{81}{250}\right)'' = 0'',324 \sim \left(\frac{1}{3}\right)''$$

e inversamente:

$$1^{\circ} = \left(\frac{10}{9}\right)^{\text{g}} = 1^{\text{g}},111$$

$$1' = \left(\frac{50}{27}\right)^{\text{c}} = 1^{\text{c}},852$$

$$1'' = \left(\frac{250}{81}\right)^{\text{cc}} = 3^{\text{cc}},09$$

7. División horaria; sus símbolos. Su transformación en división sexagesimal.

La división de los ángulos en "horas" (designadas por ^h), subdivididas en minutos de tiempo (designados por ^m) y segundos de tiempo (designados por ^s), que se emplea para ciertas medidas angulares de la astronomía y geodesia (longitud, ascensión recta, ángulos horarios), tiene mucha semejanza con la división sexagesimal, para cuya transformación tenemos las siguientes relaciones sencillas:

$$\text{Giro completo: } 24^{\text{h}}; 1^{\text{h}} = 60^{\text{m}}; 1^{\text{m}} = 60^{\text{s}}.$$

$$\text{Luego: } 24^{\text{h}} = 360^{\circ}, 1^{\text{m}} = 15',$$

$$1^{\text{h}} = 15^{\circ}, 4^{\text{s}} = 1',$$

$$4^{\text{m}} = 1^{\circ}, 1^{\text{s}} = 15''.$$

8. Perspectiva de generalización del sistema centesimal.

Es de observar que, por lo que a las medidas angulares se refiere, la necesidad de la reforma no era la misma que para las medidas lineales. En éstas reinaba, como ya dijimos, un verdadero caos, cuya eliminación era en el interés de todos.

En cambio, la división sexagesimal estaba ya generalmente adoptada y no ofrecía serios inconvenientes.

Por otra parte, el número 60, con sus factores 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, se presta mejor para la división de círculos que 100, que tiene menos factores.

Mientras los astrónomos sigan dividiendo el día en 24 horas (y hay profundas razones para que lo hagan siempre), división con la cual la división sexagesimal está íntimamente vinculada, la división centesimal no podrá tener el éxito completo de ser universalmente adoptada, no obstante algunas pequeñas ventajas que tiene para el cálculo de las observaciones, que hablarían en su favor.

Es, pues, muy probable que el sistema centesimal irá ganando terreno, pero su progreso va a ser lento como lo ha sido hasta el día de hoy. (Ver también pág. 8, Vol. 2 del Tomo II).

9. El radián o medida analítica del ángulo. Definición.

La medida del ángulo en radián es la relación del arco a al radio r que le corresponde:

$$(I) \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

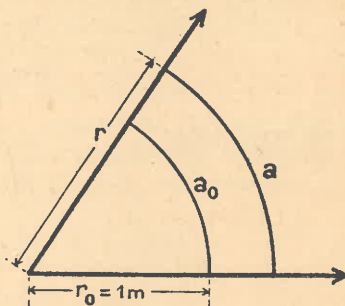


Fig. 2. *Ángulo 1 radián (1 rad): el ángulo cuyo arco es igual al radio.*

Para el caso particular de ser el arco (lineal) igual al radio (fig. 2), $\alpha_0 = r_0$ por ejemplo cada uno igual a 1 m, tendremos para el ángulo α :

$$\alpha = \frac{a_0}{r_0} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1$$

Como el radio $r = 1$ entra 2π ($= 6,28\dots$) veces en la circunferencia completa (360°), π ($= 3,14\dots$) veces en la semi-circunferencia y $1,57\dots$ veces en el cuadrante de circunferencia, podemos decir que el ángulo de 180° es π radianes. Tendremos entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \pi &= 180^\circ, \\ 1 \text{ rad.} &= \frac{180^\circ}{\pi} = 57,3^\circ, \\ &= \frac{(60 \cdot 180)'}{\pi} = 3438', \\ &= \frac{(60 \cdot 60 \cdot 180)''}{\pi} = 206265''. \end{aligned}$$

10. Unidad grande y unidad pequeña; constantes de transformación, sus designaciones.

Según acabamos de ver, el radián es unidad unas 57 veces más grande que el grado sexagesimal, unas 3438 veces más grande que el minuto y unas 206 265 veces más grande que el segundo sexagesimal. Estos tres números o **constantes** que expresan cuántas veces el grado, el minuto y el segundo de arco caben en el ángulo 1, se designan, respectivamente, por ρ° , ρ' , ρ'' . Pero en lugar de ρ'' , que es de mucha aplicación en las fórmulas, se suele escribir simplemente ρ ; de modo que tenemos:

$$\rho^\circ = 57,29578; \quad \rho' = 3437,747; \quad \rho = 206264,8.$$

Si α es la medida del ángulo en radián, α° , α' , α'' , en medida sexagesimal, tendremos:

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \rho^\circ, \quad \alpha' = \alpha \cdot \rho', \quad \alpha'' = \alpha \cdot \rho,$$

o inversamente:

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ} = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho}$$

11. El miliradian.

Como el radián es una unidad de medida muy grande, se la subdivide en 1 000 partes iguales, llamadas **miliradianes**, designadas por **mrad** (leer: "milirad"). Al giro completo (2π) corresponden entonces 6283 mrad.

12. Tabla de conversión de las medidas angulares.

Con el objeto de facilitar la transformación de las diversas unidades de medida angular explicadas, damos en págs. 14 y 15 una tabla de **conversión**.

13. El milésimo.

En la práctica militar, principalmente en el tiro de artillería, se usa una unidad muy parecida al mrad, llamada **milésimo**. Es éste la 16ava parte del grado centesimal:

$$\frac{1^s}{16} = \frac{0,0157}{16} \sim 0,001$$

unidad que entra por tanto ($16 \times 400 =$) 6400 veces en el giro completo. Cuando no se necesita mucha precisión, se calcula con milésimos como con los mrad, empleando las mismas fórmulas.

Con esta unidad determinánse con mucha rapidez valores aproximados de importancia militar. Usanse la mano y los dedos como **estadía**, colocando aquélla en posición vertical delante del observador, a una distancia de unos 50 cm del ojo, extendiéndose el brazo horizontalmente.

Ejemplos. Se verá así:

| | | |
|---|-------------------|----------------------------------|
| La distancia "punta pulgar-punta meñique" | bajo el ángulo de | $325/1000 = 19^\circ$, |
| el ancho del pulgar | " " " " | $40/1000 = 2\frac{1}{2}^\circ$, |
| " " " índice | " " " " | $35/1000 = 2^\circ$, |
| " " " meñique | " " " " | $25/1000 = 1\frac{1}{2}^\circ$, |
| " " de un lápiz | " " " " | $13/1000 = \frac{3}{4}^\circ$ |

14. "El triángulo angosto", teoremas.

Si el arco es pequeño en comparación con el radio (fig. 3), puede aquél confundirse con un segmento recto colocado transversalmente en el extremo del radio. En el otro extremo, que es centro de la circunferencia, se

TABLA DE CONVERSION DE MEDIDAS ANGULARES

| Unidades | División sexagesimal | | | División centesimal | | |
|----------|----------------------|-------------|---------------|---------------------|--------------|----------------|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 1G 1) | 360° | 21 600' | 1 296 000'' | 400 g | 40 000 c | 4 000 000 cc |
| 1R | 90° | 5 400' | 324 000'' | 100 g | 10 000 c | 1 000 000 cc |
| 1° | 1° | 60' | 3 600'' | 1, g 111 | 111, c 11 | 11 111, cc 11 |
| 1' | 0°,016 66 | 1' | 60'' | 0, g 018 52 | 1, c 852 | 185, cc 2 |
| 1'' | 0°,000 277 | 0',01666 | 1'' | 0, g 000 309 | 0, c 0309 | 3, cc 09 |
| 1g | 0°,9 | 54' | 3 240'' | 1 g | 100 c | 10 000 cc |
| 1c | 0°,009 | 0',54 | 32'',4 | 0, g 01 | 1 c | 100 cc |
| 1cc | 0°,000 09 | 0',0054 | 0'',324 | 0, g 000 1 | 0, c 01 | 1 cc |
| 1h | 15° | 900' | 54 000'' | 16, g 666 | 1 666, c 66 | 166 666, cc 66 |
| 1m | 0°,25 | 15' | 900'' | 0, g 277 7 | 27, c 77 | 2 777, cc 77 |
| 1s | 0°,004 166 | 0',25 | 15'' | 0, g 004 63 | 0, c 463 | 46, cc 3 |
| 1rad 2) | 57°,295 78 | 3437',746 9 | 206 264'',806 | 63, g 661 98 | 6 366, c 198 | 636 619, cc 8 |
| 1mrad 3) | 0°,057 2958 | 3',437 8 | 206'',264 806 | 0, g 063 661 | 6, c 366 | 636, cc 6 |

- 1) 1G significa un giro completo o sea un ángulo de 2π radianes.
- 2) 1 rad " " " radian, que es el ángulo cuyo arco es igual al radio.
- 3) 1 mrad (leer: "milirad") significa 0,001 rad, el que entra 6 283 ($= 1000 \times 2\pi$) veces en el giro completo.

El milésimo ("de artillería"), llamado también "trazo", es aproximadamente la 16 ava par

puede suponer ubicado el ojo del observador, que ve el segmento bajo el

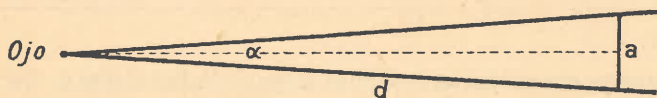


Fig. 3.
"El triángulo angosto".

ángulo α a la distancia del radio r , que ahora llamaremos d . La ecuación general (I) se transforma en esta otra, referida al triángulo angosto:

$$(II) \quad \alpha = \frac{a}{d} \quad a = d \cdot \alpha, \quad d = \frac{a}{\alpha}$$

En palabras:

Teoremas: El ángulo es igual al segmento transversal dividido por la distancia.

Normas fundamentales DIN (*) 1301, DIN 1302 y DIN 1315.

| División horaria | | Radianes (rad) y miliradianes (mrad) | | Unidades | |
|---------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|---|---|-----------------|
| | (8) | (9) | (10) | (11) | |
| | 1 440 m 360 m | 86 400 s 21 600 s | $2\pi (=6,283 185 3)$ rad 1,570 796 3 ,, | 6 283 mrad ³⁾ 1 571 ,, | 1 G 1 R |
| 66 1 11 0 018 | 4 m 0, m 066 0, m 001 1 | 240 s 4 s 0, s 066 | 0,017 453 29 rad 0,000 290 89 ,, 0,000 004 848 1 ,, | 17,453 29 mrad 0,290 89 ,, 0,004 848 ,, | 1° 1' 1'' |
| 0 6 0 006 | 3, m 6 0, m 036 0, m 000 36 | 216 s 2, s 16 0, s 021 6 | 0,015 708 rad 0,000 157 08 ,, 0,000 001 570 8 ,, | 15,708 mrad 0,157 08 ,, 0,001 570 8 ,, | 1g 1c 1cc |
| 6 66 0 277 | 60 m 1 m 0, m 016 6 | 3 600 s 60 s 1 s | 0,261 799 35 rad 0,004 363 ,, 0,000 072 7 ,, | 261,799 35 mrad 4,363 ,, 0,072 7 ,, | 1h 1m 1s |
| | | | 1 rad 0,001 ,, | 1 000 mrad 1 ,, | 1 rad 1 mrad |

1 grado centesimal $\left(\frac{1^g}{16} = \frac{0,0157}{16} \sim 0,001\right)$ y entra por eso $(16 \times 400 =)$ 6 400 veces en el completo.

(*) DIN ("Das ist Norm"), magna obra alemana de recopilación de normas técnicas (en hojas originales de 210 x 297), las cuales van siendo adoptadas por otros países. La 8ª ed. del Manual 1: "Normas fundamentales DIN", fué traducida al castellano por M. Balzola y editada en 1940 por la Asociación de Ingenieros Industriales de Bilbao.

El segmento transversal es igual al producto de la distancia por el ángulo.

La distancia es igual al segmento dividido por el ángulo.

15. Valores a recordar.

A los valores angulares redondos 1°, 1', 1" y las distancias 57 m, 3 438 m y 206 265 m corresponden cada vez un segmento transversal de 1 m, por lo que conviene recordar los tres números 57, 3 438 y 206 265, los que prestan mucha utilidad en el cálculo de la precisión y la rápida estima de magnitudes buscadas.

16. Ejercicios y problemas prácticos.

1° ¿Cuál es el valor del ángulo x, subtendido por el segmento de 1 cm. a la distancia de 57 cm (con brazo extendido)?

$$x = \frac{1}{57} \rho^\circ = 1^\circ \text{ (valor que conviene recordar).}$$

2° Estímese el ángulo α bajo el cual se ven los siguientes segmentos transversales, a :

$$1 \text{ m a una distancia } d \text{ de } 100 \text{ m: } \alpha = \frac{a}{d} = \frac{1}{100} = 1/100 = 34',$$

$$1 \text{ m a una distancia } d \text{ de } 1000 \text{ m: } \alpha = \frac{1}{1000} = 3,4',$$

$$1 \text{ cm a una distancia } d \text{ de } 200 \text{ m: } \alpha = \frac{1}{20\,000} = 10''.$$

3° ¿Cuál es el valor del ángulo α que subtiende un jalón de 3,5 cm de grosor a una distancia de 200 metros?

$$\alpha = \frac{0,035}{200} \cdot 206\,265'' = 36''.$$

4° Estímese la **distancia** d , desde la cual un segmento de 100 m es visto bajo un ángulo de 1°, 2° y 5°, respectivamente.

Según la tercera de las fórmulas (II) tendremos:

$$\text{Para } 1^\circ: \text{ la distancia } d = \frac{100}{1/57} = 100 \cdot 57 = 5700 \text{ m,}$$

$$'' \text{ } 2^\circ: '' \quad '' \quad d = \frac{100}{2/57} = \frac{5700}{2} = 2850 \text{ m,}$$

$$'' \text{ } 5^\circ: '' \quad '' \quad d = \frac{100}{5/57} = \frac{5700}{5} = 1140 \text{ m,}$$

5° Estímese el **segmento transversal** a , correspondiente a:

$$2^\circ \text{ a la distancia de } 500 \text{ m: } a = 500 \cdot \frac{2}{57} = 17,5 \text{ m,}$$

$$3^\circ \text{ '' '' '' '' } 4 \text{ km: } a = 4000 \cdot \frac{3}{57} = 210 \text{ m,}$$

$$5^\circ \text{ '' '' '' '' } 10 \text{ km: } a = 10\,000 \cdot \frac{5}{57} = 877 \text{ m,}$$

todo ello según la segunda de las fórmulas (II).

§ 4.

Escalas.**1. Necesidad de las escalas.**

No siendo generalmente posible llevar al papel de dibujo, en su verdadera magnitud, las medidas de una figura cualquiera determinada en el terreno, dibújase de cada longitud, medida en proyección horizontal, sólo una parte alícuota, es decir, una porción contenida un cierto número de veces en la longitud total, obteniendo así, en el plano del dibujo, figuras semejantes, reducidas en una cierta relación. Esta reducción se refiere a las longitudes. Teniendo, por ejemplo, un plano dibujado con la reducción de $1/1000$, toda medida lineal del terreno se halla reducida en el plano a la milésima parte. Cada metro en el terreno es 1 mm en el plano e inversamente: cada medida lineal sacada del plano debe multiplicarse por mil para obtener la correspondiente del terreno. El número que indica la relación entre las dimensiones lineales del dibujo y las de las figuras reales en el terreno, se llama **número de reducción** o **escala del plano**, que designaremos por $\frac{1}{E}$.

2. Elección y uso.

La elección de la escala no es arbitraria sino dependiente del objeto del plano. En un plano a escala $\frac{1}{E}$, todas las longitudes son, como dijimos, **E** veces más pequeñas que las homólogas del terreno.

Queriendo, por ejemplo, determinar la medida del plano a escala $\frac{1}{E}$ que corresponde a la longitud de 1 km en el terreno, es necesario dividir 1 km por **E**. En un plano a escala $1/25\ 000$, por ejemplo, correspondería a 1 km de medida natural 4 cm en el plano.

Tratándose, en cambio, de deducir de la medida del plano la correspondiente medida natural del terreno, basta multiplicar aquélla, como dijimos, por el número **E**.

Siendo, por ejemplo, un trozo de camino, en un plano a $1 : 50\ 000$, de un largo de 1 cm, su longitud natural sería de $1 \times 50\ 000 \text{ cm} = 500 \text{ m}$; a la escala $1 : 5\ 000$ (10 veces mayor que la de $1 : 50\ 000$), esa misma longitud de 1 cm corresponde a un trecho de camino de 50 m, y, a la escala de $1 : 100\ 000$, a la longitud de 1 000 m. Podemos decir: **Cuanto mayor el número E, tanto menor la escala, tanto más fuerte la reducción y, por consiguiente, tanto menor la cantidad de detalles que se pueden representar, e inversamente: Cuanto menor el número E, tanto mayor la escala, tanto**

menos fuerte la reducción y, por consiguiente, tanto mayor la cantidad de detalles que pueden representarse.

3. Reglas prácticas y ejemplos.

Conviene aplicar a veces en la práctica una de las dos siguientes reglas:

1ª Regla (paso del terreno al plano).

Dividiendo cien mil (1 km = 100 000 cm) por el número **E**, se obtienen los cm que en el dibujo corresponden a 1 km en el terreno.

Ejemplos:

Escala 1|25 000: a 1 km en el terreno corresp. $\left(\frac{100\ 000}{25\ 000} = \right) 4$ cm en el plano,
 " 1|50 000: a 1 km " " " " $\left(\frac{100\ 000}{50\ 000} = \right) 2$ cm " " "
 " 1|100 000: a 1 km " " " " $\left(\frac{100\ 000}{100\ 000} = \right) 1$ cm " " "

2ª Regla (paso del plano al terreno).

Tachando los dos últimos ceros de **E**, se tiene en metros la medida natural que corresponde a 1 cm en el plano.

Ejemplos:

Escala 1|1 000: a 1 cm en el plano corresponden 10 m en el terreno,
 " 1|5 000: a 1 cm " " " " " 50 m " " "

4. Determinación de la escala omitida en un plano.

Sucede a veces que es necesario averiguar la escala de un trozo de plano en que tal indispensable elemento de orientación fué omitido. Cuando no se conoce magnitud numérica alguna del plano, ni lineal ni de superficie, no es posible esta determinación. Pero cuando se sabe, por ejemplo del texto relativo al plano, la distancia natural **D** entre dos caracterizados puntos representados en el plano, es fácil hallar la escala. Sólo falta medir con una regla milimetrada en el plano el trozo **d** entre tales puntos; dividiendo la distancia real **D** por la reducida **d** del plano (expresando por ejemplo ambas en milímetros), se tendrá aproximadamente el número **E** de la escala buscada.

5. El "one inch map" inglés, como ejemplo de un plano a escala de medida antigua.

En la carta del Estado Mayor inglés, llamada "one inch map", una pulgada del plano corresponde a una milla inglesa. Siendo 1 milla = 1 760 yardas = 1 760 × 36 pulgadas = 63 360 pulgadas (inches), resulta para el número de reducción **E** correspondiente a esa carta: 63 360.

6. Escalas gráficas; su construcción y uso.

Con el objeto de facilitar el dibujo a escala reducida, constrúyense **escalas gráficas**, en una de las dos formas llamadas **simples** y **de transversales**, en las cuales se hallan escritos los valores naturales.

Construcción de una escala gráfica simple (figs. 1 y 2).

Escala = 1: 100 000

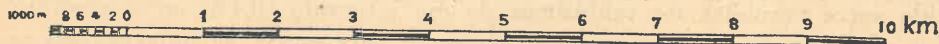


Fig. 1 Escala gráfica simple.

Escala = 1: 25 000

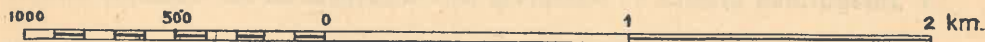


Fig. 2.

Tratándose, por ejemplo, de construir la escala 1/25 000 (fig. 2), se hallará primero la magnitud (en centímetros) que en el plano a dicha escala corresponde a 1 km en el terreno. Según vimos en el N.º 3, esta cantidad es igual a 4 cm. La transportamos sobre una recta, obteniendo así las divisiones 1 km, 2 km, a la derecha de un punto 0. Se puede transportar también una magnitud de 4 cm hacia la izquierda del punto 0 y subdividirla en 10 partes iguales, que expresan centenas de metros. De estas divisiones sólo se numera la división correspondiente a 500 para evitar la confusión de números. Las fracciones menores de 100 metros se estiman a simple vista.

Construcción de una escala transversal (fig. 3). Cuando se desea alcanzar mayor precisión en la medida de distancias, se construye una **escala de transversales**, con la que se puede obtener una precisión 10 veces mayor que la que da la escala gráfica simple.

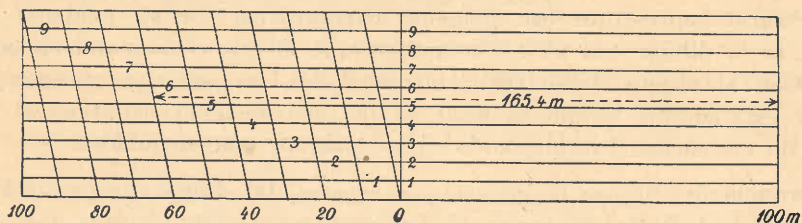


Fig. 3. Escala transversal. 1: 2 000.

Para construir una escala de transversales, se empieza por trazar la base (escala gráfica simple) en la forma que acabamos de explicar.

Luego se trazan 10 paralelas a la base, a distancias arbitrarias, pero iguales entre sí. En las divisiones 100 (a la izquierda del cero), 0 y 100 (a la derecha del cero) se levantan perpendiculares, que se prolongan hasta su

intersección con la última paralela. Se numeran las paralelas. Trázanse ahora las **transversales** en la siguiente forma: Se une el punto 0 de la base con el punto 10 (no numerado) arriba, luego el punto 10 abajo con el 20 arriba y así sucesivamente; por último el punto 90 abajo con el 100 arriba. Estas transversales son, pues, paralelas entre sí por construcción. Cada transversal determina en sus sucesivas intersecciones con las paralelas horizontales directamente los décimos del intervalo de 10 m (5 m en el ejemplo práctico colocado), pudiendo todavía obtenerse por estima en el espacio comprendido entre paralelas los **centésimos** de ese intervalo (0,4 m en el ejemplo). Con el objeto de facilitar aun más el uso de esta escala, se numeran las paralelas también entre las transversales sobre la diagonal del rectángulo de transversales.

7. Inseguridad gráfica γ ; tolerancia 3γ , influencia en las distintas escalas.

Una vez establecida la superficie a representar, se elegirá la escala que más convenga. Con esta elección de escala queda determinado el tamaño del plano, los detalles que pueden representarse y la imprecisión proveniente de los defectos del dibujo a la escala elegida.

Para representar en el dibujo un punto o una línea cualquiera, se usan generalmente lápiz, compás y regla. La experiencia demuestra que con tales instrumentos generalmente no se consigue ubicar puntos o líneas con errores inferiores a $1/10$ de milímetro.

Designemos por γ esta cantidad que **caracteriza la precisión del dibujo**. Toda cantidad menor que γ pasa desapercibida en el plano, y todos los detalles menores que $\gamma \cdot E$, en el terreno, no tendrían representación gráfica en el plano.

Pero muchas veces es necesario representar en los planos y cartas objetos de menor tamaño. **Ejemplo:** Un camino de 20 m de ancho según la regla establecida no tendría representación en una carta a escala $1/500\,000$, puesto que su ancho a escala resultaría solamente de 0,04 mm. Pero como es necesario representar ese elemento cartográfico por su evidente importancia, se lo dibuja con un ancho mayor que el que correspondería a la escala. Con el objeto de evitar arbitrariedades, es entonces preciso reglamentar este asunto, lo que se hace en las instrucciones relativas al dibujo y uso de las cartas, estableciendo ciertos **signos convencionales**.

Tolerancia 3γ . Si por lo general los errores del dibujo de una carta son del orden de $1/10$ de mm, sería sin embargo muy difícil evitar que en muchos casos ellos sobrepasaran esa pequeña cantidad. Pero es razonable establecer una **tolerancia máxima** para esos errores, para la cual se puede tomar el triple del error común o sea $3\gamma = 0,3$ mm en el plano. Este error 3γ está de acuerdo con el principio establecido en pág. 41 de "**Aplicaciones prácticas del Cálculo de Compensación y de la Teoría de los Errores**" del mismo autor (obra para la cual emplearemos de ahora en adelante la abreviatura: "**C. de C.**").

Obtendremos entonces, como **influencia del error $3 \cdot \gamma$** en las distintas escalas:

| | |
|--------------|---|
| Escala 1:500 | , $3\gamma \times E = 0,0003 \cdot 500 = 0,15$ m, |
| ” 1:5 000 | , $3\gamma \times E = 0,0003 \cdot 5 000 = 1,5$ ” |
| ” 1:10 000 | , $3\gamma \times E = 0,0003 \cdot 10 000 = 3,0$ ” |
| ” 1:50 000 | , $3\gamma \times E = 0,0003 \cdot 50 000 = 15,0$ ” |

valores éstos que deben ser tenidos en cuenta en la elección de la escala para un caso dado.

8. Clasificación de las escalas según categorías.

Podemos clasificar las escalas y cartas en tres grandes grupos:

Primer grupo de cartas y escalas.

Escalas para el levantamiento catastral, siendo las más usuales las siguientes:

1|200, 1|500 y 1|1000 para catastro urbano,
1|2 000, 1|5 000 y 1|10 000 para catastro rural.

Segundo grupo de escalas y cartas.

a) **Escalas para levantamientos topográficos:** 1|5 000, 1|10 000, 1|25 000, 1|50 000 y 1|100 000.

b) **Escalas de cartas generalmente obtenidas por reducción cartográfica** de las cartas de **levantamiento directo**. Pertenecen a este grupo las conocidas cartas militares de diferentes países:

1|100 000 (Alemania, Argentina, Italia, España, Portugal, Suecia),
1|80 000 (Francia), 1|75 000 (Austria, Hungría),
1|63 360 (Inglaterra), 1|62 500 (Estados Unidos de Norte América),
1|50 000 (Holanda, Suiza), 1|40 000 (Bélgica), etc.

Las escalas del primer grupo y las del segundo grupo, subdivisión a), comprenden las llamadas **escalas de levantamiento**, porque los levantamientos directos en el terreno se hacen en esas escalas.

Tercer grupo de cartas.

a) **Cartas topográficas de conjunto:** 1|400 000 (Provincia de Buenos Aires), 1|250 000 (Provincia de Santa Fe), 1|200 000 (Provincia de Entre Ríos y Tucumán), etc.

b) **Cartas geográficas.**

Ejemplos: 1|1 000 000 (Mapa Mundial, Mapa de Comunicaciones del Instituto Geográfico Militar Argentino).

9. Cartas geográficas y planos topográficos; su diferente misión.

Las cartas o mapas geográficos a escalas 1|500 000 hasta 1|5 000 000 sirven para la representación de grandes territorios; las escalas 1|10 000 000 y menores son empleadas para las cartas de los **atlas escolares**. Repre-

séntase en ellos, a grandes rasgos, el aspecto general de la figura de la Tierra, la distribución de tierra y agua, el emplazamiento de las poblaciones más importantes, las cadenas de montañas con sus ramificaciones, las vías de comunicación, etc.

Los **planos topográficos**, en cambio, representan extensiones de superficies más limitadas; los planos a escala 1|25 000 y 1|50 000 del Instituto Geográfico Militar, generalmente divididos en hojas llamadas "**planchetas**", contienen numerosos detalles de gran utilidad, constituyendo un medio cartográfico de primer orden, indispensable en la guerra, una valiosa base para importantes ramas de la técnica de ingeniería, la industria minera, la administración política, el turismo, etc.

§ 5.

Señalación y marcación de los puntos topográficos y puntos catastrales.

1. Definición.

Levantar un punto quiere decir ejecutar todas aquellas operaciones (mediciones y cálculos) necesarias para su representación y ubicación en el plano.

2. Superficie de proyección. Convergencia de la plomada.

Tratándose en los trabajos de levantamiento topográfico generalmente de operaciones de poca extensión, se puede reemplazar con suficiente aproximación la superficie de la Tierra por su **proyección sobre un plano horizontal tangencial en el punto central de la zona a levantar.**

Las direcciones de la vertical son consideradas entonces **paralelas** entre sí (fig. 2, § 1), no obstante formar ellas en dos puntos que distan por ejemplo 11,1 km (= 1|10 de grado de latitud) un ángulo de 6 minutos; para dos puntos que distan 5,5 km, ese ángulo sería de 3 minutos, etc. El ángulo que forman entre sí, en el centro de la Tierra, las direcciones de la plomada de dos puntos, se llama **convergencia de la plomada** (fig. 1, § 1).

3. Punto topográfico. Definición.

Mientras que en geometría un punto no tiene dimensión y es definido por la intersección de dos líneas, el **punto topográfico**, en cambio, es algo real, un objeto físico que lo materializa en alguna forma en el terreno. Puntos de esta clase son: una estaca, un mojón, una cruz labrada en una piedra, un caño de hierro, una arista de casa, etc.

4. Línea topográfica, alineación, línea recta en el terreno.

Las dos verticales que pasan por dos puntos topográficos, determinan un **plano vertical**. Entiéndese por **línea topográfica** una curva situada en toda su extensión en la superficie física del terreno y caracterizada por alguna condición determinada (curvas de nivel, líneas de pendiente constante, secciones con planos verticales, líneas de máxima pendiente o líneas de caída, líneas divisorias de aguas, talwegs, etc.). Una **alineación** se determina por la sucesión de varios puntos, todos situados en un mismo plano vertical. Entiéndese por **línea recta en el terreno** una línea que en toda su extensión se encuentra en el mismo plano vertical.

5. Superficie topográfica.

Entiéndese por **superficie topográfica** la superficie física de un terreno. La **determinación de la posición relativa de los puntos** de la superficie topográfica es el **principal objetivo de los trabajos de levantamiento**.

6. Puntos topográficos naturales.

La representación material de un punto topográfico puede ya existir antes de que nos traslademos al terreno para levantarlo, por ejemplo, un parrayo, una chimenea, arista de casa, eje de tanque, molino, etc., llamándose por ello esos puntos: **puntos topográficos naturales**.

7. Puntos topográficos marcados a propósito.

Generalmente los puntos topográficos deben ser marcados a propósito para los fines del levantamiento, por ejemplo, por un piquete o una estaca (figs. 1 y 2), por una piedra marcada con cruz (fig. 3), poste o mojón de piedra (fig. 6), hierro o madera, caño de **hierro subterráneo** (fig. 4).

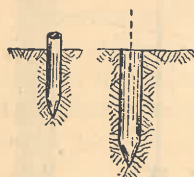


Fig. 1. Fig. 2.

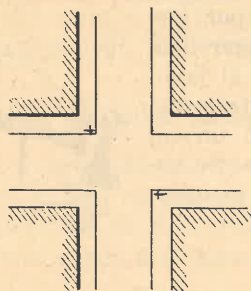


Fig. 3.
Piedra marcada.

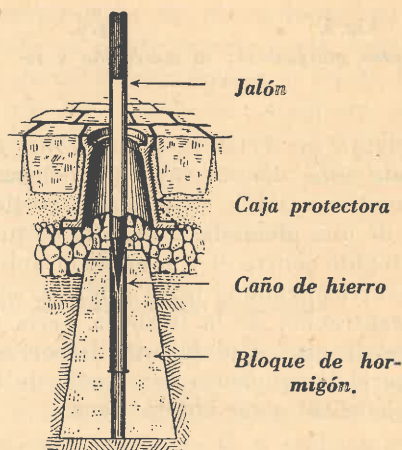


Fig. 4. Marcación y señalación de punto de catastro urbano.

8. El jalón.

Muchas veces es necesario señalar los puntos topográficos sólo temporalmente, mientras duren las mediciones. El principal medio para ello es el jalón (figs. 4, 5 y 6).

El jalón común es un vástago de madera, de una longitud que varía de 2 a 3 metros y de un grosor de 2 a 3½ cm. Está provisto en la punta de un regatón de hierro aguzado. El vástago está pintado al óleo en zonas alternativamente blancas y coloradas, o blancas y negras, de 20 ó 25 cm de ancho, para que sean bien visibles sobre un fondo oscuro o claro.

Usanse jalones de sección octogonal, redonda o triangular. Estos últimos, algo más cómodos para el transporte, tienen el inconveniente de las fases, es decir, de la iluminación desigual, la que en los primeros es menos sensible, no existiendo en los jalones de sección circular. Se usan también jalones de tubos Mannesmann, que sólo tienen un diámetro de 1,5 a 2 cm.

El jalón debe situarse en posición vertical. En suelo duro (calle, pavimento, calzada, acera), se emplean trípodes especiales (fig. 5); a veces se usa otro jalón como puntal (fig. 6).

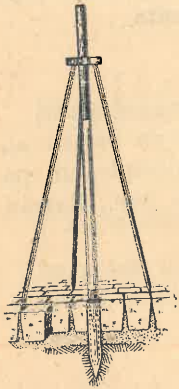


Fig. 5.

Puntos poligonales; su marcación y señalación.

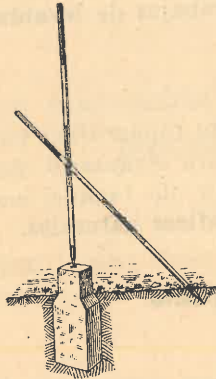


Fig. 6.

9. Instrumentos para verificar la verticalidad de un jalón; plomada y nivel esférico.

Para verificar la verticalidad de un jalón, se lo observa en dos direcciones aproximadamente perpendiculares entre sí, usando la plomada (fig. 7) y corrigiendo una eventual desviación.

Un pequeño instrumento llamado nivel esférico para miras (fig. 8), aplicable también a jalones, facilita nota-

blemente la verticalización de un jalón. Con el objeto de verificar previamente este instrumento, se colocará cuidadosamente un jalón en posición vertical por medio de una plomada, operando en un lugar bien protegido contra el viento. Si al aplicar al jalón así verticalizado el nivel esférico, se notase una descentración de la burbuja, sería esto un indicio de que el nivel está descorregido. Se corrige el instrumento por medio de los tornillos que el nivel a ese objeto tiene.

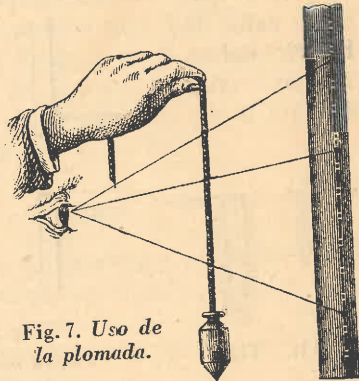


Fig. 7. Uso de la plomada.

10. Precisión de la vertical señalada.

Consíguese con jalón bien derecho, al aire libre, en condiciones normales, con viento no



Fig. 8.
Nivel esférico.

muy fuerte, una precisión de 30' para la vertical, si se emplea la plomada, y una precisión algo más grande todavía con el nivel esférico.

Efecto de la falta de verticalidad en la proyección horizontal.

Se pregunta: ¿Qué efecto máximo x tendría en la proyección horizontal una desviación de 30' (de la vertical) de un jalón de 2,5 metros de largo, si fuera solamente visible la punta del jalón?

$$x = \frac{30'}{3438'} \cdot 2,5 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

§ 6.

Trazar una recta en el terreno sin usar instrumento o jalonar una línea.

1. Definición.

Las alineaciones son necesarias como preparación de la medición de líneas. Cuando la longitud de una línea a medir es relativamente corta, muchas veces basta marcar los puntos extremos, el punto de arranque y el punto terminal de la línea, midiendo la distancia que los separa sin estaquear puntos intermedios. Pero cuando la longitud de la línea es más grande, conviene generalmente intercalar puntos intermedios, **alineados**, es decir, ubicados en línea recta con los puntos extremos, usando para ello jalones, operación que por eso se llama **jalonar una recta** o **jalonar una alineación**.

2. La línea a jalonar es visible desde uno de sus puntos extremos.

Estando dada la línea a jalonar por los puntos **A** y **B** (fig. 1), el operador se coloca, con el objeto de jalonar la línea, en el punto **O**, a unos pocos metros de distancia detrás de **A**, mirando por el borde del jalón **A** hacia **B**. Un ayudante, situado cerca del lugar del primer punto **C** a colocar, está



Fig. 1. Jalonando la línea AB.

alineá el jalón **C** sobre la línea **BF**, asignándole una nueva posición **C₁**; luego desde **C₁** nuevamente a **B**, asignándole una nueva posición **B₁** sobre la línea **C₁A**; nueva-

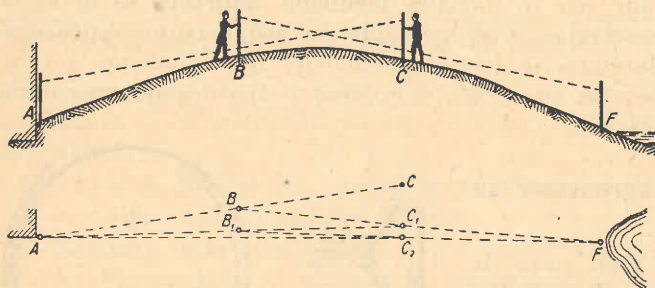


Fig. 3. *Alineación recíproca.*

mente desde **B₁** a **C₁**, asignándole a éste último la nueva posición **C₂**, y así sucesivamente hasta que los desplazamientos de los jalones **B** y **C** sean completamente insignificantes, quedando entonces los dos puntos **B** y **C** alineados en la línea **AF**.

El mismo procedimiento se empleará cuando los dos puntos extremos de la línea son accesibles pero separados por una loma (fig. 3, arriba).

6. Los dos puntos están separados por un valle.

Cuando un valle o una fuerte depresión del terreno separa los puntos extremos de una línea (fig. 4), se procederá del siguiente modo: Sean **A** y **Z** los puntos extremos de la línea a jalonar. En este caso, el operador, colocado en el punto **A**, sostendrá sobre este punto una plomada, situando el ojo de tal modo que la parte superior del hilo de la plomada cubra el jalón del punto **Z**. Luego un jalón a colocar en **B** será desplazado por un ayudante hasta quedar cubierto por la parte inferior del hilo de la plomada del operador en **A**. En otros términos: El punto **B** ha sido colocado así en el plano vertical determinado por el jalón en **Z** y el hilo de la plomada en **A**. En esta misma forma puede obtenerse cualquier cantidad de nuevos puntos que fuera conveniente intercalar entre los extremos **A** y **Z**.

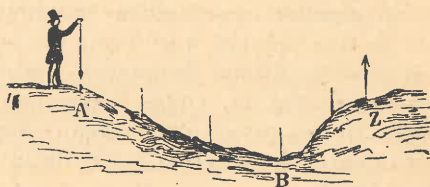


Fig. 4. *Alineación a través de un valle.*

§ 7.

Medición lineal directa y los principales instrumentos en uso

1. Clasificación de las mediciones lineales en directas e indirectas.

El problema de determinar la distancia entre dos puntos topográficos es una de las tareas más importantes de nuestra materia; su solución puede efectuarse directa o indirectamente.

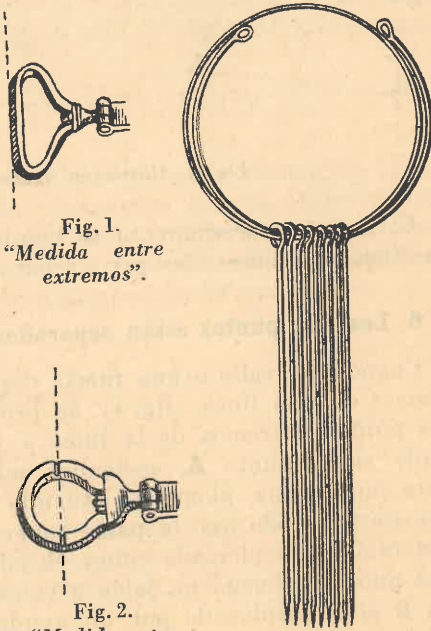
La **medición directa** de una longitud consiste en la comparación de su longitud con la unidad de medida, por una sucesiva aplicación del instrumento de medir usado, cinta, regla u otro, recorriendo la distancia en toda su extensión; mientras que por la llamada **medición indirecta** se determinan las distancias sin recorrerlas: Con la ayuda de instrumentos especiales, que más adelante estudiaremos, se leen directamente las distancias sin recorrerlas, o se determinan los elementos angulares y lineales que permiten calcular las distancias buscadas.

2. Cintas de acero de agrimensor, su descripción.

Es este instrumento una cinta de acero, de un ancho entre 10 y 25 mm y de 0,4 a 0,5 mm de espesor. Las hay de 20, 25, 50 y 100 metros, siendo las de 50 y 100 metros las más empleadas en mensuras y mediciones catastrales. Los metros están marcados por chapitas de bronce numeradas, remachadas de los dos lados. Los decímetros están marcados por chapitas más pequeñas, sin numeración, o por pequeños agujeros circulares.

En algunos casos tienen en cada extremo una manija, que forma parte del primero y último decímetro, respectivamente (fig. 1). Otras veces las manijas tienen rayas que marcan, respectivamente, el principio y fin de la cinta (fig. 2).

Queda completado el equipo de medición por un **juego de fichas** o **agujas de medir** (fig. 3), pequeñas varillas delgadas de alambre de hierro galvanizado, de 5 a 6 mm de diámetro y 35 a 40 cm de largo, las que terminan en punta, en un extremo y, en el otro, en forma de anillo. Usanse generalmente juegos de 11 ó 10 fichas que se



llevan en un anillo grande de alambre de hierro. Trabajando en terreno cubierto de plantas bajas, se suele atar a los anillos de las fichas cintitas de tela blanca o colorada, para distinguirlas mejor.

Con el objeto de facilitar el transporte, se arrolla la cinta de acero sobre un eje metálico por medio de una manivela. Va encerrada la cin-

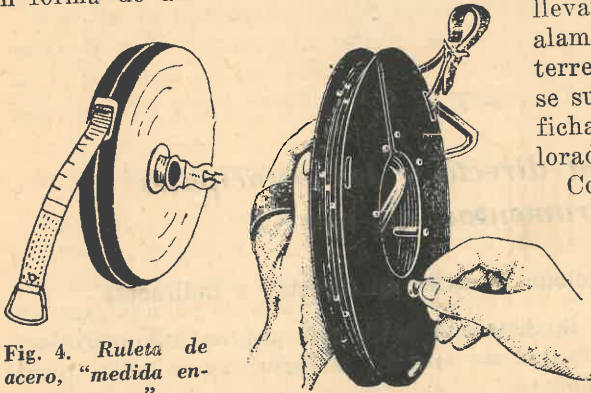


Fig. 4. Ruleta de acero, "medida entre trazos".

Fig. 5. Cinta de agrimensor, "medida entre extremos".

ta ya sea en una caja de cuero (ruleta, fig. 4) o en caja metálica provista de manivela de bronce y manijas de cuero (fig. 5).

3. Normas generales para trabajos de campo.

Recomendamos sean tenidas en cuenta en la ejecución práctica de las mediciones y su anotación en las libretas de campo, las siguientes **normas de trabajo**:

- 1° Antes de iniciar una medición, **examínese** si el instrumento a emplearse halla en buen estado de uso.
- 2° **Repítase cada medición** por lo menos una vez, porque sólo así es posible protegerse contra una equivocación o error grosero. Además el resultado de una medición repetida (medición duplicada), para el cual se toma el promedio de los resultados de las mediciones simples, es más preciso que el de una medición simple.
- 3° **Escríbese** las anotaciones en los registros de campo, **claramente**, tanto el texto como las cifras, de tal modo que cualquier técnico pueda comprender todo lo escrito; una medición es sin valor cuando no es bien legible el resultado de la misma.
- 4° Indíquese siempre en el **encabezamiento del registro** el número del instrumento con que se trabaja, la temperatura, las condiciones atmosféricas, el propósito general que se persigue con la medición, el lugar, la fecha y la hora, pudiendo así orientarse rápidamente cualquier técnico sobre la operación realizada.
- 5° Cuando sea necesario o conveniente, acompañese la medición por un **croquis**, con todos los detalles indispensables para el ulterior aprovechamiento de la medición. Ese croquis, que debe ser orientado con el Norte hacia arriba, contribuye mucho a aumentar la claridad del trabajo realizado [ver columna (4) del ejemplo práctico en pág. 31].

4. Significado y alcance de la normalización y unificación de los formularios y registros de campo.

El significado y alcance de la normalización de los formularios de cálculo y de los registros de campo es muy grande. No es una esclavización del espíritu, un encajonamiento de las energías constructivas del ingeniero; los formularios tienden, al contrario, a desarrollar esas energías. Por una racional disposición de las operaciones de cálculo y un adecuado agrupamiento de las observaciones de campo, que es el fruto de pacientes y largas experiencias prácticas, la normalización de los formularios y registros logra realizar considerables economías de trabajo y tiempo, elevándose con ello el rendimiento efectivo de la labor del ingeniero.

5. Ejecución práctica de la medición con la cinta de acero.

Para medir la longitud de una línea **AB** con la cinta de agrimensor, son necesarios por lo menos dos operadores, el **delantero** y el **zaguero**, siendo en este caso el zaguero el que dirige la operación; generalmente es el agri-

ensor mismo quien la dirige, pudiendo ser el delantero un peón. Otras veces tanto el delantero como el zaguero son peones, y el agrimensor que dirige camina al lado o detrás del zaguero vigilando la operación.

Suponiendo marcado el punto de arranque **A** por medio de jalón, estaca, mojón u otro medio cualquiera, y jalonada la línea a medir (si eso fuera necesario) y en el supuesto de que se emplean 11 fichas, se ejecutará la medición del siguiente modo: El zaguero señalará con la primera ficha el punto de arranque (no obstante estar éste marcado ya de alguna manera). Con las 10 fichas restantes en una mano y tirando la cinta con la otra, el peón delantero marchará en la dirección de la línea. Estando la cinta tendida, el zaguero hace al delantero las señas correspondientes para alinearse con el punto terminal de la línea a medir o con un jalón intermedio, imprimiendo a la cinta pequeñas sacudidas en sentido vertical. Extendida y alineada la cinta, y colocada por el zaguero la manija en el punto de arranque, gritará al delantero en voz alta: "clave", a lo que éste contestará: "clavado", después de colocada la ficha en debida forma. El zaguero sacará entonces la ficha de arranque y ambos operadores se trasladarán en la dirección de la alineación hasta que el zaguero llegue a la segunda ficha. Estirada y alineada nuevamente la cinta, arrimará el zaguero la manija a dicha ficha, colocando el delantero la tercera ficha. Sacada la segunda, se continúa en igual forma hasta que el delantero haya colocado la décima y última de las fichas que llevaba. Avanza entonces el zaguero para entregar las 10 fichas que lleva en su anillo. Si el equipo estuviera compuesto de un juego de sólo 10 fichas, recogería el delantero también la última ficha, la que substituiría por un piquete, teniendo así el delantero nuevamente completo un juego de 10 fichas.

Si la cinta es de 50 metros, se habrá medido en el momento de cambiar así las fichas, un trozo de línea de 500 metros, llamada **tirada**, la que se apunta por el agrimensor que dirige (al anotar la **entrega** o **muda** de las fichas).

Con el objeto de medir la fracción de la línea que queda, entre la última ficha así colocada sobre la línea y el punto terminal de la misma, el delantero puede caminar más allá del punto terminal, y extendida la cinta, el agrimensor se acerca al punto terminal de la línea para leer la fracción. En otros casos conviene más que el peón delantero camine solamente hasta el punto terminal, al que aplicará entonces la manija delantera. El agrimensor o zaguero leerá, en la última ficha clavada, sobre el reverso de la cinta, la fracción buscada; los centímetros del último simple o doble decímetro se pueden medir con doble decímetro o con un metro de bolsillo. El número de cintadas, multiplicadas por su largo, más el número de metros y fracción leídos en el reverso de la cinta, darán la longitud de la línea medida.

Para la segunda medición de la línea **AB**, se considerará el punto **B** como punto de arranque, procediendo en todo lo demás en la forma descrita.

6. Ejemplo práctico en el correspondiente formulario de registro de campo.

Observ..... Cinta:..... t = ... C Fecha:.....

| Trozo de línea | Longitud medida | | Promedio | Croquis y Observaciones |
|----------------|-----------------|---------|----------|-------------------------|
| | 1ª med. | 2ª med. | | |
| (1) | m | m | m | (4) |
| 1-2 | 117,99 | 117,95 | 117,97 | |
| 2-3 | 75,10 | 75,11 | 75,10 | |
| 3-4 | 79,75 | 79,78 | 79,76 | |
| 4-1 | 129,06 | 129,08 | 129,07 | |

Form. Agr. 1.

7. Ruleta de acero.

El tipo de cinta llamado "ruleta" (fig.4) es de uso muy común por las dimensiones muy reducidas y la comodidad del transporte. Las hay de 20, 25 y 50 metros, milimetradas en toda su extensión, o sólo en el primer decímetro, arrollables en un eje de rodete de metal. Tiene cubierta de cuero con manivela.

Las hay también de sólo 2 metros, milimetradas sobre resortes de reloj, que se enroscan en un rodete apretando un botón.

8. Cinta o ruleta de tela.

Las hay de 20 y 25 m.

Tienen estas cintas el inconveniente de poder sufrir considerables variaciones, encogiéndose con la humedad y alargándose con la fuerte tensión, por cuyas razones están proscritas de entre las medidas lineales topográficas destinadas a mensuras y trabajos catastrales, pudiendo solamente aplicarlas en trabajos que requieren poca precisión.

Para contrarrestar algo esas influencias perniciosas, se emplean a veces cintas de tela de muy fuerte tejido, barnizadas, con tramas metálicas, sirviendo así para levantamientos y mediciones de detalle, por su manejo muy cómodo y por ser en estos casos despreciables las variaciones indicadas.

9. Precauciones a tomar para alcanzar más precisión en las mediciones con cintas de acero.

Cuando se trate de obtener por medio de cintas de acero, la longitud de una línea con la máxima precisión posible, deben ser tenidos en cuenta el resultado de un contraste de las mismas, efectuado con anterioridad o en seguida de terminar la medición, como también la corrección por tempera-

tura. La tensión con que se emplea la cinta en la medición debe ser la misma que se empleó en el contraste. En la fracción se leerán los milímetros. Ver el ejemplo práctico del número siguiente.

10. Ejemplo práctico de medición de base topográfica, en el correspondiente formulario de registro de campo.

Para aumentar la precisión de las mediciones con cintas de acero, empléanse dinamómetros (fig. 6) y cintas con trazos en los extremos (fig. 2).

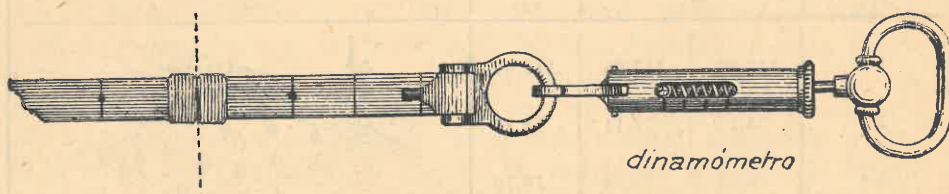


Fig. 6. "Medida entre trazos".

Observador..... Cinta: Chesterman N°.... Temperatura media: $t = 30^{\circ} \text{C}$. Fecha:.....

| Trozo de línea | Longitud sin corr. | | | Corrección | | | Long. corr. m | Observaciones y Croquis |
|----------------|--------------------|-----------|---------|---------------|---------|----------|---------------|--|
| | 1ª med. m | 2ª med. m | Prom. m | por contr. mm | temp mm | total mm | | |
| (1) | (2) | | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) |
| 1-2 | 75,863 | 75,868 | 75,866 | + 1,5 | + 8,3 | + 9,8 | 75,876 | $l = 25 \text{ m} + 0,5 \text{ mm}$ para $t = 20^{\circ} \text{C}$. (temp. de ref. *) Tens.: 6 kg. $\alpha = 0,000 011$ Form. Agr. 2. |
| 2-3 | 48,460 | 48,457 | 48,458 | + 1,0 | + 5,3 | + 6,3 | 48,464 | |
| 3-4 | 81,044 | 81,048 | 81,046 | + 1,6 | + 8,9 | + 10,5 | 81,057 | |

Despréndese de esta planilla que el contraste de la cinta y la medición fueron hechos con la tensión de 6 kg, que el coeficiente de dilatación del acero de la cinta empleada es de $11 \cdot 10^{-6}$ por grado centígrado, y que el resultado de contraste es: $l = 25 \text{ m} + 0,5 \text{ mm}$, a la temperatura de 20°C . (*) Es decir, la cinta es demasiado larga, los números de los resultados de las mediciones, por consiguiente, salen demasiado pequeños, debiendo por ello corregirse por los valores positivos de columna (4).

Como el trabajo fué ejecutado con temperatura de 30° , es decir con una temperatura en 10° más elevada que la del contraste (20°), hay una razón más porque la cinta empleada fuera demasiado larga, debiendo por ello aplicarse con un signo positivo también las correcciones por temperatura de columna (5).

11. Cintas y alambres de invar.

Cuando se trata de medir líneas con gran precisión como, por ejemplo, bases geodésicas, empléanse, en lugar de cintas de acero, cintas o alambres

(*) Temperatura de referencia, ver pág. 38.

de **invar** (aleación acero-níquel con 36 % de níquel y 64 % de acero), que tienen un coeficiente de dilatación unas 10 veces menor que el acero; es decir, la nueva aleación resultará ser prácticamente invariable (de lo cual ella deriva su nombre). Las destacadas propiedades de esta aleación fueron estudiadas por **Guillaume** (director de la **Oficina Internacional de Pesas y Medidas**), el que por primera vez puso de relieve sus grandes ventajas para la técnica.

12. Distancia inclinada y distancia reducida al horizonte; ángulo de pendiente, ángulo de elevación y ángulo de depresión.

Refiérese el procedimiento de medición anteriormente descrito a las operaciones en terreno horizontal.

Tratándose de mediciones en **terreno inclinado**, es necesario distinguir entre la distancia oblicua y la reducida al horizonte.

Siendo el terreno de pendiente uniforme, se puede medir la distancia inclinada, la que se reducirá luego al horizonte. Llámase este procedimiento **medir distancias según la pendiente**.

Si el terreno es ondulado, se lo divide en trozos de pendiente uniforme, los que se medirán como acabamos de indicar.

13. Medición en pendiente. Tabla de reducción de distancias inclinadas.

Midiendo con la cinta de acero en **terreno inclinado**, sería necesario emplearla en posición horizontal y proyectar su extremo libre por medio de una plomada.

Pero siendo éste un procedimiento muy penoso y poco exacto por el **error de catenaria** (o **error de pandeo**) que puede producirse, se prefiere medir la distancia inclinada, determinando luego el ángulo de inclinación α para el cálculo de la proyección ($= l \cdot \cos \alpha$) o de la **corrección** Δl :

$$\Delta l = l - l \cos \alpha = 2 \cdot l \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Consígnase en la siguiente tabla para valores α desde 0° hasta 6° las correspondientes **correcciones** para la unidad lineal.

Ejemplo práctico 1. Se ha medido la línea de $l = 134,67$ m de longitud, sobre un camino de 3,6 % de pendiente. ¿Cuál es la distancia reducida?

Corrección por inclinación:

$$0,64 \times 135 \text{ (con la regla de cálculo) } = 86 \text{ mm} \sim 0,09 \text{ m}$$

Luego, *distancia reducida*: $134,67 \text{ m} - 0,09 \text{ m} = 134,58 \text{ m}$.

*Tabla de Corrección
para la reducción de distancias inclinadas al horizonte*

| α | % | 1 m | α | % | 1 m |
|----------|-----|---------|----------|-------|---------|
| 0° 0' | 0,0 | 0,00 mm | 4° 0' | 7,0 | 2,44 mm |
| 10 | 0,3 | 0,00 | 5 | 7,1 | 2,54 |
| 20 | 0,6 | 0,02 | 10 | 7,3 | 2,64 |
| 30 | 0,9 | 0,04 | 15 | 7,4 | 2,75 |
| 40 | 1,2 | 0,07 | 20 | 7,6 | 2,86 |
| 50 | 1,5 | 0,11 | 25 | 7,7 | 2,97 |
| 1° 0' | 1,7 | 0,15 | 30 | 7,9 | 3,08 |
| 10 | 2,0 | 0,21 | 35 | 8,0 | 3,20 |
| 20 | 2,3 | 0,27 | 40 | 8,2 | 3,32 |
| 30 | 2,6 | 0,34 | 45 | 8,3 | 3,43 |
| 40 | 2,9 | 0,42 | 50 | 8,5 | 3,56 |
| 50 | 3,2 | 0,51 | 55 | 8,6 | 3,70 |
| 2° 0' | 3,5 | 0,61 | 5° 0' | 8,75 | 3,81 |
| 10 | 3,8 | 0,71 | 5 | 8,90 | 3,93 |
| 20 | 4,1 | 0,83 | 10 | 9,04 | 4,06 |
| 30 | 4,4 | 0,95 | 15 | 9,19 | 4,20 |
| 40 | 4,7 | 1,08 | 20 | 9,34 | 4,33 |
| 50 | 4,9 | 1,22 | 25 | 9,48 | 4,47 |
| 3° 0' | 5,2 | 1,37 | 30 | 9,63 | 4,60 |
| 10 | 5,5 | 1,53 | 35 | 9,78 | 4,74 |
| 20 | 5,8 | 1,69 | 40 | 9,92 | 4,89 |
| 30 | 6,1 | 1,87 | 45 | 10,07 | 5,03 |
| 40 | 6,4 | 2,05 | 50 | 10,22 | 5,18 |
| 50 | 6,7 | 2,24 | 55 | 10,36 | 5,33 |
| | | | 6° 0' | 10,51 | 5,48 |

Ejemplo práctico 2. Habiendo medido una línea de 350,50 m, con 4 cintadas de 25 metros en terreno de 7 % de inclinación, 6 cintadas en terreno de 4 % y el resto en terreno llano, se pregunta: ¿Cuál es la distancia reducida al horizonte?

Para 100 metros con pendiente de 7 %, reducción = 0,244 m,
 " 150 " " " " 4 %, " = 0,118 "

Corrección total..... = 0,362 m.

Luego, distancia reducida = 350,50 m — 0,36 m = 350,14 m.

14. Inclinómetro.

Empléase para la determinación del ángulo α aparatos muy diversos, generalmente muy sencillos. El representado en figura 7 es una **dioptra** rígidamente unida a un cuadrante de círculo graduado. Una **dioptra** (*) puede estar constituida por un tubo metálico con un peque-

(*) La dioptra fué descrita por *Herón de Alejandría* en su famosa obra "*Dioptrica*" (que significa "sobre la dioptra"). Ver pág. 119, Vol. 2 del Tomo III.

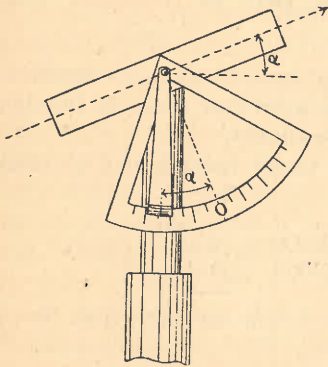


Fig. 7. DIOPTRA provista de cuadrante dividido, con péndulo (no indicado en la figura) fijado en el centro de la graduación.



Fig. 8. Midiendo la inclinación de un trozo de pendiente uniforme.

ño agujero dentro de una placa en el extremo frente al ojo del observador y con una cruz de hilos metálicos o de cerda hacia el objeto. La dioptra puede girar conjuntamente con el cuadrante alrededor de un eje horizontal, leyéndose la inclinación α en un índice apropiado. Dicho eje se encuentra en la punta de un bastón. Este bastón lo lleva el zaguero. Sobre otro bastón de igual longitud, que lleva el delantero, se coloca una señal apropiada. Resulta así que el ángulo que se mide corresponde a una paralela a la cinta tendida sobre el suelo (ver fig 8).

Puede emplearse para medir el ángulo de pendiente también ventajosamente el nivel de reflexión descrito en página 96 del volumen 2 del tomo III de nuestro Compendio.

15. Medición en pendiente por resaltos horizontales con el reglón.

Apóyese el primer reglón con un extremo en el suelo, sobre la estaca de arranque (fig. 9), en posición horizontal, ya sea a ojo o por medio de un nivel de albañil. Determínese la proyección del extremo libre con una plomada, señalando así en el terreno el punto en que debe colocarse el extremo del segundo reglón, como lo muestra la figura. Continúese así hasta llegar al fin de la línea. Se necesitan pues para este procedimiento tres operadores, dos que llevan los reglones y un tercero para determinar las verticales con la plomada.

Siendo $[L]$ la suma de las regladas y r el pequeño residuo al terminar la línea, tendremos para la longitud total L :

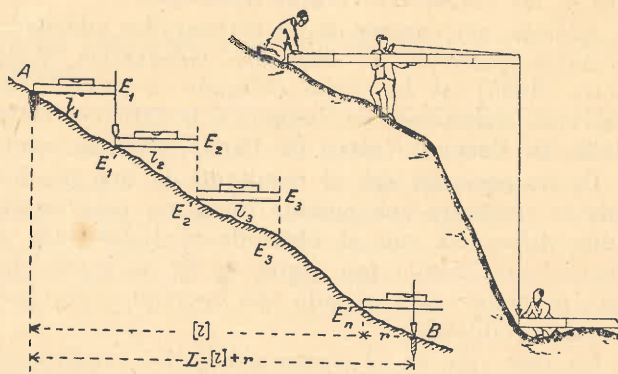


Fig. 9. Medición por resaltos horizontales con reglón.

$$L = [L] + r$$

16. Límites inferiores del ángulo de pendiente para la reducción gráfica de distancias a distintas escalas de dibujo.

Si las distancias se miden únicamente con el fin de introducirlas gráficamente dentro de algún plano y no para efectuar cálculos con ellas, se pueden simplificar notablemente las reducciones por pendiente.

El valor $\gamma = 0,1$ mm que generalmente se admite como inseguridad gráfica media da en las distintas escalas:

| | |
|-----------------------|-------------------|
| Escala 1: 200 = 2 cm, | 1: 1 000 = 10 cm, |
| " 1: 500 = 5 " | 1: 5 000 = 50 " |

y la corrección, para una distancia de 100 metros, según la tabla del N° 13 pág. 34:

| | |
|-----------------|------------------|
| 1° 0' = 1,5 cm, | 2° 30' = 9,5 cm, |
| 1° 40' = 4,2 " | 5° 40' = 48,9 " |

Luego, tratándose por ejemplo de la escala 1: 5 000, ángulos de pendiente inferiores a 5° 40' y distancias inferiores a 100 metros, sería para el dibujo superfluo reducirlas al horizonte, por ser la corrección a aplicar del mismo orden de magnitud que la inseguridad gráfica.

Los correspondientes valores límites de α para las escalas 1: 1 000, 1: 500 y 1: 200 son: 2° 30', 1° 40' y 1°, respectivamente.

17. Necesidad de los contrastes de medidas lineales.

El sistema métrico decimal, adoptado por la República Argentina por Ley 52, de fecha 10 de septiembre de 1863, y declarado de uso obligatorio en toda la República a partir del 1° de enero de 1878 por Ley 845, de fecha 13 de julio de 1877, ha sido muy provechoso para este país como para cualquiera que lo haya adoptado. Sin embargo, este provecho podría haber sido mayor aún de haberse observado estrictamente las prescripciones de dichas leyes y las respectivas reglamentaciones.

Además, por carecer de un comparador adecuado y de las correspondientes medidas patrones, el Instituto Geográfico Militar argentino hasta hace poco (1935) se ha visto obligado a enviar periódicamente sus medidas patrones (alambres de ínvar) a la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Breteuil (cerca de París), para su contraste.

De no proceder así, el resultado de una medición de arco de meridiano, que se efectuara con medida lineal no contrastada, podría acusar una sensible diferencia con el obtenido mediante otra medida lineal de idénticas condiciones, siendo tan digno de fe un resultado como el otro; diferencia que se podía haber evitado con oportunos contrastes previos de las medidas lineales empleadas.

Lo que vale en el orden geodésico, también rige en el orden eminentemente práctico de los trabajos que atañen a los inmediatos intereses económicos del pueblo.

Tratándose, por ejemplo, de operaciones de agrimensura y de trabajos de levantamiento en general, no puede ser indiferente con qué clase de medida el agrimensor efectúe sus mediciones. Actualmente nadie que com-

pre un terreno medido con cinta de acero no contrastada, sabe con certeza si realmente recibe completamente la superficie que según el contrato de compra-venta puede pretender. La cinta empleada puede ser demasiado corta comparada con un patrón exacto, resultando entonces la operación ventajosa para el vendedor, o ella puede ser demasiado larga, y se beneficiaría el comprador; es decir, en uno u otro caso se produce un perjuicio. Esto sucede cuando no existe la entidad competente o sea el órgano oficial suficientemente capacitado para llenar racionalmente la misión del contraste de las medidas lineales a emplearse en las múltiples operaciones que originan títulos-escrituras de propiedades y en los trabajos de levantamiento de carácter oficial.

La concordancia de las medidas lineales empleadas en todas las actividades públicas y privadas, es para el Estado de una importancia trascendental y sería inadmisibles que, por ejemplo, el metro usado en la Provincia de Jujuy no fuera el mismo que el empleado en la Patagonia.

De ahí la conveniencia de que el Gobierno no permita la venta y el uso de cintas de acero que no estén munidas del **sellado y certificado de contraste**, garantizándose así que toda persona que en el ejercicio de su oficio o profesión haga uso de medidas lineales, emplee instrumentos que satisfagan las condiciones de contraste oficiales establecidas.

Esta exigencia que hoy nos parece tan lógica y natural, casi como una verdad vulgar, sin embargo, es el resultado de una evolución lenta a través de varios siglos y debe ser puesta en práctica en forma definitiva por nuestra generación.

Las magnas instalaciones del **Comparador** y de la **Base de Contrastes** de 240m llevadas a cabo en 1935 por el Instituto Geográfico Militar argentino, responden, pues, a una ineludible y urgente **necesidad**, que emana de la misma misión del Instituto, de ejecutar los trabajos fundamentales, quedando así eliminado para éste el serio inconveniente que significaba la tarea de enviar frecuentemente sus alambres a Francia para el contraste. Ver págs. 17, 18 y 19, Volumen 1 del Tomo III.

18. Autoridad que ejecuta los contrastes y sellado de cintas y que otorga los correspondientes certificados.

Serán objeto de contraste de medidas lineales principalmente las cintas de acero destinadas a mensuras judiciales y levantamientos oficiales.

Para los trabajos en la Capital Federal y los territorios nacionales, en el actual estado de las cosas, conviene que el Instituto Geográfico Militar sea la autoridad encargada de la ejecución de las operaciones de contraste.

Para los trabajos ejecutados dentro de la jurisdicción provincial, incumbirá a los Departamentos de Obras Públicas la ejecución de los contrastes de las medidas lineales.

Mientras dichos departamentos no estén en condiciones de atender el servicio de contraste, el Instituto Geográfico Militar podría ser la autoridad que provisionalmente efectuara también los contrastes de las medidas lineales pertenecientes a los profesionales particulares y reparticiones públicas de las provincias.

19. Ventaja de la temperatura de referencia de 20°C, según DIN 102. Sellado y certificado.

En el estado actual de la agrimensura en nuestro país, las medidas con cintas de acero muchas veces no son corregidas por temperatura. Todas las mediciones efectuadas con ellas resultan entonces afectadas de un **error sistemático** proveniente de esa fuente, el que puede llegar a tener un efecto considerable cuando se mida a temperaturas muy diferentes de la del contraste.

Existía por ello la conveniencia de exigir a las fábricas constructoras de cintas de acero que éstas tengan su longitud nominal no a 0° sino a la temperatura de 20°C, llamada **temperatura de referencia** según DIN 102, la que puede ser considerada aproximadamente como un promedio de las temperaturas a que generalmente se efectúan mediciones en el terreno. Esta norma fué adoptada definitivamente por Alemania, Suiza, Holanda, Suecia, Austria y Estados Unidos de Norte América.

El **certificado de contraste** indicará entonces el largo de la cinta a 20°C, y para otras temperaturas dará el **incremento del largo** por 1°C y 1 m de longitud, el que es aproximadamente igual a 0,0115 mm por 1 m y 1°C. Además se indicará la tensión con que se efectuó el contraste (ver ejemplo práctico del N° 10, pág. 32).

La cinta contrastada deberá llevar grabadas en uno de sus extremos las iniciales de la oficina que haya otorgado el certificado y un número que individualiza la cinta, todo lo cual constituye el **sellado de la cinta**. Además, cada oficina numera los certificados que emite; los números de los certificados **no** se graban en la cinta.

20. Comparador de cintas de acero.

Es necesario que en mediciones cuidadosas se empleen las cintas de acero con la misma tensión con que han sido comparadas.

Para la construcción de un comparador simple de cintas de acero, puede adoptarse la disposición elegida en figura 10.

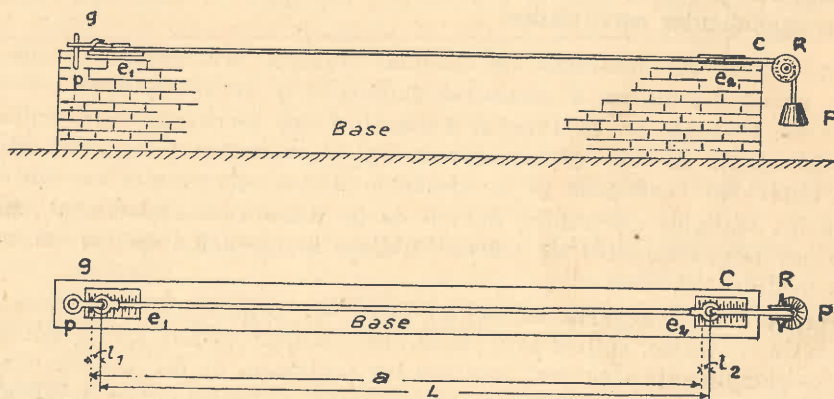


Fig. 10. Comparador para cintas de acero.

En un perno **p**, empotrado en un extremo de una sólida base horizontal, construída a propósito, va sujeta la cinta a contrastar, por medio de un gancho o anillo **g**. La cinta descansa en toda su extensión sobre dicha base que puede ser un muro o una serie de pilares poco distanciados entre sí. Una pesa **P** de un determinado número de kilogramos (6 kg, por ejemplo), en el otro extremo, mantiene la cinta con la tensión requerida. Sobre la roldana **R** pasa un delgado cable de acero **C**, que vincula la cinta con la pesa. En cada uno de los extremos puede hallarse embutida una escala milimetrada, las escalas e_1 y e_2 , cuyos ceros distan entre sí la longitud fija del comparador, **a** (50 metros por ejemplo), longitud que fué previamente determinada con ayuda de una medida de precisión superior (cinta de ínvar).

Estando colocada la cinta en la forma descrita, se efectuarán las lecturas l_1 en el extremo izquierdo, y l_2 en el derecho.

Llamando **L** la verdadera longitud de la cinta, tendremos:

$$L = a + (l_2 - l_1),$$

donde $(l_2 - l_1)$ expresa la **corrección por contraste** de la cinta de longitud **L**.

Procédese en tal forma cuando **a** (por ejemplo = 50 metros) es realmente la distancia exacta entre los trazos cero de las dos escalas. Pero cuando la verdadera distancia entre los trazos cero difiere algo, por ejemplo, en $\epsilon = 1,5$ mm de la distancia deseada, tendremos que la distancia entre los trazos cero es:

$$a + \epsilon,$$

resultando entonces para el largo de la cinta:

$$L = a + \epsilon + l_2 - l_1$$

Si designamos la expresión $\epsilon + l_2 - l_1$ por ΔL y deseamos averiguar la corrección β por unidad de medida (1 m), obtendremos:

$$\beta = \frac{\Delta L}{50}$$

y, por consiguiente, para la corrección ΔD de la distancia **D**:

$$\Delta D = \beta \cdot D$$

Siendo, por ejemplo, $\beta = +0,1$ mm, tendremos para la distancia **D** = 4567,8 m una corrección ΔD de + 0,5 m.

Luego, **valor corregido por contraste**:

$$4\ 568,3\ \text{m.}$$

21. Mediciones lineales expeditivas: Mediciones a pasos sin o con podómetro; el troqueómetro.

Empléase el paso de hombre y de caballo para medir distancias aproximadamente. En ambos casos, es necesario **talonear el paso** previamente, es decir determinar la relación que existe entre la longitud del paso y el metro.

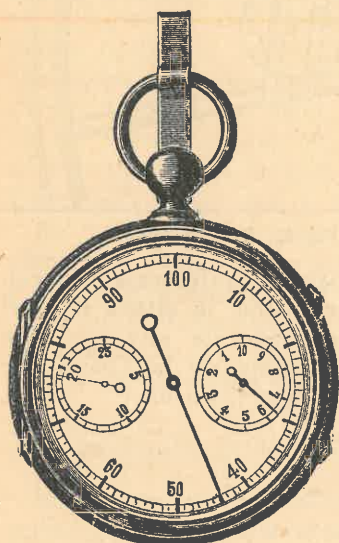


Fig. 11. Podómetro.
Lectura: 19 644.

El valor del paso de hombre se determina recorriendo varias veces una distancia de 100 metros, contando cada vez la cantidad de pasos. Con dividir 100 por el número (promedio) de pasos efectuados, obtendremos el largo del paso.

Acéptase generalmente 0,80 m como un valor medio del paso de hombre.

Con un poco de práctica se llega fácilmente a la **precisión** del 1% en la medición de las distancias a pasos, en terreno llano.

Para contar los pasos conviene emplear ciertos aparatos, llamados **podómetros** de un aspecto parecido a un reloj de bolsillo (fig. 11). Los podómetros registran automáticamente las sacudidas que sufre el cuerpo del hombre o de un animal que camina.

Admítase generalmente 0,80 m y 1,20 m, para el largo del paso de caballo que va **al paso** y **al trote**, respectivamente.

El **troqueámetro** (*) (fig. 12) es un contador de vueltas adaptable a cualquier rueda de vehículo: Colocado el aparato en cero, se lo aloja dentro de su estuche. Luego se fijará éste a los rayos de una rueda del vehículo. Recorrido con el vehículo en estas condiciones el camino cuya longitud se desea medir, se hacen las correspondientes lecturas. El número de vueltas así obtenido, se multiplica por un factor que expresa (en metros) el valor de la circunferencia de la rueda.

La historia de la medición de distancias por medio de vueltas de ruedas, remonta hasta **Herón de Alejandría** que vivía alrededor del año 100 a. J. C. Es especialmente digna de mención la célebre medición de arco de **Fernel**, médico de cabecera de Catalina de Médicis, de gran talento, quien midió en el año 1525 la distancia París-Amiens, contando las vueltas de una rueda de vehículo cuya circunferencia conocía. El ángulo en el centro lo obtuvo con medir, a mediodía, la altura del Sol en ambos puntos, formando la diferencia. Del resultado de esta medición Fernel dedujo un valor para la longitud del cuadrante de la Tierra que se acercaba al valor verdadero con sorprendente aproximación.

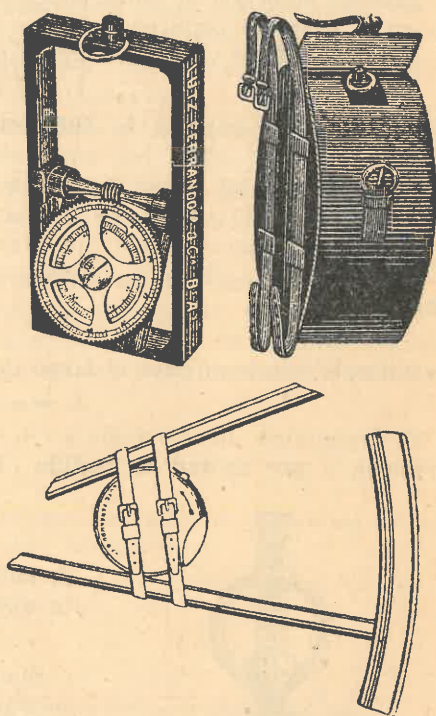


Fig. 12. Troqueámetro.

(*) Del griego trojós, rueda, circunferencia.

§ 8.

Tolerancias y errores en la medición lineal.**1. Necesidad de las tolerancias lineales.**

Suponemos medido el perímetro de un mismo lote de terreno por numerosos agrimensores y que todos hayan efectuado las operaciones con el mismo tipo de instrumento de medir, con el mismo cuidado y con entera independencia. Comparando los resultados de estas mediciones, se notará que todos difieren un poco entre sí, debido al efecto de los inevitables errores de observación. El **promedio** de estos resultados generalmente se toma como **valor más probable** de la cantidad buscada, precisamente por la igualdad de condiciones en que han sido ejecutadas las mediciones individuales. Las pequeñas discrepancias existentes entre el promedio y cada medición individual, permiten calcular una **discrepancia media**, llamada también **error medio**, magnitud característica para la clase de operaciones consideradas. Es decir: si los mismos agrimensores, en las mismas condiciones de trabajo, midieran el perímetro de otro lote de igual extensión, cometerían probablemente errores del mismo orden de magnitud que en el primer caso, aunque las desviaciones individuales pudieran resultar muy variadas. Errores grandes serán relativamente muy escasos. El **Cálculo de Probabilidades** nos ilustra sobre la **frecuencia** de un error de determinada magnitud comparada con el error medio; nos dice, por ejemplo, que el error igual al **cuádruplo del error medio** no tiene todavía la probabilidad de 1/1 000 de ser cometido en una determinada medición. En otros términos: Si 1 000 agrimensores hubieran medido el perímetro del lote considerado, no habría entre los 1 000 resultados probablemente ni uno solo que estuviera afectado de un error cuádruplo del error medio. Pero entre 10 000 mediciones probablemente ya habría varios errores de esa magnitud. En muchos Estados el límite de errores admisibles ha sido fijado en el **cuádruplo de un error medio**, que fué calculado en base a un gran número de observaciones.

Es también en el interés del Estado que todas las mediciones oficiales efectuadas dentro de una misma región, tengan una **precisión uniforme** para poder comparar las unas con las otras.

En la práctica conviene establecer un **límite** para los errores de medición, de modo que una medición cuyo error sobrepase tal límite será anulada y reemplazada por otra medición.

2. Definición de las tolerancias.

Entiéndese por **tolerancia** el conjunto de prescripciones oficiales y fórmulas que fijan los **errores límites** o **errores extremos** para cada una de las distintas operaciones del agrimensor, tanto en mediciones lineales, como angulares y altimétricas.

3. Necesidad de distinguir diferentes clases de terreno. Las tolerancias afectan los intereses económicos.

Pero no deben ser igualmente exigentes las prescripciones para las ciudades (terreno urbano) y para el campo (terreno rural), como tampoco deben ser las mismas para terrenos fáciles que no ofrecen dificultades a la medición (condiciones favorables), y para terrenos difíciles, regiones montañosas, bañados, etc. (condiciones desfavorables). Cuando se trate, por ejemplo, de efectuar las mediciones a que dan origen las expropiaciones de terrenos altamente cotizados, en pleno centro de la ciudad de Buenos Aires, por ejemplo, con el objeto de ensanchar avenidas y abrir diagonales, es lógico y evidente que el valor de los inmuebles de la zona deba tener influencia sobre la precisión del trabajo del agrimensor a realizar en la misma. Es decir, la fijación de tolerancias racionales no es sólo un asunto de interés profesional, sino una cuestión de interés económico que merece la atención de los poderes públicos.

4. Carácter empírico de las tolerancias.

Es de observar que las tolerancias no representan fórmulas exactas como las de las matemáticas puras, las de la trigonometría, por ejemplo. Las tolerancias se basan en **fórmulas empíricas**, obtenidas en virtud de un abundante material de observaciones y deducidas de acuerdo a las **leyes de errores** que rigen las operaciones cuya precisión se trata de reglamentar. Es en el interés de todos **uniformar** las tolerancias, eliminándose así el gran inconveniente que existe cuando cada provincia tiene sus tolerancias propias, generalmente distintas de las demás.

5. El conocimiento de las leyes de errores proporciona criterio técnico. Trabajo racional.

El conocimiento de las leyes de errores con su frecuente aplicación a los numerosos ejemplos que se presentan en la práctica (*), proporciona al agrimensor el criterio técnico necesario para poder elegir el instrumental adecuado y el método a emplear para alcanzar la precisión de antemano prescrita para un determinado trabajo, y viceversa, le permiten estimar con suficiente aproximación la precisión a esperar cuando se emplee cierto instrumental y cierto método de trabajo en terreno de determinadas condiciones. Sólo así el agrimensor puede proceder con **criterio técnico**, el que será su guía segura en la práctica, y que lo libra de los procedimientos mecánicos y rutinarios; lo pone en condiciones de **ejecutar racionalmente** sus operaciones, es decir, sin gastos inútiles de energía y dinero.

6. Clases de errores de la medición lineal. Ley de Gauss.

Los errores que pueden afectar las mediciones lineales (como también las demás operaciones del agrimensor), son de 3 clases: **errores groseros**, **errores sistemáticos** y **errores accidentales**.

(*) Ver: *Roberto Müller*. Aplicaciones prácticas del Cálculo de Compensación y de la Teoría de los Errores, Buenos Aires, 1924, obra que citamos con la abreviatura "C. de C."

1° **Errores groseros**, llamados también **equivocaciones**, son consecuencias de inhabilidad, descuido o cansancio del operador y consisten en errores de lectura de cinta, errores de anotación; etc. Estos errores no cuadran en ley de error alguna. Las mediciones afectadas de tales errores deben ser anuladas. Los errores groseros se descubren principalmente por la repetición de las mediciones.



Fig. 1. *Carlos Federico Gauss* (1777 - 1855).

2° Los **errores sistemáticos**, también llamados **errores regulares** o **errores constantes**, son errores que durante algún período afectan a los resultados de las mediciones siempre con el mismo signo, haciéndolos todos ya sea demasiado grandes o demasiado pequeños. Como ejemplos típicos de errores sistemáticos podemos mencionar: longitud defectuosa de la cinta en comparación con la que debería tener y que se supone que tenga, el uso continuo de la cinta con tensión demasiado baja o alta, diferencias entre la temperatura reinante durante la medición y la temperatura con la cual se hizo el contraste, etc. A pesar de que los errores sistemáticos en muchos casos tienen valores muy pequeños, la suma de ellos puede, sin embargo, llegar a valores tan grandes que perjudican sensiblemente la precisión del resultado final. De ahí la necesidad del contraste de las cintas de acero.

3° Los errores accidentales, también llamados errores casuales, fortuitos o irregulares, son errores que pueden producirse con igual probabilidad con signo positivo o negativo, y que se anulan en parte (pero sólo en parte), en la suma y, por lo tanto, también en el promedio de los resultados. Es ésta la clase de errores que generalmente se llaman los "errores inevitables de observación".

Estos errores tienen su origen principalmente en la imperfección de nuestros sentidos, por ejemplo la vista. Son errores que se componen de un gran número de errores muy pequeños, por ejemplo, errores debidos a la desviación de una recta a medirse, errores cometidos al aplicar la manija a la ficha colocada, errores de lectura, etc., todos ellos errores que, como dijimos, en parte se destruyen, en parte se suman.

Los errores accidentales, que por su naturaleza parecen escapar a toda teoría, siguen, sin embargo, como lo enseña el Cálculo de las Probabilidades, una ley célebre, la llamada **Ley de Gauss** (fig. 1) sobre la propagación de los errores accidentales, la que nos pone en condiciones de reducir a un mínimo los efectos perjudiciales de esta clase de errores.

7. Leyes de errores.

Se deduce de la naturaleza de los errores sistemáticos que el error β de una cinta referido a la unidad, produce en la medición un efecto proporcional al largo de la línea medida, es decir: Siendo l la longitud de la línea y M_s el error sistemático total, tendremos:

$$(I) \quad M_s = \beta \cdot l$$

En palabras: (1ª ley) El error sistemático aumenta proporcionalmente a la longitud de la línea medida.

En cambio, el efecto de los errores accidentales, por producirse ellos indiferentemente con signo positivo o negativo, y por compensarse en gran parte en la suma y en el promedio, no aumenta proporcionalmente a la longitud. Es por medio del cálculo de las probabilidades que se estableció la correspondiente ley (2ª ley) que dice:

El error accidental de una línea medida aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la longitud de la línea medida.

Siendo α el error accidental referido a la unidad y M_a el error accidental total, tendremos:

$$(II) \quad M_a = \alpha \sqrt{l}$$

8. Acción de conjunto de los errores sistemáticos y accidentales.

Hemos considerado en el número anterior separadamente los errores sistemáticos y accidentales de la medición lineal. Pero la práctica de las mediciones nos enseña que los errores concurren en su acción de conjunto

a modificar o falsear los resultados de nuestras operaciones en mayor o menor grado.

Siendo $\beta \cdot l$ el efecto del error sistemático y $\alpha\sqrt{l}$ el error accidental, el cálculo de compensación nos enseña que el **efecto total M** será entonces, según la **ley de Gauss**:

$$(III) \quad M = \sqrt{(\alpha\sqrt{l})^2 + (\beta \cdot l)^2} \quad (\text{ver págs. 94-96 de "C. de C."}).$$

Es decir, el error total **M** no es simplemente la suma de los errores accidentales y sistemáticos aisladamente considerados, sino sólo la **raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los mismos**.

La razón de esto reside en la circunstancia de que el error accidental, $\alpha\sqrt{l}$, acumulado por la suma de muchos errores elementales, puede en realidad con tanta probabilidad ser positivo como negativo, y, en consecuencia, puede sumarse en algunos casos o restarse en otros con el error sistemático, $\beta \cdot l$.

9. El error medio accidental α en buenas condiciones del terreno.

Muchos miles de operaciones lineales duplicadas (urbanas y rurales) ejecutadas en los años 1870-1880 en distintos países europeos (en buenas condiciones del terreno) con el objeto de establecer **tolerancias racionales**, dieron para el **error medio accidental α** los siguientes valores medios:

Mediciones de catastro urbano:

$$\alpha = \underline{0,7 \text{ mm}},$$

Mediciones de catastro rural:

$$\alpha = \underline{5 \text{ mm}}.$$

Se aplicó en estas determinaciones la siguiente fórmula:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \quad (*) \quad (\text{ver: C. d. C., pág. 255}).$$

donde **n** significa la cantidad de líneas de longitud **l** medidas, cada una dos veces (mediciones duplicadas), y **d** la diferencia o discrepancia que en cada una de esas operaciones duplicadas se revelaba entre los dos valores obtenidos en la ida y en la vuelta.

10. Gradación de los valores básicos para las tres clases de terreno.

Adoptando los valores $\alpha = 0,7 \text{ mm}$ y $\alpha = 5 \text{ mm}$ como básicos para mediciones urbanas y rurales, respectivamente, y buenas condiciones del terreno, podemos obtener los correspondientes valores para **terreno mediano** y **terreno desfavorable**, por una conveniente gradación de los valores básicos de acuerdo a los resultados de numerosas operaciones ejecutadas en tales terrenos.

(*) [] = Σ que significa *suma*.

α para mediciones urbanas. Se suele tomar el **duplo** de α para condiciones medianas y el **triple** de α para condiciones desfavorables del terreno; tendremos entonces:

| | |
|--------------------|--|
| $\alpha = 0,7$ mm | para mediciones urbanas en condiciones favorables, |
| $\alpha = 1,4$ " " | " " " medianas, |
| $\alpha = 2,1$ " " | " " " desfavorables. |

α para mediciones rurales. Adoptamos, de acuerdo a la **Instrucción IX del Catastro Prusiano**, la siguiente gradación:

| | |
|------------------|--|
| $\alpha = 5$ mm | para mediciones rurales en condiciones favorables, |
| $\alpha = 6$ " " | " " " medianas, |
| $\alpha = 7$ " " | " " " desfavorables. |

11. Concepto del error accidental máximo, 3α ó 4α .

Sabemos por la práctica que el error accidental medio deducido de un gran número de observaciones, es sobrepasado muchas veces, en algunas mediciones individuales, y que se producen errores, que bastantes veces alcanzan al duplo y en muy pocos casos al triple, pero casi nunca al cuádruplo del error medio, como ya dijimos en pág. 41.

Si por medio de una reglamentación oficial se establece una tolerancia, se sobreentiende que las operaciones que no cuadran dentro de ella, deben ser **repetidas**.

Adoptando la tolerancia $\alpha_{\text{máx}} = 3\alpha$, resultaría que entre 1 000 observaciones efectuadas con regular cuidado, habría que repetir probablemente 3, lo que no recargaría sensiblemente el presupuesto de los trabajos catastrales.

Pero como generalmente no podemos comparar el resultado con el **valor verdadero** de la magnitud observada, por desconocerlo, sino tan sólo con otra medición hecha anteriormente, la que a su vez tendrá su error, conviene todavía ampliar más la tolerancia en razón de 1 a $\sqrt{2}$, es decir, es razonable establecer:

$$\alpha_{\text{máx}} = 3\alpha\sqrt{2} \quad (\text{en lugar de } \alpha_{\text{máx}} = 3\alpha)$$

y como $3\sqrt{2} = 4,24$, se puede adoptar el valor redondeado:

$$\underline{\alpha_{\text{máx}} = 4\alpha.}$$

12. Valores para el error accidental máximo para las distintas clases de terreno, fácil, mediano y difícil y mediciones urbanas y rurales.

Tendremos entonces para el **error accidental máximo** para las distintas clases de terreno los siguientes valores:

Para mediciones urbanas:

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\text{máx}} = 3\sqrt{2} \cdot 0,7 \text{ mm} = 4,24 \cdot 0,7 \text{ mm} = \underline{3} \text{ mm en cond. favorables,} \\ \quad \quad \quad = 3\sqrt{2} \cdot 1,4 \text{ mm} = 4,24 \cdot 1,4 \text{ mm} = \underline{6} \text{ mm " " medianas,} \\ \quad \quad \quad = 3\sqrt{2} \cdot 2,1 \text{ mm} = 4,24 \cdot 2,1 \text{ mm} = \underline{9} \text{ mm " " desfavorables.} \end{array} \right.$$

Para mediciones rurales:

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\text{máx}} = 3 \cdot \sqrt{2.5} \text{ mm} = 4.5 \text{ mm} = \underline{20} \text{ mm} \text{ en condiciones favorables,} \\ \quad = 3 \cdot \sqrt{2.6} \text{ mm} = 4.6 \text{ mm} = \underline{24} \text{ mm} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{medianas,} \\ \quad = 3 \cdot \sqrt{2.7} \text{ mm} = 4.7 \text{ mm} = \underline{28} \text{ mm} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{desfavorables.} \end{array} \right.$$

13. El error sistemático máximo, $\beta_{\text{máx}}$, basado en disposiciones oficiales sobre tolerancias de contrastes.

La determinación del error sistemático máximo $\beta_{\text{máx}}$ conviene basarla en las disposiciones oficiales que establecen las **diferencias máximas que pueden existir entre las longitudes verdaderas de las cintas contrastadas y las nominales que deberían tener.**

De acuerdo con los números 3 y 5 del párrafo 4 de la ley alemana de Pesas y Medidas, de fecha 27 de diciembre de 1884 (**Eichordnung für das Deutsche Reich**), el largo de una medida lineal, después de tener en cuenta la corrección por temperatura, no puede acusar con la medida patrón discrepancias en más o menos superiores a:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ mm en cintas de acero de 10 metros,} \\ 4 \text{ '' '' '' '' '' '' '' 20 ''} \end{array}$$

tolerancias que nos darían para el **error sistemático máximo, $\beta_{\text{máx}}$ referido a la unidad (1 m)**, respectivamente:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{máx}} &= \frac{4 \text{ mm}}{20} = \underline{0,2 \text{ mm}}, \\ &= \frac{3 \text{ mm}}{10} = \underline{0,3 \text{ mm}} \end{aligned}$$

14. Valores del error sistemático máximo $\beta_{\text{máx}}$ para las distintas clases de terreno, urbano y rural.

Basándonos en los datos del número anterior, adoptaremos para el **error sistemático $\beta_{\text{máx}}$** los siguientes valores:

Mediciones urbanas:

$$(VI) \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\text{máx}} = 0,2 \text{ mm en condiciones favorables del terreno,} \\ \quad = 0,3 \text{ mm '' '' medianas '' ''} \\ \quad = 0,4 \text{ mm '' '' desfavorables ''} \end{array} \right.$$

Mediciones rurales: De acuerdo a la citada **Instrucción IX**, tenemos:

$$(VII) \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\text{máx}} = 0,7 \text{ mm en condiciones favorables del terreno,} \\ \quad = 0,8 \text{ mm '' '' medianas '' ''} \\ \quad = 1,0 \text{ mm '' '' desfavorables ''} \end{array} \right.$$

15. Fórmulas de tolerancias lineales.

Introduciendo ahora los valores (IV) a (VII) para $\alpha_{\text{máx}}$ y $\beta_{\text{máx}}$ respectivamente, en la ecuación fundamental:

$$M = \sqrt{(\alpha \sqrt{l})^2 + (\beta \cdot l)^2},$$

obtendremos las siguientes **6 fórmulas de tolerancias lineales:**

$$\begin{array}{l}
 \text{(VIII)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Mediciones urbanas:} \\
 \text{I. } t = \sqrt{(0,003 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0002 \cdot l)^2} \text{ en condiciones favorables,} \\
 \text{II. } t = \sqrt{(0,006 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0003 \cdot l)^2} \text{ '' '' medianas,} \\
 \text{III. } t = \sqrt{(0,009 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0004 \cdot l)^2} \text{ '' '' desfavorables.} \\
 \text{Mediciones rurales:} \\
 \text{IV. } t = \sqrt{(0,020 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0007 \cdot l)^2} \text{ en condiciones favorables,} \\
 \text{V. } t = \sqrt{(0,024 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0008 \cdot l)^2} \text{ '' '' medianas,} \\
 \text{VI. } t = \sqrt{(0,028 \cdot \sqrt{l})^2 + (0,0010 \cdot l)^2} \text{ '' '' desfavorables.}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

o sea, ligeramente transformadas para la comodidad del cálculo:

$$\begin{array}{l}
 \text{(IX)} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Mediciones urbanas:} \\
 \text{I. } t = 0,01 \sqrt{0,09 \cdot l + 0,0004 \cdot l^2} \text{ en condiciones favorables,} \\
 \text{II. } t = 0,01 \sqrt{0,36 \cdot l + 0,0009 \cdot l^2} \text{ '' '' medianas,} \\
 \text{III. } t = 0,01 \sqrt{0,81 \cdot l + 0,0016 \cdot l^2} \text{ '' '' desfavorables,} \\
 \text{Mediciones rurales:} \\
 \text{IV. } t = 0,01 \sqrt{4 \cdot l + 0,0050 \cdot l^2} \text{ en condiciones favorables,} \\
 \text{V. } t = 0,01 \sqrt{6 \cdot l + 0,0075 \cdot l^2} \text{ '' '' medianas,} \\
 \text{VI. } t = 0,01 \sqrt{8 \cdot l + 0,0100 \cdot l^2} \text{ '' '' desfavorables.}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

En la fórmula V del grupo (IX) se adoptó el coeficiente 0,0075 por ser el promedio de los coeficientes correspondientes (0,0050 y 0,0100) en las fórmulas IV y VI.

Con estas fórmulas (IX) fueron calculadas nuestras tablas que figuran en las páginas 3 a 14 del Apéndice I.

16. Suplementos a las fórmulas de tolerancias lineales.

Hemos supuesto hasta ahora que los puntos extremos de las líneas medidas o a medir se hallen exactamente definidos en el terreno por medio de marcaciones convenientes. Pero esta suposición no se ajusta bien a la generalidad de los casos. Cuando los puntos extremos como todavía sucede en muchos casos, no están bien marcados, las tolerancias deben aumentarse todavía por **suplementos** convenientemente determinados.

Si admitimos una inseguridad de 1 cm en el arranque y el cierre de una línea, consideradas estas operaciones separadamente, y, por consiguiente, 1 cm $\sqrt{2} = 1,4$ cm por cada línea (que es aproximadamente la cantidad que, fija la **Instrucción para el Catastro de Austria**), tendremos, con una conveniente gradación de valores, los siguientes suplementos:

Mediciones urbanas:

Tabla I: + 0,015 m, II: + 0,03 m, III: + 0,05 m;

Mediciones rurales:

Tabla IV: + 0,10 m, V: + 0,15 m, VI: + 0,20 m,

Estos suplementos deben quedar suprimidos a partir de la época en que la reglamentación oficial de las mediciones catastrales y de agrimensura exija una marcación técnicamente racional de los puntos límites de la propiedad raíz. Ver págs. 11-13, Vol. 1 del Tomo III.

17. Tabla gráfica y ejemplos de aplicación.

Las curvas (ramas de hipérbolas) de la página 2 del Apéndice I representan **gráficamente** los valores de las tolerancias que expresan las 6 fórmulas hasta $l = 1\,000$ metros.

En la página 14 se hallan calculados algunos **ejemplos prácticos** para ilustrar el uso de las tablas numéricas.

Instrumentos sencillos para el trazado de ángulos fijos y la medición de ángulos cualesquiera en el terreno.

Divídense estos instrumentos en **dos categorías**:

Instrumentos dióptricos: **escuadra a pínulas** y el **pantómetro**,
 " de reflexión y refracción: **escuadra óptica** y el **sextante**, los que trataremos en los dos siguientes párrafos.

§ 9.

Escuadra a pínulas y pantómetro.

1. Formas más primitivas de la escuadra de agrimensor.

En una de sus formas más primitivas la escuadra fué descrita hace más de dos mil años por **Herón de Alejandría**: "Dos reglas de madera, ensambla-

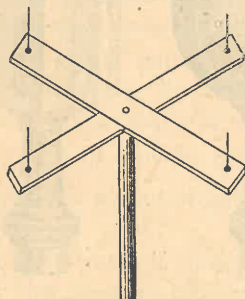


Fig. 1. El plano visual está determinado por dos estilos verticales.

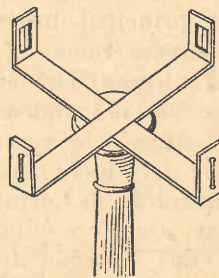


Fig. 2. El plano visual está determinado por un par de pínulas verticales.

das perpendicularmente en forma de **cruz** (fig.1), con **estilos** colocados normalmente en sus extremos y con una varilla fijada en el centro de la cruz que sirve de pie”.

Estando la cruz en posición horizontal, quedarán determinados, por los dos estilos de cada regla, dos planos visuales verticales perpendiculares entre sí.

En la **forma** algo más perfeccionada representada en figura 2, los estilos están substituídos por **pínulas** ubicadas dentro de aletas en los extremos de las reglas. Las pínulas son de dos formas distintas. Las aletas del lado en donde se coloca el observador llevan una hendidura muy angosta, de sólo 0,5 mm de ancho, con dos pequeños agujeros, uno arriba y otro abajo, destinados éstos para la rápida orientación del operador antes de dirigir con más precisión la visual hacia el objeto. Estas pínulas se llaman **pínulas oculares**, por encontrarse cerca del ojo. En la aleta opuesta de cada regla hay una “ventana” de forma rectangular con una cerda vertical estirada en el medio. Esta pínula se llama **pínula objetiva**, por corresponder su lugar al sitio del objetivo de un anteojó.

Cada par de pínulas forma así una **dioptra**, constituída por la hendidura de la pínula ocular y el “hilo” de la pínula objetiva, las que sirven para determinar un plano perpendicular al determinado por el otro par de pínulas.

Mirando el operador por el agujero inferior o superior de la pínula ocular según que se trate de una visual inclinada hacia arriba o hacia abajo, encontrará rápidamente el punto a visar, un jalón, por ejemplo; al que bisectará luego con más precisión observándolo por la hendidura y cubriéndolo con el hilo de la pínula objetiva. Para determinar el segundo lado del ángulo recto, se colocará con ayuda de la otra dioptra (cuidando de no mover el aparato), un segundo jalón sobre la visual perpendicular a la dada por el primer jalón.

Se ha trazado así en el terreno el ángulo recto correspondiente a los dos planos dióptricos de la escuadra.

2. Distintas formas de escuadras a pínulas más modernas.

La escuadra a pínulas que constituyó el principal instrumento de los agrimensores romanos, se perfeccionó con el tiempo. De las muy diversas formas que se emplearon, la **esférica** (fig.3) ofreció la ventaja de permitir visuales muy inclinadas. También existen escuadras de formas cónicas, prismáticas (fig.4) y cilíndricas. En estos tipos de instrumentos las pínulas ocular y objetiva son iguales y caracterizadas por la fina hendidura con



Fig. 3.

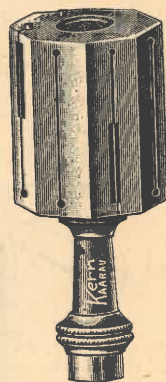


Fig. 4.

Escuadra esférica. Escuadra prismática.

los agujeros en sus extremos, pudiéndose por eso tomar con ellas visuales de sentido contrario y observar tanto en una dirección **AB** como en la opuesta **BA**.

Para más detalles sobre la "dioptra" ver pág. 119, Vol. 2 del Tomo III.

3. Aplicaciones elementales de la escuadra a pínulas.

Las escuadras a pínulas sirven para:

a) levantar una perpendicular sobre una línea dada, por ejemplo en el punto **C** de la recta **AB** (fig. 5);

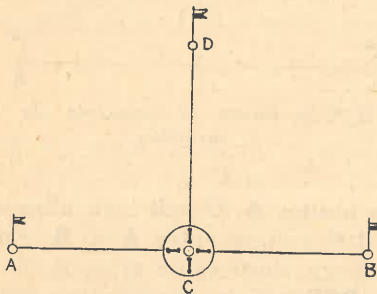


Fig. 5. Levantando una perpendicular.

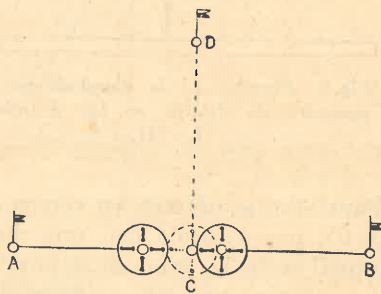


Fig. 6. Bajando una perpendicular.

b) para bajar una perpendicular (operación más frecuente que la anterior en las mediciones catastrales), por ejemplo desde el punto **D** sobre la recta **AB** (fig. 6), procediéndose en ello por tanteos como lo ilustra la figura 6.

c) para intercalar un punto sobre una recta cuyos puntos extremos son inaccesibles (fig. 7).

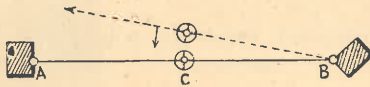


Fig. 7. Intercalando un punto C.

4. Verificaciones; precisión de la escuadra.

Para el uso correcto de la escuadra a pínulas deben cumplirse las siguientes condiciones:

- 1) que el pie del aparato se halle en posición vertical, y para las operaciones a) y b) del número 3 debe estar situado exactamente en la alineación sobre la cual se trata de levantar o bajar una perpendicular;
- 2) que cada par de pínulas se encuentre dentro de un plano vertical;
- 3) que los planos dióptricos formen exactamente entre sí el ángulo fijo de 90° .

Para verificar la posición vertical del pie, basta observar el aparato a ojo en dos direcciones aproximadamente perpendiculares entre sí; y para examinar la buena alineación del pie, se visará con el aparato en la dirección **CA** y luego en la opuesta **CB** (fig. 7).

La segunda condición se verificará por medio de una plomada.

Para examinar la tercera condición se procederá de una manera análoga a la que se emplea cuando se trata de verificar la bondad de una **escuadra de dibujo** (véase fig. 8).

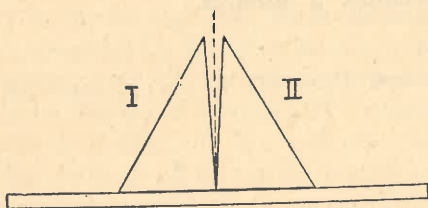


Fig. 8. Prueba de la bondad de una escuadra de dibujo en las posiciones I y II.

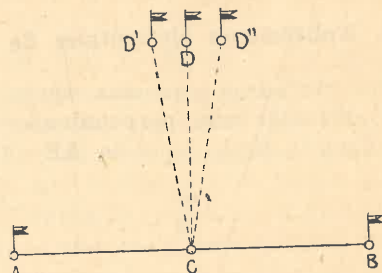


Fig. 9. Se ilustra el principio de la inversión.

Para ello, se marcan en terreno llano, tres puntos **A**, **C** y **B** bien alineados (fig. 9), por ejemplo con una distancia de 100 metros entre **A** y **B**. En el punto **C** se traza primero el ángulo **ACD'** y luego, después de girar la escuadra a pínulas por 90° , se trazará el ángulo **BCD''**. Si la escuadra es exacta los dos puntos **D'** y **D''** coinciden, o por lo menos se hallan alineados desde **C**. La magnitud del ángulo **D'CD''** representa el doble error de la escuadra.

Precisión. Siendo, por ejemplo, $CD = CD' = CD'' = 50$ metros, y $D'D'' = 18$ cm, el error angular de la escuadra será de:

$$\frac{9}{5000} \cdot 3438' = 6'.$$

Es decir, el ángulo formado por los dos planos dióptricos de la escuadra es de $89^\circ 54'$, en lugar de 90° .

Si para una escuadra a pínulas resulta un error de sólo $1'$, se la considera exacta.

5. Principio de la inversión, su importancia general.

Hemos dado en el número que antecede el primer ejemplo de la aplicación del importante **principio de la inversión** generalmente empleado en la verificación y uso racional de casi todos los instrumentos astronómicos, geodésicos y topográficos. Su característica reside en la circunstancia de que se duplica el efecto del error y que se revela fácilmente, pudiéndose entonces corregirlo o eliminar su efecto por un procedimiento operativo adecuado.

6. Trazado de un ángulo recto con escuadra falsa.

Como los segmentos **CD'** y **CD''** (fig. 9) son simétricos con respecto a la verdadera perpendicular **CD**, se ve en seguida que también con **escuadra falsa** se podría trazar un ángulo recto a condición de que se efectúe la ope-

ración dos veces, colocando un jalón que marque la posición buscada en el punto medio del segmento **D'D''**.

7. Precisión de la perpendicular; longitud máxima de la ordenada en las mediciones de catastro urbano.

A raíz de muchas mediciones efectuadas con la escuadra a pínulas, se encontró para el **error medio** los siguientes valores:

2' en terreno llano,
3' a 5' en terreno accidentado.

Para un error medio de 2' y una longitud de la ordenada de 50 metros, resultaría para la desviación lateral un efecto máximo de:

$$\frac{2}{3438} \cdot 50 \text{ m} = 0,03 \text{ m}.$$

En un plano catastral a escala 1:500, correspondería a una inseguridad del dibujo de un décimo de milímetro 5 cm en el terreno; es decir, dos puntos en el terreno que distan menos de 5 cm pueden considerarse coincidentes para un plano catastral a 1:500.

Adóptase por esta razón la cantidad de 50 metros como **longitud máxima de la ordenada en mediciones catastrales urbanas**.

8. Pantómetro, su descripción, precisión y restricción de su empleo.

Con el objeto de ampliar el uso de la escuadra a pínulas para poder medir **ángulos horizontales** cualesquiera, se modificó la escuadra cilíndrica del siguiente modo: Se cortó el cilindro perpendicularmente a su eje longitudinal, en dos piezas, una inferior solidaria con el enchufe del pie (fig. 10) y otra superior, que gira alrededor de un eje vertical. La parte inferior lleva en su borde superior una división en grados y la superior un índice con nonio. A este instrumento (ver fig. 10) se le suele llamar **pantómetro**. (*)

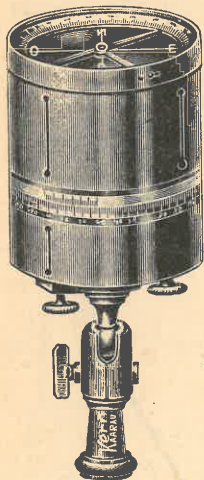


Fig. 10. Pantómetro.

Tratándose en este caso de un instrumento con limbo dividido afectado de un cierto **error de excentricidad** (que existe cuando el cilindro no gira exactamente alrededor del centro de la división sino alrededor de otro punto diferente), al que se añade todavía el que se comete en la bisección de un punto por medio de las pínulas, podemos admitir para la inseguridad de cada plano visual 4' a 5' o sea $4\sqrt{2}$ a $5\sqrt{2}$ para la **inseguridad de un ángulo medido**.

Restricción del empleo del pantómetro.

Tratándose por ejemplo de un levantamiento catastral rural a escala 1:2000 (0,1 mm del plano correspondiente a 0,2 m en el terreno), tendría-

(*) Pantómetro, del griego *pan*, todo, y *metron*, medida.

mos para la máxima longitud y de una visual:

$$\frac{5'}{3438'} \times y = 0,2 \text{ m,}$$

Luego:

$$y = 138 \text{ m.}$$

Es decir que no debería emplearse el pantómetro para tomar visuales a puntos que disten más de 138 metros del instrumento cuando se aspire a alcanzar toda la precisión compatible con la escala del levantamiento catastral.

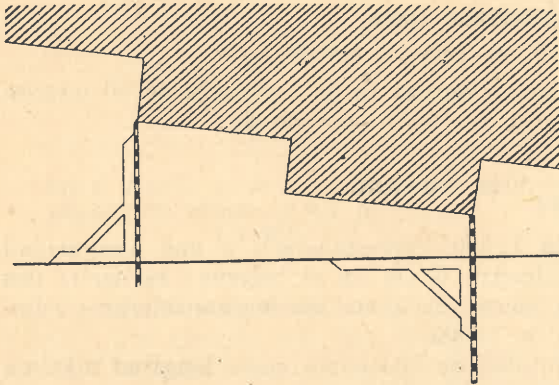


Fig. 11. Escuadras de madera para bajar y medir perpendiculares cortas.

9. Perpendiculares cortas.

Perpendiculares muy cortas, de 2 metros, por ejemplo o menores, trázanse convenientemente con ayuda de escuadras de madera (fig. 11), recurso éste que es de gran utilidad en los trabajos catastrales urbanos.

§ 10.

Escuadras ópticas y el sextante.

Escuadra de reflexión.

1. Principio en que se funda la escuadra de reflexión.

La aplicación de espejos en la construcción de instrumentos geodésicos y topográficos está basada en la ley óptica sobre la reflexión que dice: el ángulo de incidencia que un rayo de luz forma con la normal en superficies reflectantes, es igual al ángulo de reflexión, estando los dos rayos, el incidente y el reflejado, en un mismo plano.

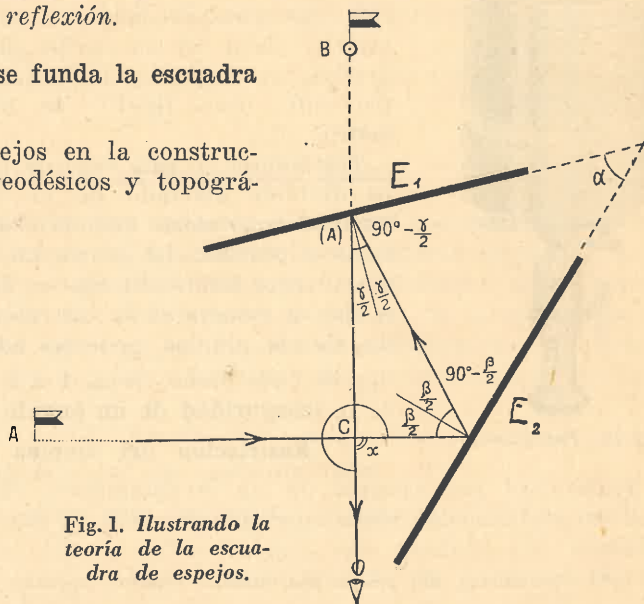


Fig. 1. Ilustrando la teoría de la escuadra de espejos.

Sean E_1 y E_2 (fig. 1) dos espejos planos que forman entre sí un ángulo α . Sea A un jalón situado a la izquierda del observador. Mirando entonces desde O hacia el espejo E_1 , aparecerá ahí la imagen (A) del objeto A . Suponemos ahora que coincide con esta imagen (A) la visual al jalón B visto directamente por arriba o por debajo del espejo E_1 . Podemos preguntar entonces: ¿Cuál es el ángulo x que los dos rayos, que salen respectivamente de A y B , forman en el punto de intersección C ?

Como x es ángulo externo de un triángulo, tenemos (véase fig. 1):

$$(1) \quad x = \beta + \gamma$$

Por otra parte tenemos para la suma de los ángulos de otro triángulo:

$$\alpha + 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$$

Luego:
$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Substituyendo este valor en la ecuación (1), resulta:

$$x = 2\alpha$$

2. Escuadra de espejos de agrimensor.

Otra deducción de la relación $x = 2\alpha$. Contando las desviaciones que sufren los rayos incidentes como **positivas** cuando son en el sentido de la marcha de las agujas del reloj, y **negativas** cuando son de sentido contrario, tendremos según figura 3:

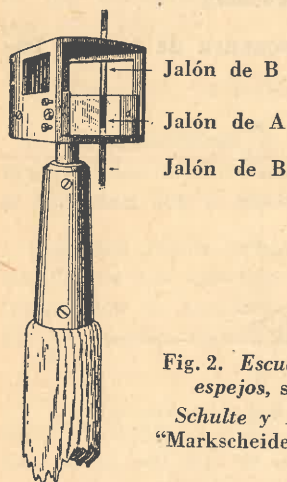


Fig. 2. Escuadra de espejos, según Schulte y Loehr, "Markscheidekunde".

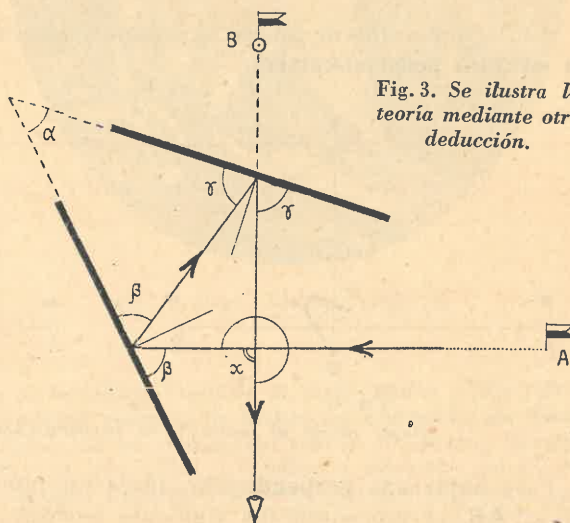


Fig. 3. Se ilustra la teoría mediante otra deducción.

Desviación producida por la 1ª reflexión: $+ 2\beta$
 » » » » 2ª » : $+ 2\gamma$
 » total... .. = $+ 2\beta + 2\gamma = 360^\circ - x$,
 $x = 360^\circ - 2(\beta + \gamma)$
 $x = 2[180^\circ - (\beta + \gamma)]$
 Siendo: $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$
 resulta: $x = 2\alpha$

La escuadra de espejos es un instrumento de mano que no necesita montarse en un pie como la escuadra a pínulas; pero se puede también usarla con pie, el que en este caso tendría en cierto modo el papel de plomada rígida, que se pondría vertical a ojo, indicándose así la proyección aproximada del punto **C** (fig. 1). Si no se usa pie, conviene atar a la escuadra el hilo de una plomada de poco peso.

La relación $x = 2\alpha$ expresa: **El ángulo que forma el rayo incidente con el doblemente reflejado es el duplo del ángulo que forman entre sí las superficies reflectantes.**

En la escuadra de espejos de agrimensor se hace $\alpha = 45^\circ$, para que así resulte $x = 90^\circ$.

3. Cruz de espejos.

En el instrumento llamado **cruz de espejos** hállanse colocados dos espejos, uno normalmente sobre el otro y formando entre sí un ángulo de 90° . Sirve para trazar ángulos de 180° (prolongaciones de rectas dadas e intercalación de nuevos puntos sobre alineaciones).

Ver también "Optica", pág. 8.

4. Aplicaciones de la escuadra de espejos, su corrección.

Por lo que antecede queda explicado el uso de la escuadra de espejos para levantar perpendiculares.

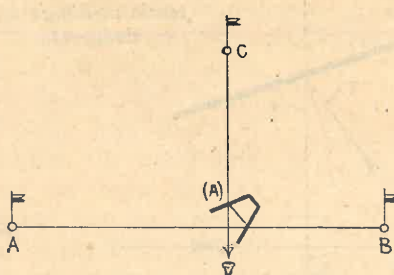


Fig. 4.

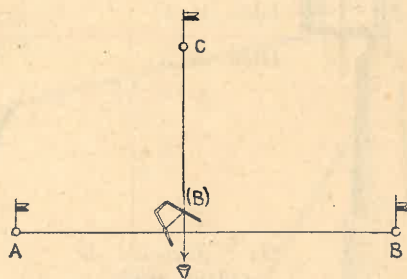


Fig. 5.

Bajar desde el punto **C** la perpendicular sobre la línea **AB**.

Para bajar una perpendicular desde un punto **C** (figs. 4 y 5) sobre una recta **AB**, se procederá del siguiente modo:

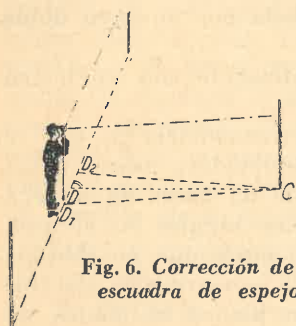


Fig. 6. Corrección de la escuadra de espejos.

la recta **AB** (fig. 6), tan distante el primero a la derecha como el segundo a la izquierda de un punto medio **D**, que marca el pie de la verdadera perpendicular, punto éste que nos servirá para corregir la escuadra: Situado el operador en este punto, hará coincidir la imagen (**A**) de **A** con **C** directamente visto, con mover convenientemente los tornillos de corrección de uno de los dos espejos.

Es probable que la escuadra de espejos haya nacido como fruto del invento del sextante por Newton (*) (fig. 7).

Sextante de reflexión.

5. Características y ventajas de las mediciones que se ejecutan con el sextante.

Los dos rayos procedentes de los dos objetos entre los cuales se trata de medir el ángulo, deben llegar



Fig. 7. Isaac Newton (1643-1727)

(*) La invención del sextante se la atribuye también al inglés *Hadley* (1656-1724). En el año 1724 encontróse entre los escritos póstumos de *Hadley* un manuscrito por *Newton*, en el cual éste da una descripción de un instrumento similar al sextante, llamado *cuadrante de reflexión*, circunstancia ésta que indujo a *Ladlam* a expresarse así en su folleto "*Directions for the use of Hadley's Quadrant*", publicado en 1790: "Parece, por consiguiente, fuera de duda que es *Newton* a quien debe considerarse como el primer inventor del cuadrante de reflexión".

al ojo del observador, produciendo en éste dos imágenes, una directa del primer objeto y otra imagen del segundo objeto, dada por un **rayo doblemente reflejado**.

Tales mediciones angulares se ejecutan convenientemente con un instrumento llamado **sextante**.

La **principal ventaja** del sextante reside en la circunstancia de que no es necesario dar al instrumento una posición fija, pudiéndose usarlo a mano libre y, por consiguiente, por ejemplo, a bordo de un barco en navegación. El sextante permite por eso medir directamente ángulos en el espacio, situados en planos de inclinación cualquiera, siempre que no sobrepase su magnitud ciertas restricciones impuestas por la construcción del instrumento. Cuando los ángulos se hallan situados en planos inclinados, requieren a veces la **reducción al horizonte** para obtener así los correspondientes valores de los ángulos horizontales.

6. Descripción del sextante.

Consta de una armadura de metal que presenta la forma de un sector de círculo (fig. 8). Perpendicularmente al plano de la armadura se hallan dispuestos dos espejos planos: el llamado **espejo grande E**, también llamado

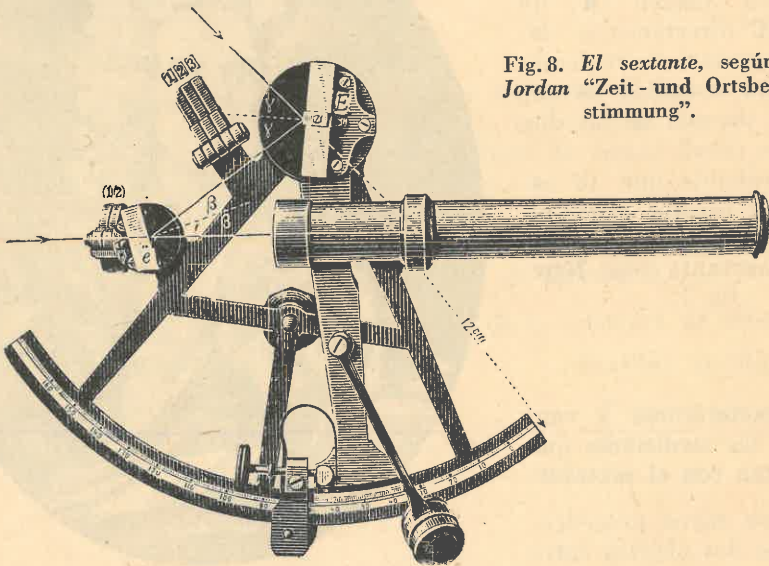


Fig. 8. El sextante, según Jordan "Zeit- und Ortsbestimmung".

espejo móvil, situado en el centro del ángulo **OEB** (ver fig. 10), movable alrededor de un pie perpendicular al plano del sector y con la parte reflectante dirigida hacia el objeto **d** de la derecha (ver figuras 8 y 10). La rotación de este espejo se realiza por medio de un brazo móvil, llamado **alidada**, a la cual aquél se halla rígidamente unido. Otro espejo, llamado **espejo pequeño, e**, en cambio, está fijado sobre el plano del sextante, pudiendo ser llevado a la posición perpendicular a dicho plano por medio de tornillos de corrección. La parte inferior de este espejo fijo está azogada en la parte que mira hacia el observador; la parte superior de ese espejo es

de vidrio transparente, permitiendo la **visión directa** del objeto **i** de la izquierda. El extremo libre de la alidada lleva un índice con nonio que se mueve rasante sobre un limbo graduado sobre el arco del sector, cuya extensión es de 60° a 80° . Esta circunstancia de tener el sector aproximadamente 60° , es decir la sexta parte de la circunferencia, dió origen a su nombre de "**sextante**". Una lupa facilita las lecturas. Un tornillo de presión permite fijar la posición de la alidada. Estando fijado dicho tornillo, se puede todavía imprimir a la alidada pequeños movimientos por medio de un **tornillo de aproximación** (llamado también **tornillo de coincidencias**).

Unidos por charnelas al sector, existen delante del espejo móvil **E** y detrás del espejo fijo **e** unos porta-vidrios destinados a recibir **crisales oscuros de distintos colores** para disminuir la fuerza de luz de los rayos incidentes, vidrios que se usan principalmente cuando se observa con el Sol.

Frente al espejo **e** hállase un collar fijado a la armadura, en el que se enrosca un anteojo cuyo eje, paralelo al plano del limbo, debe pasar aproximadamente por la línea de separación de las dos mitades (azogada y diáfana) del espejo fijo, a fin de poderse ver con ese anteojo simultáneamente la **imagen directa** del objeto **i**, y la **doblemente reflejada** del objeto **d**. Como la falta de paralelismo entre el eje del anteojo y el plano del limbo sólo tiene un efecto sensible cuando se trate de medir ángulos relativamente grandes, la construcción del retículo del anteojo puede ser muy sencilla: una simple **línea horizontal** que ha de corresponder a la línea de separación de las dos mitades del espejo fijo **o**, más aún, **4 cerdas** que forman un cuadrado, siendo suficiente obtener dentro de éste la coincidencia de las imágenes de los dos objetos.

7. Sextante de bolsillo.

El llamado **sextante de bolsillo** no se diferencia del tipo común en el principio sino tan sólo en las partes constructivas que se ilustran en figura 9. Una parte principal del instrumento es un disco de metal **A**. En el lado inferior, defendido por el aro metálico **B**, se hallan las partes ópticas del instrumento. El espejo grande **S** recibe un movimiento de rotación por medio de una cremallera y un engranaje accionados desde el botón **K**. Dicho espejo va rígidamente unido al eje **Z**, alrededor del cual se mueve la alidada **M**. El espejo pequeño **s** tiene un dispositivo análogo al de los sextantes comunes para corregir su falta de paralelismo con respecto al espejo grande. En la parte superior del disco se halla colocado el limbo graduado **T**, en el que se efectúan las lecturas con ayuda de la lupa **L**. Por medio del tornillo **R** va sujeto el anteojo del instrumento, el que se puede separar fá-

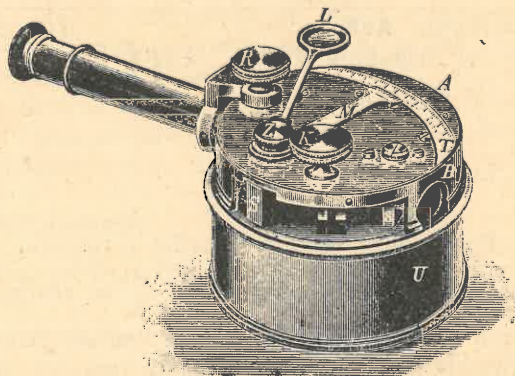


Fig. 9. Sextante de bolsillo.

cilmente del aparato para su transporte. El conjunto del disco **A** y la defensa **B** va roscado sobre la caja **U**, cuando el instrumento está en uso en la forma indicada en la figura. No estando en uso el sextante, esta caja sirve para tapar el instrumento, protegiéndolo así contra deterioros. A este objeto se le desenrosca de la posición en que se halla en la figura y se la coloca en forma de cubrir todo el instrumento descrito.

Empléase este instrumento cuando no se aspira a la precisión que da el sextante común, especialmente en los trabajos de reconocimiento, levantamientos de detalles, levantamientos expeditivos y de exploración.

8. Teoría del sextante.

Suponemos situado en la dirección **i** (fig. 10) un punto objeto, al que podemos observar por medio del anteojo **A**, mirando por la parte transparente del espejo **e** y llevando la imagen al centro del campo visual (cuadrado).

La posición del espejo fijo **e** fué elegida de tal modo que por la parte inferior del mismo el rayo **Ae** es reflejado hacia el centro del espejo **E**. En éste el rayo se refleja otra vez y toma el camino **Ed**. El observador verá entonces en el anteojo la imagen doblemente reflejada conjuntamente con la imagen directa del objeto **i**.

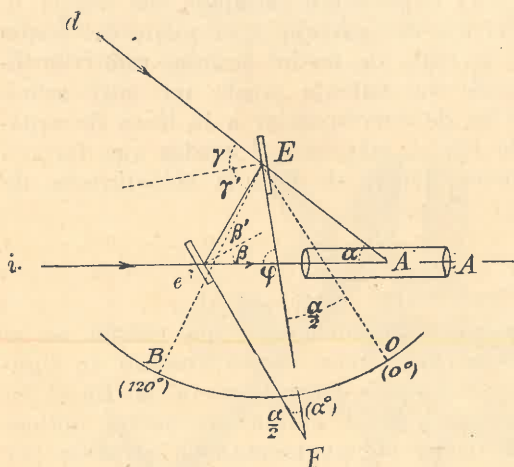


Fig. 10. Ilustrando la teoría del sextante.

| | | |
|------------------------------|---|------|
| triángulo AeE : | $\alpha + 2\beta + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ$ | (I) |
| y del triángulo FeE : | $\angle eFE + (90^\circ + \beta) + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$ | (II) |
| De la (I) : | $\alpha = 2\gamma - 2\beta,$ | |
| ” ” (II) : | $\angle eFE = \gamma - \beta,$ | |
| Luego: | $\angle eFE = \frac{\alpha}{2}.$ | |

Pudiéndose entonces medir el ángulo $\frac{\alpha}{2}$, se conocerá también el valor buscado α . Esta medición de $\frac{\alpha}{2}$ se realiza colocando en la periferie **OB** del arco una división de grados con su origen **O** en el sitio donde cae el índice de la alidada **EF**, cuando los dos espejos se hallan en posición paralela.

En esta posición la visual **Ed** es paralela a la visual **ei**, es decir, las dos visuales forman un ángulo de 0° . Cuando se gira el espejo móvil **E** por el ángulo $\frac{\alpha}{2}$, la visual **Ed** girará por el doble valor o sea por el ángulo α . Este ángulo es leído directamente en el círculo, dado que la alidada ha compartido del movimiento del espejo **E**, hallándose en una posición que forma con la posición inicial el ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

El limbo está graduado en **medios grados** y partes de medio grado, pero la numeración está hecha como si esas unidades fuesen grados, con lo cual se evita el inconveniente de tener que duplicar la lectura para obtener el valor del ángulo medido. Siendo por ejemplo el ángulo **OEF** = 30° , se encontrará en la correspondiente parte del limbo la lectura 60° como magnitud del ángulo medido. Ver también "Optica", pág. 7.

9. Error de índice del sextante.

Según la teoría de los instrumentos de reflexión, se debe leer en la graduación $0^\circ 0' 0''$ cuando el rayo directo y el doblemente reflejado son paralelos, es decir, cuando los dos espejos son paralelos. Si no se cumple esa condición, el instrumento tiene un **error de índice**. Se lo determina simplemente con hacer coincidir la imagen directa de un objeto lejano o de un astro (Sol) con la doblemente reflejada, leyendo el círculo con ayuda del nonio. El punto de la graduación que coincide con el cero del nonio será entonces aquel punto desde el cual efectivamente deben ser contados los ángulos. Si en esa operación el cero del nonio cayese dentro de la graduación del limbo, el valor del ángulo leído y contado desde el origen **0** de la graduación, debe ser disminuído en el valor del **error de índice**, y aumentado cuando el cero del nonio cayese afuera.

Dada la circunstancia de que la superposición de dos imágenes no es posible observar con tanta precisión como la coincidencia de los bordes de dos discos, tenemos en la observación del Sol un excelente recurso para la **determinación del error de índice del sextante**: Se hace coincidir una vez el borde izquierdo del Sol directamente observado con el borde derecho de la imagen doblemente reflejada y luego, inversamente, el borde derecho del Sol directamente visto con el izquierdo doblemente reflejado. El promedio de las dos lecturas dará directamente el valor correspondiente a la exacta superposición de las dos imágenes del Sol, y con ello el **valor del error de índice** del sextante examinado.

(Además, la **diferencia** de tales lecturas nos dará el valor angular doble para el **diámetro del Sol**, el que nos permite una interesante comparación con el correspondiente dato indicado en las tablas.)

10. Verificaciones y corrección del sextante.

Las condiciones para que puedan medirse con el sextante correctamente ángulos, son las siguientes:

- 1° Los espejos **E** y **e** deben ser perpendiculares al plano del limbo.
- 2° Los espejos deben ser paralelos entre sí cuando el cero del nonio coincide con el cero de la graduación (eliminación del error de índice).

3° El eje del anteojo debe ser aproximadamente paralelo al plano del limbo.

Para comprobar la **perpendicularidad** del **espejo grande E**, se colocará la alidada más o menos sobre la bisectriz del ángulo del sector. Ubicado el ojo cerca del **espejo E** y casi en el plano del mismo, se observará si la parte del limbo graduado que se ve reflejada y el limbo visto directamente forman un arco continuo, lo que sólo puede suceder si el **espejo E** es perpendicular sobre el plano del limbo. Si se observa una quebradura, se corrige la posición del **espejo E** por medio de los tornillos de corrección que posee.

Obtenida así para el **espejo grande** la correcta posición, se procederá a la verificación del **espejo pequeño e**, el que está corregido cuando su plano, en la posición 0° de la alidada, resulta **paralelo** al plano del **espejo grande**. Se observa para ello un objeto lejano (a 2 ó 3 km de distancia). Se gira la alidada y se observa primero si en alguna posición de la alidada la imagen directa del objeto se superpone con la doblemente reflejada. Si esto no sucede, es decir, si las imágenes aparecen una encima de la otra, es esto un indicio de que el **espejo e** no es exactamente perpendicular al plano del limbo. Se lo corrige con los correspondientes tornillos. Si después de esta corrección, al colocar la alidada en la lectura 0°, las imágenes aparecen a la misma altura pero no coincidentes todavía, será esto un indicio de que los espejos, si bien perpendiculares al plano del limbo, no son todavía exactamente paralelos entre sí. Se produce este paralelismo con el tornillo correspondiente del **espejo pequeño**. Con esto se han satisfecho las dos primeras condiciones para la corrección del sextante.

La **tercera condición** se verifica del siguiente modo: Mirando rasante al limbo por encima del plano del sextante, colocado horizontalmente sobre una tabla, a un punto lejano, y observando luego este mismo punto por medio del anteojo, deberá aparecer su imagen en el medio del campo visual (cuadrado). Si la imagen efectivamente cae dentro del cuadrado del retículo, el eje del anteojo llena la condición del paralelismo con el limbo con suficiente aproximación. En caso contrario, se modifica la inclinación del anteojo.

11. Error de excentricidad.

Un notable **error de excentricidad** sería el peor de los defectos que podría tener un sextante. Un error de sólo 0,1 mm en la no-coincidencia del centro del limbo graduado con el eje de giro, podría tener en algunas mediciones un efecto de 3' a 4'. Es por eso que los instrumentos de buena procedencia tienen reducido ese error a un mínimo que en la práctica no tiene influencia sensible.

Escuadras de prisma.

12. Ley en que se funda la escuadra de prisma.

La aplicación práctica de prismas de vidrio en geodesia y topografía, introducidos por el geodesta bávaro **Bauernfeind** en 1851, está basada en la

ley óptica, encontrada por **Snellius** (1591-1626), sobre la refracción de la luz al pasar de un medio a otro de densidad distinta.

Siendo α el **ángulo de incidencia**, es decir, el ángulo entre la normal y el rayo incidente, y β el **ángulo de refracción**, entre la normal y el rayo refractado, tenemos según la citada ley:

$$(1) \quad \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = n,$$

donde n es una **constante** para dos medios dados, mientras que α y β son variables. Llámase n el **coeficiente de refracción** de los dos medios. Para los rayos de luz que pasan del aire al vidrio **crown**, la relación (1) tiene aproximadamente el valor $n=1,5$. Para vidrio **flint**, que es más denso que el crown, dicha relación es aproximadamente igual a 1,6. Para el pasaje del aire al agua, se tiene $n=4/3$. Ver también "Optica", pág. 19.

13. Reflexión total.

Imaginemos ahora dentro del vidrio un punto O (fig. 11) que emite rayos de luz. Los diferentes rayos que salen de O se comportan distintamente: Un rayo OA , normal a la superficie de separación, saldrá sin refractarse. Otros rayos, al salir, se desvían de la normal de acuerdo con la **ley de Snellius**: $\text{sen } \alpha = n \cdot \text{sen } \beta$. Esa desviación es tanto mayor cuanto más grande sea el ángulo de incidencia, hasta llegar a un ángulo límite β_0 , (fig. 12), al que corresponde el ángulo refractado $\alpha_0 = 90^\circ$. Para ese ángulo límite β_0 vale la relación:

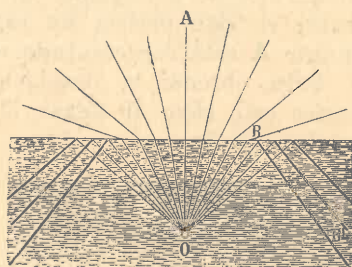


Fig. 11. Reflexión total.

$$\text{sen } \alpha_0 = 1 = n \cdot \text{sen } \beta_0,$$

de la cual resulta:

$$\text{sen } \beta_0 = \frac{1}{n}.$$

Para el paso del vidrio al aire se tiene aproximadamente:

$$\text{sen } \beta_0 = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

Luego: $\beta_0 \sim 42^\circ$

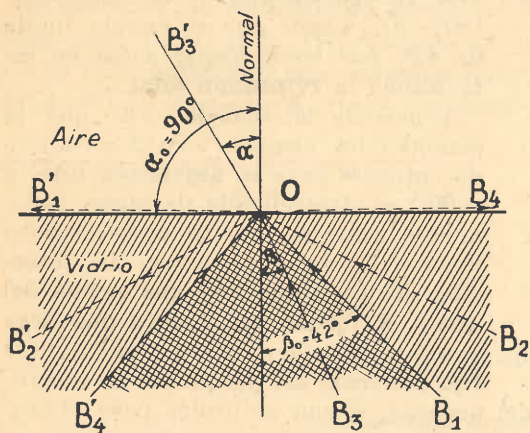


Fig. 12. Valor límite β_0 .

Cuando β sobrepasa el valor de 42° , ya no saldrá más el rayo, porque cualquier dirección en que lo hiciera, no estaría de acuerdo con la ley de

En el medio menos denso, el rayo límite α_0 es el **rayo rasante** a la superficie de separación.

Snellius. En este caso el rayo se **refleja totalmente** y queda dentro del vidrio (como el rayo **OB₂B'** de figura 11). La superficie de separación de los dos medios en este caso actúa como espejo.

El sector **B₁OB'₄** (fig. 12) abarca todos los rayos que pueden emerger de la superficie de separación; los que se hallan fuera de este sector (y que pertenecen a un plano perpendicular a esa superficie), como, por ejemplo, el rayo **B₂O**, se reflejan totalmente.

14. Prisma de Bauernfeind; el rayo fijo y el rayo móvil.

La más conocida de las escuadras de prisma es la de **Bauernfeind** (fig. 13), quien la inventó en el año 1851. La sección de ese prisma es un triángulo isósceles; el plano correspondiente a la hipotenusa se encuentra convertido en espejo por medio de una capa de amalgama. El camino que recorre en este prisma un rayo que sale del punto **A** está representado en figura 14.

Para obtener la desviación total **x** que sufre este rayo al llegar al ojo del observador, tendremos:

$$(2) \quad \begin{cases} x = -\alpha + \beta - \beta - \beta + (45^\circ + \beta) + (45^\circ + \beta) - \beta + \alpha \\ x = 90^\circ \end{cases}$$

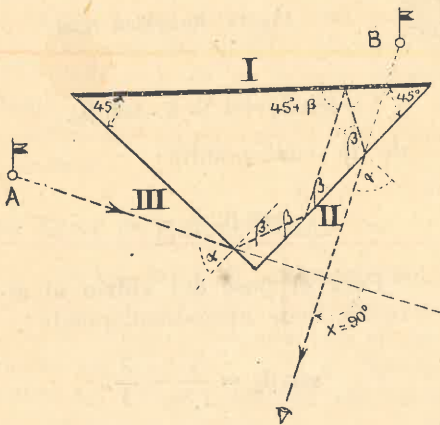


Fig. 14. Se ilustra el camino del rayo fijo.

ca por algún movimiento de giro del prisma), el que se utiliza para el trazado de ángulos rectos en el terreno. Vemos que el rayo entrante se refractó en la cara cateto III. Luego se reflejó dos veces, una primera vez en la otra cara cateto y una segunda vez en la cara hipotenusa amalgamada, refractándose finalmente una segunda vez para llegar al ojo del observador.

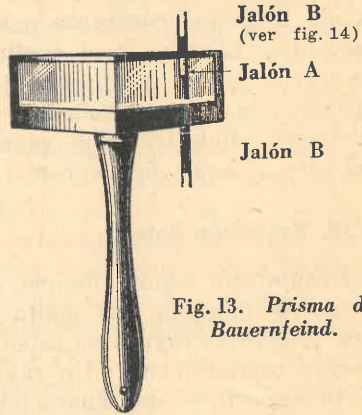


Fig. 13. Prisma de Bauernfeind.

Fuera del "rayo fijo", que toma el camino indicado en figura 14, existen todavía rayos que entran en el prisma y salen del mismo, pero sin formar un ángulo recto entre la parte entrante y la parte saliente del rayo. La figura 15 ilustra un caso de estos rayos: El rayo incidente que viene de **A** forma con el rayo saliente que llega al ojo **O** un ángulo de $90^\circ - 2\alpha$. Y como el ángulo α varía con girar el prisma, se comprende que el rayo saliente girará cuando gire el prisma. Ese rayo, por dicha razón, se llama **rayo móvil**, en oposición al **rayo fijo** anteriormente definido.

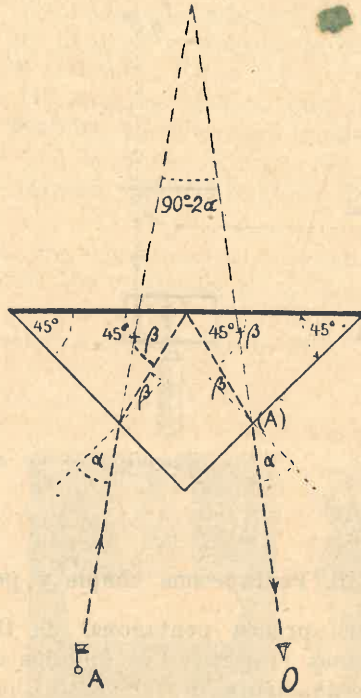


Fig. 15. Recorrido de un rayo móvil.

Como se ve de las figuras 14 y 15, los caminos de los rayos fijo y móvil se diferencian en lo siguiente: El rayo fijo (fig. 14) es **dos veces reflejado** dentro del prisma, una vez en una cara cateto y otra vez en la cara hipotenusa; el rayo móvil (fig. 15), en cambio, es reflejado **una sola vez** dentro del prisma (en la cara hipotenusa).

El rayo móvil, conocido desde mucho tiempo, naturalmente no sirve para trazar perpendiculares en el terreno.

15. Reglas de aplicación práctica.

La **escuadra de Bauernfeind** puede servir de dos maneras:

1er. caso (figs. 16 y 17). Téngase el prisma con la mano de tal modo que la **cara hipotenusa** sea **aproximadamente perpendicular** al rayo proveniente del punto dado **A** y que las **caras catetos** miren hacia **A**. Al mirar

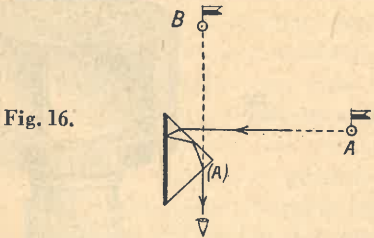


Fig. 16.

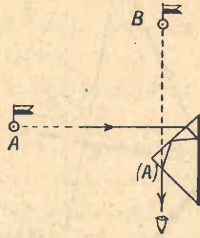


Fig. 17.

Primer caso de aplicación.

entonces paralelamente al plano de la hipotenusa, se verá cerca de la arista del ángulo recto la imagen (**A'**) del punto dado **A**. En dirección de esa imagen (**A'**) se hará colocar una señal **B**.

2º caso (figs. 18 y 19). Téngase el prisma en la

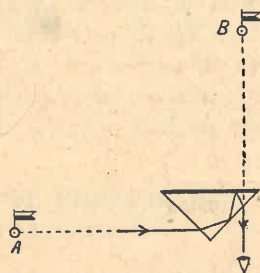


Fig. 18.

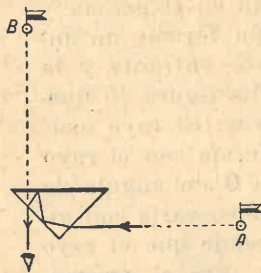


Fig. 19.

Segundo caso de aplicación.

mano de tal modo que la cara **hipotenusa** sea **aproximadamente paralela** al rayo proveniente del punto dado **A** y que las caras **catetos** miren hacia el observador. Al mirar entonces perpendicularmente al plano de la hipotenusa, se verá cerca de la arista opuesta al punto **A** la imagen (**A**) de **A**. En dirección de (**A**) se colocará la señal **B**. Ver "Óptica", pág. 26.

16. Pentaprisma simple y pentaprisma doble.

El prisma pentagonal de Goulier es en principio un prisma de cuatro planos (fig. 20). Los ángulos opuestos de la sección cuadrangular son, respectivamente, de 90° y 45° , los otros son de $112^\circ 30'$ cada uno. Si de este prisma cuadrangular se quita, en forma conveniente, un prisma triangular, de tal modo que desaparece la arista con el ángulo de 45° , el **prisma cuadrangular** se transforma en **prisma pentagonal** con otros dos ángulos de $112^\circ 30'$ (ver fig. 20).

Las condiciones esenciales en el prisma pentagonal, llamado también, más simplemente, **pentaprisma**, son las siguientes:

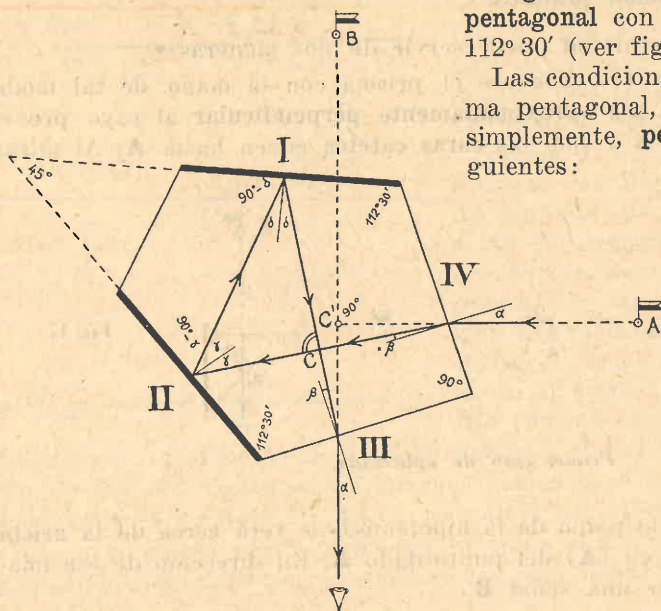


Fig. 20. Recorrido del rayo en el pentaprisma.

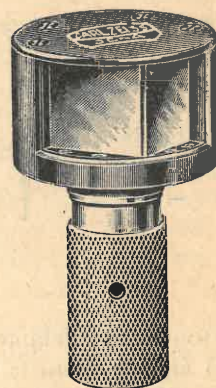


Fig. 21. Pentaprisma simple.

Que los planos azogados I y II formen entre sí un ángulo de 45° y que los planos III y IV formen un ángulo de 90° .

Análogamente a lo que vimos en fig.1 (escuadra de espejos), tenemos aquí también en el punto C, en el interior del prisma, un ángulo de 90° entre el rayo que viene de A y el doblemente reflejado. Estos rayos forman con las perpendiculares a las caras III y IV ángulos iguales, que llamamos β . Por consiguiente, según la ley de Snellius, también son iguales los ángulos exteriores α , de lo cual se deduce que la parte exterior del rayo que viene de A y el rayo que llega al ojo forman entre sí también un ángulo de 90° .

El **pentaprisma doble** (figs.22 y 23) es una combinación adecuada de dos pentaprismas simples, girado el segundo con respecto al primero en 90° . Este instrumento sirve para trazar ángulos de 90° simultáneamente hacia dos lados (ver fig.22), lo que permite obtener ángulos de 180° .

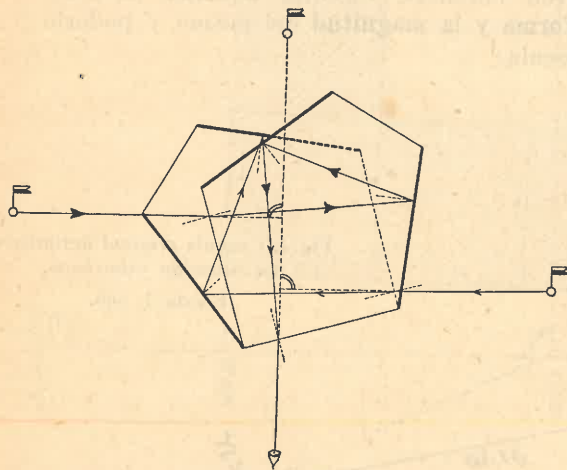


Fig.22. Camino del rayo en el pentaprisma doble.

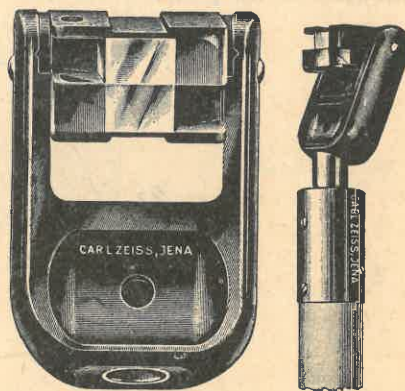


Fig.23. Pentaprisma doble.

17. Resumen sobre los distintos tipos de escuadras.

Las escuadras a pínulas casi siempre se usan con pie; las escuadras de espejos y prismas generalmente a mano libre.

Se puede trabajar con más rapidez con las escuadras de espejos y prismas que con las escuadras a pínulas.

Para el transporte, las escuadras a pínulas son menos cómodas que las escuadras de espejos y prismas; en cambio, las escuadras a pínulas tienen la ventaja de poder trazarse con las mismas visuales inclinadas, para lo cual no sirven las escuadras de espejos y prismas.

Las imágenes obtenidas por los prismas son más luminosas que las producidas por los espejos; las formadas por el pentaprisma son más luminosas todavía que las producidas por el prisma triangular. Por eso, el pentaprisma (simple y el doble), por las ventajas que ofrece, tiende a desalojar poco a poco del uso a los demás tipos de escuadras.

§ 11.

Métodos de levantamiento de planos de parcelas.**1. Definición.**

Según dijimos en página 22: "Levantar un punto", quiere decir "ejecutar todas aquellas operaciones necesarias para su representación y ubicación en el plano". Cuando son numerosos los puntos a levantar, pueden imaginarse diversas figuras geométricas que los vinculan entre sí y con otros puntos vecinos, como redes de triángulos (fig. 6), radiaciones (fig. 16) o polígonos (figs. 11, 12, 13, 14 y 18), las que dan origen a los diferentes métodos de levantamiento en uso.

Levantar un polígono quiere decir entonces, ejecutar aquellas mediciones necesarias para determinar la forma y la magnitud del mismo y poderlo dibujar en un plano a cualquier escala.

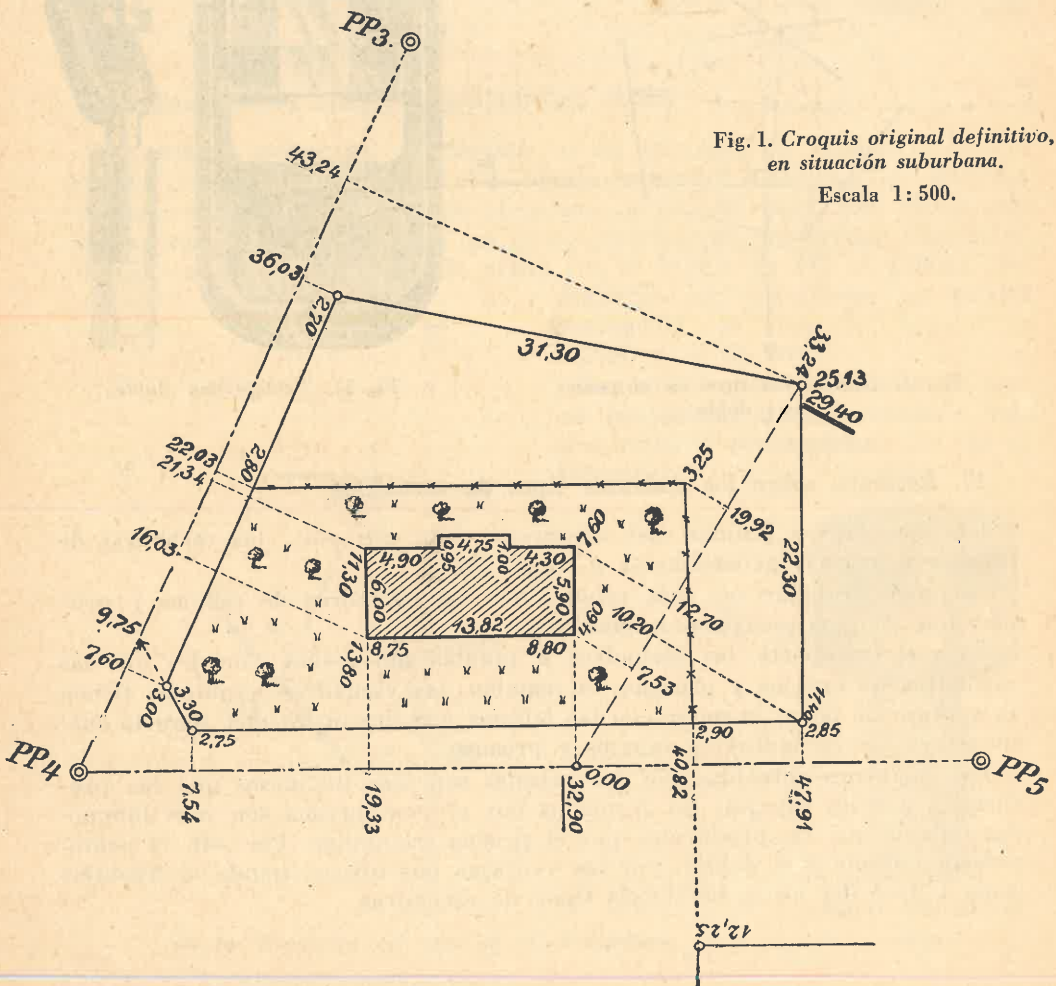
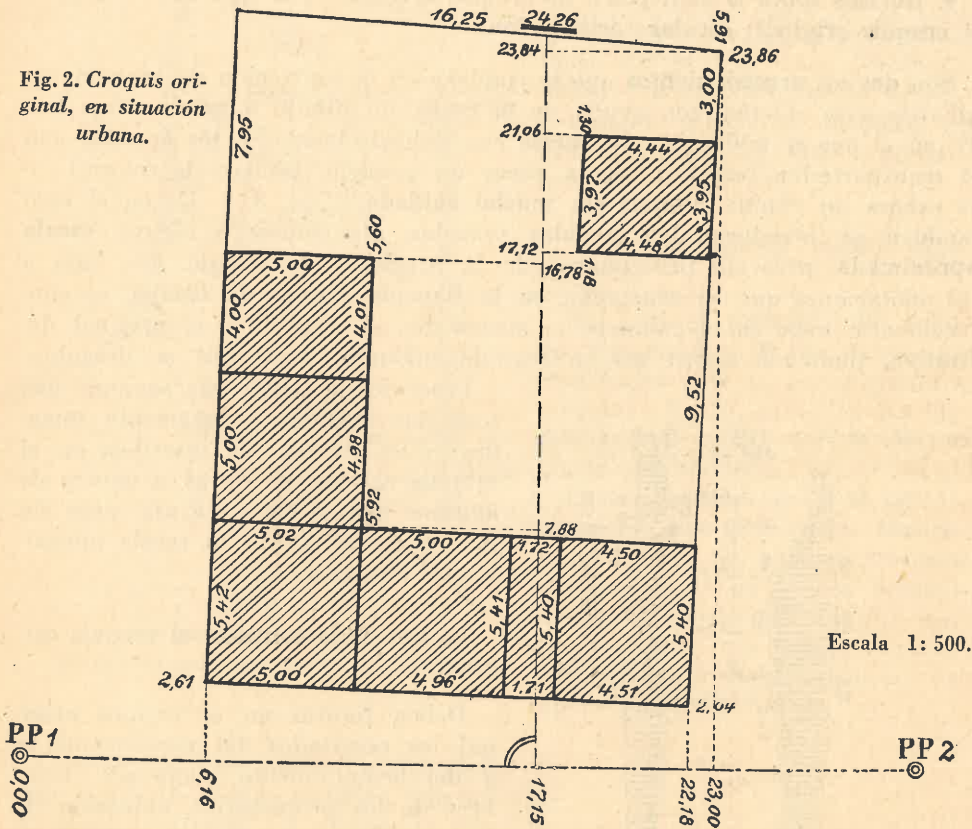


Fig. 1. Croquis original definitivo,
en situación suburbana.
Escala 1: 500.

Fig. 2. Croquis original, en situación urbana.



2. Extensión del levantamiento de planos de parcelas.

Si bien no es racional levantar extensas zonas de terreno rural o grandes conjuntos de parcelas urbanas sin emplear el teodolito, pueden, sin embargo, levantarse cómodamente parcelas urbanas y suburbanas de una o varias manzanas con el solo concurso de los simples instrumentos ya estudiados, la cinta, la escuadra, el pantómetro o el sextante.

3. Reconocimiento previo; croquis previo.

A fin de poder elegir el método de levantamiento más adecuado, el agrimensor efectuará, antes de iniciar las mediciones, un **reconocimiento previo** de los más característicos puntos a levantar, los que hará señalar por medio de jalones, confeccionando al mismo tiempo un ligero **croquis previo** del terreno a levantar. Este croquis le proporcionará al agrimensor una base para una racional organización de su trabajo.

Al hacer después las mediciones, el agrimensor confeccionará los llamados **croquis originales**.

4. Normas sobre la confección de croquis originales; lo que debe contener el croquis original; escalas; orientación.

Son dos los procedimientos que se emplean en la confección de croquis originales: o se efectúa, con ayuda de la regla, un **dibujo a escala** (figs. 1 y 2), en el que se miden las distancias con dobledecímetro y los ángulos con el transportador (empleándose a veces un pequeño tablero de dibujo); o se esboza un rápido **croquis sin mucho cuidado** (figs. 3 y 4), en el cual también se introducen las medidas tomadas, ateniéndose a alguna **escala aproximada**, pero sin preocuparse de la precisión del dibujo. En base a las anotaciones que se consignan en la llamada **libreta de campo**, se confeccionará luego en el gabinete, el mismo día, si es posible, el **original definitivo**, pudiendo salvar así en seguida cualquier error que se descubra.

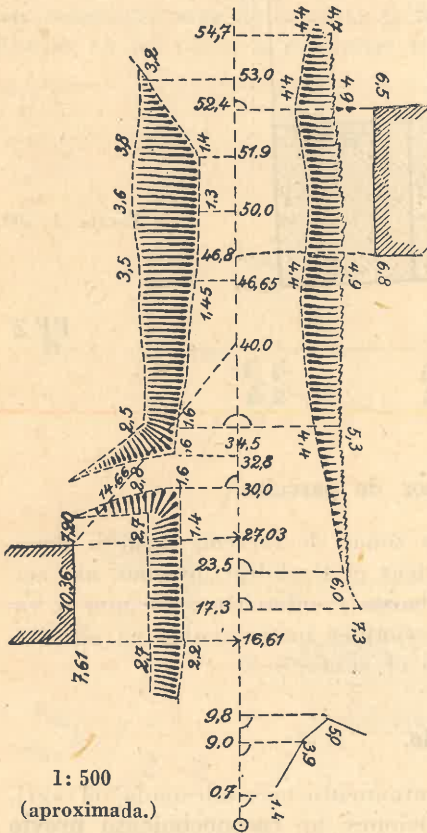


Fig. 3. "Croquis sin mayor cuidado".

Procediendo según este segundo método, las medidas, exactamente tomadas en el terreno, se inscriben en el croquis al lado de líneas o dentro de ángulos que se trazan a ojo, pero sin perder de la mente la escala aproximada elegida.

Lo que debe contener el croquis original.

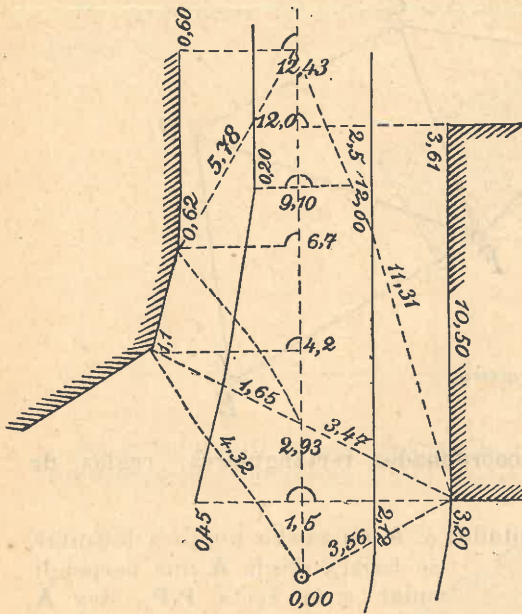
Deben figurar en el croquis original los resultados del reconocimiento y del levantamiento, como ser: nombres de los propietarios, ubicación de las parcelas, nombres de los linderos, distancias y ángulos medidos, detalles topográficos levantados, poblaciones, alambrados, tranqueras, arroyos, puentes, molinos, árboles aislados, montes, caminos, pantanos, lagunas, etc.

Escalas.

Conviene elegir para el dibujo de terreno urbano una de las escalas 1:200 ó 1:250, 1:500, ó 1:1 000, y, para terreno rural, una de las escalas 1:2 000 ó 1:5 000.

Papel.

Se usa con preferencia papel milimetrado en forma de libretas, u hojas sueltas fijadas sobre cartón, que generalmente no sobrepasan el tamaño 229 mm por 324 mm (ver pág. 101).



1: 200 (aproximada)

Fig. 4. "Croquis sin mayor cuidado".

Orientación.

Orientense siempre los croquis, tanto los previos como los originales, con el Norte hacia arriba.

Existen diferentes métodos de levantamiento, los que explicaremos a continuación:

5. Primer método: método constructivo.

He aquí el principio del método: Siendo **A** y **B** dos puntos ya levantados y **C** un nuevo punto a levantar (fig. 5), se miden las distancias **AC** y **BC**, con lo cual **C** queda determinado.

Para introducir **C** en el dibujo, se puede usar el compás: Haciendo centro en **A** y **B**, se trazarán con las distancias **b** y **a** (reducidas a la escala del dibujo), respectivamente, dos arcos, cuya intersección nos dará la posición del nuevo punto **C** buscado.

Cuando fuera necesario conocer algún ángulo entre las líneas medidas, por ejemplo el ángulo α (fig. 5), se emplea la fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

o más cómodamente: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

en donde $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

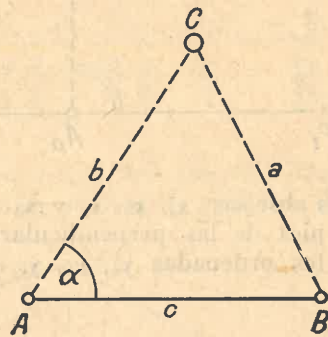


Fig. 5. Método constructivo.

La superficie **S** del triángulo **ABC** se obtiene por la conocida fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Cuando se trata de levantar varios puntos, **C**, **D**, **E**, **F** (fig. 6), con respecto a dos puntos dados, **A** y **B**, se puede emplear repetidas veces el procedimiento indicado.

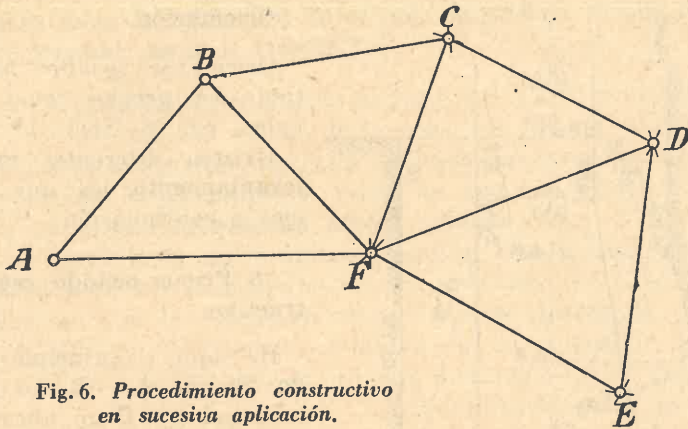


Fig. 6. Procedimiento constructivo en sucesiva aplicación.

6. Segundo método: método de coordenadas rectangulares; reglas de anotación.

Siendo P_1 y P_2 dos puntos ya levantados y A un nuevo punto a levantar, se bajará desde A una perpendicular a la recta P_1P_2 . Sea A_0 el pie de esa perpendicular. Luego se mide la distancia P_1A_0 llamada *abscisa*, y la distancia A_0A llamada *ordenada* del punto A .

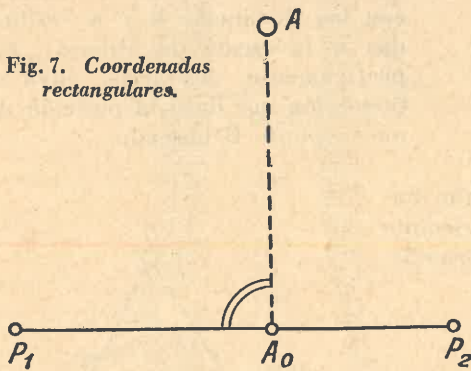


Fig. 7. Coordenadas rectangulares.

Cuando se trate de levantar según este método los puntos A, B, C y D (fig. 8), se extenderá sobre el suelo en la línea P_1P_2 una cinta de acero, de tal modo que el punto inicial de la misma coincida con el origen P_1 . El agrimensor recorrerá entonces esta línea, determinando las respec-

tivas abscisas x_a, x_b, x_c y x_d de A, B, C y D , dejando marcados con fichas los pies de las perpendiculares. Luego medirá estas últimas, obteniéndose así las *ordenadas* y_a, y_b, y_c e y_d .

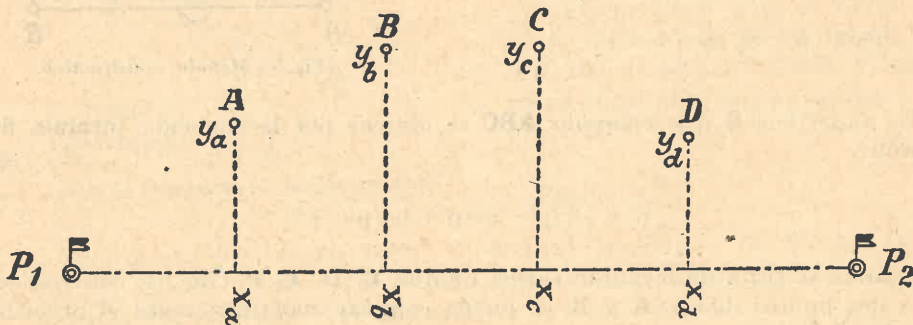


Fig. 8. Levantamiento de los puntos A, B, C, D por coordenadas rectangulares.

En esta forma se pueden determinar los esquineros 1, 2, 3, 4 y 5 de figura 9.

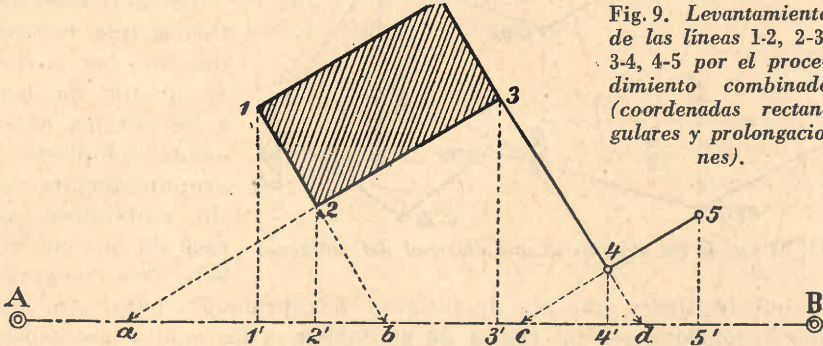


Fig. 9. Levantamiento de las líneas 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 por el procedimiento combinado (coordenadas rectangulares y prolongaciones).

En la figura 10 se han consignado las medidas correspondientes a los puntos numerados en figura 9. Se tomaron también medidas directas entre los

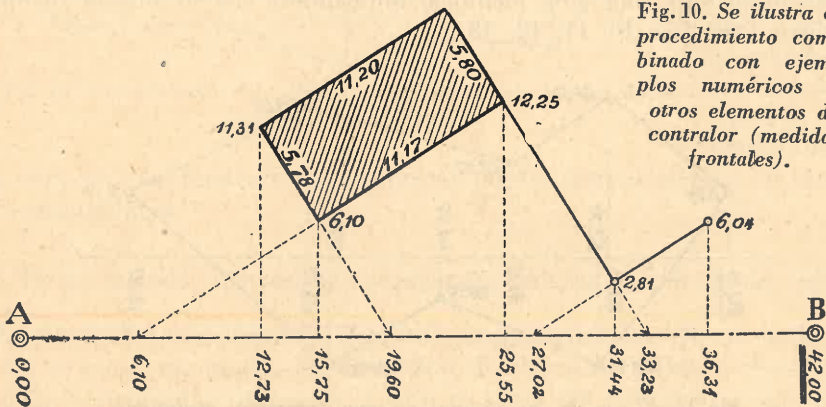


Fig. 10. Se ilustra el procedimiento combinado con ejemplos numéricos y otros elementos de contralor (medidas frontales).

puntos levantados, por ejemplo las distancias 1-2 y 2-3 (fig. 9). Esas medidas entre puntos levantados por coordenadas se llaman **medidas frontales**.

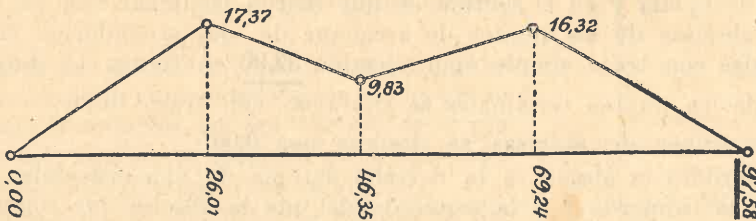


Fig. 11. El eje de las abscisas coincide con un lado de la parcela a levantar.

les, las que proporcionan valiosos **elementos de contralor** para las abscisas y ordenadas tomadas.

A veces se puede elegir como eje de operaciones un lado de la parcela (fig. 11), otras veces dicho eje es una diagonal de la parcela (fig. 12).

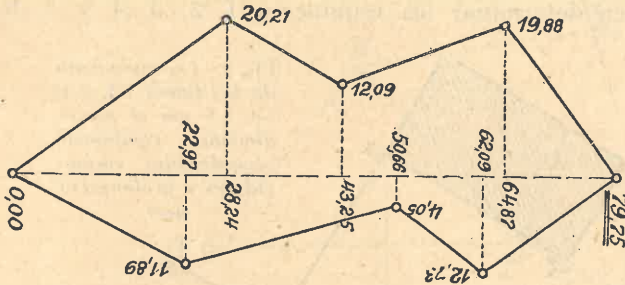


Fig. 12. El eje de las abscisas es una diagonal del polígono.

Reglas de anotación.

Es de suma importancia que los resultados de las mediciones se anoten de acuerdo a un sistema universalmente adoptado y esmeradamente seguido, evitándose, así, el caso de que un croquis sólo sea comprensible

para el que lo hizo o que sea de fatigosa interpretación para otro técnico.

Damos a continuación las **reglas de anotación**, a las cuales nos hemos atenido en nuestros trabajos y que nos parecen, entre las distintas formas en uso, las más apropiadas:

- 1º Se escriben las abscisas y ordenadas **perpendicularmente** sobre la dirección en que han sido medidas, indicándose así al mismo tiempo el origen (ver figs. 10, 11, 12, 13).

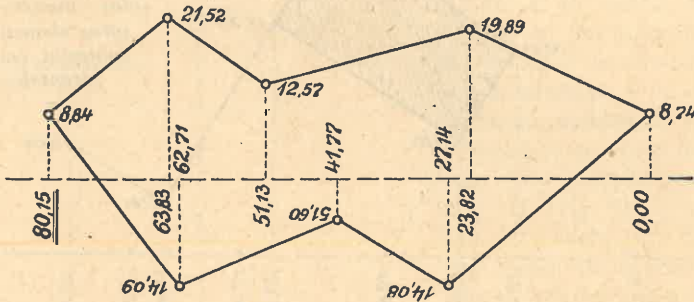


Fig. 13. El eje de las abscisas es una transversal cualquiera.

- 2º Las demás medidas que se toman (medidas frontales, etc.) se escriben **paralelamente** a las líneas a que se refieren, a una distancia no mayor de $\frac{1}{2}$ mm y en el sentido en que fueron medidas.
- 3º Las abscisas de los puntos de arranque de ejes secundarios van subrayadas con trazo simple (por ejemplo 32,90 en figura 1). Las abscisas de los puntos terminales se subrayan con trazo doble.
- 4º Todo origen de abscisas se designa por 0,00.
- 5º Se escribirá la abscisa a la derecha del pie de una ordenada que va hacia la izquierda y a la izquierda del pie la abscisa que corresponde a una ordenada que va hacia la derecha, poniéndose sobre el mismo eje de las abscisas la abscisa que corresponde a dos ordenadas que parten del mismo pie hacia ambos lados (ejemplo 40,82 en figura 1).
- 6º Se designará por una pequeña **flecha** el punto de intersección de una alineación (o prolongación de línea) con un eje de operaciones (ver figs. 1, 9 y 17).

Confeccionado el croquis original en la forma indicada, representará un registro numérico-gráfico completo de fácil comprensión para cualquier profesional, constituyendo así un documento técnico, a base del cual se pueden dibujar planos catastrales a escala cualquiera.

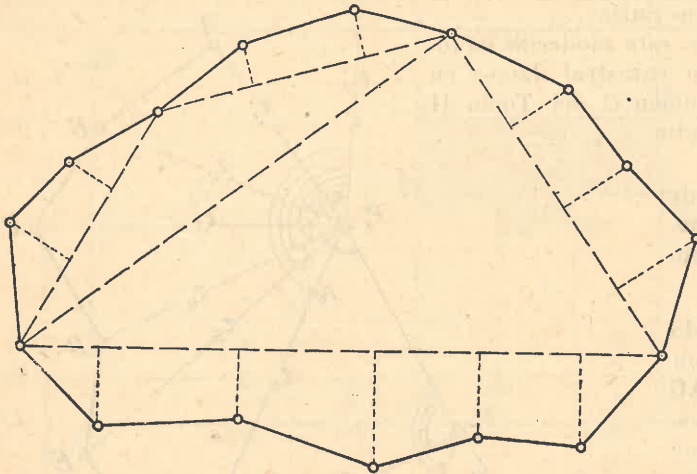


Fig. 14. Combinación del método constructivo con el de coordenadas rectangulares.

Para facilitar el levantamiento de una zona más extensa, combínase a veces el primer método con el segundo, obteniendo así varios sistemas de ejes convenientemente vinculados entre sí. Por ejemplo: la figura 14 indica dos triángulos levantados por el método constructivo, los que proporcionan 4

ejes para el levantamiento de los demás puntos por el método de coordenadas rectangulares.

7. Tercer método: método de coordenadas polares (o método de radiación).

Para levantar un punto **B** (fig. 15), según este método, se mide la distancia r entre un punto ya levantado **P** (llamado **polo**) a ese punto **B**; además se determina el ángulo β que el rayo **PB** forma con una recta levantada **PN**, llamada **rayo inicial**.

El rayo inicial puede ser la dirección Norte (como en la figura 15), una recta a un punto notable de buena visibilidad (torre de iglesia, fig. 16) o una dirección cualquiera.

Cuando no es posible visar todos los puntos a levantar desde una sola estación, o cuando no conviene levantarlos así, por razones de la economía del trabajo, se elegirán otros polos convenientemente situados (ver figura 16).

Este método es muy práctico cuando las distancias r no se miden directamente con cinta, sino por un método óptico, llamado también método taquimétrico.

Debido al grado de perfeccionamiento alcanzado por la taquimetría de precisión, la que

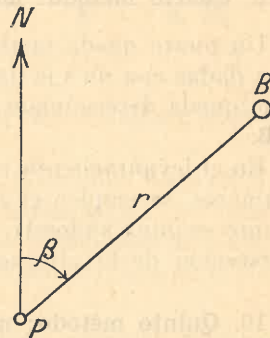


Fig. 15. Coordenadas polares.

puede ya competir en ciertas condiciones con la medición lineal directa, el método de coordenadas polares ha venido conquistando cada vez más campo en el dominio de los trabajos catastrales, a tal punto de ser oficialmente admitido como método de levantamiento catastral en algunos países europeos (como, por ejemplo, en Suiza).

Más detalles sobre este moderno método de levantamiento catastral damos en § 17, pág. 127, Volumen 2 del Tomo II de nuestro Compendio.

8. Características de los tres primeros métodos de levantamiento.

El primer método requiere la medición de dos distancias, **AC** y **BC** (fig. 5). El segundo método exige la medición de las distancias **AA₀** y **A₀P₁** (fig. 7), siendo esta última perpendicular a la primera. El tercer método exige la medición de la distancia **PB** y del ángulo **NPB** (fig. 15). El punto a levantar queda siempre determinado por la intersección de dos líneas, ya sean de dos arcos de circunferencia (primer método), o dos rectas perpendiculares entre sí (segundo método), o de una recta con arco de circunferencia (tercer método).

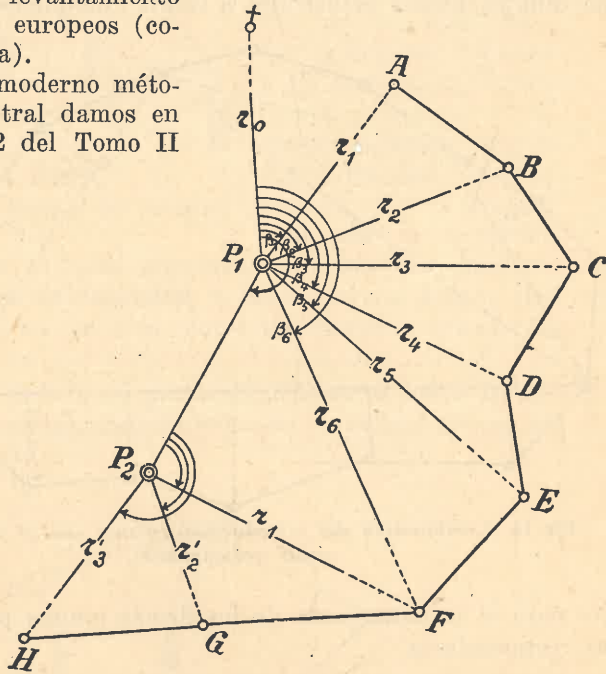


Fig. 16. Levantamiento por coordenadas polares desde dos estaciones (o polos) P_1 y P_2 .

9. Cuarto método: método de alineaciones.

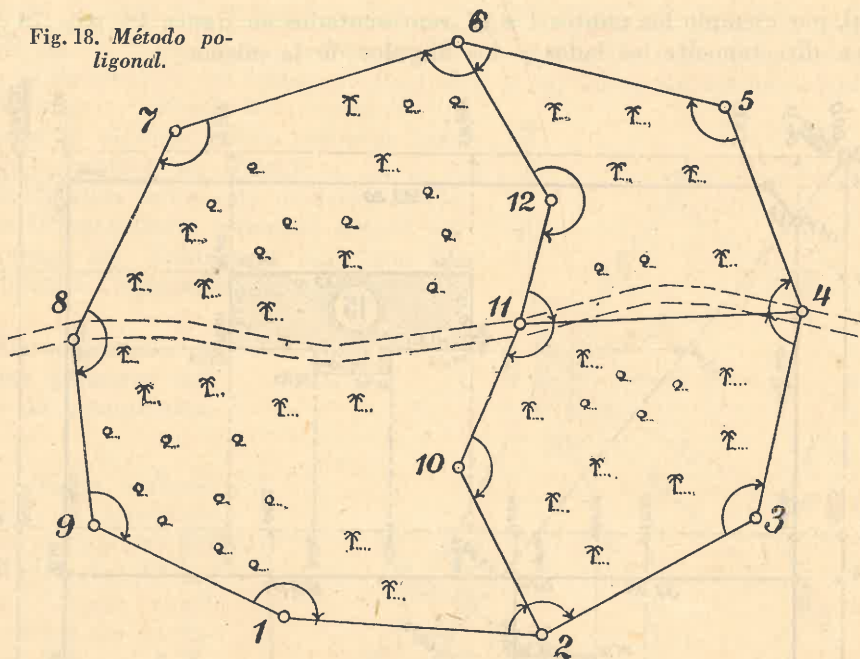
Un punto queda también determinado por la intersección de dos alineaciones dadas con un eje de operaciones. El punto 2 de figuras 9 y 10, por ejemplo, queda determinado por la intersección de las líneas 1-b y 3-a con el eje **AB**.

En el levantamiento representado en figura 17 basado en 4 puntos fijos esquineros, se empleó el método de alineaciones. Vemos en ese croquis que el punto esquina sudoeste del lote 14, por ejemplo, está determinado por la intersección de la alineación (33,70)-(25,95) con la otra (76,20)-(26,01).

10. Quinto método: método poligonal (método de contorno o método de rodeo).

Según este método se unen los distintos puntos a levantar por una poli-

Fig. 18. Método poligonal.



Tratándose, en cambio, de edificios de forma regular y sencilla, se levantan generalmente dos o tres puntos característicos, debiendo entonces completarse la planta con la ayuda de medidas directas de los demás lados perpendiculares entre sí (ver figs. 1, 2, 10, 17).

11. Ventajas e inconvenientes de los tres principales métodos en uso.

Primer método: método constructivo.

- a) **Ventajas:** Simple equipo instrumental, compuesto de cintas y jalones y fácil elección de las líneas de operaciones (lados de triángulos); buena precisión de los resultados que se obtienen.
- b) **Inconvenientes:** Propagación desfavorable de errores cuando hay intersecciones agudas y cuando son numerosos los triángulos que se basan en un lado de arranque; dificultad de encontrar el origen de un error grosero que se revelara en el dibujo del plano.

Segundo método: método de coordenadas rectangulares.

- a) **Ventajas:** Simple equipo instrumental, compuesto de jalones, escuadra y cinta. Un error grosero que afectara los elementos correspondientes a un punto no se propaga a otros puntos. Los inevitables errores de medición tienen un efecto mínimo debido a la intersección rectangular de los elementos de determinación. Es relativamente fácil el

restablecimiento de un punto perdido. El cálculo de superficie puede efectuarse sin recurrir al plano, en base a las medidas contenidas en el croquis original con sencillas fórmulas que indicaremos más adelante. Las medidas frontales permiten un contralor sencillo del trabajo de medición y de dibujo.

- b) **Inconveniente:** No se adapta a veces en forma conveniente a las circunstancias locales, por ejemplo en zonas de densa edificación.

Tercer método: método de coordenadas polares.

- a) **Ventajas:** Un error grosero que afectara los elementos correspondientes a un punto, no se propaga a otro punto. Combinado con el método poligonal, este método es aplicable a las condiciones locales más difíciles. Las medidas de contralor (distancias directas entre puntos marcados, determinación de puntos desde varios polos, ver figura 16) son muy eficaces: Con cada una de estas medidas se verifican 4 magnitudes observadas, dos ángulos y dos distancias, siendo por lo tanto pocas las comprobaciones que se necesitan hacer.

- b) **Inconveniente:** Se necesita un instrumento más complicado, un teodolito o sextante.

12. Signos convencionales para croquis originales.

En la confección de los **croquis originales de catastro** son indispensables ciertos signos llamados "**signos convencionales**" (ver N° 12, pág. 90), de los cuales hemos usado ya algunos en las figuras de este párrafo. He aquí la explicación de los principales de esos signos:

Doble círculo, para **punto poligonal, PP**, marcado por caño de hierro empotrado en un bloque de hormigón (fig. 4, pág. 23) o bulón empotrado (ver figs. 1 y 2 y signo 7, pág. 9, Apénd. III); **pequeño círculo simple para mojón de madera** (ver signo 10, pág. 9, Apénd. III y figs. 1, 5-8, 11-18 de este párrafo); **pequeño círculo lleno**, para **mojón de hierro** (signo N° 9); **pequeño cuadradito**, para **mojón de piedra** (signos Nos. 8 y 3); **límite de propiedad** (signo 3 y figuras 9 y 10); **edificación de madera**, signo N° 1, 2); **pared** (signo 2); **numeración de parcela edificada** (fig. 17); **línea gruesa de rayitas y puntos**, para **línea de operación principal** (figs 1, 2 y 17); **línea de rayitas gruesas** para **eje secundario** (figs 1, 2 y 17); **línea de rayitas finas o líneas punteadas**, para **perpendiculares y prolongaciones de líneas** (figs. 1, 2, 7-14 y 17); **árboles en elevación** (signo N° 6 y figs. 1, 18); **trazos de pendiente**, para terreno fuertemente inclinado (fig. 3); **doble línea punteada**, para **camino rural** (fig. 18); **rayo con trazo lleno en el arranque y punteado en la parte terminal**, para designar visual observada en una sola dirección (ver fig. 16).

§ 12.

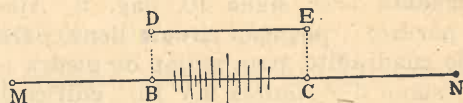
Problemas de obstáculos.**1. Los llamados "problemas de obstáculos". Moderno criterio al respecto.**

Sucede a veces que las circunstancias especiales de la localidad de la parcela a levantar no permiten aplicar ninguno de los métodos que acabamos de explicar. Plántese entonces al ingeniero un problema especial llamado "**problema de obstáculos**", para el cual debe hallarse la solución particular más adecuada. En los tiempos de antaño se daba mucha importancia a estos problemas, dedicándoseles extensos capítulos en los antiguos tratados de topografía, con un notable despliegue de recursos matemáticos para el arte de medir. Los **métodos modernos de levantamiento catastral tratan de evitar estos problemas de obstáculos** por medio de una adecuada disposición de las líneas de operaciones. Pero, sin embargo, quienes tienen mucha práctica de campo saben también que, no obstante esa sana tendencia, no es siempre posible evitar que esos problemas se presenten, razón por la cual expon-dremos a continuación los más típicos y más frecuentes.

2. Trazado de un trozo de recta paralela para salvar un obstáculo en la medición lineal.

Cuando un trozo de línea **BC** (fig. 1) de la alineación **MN** sólo pudiera medirse venciendo grandes dificultades, por hallarse sobre ese trozo, por ejemplo, un pantano, una laguna, un montón de adoquines (pero que no fuera tan alto como para obstaculizar la intervisibilidad entre **M** y **N**), con-

Fig. 1. La medición lineal de la línea **MN** queda dificultada por un obstáculo en **BC**.



viene a veces salvar el obstáculo mediante el trazado de una **paralela** a la línea **MN**. Levántanse para ello en dos puntos **B** y **C** convenientemente elegidos las perpendiculares iguales, **BD** y **CE**, que tengan la longitud necesaria para salvar dicho obstáculo. Tendremos entonces para la distancia **MN** buscada:

$$MN = MB + DE + CN$$

3. Determinación de varios puntos de una ordenada sobre la cual existe un obstáculo que impide la visual.

Tratándose de levantar una ordenada en el punto **C** (fig. 2) de la alineación **AB**, ordenada que se halla interrumpida por un obstáculo, por ejemplo una casa, se levantará en otro punto **D**, convenientemente elegido so-

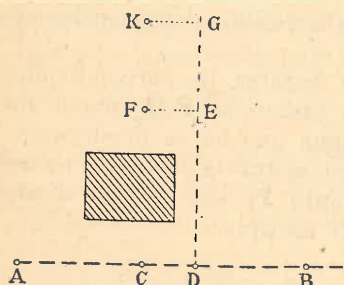


Fig. 2. Levantar una perpendicular interceptada por una casa.

bre la alineación, una ordenada auxiliar que pase cerca del obstáculo. En dos puntos **E** y **G** de esa ordenada auxiliar se levantarán las perpendiculares **EF** y **GK**, cuya longitud y sentido serán iguales a la longitud y sentido del segmento **DC**. Entonces los puntos **F** y **K** pertenecen a la perpendicular deseada, que se hubiera levantado en el punto **C**.

4. Determinación de varios puntos de una alineación sobre la cual existe un obstáculo que impide la visual.

Sea **AB** (fig. 3) una recta a jalonar, sobre la cual suponemos se halla un obstáculo (por ejemplo una casa o un monte de tupidos árboles), que im-

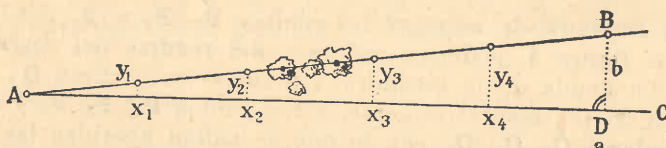


Fig. 3. Jalonar una alineación *AB* interrumpida por un monte de tupidos árboles.

pide la visual. Se trazará para ello por el punto **A** una línea auxiliar **AC**, que en lo posible pase cerca del obstáculo. Bajamos sobre **AC** la perpendicular **BD** y ponemos **AD = a** y **DB = b**.

Suponiendo un sistema de coordenadas rectangulares, con origen en **A** y eje de las abscisas **x** en el rayo **AC**, tendremos para las coordenadas **x** e **y** de un punto cualquiera de la recta la relación:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

Esta ecuación nos dará entonces para cualquier valor de **x** (**x₁**, **x₂**, **x₃**, **x₄** de figura 3) el correspondiente valor de **y** (**y₁**, **y₂**, **y₃**, **y₄**), o sea el punto de la línea **AB** buscado.

5. Trazado del ángulo de 45° como recurso para salvar obstáculos en el levantamiento de parcelas.

Cuando se logra establecer en el terreno un triángulo rectángulo isósceles, se puede a veces salvar fácil y elegantemente los obstáculos que se oponen a la medición. Si en la situación indicada en la figura 4 se llega a establecer en el terreno el triángulo rectángulo isósceles **ABC**, se obtiene con la medición del cateto **BC** también la longitud del cateto **BA**.

En muchos problemas de obstáculos es de importancia si un punto es accesible o no. Es

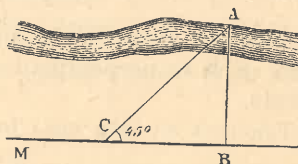


Fig. 4. Recurso del ángulo de 45° para salvar un obstáculo.

un caso frecuente que un punto visible, pero no accesible debe ser levantado sobre una línea de operaciones.

De un punto P_1 (fig. 5), por ejemplo, puede bajarse la perpendicular P_1Q_1 sobre una línea de operaciones MN . Pero la ordenada P_1Q_1 puede no ser medible directamente, debido a un curso de agua que no se puede atravesar (caso de la figura 4), o debido a un cerco a través del cual no se puede medir (fig. 5). Pero suponemos que el punto P_1 sea visible desde los puntos Q'_1 y Q_1 de la línea de operaciones, por ejemplo.

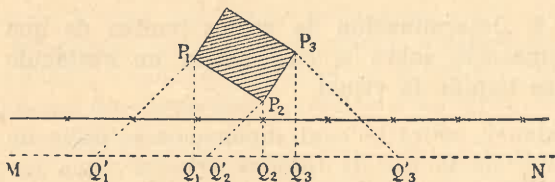


Fig. 5. Un obstáculo (cerco) impide la medición directa de las ordenadas.

Tratándose entonces de levantar los puntos P_1 , P_2 y P_3 de la casa representada en figura 5, podemos valernos del recurso del ángulo de 45° . Buscaremos con ayuda de la escuadra a pínulas los vértices Q'_1 , Q'_2 y Q'_3 de los ángulos de 45° , respectivamente, a los puntos P_1 , P_2 , P_3 y los pies de las perpendiculares Q_1 , Q_2 , Q_3 , con lo que se hallan abatidas las ordenadas Q_1P_1 , Q_2P_2 , Q_3P_3 sobre la línea de operaciones MN , las que pueden ser cómodamente medidas.

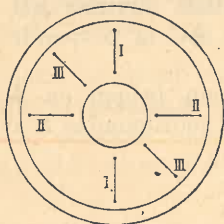


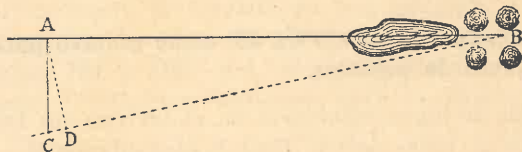
Fig. 6. Escuadra de pínulas con plano III-III para 45° .

En las escuadras a pínulas se hallan generalmente materializados no sólo los dos planos dióptricos I—I y II—II, para el trazado de ángulos rectos, sino también un tercer plano III—III (fig. 6), para los ángulos de 45° .

6. Trazado de una recta oblicua para salvar un obstáculo en la medición lineal.

Cuando el recurso de la paralela (fig. 1) no es posible emplear, como en el caso de figura 7, se podrá a veces recurrir al siguiente procedimiento:

Fig. 7. Recta auxiliar oblicua para salvar un obstáculo a la medición directa.



Se trata de medir la línea AB que pasa por encima de un lago. Se levantará en A la perpendicular AC , de tal modo que la oblicua BC salve el obstáculo.

Tenemos en este caso para la longitud AB buscada:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} \\ &= \sqrt{(\overline{BC} + \overline{AC})(\overline{BC} - \overline{AC})} \end{aligned}$$

También se puede bajar desde **A** la perpendicular **AD** sobre una oblicua **BC**, midiéndose, en este caso, las líneas **BD** y **AD**.

Tendremos entonces para la longitud **AB** buscada:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2}$$

expresiones éstas que se pueden calcular sea por medio de la conocida extracción de raíces cuadradas, sea con ayuda de una tabla de cuadrados, con logaritmos o (si la precisión es suficiente) con la regla de cálculo.

§ 13.

Instrumentos de dibujo; su uso para el dibujo de planos. Coordinatógrafos polares. Signos convencionales.

1. Importancia del plano.

Todo levantamiento conduce, en último término, al dibujo de un **plano** (plano catastral, plano topográfico o carta geográfica). Sus principales características son **claridad** y **exactitud** en todas sus partes, debiendo el dibujo, para satisfacer esas exigencias, ajustarse a ciertas **prescripciones oficiales** que lo reglamentan (*). Consíguese así la necesaria **uniformidad** de toda la labor cartográfica de un país.

Influye, sin embargo, en cuanto al **dibujo topográfico** se refiere, en cierto grado el **factor personal** de quien lo ejecuta; y si el dibujante es un artista, sabrá imprimir a su trabajo un sello peculiar que le dará elegancia, estilo y vida.

En el dibujo de planos es necesario procurar la más alta **precisión** posible por la gran trascendencia que estos planos tienen: los planos catastrales, por ejemplo, representan una sólida **base gráfico-numérica** para la conservación y el restablecimiento de los puntos límites de las parcelas, permitiendo efectuar en ellos determinaciones gráficas y mecánicas de superficies, que son de tanta importancia en los trabajos de catastro moderno.

Como en la exactitud de esos planos influye también la calidad de los instrumentos de dibujo empleados, el papel, etc., creemos útil y conveniente hacer algunas breves indicaciones al respecto.

2. Reglas sin graduar (reglas T, etc.), **reglas graduadas** (dobledecímetro, tripledecímetro, etc.), **compases**, **tiralíneas**, **escalas**, **escuadras comunes**.

Reglas. Las hay de madera, celuloide, ebonita y metal. No debe su espe-

(*) Por ejemplo: "Reglamento cartográfico" del Instituto Geográfico Militar Argentino, Buenos Aires, 1933.

sor pasar de 2 mm, para tener así la regla la suficiente flexibilidad al adaptarse a la superficie del papel de dibujo.

Compruébase la **rectitud de una regla** trazando con la misma una recta **AB** (fig.1). Se la emplea en dos posiciones simétricas (posición I y posición II), utilizando el mismo borde en la forma que se indica en la figura 1 (principio de la inversión).

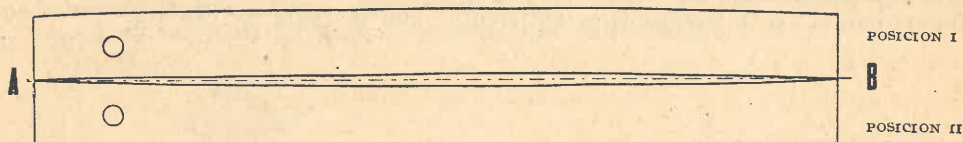


Fig.1. Comprobación de la rectitud de una regla por el principio de la inversión.

Se trazará la primera línea **AB** en posición I, luego una segunda en posición II, sin perder el contacto con los puntos **A** y **B**.

Si la regla es exacta, la segunda línea coincidirá con la primera en todos sus puntos, siendo entonces realmente una **recta**. Una eventual desviación de la línea trazada respecto a la recta (caso de fig.1) se revelará en el dibujo por su **doble magnitud**.

Compases. Distínguense dos tipos de compases, el de punta seca y el de piezas. Empléase el primero para trasladar medidas de una parte a otra, por ejemplo, de la escala transversal al papel de dibujo. Cuando el traslado de medidas pequeñas requiere mucha precisión, empléase a veces el llamado **compás de pelo** provisto de tornillo de paso fino.

Las articulaciones del compás deben funcionar sin aspereza, conservando, sin embargo, la abertura de los brazos con cierta firmeza, lo que se consigue con una leve presión del tornillo de ajuste.

Balustrín a bomba. Sirve este tipo de compás para trazar circunferencias de radio muy pequeño. Uno de los dos brazos funciona como eje de rotación, alrededor del cual gira el brazo porta-lápiz o porta-tiralíneas.

Para el traslado de medidas grandes o para el trazado de circunferencias de radios mayores de 2 dm, conviene emplear el **compás de vara** (fig. 2).

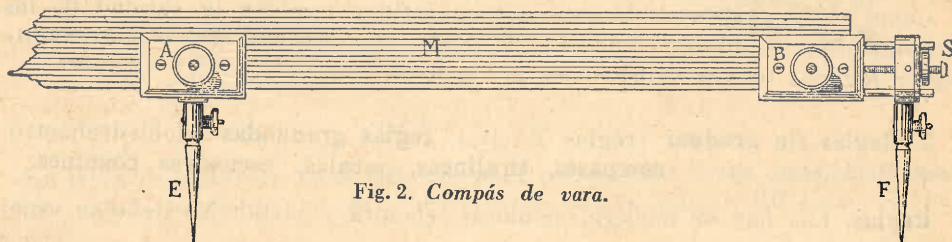


Fig. 2. Compás de vara.

Compás de vara. Este instrumento se compone de una regla de madera o metal **M** lo suficientemente rígida para no cimbrarse, de dos abrazaderas mó-

viles, **A** y **B**, que se ajustan a la regla mediante los respectivos tornillos de presión, y de las puntas de acero, **E** y **F**, que se ajustan a caja y espiga, asegurándose las por un tornillo en las mencionadas abrazaderas.

Mediante un sencillo mecanismo a resorte, en el cual el tornillo **S** desempeña el papel principal, se puede hacer retroceder o avanzar pequeñas magnitudes a la punta **F**, lo que permite ajustar la distancia entre puntas a una determinada longitud a trasladar.

En otros modelos la regla queda sustituida por una varilla metálica cilíndrica dividida en tramos que se empalman mediante espigas a rosca.

Después del compás, el instrumento más importante para el dibujo es el **tiralíneas**.

Tiralíneas. Las hojas de tiralíneas, de acero templado, bien afiladas, se aproximan o se separan por medio de un **tornillo regulador**.

Para el trazado de curvas se usan tiralíneas especiales, cuyas hojas de forma ondulada giran alrededor de una espiga colocada en la dirección del eje del mango.

Escalas. Las hay de madera, de celuloide y de metal, siendo las de madera (boj) de uso común.

Son de dos tipos, escalas con dos biselas y las de forma prismática triangular.

Escuadras. Las hay de dos tipos, con ángulos de 45° y ángulos de 30° y 60° . Pueden ser de madera, de celuloide o de metal.

Escuadra común. Para comprobar la exactitud de una escuadra, emplea-se un procedimiento análogo al que se usa cuando se quiere examinar la **escuadra de agrimensor** (ver fig. 8, pág. 52).

Se aplicará, en dos posiciones, un cateto de escuadra a una regla en la forma indicada en figura 3, y se trazará cada vez la línea del otro cateto. Si la escuadra es exacta, las dos líneas así obtenidas coinciden; un eventual error de la escuadra se revelará en el papel por su doble magnitud.

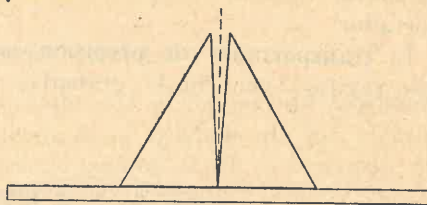


Fig. 3. Comprobación de la exactitud de una escuadra por medio del principio de inversión.

3. Transportador común. Precisión de las medidas tomadas con transportador.

El **transportador**, en uso desde el año 1690, es el **goniómetro** más cómodo y más rústico al mismo tiempo.

Los hay de cartón, de celuloide y de metal. Los de celuloide con borde de circunferencia achanflado son los más prácticos.

El tipo de transportador más común está formado por un semicírculo, siendo el diámetro que lo limita (o una paralela al mismo) la **línea de fe**

para trazar un determinado ángulo. Una rayita que cruza ese diámetro marca el centro del transportador.

Está dividida la corona en grados o medios grados. Suele llevar dos numeraciones, una creciente de izquierda a derecha, de 0° a 180° , y la otra de derecha a izquierda entre iguales límites.

Con más ventajas aún se emplean también transportadores de círculo entero.

El **transportador de forma rectangular** puede emplearse como instrumento de dibujo universal muy práctico, por ser al mismo tiempo transportador, regla, escuadra y escala transversal, razón por la cual es un instrumento preferido para la confección de rápidos croquis de campo.

El inconveniente de este transportador es el espacio desigual que tienen las divisiones de grado, mínimas en el medio y máximas en las esquinas.

Precisión de las medidas tomadas con transportador. En la ejecución más rústica del transportador, como en los modelos de cartón, hay que admitir un **error de graduación** que puede llegar a $1/5$ de grado; en los modelos más finos de metal, el error de graduación se reduce a 2 ó 3 minutos. A este error de graduación se suma el **error de lectura**, que se puede estimar en un décimo de grado, por lo menos, en los modelos de metal (de unos 14 cm de diámetro), de tal modo que, aun usando un fino transportador metálico, siempre debe tenerse en cuenta una inseguridad de la lectura de unos 10 minutos.

4. Transportador de precisión.

Con el uso de un nonio, tornillos de presión y de coincidencia se puede aumentar todavía considerablemente la precisión de las lecturas del transportador.

El **transportador de precisión** es de metal. El centro está marcado por dos rayitas (ver fig. 4) grabadas sobre una delgada plaquita de celuloide

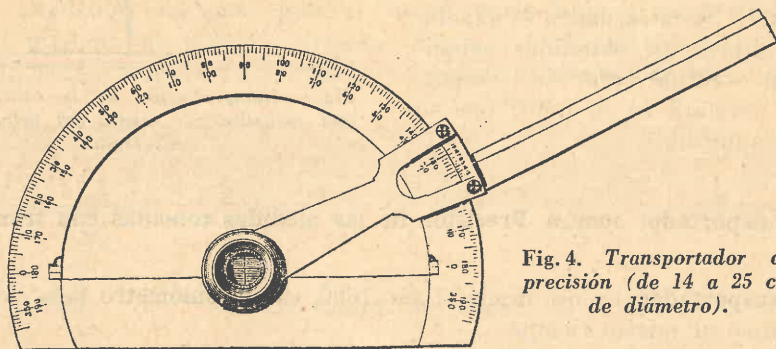


Fig. 4. Transportador de precisión (de 14 a 25 cm de diámetro).

muy transparente. Alrededor del centro gira un brazo llamado **alidada**, que lleva una horquilla portadora de un **doble nonio** y que termina en una regla de borde biselado. El nonio tiene graduación creciente hacia ambos

lados de un cero común, para usar una u otra según el sentido de la graduación del transportador que se utilice. La prolongación del borde biselado de la alidada pasa por el cero del nonio y el centro del transportador. Hállase graduado la semicircunferencia de 30 en 30 minutos. Cada nonio tiene 10 divisiones que corresponden a 9 de las de la semicircunferencia, resultando entonces una apreciación de nonio de $\frac{1}{10} \times 30' = 3'$.

5. Trazado de un ángulo con transportador de precisión.

Para trazar con el transportador de precisión un ángulo cualquiera a partir de un rayo inicial **CA**, se hará coincidir el diámetro, o sea la línea de los trazos 0° y 180° , con dicho rayo, y el centro del transportador con el punto **C**. Se hará girar la alidada hasta que el cero del nonio marque el medio grado anterior más próximo al valor del ángulo a colocar (por ejemplo $27^\circ 30'$). Conseguido esto, se continuará despacito el giro de la alidada hasta hacer coincidir el trazo correspondiente del nonio con la división del círculo que inmediatamente sigue a ese trazo en el sentido de la numeración creciente. Sea, por ejemplo, el ángulo a trazar igual a $27^\circ 54'$. Se colocará el cero del nonio en $27^\circ 30'$, y como el ángulo debe todavía aumentarse en $24'$ más o sea en $8/10$ de $30'$, será la octava división del nonio la que se llevará a la coincidencia con un trazo de la división del transportador. En esta posición de la alidada se trazará, a lo largo del borde biselado, con lápiz bien afilado, el rayo final del ángulo buscado.

En la práctica conviene colocar a ojo el trazo cero del nonio aproximadamente en la posición $27^\circ 54'$, (es decir primero sin usar el nonio) y sólo luego echar un vistazo al octavo trazo del nonio, para hacerlo coincidir exactamente con la división del círculo, en caso de que aun faltara algo en la precisión.

6. Trazado de rumbos con transportador común.

Cuando el levantamiento ha sido efectuado por el método de **coordenadas polares**, usando brújula, o teodolito, ejecútase el traslado de los elementos (distancias y ángulos) tomados en el terreno generalmente con compás, regla y transportador; se usará el transportador común cuando no se requiere mucha precisión, empleándose para el traslado de las distancias el compás de punta seca y la escala transversal. Para la mayor parte de las necesidades de la práctica un transportador de celuloide de 12 a 20 cm de diámetro proporciona suficiente precisión.

7. Trazado de un rumbo verdadero.

Cuando se trate de trazar un **rumbo verdadero** α (fig. 5), es decir, el ángulo que una dirección cualquiera, **AP**, forma con el eje de las **x**, se colocará el transportador de tal modo que el diámetro del semicírculo coincida con dicho eje o una paralela al mismo. Para rumbos menores de 180° , se situará el semicírculo a la derecha de la dirección Sur-Norte (fig. 5),

y a la izquierda de la misma para rumbos mayores de 180° (vértices 4 y 5 de figura 6). Se marcará con lápiz duro, bien afilado, sobre el borde, la división correspondiente al rumbo a trazar (la fracción de grado se estima), uniendo luego con una línea fina el punto de arranque **A** con la marca colocada. Siendo el rumbo verdadero α mayor de 180° , se marcará, en la posición izquierda, el ángulo excedente a 180° (vértices 4 y 5 de figura 6).

8. Rumbos magnéticos.

Cuando se conoce el **rumbo magnético** (o sea el **ángulo que una dirección cualquiera forma con el meridiano magnético**), se podrá convertirlo en **acimut sumando** a aquél el valor de la **declinación magnética**, declinación Este o declinación oriental, que existe en la mayor parte del territorio argentino (ver fig. 2, pág. 84, Volumen 2 del Tomo III).

En una pequeña parte de la República Argentina (Territorio Nacional de Misiones y parte de la Provincia de Corrientes) hay declinación Oeste. En esas zonas, para pasar de rumbos magnéticos a acimutes, se deberá restar la declinación Oeste.

9. Ventajas que ofrece el trazado de rumbos en lugar de ángulos poligonales.

Un polígono cuyos lados y ángulos se conocen, puede dibujarse de dos modos:

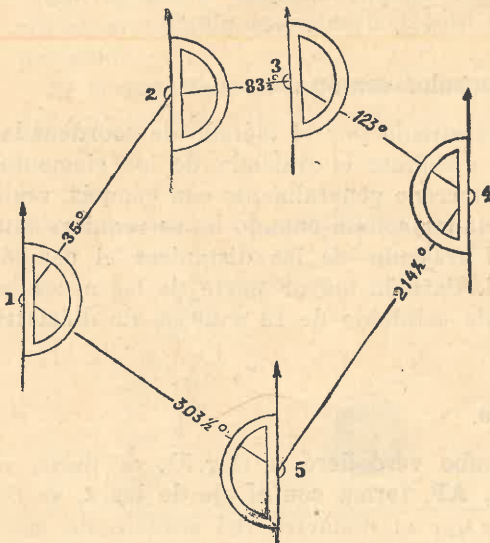


Fig. 6. Trazado de los rumbos de un polígono cerrado.

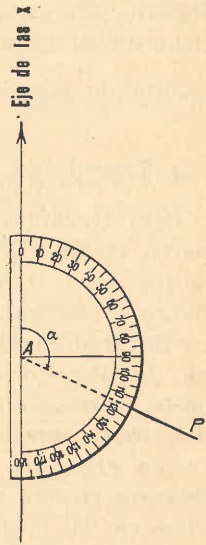


Fig. 5. Trazado de un rumbo verdadero con transportador común.

Primer modo: Los rumbos de los lados se obtienen en el dibujo ubicando en los vértices, por medio del transportador, los ángulos poligonales, cuyas magnitudes se conocen, alternando esta operación de dibujo con la otra de trasladar la longitud de los lados poligonales.

Segundo modo: Antes de iniciar el dibujo, el dibujante, en base a un rumbo de arranque y los ángulos poligonales conocidos, calcula los rumbos de todos los lados del polígono (ver pág. 219, Volumen 2 del Tomo II de este Compendio) y utiliza estos rumbos alternativamente con los lados para construir el polígono (ver N° 7).

El procedimiento de construir los polígonos utilizando los rumbos de los lados, ofrece ventajas en cuanto a la precisión del trabajo de dibujo. Trazando los ángulos directamente según el primer modo antes explicado, cualquier error cometido en el trazado de un ángulo se propagaría a todos los rumbos siguientes. Dibujando, en cambio, el polígono basándose en los rumbos de los lados, todas las direcciones dibujadas son independientes de las direcciones de los lados anteriores.

10. Ventajas del trazado de varios rumbos desde un sólo punto.

En lugar de trazar en todos los vértices de una figura poligonal una paralela al eje de las x (fig.6), se prefiere a veces trazarla una sola vez por un punto en el centro del polígono (fig.7) o por un punto apropiado del reticulado, y dibujar luego una radiación que contenga todos los rumbos (antes calculados) de los lados poligonales. Tales rumbos son trasladados luego a los respectivos vértices de la figura con el concurso de escuadra y regla.

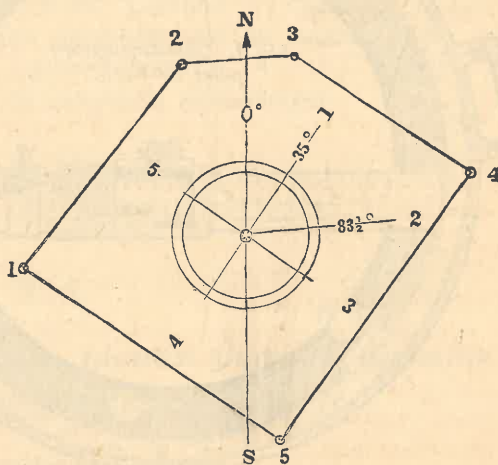


Fig. 7. Trazado de los rumbos de un polígono cerrado desde un punto central.

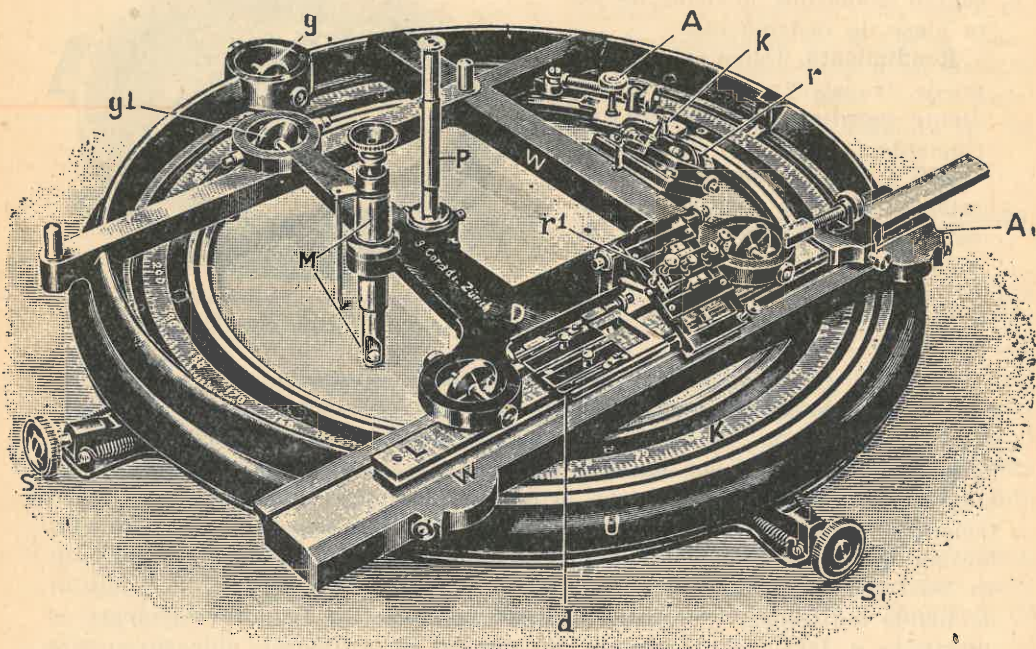


Fig. 8. Coordinatógrafo polar de Coradi.

El polígono de figura 7 es el mismo de figura 6, cuando éste se supone dibujado según el método que acabamos de indicar.

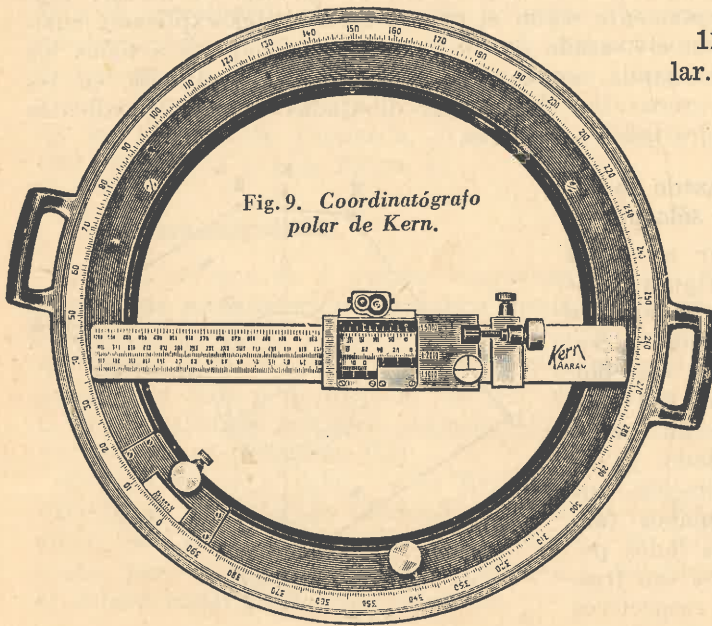


Fig. 9. *Coordinatógrafo polar de Kern.*

Las figuras 8, 9 y 10 representan conocidos modelos de esta clase de instrumentos.

Rendimiento. Calcúlese que se puede transportar al plano mediante coordinatógrafo polar diametralmente:

400 a 600 puntos de detalle, estando en ello comprendido el contralor de los puntos de estación.

12. Signos convencionales (ver Apéndice III).

Utilizanse en el dibujo de croquis, planos y cartas signos especiales llamados “**signos convencionales**”, cuyo rol es representar convenientemente detalles del terreno, como vías de comunicación, caminos, ferrocarriles, canales, líneas telegráficas, alambrados, tranqueras, represas, jagüeles, casas, etc., los que, por su pequeñez, a la escala del dibujo no tendrían representación, pero que por su importancia deben ser representados. También existen signos que indican detalles sobre condiciones del suelo, clases de cultivo, etc., que determinan el coeficiente de riqueza, de interés civil y militar, no siendo indiferente que un terreno sea montañoso o llano, fuertemente accidentado o levemente ondulado, pantanoso o pedregoso, cubierto o descubierto.

11. Coordinatógrafo polar.

Cuando haya de trazarse en el papel un ángulo con precisión mayor que la que proporcionan los transportadores (comunes y de precisión), se recurrirá a un aparato especial llamado **coordinatógrafo polar**, sobre cuyo manejo ilustran las instrucciones especiales que las casas constructoras suelen suministrar con estos instrumentos.

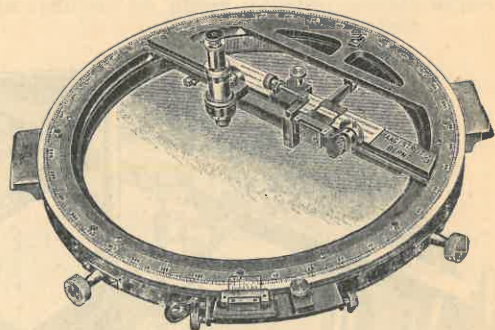


Fig. 10. *Coordinatógrafo polar Haag-Streit.*

Se ha convenido, por tales causas, en adoptar ciertos signos relativamente pequeños para no perjudicar la claridad del dibujo, cuyo tamaño varía insensiblemente con la escala, permaneciendo, en cambio, invariable su forma.

Las siete láminas del Apéndice III contienen, en páginas 1 a 9, los

Signos Convencionales Argentinos (en negro)

para planos topográficos a escala 1/25 000, 1/50 000 y 1/100 000, hallándose en página 9, además, algunos **signos convencionales de catastro**.

Las páginas 10 y 11 contienen, respectivamente:

Modelos de letras de caligrafía cartográfica

y un ejemplo:

Aplicación de los signos convencionales a una zona de valle de erosión.

§14.

Reticulado de coordenadas planas. Coordinatógrafos rectangulares.

1. Definiciones. Sistemas de coordenadas planas.

Las coordenadas planas que sirven para determinar la posición de los puntos básicos de un levantamiento topográfico o catastral, pueden pertenecer a un **sistema general**, que se extiende a veces sobre un vasto territorio, con valores para las abscisas x y las ordenadas y de varias decenas de miles de metros (fig. 1, pág. 93), o pueden pertenecer a un **sistema urbano** o, por fin, estar referidas a un pequeño **sistema local**, como generalmente ocurre hoy en los levantamientos de polígonos aislados en las **mensuras de campos**.

2. Coordenadas geográficas; definiciones. Su transformación en coordenadas planas.

Las **coordenadas geográficas** de un punto de la superficie terrestre son su **latitud geográfica** φ y su **longitud geográfica** λ (a veces designada por L).

Entiéndese por **latitud geográfica** de un punto el ángulo φ que la vertical del punto forma con el plano del ecuador, y por **longitud geográfica** del mismo el ángulo λ que el meridiano del punto forma con el **meridiano origen** o "primer meridiano", el que pasa por el **Observatorio de Greenwich**. Este meridiano fué oficialmente adoptado como origen de las longitudes por la **República Argentina** en el año 1911.

Anteriormente se daban en la República Argentina las longitudes con respecto al meridiano del **Observatorio de Córdoba**. Para transformar estas longitudes al sistema de Greenwich, es necesario conocer la **longitud de Córdoba** con respecto a Greenwich, la que es:

$$\lambda = - 64^{\circ} 12' 3'',3$$

Siendo entonces la longitud de un borde de plancheta antigua, de "La Plata", por ejemplo, $\lambda = +6^{\circ} 18'$, respecto a Córdoba, la correspondiente longitud referida a Greenwich sería:

$$\lambda = -64^{\circ} 12' 3'', 3 + 6^{\circ} 18' = -57^{\circ} 54' 3'', 3.$$

En Topografía y Geodesia las latitudes se cuentan **positivas** desde el ecuador hacia el Norte y **negativas** hacia el Sur, las longitudes λ se cuentan **positivas** desde Greenwich hacia el Este y **negativas** hacia el Oeste.

Las coordenadas geográficas no se prestan bien para las operaciones inmediatas del ingeniero y agrimensor. Cuando las posiciones de puntos fijos se hallan dadas por coordenadas geográficas, es necesario generalmente **transformarlas en coordenadas planas Gauss-Krüger** antes de poderlas utilizar como elementos básicos o de contralor para las operaciones de detalle (ver ejemplos prácticos en págs. 20, 21 y 22 del Apéndice II).

3 Necesidad de la limitación de un sistema de coordenadas planas.

Pero esa transformación de coordenadas geográficas en coordenadas planas no es conveniente extenderla a superficies muy grandes.

Debido a la curvatura de la Tierra no es posible representar en un plano un gran trozo de la superficie terrestre con una escala absolutamente uniforme para toda la extensión del mismo.

Al pasar de una figura geométrica de la superficie curva a su representación en el plano, son inevitables ciertas **deformaciones**, especialmente de **distancias**. Esas deformaciones son tanto más pronunciadas cuanto mayor es el trozo de superficie que se quiere representar en el plano. Conviene por eso **limitar la extensión de las superficies** a representar en el plano de tal modo que las deformaciones no excedan de ciertos límites. Es decir, es necesario dividir el territorio de un gran país en varias partes, a cada una de las cuales corresponde un **sistema de coordenadas planas**.

El **Catastro de Prusia** empleaba antes, 40 de estos sistemas de coordenadas.

Pero no es conveniente un gran número de sistemas de coordenadas. Actualmente los 40 sistemas de coordenadas prusianos han sido substituídos por 6 sistemas nuevos, de los cuales cada uno corresponde a una faja relativamente angosta (de un ancho de 3° de longitud), pero ilimitada en dirección Sur-Norte. Esas fajas se llaman "**fajas meridianas de coordenadas Gauss-Krüger**", por haber sido los grandes geodestas y matemáticos **Gauss** y **Krüger** los autores de la proyección empleada y de la introducción de esas fajas, respectivamente.

4. Necesidad del reticulado de coordenadas planas.

Como las coordenadas de los puntos a representar generalmente se refieren a un **punto origen muy lejano**, el que por eso no puede figurar en la hoja del plano, se recurre a un **reticulado** (cuadrículado), cuyas líneas, a distancias redondas (100 metros, por ejemplo) corren paralelamente a los respectivos ejes de las abscisas x (Sur-Norte) y de las ordenadas y (Oeste-

Este), que pasan por el origen. Se forman así cuadrados de lados l , llamados mallas de cuadrículado (fig.1).

5. Tamaño de las mallas del reticulado.

La magnitud de las mencionadas distancias redondas o sea la longitud del lado de la malla del reticulado depende de la escala del dibujo. Para croquis originales a escala 1:500 y 1:1000, generalmente se elige 10 cm, y 5 cm para la escala 1:2000. (*) Para las escalas de levantamiento topográfico 1:25000 y 1:50000 el Instituto Geográfico Militar argentino emplea el reticulado de 4 cm uniformemente.

6. Trazado de un reticulado de coordenadas planas. Método común y método diagonal.

Por causa de la falta de precisión de la escuadra de dibujo común, trázanse generalmente los reticulados de coordenadas planas usando compás de punta seca, compás de vara, escala transversal y una regla de metal o madera, debiendo examinarse esta última antes de emplearla.

Método común.

Se tira primero una **recta básica**, **LL** (fig.2), dividiéndola en segmentos iguales de 10 cm mediante compás y escala. Obtíense así los puntos **A, B, C, D, E, F, G**. Para la construcción de una **perpendicular**, por ejemplo la **HI**, correspondiente al punto **D**, se trazarán, con centro en **A** y **G**, hacia arriba y hacia abajo, arcos de circunferencia (usando compás de vara), obteniéndose así los dos puntos de intersección **H** e **I**. La línea de

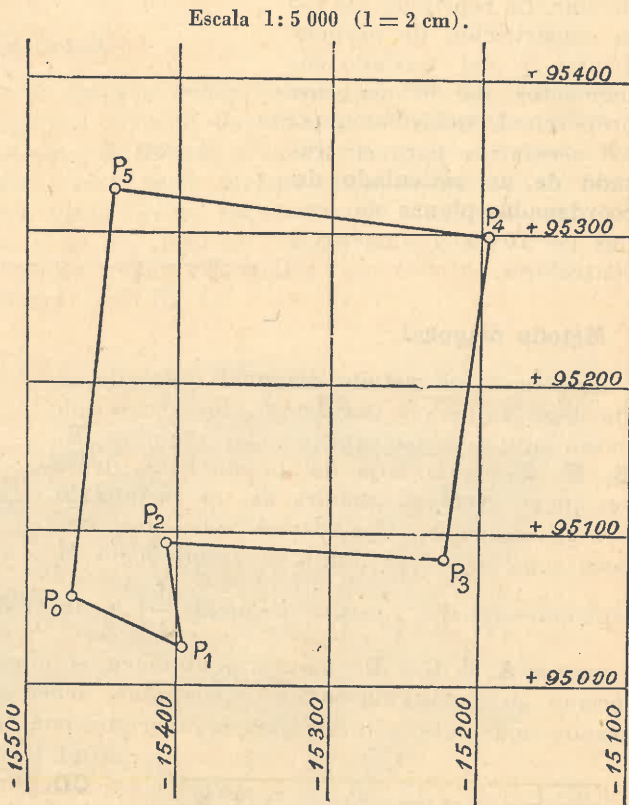


Fig. 1. Polígono $P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$ dentro de un sistema de coordenadas planas.

(*) Ver página 14 del folleto: "Confección de Catastros" por el autor.

unión **HI** debe pasar exactamente por **D**. A partir de este punto se trasladarán segmentos de 10 cm hacia arriba y hacia abajo sobre esa perpendicular. La repetición de esta construcción de perpendicular y del traslado de segmentos de 10 cm, nos proporciona todos los puntos necesarios para el **trazado de un reticulado de coordenadas planas** con mallas de 10 cm y numerosos controladores.

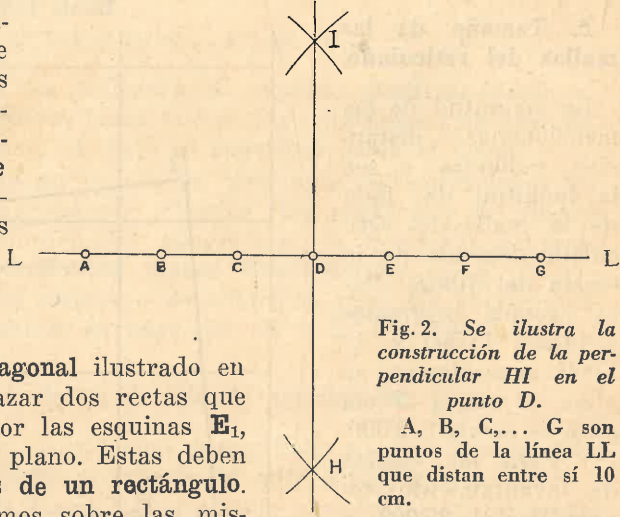


Fig. 2. Se ilustra la construcción de la perpendicular **HI** en el punto **D**.

A, B, C, ... G son puntos de la línea **LL** que distan entre sí 10 cm.

Método diagonal.

Empleando el **método diagonal** ilustrado en fig. 3, se empezará por trazar dos rectas que pasan aproximadamente por las esquinas **E₁, E₂, E₃, E₄** de la hoja del plano. Estas deben ser luego **rectas diagonales de un rectángulo**. En consecuencia, trasladamos sobre las mismas, a partir de su punto de intersección **M**,

segmentos iguales (la semidiagonal $\frac{d}{2}$), en las 4 direcciones diagonales. Los 4 puntos **A, B, C** y **D**, que así se obtienen, se unen por rectas finas, las que forman un **rectángulo básico**, cuyos lados deben medirse con todo cuidado, usando una regla milimetrada. Se averigua cuántos lados de malla de longitud **l** caben en las distancias **BC** y **CD**. Son 7, por ejemplo en **BC**, además de un cierto exceso que llamaremos **2c₁**. Se trasladará desde los puntos **B** y **C**, **A** y **D**, respectivamente, hacia arriba y hacia abajo, el segmento **c₁** (simple), obteniéndose así dos pares de puntos entre los cuales hay un espacio de **7 × l** exactos. Se marcarán estos 7 espacios **l**. De un modo análogo se procederá sobre los otros bordes del rectángulo básico. Uniendo ahora los correspondientes puntos sobre los bordes izquierdo y derecho, inferior y superior, se obtendrán dos series de rectas (equidistantes) paralelas a los respectivos ejes del sistema.

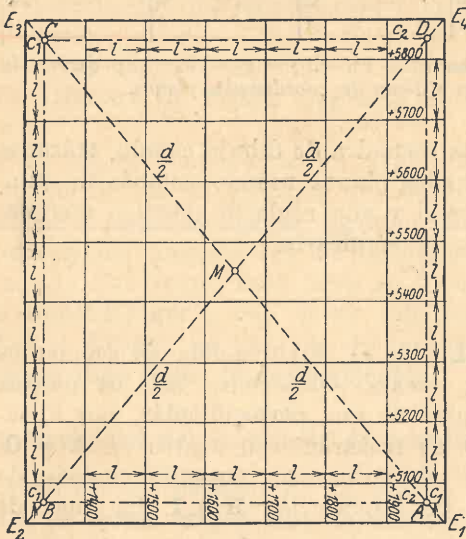


Fig. 3. Trazado de un reticulado por medio del método diagonal. (Figura tomada de **M. Naebaurer**: "Vermessungskunde".)

Sobre los bordes inferior y derecho se escribirán las distancias re-

dondas de las líneas de malla del reticulado a los respectivos ejes del sistema de coordenadas.

7. Coordinatógrafo grande Coradi.

Con el objeto de facilitar el trazado exacto de reticulados de coordenadas, se ha construído un aparato especial llamado **coordinatógrafo rectangular, modelo grande**, por la casa **G. Coradi, Zürich** (Suiza), el que, por las grandes ventajas que su uso ofrece suele formar parte de las colecciones de instrumentos de la mayor parte de las facultades de ingeniería, de las escuelas técnicas superiores y de los grandes institutos cartográficos oficiales de todo el mundo. Permite trazar reticulados con relativa rapidez y con una precisión de $1/100$ mm (ver fig. 4).

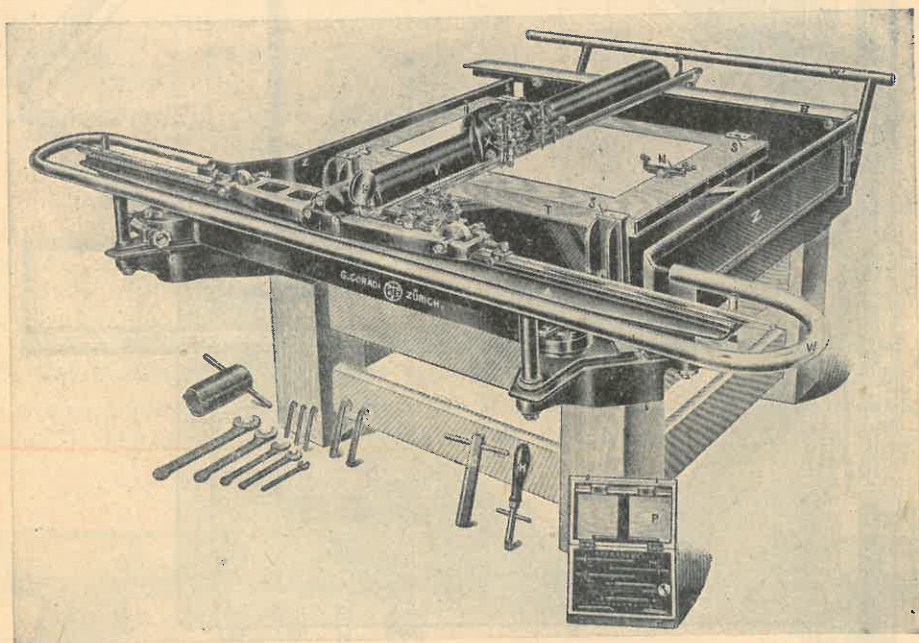


Fig. 4. Coordinatógrafo Coradi, modelo grande.

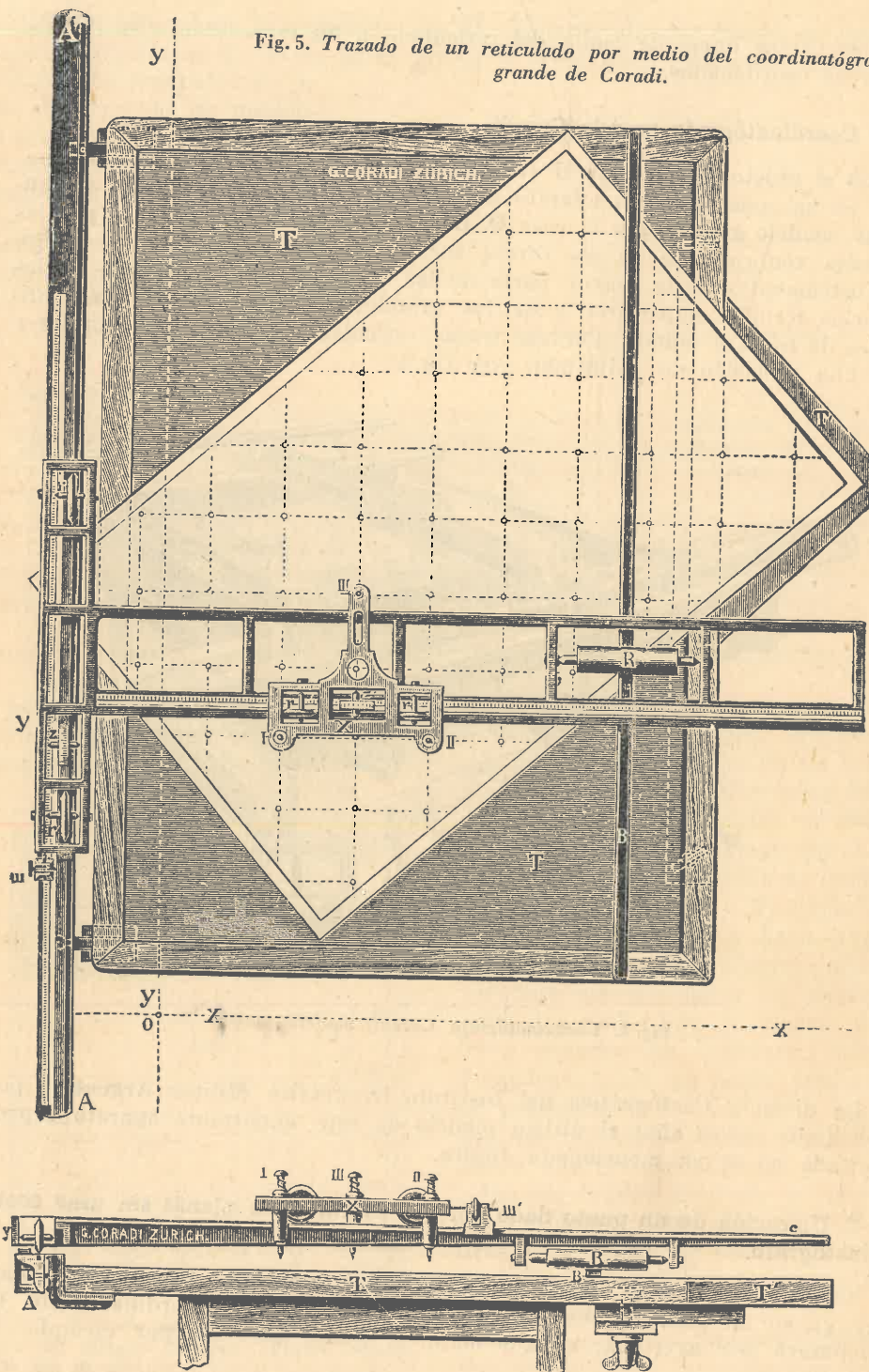
La división Cartográfica del Instituto Geográfico Militar Argentino posee desde varios años el último modelo de este importante aparato representado en la ya mencionada figura.

8. Ubicación de un punto dado por sus coordenadas planas sin usar coordinatógrafo.

Cuando se trate de ubicar un punto dado por sus coordenadas planas, x_P , y_P , en un plano provisto de reticulado, sin usar coordinatógrafo, se empezará por averiguar en qué malla el punto cae. Sea por ejemplo, la

(Continúa en pág. 97.)

Fig. 5. Trazado de un reticulado por medio del coordinatógrafo grande de Coradi.



(Continuación de pág. 95.)

mallas 1-2-3-4 (fig. 6). Designando por x_0 , y_0 las coordenadas de las líneas de malla 1-2 y 2-3, más próximas a los ejes del sistema y al punto a ubicar, tendremos:

$$x_P = x_0 + \Delta x,$$

$$y_P = y_0 + \Delta y.$$

donde Δx y Δy son los excedentes que separan al punto P de las líneas 1-2 y 2-3.

Trasladaremos ahora el excedente Δx , a partir de los puntos 1 y 2 en la dirección de las abscisas, obteniendo así los puntos auxiliares H_1 y H_2 , puntos que se pueden controlar por medio del suplemento $(l - \Delta x)$ desde el lado opuesto 3-4. Uniendo H_1 y H_2 por una fina línea, se tendrá con ésta un primer lugar geométrico del punto P . Trasladando ahora sobre la línea H_1-H_2 la cantidad Δy , se obtendrá la posición del punto P buscada, la que se podrá controlar por medio del suplemento $(l - \Delta y)$ desde H_2 .

Cuando todos los puntos de un polígono se hallen colocados en la forma indicada, se los unirá con trazos finos, según el orden en que fueron levantados (ver fig. 1). La comparación de las medidas tomadas directamente en el terreno con las resultantes del dibujo del plano, proporcionará valiosas pruebas de dibujo y cálculo.

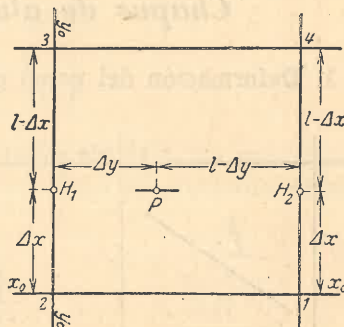


Fig. 6. Ubicación de un punto P dado por sus coordenadas planas.

9. Coordinatógrafo rectangular para detalles.

La colocación de puntos descrita en el número anterior, queda notablemente facilitada con el coordinatógrafo de detalles representado en fig. 7,

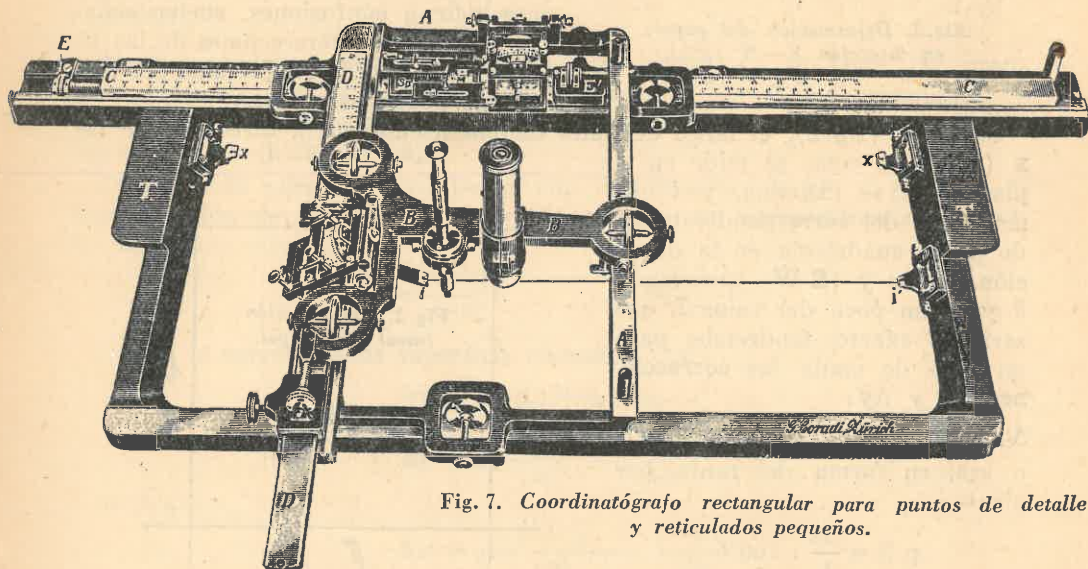


Fig. 7. Coordinatógrafo rectangular para puntos de detalle y reticulados pequeños.

el que no sólo permite **colocar** puntos dados por sus coordenadas sino también **medir** las coordenadas correspondientes a puntos ya ubicados.

El último modelo de este aparato forma parte del instrumental del Instituto Geográfico Militar, el que presta mucha utilidad en los **trabajos estereofotogramétricos**.

§ 15.

Deformación del papel. **Chapas de aluminio. Formatos DIN 476.**

1. Deformación del papel de dibujo, su efecto lineal.

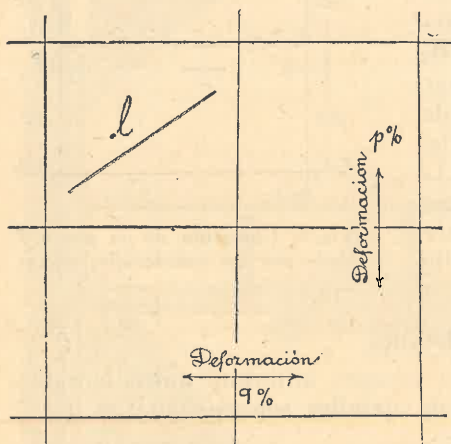


Fig. 1. Deformación del papel:
en dirección S-N ($p\%$),
" " E-W ($q\%$).

Siendo l' (fig. 2), el largo del lado x (S-N) tal como se mide en el plano que se examina, y l'' la magnitud del correspondiente lado de la cuadrícula en la dirección de las y (E-W), difiriendo l' y l'' un poco del valor L que sería el exacto, tendremos para un lado de malla las **correcciones** Δx y Δy :

$$\Delta x = L - l' \quad \Delta y = L - l''$$

o sea, en forma del tanto por ciento:

$$p\% = \frac{\Delta x}{L} \cdot 100\%$$

Los cambios de temperatura y los cambios de humedad, éstos más que aquéllos, producen **deformaciones de los planos**. Estas, a pesar de ser pequeñas, deben ser tomadas en cuenta cada vez que se quieran sacar gráficamente datos precisos de un plano.

Designaremos por $p\%$ la magnitud de la deformación en dirección **N-S** (fig. 1), y por $q\%$ la variación en dirección **E-W**.

(Para no recargar los **planos catastrales** inútilmente con líneas auxiliares, las que, además, pueden conducir a confusiones, suelen señalarse sólo las intersecciones de las líneas de la red de cuadrículas por medio de pequeñas **cruces**.)

de cuadrícula en la dirección de las

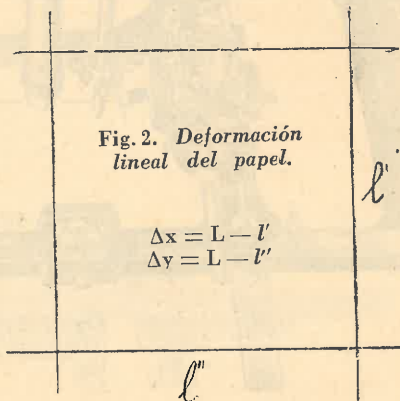


Fig. 2. Deformación lineal del papel.

$$\Delta x = L - l'$$

$$\Delta y = L - l''$$

$$q\% = \frac{\Delta y}{L} \cdot 100\%$$

Si un lado de parcela l (fig. 1.), cuya longitud gráfica se trata de corregir por deformación del papel, se extiende en **dirección oblicua**, se determinará el porcentaje de deformación por estima entre los valores $p\%$ y $q\%$.

Siendo, por ejemplo, las distancias entre las cruces de la cuadrícula en un plano catastral a escala 1:500, en lugar de 50 metros, en la dirección **S-N**: 49,7 m y en la dirección **W-E**: 49,4 m, tendremos para la **deformación del papel**:

$$p\% = \frac{50 - 49,7}{50} \cdot 100 = 0,6\% \text{ (S-N),}$$

$$q\% = \frac{50 - 49,4}{50} \cdot 100 = 1,2\% \text{ (W-E)}$$

pudiendo tomarse entonces para una línea de rumbo 45° (fig. 1), por ejemplo, un valor aproximado de 0,9%; el que aplicaremos al siguiente **ejemplo práctico**:

Sea:

$$l' \text{ sin corregir} \dots \dots \dots = 45,36 \text{ m}$$

$$\text{Corrección por deformación } \Delta l' (0,9\%) \dots \dots = \underline{0,41''}$$

Resulta:

$$l \text{ corregida, } l' + \Delta l' \dots \dots \dots = 45,77 \text{ m}$$

Esta corrección por deformación del papel de dibujo tiene mucha importancia en el cálculo de superficies por el **procedimiento semigráfico y gráfico puro** que explicaremos detalladamente más adelante.

2. Efecto de la deformación del papel en la determinación gráfica de superficies.

Suponemos descompuesta la parcela cuya superficie se trata de averiguar gráficamente, en muchas fajas elementales, de forma rectangular y de las dimensiones $a_1 \cdot b_1; a_2 \cdot b_2; \dots a_n \cdot b_n$, con las correspondientes superficies elementales $s'_1, s'_2, s'_3, \dots s'_n$.

Admitiremos para las medidas a una deformación de $p\%$ y para las b una variación de $q\%$, resultando entonces para las **correcciones** Δa y Δb los siguientes valores:

$$\Delta a = \frac{a \cdot p}{100}, \quad \Delta b = \frac{b \cdot q}{100}$$

Y para la **corrección de superficie elemental** $\Delta s'$:

$$\Delta s' = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a,$$

$$\Delta s' = a \cdot \frac{b \cdot q}{100} + b \cdot \frac{a \cdot p}{100}$$

o también:

$$\Delta s' = ab \cdot \frac{p + q}{100} = s' \cdot \frac{p + q}{100}$$

resultando entonces para la superficie total sin corregir, $S' = [s']$, la corrección $\Delta S'$:

$$\Delta S' = [\Delta s'] = S' \frac{p + q}{100} = S' (p \% + q \%).$$

Luego, superficie total corregida S :

$$(1) \quad S = S' + \Delta S' = S' + S' (p \% + q \%).$$

Ejemplo numérico: Siendo en un plano a escala 1:500:

$$\begin{aligned} a &= 8,65 \text{ m}, & p \% &= 0,6, \\ b &= 32,40 \text{ m}, & q \% &= 1,2, \end{aligned}$$

tendremos para la superficie S' sin corregir: $S' = a \cdot b = 280,3 \text{ m}^2$, y para el porcentaje de deformación superficial: $p \% + q \% = 0,6 + 1,2 = 1,8 \%$.

Luego:

$$\text{Corrección } \Delta S' = S' (p \% + q \%) = 280 \cdot \frac{1,8}{100} = 5 \text{ m}^2,$$

y superficie S corregida según (1):

$$S = 280,3 + 5,0 = 285,3 \text{ m}^2.$$

3. Chapa de aluminio como base para el papel de dibujo de los planos catastrales y planos topográficos.

Debido al grave inconveniente de la deformación del papel de dibujo, se ha generalizado en los últimos años cada vez más el uso de **papel pegado sobre delgadas chapas de aluminio** (de 2 mm de espesor). Así se garantiza en grado máximo la **estabilidad del papel** y la **conservación duradera del trabajo original**. El papel que debe ser de muy buena calidad, va pegado sobre las dos caras de la chapa. Se dibuja sobre una de ellas, sirviendo el papel pegado en la otra cara para la conservación limpia del material, y para evitar deformaciones de la chapa por la influencia de la humedad, la que sería de temer en el caso que el papel existiese solamente en un lado de la chapa.

Debido a tan destacadas **ventajas** el Instituto Geográfico Militar desde muchos años y desde algún tiempo también los Yacimientos Petrolíferos Fiscales efectúan sus trabajos de levantamiento topográfico sobre tableros provistos de chapas de aluminio, práctica ésta que se ha generalizado casi como norma en todos los trabajos catastrales modernos.

4. Formatos DIN 476 para papeles de dibujo y de imprimir.

La subcomisión de las industrias gráficas del Comité de Normas ha creado series de **formatos DIN** (para papeles de dibujo y de imprimir) con las abreviaturas *A*, *B*, *C*, y *D*, siendo *A* la **serie fundamental**, la que se caracteriza por las siguientes **3 reglas de formación**:

Regla del doblado: Todo nuevo formato es obtenido con doblar cada vez la dimensión mayor (ver fig. 3).

Regla de la semejanza: Todos los formatos de una misma serie son entre sí semejantes (ver fig. 4), siendo la relación entre las dimensiones x e y invariablemente:

(2) $x : y = 1 : \sqrt{2}$ (ver fig. 5)

Regla de referencia: Los formatos están referidos al sistema métrico decimal. La superficie del formato origen $A0$ es igual a la unidad de superficie:

(3) $xy = 1 \text{ m}^2$

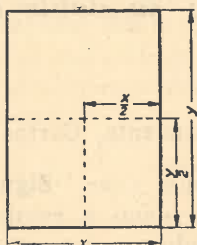


Fig. 3. Regla del doblado.

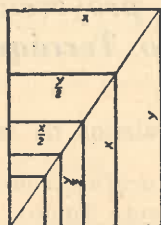


Fig. 4. Semejanza de los formatos.

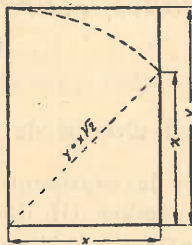


Fig. 5. Se ilustra la relación:
 $y = x \sqrt{2}$.

De las condiciones (2) y (3) resultan para las dimensiones x e y del formato origen $A0$ las magnitudes de partida:

$x = 0,841 \text{ m}$, $y = 1,189 \text{ m}$

He aquí los formatos correspondientes a la serie fundamental A :

| Abreviaturas | mm | Observaciones |
|--------------|-------------|---|
| 4A 0 | 1682 × 2378 | Los números que acompañan a la A designan la clase de la serie, o sea los doblados. Con doblar, por ejemplo, 4 veces el formato origen $A0$, se obtiene $A4$. |
| 2A 0 | 1189 × 1682 | |
| A 0 | 841 × 1189 | |
| A 1 | 594 × 841 | |
| A 2 | 420 × 594 | |
| A 3 | 297 × 420 | |
| A 4 | 210 × 297 | Cartas de negocio. |
| A 5 | 148 × 210 | " particulares. |
| A 6 | 105 × 148 | Fichas, tarjetas postales. |

Los valores de partida de la serie auxiliar B son las medias geométricas de los de la serie A ; los de la serie auxiliar C las medias geométricas entre A y B . —Recordamos que la media geométrica entre las magnitudes m y n es:

$$\sqrt{m \cdot n}$$

Damos en (5) algunos valores comparativos de esas series auxiliares:

| Clase | Serie A mm | Series Auxiliares | | |
|-------|------------|-------------------|------------|------------|
| | | B | C | D |
| 0 | 841 × 1189 | 1000 × 1414 | 917 × 1297 | 771 × 1090 |
| 1 | 594 × 841 | 707 × 1000 | 648 × 917 | 545 × 771 |
| 2 | 420 × 594 | 500 × 707 | 458 × 648 | 385 × 545 |
| 3 | 297 × 420 | 353 × 500 | 324 × 458 | 272 × 385 |
| 4 | 210 × 297 | 250 × 353 | 229 × 324 | 192 × 272 |
| 5 | 148 × 210 | 176 × 250 | 162 × 229 | 136 × 192 |

Los formatos DIN coinciden con los de los de los siguientes países: Austria, Bulgaria, Checoslovaquia, Finlandia, Holanda, Hungría, Noruega, Polonia, Rusia y Suiza.

§ 16.

Proyección ortogonal.**Generalidades sobre las proyecciones; su doble objetivo. Globo Terráqueo.****1. Finalidad ulterior de los trabajos de levantamiento. Cartas y planos.**

La carta es la representación gráfica convencional (ver “**Signos convencionales**”, Apéndice III del presente Tomo), en el plano, a escala reducida, de toda o parte de la superficie terrestre; llamándose a esa representación generalmente **plano** cuando la escala es mayor que 1/100 000. Los trabajos de levantamiento geodésicos (triangulación) y topográficos de todos los tiempos tuvieron siempre (según queda ya puntualizado en pág. 83) por finalidad ulterior: **facilitar los elementos para la confección de cartas y planos**. De ahí la necesidad de explicar aquí, aunque sólo sea muy someramente, algunos **conceptos cartográficos de carácter fundamental**.

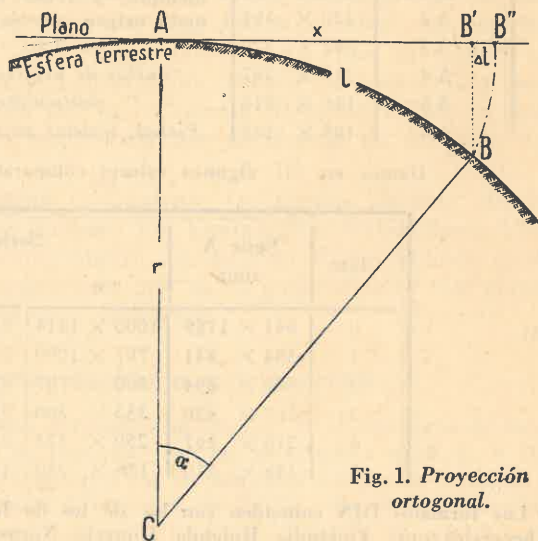
Como la superficie de la esfera (o del elipsoide) terrestre no es desarrollable en el plano, toda representación cartográfica de la misma ocasiona **deformaciones**, cuya magnitud depende de la extensión de la superficie a representar, de su situación geográfica y del método cartográfico que se emplea.

Consideramos primero la llamada “**proyección ortogonal**”, la más importante en el sentido de la **geometría descriptiva**, por ser la proyección que más inmediatamente interesa al ingeniero en la ejecución de sus trabajos de levantamiento y la representación cartográfica de los mismos.

2. Proyección ortogonal para reducidas superficies terrestres; sus límites.

Averigüemos ahora hasta qué distancia radial máxima desde un punto central **A** (fig. 1), pueden ser extendidas las operaciones planimétricas del ingeniero, sin que necesite tener en cuenta alguna la curvatura de la Tierra.

Debido a la enormidad de las dimensiones terrestres, las deformaciones producidas sobre el plano por la **proyección**

Fig. 1. *Proyección ortogonal.*

ortogonal (fig. 1), con centro en el infinito, no tienen influencia prácticamente sensible cuando se trate de representar en el mismo superficies relativamente reducidas.

Se trata entonces de determinar la **diferencia máxima admisible** Δl (fig. 1):

$$(1) \quad \Delta l = l - x$$

entre la longitud del arco l , medida en la superficie de la Tierra, y su **proyección ortogonal** $AB' = x$, medida en el plano.

Siendo r el radio de la esfera terrestre, α el ángulo en el centro correspondiente al segmento del arco l (en realidad **de muy reducida dimensión relativa**), tenemos:

$$(2) \quad l = r \cdot \alpha \quad \text{o sea:} \quad \alpha = \frac{l}{r}$$

y

$$(3) \quad x = r \cdot \text{sen } \alpha$$

Por ser:

$$\text{sen } \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots \quad (*)$$

se obtiene:

$$x = r \left(\alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 \right)$$

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2):

$$\Delta l = r\alpha - r\alpha + \frac{1}{6} \alpha^3 r$$

$$(4) \quad \Delta l = \frac{1}{6} \alpha^3 r$$

y teniendo presente la segunda de las (2), la (4) nos da:

$$(5) \quad \boxed{\Delta l = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{r^2}}$$

Substituyendo en (5) para r un valor medio ($r = 6370$ km), resulta:

$$\Delta l \text{ (en metros)} = \frac{l^3}{243\,000\,000\,000\,000}$$

(*) *Valores aproximados de las funciones trigonométricas:*

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \alpha \text{ (1ª. aproximación); } \text{sen } \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 \text{ (2ª. aproximación),} \\ \text{cos } \alpha = 1 \text{ („ „ „); } \text{cos } \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \text{ („ „ „),} \\ \text{tg } \alpha = \alpha \text{ („ „ „); } \text{tg } \alpha = \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 \text{ („ „ „),} \end{array} \right.$$

donde α está expresado en radianes.

o sea :

$$(7) \quad \Delta l \text{ (en mm)} = \frac{l^3}{234\,000\,000\,000}$$

Para una línea de $l = 30$ km, tenemos :

$$(8) \quad \Delta l = \frac{27\,000}{243} = 111 \text{ mm}$$

cantidad completamente despreciable cuando se la compare con los inevitables errores de medición en líneas de esa magnitud.

Si suponemos un radio de 30 km, se obtendría una **superficie circular de 3000 km²** aproximadamente, y podemos decir que hasta para esta superficie y mayores aún la superficie de la **Tierra puede ser considerada plana** a los efectos de las operaciones planimétricas del ingeniero.

Para la **mensura** de un campo, por ejemplo, la superficie terrestre puede ser considerada entonces como **plana**, es decir, los elementos de medición pueden ser trasladados directamente al plano **sin corrección por proyección**.

La extensión de este plano, llamado **plano de referencia**, depende naturalmente de la precisión de las mediciones, de la exactitud del cálculo y, en forma más general, de la finalidad del trabajo a realizar.

Llámase a veces **geodesia del plano** o **geodesia inferior** al conjunto de las operaciones planimétricas referidas al **plano**, como primera suposición relativa a la **superficie de medición**, en contraposición a la **geodesia superior**, la que abarca la **geodesia esférica** (ver págs. 1 a 3 del presente tomo), la **geodesia elipsoidal** y la **geodesia del geoide** (ver también "Introducción a la obra", con la que iniciamos esta nueva edición).

3. Conceptos cartográficos. Deformaciones.

La enormidad de las dimensiones de la Tierra dificulta mucho o casi imposibilita la clara concepción objetiva inmediata de lo que a la misma en materia de proyecciones se refiere. A fin de facilitar la comprensión de esas proyecciones conviene substituir a nuestro planeta por un **globo terráqueo, o globo terrestre** (ver fig. 2, pág. 108), reproducción artificial de aquél fuertemente reducida.

Cuando se imagina dispuesta en el interior de nuestra Tierra una pequeña esfera concéntrica, se puede con el pensamiento **proyectar** sobre la misma con ayuda del radio terrestre a los puntos y líneas más característicos de la superficie de la Tierra. Si se elige para esa esferita concéntrica por ejemplo la 10 millonésima parte del radio terrestre r ($r = 6\,370$ km), cualquier línea de contorno de la superficie terrestre quedaría reducida sobre la misma a la 10 millonésima parte del original. El número 1/10 000 000 sería la **escala de reducción** elegida. Todas las figuras de la superficie terrestre que se proyectaran sobre esa esfera, se reproducirían sobre ella como **figuras semejantes**, sin **deformación lineal** ni **deformación angular** alguna. Como las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de los correspondientes lados, resultaría que figuras semejantes de igual área en la superficie terrestre, darían también en su proyección sobre esa u otra esfera cualquiera figuras semejantes de igual área. Es decir, la figura

original y la figura proyección (teniendo en cuenta la escala de reducción de esta última) conservan su área. Se dice también que son **equivalentes en cuanto al área**, o simplemente **equivalentes**, según Lambert. Preferimos la denominación "**equiárea**" por expresarse mejor con la misma el significado del término.

Todo lo que acabamos de exponer sólo es posible realizar con proyectar la superficie de la Tierra sobre el **globo**. Las sencillas relaciones de equivalencia lineal, angular y areal que caracterizan a esta proyección, no existen en conjunto nunca cuando se trata de dibujar la proyección de la Tierra sobre un **plano**.

4. Doble objetivo de una proyección. Proyección conforme.

Con ninguna proyección cartográfica de la superficie terrestre, en el plano, es posible llenar entonces al mismo tiempo las tres equivalencias. La equivalencia lineal no puede ser realizada con ninguna clase de proyección en el plano. Lo único que es posible conseguir es que la proyección contenga grupos de líneas que en ciertas direcciones no sufran deformación lineal. Asimismo, la conservación de las áreas sólo es posible realizar con sacrificar la igualdad de los ángulos e inversamente: la representación que conserva los ángulos no puede ser equiárea. Por consiguiente, una proyección equiárea adolecerá siempre de las deformaciones lineales y angulares.

Pueden ser **dos** los **objetivos** de una proyección, a saber:

- 1º el **objetivo cartográfico propiamente dicho**, o sea, sustitución de la figura original de la superficie terrestre por la figura copia en la carta;
- 2º el **objetivo geodésico**, o sea, sustitución de la figura curva de la superficie terrestre, de difícil cálculo, por una figura plana, en el plano, de fácil cálculo, debiendo en ello tratarse siempre de reducir a magnitudes mínimas las deformaciones producidas.

Pero, cuanto más se desea realizar esta última exigencia, tanto más **complicadas** resultarán las **fórmulas** para la **transformación de las coordenadas geográficas** que fijan la posición de los puntos de la figura original, en las **coordenadas planas** de los correspondientes puntos de la figura imagen en el plano. Compare las fórmulas (3) y (4), pág. 22 del Apéndice II con las (1) y (2) en pág. 20 del mismo Apéndice.

Entre estas dos tendencias, en cierto modo antagónicas, sencillez de las fórmulas de traspaso y al mismo tiempo deformaciones mínimas, la **proyección Gauss-Krüger** representa una solución ideal del problema, puesto que no sólo satisface las necesidades geodésicas (triangulación), topográficas y catastrales, por la sencillez de sus fórmulas, sino también todas las exigencias de la carta por las deformaciones prácticamente insensibles que produce.

Dijo Schols (*) al respecto: "On doit bien distinguer entre l'emploi qu'on fait d'une projection pour le **calcul des triangulations**, de celui qu'on en

(*) Ver: "*Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft*", premiere Livraison 1884, pág. 3, § 3: "*Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation, dans le voisinage de l'équateur*".

fait pour la construction d'une carte. Dans le premier cas il importe surtout que les formules soient d'un usage commode, dans le second cas ce sont les déformations qui doivent être aussi petites que possible".

Como la mayor parte de las operaciones geodésicas consisten en mediciones angulares, es lógico que la exigencia cartográfica que más nos interesa sea lo que se refiere a los ángulos; interesa que los ángulos medidos en el terreno puedan entrar directamente en los cálculos, sin que con ello las figuras resulten deformadas debido a la proyección.

La semejanza de las figuras imágenes a las figuras originales en el terreno, implica que las inevitables deformaciones lineales (generalmente alargamientos), en una determinada región, sean **independientes de los rumbos de los segmentos proyectados**. Proyecciones que satisfagan esta condición fueron llamadas por **C. F. Gauss** "**proyecciones conformes**". Las proyecciones "**conformes**" tienen la **ventaja** de dar las verdaderas formas de las figuras geométricas en sus **más pequeñas partes**. Las dan empero en una **escala un poco aumentada**, la que varía de un modo insensible de una región a la inmediata vecina.

5. Clasificación de las proyecciones.

Para poder confeccionar la carta de un trozo de la superficie de la esfera (o del **elipsoide**) terrestre, es necesario elegir una proyección o sea la **ley** según la cual a cada punto de la Tierra corresponde un punto en la carta.

[En las proyecciones destinadas a la confección de la carta, y muchas veces para mediciones geodésicas (operaciones trigonométricas, etc.), la Tierra puede ser considerada como esfera. En los dos pares de fórmulas, (1), (2) y (3), (4), de págs. 20 y 22, del Apéndice II que acabamos de comparar, está considerada la Tierra como *elipsoide* (elipsoide de Hayford) (*), siendo N el *radio de curvatura transversal* en la latitud φ .]

Esa ley puede establecerse geoméricamente con elegir un punto como centro de proyección ("punto de vista" o punto en que se supone situado el ojo del observador) y una **superficie de proyección**, que puede ser un **plano** o una superficie auxiliar desarrollable (en el plano), un **cono** o un **cilindro**.

Según la superficie de proyección adoptada podemos distinguir entonces:

proyecciones planas,
" cónicas y
" cilíndricas.

Cuando el centro del cono se aleja indefinidamente hasta el infinito, se obtiene la **proyección cilíndrica**, y si ese centro se encuentra en la superficie de la Tierra, el cono se convierte en un plano y la proyección se llama **acimutal** (ver **proyección ortogonal**, fig.1). Si la proyección acimutal es **conforme**, se tiene la **proyección estereográfica**.

Los **cilindros** y **conos tangentes**, ofrecen **ventajas** sobre los **planos tangentes**: Mientras los planos tangentes sólo permiten reducir las deforma-

(*) Ver: *Tabla II*, pág. 17 del Apéndice II.

ciones alrededor de los **puntos de contacto**, los cilindros y conos tangentes permiten reducir esas deformaciones a lo largo de las **líneas de contacto**.

El cilindro puede ser tangente a lo largo del **ecuador**, siendo entonces sus generatrices paralelas al eje de la Tierra, y se tiene así la llamada:

proyección cilíndrica normal o proyección Mercátor.

Si en lugar del ecuador tenemos un **meridiano** como línea de tangencia de una proyección cilíndrica conforme, obtenemos la llamada:

proyección cilíndrica transversal,

empleada con preferencia por **Lambert** y más tarde principalmente por **Gauss**. (*)

La proyección cilíndrica conforme transversal es de mucha importancia por sus aplicaciones en geodesia, topografía y catastro.

6. Proyección de puntos básicos para fines geodésicos y cartográficos.

Teóricamente todo punto levantado en el terreno, o determinado por sus **coordenadas geográficas**, o por sus **coordenadas rectangulares esféricas**, x , y [referidas a un punto origen O arbitrariamente elegido sobre el ecuador, siendo, por ej., y el arco de meridiano desde un punto P_1 (fig. 6, pág. 113), hasta el ecuador y x la distancia desde O hasta el cruce del meridiano del punto con el ecuador], todo punto así determinado debería ser proyectado al plano con aplicar la respectiva ley de proyección, obteniéndose entonces para cada punto imagen (ver P'_1 , fig. 6, pág. 113), las correspondientes **coordenadas planas**, X , Y , que fijan su posición en la carta.

En la **práctica** empero nos podemos limitar a calcular solamente los **puntos básicos**, en primer lugar los **puntos esquinas de las planchetas** a 1:50 000 ó 1:25 000 (número 2º del programa de trabajos del I. G. M., ver pág. 127), y los **puntos trigonométricos** (número 3º del mencionado programa).

Las superficies encerradas dentro de esos marcos de hojas de planchetas (ver fig. 2, pág. 128) son levantadas en el terreno en base a los puntos trigonométricos, debidamente ubicados en las mismas, mediante los procedimientos topográficos que más adelante se describen (poligonación y taquimetría), con coordenadas planas y coordenadas polares, sin que en el dibujo del plano el ingeniero necesite preocuparse más de las deformaciones producidas por la proyección.

Ver págs. 20 y 21 del Apéndice II: *Cálculo de las coordenadas Gauss-Krüger del punto trigonométrico "Chalet Green"*, perteneciente a la triangulación de la Capital Federal, situado en la proximidad del *Instituto Geográfico Militar* (ver también gráfico fig. 7, pág. 89 del Volumen I del Tomo III).

En pág. 22 del mencionado Apéndice damos, como ejemplo, el *Cálculo de las coordenadas conformes (no coordenadas Gauss-Krüger) de un punto con coordenadas:*

$$\varphi = -36^\circ \quad \text{y} \quad L = -57^\circ$$

(*) Si en lugar de un meridiano, la línea de contacto es un **círculo máximo cualquiera** de la esfera, tenemos una **proyección cilíndrica oblicua**.

referidas al meridiano central — 60° de un sistema único y con precisión necesaria para la confección de la carta de la Provincia de Buenos Aires a la escala 1:200 000 (compare fig. 12, pág. 121).

También en este ejemplo práctico 2 se supone la Tierra de forma elipsoidal (elipsoide de Hayford).

7. Globo terráqueo, su importancia como elemento de enseñanza superior.

La proyección de la superficie de la Tierra, que hemos imaginado en el número 3, sólo es posible realizar, como ya dijimos, sobre el **globo** (ver fig. 2). Es esa proyección una representación de la superficie terrestre libre de deformaciones, una figuración, a escala exacta y uniforme, de la posición relativa de todos los puntos de la Tierra.

El primer modelo de globo que se conservó en Nuremberg (Alemania), fué construído por **Martín Behain**, en 1492. Este globo está basado todavía en la concepción geográfica de **Tolomeo**, no apareciendo por consiguiente sobre el mismo nada de América (descubierta en ese mismo año 1492), figurando empero las costas occidentales de Africa descubiertas anteriormente por los portugueses.

Cuando luego los grandes descubrimientos trajeron consigo una nueva concepción sobre la Tierra, no hubo mejor método para demostrarla y difundirla que mediante los globos; y por eso todo geógrafo de renombre de esa época era al mismo tiempo un famoso constructor de globos. Tenemos así del gran geógrafo alemán **Gerardo Kremer** (1512-1594), conocido por su nombre latinizado **Mercátor** (ver fig. 1, pág. 109), dos celebrados globos terráneos, construídos en 1541.



Fig. 2. Globo terráqueo.
Escala 1: 400 000 000.

a, semicírculo meridiano graduado.
Los husos son de 15° de longitud.

Era natural entonces que durante todo el primer período del Renacimiento estuvieran muy en boga y gran esplendor las artísticas construcciones de globos terráneos. Más tarde declinó considerablemente la popularidad de los globos, y solamente en la época actual se nota un nuevo despertar del inter-

terés por los globos, reconociéndoselos como un **elemento didáctico de primer orden**, no sólo para la enseñanza elemental sino también para la **enseñanza superior**, para la geografía matemática, la **geodesia**, la climatología, la sismología, el magnetismo terrestre, aeronáutica y, *last not least*, para la ciencia de las **proyecciones cartográficas**.

§ 17.

Proyecciones cilíndricas conformes de la esfera terrestre, de Mercátor y Lambert.

1. Dos reformas en las proyecciones de redes cartográficas.

La enorme extensión del horizonte geográfico que se produjo a fines del siglo XV y principios del siglo XVI, dió origen a una **primera reforma** de las proyecciones cartográficas con **Mercátor** (ver fig.1) como principal genio creador.

Alrededor del año 1800 se produjo una **segunda gran reforma** de las proyecciones de redes cartográficas, siendo su genial fundador el matemático alemán Johann Heinrich **Lambert** (ver fig. 9, pág. 117).

La fama universal de **Mercátor** se basa principalmente en su **carta mundial**, publicada en 1569, con proyección cilíndrica conforme (y posición normal del cilindro), la que está en uso general hasta el día de hoy. Pero la expresión matemática de la "conformidad" de esta proyección, así como de la equivalencia areal de otras, la formuló por primera vez con toda claridad **Lambert**. Lambert creó la proyección acimutal equiárea, la proyección cónica equiárea, la proyección cilíndrica equiárea, la proyección cónica conforme y una proyección cilíndrica transversal conforme, la que constituye el tema de nuestras consideraciones en págs. 117-121. (1).



Gerardo Mercator (Grabado de la época)

1512 - 1594

Fig. 1.

(Grabado tomado de la Enciclopedia Universal Ilustrada Espasa.)

2. Carta plana de Marinus.

La **cruz de líneas de grados** (de la línea Norte-Sur con la línea Oeste-Este), la más primitiva de las llamadas "**cartas planas**", (2) dió origen a la **red de grados**. La primera red de grados la contiene la **carta plana de Marinus** (el que vivía alrededor del año 100 de nuestra Era). Es una red cuadrática de meridianos y paralelos.

(1) Ver Tissot-Hammer: "Die Netzentwürfe geographischer Karten". Stuttgart 1887, págs. 73, 82, 90, 130, 141.

(2) Llamadas así en oposición a las "**cartas esféricas**" (como la de Mercátor), que consideraban la curvatura de la Tierra.

En estas cartas planas, muy en uso entre los navegantes, todavía mucho tiempo después de haberse introducido la carta de Mercátor, se hallan representados todos los meridianos así como el ecuador con su longitud verdadera.

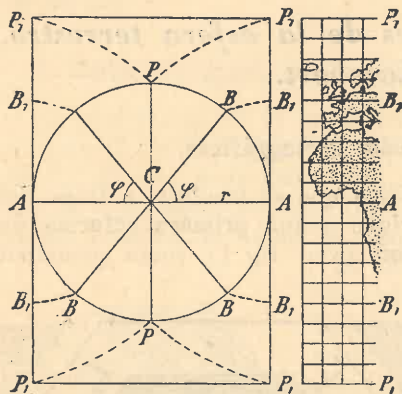


Fig.2. Carta plana (cuadrática), principio de su construcción (según Groll-Graf: "Kartenkunde")

Escala 1: 400 000 000.

Se ilustra la construcción de la *carta cuadrática plana* según el principio de que el *ecuador* y *todos los meridianos* deben conservar su longitud.

La parte izquierda de la figura representa un corte por la *esfera* (según un plano meridiano) y por el *cilindro* tangente en el ecuador.

AA, diámetro de la esfera;
PP, eje de rotación.

Con prolongar ese plano meridiano hasta su intersección con el cilindro, se producen en éste las rectas P_1AP_1 , tangentes al ecuador. Es una imagen del meridiano, la que de acuerdo a la ley debe conservar la longitud, siendo por ello necesario hacer: $AP_1 = arco AP$; del mismo modo: $AB_1 = arco \varphi$.

círculos máximos, esta proyección, llamada *proyección "Cassini-Soldner"*, ha tenido en el pasado siglo destacada importancia, por habérsele empleado en extensas obras catastrales europeas, las que aun quedan en gran parte sin modificar (ver pág. 92 y pág. 6 del Apéndice II del presente Tomo).

3 Principio de la proyección cilíndrica conforme expresado por Mercátor en 1569 (en latín) en la leyenda de su carta del mundo.

La llamada *proyección Mercátor* merece una especial atención aquí no sólo como elemento de cultura geográfica de primer orden, sino principalmente por marcar el punto de partida de un desarrollo cartográfico que condujo, en su etapa final, a la *proyección Gauss-Krüger*.

Es la construcción de globos terráqueos a la cual Mercátor dedicó mucho interés, que debe haber sugerido al mismo la idea fundamental que sustenta su genial concepción: Al contemplar Mercátor, en su taller mecánico, con el espíritu investigador que le caracterizó

La fig.2 (parte izquierda) nos da un corte por la esfera terrestre según un meridiano, y por el cilindro tangente en el ecuador. Como en esta proyección se exige que los meridianos conserven fielmente su longitud, el arco **AP** de la esfera debe ser trasladado a la carta (ver fig.2, a la derecha) de tal modo que resulte $AP_1 = arco AP$; del mismo modo, $AB_1 = arco \varphi$. Las imágenes de los polos **P** son entonces dos rectas P_1P_1 paralelas al ecuador **AA**.

La construcción de esta carta resulta ser sumamente sencilla:

A la escala $\frac{1}{E}$ (1: 400 millones en la figura) se construye un marco rectangular, con un ancho de $2\pi \frac{1}{E}$ y una altura de $\pi \cdot \frac{1}{E}$. El ecuador divide el marco en dos mitades, la parte norte y la parte sur. Tratándose, por ejemplo, de construir un rectángulo con mallas de 10°, sólo se necesita dividir el ancho en 36 partes iguales, la altura de cada mitad en 9 y trazar como líneas rectas los meridianos y los paralelos. Las mallas así resultantes son todas de forma cuadrática, de lo cual se deriva su designación de "*carta plana cuadrática*".

En la *posición normal* del cilindro tangente, la que se ha supuesto en esta proyección, según ya dijimos, la carta plana ya cayó definitivamente fuera del uso; en la *posición tansversal* del cilindro, en cambio, con equivalencia lineal en la *dirección Oeste-Este* y fiel representación del *meridiano de tangencia* y de los

en todas sus múltiples actividades, la serie de husos (ver fig.3) solamente acoplados entre sí mediante pequeños trozos en la zona del ecuador, al mirar esos husos con sus detalles geográficos (ver huso del medio en fig.3), husos que luego se trasladaron a una esfera para ello preparada, es muy probable que le haya ocurrido la idea de representar la figura de la Tierra o sea la del globo en un plano unido, transformando esa imagen con tantos cortes o entrantes "vacíos" en un plano uniforme, sin disolución de continuidad alguna. Que esto sólo era posible re-

alizar con agrandar cada vez los trozos de paralelos de los husos a medida que aquéllos se hallaban más próximos a los polos, esto no era necesario que lo inventara Mercátor, puesto que en la *carta plana de Marinus* (ver fig. 2) ese alargamiento o aumento de los paralelos se había empleado desde hace muchos siglos. La idea genial de Mercátor fué ésta: La semejanza de las más pequeñas partes de una figura en la superficie de

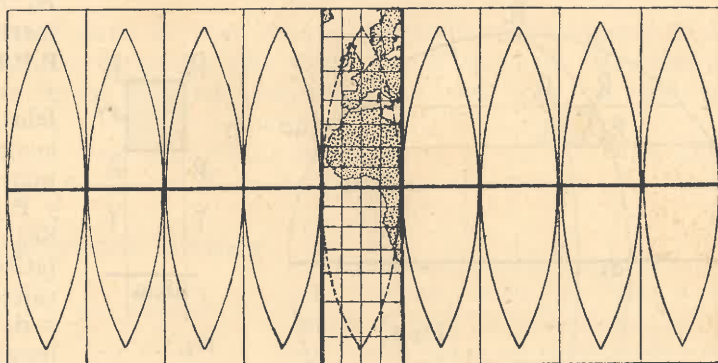


Fig.3. Proyección cilíndrica conforme Mercátor.

Son 9 husos de 40° de longitud cada uno.

Escala 1: 400 000 000.

En el huso central se hallan representados en proyección Mercátor detalles geográficos comprendidos entre los círculos polares.

la Tierra, es conservada en la figura imagen o figura copia en la carta, solamente a condición de que la medida lineal de un grado (minuto o segundo) de latitud (sobre el meridiano) sufra un aumento en la misma razón en la cual queda aumentada la correspondiente medida lineal de la diferencia de longitud (sobre el paralelo), con respecto a la magnitud que esa diferencia de longitud tiene en el ecuador. En una extensa leyenda que Mercátor colocó sobre su carta de navegación hállase caracterizado el nuevo método empleado. Nos limitamos a destacar de la misma el siguiente pasaje: "*Gradus latitudinum versus utrumque polum paulatim auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem*". (*) Es decir: Se aumentan paulatinamente los grados de latitud hacia los polos en la misma razón en que los paralelos aparecen aumentados respecto al ecuador. Mercátor sabía tan bien como nosotros que ese paulatino aumento no se verificaba de grado en grado sino de punto en punto, y que los paralelos próximos y los meridianos próximos no distaban entre sí un grado.

4. Fórmula fundamental de Mercátor.

El principio de Mercátor indicado por éste con palabras en la leyenda de su carta (1569), puede ser expresado también para mayor claridad mediante una fórmula.

Como en el presente párrafo la Tierra es considerada una esfera, los grados de un meridiano en la misma tienen todos la misma magnitud, que es la de un grado en el ecuador. Los paralelos, en cambio, disminuyen con el coseno de la latitud ϕ . Por ser, por ejemplo, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, resulta que 1' de diferencia de longitud, en la latitud de 60°, equivale solamente a 30" en el ecuador. Es decir, cuando se quiera que todos los grados de longitud de la

(*) "Equinoccio" en lugar de "ecuador" según la costumbre de esa época.

Tierra tengan en la carta la misma medida lineal que un grado del ecuador (ver **carta de Marinus**, fig. 2), es necesario que se multipliquen las medidas naturales (de la Tierra o del globo terráqueo) por la **recíproca del coseno** de la respectiva latitud φ , o sea por la **secante de φ** .

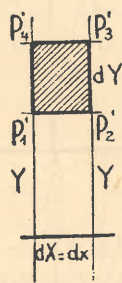
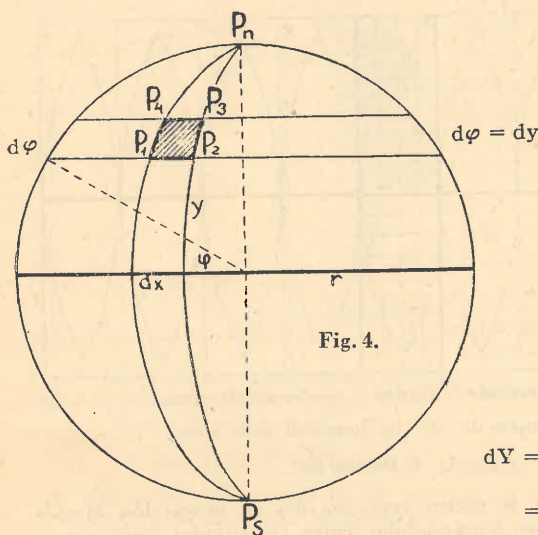


Fig. 5.

$$dY = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = d\varphi \cdot \sec \varphi$$

Se ilustra el **principio fundamental de la proyección Mercátor**, expresado por éste en 1569, en la leyenda de su **carta mundial** (carta de navegación).

segmento de arco P_1P_2 , situado sobre el paralelo de latitud φ , es al correspondiente arco dx del ecuador, como el radio $r \cdot \cos \varphi$ del paralelo de latitud φ es al radio r del ecuador.

Estudiaremos ahora la **imagen en el plano de ese rectángulo esférico**. Por ser fiel la representación lineal del ecuador y rectangular toda la red a construir, resulta como imagen otro rectángulo con base $dX = dx = P'_1P'_2$ y altura $dY = P'_2P'_3$ (ver fig. 5).

Con tender las magnitudes infinitesimales $d\varphi$ y dx hacia cero, el rectángulo curvilíneo esférico tiende a un rectángulo rectilíneo plano. Y como la imagen en sus más pequeñas partes debe ser semejante al original, se exige que los lados del rectángulo original deben ser entre sí como los correspondientes lados de la figura imagen, es decir, se exige:

$$(1) \quad dx \cdot \cos \varphi : d\varphi = dX : dY = dx : dY$$

Con eliminar a dx se obtiene para la dY buscada:

$$(2) \quad dY = d\varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = d\varphi \cdot \sec \varphi$$

Esta relación vale siempre a condición de tender $d\varphi$ hacia cero. Dice esta **ley**: A cada incremento $d\varphi$ de la latitud φ corresponde un incremento dY

Consideremos ahora en fig. 4 un **par de meridianos próximos**, $P_sP_1P_4P_n$ y $P_sP_2P_3P_n$, y un **par de paralelos próximos**, a los cuales pertenecen los puntos P_1 , y P_2 , P_3 y P_4 , respectivamente. Sean φ y $\varphi + \varphi$ las latitudes de esos paralelos próximo y $dx = d\lambda$ la diferencia de longitud de los dos meridianos próximos. Los arcos de círculos P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_1 forman entonces un cuadrilátero, el que resulta ser rectángulo por cortarse esos arcos todos bajo ángulos rectos.

Tenemos entonces la siguiente **relación**: El

de la altura Y de la imagen, el que es igual a $d\varphi$ dividido por el coseno de la latitud φ o $d\varphi$ multiplicado por $\sec \varphi$.

La fórmula (2) no nos informa nada sobre la altura grande o sea el valor Y correspondiente a la latitud φ , sino tan sólo sobre el pequeño incremento de altura dY correspondiente a un aumento infinitesimal $d\varphi$ de la latitud φ .

La ley matemática según la cual se producen los agrandamientos de los meridianos fué descubierta mucho más tarde (en la época de Mercátor no se disponía todavía de las herramientas necesarias para ello), en 1645, por Henry Bond. (*).

Mercátor publicó su carta sin indicar en la misma en qué forma él había encontrado los distintos valores Y de las paralelas al ecuador (ver fig. 8).

5. Teoría de la proyección Mercátor.

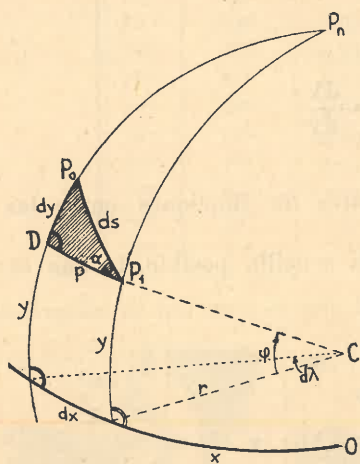


Fig. 6. En la esfera.

Trataremos ahora, en base a las figuras 6 y 7, las relaciones que deben existir entre las coordenadas rectangulares esféricas, $x, y, x + dx, y + dy$, correspondientes a los puntos P_1 y P_2 en la esfera, y las coordenadas planas conformes $X, Y, X + dX, Y + dY$ de los puntos P'_1 y P'_2 de la carta.

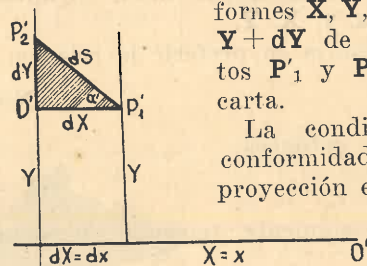


Fig. 7. En el plano.

Se ilustra en las figuras 6 y 7 la proyección cilíndrica conforme de Mercátor.

P_1P_2D significa un elemento superficial (triángulo) de la esfera terrestre, $P'_1P'_2D'$ el correspondiente triángulo imagen en el plano.

P_n es el polo norte. El ecuador es el eje de las x , siendo O su origen. C es el centro de la Tierra, $d\lambda = dx$ y $d\varphi = dy$ los incrementos de las coordenadas x e y , siendo dX y dY las correspondientes diferencias de coordenadas planas; α (fig. 6) = α' (fig. 7).

la razón entre cualquier pareja de segmentos, en los triángulos elementales rectángulos, $P_1D'P_2$ de la esfera y $P'_1D'P'_2$ del plano, tenga el mismo valor m , independiente de los rumbos que puedan tener los segmentos en cuestión; es decir, se debe verificar que:

$$(3) \quad \frac{dX}{p} = \frac{dY}{dy} = \frac{dS}{ds} = m$$

(*) Recién en la 2ª mitad del siglo XVII fué creado, independientemente, por Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 - 1716), el Cálculo Infinitesimal.

donde $p = P_1D$ es el lado del triángulo elemental situado sobre un paralelo, siendo ds la longitud esférica de la hipotenusa P_1P_2 y $dS = P'_1P'_2$ su representación conforme en el plano.

Y como se trata de triángulos rectángulos elementales, la razón $\frac{dS}{ds}$ se cumplirá siempre a condición de que se verifique:

$$(4) \quad m = \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}$$

De la fig. 6 se deduce:

$$(5) \quad p = dx \cdot \cos \varphi = dx \cdot \cos \frac{y}{r}$$

donde $\frac{y}{r}$ expresa el ángulo φ en radianes.

Combinando las (3) y (5), exigimos:

$$(6) \quad \frac{dX}{dx \cdot \cos \frac{y}{r}} = \frac{dY}{dy}$$

A esta ecuación satisfacen infinitos pares de funciones entre las coordenadas x, y, X, Y .

Hay ventaja en preferir la relación más sencilla posible, la que es:

$$(7) \quad X = x$$

teniéndose entonces:

$$dX = dx$$

y, por consiguiente, teniendo en cuenta las (6) y (7):

$$\frac{dx}{dx \cdot \cos \frac{y}{r}} = \frac{dY}{dy}$$

o sea:

$$(8) \quad dY = \frac{dy}{\cos \frac{y}{r}}$$

Esta ecuación diferencial expresa la ley de la proyección cilíndrica conforme de Mercátor buscada.

La integración de la misma nos da:

$$(9) \quad Y = r \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2r} \right) = r \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = r \cdot 2,302 \, 585 \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Recordamos que: $\ln x = \frac{1}{M} \log x = 2,302 \, 585 \log x$.

Poniendo en la 3ª de las ecuaciones (9) para $r = 6\,370$ km, e introduciendo para la latitud φ o la fracción $\frac{y}{r}$ diferentes valores, por ejemplo 10° , 20° , $30^\circ \dots$, pueden ser calculadas las ordenadas Y para la construcción de una carta de la Tierra en proyección cilíndrica conforme Mercátor (ver fig. 8).

Tabla de valores Y calculados según la 3ª de las fórmulas (9) para la construcción de una carta en proyección Mercátor.

(10)

| φ | $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$ | log Y | Y metros | Diferencias |
|------------|--------------------------------|----------|------------|-------------|
| 0° | 45° | ∞ | 0 | 1 117 500 |
| 10° | 50° | 6,04 828 | 1 117 500 | 1 152 600 |
| 20° | 55° | 6,35 605 | 2 270 100 | 1 229 100 |
| 30° | 60° | 6,54 396 | 3 499 200 | 1 360 600 |
| 40° | 65° | 6,68 662 | 4 859 800 | 1 578 300 |
| 50° | 70° | 6,80 876 | 6 438 100 | 1 951 100 |
| 60° | 75° | 6,92 372 | 8 389 200 | 2 665 600 |
| 70° | 80° | 7,04 355 | 11 054 800 | 4 464 500 |
| 80° | 85° | 7,19 087 | 15 519 300 | ∞ |
| 90° | 90° | ∞ | ∞ | ∞ |

La construcción de esta carta es muy sencilla:

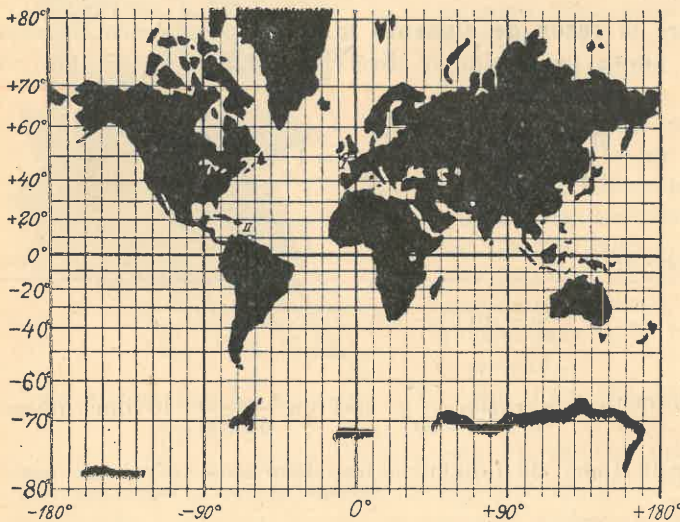


Fig. 8. Proyección cilíndrica conforme de Mercátor.

Escala 1: 500 millones en el ecuador.
(Sacado de: Scheffers, "Gradnetze".)

Se traza primero el ecuador $2\pi r$ a la escala 1: 500 000 000. Luego se divide esta línea en 36 partes iguales. Por los puntos así obtenidos se trazan perpendiculares hacia arriba y hacia abajo, las que significan las imágenes de los meridianos de 10 en 10 grados. Luego se sacan de la tabla (10) los valores de las Y para latitudes de 10 en 10 grados, trasladándolos a la escala 1: 500 millones a la carta tanto hacia arriba como hacia abajo. La unión de los puntos marginales así obtenidos completa la red de la carta Mercátor que se trató de trazar.

Si en esta proyección solamente consideramos puntos muy próximos a la línea de tangencia o sea puntos con la ordenada y pequeña, podemos

reemplazar en la ecuación diferencial (8) la expresión:

$$\cos \frac{y}{r}$$

por los dos primeros términos de su desarrollo en serie [ver (6), pág. 103, abajo].

Obtendremos entonces en lugar de la (8):

$$(11) \quad dY = \frac{dy}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2} = dy \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

La integración de esta expresión nos da para la ordenada Y que se trata de hallar:

$$(12) \quad Y = y + \frac{y^3}{6r^2}$$

Tenemos entonces para la transformación de las coordenadas esféricas, x , y , en coordenadas rectangulares planas conformes Mercátor, X , Y , las siguientes relaciones sencillas:

$$(13) \quad X = x \qquad Y = y + \frac{y^3}{6r^2}$$

Resulta entonces para la **razón de aumento** m de los segmentos lineales que arranquen de un punto en cualquier dirección, según (8) y (11), el valor:

$$(14) \quad m = \frac{dY}{dy} = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2r^2}} = 1 + \frac{y^2}{2r^2}$$

Si suponemos por ejemplo:

$$y = 40 \text{ km,}$$

y tomando para $r = 6\,400$ km, la razón $\frac{y^2}{2r^2}$ nos da $\frac{1}{51\,000}$, lo que quiere decir que a 40 km de la línea de tangencia los elementos sufren un alargamiento de $\frac{1}{51\,000}$ de su valor.

Como la razón $\frac{y^2}{2r^2}$ depende del cuadrado de la ordenada y , a una doble distancia de la línea de tangencia, por ejemplo 80 km, la deformación sería

4 veces mayor o sea $\frac{1}{13\,000}$; a 20 km de distancia de la línea de tangencia la deformación sería 4 veces menor que a 40 km o sea $\frac{1}{200\,000}$.

Ver también pág. 105, Vol. 1 del Tomo III.

6. Aplicación de la proyección Mercátor.

Fuera del uso de la proyección Mercátor para la carta de navegación [a las escalas (en el ecuador) 1:75 000 hasta 1:200 000 y cartas especiales a 1:15 000] y sus numerosas aplicaciones para cartas geográficas de los atlas a las más diversas escalas (a 1:50 millones hasta 1:500 millones), la proyección Mercátor puede ser empleada y a veces con ventaja para cartas topográficas y los cálculos geodésicos que las fundamentan, principalmente en países no muy alejados del ecuador (Sumatra, Java, Cuba, etc.). En la referencia citada en pág. 105 Schols comunica que había empleado con grandes ventajas las "coordenadas Mercátor" para la triangulación de todas las Indias Holandesas.



Fig. 9. Juan Enrique Lambert.
1728 - 1777.

(Grabado tomado de la "Enciclopedia Ilustrada Seguí", aun incompleta.)

7. Proyección Lambert cilíndrica conforme.

Si en lugar del ecuador tomamos un **meridiano** como línea de tangencia en una proyección cilíndrica conforme [por primera vez empleada con éxito por Lambert (ver fig. 9)], obtenemos la llamada **proyección cilíndrica transversal conforme**, la que debe llevar el nombre de Lambert. (*)

En lugar de los polos terrestres de la proyección Mercátor, tenemos en esta proyección Lambert cilíndrica transversal los dos polos o **puntos principales** del meridiano de tangencia, llamado también **meridiano central** o **meridiano de referencia** para toda la región a levantar o representar.

En lugar de los meridianos tenemos aquí los círculos máximos que pasan por los puntos principales (situados sobre el ecuador); en lugar de los círculos

(*) Ver: Tissot - Hammer, "Die Netzentwürfe geographischer Karten", pág. 104, Metzler, Stuttgart, 1887;

Hammer E., "Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen", pág. 5, Metzler, Stuttgart, 1889, y principalmente:

Breusing A., "Das Verebnen der Kugelfläche für Gradnetzentwürfe", pág. 64, Wagner & Debes, Leipzig, 1892.

de latitud, tenemos aquí los círculos menores paralelos al meridiano central (en lugar de p = arco de paralelo, aquí: p = arco de círculo menor).

En esta proyección se elige un punto origen O (ver fig.10) en cualquier sitio del meridiano central (el que puede ser elegido también en el ecuador

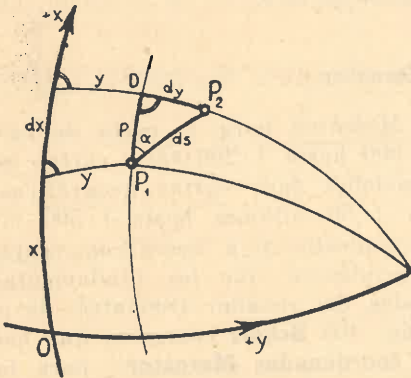


Fig. 10. En la esfera.

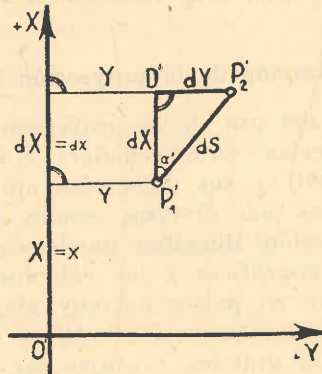


Fig. 11. En el plano.

Proyección Lambert cilíndrica transversal conforme.

o en el polo sur, ver fig. 12). A partir de este punto crecen las abscisas x hacia el Norte, aumentando las ordenadas y hacia el Este.

Estudiaremos ahora, en base a la figuras 10 y 11, las relaciones que deben existir entre las **coordenadas rectangulares esféricas** $x, y, x + dx, y + dy$ correspondientes a los puntos P_1 y P_2 (fig.10) y las **coordenadas planas conformes** $X, Y, X + dX, Y + dY$ de los puntos P'_1 y P'_2 en el plano (fig. 11).

La **condición de conformidad** de la proyección exige que la razón entre cualquier pareja de segmentos en los triángulos elementales rectángulos P_1DP_2 (fig.10) y $P'_1D'P'_2$ (fig.11) tenga el mismo valor m , independientemente de los rumbos que puedan tener los segmentos en cuestión; es decir, se debe verificar que:

$$(15) \quad \frac{dX}{p} = \frac{dY}{dy} = \frac{dS}{ds} = m$$

donde $p = P_1D$ es el lado de triángulo situado sobre un círculo menor cuyo plano es paralelo al meridiano central, siendo ds la longitud esférica de la hipotenusa P_1P_2 y dS su representación conforme en el plano (fig. 11).

Y como se trata de triángulos rectángulos elementales, la razón $\frac{dS}{ds}$ se cumplirá siempre a condición de que se verifique la relación:

$$(16) \quad m = \frac{dX}{p} = \frac{dY}{dy}$$

De la figura 10 se deduce:

$$(17) \quad p = dx \cdot \cos \frac{y}{r}$$

donde r significa el radio de la Tierra.

Exigimos entonces, combinando las (15) y (17), que:

$$(18) \quad \frac{dX}{dx \cdot \cos \frac{y}{r}} = \frac{dY}{dy}$$

A esta ecuación satisfacen infinitos pares de funciones entre x, y, X e Y .

Hay ventaja en preferir la relación más sencilla posible, que es:

$$(19) \quad X = x$$

teniendo entonces:

$$(20) \quad dX = dx$$

y, por consiguiente, teniendo presente las (18) y (20):

$$(21) \quad \frac{dx}{dx \cdot \cos \frac{y}{r}} = \frac{dY}{dy}$$

o también:

$$(22) \quad dY = \frac{dy}{\cos \frac{y}{r}}$$

La integración de esta expresión nos da igual que antes (ver pág. 114):

$$(23) \quad Y = r \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2r} \right)$$

siendo cero la constante de integración.

Considerando que en los trabajos geodésicos y topográficos $\frac{y}{r}$ expresará siempre un ángulo relativamente muy pequeño, y sabiendo que:

$$(24) \quad \begin{cases} \cos \frac{y}{r} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r} \right)^2 + \dots \\ = 1 - \frac{y^2}{2r^2} \end{cases} \quad [\text{ver (6), pág. 103}].$$

obtendremos en lugar de la (22):

$$(25) \quad dY = \frac{dy}{1 - \frac{y^2}{2r^2}} = dy \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} \right)$$

La integración de esta expresión nos da para la ordenada Y que se busca:

$$(26) \quad \boxed{Y = y + \frac{y^3}{6r^2}}$$

Tenemos entonces para la transformación de las coordenadas esféricas, x, y , en coordenadas rectangulares planas conformes, o sea las "coordenadas Lambert" X, Y , las siguientes relaciones sencillas:

$$(27) \quad X = x \qquad Y = y + \frac{y^3}{6r^2}$$

Si en esta proyección sólo son considerados puntos relativamente próximos al meridiano de tangencia, lo que es el caso en todos los trabajos geodésicos y topográficos, es decir, puntos con ordenadas y relativamente pequeñas, podemos poner para la razón de aumento m de los segmentos lineales que arranquen de un punto en cualquier dirección, el valor:

$$(28) \quad m = \frac{dY}{dy}$$

Según la (22) tenemos:

$$(29) \quad \frac{dY}{dy} = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}}$$

Luego:

$$(30) \quad m = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}}$$

y con tener en cuenta la (24):

$$(31) \quad m = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2r^2}} = 1 + \frac{y^2}{2r^2}$$

Como el segundo término $\frac{y^2}{2r^2}$ del segundo miembro de la (31) no es otra cosa que la **deformación lineal relativa** que designamos por v (ver pág. 105, Vol. I del Tomo III), podemos poner también para el punto considerado:

$$(32) \quad \boxed{v = m - 1 = \frac{y^2}{2r^2}}$$

8. Aplicación de la proyección Lambert cilíndrica transversal conforme.

Tanto con fines geográficos como con fines geodésicos la proyección Lambert cilíndrica conforme se presta muy particularmente para países que tienen su mayor extensión en la dirección Norte-Sur, como Egipto, Madagascar, costas marítimas en dirección Norte-Sur, y si se quiere, a escala suficientemente pequeña, para toda la República Argentina o todo el Continente Sudamericano y parte de Norteamérica (ver fig. 12).

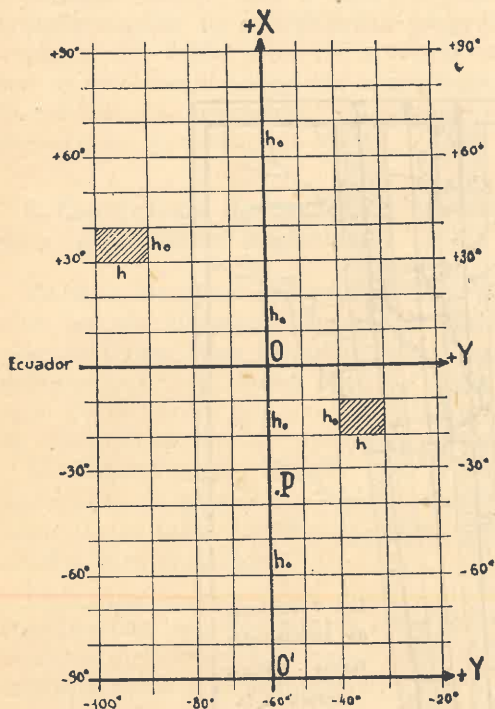


Fig. 12. Reticulado de un sistema único, con posición transversal del cilindro (tangente en el meridiano -60°), según Lambert. (*)

Escala:

1: 250 000 000 en el meridiano central -60°.

(*) Para su trazado se puede utilizar la tabla (10).

El meridiano central -60°, en el ejemplo de la figura, es el eje de las x, con origen O (ecuador) para el hemisferio norte y en O' (polo sur) para el hemisferio sur.

Se ilustra con un rectángulo rayado situado al Oeste del meridiano central, en el hemisferio norte, y con otro rectángulo situado al Este de ese meridiano, en nuestro hemisferio sur, la aplicación de la fórmula:

$$(33) \quad h = h_0 + \frac{y^2}{2r^2} \cdot h_0$$

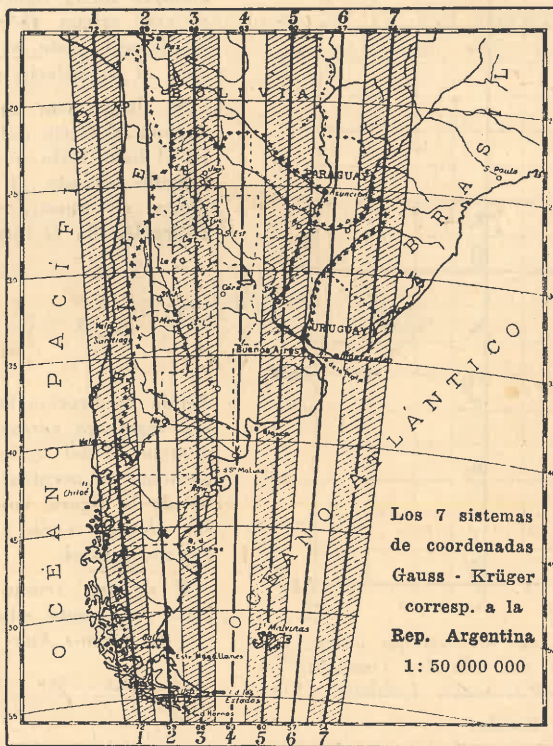
donde h_0 expresa la longitud constante del segmento vertical y h la longitud aumentada del segmento transversal. Ese aumento se acentúa, según se desprende de la figura, con el crecimiento de la ordenada media y la distancia al meridiano central.

P designa (como dato de orientación) un punto situado en la Provincia de Buenos Aires con:

$$\varphi = -36^\circ \text{ y } L = -57^\circ.$$

Si se reduce el ancho de un sistema meridiano Lambert a pocos grados de longitud, 5° por ejemplo (2½ grados al Oeste y 2½ grados al Este del meridiano central), las **coordenadas Lambert** referidas a la esfera (segunda etapa de un desarrollo iniciado por Mercator, en 1569, ver pág. 110), pueden ser consideradas como buena aproximación de las correspondientes **coordenadas Gauss - Krüger** referidas al elipsoide de Hayford (etapa final), de las que nos ocupamos en el próximo párrafo.

§18.

Coordenadas Gauss-Krüger**Sus aplicaciones prácticas en la República Argentina.****1. Observaciones de orientación previa.**

La teoría de la proyección conforme referida al elipsoide terrestre por primera vez establecida de un modo general por C. F. Gauss en 1822 (en un trabajo presentado a la Real Academia de Copenhague), es bastante complicada y constituye un tema de la geodesia superior. Dice Mettler al respecto: "La deducción de las fórmulas de esta proyección requiere ciertos conocimientos del cálculo infinitesimal y de la teoría de las funciones con

variables complejas, conocimientos que solamente pueden poseer un pequeño porcentaje de las personas que deben usar la proyección. Pero en cuanto a la sencillez de las fórmulas que deben aplicarse en la práctica, la proyección Gauss satisface ampliamente todas las exigencias. Fórmulas tan sencillas como las de la razón de aumento:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad [\text{compare (31), pág. 120}]$$

que nos da este aumento en función de un solo dato, de la distancia y al meridiano central, dos o tres fórmulas más, igualmente sencillas, para la **transformación de coordenadas geográficas en coordenadas Gauss** y vice-versa, y dos tablas para los **arcos de meridianos** y los **radios de curvatura**, son generalmente todas las herramientas que necesitamos para aplicar en la práctica la proyección Gauss con todo éxito" (cita de pág. 3 del Apéndice II del presente tomo).

2. Coordenadas de cuadrícula o coordenadas Gauss - Krüger; su adopción para la República Argentina.

Existen fórmulas más complicadas que las deducidas en el párrafo anterior, las que permiten representar también puntos de un **elipsoide** en proyección Gauss. Esas fórmulas referidas al elipsoide fueron aplicadas por vez primera por C. F. Gauss para sus propios trabajos de levantamiento del Estado de Hanóver; por eso y por la razón indicada en pág. 122 la proyección en cuestión se llama "**proyección Gauss**" (ver pág. 5, Apéndice II).

El matemático L. Krüger (1857-1923) tiene el gran mérito de haber generalizado la proyección Gauss, haciéndola más práctica con la introducción de las **fajas meridianas**; desarrolló Krüger, además, las fórmulas adecuadas para esas fajas.

Cada una de esas fajas, que son de 3° de ancho, representa un **sistema de coordenadas**, con dos **puntos orígenes**, **O** y **O'**, o **ceros** de las x , estando situado el primer cero, o sea el origen **O**, en el **ecuador**, para países del **hemisferio norte** y el segundo cero o sea el origen **O'**, en el **polo sur**, para todos los países situados total o parcialmente en el **hemisferio sur** como la **República Argentina**. (Compare fig. 12, pág. 121, con la fig. en pág. 122).

Evítase así para todos los países del mundo el **signo negativo** de las **abscisas** x , las que, todas, expresan **distancias verdaderas**.

Es con el fin de reducir las **deformaciones en el sentido Este-Oeste** a valores insensibles a los usos de la cartografía de precisión que Krüger **redujo el ancho de las fajas** a 3° de longitud (1½° a la izquierda y 1½° a la derecha del "meridiano central" de cada faja). Para esos meridianos centrales Krüger eligió aquellos cuyos números de grados son **múltiplos de 3°** de longitud (de signo **positivo** hacia el Este y de signo **negativo** al Oeste de Greenwich). Designaremos por n° a esos múltiplos de 3°.

Llamaremos k :

$$(1) \quad k = \frac{n^\circ}{3}$$

a la **característica** de cada faja.

Ejemplos de valores n° y k [1ª y 2ª serie de las (2)] correspondientes a la República Argentina.

Los meridianos centrales:

$n^\circ = -72^\circ, -69^\circ, -66^\circ, -63^\circ, -60^\circ, -57^\circ$ y -54° , al Oeste de G., o sea:
 $n^\circ = +288^\circ, 291^\circ, 294^\circ, 297^\circ, 300^\circ, 303^\circ$ y 306° , al Este de G., tendrían

entonces las siguientes características k (1ª y 2ª serie):

$$(2) \quad \begin{cases} k = -24, -23, -22, -21, -20, -19 \text{ y } -18 & (\text{Oeste de G.}) \text{ o sea:} \\ k = 96, 97, 98, 99, 100, 101 \text{ y } 102 & (\text{Este de G.}), \\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ y } 7 & (\text{sistemas argentinos}), \end{cases}$$

crecientes todas las k en el sentido **W-E** de las longitudes positivas.

En lugar de elegir una de las dos primeras series de valores k directamente referidas al "**primer meridiano**" de Greenwich, nuestro **Instituto Geográfico Militar**, adoptó, por su mayor sencillez, una numeración adaptada especialmente al territorio argentino, asignando al meridiano 72° la característica $k=1$, al 69° , por consiguiente, el número **2**, al 66° el **3** y así sucesivamente hasta el número **7**, que es la característica del meridiano 54° [ver 3ª de las series (2)].

La fig. 1 muestra los **7 sistemas** (fajas meridianas) **Gauss-Krüger** correspondientes a la **República Argentina**, con el meridiano -63° [encuadrado en (3)] como **meridiano central del conjunto de los siete sistemas**.

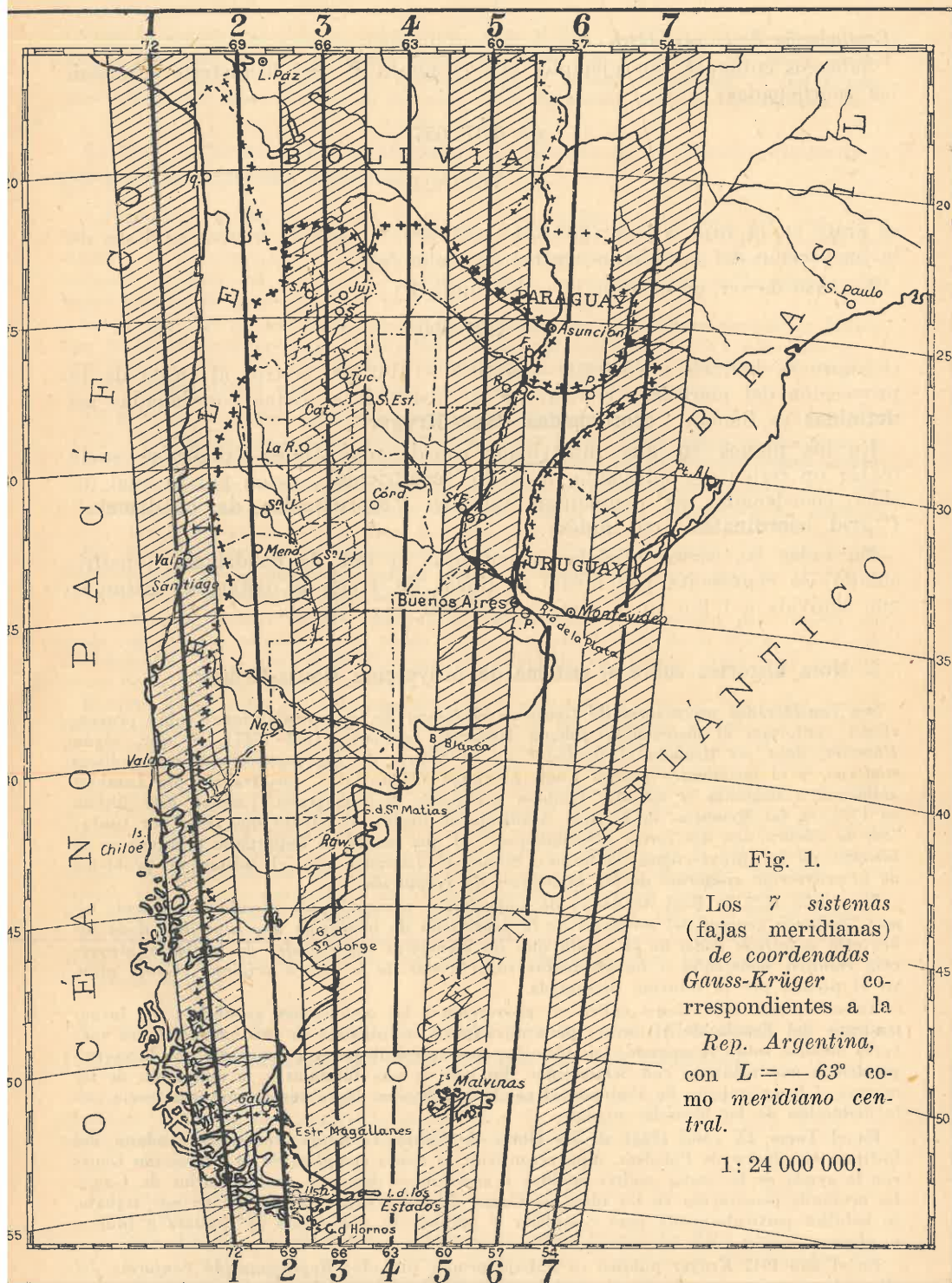
Se evitó el signo negativo también en la ordenada y , en la siguiente forma: Si se hubiera atribuido a todos los puntos situados sobre los meridianos centrales de esos sistemas la ordenada $y=0$, se habrían obtenido para puntos situados al Oeste de esos meridianos valores **negativos** para las ordenadas y : además sería posible que se repitieran los mismos valores de la ordenada y en diversas fajas. Por esto, con el fin de eliminar ambos **inconvenientes**, pero principalmente para **evitar el signo negativo también para la ordenada y** , se atribuye a cada meridiano central el valor (algo arbitrario) de **500 000**, anteponiéndole el número de la característica k (los millones de metros) correspondiente a cada faja (con lo cual se consigue mantener sin variar la característica de faja para las ordenadas de todos los puntos pertenecientes a un sistema).

Para el meridiano -72° , por ejemplo, tendríamos entonces la ordenada $y = 1\,500\,000$.

A los puntos de los meridianos centrales de los **7 sistemas argentinos** corresponden entonces las siguientes ordenadas y :

| | |
|-----|---|
| (3) | Al meridiano -72° , central de la 1ª faja, la ordenada $y = 1\,500\,000$ |
| | " " -69° , " " " 2ª " " " $y = 2\,500\,000$ |
| | " " -66° , " " " 3ª " " " $y = 3\,500\,000$ |
| | " " -63° , " " " 4ª " " " $y = 4\,500\,000$ |
| | " " -60° , " " " 5ª " " " $y = 5\,500\,000$ |
| | " " -57° , " " " 6ª " " " $y = 6\,500\,000$ |
| | " " -54° , " " " 7ª " " " $y = 7\,500\,000$ |

(Continúa en pág. 126.)



(Continuación de la pág. 124.)

Sabemos entonces, por ejemplo, que el punto **P** (del hemisferio sur) con las coordenadas:

$$x = 6\ 377\ 057$$

$$y = 5\ 633\ 824$$

se halla en la faja 5 y a $(633\ 824 - 500\ 000 =)$ 133 824 metros al Este de la proyección del meridiano central de dicha faja.

En caso de ser, en cambio, la y del punto **P**:

$$y = 5\ 358\ 000,$$

el punto se hallaría a $(500\ 000 - 358\ 000 =)$ 142 000 metros al Oeste de la proyección del meridiano central de la misma faja. Estas coordenadas así definidas se llaman “**coordenadas Gauss-Krüger**”.

En los planos en que intervienen coordenadas Gauss-Krüger se suele trazar un reticulado adecuado, llamado “**cuadrícula**”, razón por la cual dichas coordenadas se denominan también “**coordenadas de cuadrícula**” (“**grid coordinates**” en inglés).

En todas las cartas oficiales argentinas, la **red de cuadrícula** (cuadrículado) se representa por medio de líneas de 4 cm de distancia, distancia que equivale a 1 km en la carta a 1/25 000, por ejemplo.

3. Nota histórica sobre el sistema de proyección Gauss-Krüger.

Son considerados *precursores de Gauss* en el campo de las investigaciones sobre proyecciones conformes el matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777), el que, según Hammer, debe ser llamado el *fundador de la ciencia de las proyecciones cartográficas moderna*, y el matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Los trabajos de Lambert animaron a Lagrange a estudiar también problemas de cartografía. Publicó este último en 1779, en las Memorias de la Real Academia de Berlín, el trabajo que lleva por título: “*Sur la construction des cartes géographiques*”, el que señala un importante progreso en la historia de las proyecciones conformes. Solucionó Lagrange con el mismo el problema de la *proyección conforme de las superficies de revolución*.

En el año 1822, la Real Academia de Copenhague presentó para premio el siguiente tema: “*Solución general del problema de la proyección de puntos de una superficie dada sobre otra superficie dada, de tal modo que los elementos superficiales de la figura proyección resulten semejantes a los elementos superficiales de la figura original*”. Gauss obtuvo el premio por la solución presentada.

Ya en el año 1821 Gauss aplicó su proyección a las operaciones geodésicas del levantamiento del Estado de Hanóver; pero no expuso en ninguna de sus publicaciones mayores detalles sobre su método. Las fórmulas que aplicó llegaron a conocerse por la correspondencia que mantuvo con Schumacher. En base a esas fórmulas y la aplicación de las mismas al levantamiento de Hanóver, el geodesta Schreiber logró reconstruir una teoría con la deducción de las fórmulas usadas.

En el Tomo IX (año 1903) de las Obras de Gauss, L. Krüger, entonces geodesta del Instituto Geodésico de Potsdam, supo reconstruir la *teoría completa de la proyección Gauss* con la ayuda de las notas sueltas inéditas y anotaciones dispersas en los diarios de Gauss. La profunda penetración en las ideas de Gauss, de que Krüger dió prueba en este trabajo, lo habilitó particularmente para completar y ampliar lo que Gauss se limitara a indicar o planear.

En el año 1912 Krüger publicó su trabajo propio titulado: *Representación conforme del elipsoide terrestre en el plano*” (publicación del Instituto Geodésico de Potsdam). Este

trabajo es considerado como la obra principal de Krüger no sólo por su extensión sino por el éxito que tuvo en el mundo entero. Es según dijo A. Galle: "Un nuevo edificio construído sobre los fundamentos colocados por el primer constructor" ("Die Krüger-sche Arbeit stellt einen Neubau auf den vom ersten Baumeister gelegten Fundamenten dar").

4. Nota histórica sobre la adopción del sistema de proyección Gauss-Krüger para la República Argentina.

Las grandes ventajas que ofrece el uso de coordenadas Gauss-Krüger (ver pág. 131), las que se pusieron de relieve en la primera guerra mundial (1914-1918), hicieron que también en nuestro país se considera, a iniciativa del doctor Pablo Gast (1876-1941), entonces geodesta del Instituto Geográfico Militar, la conveniencia de la adopción del nuevo sistema de proyección para la República Argentina.

En el año 1925 se adoptó el sistema Gauss-Krüger por el Instituto Geográfico Militar, que se hallaba entonces bajo la dirección del general Ladislao M. Fernández (siendo el Ing. Félix Aguilar (1) jefe de la División Geodesia), mediante Disposición Permanente N° 197, conjuntamente con el siguiente programa de trabajos atinentes:

De publicar en el más breve plazo de tiempo posible:

- 1° Planillas de coordenadas geográficas referidas ya no, como antes, al meridiano de Córdoba, sino al "primer meridiano internacional" de Greenwich, como origen;
- 2° Planillas de coordenadas Gauss-Krüger de las esquinas de planchetas a 1: 25 000;
- 3° Una vez terminados los cálculos de unión con el punto astronómico de arranque, las coordenadas Gauss-Krüger de todos los puntos trigonométricos determinados.

Las fórmulas para la transformación de las coordenadas geográficas en coordenadas Gauss-Krüger fueron deducidas por el doctor J. Mettler (entonces jefe de la Sección Cálculos de la División Geodesia del I. G. M.).

La adopción general de las coordenadas Gauss-Krüger para nuestro país recibió una cierta consagración nacional, en la sesión del 6 de agosto de 1936 de la Primera Conferencia Argentina de Coordinación Cartográfica, celebrada en Buenos Aires bajo los auspicios de la Sociedad Geográfica "Gaea".

Durante dicha sesión se dedicaron al tema 3 disertaciones (2), de las cuales dos, de carácter popular, se hallan transcritas en págs. 3-10 del Apéndice II del presente Tomo de nuestro Compendio, versando la tercera, de carácter teórico, dada por el Capitán ingeniero militar Pedro R. Quiroga, sobre el tema "La proyección Gauss-Krüger".

En este orden de ideas cabe mencionar aquí un meritorio trabajo publicado en 1915, en el N° 8 de la "Revista de la Universidad Nacional de Córdoba", por el profesor Juan Jagsich, el que lleva por título: "Proyecciones cartográficas en nuestra Provincia". Fueron puestas de relieve en este trabajo por el autor las ventajas de la proyección Gauss-Krüger, recomendando su adopción general, con los siguientes términos: "En vista de la ventaja que posee la proyección Gauss-Krüger, es de esperar que sea aplicada para todos los trabajos geodésicos y catastrales en la actualidad" (ver pág. 226 de la citada Revista).

Es satisfactorio poder constar que la esperanza expresada por Jagsich hace 31 años se viene cumpliendo cada vez más, no sólo en el territorio argentino sino también en el de los países vecinos.

5. Colocación de la red de cuadrícula en una plancheta (a escala 1:25 000) en el supuesto de estar provista de red geográfica.

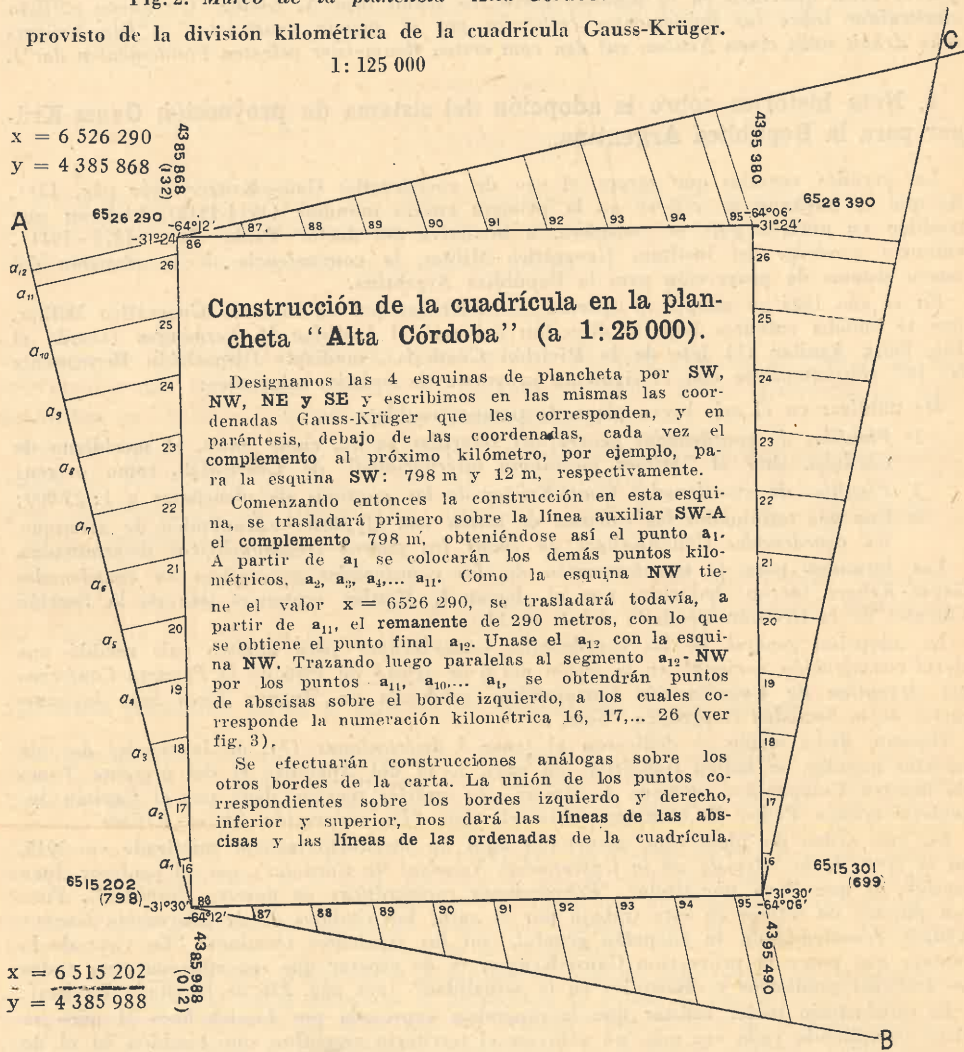
Cuando se hayan calculado las coordenadas Gauss-Krüger de las cuatro esquinas de una plancheta (ver ejemplo práctico 1, páginas 20 y 21 del Apéndice II de este Tomo), se puede proceder de acuerdo a la instrucción que acompaña la figura 2.

(1) Félix Aguilar: "Elementos de tangencia", págs. 197-203 del Anuario del I. G. M., Volumen V, Tomo II, años 1920-1926;

Félix Aguilar, "Nociones sobre proyecciones cartográficas", La Plata 1941.

(2) Ver: "Gaea", "Actas de la Primera Conferencia Argentina de Coordinación Cartográfica", págs. 73-103, Buenos Aires 1937.

Fig. 2. Marco de la plancheta "Alta Córdoba" provisto de la división kilométrica de la cuadrícula Gauss-Krüger. 1: 125 000



6. Medición de las coordenadas Gauss-Krüger de un punto situado en una plancheta a escala 1/25 000. Indicador de coordenadas.

Una de las principales ventajas de un sistema de cuadrícula Gauss-Krüger, consiste en la circunstancia de que permite determinar rápidamente las coordenadas de cualquier punto que interese. Cada hoja de la carta lleva para eso sobre los márgenes opuestos dos numeraciones de las líneas de cuadrícula: La que corresponde a las líneas verticales aumenta de izquierda a

(Continúa en pág. 130.)

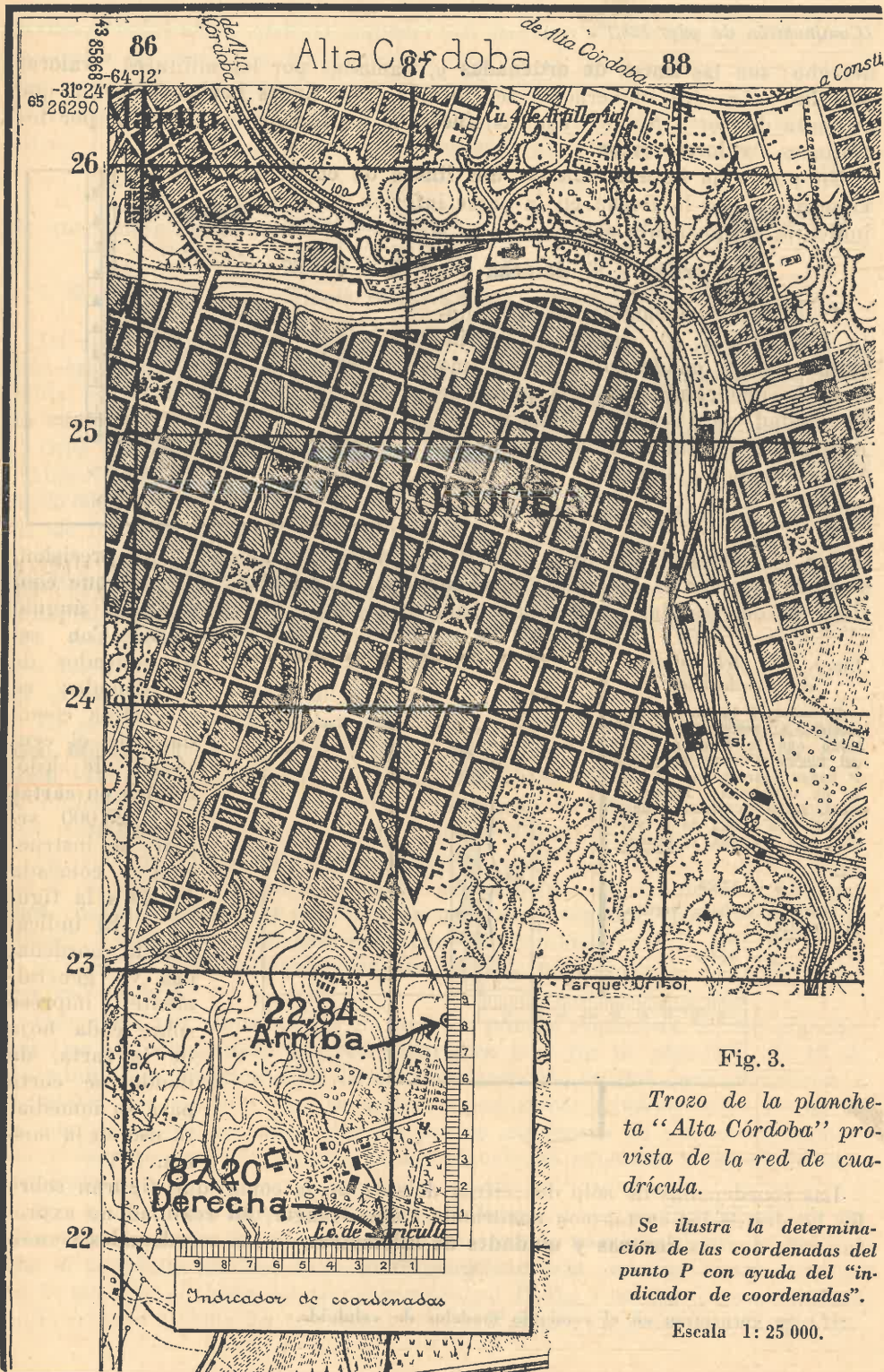


Fig. 3.

Trozo de la plancheta "Alta Córdoba" provista de la red de cuadrícula.

Se ilustra la determinación de las coordenadas del punto P con ayuda del "indicador de coordenadas".

Escala 1: 25 000.

(Continuación de pág. 128.)

derecha; son las líneas de ordenadas y , llamadas por los militares "valores derecha". La otra numeración se refiere a las líneas horizontales (la que aumenta de Sur a Norte); son las líneas de las abscisas x , llamadas por los militares "valores arriba".

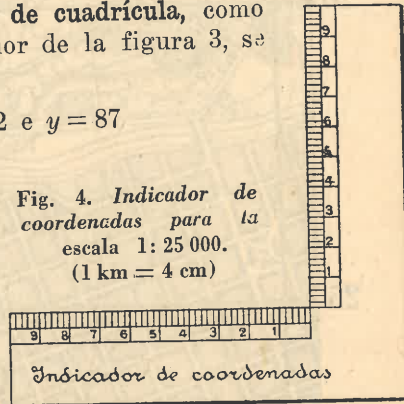
Un punto de intersección de dos líneas de cuadrícula, como el señalado por la flecha en la parte inferior de la figura 3, se indicaría simplemente así:

$$22 \text{ arriba y } 87 \text{ derecha o } x = 22 \text{ e } y = 87$$

Tratándose, en cambio, de un punto P (figs. 3 y 5), situado en el interior de un cuadrado y sobre una avenida que conduce a una plaza de la ciudad de Córdoba, sería posible estimar a ojo todavía el décimo de kilómetro, por ejemplo:

$$x = 22,8; \quad y = 87,2$$

Fig. 4. Indicador de coordenadas para la escala 1: 25 000. (1 km = 4 cm)



Con el objeto de facilitar esta determinación y aumentar su precisión, se suele emplear el llamado "indicador de coordenadas" (fig. 4), que consiste en dos escalas apropiadas dispuestas sobre los lados de un ángulo recto. Con este indicador de coordenadas se determina cómodamente el centésimo de kilómetro en cartas al 1/25 000 según la instrucción colocada frente a la figura 5. El indicador de coordenadas va generalmente impreso sobre cada hoja de la carta, de donde se corta para su inmediato uso en la misma. (*)

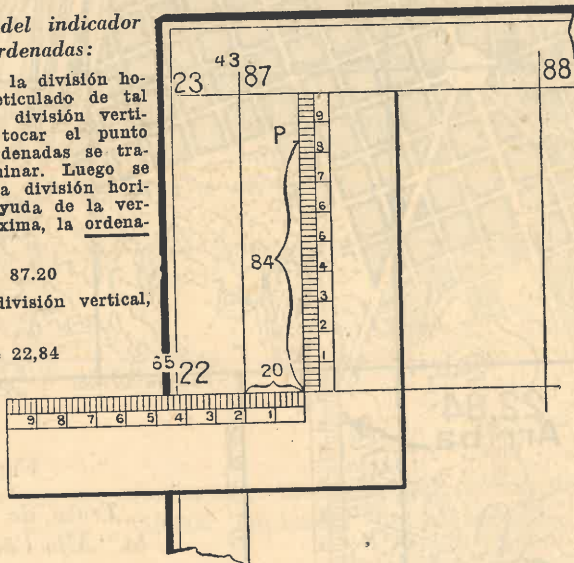
Fig. 5. Uso del indicador de coordenadas:

Se colocará la división horizontal al reticulado de tal modo que la división vertical llegue a tocar el punto P cuyas coordenadas se trata de determinar. Luego se leerá, sobre la división horizontal, con ayuda de la vertical más próxima, la ordenada:

$$y = 87,20$$

y sobre la división vertical, la abscisa:

$$x = 22,84$$



Las coordenadas de sólo dos cifras delante de la coma, que figuran sobre los bordes de las cartas con cuadrícula Gauss-Krüger, en realidad no expresan más que las decenas y unidades de kilómetros de las coordenadas Gauss-

(*) Se encuentran en el comercio modelos de celuloide.

Krüger, habiéndose omitido indicar las centenas de kilómetros. Se puede proceder así cuando la superficie que interesa es poco extensa. En otros casos se consignarán también las **centenas de kilómetros**.

En las cartas se suele indicar las centenas de kilómetros, cuando sea necesario, por medio de **números más pequeños algo levantados**, por ejemplo:

$$x = {}^{65} 22,84 \qquad y = {}^{43} 87,20$$

lo que quiere decir: $x = 6\ 522,84$ km, $y = 4\ 387,20$ km.

7. Ventajas de la cuadrícula Gauss-Krüger. Definiciones.

La cuadrícula Gauss-Krüger, construída en la forma indicada, constituye una **escala gráfica** extendida sobre toda la superficie de la carta, la que facilita notablemente la averiguación de cualquier **distancia** que interese en la misma. Es ésta una de las principales **ventajas** de la cuadrícula.

Otra **ventaja** de la cuadrícula es la circunstancia de que las coordenadas Gauss-Krüger que se determinen para un punto cualquiera en un plano a 1:25 000, no difieren de las que se saquen para el mismo punto de una hoja de la carta a 1:50 000 ó 1:100 000 ó 1:500 000.

Otra **ventaja** de la cuadrícula reside en el hecho de que en una determinación gráfica de las coordenadas Gauss-Krüger a base de la misma, queda automáticamente considerado el **efecto de la variación del papel** (ver pág. 98), por participar la cuadrícula en dicha deformación. La magnitud de esa variación, en el sentido de las abscisas y ordenadas, puede ser fácilmente averiguada con ayuda de la misma cuadrícula.

De acuerdo a la **reglamentación** adoptada por nuestro **Instituto Geográfico Militar**, se da a los lados de la cuadrícula **uniformemente el largo de 4 cm**, correspondiendo entonces a ese lado de la cuadrícula, en las cartas a 1:25 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000 y 1:500 000, respectivamente, las magnitudes 1 km, 2 km, 4 km, 8 km y 20 km, en el terreno.

La red de cuadrícula perteneciente a toda una faja meridiana (huso de 3° de longitud) es entonces en su conjunto una enorme **doble escala gráfica** (de cuadrados de 4 cm), con un **cero en el ecuador** (para el semi-huso norte) y otro **cero en el polo sur** (para el semi-huso sur), la que se coloca o se imagina colocada **simétricamente** sobre la proyección de cada meridiano central de faja.

Esto tiene por consecuencia de que los puntos esquineros de las planchetas [los que constituyen una **red geográfica** (ver fig. 15, pág. 137), de 15 en 15 minutos de longitud y de 10 en 10 minutos de latitud para planchetas a 1:50 000, por ejemplo], no se hallan generalmente situados sobre líneas de la cuadrícula (exceptuados sólo los puntos esquineros de los bordes izquierdo y derecho, respectivamente, de las planchetas adosadas a los meridianos centrales).

Por causa de la **convergencia de meridianos** [o sea el **ángulo que en un determinado punto P_1 el meridiano forma con la paralela al eje de las x o con el meridiano central de la correspondiente faja** (en fig. 6 para un punto P_1 situado al Oeste del meridiano central P_0M_0 , y en fig. 7 para un punto P_1 situado al Este del meridiano central P_0M_0)], las llamadas "**líneas ver-**

tales" y "líneas horizontales" de la cuadrícula no son líneas paralelas a los bordes (izquierdo y derecho, superior e inferior) de las planchetas (bordes que siempre son trozos de las proyecciones de meridianos y paralelos).

Definiciones.

Llámanse norte de cuadrícula a la dirección de las líneas verticales (del cuadrículado) paralelas al meridiano central de la faja.

Ver para otros importantes conceptos y definiciones: las figuras 8 y 9 y las explicaciones que las acompañan.

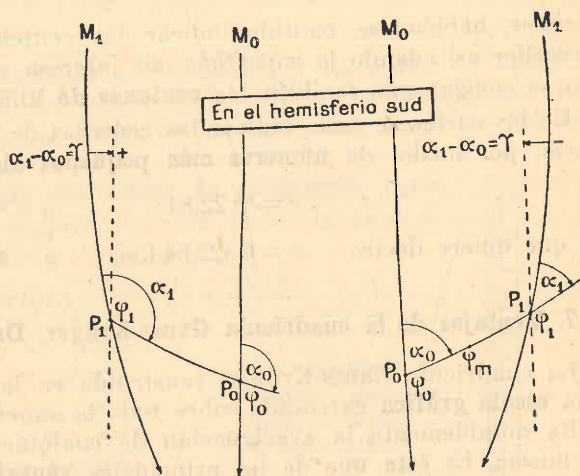


Fig. 6.

Fig. 7.

Se ilustra la definición del concepto de la convergencia de meridianos o sea del ángulo $\gamma = \alpha_1 - \alpha_0$ entre el meridiano P_1M_1 y la paralela por P_1 al meridiano central P_0M_0 para la latitud media $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1)$, en fig. 6 para un punto situado al Oeste y, en fig. 7, para un punto al Este del meridiano central.

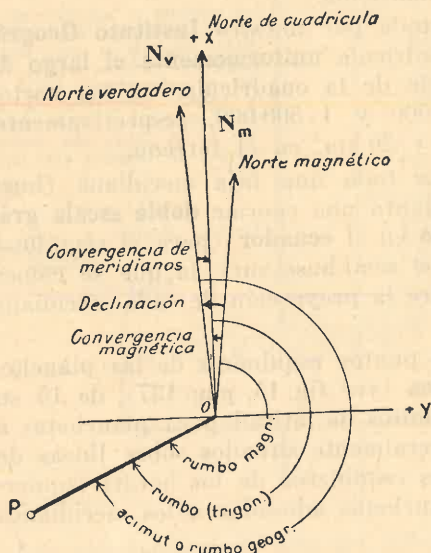


Fig. 8.

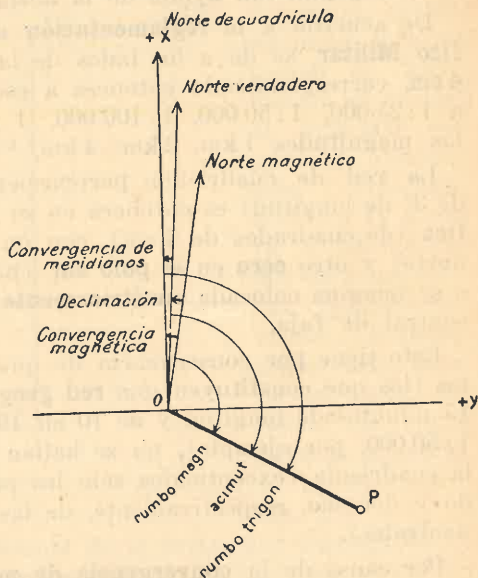


Fig. 9.

Se ilustra en las figuras 8 y 9 la definición de importantes conceptos relacionados con la cuadrícula, en fig. 8 para un punto O situado al Oeste y en fig. 9 para un punto O al Este del meridiano central de faja meridiana.

Pasan por el punto O las 3 siguientes direcciones-ceros fijas:
 el meridiano astronómico señalando el Norte verdadero N_v ,
 la paralela al meridiano central o paralela al eje de las x , señalando el Norte de cuadrícula (N), ("Gitternetz-Nord" en alemán, "grid north" en inglés),
 el meridiano magnético señalando el Norte magnético N_m .

Fórmanse así los 3 pequeños ángulos:
 convergencia de meridianos entre N_v y (N);
 convergencia magnética o desviación de la aguja entre N_m y (N);
 declinación magnética entre N_m y N_v .

La visual OP forma entonces con las 3 direcciones orígenes N_v , (N) y N_m los siguientes 3 ángulos:
 acimut, rumbo verdadero o rumbo geográfico,
 rumbo trigonométrico o simplemente rumbo y
 rumbo magnético (ver ambas figuras).

En las modernas cartas oficiales con cuadrícula Gauss-Krüger, se suele colocar, sobre el borde derecho, mediante una figura de ángulo, la convergencia magnética o desviación de la aguja válida para la zona.

8. "Salto de la cuadrícula".

Es a causa de la convergencia de meridianos que se produce entonces en el encuentro de las cuadrículas de dos sistemas vecinos el llamado "salto de la cuadrícula" ("Gittersprung" en alemán), salto que se ilustra en

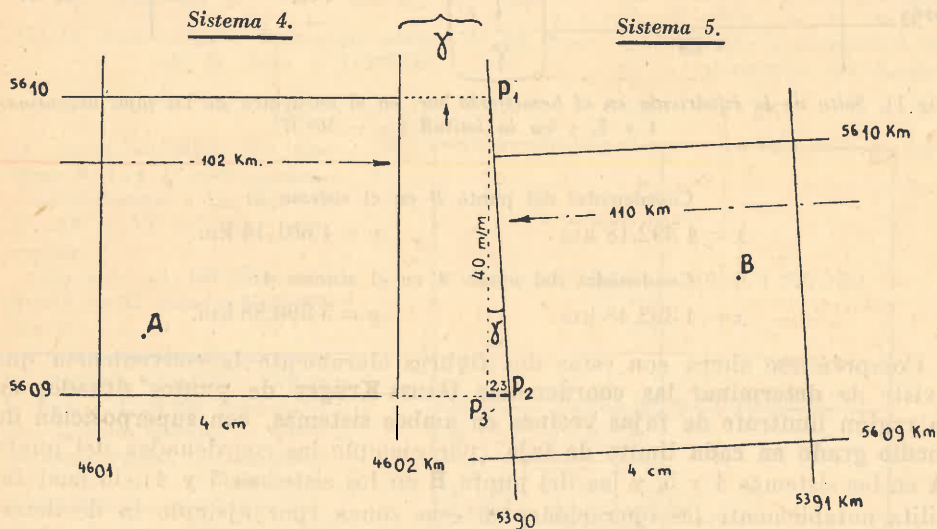


Fig. 10. Salto de la cuadrícula en el hemisferio norte, en el encuentro de las fajas 4 y 5, y en la latitud $\varphi \sim +50^\circ 37'$.

Coordenadas del punto A en el sistema 4:
 $x = 5\ 609,18\ \text{km}$ $y = 4\ 601,14\ \text{km}$.

Coordenadas del punto B en el sistema 5:
 $x = 5\ 609,54\ \text{km}$ $y = 5\ 390,78\ \text{km}$.

Las distancias 102 km y 110 km se refieren a los respectivos meridianos-ejes de sistemas.

fig. 10 para el hemisferio norte y la latitud $\varphi \sim +50^{\circ} 37'$, y en fig. 11 para una zona del hemisferio sur y la misma latitud $\varphi \sim -50^{\circ} 37'$.

Obtiénese de la fig. 10 para la convergencia de meridianos γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{P_2 P_3}{P_1 P_2} = \frac{23}{40} = 0,0575 \quad \gamma = 3^{\circ} 17,5'$$

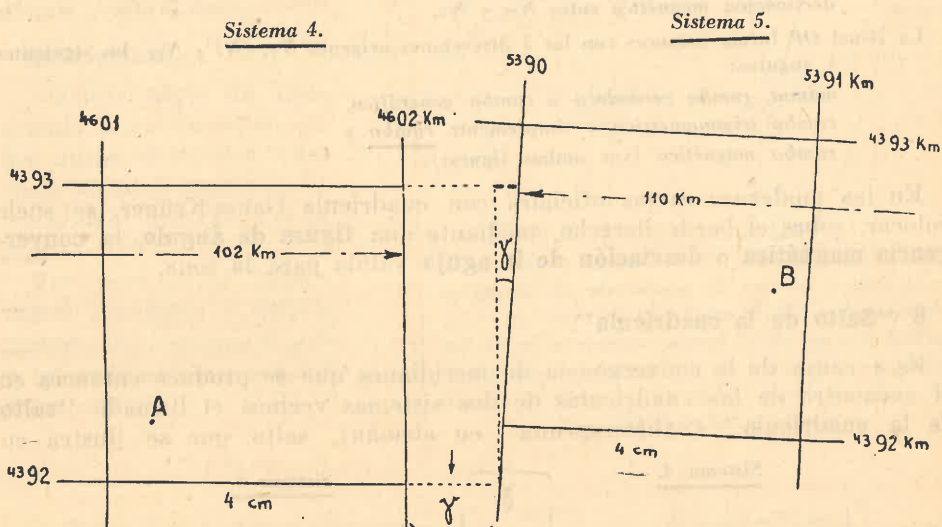


Fig. 11. Salto de la cuadrícula en el hemisferio sur, en el encuentro de las fajas argentinas 4 y 5, y en la latitud $\varphi \sim -50^{\circ} 37'$.

Coordenadas del punto B en el sistema 5:

$$x = 4\,392,18 \text{ km} \quad y = 4\,601,14 \text{ km.}$$

Coordenadas del punto A en el sistema 4:

$$x = 4\,392,48 \text{ km} \quad y = 5\,390,88 \text{ km.}$$

Compréndese ahora con estas dos figuras claramente la conveniencia que existe de determinar las coordenadas Gauss-Krüger de puntos situados en la región limítrofe de fajas vecinas en ambos sistemas, con superposición de medio grado en cada límite de faja (por ejemplo las coordenadas del punto A en los sistemas 4 y 5, y las del punto B en los sistemas 5 y 4), lo cual facilita notablemente las operaciones en esas zonas (por ejemplo la de determinar la distancia AB según la fórmula: $AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$).

Por todas las razones expuestas, las cuadrículas Gauss-Krüger son de gran importancia para la técnica en general, civil y militar.

Falta ahora dar algunas explicaciones relativas a la designación y numeración de las hojas de la carta oficial de nuestro país a las distintas escalas.

Esta designación y numeración de las hojas de la carta oficial ha sufrido cambios en el curso de los años, razón por la cual nos vemos obligados a

distinguir entre la designación anterior y la que corresponde al Reglamento RRM 28 aprobado con carácter definitivo.

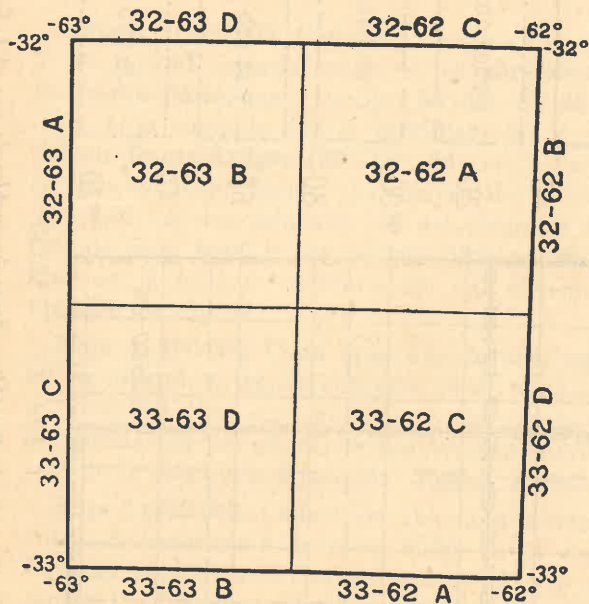


Fig. 12. Numeración y designación antigua de las hojas de la carta a 1:100 000.

9. Designación y numeración de las hojas de la carta oficial según la reglamentación anterior del Instituto Geográfico Militar Argentino.

Cada hoja de grado (fig. 12) se subdividió en 4 hojas de $\frac{1}{2}$ grado a 1:100 000. Para identificar estas 4 hojas de medio grado, se adoptó una designación que expresa su situación geográfica, aprovechándose para ello la circunstancia de que cada hoja a 1:100 000 tiene una esquina en que se cortan un meridiano y un paralelo de grado entero.

Para distinguir las 4 hojas que se hallan agrupadas alrededor de ese punto de intersección de grados enteros, se emplearon las letras A, B, C, y D. Así por ejemplo, 32-62 A es la hoja a 1:100 000 que se encuentra a SW de la intersección del paralelo

32° con el meridiano 62°. Las letras B, C y D corresponden, respectivamente, a las hojas al SE, NW y NE de dicha intersección.

Cada hoja a 1:100 000 se subdividió en 25 hojas a 1:25 000 (fig. 13).

Por ser considerada por nuestro Instituto Geográfico Militar la hoja a 1:50 000 como *unidad* para los trabajos de *levantamiento regular*, se numeraron esas hojas de 1 a 7487, según el principio de numeración creciente de Sur a Norte y de Oeste a Este (ver fig. 13).

Cada hoja a 1:50 000 se subdividió en 4 hojas a 1:25 000, las que llevaron la numeración de la correspondiente hoja a 1:50 000 con el agregado de una de las 4 letras minúsculas a, b, c, d, según lo muestra la figura 13.

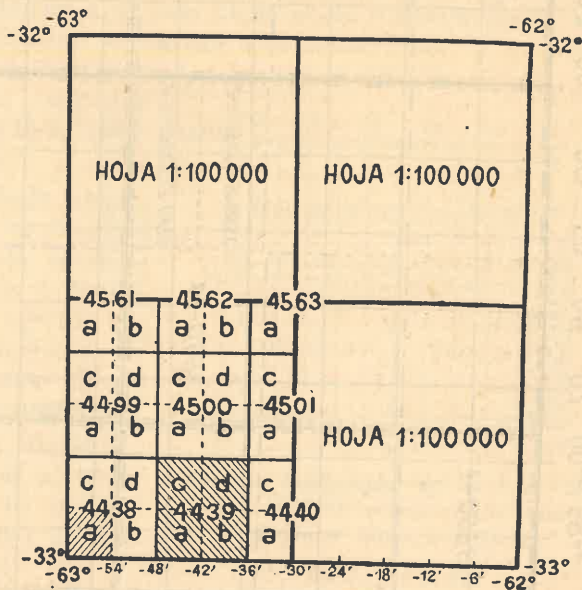


Fig. 13. Subdivisión antigua de las hojas a 1:100 000 en 25 hojas de 1:25 000, y designación de las hojas a 1:50 000 y 1:25 000,

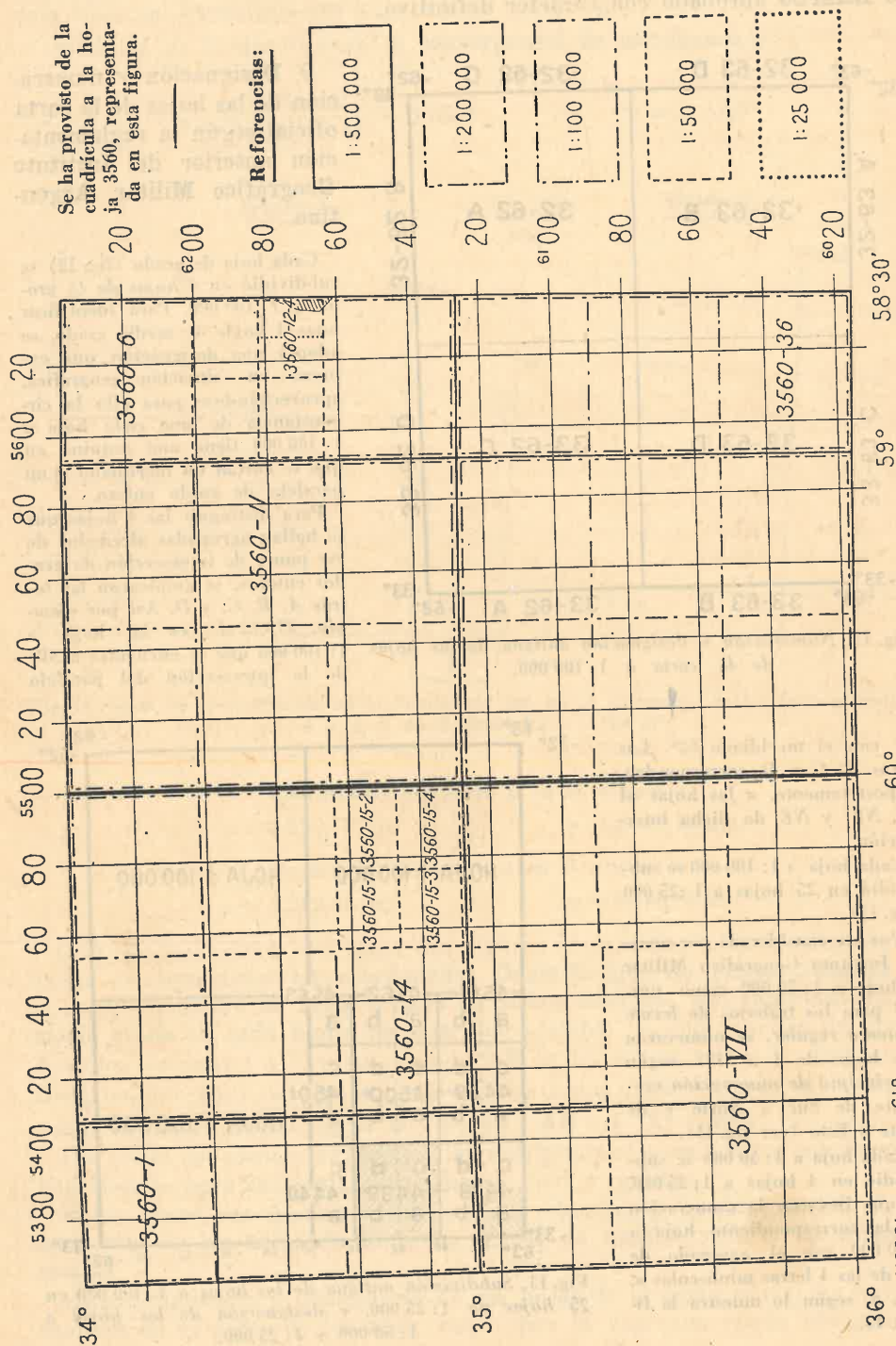


Fig. 14. Gráfico de la división y características de las hojas de la Carta de la República Argentina publicada por el I. G. M. a diversas escalas.
Escala 1:2 000 000.

10. Designación y numeración de las hojas de la carta oficial de diversas escalas según el Reglamento RRM 28 del Instituto Geográfico Militar Argentino.

Hoja a 1: 500 000. Cada hoja abarca una superficie de 3° de longitud por 2° de latitud (siendo entonces los **paralelos límites** de estas hojas siempre de grados **pares**, por ejemplo: 34°-36°, 36°-38°, etc.). El **meridiano central** de cada hoja coincide con el **meridiano-eje** del respectivo sistema o **faja meridiana Gauss-Krüger** (60°, 63°, 66°, etc.). La **designación** de estas hojas (para nuestro país) forma un número de 4 cifras, por ejemplo 3560, indicándose por las dos primeras (35 del ejemplo) el **paralelo de grado impar central** de cada hoja, y por las dos últimas (60 del ejemplo) el **meridiano central** de la hoja o meridiano-eje del sistema Gauss-Krüger (ver 3560 del ejemplo de fig. 14).

Hoja 1: 100 000. Cada hoja abarca una superficie de 30' de longitud por 20' de latitud, entrando entonces 36 de estas hojas en la correspondiente hoja a 1: 500 000. Para su identificación se agrega al número de la hoja 1: 500 000 (separada por un guión) la numeración corrida de 1 a 36 en el sentido normal de la escritura. **Ejemplos:** 3560-1, 3560-2, 3560-3, etc. (ver fig. 14).

Hoja 1: 200 000. Cada hoja abarca una superficie de 4 hojas a 1: 100 000, entrando entonces 9 de estas hojas en la correspondiente hoja a 1: 500 000. Para su identificación se agrega al número de la hoja 1: 500 000 la numeración I a IX en el sentido normal de la escritura. **Ejemplo:** 3560-VII (ver fig. 14).

Hoja 1: 50 000. Cada hoja abarca una superficie de 15' de longitud por 10' de latitud, entrando entonces 4 de esas hojas en la correspondiente hoja 1: 100 000. Para su identificación se agrega a la numeración de la hoja a 1: 100 000 la numeración de 1 a 4 en el sentido normal de la escritura. **Ejemplos:** 3560-15-1, 3560-15-2, 3560-15-3, 3560-15-4 (ver fig. 14).

Hoja 1: 25 000. Cada hoja abarca una superficie de 7'30" de longitud por 5' de latitud, entrando entonces 4 de estas hojas en la hoja 1: 50 000. Para su identificación se agregan las letras **a, b, c y d** a la numeración de la hoja 1: 50 000, en el sentido normal de la escritura. **Ejemplos:** 3560-12-4a, 3560-12-4b, 3560-12-4c (ver fig. 15).

Con el objeto de facilitar al lector la orientación general, se ha ubicado en las figs. 14 y 15 la ciudad de **Buenos Aires** (parte occidental).

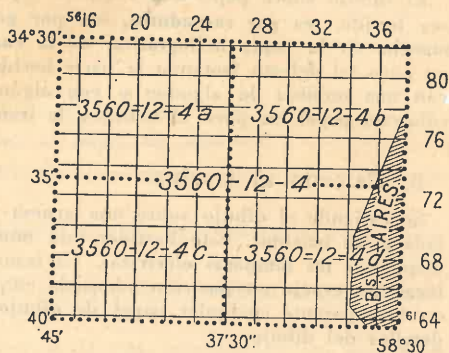


Fig. 15. Subdivisión de la hoja 3560-12-4 a 1: 50 000 provista de la cuadrícula en 4 hojas a 1: 25 000.

Escala 1: 500 000.

§ 19

Copia, reducción y ampliación de planos.*Copia o reproducción a igual escala.*

Grande es el número de medios de que se dispone para la reproducción de planos a igual escala, variando el procedimiento según la finalidad del trabajo y la precisión que se persigue. Uno de estos medios es el *calcado* mediante papel transparente, papel-tela, o papel fino de dibujo que no sea opaco (papel semitransparente) y que permita que las líneas del dibujo se vean al trasluz.

1. Calcado por medio de papel transparente.

Colocada sobre el dibujo que se quiere copiar la hoja de *papel transparente*, se la fija mediante pesas de plomo (las hay forradas de paño o de cuero), las que pueden ocupar diferentes sitios a medida que se avanza en la operación de copiar. Evítase así el más leve corrimiento entre la copia y el original. Conviene, además, tener la precaución de marcar en el calco líneas de ajuste, tales como cruces de ejes, que facilitan el rápido contralor de la buena colocación del papel transparente. El calco se realiza trazando a lápiz o a tinta con la mayor fidelidad todas las líneas que se transparentan.

2. Calcado en papel-tela.

El llamado *papel-tela* es un tejido de algodón al que se da un engomado transparente, satinándolo, una vez seco, por una de sus caras. En esta cara satinada se ejecuta la operación de copiar directamente con tinta.

Por la poca adhesión entre el engomado del papel-tela y la tinta china, puede resultar difícil conseguir buena uniformidad en el trazado de las líneas: éstas a veces se interrumpen a intervalos o resultan de grosor desigual. Para evitar este inconveniente se suele frotar la superficie del papel-tela con polvo de estatita (jabón de sastre).

El dibujo sobre papel-tela requiere especial cuidado; hay que evitar que el engomado sea herido, sea por raspaduras, sea por gotas de agua, porque cada herida produce una mancha en la copia heliográfica, de la cual hablaremos más adelante. Se puede corregir un poco tal defecto frotando la parte herida con un pedacito de estearina, repasando luego con una muñeca de algodón o con algún objeto duro de superficie lisa hasta que recobre el papel un poco el brillo y la transparencia perdidos.

3. Calcado al trasluz.

Se extiende el dibujo sobre una gruesa placa de cristal, la que se halla sólidamente fijada a un bastidor. Este bastidor está montado sobre un cajón, dentro del cual se hallan dispuestas las lámparas eléctricas. La transparencia del papel se aumenta todavía con colocar un espejo en posición adecuada en el fondo del cajón. De este modo se puede hacer transparente cualquier papel de dibujo (hasta el entelado) y reconocer los más finos detalles del dibujo.

4. Copia heliográfica (*).

Los procedimientos químicos que pasamos a tratar se fundan en la acción que la luz (natural o artificial) ejerce sobre ciertas substancias contenidas en los papeles llamados "*papeles de copia*".

(*) Del griego helios, sol, y graphain, describir.

Con el objeto de aprovechar esta acción química, se interpone entre los rayos de luz y el papel de copia el dibujo que se requiere reproducir.

Los varios papeles que se utilizan se caracterizan por el color y la clase de copia que se obtienen con ellos: hay papeles que dan copias con líneas blancas y fondo oscuro (azul o moreno); son las llamadas *copias negativas*; y hay otros papeles que dan copias con líneas negras, marrón oscuro o color sepia sobre fondo blanco; son las llamadas *copias positivas*.

Los *principales útiles* que se necesitan para el procedimiento químico son los siguientes: un marco-prensa de madera con placa de cristal, fieltro, tablero-respaldo, sobre el cual actúan unos resortes de acero, asegurando el contacto entre el original y el papel de copia, dos cubetas para fijar y lavar la copia, que pueden ser de porcelana, hierro esmaltado o cemento, un cajón de revelación, etc.

5. Reproducción con papel ferroprusiato. Manipulaciones:

- 1º Abierta la prensa, colóquese el original (dibujado en papel o tela transparente) con la cara dibujada contra el cristal.
- 2º Colóquese el papel ferroprusiato detrás del dibujo, con la cara preparada en contacto con el dorso del original.
- 3º Encima se coloca el fieltro y después el tablero.
- 4º Cerrada la prensa, se expondrá a la luz (con preferencia a la luz solar). Un papel ferroprusiato expuesto a la luz va tomando sucesivamente los siguientes tonos: amarillo verdoso, verde azulado, gris azul. De vez en cuando se levanta un poco un borde de la copia para averiguar si el dibujo es bien visible; cuando esto satisface, se interrumpe la exposición.
- 5º Sáquese la copia de la prensa, sumérjasela, cara impresionada hacia abajo, en un baño de abundante agua, la que se tiñe en seguida de amarillo sucio. Se cambia el agua varias veces hasta que quede limpia. Con esta operación se consiguen líneas blancas sobre un hermoso fondo azul.
- 6º Póngase la copia a secar colgándola a una cuerda con pinzas de madera.

Corrección de la copia. Si hubiera necesidad, se podría todavía corregir la copia al ferroprusiato empleando tintas especiales que se venden en el comercio. Da buen resultado una solución de cal viva en agua. Puede emplearse también el lápiz "Stabilo" Nº 8752.

6. Reproducción con papel sepia.

Copia negativa en papel sepia transparente.

- 1º Dorso del papel sepia contra el cristal y cara preparada en contacto con la cara dibujada del original, que puede estar hecho en papel de dibujo.
- 2º Expóngase a la luz hasta que las líneas del dibujo resulten ligeramente visibles, lo que se verifica dentro de 2 a 3 minutos.
- 3º Retírese la copia, sumérjasela dentro de un baño de agua para revelar la copia, cambiando el agua 2 ó 3 veces.
- 4º Fijación de la copia sumerjiéndola dentro de un baño de hiposulfito al 2 % durante 2 ó 3 minutos.
- 5º Se lava la copia durante un cuarto de hora y se la seca, obteniéndose así una *copia negativa*, que es invertida, de bellissimo tono, con líneas blancas sobre un fondo color sepia.

Copias positivas con papel sepia o papel ferroprusiato. Para obtener una *copia positiva*, con líneas morenas (usando papel sepia) o azules (usando papel ferroprusiato) y fondos blanco, se colocará nuevamente la capa impresionada del negativo en contacto con la parte sensible del papel de copia (papel sepia o ferroprusiato), se expondrá a la luz, se revelará, fijará y finalmente se lavará la copia como anteriormente queda explicado. La copia así obtenida es un positivo derecho.

Ventaja del negativo. Ofrece la copia negativa la ventaja de poder obtener de un mismo original fácil y cómodamente varias copias sin estropear el original. Además, debido al contacto inmediato entre la capa del papel de copia y la cara del original, resulta algo más exacta la copia positiva que la que se puede obtener mediante una operación simple.

7. Reproducción con papel al galato de hierro.

Obtíense con este papel directamente *copias positivas* con líneas negras sobre fondo blanco.

- 1º Colóquese la cara dibujada del original confeccionado en papel transparente, en contacto con el cristal, y la parte preparada del papel de copia contra el dorso del original. Se cierra la prensa y se expone a la luz. Según la transparencia del original, la luz blanquea la capa amarilla con más o menos rapidez.
- 2º Terminada la exposición de la copia, se la saca de la prensa, sumergiéndola, para revelar-la, durante 2 minutos en un baño de 3 por mil de ácido gálico.
- 3º Se lava cambiando agua varias veces durante 4 a 5 minutos y se seca la copia.

8. Inconveniente de los procedimientos de reproducción húmedos y ventaja de los procedimientos secos.

Todos estos diferentes procedimientos químicos de reproducción de planos a igual escala tienen el gran inconveniente de la *deformación del papel* (dilatación y encogimiento) debido a la circunstancia de que las copias deben mojarse en los diversos procesos de revelación, fijación y lavado y luego ser secadas al aire. Si bien tales procedimientos pueden servir para copias de toda clase de croquis y planos (planos de proyectos, planos de construcción, y todos aquellos planos de parcelas y mensuras que sólo sirven para ilustrar gráficamente un trabajo realizado o a realizar), ellos no sirven cuando se trata de conseguir una reproducción que conserve exactamente la escala del original y que pueda servir para sacar de la misma inmediatamente medidas gráficas.

La tendencia de mecanizar y abaratar la reproducción de documentos gráficos llevó finalmente a encontrar un procedimiento seco, el que a la par de ser económico permita obtener sencillamente copias exactas con líneas negras sobre fondo blanco. La introducción del papel "*Ozalid*" puede considerarse como una solución del problema. Los ensayos oficialmente establecidos con este papel de copia dieron resultados tan satisfactorios que el Catastro de Prusia lo adoptó con carácter definitivo, prescribiendo y reglamentando su uso por medio de una "Circular - instrucción" de fecha 28 de marzo de 1928.

9. Reproducción con papel "Ozalid".

Existen 3 tipos de papel "*Ozalid*":

Para copias positivas: "M" de 55 gramos por metro cuadrado,
 " " " "M" " 80 " " " " " "
 " " " copias negativas: "MS" (transparente).

- 1º *Exposición.* Se coloca y se expone el papel "*Ozalid*" en idéntica forma que el papel ferroprusiato. Si el original tiene líneas bien negras, se lleva la exposición hasta que el papel "*Ozalid*" se blanquee completamente. En caso de ser el original un dibujo en lápiz o con líneas negras muy finas, no se debe llevar la exposición hasta el blanqueo completo del "*Ozalid*" (resultarían así copias "quemadas").
- 2º La *revelación* en seco se realiza con vapores de amoníaco. Introdúcese para ello la copia arrollada en un cajón revelador, en cuyo fondo se halla una vasija con 100 cm³ de amoníaco al 10 % ó 15 % de concentración. Usando papel "M", la revelación termina dentro de 15 a 20 minutos, obteniéndose así con un original normal (es decir con líneas bien negras) una copia con líneas de marrón muy oscuro sobre fondo blanco, mientras que las copias de dibujos en lápiz (que siempre dejan pasar luz) resultan de un marrón más claro, algo rojizo.

Copias negativas, usando papel "MS".

1º *Exposición.* Colóquese el papel "MS" con capa preparada en contacto con la cara dibujada del original (como el negativo de papel sepia), se expone durante el doble de tiempo que necesita el papel positivo "M", llevando la exposición hasta que el "Ozolid" resulte completamente blanqueado.

2º *Revelación.* La revelación con "MS" dura un poco más de tiempo que la del papel "M".

Con la revelación del amoníaco queda determinada toda la operación de copiar.

El papel arrollado de la copia se aplanan con pasar ésta estirada sobre una *arista aguda.*

Reproducción a escala distinta.

10. Reticulado para reducción o ampliación de planos.

Cuando se trate de una reproducción de un original a una escala distinta del original, por ejemplo de una reducción a la mitad o una ampliación al doble (ver figs. 1 y 2), se puede dibujar un reticulado para la reducción o ampliación, en que todas las líneas guardarán con sus homólogas de la reproducción (reducción o ampliación) la razón de escala deseada.

Si, por ejemplo, se quiere confeccionar una ampliación, el reticulado de malla pequeña se halla dibujado en el original, y el de mallas grandes corresponde a la copia que se quiere dibujar. En esta última se introducen los detalles (puntos y líneas), que figuran en el original, de tal modo que guarden con los cuadrados grandes la misma relación que tienen en el original con los cuadrados pequeños.

Fig. 1. (Lado de malla $l = 5\text{ mm}$).

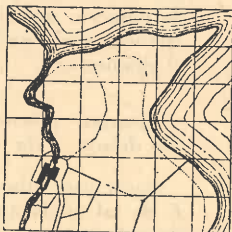
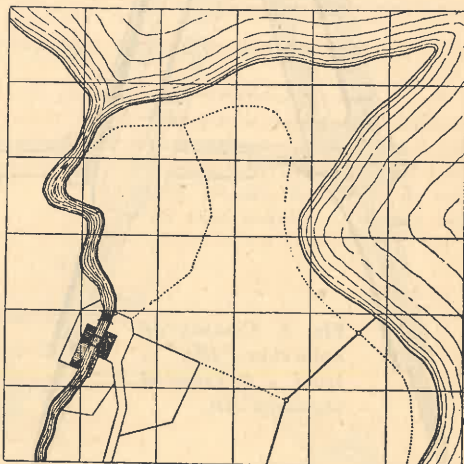


Fig. 2. Ampliación al doble ($l = 10\text{ mm}$).



En forma análoga se procede para obtener una reducción.

En estas operaciones se usa con ventaja el *compás de reducción* (fig. 3).

11. Compás de reducción.

El compás de reducción, inventado por *Lambert*, se diferencia del compás común en que cada brazo termina en dos puntas. Ambos brazos presentan, además, una ranura longitudinal, por la cual puede correr una pieza *C* provista de tornillo de fijación y otro de coincidencia, opuesto al de fijación y que por eso no puede verse en la figura. Además, uno de los brazos lleva dos graduaciones, a las cuales corresponde una línea de fe en la pieza *C*.

Esta pieza puede fijarse en cualquier trazo de las graduaciones.

A la izquierda generalmente están las divisiones correspondientes a las razones de escala: $1/10, 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5$.

A fin de preparar el compás para una reducción, o ampliación deseada, se cierran los brazos, luego se coloca la línea de fe de la pieza *C* mediante el tornillo de coincidencia en el trazo correspondiente y se aprieta el tornillo de fijación.

Abriendo ahora el compás, la relación de las distancias *CA* y *CD* será igual a la de las longitudes *AB* y *DE*, relación que está indicada por la fracción frente a la línea de fe.

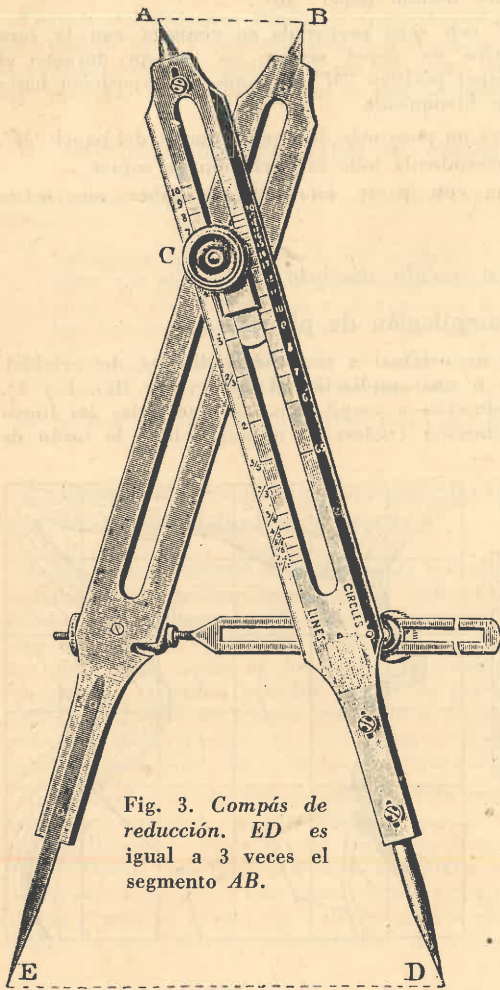


Fig. 3. Compás de reducción. ED es igual a 3 veces el segmento AB.

DE es apróx. igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular de 9 lados iguales al segmento AB.

el compás de tal modo que la distancia entre las puntas E y D sea igual al diámetro o sea 60 mm. Entonces la distancia entre las puntas A y B corresponderá a la cuerda que se puede colocar 9 veces exactas sobre la circunferencia trazada con radio de 30 mm.

Comprobación del compás de reducción.

Antes de usar un compás de reducción, conviene siempre verificarlo, lo que se puede fácilmente realizar con un dobledecímetro: Colocado el índice de la división izquierda sobre 1/3, deberá corresponder a la distancia de 6 cm entre las puntas D y E, exactamente la distancia de 2 cm entre A y B.

Para la reducción y ampliación de planos resulta generalmente más cómodo el pantógrafo.

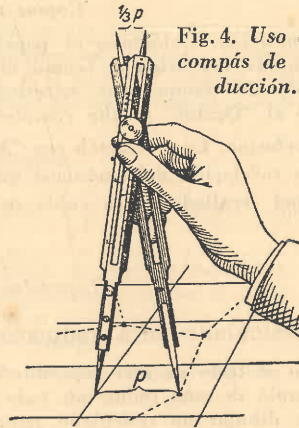


Fig. 4. Uso del compás de reducción.

Sobre el lado derecho de la ranura del brazo AD puede haber otra serie de números que sirven para dividir una circunferencia en partes iguales, dado el diámetro.

Ejemplo práctico 1. Reducción de un dibujo a la escala 1/3.

Basta para ello colocar la pieza móvil C de tal modo que el índice o línea de fe coincida con la división correspondiente a la fracción 1/3, (fig. 3), teniendo cuidado de apretar el tornillo de fijación. Después se toman las medidas, p. ej. la magnitud p (fig. 4) del original y se trasladarán a la copia (para p, el segmento 1/3p).

Ejemplo práctico 2. Dividir una circunferencia de 30 mm de radio, en 9 partes iguales.

Se hace coincidir con la mayor exactitud el índice con la división derecha de la ranura que lleva el número 9. Se ajusta el tornillo de fijación y se abre

el compás de tal modo que la distancia entre las puntas E y D sea igual al diámetro o sea 60 mm. Entonces la distancia entre las puntas A y B corresponderá a la cuerda que se puede colocar 9 veces exactas sobre la circunferencia trazada con radio de 30 mm.

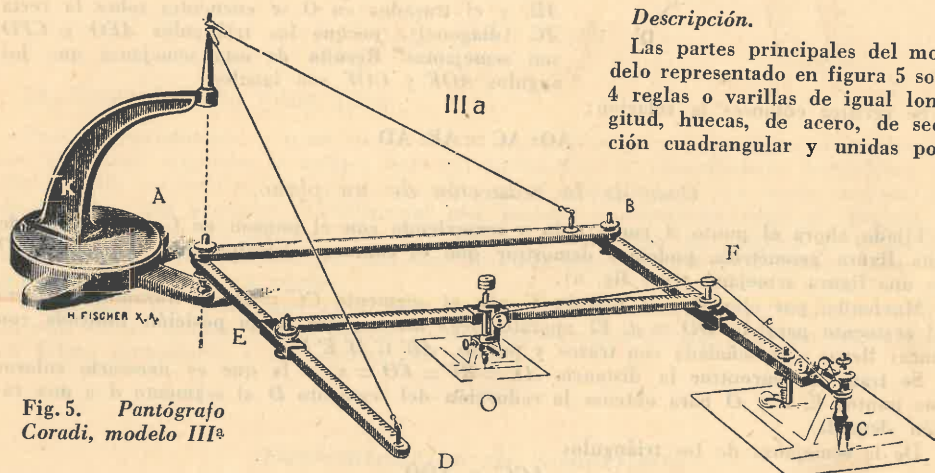
12. Tipos de pantógrafos: tipo escolar y tipo de precisión; su desarrollo.

El *pantógrafo*, (*) conocido desde más de 300 años, inventado en 1603 por Cristóbal Scheiner (1573-1650), sabio alemán (profesor de matemáticas en las universidades de Ingolstadt y Freiburg), que adquirió gran fama mundial por el descubrimiento de las primeras manchas del Sol en 1611.

Debido a su utilidad para la confección y reproducción de planos, el pantógrafo se difundió pronto en varios países. Pero el desarrollo de su perfeccionamiento mecánico fué muy lento. Recién después de haberse introducido la suspensión de las reglas por el mecánico J. Goldschmid (Zürich) en 1864, quedó abierto el camino para un nuevo desarrollo, el que fué llevado a un estado de gran perfeccionamiento por una fecunda colaboración de los mecánicos de gran talento, A. Ott y G. Coradi. Es decir, bifurcó el camino del desarrollo: por un lado sigue existiendo, casi sin variar, el modelo primitivo de Scheiner, como *tipo escolar* y, por el otro lado, el *tipo de precisión*, al cual condujeron las exigencias cada vez más grandes de la técnica del dibujo y los incansables esfuerzos de los dos mecánicos nombrados.

La precisión de 0,1 a 0,2 mm, que se puede obtener con este aparato en la reproducción de planos, le asegura siempre un lugar en las colecciones de instrumentos de las facultades de ingeniería, institutos cartográficos oficiales y grandes oficinas técnicas de todo el mundo.

13. Pantógrafo de precisión, su descripción, teoría y uso.

*Descripción.*

Las partes principales del modelo representado en figura 5 son 4 reglas o varillas de igual longitud, huecas, de acero, de sección cuadrangular y unidas por

Fig. 5. Pantógrafo Coradi, modelo III^a

medio de articulaciones. Tres de dichas reglas, las *AD*, *BC* y *EF* (figs. 5 y 6), están milimetradas sobre su cara superior, llevando además, grabadas otras divisiones que corresponden a las razones de escala más comúnmente usadas. La varilla *EF* puede moverse paralelamente a sí misma.

La articulación en *A* es la más importante. Es por este punto que pasa el eje principal de rotación materializado en dos puntos de un pesado pescante de fundición *K*, un punto superior en un remate cónico, donde se sujetan dos alambres de suspensión, y un punto inferior, en la base del pescante, donde se juntan las reglas *AB* y *AD*. Alrededor de *A* gira entonces el sistema de reglas libremente suspendido, sin otro punto de apoyo en el tablero de dibujo que una ruedecita situada en el extremo de la regla *BC*.

Cuando se use el aparato para reducciones, existe en un punto *C*, en situación opuesta al polo *A*, un pequeño cilindro llamado *punzón*, que termina en punta. Puede girar este cilindro a rozamiento suave dentro de una guía de latón.

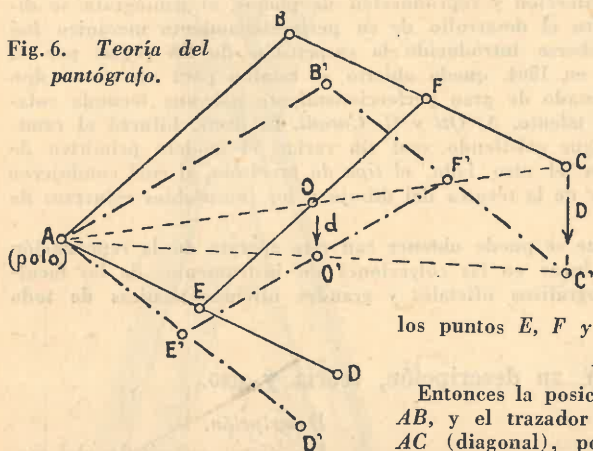
Sobre la recta de unión del punzón *C* con el punto *A* se halla en *O* el *trazador* (lápiz),

(*) Del griego *pan*, o *panto*, todo, y *graphein*, describir.

movible dentro de un pequeño tubo, cuyo eje, como el del punzón, es perpendicular al plano del paralelogramo de las reglas.

Junto al punzón se halla fijado un manguito de madera, con el cual se dirige la marcha de la punta del punzón sobre el contorno de la figura del original. Parte del punto C un cordoncito de maniobra que va hasta el trazador y sirve para levantar el lápiz cuando al pasar con el punzón de una parte a otra no se quiere que el lápiz dibuje.

Fig. 6. Teoría del pantógrafo.



Teoría del pantógrafo.

Los elementos fundamentales del pantógrafo son las 4 reglas horizontales, todas iguales: $AB = BC = AD = EF = L$, estando las 3: AD, BC y EF provistas de graduaciones iguales, con puntos cero en A, B y E , respectivamente.

Para poner el aparato en condiciones de uso, deben colocarse, por medio de estas graduaciones, los puntos E, F y O de tal manera que:

$$AE = BF = EO.$$

Entonces la posición de la regla EF es paralela a la AB , y el trazador en O se encuentra sobre la recta AC (diagonal), porque los triángulos AEO y CFO son semejantes. Resulta de esta semejanza que los ángulos AOE y COF son iguales.

Se verifica entonces la relación:

$$AO : AC = AE : AD$$

Caso de la reducción de un plano.

Fijado ahora el punto A como polo y recorriendo con el punzón en C el contorno de una figura geométrica, podemos demostrar que el contorno descrito por el lápiz en O es una figura semejante (ver fig. 6).

Moviendo, por ejemplo, el punzón C por el segmento $CC' = D$, el trazador recorrerá el segmento paralelo $OO' = d$. El aparato llega así a pasar de la posición indicada con líneas llenas a la señalada con trazos y puntos, $AB' C' D' E' F'$.

Se trata de encontrar la distancia $AE = BF = EO = x$, a la que es necesario colocar los puntos E, F y O para obtener la reducción del segmento D al segmento d a una razón deseada.

De la semejanza de los triángulos

ACC' y AOO'

resulta:
$$\frac{D}{d} = \frac{AC}{AO} = \frac{BC}{AE} = \frac{L}{x}$$

De donde:
$$x = \frac{d}{D} \cdot L$$

o también, poniendo para la reducción d/D la fracción $1/n$:

$$x = \frac{1}{n} \cdot L,$$

en donde L significa la longitud de las reglas, la que, en los distintos modelos de los pantógrafos de *Coradi*, es igual a 600 mm, 720 mm, 840 mm y 960 mm, y, en los de *Ott*, igual a 720 mm y 960 mm, respectivamente; dimensiones éstas de las cuales depende el tamaño máximo de la figura que se puede recorrer sin cambiar la posición del aparato.

Es decir, para obtener una reducción $\frac{1}{n}$ del original se colocarán primero los puntos

E y F a la distancia $\frac{1}{n} \times L$, contada a partir de A y B respectivamente, y luego el lápiz a $1/n$ de EF , con lo que se tendrá el aparato colocado en condición tal que un segmento d recorrido por el lápiz en O será $1/n$ del segmento D recorrido por el punzón en C .

Ejemplo práctico 1. Hallar la cantidad x para una reducción de $\frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ con un largo de regla de $L = 840$ mm:

$$x = 2/3 \times 840 = 560 \text{ mm.}$$

Ejemplo práctico 2. Con un pantógrafo de $L = 600$ mm se trata de reducir a $1/5000$ un plano dado a escala $1/2500$ afectado de una contracción del papel de 1% . ¿Cuál es la magnitud x a colocar en el aparato?

Debiendo corresponder en esta reducción cada 50 mm de longitud de la reducción no a 100 mm sino sólo a 99 mm del original, tendremos:

$$x = \frac{50}{99} \cdot 600 = 303 \text{ mm.}$$

Ampliaciones.

Para obtener una figura n veces aumentada, se colocará primero el aparato como para la reducción al $1/n$, cambiando luego la posición del trazador y del punzón, poniendo aquél en C y éste en O .

Ejemplo práctico 3. Sea dado un plano a escala $1:5000$ afectado de una contracción del papel de 1% . Trátase de aumentarlo a la escala de $1:2500$.

¿Cuál es la magnitud x a colocar en un aparato con $L = 600$?

$$x = \frac{99}{200} \cdot 600 = 297 \text{ mm}$$

14. Procedimiento fotográfico.

Para la reproducción a igual escala, como así también para reducciones y ampliaciones de planos originales se emplea hoy con preferencia el procedimiento fotográfico, el que no sólo proporciona una gran economía de tiempo, trabajo y a veces también de dinero, sino que garantiza prácticamente una perfecta concordancia entre el original y la copia en todos sus detalles. Pero este procedimiento exige una técnica e instalaciones costosas de que sólo pueden disponer institutos especializados o la industria que se dedica a esta rama de la técnica.

Tanto para las reducciones como para las ampliaciones, los originales deben ser dibujados en tal manera que el tamaño de los signos convencionales y de las letras salga en forma conveniente a la reproducción.

Determinación de superficies.

Al levantamiento y confección de planos sigue naturalmente la determinación de superficies de parcelas.

Distínguense los siguientes métodos:

- Cálculo de superficies por fórmulas, en base a las medidas directas tomadas en el terreno o coordenadas de vértices previamente calculadas.
- Determinación de superficies con planímetro en base a un plano dibujado.
- Determinación de superficies por el método semigráfico y gráfico puro.

La determinación de la superficie de una parcela, ya sea por medio de cálculos en base a medidas tomadas en el terreno, o con planímetro, o por un método mixto (el que consiste en la combinación de medidas directas tomadas en el terreno con valores gráficamente obtenidos), constituye una de las principales tareas del agrimensor. La ubicación de un título en el terreno, la determinación de los límites, el fraccionamiento de la propiedad grande, la intervención del agrimensor en testamentarias y muchas otras causales que nacen de las múltiples circunstancias de la vida, pública y privada, dan siempre lugar a operaciones conducentes al cómputo de áreas.

§ 20.

Cálculos de superficies por fórmulas.

1. Superficie del triángulo, rectángulo, trapecio y cuadrilátero irregular.

Triángulo. Según los elementos que se conozcan tendremos para el cálculo de la superficie **S** una de las siguientes fórmulas:

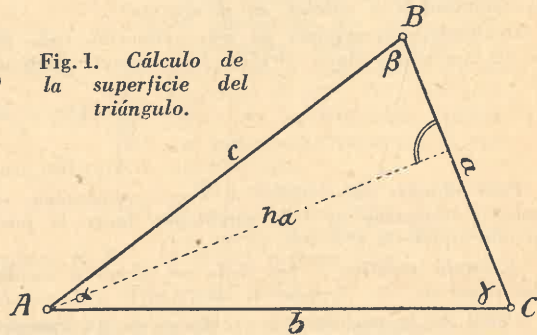


Fig. 1. Cálculo de la superficie del triángulo.

- (1) $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$
- (2) $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} \beta,$
- (3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

En esta última fórmula (fórmula de **Herón**) **p** significa la mitad del perímetro del triángulo:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Rectángulo. Superficie del rectángulo con los dos lados **a** y **b**:

(4) $S = ab$

Trapecio. Superficie del trapecio con los lados paralelos **a** y **b** (fig. 2) y la altura **h**:

(5) $S = \frac{1}{2}(a + b)h$

o, en base a las coordenadas planas de los vértices, **x**₁, **y**₁, **x**₂, **y**₂, (fig. 3), referidas a una línea de operaciones:

(6) $S = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)$

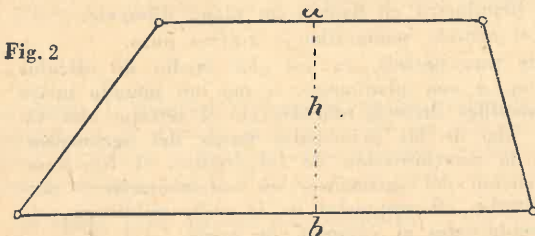


Fig. 2

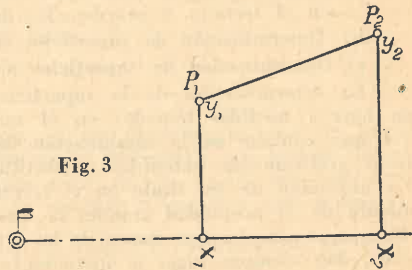


Fig. 3

Cuadrilátero irregular. Trazando en el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 4) la diagonal $AC = a$, y bajando sobre ella desde los vértices B y D las perpendiculares h_1 y h_2 , tendremos para la superficie S :

$$(7) \quad S = \frac{1}{2} a(h_1 + h_2)$$

Si se conocieran las dos diagonales $a (= a_1 + a_2)$ y $b (= b_1 + b_2)$ y el ángulo comprendido α (fig. 5), se obtendrá la superficie S del cuadrilátero como suma de las superficies de los 4 triángulos que lo componen, es decir:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} [a_1 b_1 \text{sen } \alpha + a_2 b_1 \text{sen } (180^\circ - \alpha) + a_2 b_2 \text{sen } \alpha + a_1 b_2 \text{sen } (180^\circ - \alpha)] \\ &= \frac{1}{2} \text{sen } \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2), \\ &= \frac{1}{2} \text{sen } \alpha [a_1 (b_1 + b_2) + a_2 (b_1 + b_2)] = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha [(a_1 + a_2) (b_1 + b_2)] \end{aligned}$$

Luego:

$$(8) \quad S = \frac{1}{2} ab \text{sen } \alpha.$$

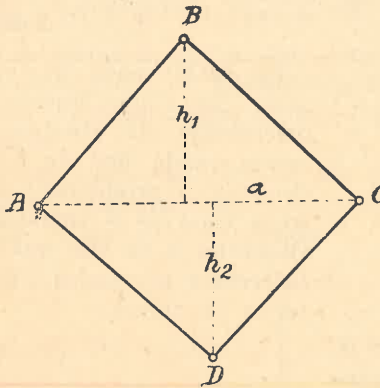


Fig. 4 Cuadrilátero con una diagonal y dos alturas.

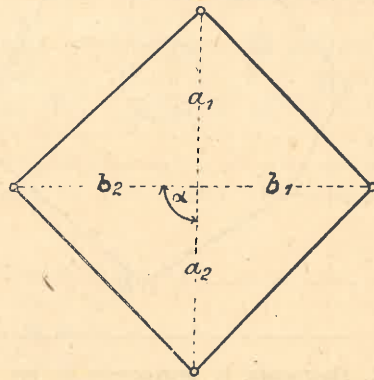


Fig. 5 Cuadrilátero con dos diagonales y el ángulo comprendido.

2. Cálculo de superficie de parcelas cuyos vértices están dados por medio de coordenadas planas (referidas a un eje de operaciones).

Habiéndose seguido en el levantamiento de un polígono el método de coordenadas planas, se hallará la superficie de este polígono descomponiéndolo en triángulos rectángulos y trapecios, cuyas áreas se calculan según las fórmulas anteriormente indicadas.

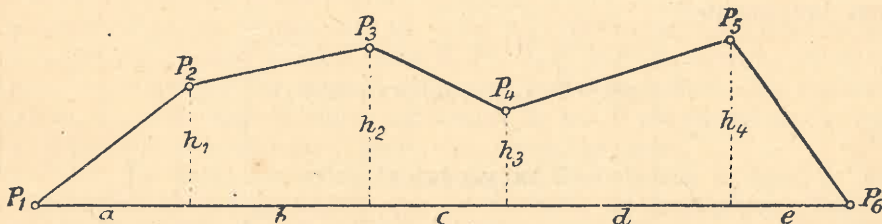


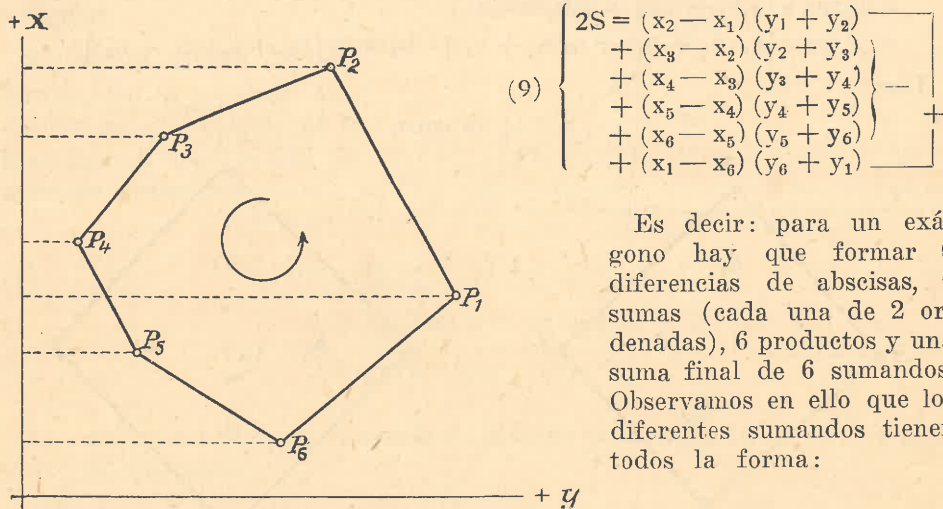
Fig. 6. Cálculo de la superficie del polígono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$.

Bajando, por ejemplo, desde los vértices P_2, P_3, P_4 y P_5 (fig. 6) perpendiculares sobre el lado P_1P_6 , quedará descompuesto el polígono en 2 triángulos y 3 trapecios, para cuya doble superficie $2S$ tendremos:

$$2S = ah_1 + b(h_1 + h_2) + c(h_2 + h_3) + d(h_3 + h_4) + hc_4$$

3. Fórmulas generales del trapecio.

Cuando están dadas las coordenadas de los vértices de un polígono referidas a un eje de las x y un eje de las y (como por ejemplo las del polígono de 6 lados de la fig. 7), la doble superficie $2S$ del mismo puede obtenerse fácilmente por la repetida aplicación de la fórmula (6), a saber:



Es decir: para un exágono hay que formar 6 diferencias de abscisas, 6 sumas (cada una de 2 ordenadas), 6 productos y una suma final de 6 sumandos. Observamos en ello que los diferentes sumandos tienen todos la forma:

$$(x_{n+1} - x_n)(y_n + y_{n+1})$$

Fig. 7. Ilustrando la proyección de un polígono sobre el eje de las x .

lo que nos permite escribir, de un modo general, para la doble superficie $2S$ de un polígono de n lados:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2S = (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) \\ + (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) \\ + (x_4 - x_3)(y_3 + y_4) \\ \dots\dots\dots \\ + (x_{n+1} - x_n)(y_n + y_{n+1}) \end{array} \right.$$

o, más brevemente:

$$(11) \quad \boxed{\begin{array}{l} 2S = \sum_1^n (x_{n+1} - x_n)(y_n + y_{n+1}) \\ = \sum_1^n \Delta x (y_n + y_{n+1}) \end{array}}$$

la que se aplicará en página 152.

El examen de la figura 7 y de las ecuaciones (9) y (10), aplicadas a la misma, nos demuestra que para el polígono de dicha figura el primero y el último producto son de signo positivo, mientras que los otros 4 productos son de signo negativo. Los dos sumandos positivos expresan la doble superficie del polígono aumentada en las dobles áreas de los 4 trapecios con los lados P_2-P_3 , P_3-P_4 , P_4-P_5 , P_5-P_6 , los que se encuentran situados fuera del polígono, o sea entre éste y el eje de las x . Como se ve en la figura, estos últimos 4 trapecios deben ser restados de los 2 primeros; pero la fórmula (9) misma se encarga de efectuar esta resta, puesto que los 4 sumandos correspondientes resultan con valores negativos.

Por consiguiente, la operación que debe realizarse es la suma algebraica de los 6 productos.

Podemos expresar entonces la fórmula (11) en la siguiente forma:

La doble superficie positiva de un polígono es igual a la suma algebraica de los productos que se obtienen al multiplicar cada diferencia de las abscisas de puntos sucesivos por la suma de las ordenadas de los mismos puntos.

Las fórmulas (9) y (10) arrojan un valor positivo para $2S$ cuando, como en figura 7, la numeración de los vértices es tal que al recorrer el polígono de acuerdo con el orden $P_1, P_2, P_3, \dots, P_6$, el polígono quede a la izquierda.

Proyectando, en cambio, los puntos del polígono sobre el eje de las y (fig. 8), obtendremos en forma análoga para la doble superficie negativa, $-2S$, la siguiente expresión:

$$(12) \quad \begin{cases} -2S = (y_2 - y_1)(x_1 + x_2) \\ \quad + (y_3 - y_2)(x_2 + x_3) \\ \quad + (y_4 - y_3)(x_3 + x_4) \\ \quad + (y_5 - y_4)(x_4 + x_5) \\ \quad + (y_6 - y_5)(x_5 + x_6) \\ \quad + (y_1 - y_6)(x_6 + x_1) \end{cases}$$

En forma general:

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} -2S &= \sum_1^n (y_{n+1} - y_n)(x_n + x_{n+1}) \\ &= \sum_1^n \Delta y_n (x_n + x_{n+1}) \end{aligned}}$$

la que se aplicará en página 152.

Se verifica en la expresión (12) que los sumandos correspondientes a los 3 trapecios grandes, con los lados $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ y $P_3 P_4$, arrojan valores negativos, mientras que los otros 3 trapecios (más pequeños) dan superficies positivas, de modo que la suma algebraica de los 6 productos da la verdadera superficie del polígono, pero con signo negativo.

Es decir: **La doble superficie negativa de un polígono es igual a la suma algebraica de los productos que se obtienen al multiplicar cada diferencia de las ordenadas de puntos sucesivos por la suma de las abscisas de los mismos puntos.**

En las figuras 7 y 8 hemos supuesto que todo el polígono está situado íntegramente en el primer cuadrante del sistema de coordenadas planas; pero las fórmulas (11) a (13) valen siempre, o sea: ellas valen también en los casos que el polígono se halle en cualquier otro cuadrante o cuando sus lados cruce los ejes de coordenadas.

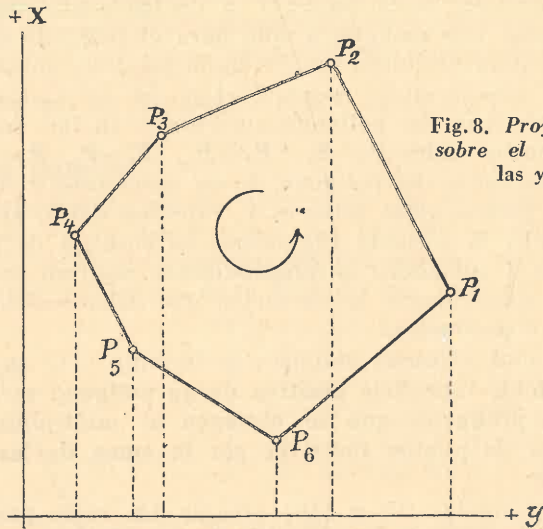


Fig. 8. Proyección sobre el eje de las y.

4. Fórmulas de Gauss.

Podemos obtener otras fórmulas para la superficie **2S** por simple transformación de la fórmula (9).

En efecto, ejecutando las multiplicaciones indicadas, tendremos:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} + 2S &= \underline{x_2y_1} - x_1y_1 + x_2y_2 - \underline{x_1y_2} \\ &+ \underline{x_3y_2} - x_2y_2 + x_3y_3 - \underline{x_2y_3} \\ &+ \underline{x_4y_3} - x_3y_3 + x_4y_4 - \underline{x_3y_4} \\ &+ \underline{x_5y_4} - x_4y_4 + x_5y_5 - \underline{x_4y_5} \\ &+ \underline{x_6y_5} - x_5y_5 + x_6y_6 - \underline{x_5y_6} \\ &+ \underline{x_1y_6} - x_6y_6 + x_1y_1 - \underline{x_6y_1} \end{aligned} \right.$$

Se nota que los términos **no** subrayados se destruyen todos, resultando entonces:

$$(15) \quad \begin{aligned} + 2S &= x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_5y_4 + x_6y_5 + x_1y_6 \\ &- x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_4 - x_4y_5 - x_5y_6 - x_6y_1 \end{aligned}$$

Factoreando las **y**, tendremos:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} + 2S &= y_1(x_2 - x_6) \\ &+ y_2(x_3 - x_1) \\ &+ y_3(x_4 - x_2) \\ &+ y_4(x_5 - x_3) \\ &+ y_5(x_6 - x_4) \\ &+ y_6(x_1 - x_5) \end{aligned} \right.$$

En forma general:

$$(17) \quad \boxed{+ 2S = \sum_1^n y_n (x_{n+1} - x_{n-1})}$$

la que se aplicará en página 152.

Factoreando en la (15) las x , obtendremos análogamente:

$$(18) \quad -2S = \sum_1^n x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$$

la que se aplicará en página 152.

Las fórmulas (17) y (18) son las llamadas de **Gauss**, designadas así por haberlas indicado este matemático en 1790 a la edad de 13 años.

En palabras: **La doble superficie positiva de un polígono de n vértices es igual a la suma de n productos, de los cuales cada uno se obtiene multiplicando la ordenada de un vértice por la diferencia de las abscisas de los vértices vecinos; o:**

La doble superficie negativa de un polígono de n vértices es igual a la suma de n productos, de los cuales cada uno se obtiene multiplicando la abscisa de un vértice por la diferencia de las ordenadas de los vértices vecinos.

5. Ejemplo de aplicación práctica.

Estando dadas las coordenadas de los puntos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ (fig. 9), a saber:

- $x_0 = + 95\ 058,55\text{ m}$
- $x_1 = + 95\ 026,17\text{ »}$
- $x_2 = + 95\ 096,55\text{ »}$
- $x_3 = + 95\ 082,14\text{ »}$
- $x_4 = + 95\ 297,30\text{ »}$
- $x_5 = + 95\ 329,61\text{ »}$

- $y_0 = - 15\ 467,37\text{ m}$
- $y_1 = - 15\ 398,16\text{ »}$
- $y_2 = - 15\ 408,63\text{ »}$
- $y_3 = - 15\ 223,13\text{ »}$
- $y_4 = - 15\ 192,14\text{ »}$
- $y_5 = - 15\ 442,82\text{ »}$

calcular la superficie **S** según las fórmulas del trapecio y las de Gauss.

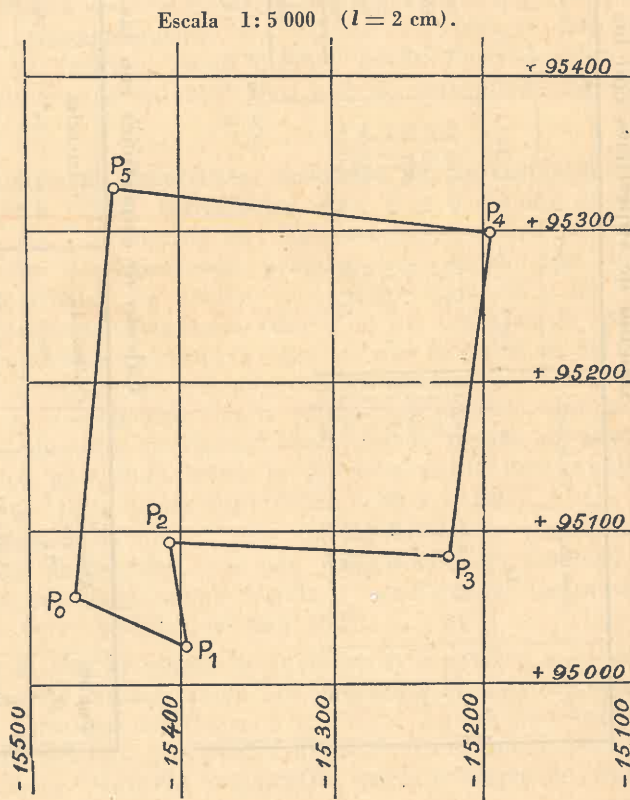


Fig. 9. Ilustrando el ejemplo de aplicación práctica (según Jordan: "Handbuch der Vermessungskunde", tomo II).

Cálculo de superficies con las fórmulas del trapecio.

| Puntos P_n | Abscisas x_n | Ordenadas y_n | Factores | | Productos $(x_n + 1 - x_n) \times (y_n + y_{n+1})$ | Factores | | Productos $(y_{n+1} - y_n) \times (x_n + x_{n+1})$ |
|-----------------|-------------------|--------------------|-----------------|-----------------|---|-----------------|-----------------|---|
| | | | $x_{n+1} - x_n$ | $y_n + y_{n+1}$ | | $y_{n+1} - y_n$ | $x_n + x_{n+1}$ | |
| P_0 | + 95 058,55 | - 15 467,37 | 32,38 | - 865,53 | + 28 025,8614 | + 69,21 | + 84,72 | + 5 863,4712 |
| P_1 | .. 26,17 | .. 398,16 | + 70,38 | - 806,79 | - 56 781,8802 | - 10,47 | + 122,72 | + 1 284,8784 |
| P_2 | .. 96,55 | .. 408,63 | - 14,41 | - 631,76 | + 9 103,6616 | + 185,50 | + 178,69 | + 33 146,9950 |
| P_3 | .. 82,14 | .. 223,13 | + 215,16 | - 415,27 | - 89 349,4932 | + 30,99 | + 379,44 | + 11 758,8456 |
| P_4 | .. 297,30 | .. 192,14 | + 32,31 | - 634,96 | + 20 515,5576 | - 250,68 | + 626,91 | - 157 153,7988 |
| P_5 | .. 329,61 | .. 442,82 | - 271,06 | - 910,19 | + 246 716,1014 | - 24,55 | + 388,16 | - 9 529,3280 |
| P_0 | .. 058,55 | .. 467,37 | | | + 283 845,6244 | | | + 167 968,0052 |
| | | | | | - 166 646,9310 | | | + 50 769,3118 |
| | | | | | $2 S = + 117 198,6934$ | | | $2 S = - 117 198,6934$ |
| | | | | | $S = + 58 599,3467$ | | | $S = - 58 599,3467$ |

$S = 5$ ha 85 a 99 m²

Form. Agr. 5

Cálculo de superficies con las fórmulas de Gauss.

| Puntos P_n | Abscisas x_n | Ordenadas y_n | Diferencias | | Productos $y_n(x_{n+1} - x_{n-1})$ | Diferencias | | Productos $x_n(y_{n+1} - y_{n-1})$ |
|-----------------|-------------------|--------------------|---------------------|-----------------|---------------------------------------|---------------------|------------------------|---------------------------------------|
| | | | $x_{n+1} - x_{n-1}$ | $x_n - x_{n-1}$ | | $y_{n+1} - y_{n-1}$ | $y_n - y_{n-1}$ | |
| P_0 | + 95 058,55 | - 15 467,37 | | | + 141 818,7528 | + 44,66 | + 2 614,8430 | |
| P_1 | .. 26,17 | .. 398,16 | - 303,44 | + 38,00 | - 15 130,0800 | + 58,74 | + 1 537,2258 | |
| P_2 | .. 96,55 | .. 408,63 | + 38,00 | + 55,97 | + 22 871,0211 | + 175,03 | + 16 899,1465 | |
| P_3 | .. 82,14 | .. 223,13 | + 55,97 | + 200,75 | - 44 793,3475 | + 216,49 | + 17 782,4886 | |
| P_4 | .. 297,30 | .. 192,14 | + 200,75 | + 247,47 | - 47 548,8858 | - 219,69 | + 65 313,8370 | |
| P_5 | .. 329,61 | .. 442,82 | + 247,47 | - 238,75 | + 105 723,2750 | - 275,23 | - 90 718,5603 | |
| | | | | | + 247 542,0278 | | - 156 032,3973 | |
| | | | | | - 130 333,3344 | | + 38 833,7039 | |
| | | | | | $2 S = + 117 198,6934$ | | $2 S = - 117 198,6934$ | |
| | | | | | $S = + 58 599,3467$ | | $S = - 58 599,3467$ | |

En este cálculo, al introducir los valores de las coordenadas x_n, y_n , se ha hecho caso omiso de los milares (empleando, por ejemplo, $y_0 = -467,37$, en lugar de $-15 467,37$). Tal modo de proceder no influye sobre el resultado final, pero permite ahorrar trabajo

$S = 5$ ha 85 a 99 m²

Form. Agr. 6

6. Comparación de las fórmulas del trapecio con las de Gauss.

Las fórmulas del trapecio son más plásticas que las fórmulas de Gauss, pudiendo el agrimensor, a primer golpe de vista, verificar groseramente los productos al sólo inspeccionar la figura; son más fáciles de recordar por desprenderse inmediatamente de la figura geométrica, mientras que las fórmulas de Gauss se obtienen de las del trapecio por medio de una deducción ulterior.

La fórmula del trapecio exige la formación de n diferencias y de n sumas, la de Gauss sólo n diferencias. Ahórrase, por lo tanto, en cada cálculo de superficie una columna vertical (ver ejemplo del número anterior).

7. Observaciones sobre la ejecución del cálculo

Regla sobre la formación de las Δx y Δy : Las diferencias de coordenadas Δx y Δy según (11) y (13), se calculan invariablemente del siguiente modo: **abscisa u ordenada del punto siguiente P_{n+1} menos la abscisa u ordenada del punto P_n que le antecede** (ver pág. 152).

Cuando las coordenadas de los puntos de un polígono se hallan referidas a un sistema con origen muy lejano (sistema de faja meridiana Gauss-Krüger, por ejemplo), puede deducirse de los valores de las abscisas y ordenadas cantidades redondas, lo que equivale a un desplazamiento paralelo de sus respectivos ejes. Hemos restado así de las coordenadas x e y del ejemplo calculado en el N° 5, respectivamente los valores $+95\,000$ y $-15\,000$, procedimiento éste que no influye, como dijimos anteriormente, sobre la magnitud de la superficie que se calcula, pero que es conveniente para la economía del trabajo.

Simplificación del cálculo de superficies; redondeo de los resultados en catastro urbano y catastro rural; formularios Agr. 5 y 6. Como generalmente no están seguros los centímetros en las coordenadas de los puntos, carecen muchas veces de significado práctico los centímetros cuadrados en los resultados finales. Se suelen redondear, por esto, las superficies resultantes al decímetro cuadrado (dm^2) en los trabajos de catastro urbano y al metro cuadrado o centiárea (ca) las que se calculan en trabajos de catastro rural. Pero no se redondearán los productos del cálculo de superficies, los que se consignarán en la planilla de cálculo con todas sus cifras; un redondeo de tales productos haría menos seguro el control, dejando ese redondeo una duda sobre la procedencia de una eventual discrepancia en las últimas cifras de las superficies $+2S$ y $-2S$.

Para la ejecución práctica de los cálculos de superficies se presta muy especialmente la **máquina de calcular** (ver pág. 181, Vol. 2 del Tomo II de este Compendio), la que nos proporciona rápida y exactamente los productos con 10 o más cifras (ver ejemplos de pág. 152).

Formularios Agr. 5 y 6. Con el objeto de facilitar al ingeniero y al estudiante sus tareas de gabinete, hemos creído útil confeccionar dos formularios (Form. Agr. 5 para las fórmulas del trapecio y Form. Agr. 6 para las fórmulas de Gauss) que nos parecen apropiados para el cálculo de superficies (ver págs. 20-23 de nuestra "Libreta topográfica para trabajos de campo y gabinete").

8. Precisión del cálculo de superficies (triángulo, rectángulo y trapecio).

Triángulo. Admitiendo, por ejemplo, una determinación de superficie según (1) por medio de la base a y la correspondiente altura h_a , y suponiendo las cantidades a y h_a afectadas de los errores Δa y Δh_a , respectivamente, tendremos para el correspondiente error ΔS de la superficie S del triángulo la siguiente expresión:

$$(19) \quad \Delta S = \frac{a}{2} \cdot \Delta h_a + \frac{h_a}{2} \cdot \Delta a$$

Es decir: **cada factor se multiplica por el error del otro factor.** Cuando es muy diferente la magnitud de los factores, el error del factor menor queda así multiplicado por el factor mayor; teniendo por ello dicho error una influencia mucho más grande que un error igual del factor mayor, que se multiplica solamente por el factor menor. De ahí la conocida **regla práctica: Se debe medir con especial cuidado el factor pequeño.**

Si entendemos por m_a y m_{h_a} errores medios, podemos calcular el error medio m_S de la superficie S por la fórmula:

$$(20) \quad m_S^2 = \frac{1}{4} (a^2 \cdot m_{h_a}^2 + h_a^2 \cdot m_a^2)$$

Por lo visto en pág. 44 de este tomo y pág. 58 de "C de C.", sabemos que el error medio accidental de una longitud es proporcional a la raíz cuadrada de esa longitud (2ª ley de errores).

Designado por α nuevamente el error medio accidental de la unidad de medida lineal, tenemos:

$$(21) \quad \begin{cases} m_{h_a} = \alpha \sqrt{h_a} \\ m_a = \alpha \sqrt{a} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores (21) en la (20), tendremos:

$$m_S^2 = \frac{1}{4} a \cdot h_a (a + h_a) \alpha^2$$

o sea:

$$(22) \quad \boxed{m_S^2 = \frac{1}{2} S (a + h_a) \alpha^2}$$

Es decir, cuando se busca la máxima precisión en la determinación de la superficie del triángulo, **debe preferirse aquel par de valores ($a, h_a; b, h_b; c, h_c$), cuya suma ($a + h_a, b + h_b, c + h_c$) dé el valor más pequeño.**

Rectángulo. Para los errores ΔS y m_S^2 de la superficie $S (= ab)$ del rectángulo, tendremos análogamente:

$$(23) \quad \Delta S = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$$

$$(24) \quad \boxed{m_S^2 = S (a + b) \alpha^2}$$

Admitiendo ahora una prevalencia del error sistemático β en la medición lineal, tendremos según la 1ª ley de errores (ver pág. 44) para el error ΔS de la superficie S :

$$\begin{aligned} \Delta S &= ab\beta + ba\beta \\ &= 2ab\beta \end{aligned}$$

Luego:

$$(25) \quad \boxed{\Delta S = 2S\beta}$$

Es decir: **Actuando en la medición un error sistemático, el error medio superficial ΔS es proporcional a la superficie S .**

Para el error medio de la superficie del trapecio de los lados paralelos a y b y altura h [$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$] se obtiene la siguiente expresión:

$$(26) \quad \boxed{m_S^2 = \frac{1}{2}S(a + b + h)\alpha^2}$$

§ 21.

Determinación mecánica de superficies con planímetro.

Planímetro polar.

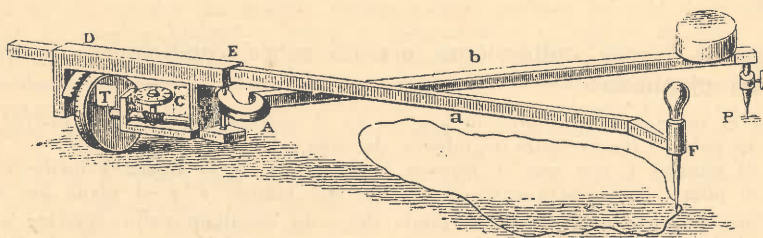


Fig. 1. *Planímetro polar primitivo de Amsler.*

1. Inventor del planímetro polar y principales propulsores de los progresos constructivos del mismo.

El planímetro polar fué inventado en 1854 por Jacobo *Amsler* (fig. 2), profesor de matemáticas en Schaffhausen (Suiza), y construído bajo su dirección en sus propios talleres de mecánica de precisión, de reconocida fama mundial ya entonces, la que se conserva hasta el día de hoy.

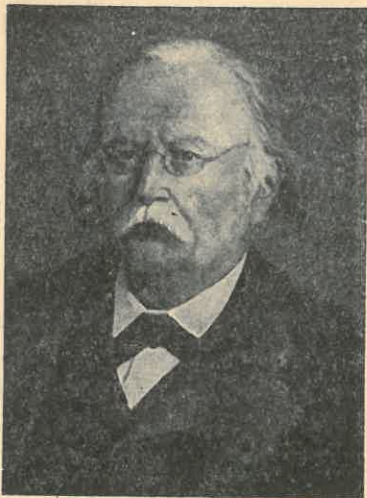


Fig. 2. Prof. J. Amsler (1823-1912).

Debido a la gran utilidad del aparato, su construcción experimentó desde la época de su invención numerosas modificaciones y perfeccionamientos introducidos por el mismo inventor y otros eminentes mecánicos, entre los cuales se destacan G. Coradi, (pág. 174) y A. Ott (Kempten, Alemania), los que supieron llevar la construcción del planímetro a un estado de perfeccionamiento antes desconocido.

2. Descripción del planímetro polar de Amsler.

El planímetro de Amsler que permite obtener la superficie de una figura plana con sólo recorrer su perímetro con una punta que forma parte de una pieza móvil del aparato, está representado en figura 1. Compónese el instrumento de las siguientes *partes principales*: Una punta de acero, P , llamada *polo*, que va fijada en algún punto del dibujo. Alrededor de P puede girar un brazo o palanca PA de longitud b , llamada *palanca-guía* o *brazo polar*.

En el extremo de otro brazo, a , se halla el punzón F , con el cual se puede recorrer el perímetro dibujado de una superficie plana a medir; este brazo se llama por eso *brazo trazador* o *brazo del punzón*. En el punto A está vinculado este brazo con el brazo polar por medio de una articulación. El brazo trazador FA es prolongado más allá de A . Esta prolongación lleva un dispositivo cuya parte principal es una rueda llamada *tambor*, T , que rueda sobre el papel y que gira alrededor de un eje paralelo a dicho brazo. Tiene el tambor uno de sus bordes realzando en forma de pestaña. Este borde está hecho de un material muy duro, acero o vidrio.

Las vueltas enteras del tambor van registradas por un *contador*, c , movido por el eje del tambor por medio de un engranaje a tornillo sinfín, de tal modo que a cada vuelta del tambor corresponde un décimo de revolución del contador c , pudiéndose, así, registrar sobre c 10 vueltas completas de la rueda. Está dividida la llanta de la rueda en 100 partes, de las cuales las decenas están numeradas. La fracción del décimo de una graduación del tambor puede apreciarse a ojo o con la ayuda de un nonio (cuyos 10 trazos corresponden a 9 del tambor), obteniéndose así la lectura al milésimo de una vuelta del tambor.

3. Algunas breves indicaciones previas sobre condiciones de uso y el manejo del planímetro.

Descansa el instrumento durante su uso en los 3 siguientes *puntos de apoyo*:

- 1º en el polo P fijado sobre el tablero de dibujo;
- 2º en el punzón F con que se recorre el contorno de la figura a medir;
- 3º en el punto de contacto entre la pestaña del tambor T y el plano del dibujo.

Para el uso del aparato se fijará la punta del polo en algún punto interior o exterior de la superficie a medir. Se lleva el punzón a un punto del contorno de la figura y se hace en el contador y en el tambor la lectura inicial; es decir, se anotará el número de revoluciones con décimos, centésimos y milésimos.

Preparado así el trabajo, se recorrerá con el punzón el perímetro de la figura hasta llegar nuevamente al punto de partida, poniendo en ello un cuidado especial de no separar la punta del punzón de la línea del contorno. Luego se leerá nuevamente el contador y el tambor. Finalmente se calcula la diferencia entre las lecturas final e inicial, diferencia que nos permitirá deducir el área de la figura recorrida como explicaremos más adelante.

Conviene siempre evitar en esta operación que el instrumento esté muy cerrado (estado en que los brazos a y b forman entre sí un ángulo muy agudo), o que esté muy abier-

to (con ángulo cerca de 180° entre dichos brazos), con el objeto de asegurar una buena estabilidad del aparato durante la medición. Se examinará por esto previamente si toda la figura puede recorrerse cómodamente sin llegar a una de tales posiciones desfavorables del instrumento. Si no fuera fácil evitar esas posiciones, se podrá descomponer la figura en varias partes, lo que generalmente se hace necesario cuando son muy grandes las superficies a medir.

4. Movimiento de traslación del tambor; tres casos fundamentales.

Con el objeto de conocer la relación que existe entre el camino recorrido y la magnitud de la rotación efectuada por el tambor, la que se expresa por el desarrollo l de su periferia, examinemos los 3 casos típicos representados en figura 3.

Primer caso: Si el tambor se mueve en la dirección de su eje (flecha 1), no efectúa rotación alguna, no rueda, resbala solamente de A a B ($l=0$).

Segundo caso: Cuando el tambor se mueve en dirección perpendicular a su eje (flecha 2), el desarrollo del tambor es igual a la longitud del camino recorrido, $l = AC$.

Tercer caso: Cuando el movimiento del tambor se realiza sobre una línea recta x , en la dirección indicada por la flecha 3, formando un ángulo α con la perpendicular al eje de rotación del mismo, podemos suponer que se haya recorrido, en lugar de la recta AD , una línea quebrada de trozos infinitesimales, alternativamente perpendiculares y paralelos a AB . Como la suma de los trozos paralelos es igual a AB y la de los perpendiculares igual a AC , el desarrollo del tambor resultará ser el mismo que en el caso 2°. En vista de que $AC = AD \cdot \cos \alpha = x \cdot \cos \alpha$, tendremos en este caso para el desarrollo l del tambor:

$$(1) \quad l = x \cdot \cos \alpha$$

Es decir: *El desarrollo l del tambor es igual al camino oblicuo x , que se recorre, multiplicado por el coseno del ángulo α que forma la dirección del camino con la perpendicular al eje de rotación del tambor.* Podemos decir también que: *el desarrollo l es la proyección del camino oblicuo x sobre la perpendicular al eje de la rueda.*

La ecuación (1) vale también cuando el tambor se mueve sobre un arco de circunferencia alrededor del polo P , lo que ocurre cuando con el punzón se recorre otro arco de circunferencia, de ángulo φ y radio f alrededor de P , por ejemplo F_2F_3 (fig. 4).

Llamaremos entonces también x al arco recorrido por el tambor, arco que empieza en T (fig. 4), y advertimos que el ángulo α que forma la dirección del camino (tangente al arco de radio $PT=f'$) con la perpendicular al eje de rotación del tambor, es también el ángulo que forma el eje de rotación con el radio f' .

Sea l , como antes, el desarrollo del tambor que se produce cuando el punzón se mueve de F_2 a F_3 .

5. Teoría del planímetro polar; casos particulares.

Quando el punzón recorre el arco de circunferencia F_2F_3 (fig. 4) con radio $f = PF_2$ y ángulo en el centro φ , el ángulo α queda sin variar, y es evidente que el punto de contacto de la pestaña del tambor T describirá también un arco de circunferencia de ángulo φ (no designado en la figura) con radio f' , cuya longitud x será:

$$(2) \quad x = f' \cdot \varphi$$

donde el ángulo φ está expresado en radianes.

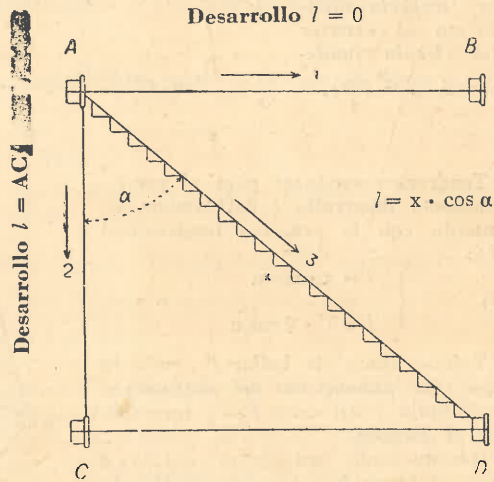


Fig. 3. Ilustrando 3 casos típicos de movimientos de traslación del tambor.

una posición tal que el radio f se pone perpendicular al brazo a . Esta posición es representada en la parte inferior de la figura 4, siendo para ella:

$$\begin{aligned} PF_0 &= C \\ PT_0 &\perp F_0T_0 \end{aligned}$$

El círculo que tiene por radio C se llama *círculo fundamental* del planímetro polar. Cuando el punzón recorre cualquier parte de su perímetro, el tambor no gira, sólo resbala. El ángulo α es entonces invariablemente igual a 90° , lo que, de acuerdo con la (3), tiene la consecuencia:

$$l = 0$$

La articulación A se mueve sobre otra circunferencia de radio b , la que se llama la *directriz* del planímetro polar.

Las cantidades.

$$\frac{1}{2} f^2 \varphi \text{ y } \frac{1}{2} C^2 \varphi$$

tienen cada una su significado geométrico: Son las áreas de sectores circulares de ángulo φ y radios f y C , respectivamente, cuya diferencia expresa el área de la superficie rayada $F_1 F_2 F_3 F_4 F_1$.

Resulta entonces que ambos miembros de la ecuación fundamental (9) expresan la superficie rayada de la figura 4, es decir:

$$(10) \quad S = al = \frac{1}{2} \varphi (f^2 - C^2)$$

Recorramos ahora con el punzón el perímetro $F_2 F_3 F_4 F_1 F_2$: Al recorrer al arco $F_2 F_3$ se produce, como hemos visto, el desarrollo l , el que, multiplicado por la longitud del brazo a , da la superficie S de la parte rayada. Al recorrer el segmento radial $F_3 F_4$ se produce un cierto desarrollo; pero el mismo desarrollo se produce con signo contrario cuando más tarde se recorra el segmento $F_1 F_2$, de modo que los desarrollos correspondientes a los segmentos $F_3 F_4$ (movimiento radial hacia adentro) y $F_1 F_2$ (movimiento radial hacia afuera) se anulan. Finalmente, el recorrido del arco $F_4 F_1$ del círculo fundamental produce el desarrollo nulo, de modo que el desarrollo total marcado por el contador y el tambor del planímetro al volver al punto F_2 , es igual a l , obtenido al recorrer el arco $F_2 F_3$.

Podemos entonces decir: *El área de la superficie S (trapezio circular limitado por los segmentos radiales $F_1 F_2$ y $F_3 F_4$ y los arcos $F_2 F_3$ y $F_4 F_1$) es igual al producto de la longitud del brazo a por el desarrollo l del tambor sobre el arco $F_2 F_3$.*

Definido así el significado de la ecuación (10) aplicada al caso particular de un trapezio circular, del cual el arco interior es el círculo fundamental, pasamos ahora a tratar otro caso particular.

Segundo caso particular. La ecuación (10) vale también para el caso de hallarse el trapezio circular situado en el interior del círculo fundamental (fig. 5). Por lo dicho anteriormente queda explicado para este caso todo lo concerniente a las rotaciones del tambor sobre los segmentos radiales $F_1 F_2$, $F_3 F_4$ y el arco del círculo fundamental $F_2 F_3$: Se anulan los desarrollos correspondientes a los segmentos radiales, siendo nulo el desarrollo sobre el círculo fundamental, de tal

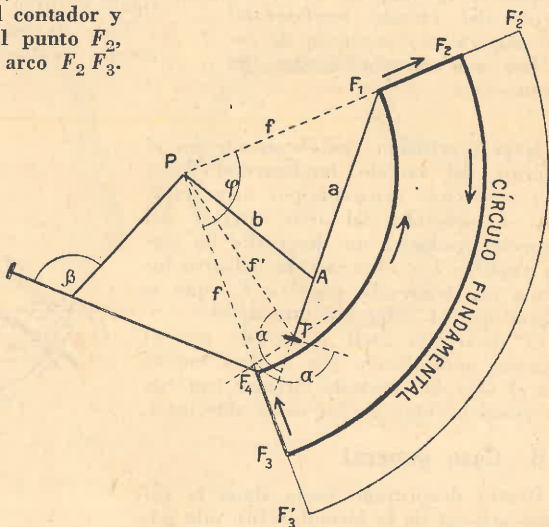


Fig. 5. Ilustrando la teoría del planímetro polar para otro caso particular (trapezio circular situado en el interior del círculo fundamental, $\alpha \geq 90^\circ$).

modo que después de recorrerse con el punzón el camino $F_1 F_2 F_3 F_4$, se tendrá en el contador y en el tambor la misma lectura que se tuvo al iniciarse el recorrido en el punto F_1 .

Examinaremos ahora como funciona el planímetro cuando se recorre con el punzón el arco $F_4 F_1$. Notamos que el ángulo α entre la dirección del camino (tangente al arco de radio f') y la perpendicular al eje de rotación del tambor es mayor que 90° y que, en consecuencia de esto, cambia en la ecuación (1) el signo de la rotación o desarrollo l . Es decir, al recorrer el punzón el arco $F_4 F_1$, el ángulo α será invariablemente mayor que 90° . Pero como el arco $F_4 F_1$ se recorre de derecha a izquierda (visto desde P), resulta que el contador y el tambor marcarán números crecientes en ese movimiento. Se obtiene entonces un desarrollo l que multiplicado por a dará el área del trapecio circular $F_1 F_2 F_3 F_4 F_1$.

Y si hubiéramos recorrido el perímetro $F_1 F_2 F_3 F_4 F_1$, obtendríamos finalmente un desarrollo compuesto de dos sumandos, l' y l , de los cuales l' corresponde a la superficie del trapecio circular $F_2 F_2' F_3 F_3 F_2$ y l , como dijimos, al área del trapecio circular $F_1 F_2 F_3 F_4 F_1$. El producto $(l + l') \times a$ expresa entonces el área del trapecio circular-suma de los dos trapecios circulares con arco $F_2 F_3$ común.

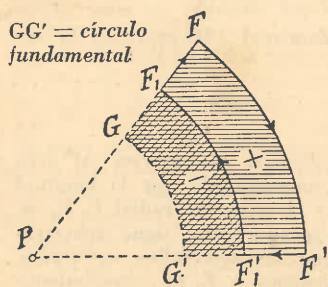


Fig. 6. Superficie del trapecio situado completamente en el exterior del círculo fundamental (de signo +) y separado de éste por otro trapecio circular (de signo -):

$$\alpha < 90^\circ$$

el trapecio circular completamente en el interior del círculo fundamental ($\alpha > 90^\circ$) y de éste separado por otro trapecio, el recorrido del arco exterior del trapecio producirá un desarrollo de signo negativo l , y el recorrido del arco interior un desarrollo positivo l' (que es mayor que el valor absoluto de l).

El desarrollo total registrado por el aparato, multiplicado por a , dará entonces el área del trapecio circular con signo positivo como en los casos anteriores.

6. Caso general.

Hemos demostrado hasta ahora la validez general de la fórmula (10) sólo para trapecios circulares en distintas situaciones; pero podemos darnos cuenta que ella es aplicable a figuras planas de forma cualquiera, es decir que tiene validez general.

En efecto, toda figura plana puede imaginarse descompuesta en un número infinito de trapecios circulares (fig. 7),

Caso de un trapecio circular situado en el exterior del círculo fundamental. Cuando todo el trapecio se halla situado en el exterior del círculo fundamental y separado de éste por otro trapecio circular (fig. 6), y haciendo recorrer el punzón el arco FF' , se producirá el desarrollo l que multiplicado por a expresa el área del trapecio $FF'GF$. Recorriendo el arco $F_1 F_1'$ (con $\alpha < 90^\circ$) se producirá un desarrollo l' negativo (cuyo valor absoluto es menor que l), el que multiplicado por a dará el área del trapecio circular $F_1 F_1' G' G F_1$. Resulta entonces que la suma algebraica de los desarrollos l y l' (que es la que registra el aparato), multiplicada por a , da la superficie del trapecio circular $FF'F_1 F_1 F$ con signo positivo.

Caso de un trapecio situado en el interior del círculo fundamental. En caso de hallarse situado

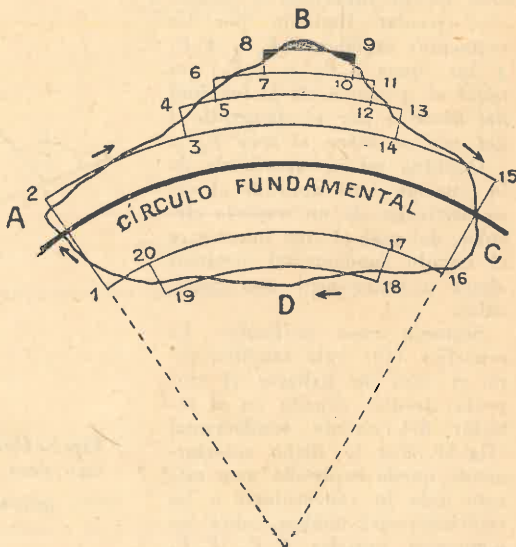


Fig. 7. Superficie de contorno curvilíneo sustituida por infinitos trapecios circulares.

limitados por arcos de circunferencias y segmentos radiales infinitamente pequeños.

El contorno curvilíneo de la figura $ABCDEA$ resulta así substituído por una *línea quebrada* (1-2-3-4... -20-1) que se compone de pequeños segmentos radiales (ejemplo 9-10), alternando con pequeños arcos de circunferencias (por ejemplo 10-11).

Si recorremos ahora con el punzón la línea quebrada, nos damos cuenta que los segmentos radiales en total dan un desarrollo nulo, puesto que para cada segmento que se recorra hacia afuera existirá otro que con igual posición del planímetro se recorre hacia adentro.

En cuanto a los arcos de circunferencias, que son partes de la línea quebrada substitutiva del contorno curvilíneo, sabemos que cada uno de esos arcos (por ejemplo el 10-11), al ser recorrido por el punzón, da un desarrollo que corresponde a un trapecio circular (no indicado en la figura) situado entre dicho arco y el círculo fundamental. La suma algebraica de los trapecios correspondientes a todos los arcos que se recorren da la superficie total de la figura propuesta.

El recorrido del *contorno curvilíneo* $ABCDA$ da un desarrollo que difiere muy poco del desarrollo producido por el recorrido de la línea quebrada, pudiendo hacerse la diferencia tan pequeña como se quiera con tomarse los segmentos radiales y arcos alternados suficientemente pequeños.

Por consiguiente, deducimos que *la fórmula (10) es válida para figuras de contorno cualquiera.*

Las consideraciones anteriores suponían siempre que el polo del planímetro se hallaba fuera del contorno recorrido por el punzón, posición que llamamos "*polo externo*".

7. Polo interno.

Si recorremos con el punzón F un contorno que encierre el polo, teniendo así la posición llamada "*polo interno*", el producto al que se obtiene da el área situada entre ese contorno y el círculo fundamental (figs. 8 y 9).

Medición con polo interno.

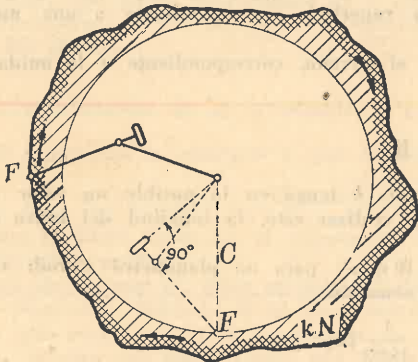


Fig. 8. (l es positivo).

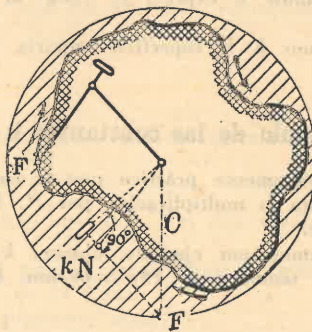


Fig. 9. (l es negativo).

Según A. Ott: "*Le planimètre compensateur*".

$$S = al + C^2\pi = k \cdot N + C^2\pi$$

En la figura 8 suponemos que el contorno que se recorre encierra totalmente el círculo fundamental. Por consiguiente, para obtener el área dentro del contorno, es necesario sumar al producto, al , la superficie $C^2\pi$ del círculo fundamental, es decir:

$$(11) \quad S = al + C^2\pi$$

Esta fórmula vale también cuando el contorno de la figura a medir se halla totalmente en el interior del círculo fundamental (fig. 9), porque en este caso al tiene un valor negativo que, sumado algebraicamente a la superficie del círculo fundamental deja como resultado el área de la figura.

Fácil es darse cuenta que la fórmula (11) también vale para el caso de que parte del contorno de la figura a medir se halla fuera y parte dentro del círculo fundamental, siempre que el polo esté situado dentro de la misma.

8. Constantes N , k y K .

En lugar del arco l del tambor conviene introducir el número N que da directamente la lectura del tambor, o sea las vueltas del mismo en unidades de nonio expresadas como tales.

Siendo r' el radio del tambor, tendremos para un giro completo un desarrollo:

$$\text{giro completo} = 2\pi r'$$

Luego, para N giros:

$$l = 2\pi r' \cdot N$$

con lo que las fórmulas (10) y (11) se transforman en estas otras:

$$(12) \quad S = 2\pi ar' \cdot N \quad (\text{polo externo})$$

$$(13) \quad S = 2\pi ar' \cdot N + C^2\pi \quad (\text{polo interno})$$

Introduciendo la constante k :

$$k = \frac{1}{1000} 2\pi ar'$$

obtendremos:

$$(14) \quad S = k \cdot N \quad (\text{polo externo})$$

$$(15) \quad S = k \cdot N + C^2\pi \quad (\text{polo interno})$$

La constante k expresa el valor de la superficie correspondiente a una unidad de nonio.

Llamaremos K la superficie unitaria, en el terreno, correspondiente a la unidad k , en el plano.

9. Cálculo de las constantes k y K .

Es evidentemente práctico que la constante k tenga en lo posible un valor redondo, cómodo para la multiplicación por N . Para realizar esto, la longitud del brazo a puede modificarse.

Si queremos, por ejemplo, obtener $k = 10 \text{ mm}^2$, para un planímetro *Coradi* cuya periferia de tambor sea $2\pi r' = 60 \text{ mm}$, la ecuación:

$$k = \frac{1}{1000} 2\pi ar'$$

nos da:

$$a = \frac{1000 \cdot k}{2\pi r'} \\ = \frac{10\,000 \text{ mm}^2}{60 \text{ mm}} = 166,67 \text{ mm}$$

o sea 333,3 medios milímetros.

Midiendo ahora en tales condiciones del planímetro superficies en un plano dibujado a escala 1/1 000, corresponderá a cada unidad del nonio una superficie K de $1\,000 \times 1\,000 \times 10 \text{ mm}^2 = 10 \text{ m}^2$.

O sea, de un modo general, siendo $1/E$ la escala del dibujo:

$$(16) \quad K = E^2 \cdot k$$

En planos a escalas 1/200, 1/500, 1/2 000, 1/2 500, 1/5 000 y 1/10 000, el correspondiente valor K sería, respectivamente: $0,4 \text{ m}^2$; $2,5 \text{ m}^2$; 40 m^2 ; $62,5 \text{ m}^2$; 250 m^2 y $1\,000 \text{ m}^2$.

Prefiérese en la práctica para mayor comodidad del cálculo, cambiar la longitud de a , siempre con el objeto de obtener para K cantidades redondas. Si se prefiere, por ejemplo para planos a escala 1/500, tener para $K = 2 \text{ m}^2$ (en lugar de $2,5 \text{ m}^2$), o sea:

$$k = \frac{1}{E^2} \times K = \frac{1}{250\,000} \times 2 \text{ m}^2 = 8 \text{ mm}^2 \quad [\text{Ver columna (4) de la tabla, pág. 164.}]$$

tendremos para el mismo planímetro mencionado el correspondiente largo del brazo a :

$$a = \frac{1000 \times 8 \text{ mm}^2}{60 \text{ mm}} = 133,33 \text{ mm}$$

o sea 266,7 medios milímetros (ver tabla del N° 11).

Esta determinación del valor de a basado en un dato indicado por el fabricante ($2 \pi r' = 60 \text{ mm}$), o en una medida tomada directamente en el aparato, es insegura. Para comprobar esa longitud a y, en caso necesario, corregirla, se medirá un cuadrado exactamente dibujado de tamaño conocido, por ejemplo 1 dm^2 , y se compara la superficie dada por el planímetro con la verdadera que es conocida.

Suponemos que en 3 mediciones de un cuadrado de 1 dm de lado se hayan obtenido los valores consignados en la adjunta planilla.

| Lecturas | N |
|----------------|-----|
| 2456 | 997 |
| 3453 | 996 |
| 4449 | 999 |
| 5448 | 999 |
| Media = 997,33 | |

Resultando para la media 997, en lugar de 1000, será necesario aumentar a N , lo que se consigue con hacer el brazo a un poco más corto.

Suponemos que el brazo en este examen haya tenido un largo de 168 mm (ó 336 medios milímetros), y siendo, en diferentes condiciones del instrumento, *las longitudes del brazo a inversamente proporcionales a los respectivos números N*, resulta que es necesario acortar el brazo en $3/1000$ de su longitud o sea en

$3/1000 \times 168 \text{ mm} = 0,5 \text{ mm}$. Una nueva prueba que se efectúe con el largo a así corregido demostrará una mejor concordancia de N con el valor 1000, estando entonces el aparato en condiciones de dar directamente superficies que no necesitan corrección por la condición del aparato.

10. Determinación de la constante $C^2\pi$.

Se puede determinar la constante C por medio del cálculo con la fórmula:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ar$$

Pero como es difícil medir en el aparato las dimensiones a , b y r , esta determinación de C resulta poco precisa.

Otro modo de obtener un valor aproximado de C consiste en producir la posición especial del planímetro indicada en la parte inferior de la figura 4.

Un valor más exacto para $C^2\pi$ se obtiene de la siguiente manera:

Midiendo primero con polo externo una figura de contralor (de superficie exactamente conocida), se ajustará el largo del brazo a . Luego se medirá con polo interno otra figura de contralor (o también la misma) de área conocida S .

Luego, tendremos para la constante $C^2\pi$ buscada:

$$C^2\pi + k \cdot N = S,$$

de donde:

$$(17) \quad C^2\pi = S - k \cdot N$$

Cuando se trate de medir superficies grandes, se puede también dividir las, como dijimos anteriormente, en partes y medir éstas separadamente con polo externo.

11. La tabla en el estuche.

A cada planímetro polar va agregada una pequeña tabla análoga a la que se consigna a continuación y que pertenece al planímetro *Coradi* N° 31255.

Las columnas (3) y (4) contienen los valores K y k para las superficies unitarias correspondientes a la unidad de nonio, es decir los coeficientes por los cuales deben multiplicarse los valores N para obtener, respectivamente, las superficies del terreno o del plano buscadas.

La columna (5) contiene los valores de las constantes $C^2\pi$ (en mm^2) para el caso de recorrerse el contorno de la figura con polo interno.

| Escalas 1 : E | Posición del brazo a | Superficies unitarias en el terreno K | en el plano k | Constantes $C^2\pi$ |
|------------------|------------------------------|---|------------------|------------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 : 1000 | 332,8 $\frac{1}{2}\text{mm}$ | 10 m^2 | 10 mm^2 | 23 466 |
| 1 : 500 | 266,3 | 2 | 8 | 24 630 |
| 1 : 250 | 266,3 | 0,5 | 8 | 24 630 |
| 1 : 2500 | 213,1 | 40 | 6,4 | — |
| 1 : 1250 | 213,1 | 10 | 6,4 | — |
| 1 : 4000 | 208,1 | 100 | 6,25 | — |
| 1 : 2000 | 166,5 | 20 | 5 | — |
| 1 : 3000 | 166,5 | 45 | 5 | — |
| 1 : 5000 | 133,2 | 100 | 4 | — |
| 1 : 10000 | 133,2 | 400 | 4 | — |

12. Medición relativa con polo externo.

El mejor método para determinar el área de una figura es el que se basa en la comparación de la superficie S a medir con la de otra figura de área conocida S_0 (fig. 10).

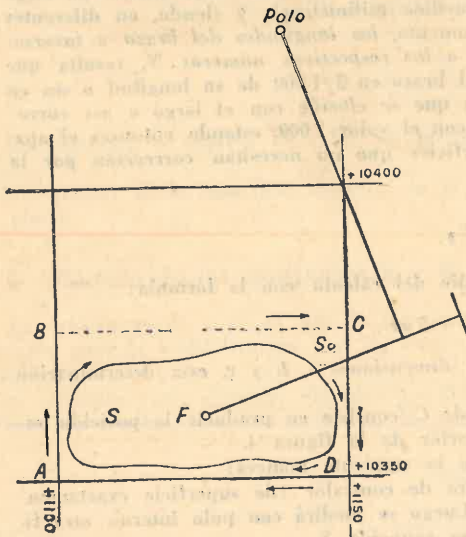


Fig. 10. Se ilustra el principio de la medición relativa.

Esta superficie de comparación la puede constituir, en planos catastrales, la *mallá del reticulado* o parte de la misma (figs. 10 y 12), y, en planos técnicos, que generalmente carecen de reticulado, un *círculo de comparación* (fig. 14) de área conocida.

Consiste el método en las siguientes operaciones:

Se colocará el punzón en el medio de la figura de comparación S_0 y el brazo polar aproximadamente perpendicular al brazo del punzón. Afirmada la punta del polo, se trasladará el punzón al contorno de la figura S_0 , en la que se marcará el punto de salida del recorrido. Recórrase ahora el perímetro de S_0 por lo menos dos veces. La media de los resultados de estas mediciones nos dará el número N_0 (número de unidades del nonio). En estas mismas condiciones del instrumento se recorrerá en seguida el contorno de la figura S a medir, obteniendo así el número N .

Tendremos entonces:

$$S = k \cdot N$$

$$S_0 = k \cdot N_0$$

Luego, dividiendo la primera por la segunda:

$$(18) \quad S = S_0 \cdot \frac{N}{N_0}$$

Es decir, no es necesario conocer el factor k cuando se emplea este método de determinación relativa.

13. Aplicación del planímetro para la determinación relativa de superficies en planos técnicos y catastrales, sentido del recorrido.

Es de observar que en los planímetros de *Coradi* el mecanismo registrador (ver fig. 11) está regulado de tal modo que la graduación aumenta cuando se opera con el polo externo y se recorre el contorno en el sentido de la marcha de las agujas del reloj (↻)

Ejemplo práctico 1. Se trató de determinar en un plano catastral a escala 1:500 (fig. 12) la superficie de la "Habitación principal", cuyo contorno se halla señalado por pequeñas flechas, utilizando como superficie de comparación la mitad de una malla del reticulado ($S_0 = 1250 \text{ m}^2$).

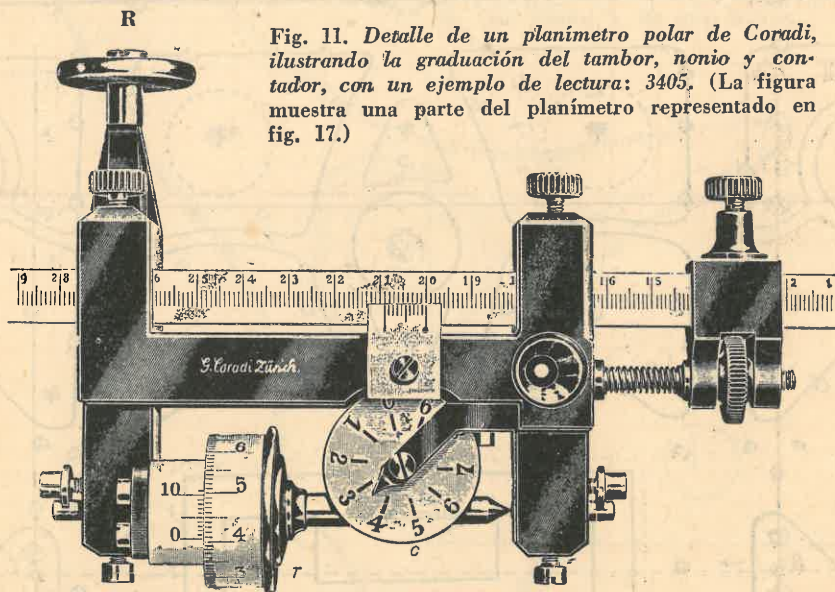


Fig. 11. Detalle de un planímetro polar de *Coradi*, ilustrando la graduación del tambor, nonio y contador, con un ejemplo de lectura: 3405. (La figura muestra una parte del planímetro representado en fig. 17.)

De acuerdo a la instrucción contenida en el número anterior, situóse primero el planímetro de tal modo que el punzón estaba más o menos en el centro de la figura a medir, formando los brazos *a* y *b* aproximadamente un ángulo de 90°.

Se recorrió con el punzón la figura de comparación *ABCD* ($= S_0$), luego el contorno de la superficie *S* (planta de la habitación principal), cada una dos veces, una vez en el sentido ↻ y una segunda vez en el contrario.

Fueron obtenidos los resultados consignados en la siguiente planilla:

| S_0 | | | S | | |
|-----------------------------|----------|-------|----------------|--------------|-----|
| Dirección | Lecturas | N_0 | Dirección | Lecturas | N |
| ↻ | 6 641 | 635 | ↻ | 1710 2160 | 450 |
| ↺ | 641 5 | 636 | ↺ | 2159 1711 | 448 |
| Promedio = 635 ₅ | | | Promedio = 449 | | |

Tenemos entonces para la superficie S :

$$S = S_0 \frac{N}{N_0} 1250 \cdot \frac{419}{635_5} = 883 \text{ m}^2$$

Es decir, superficie buscada $S = 883 \text{ m}^2$.

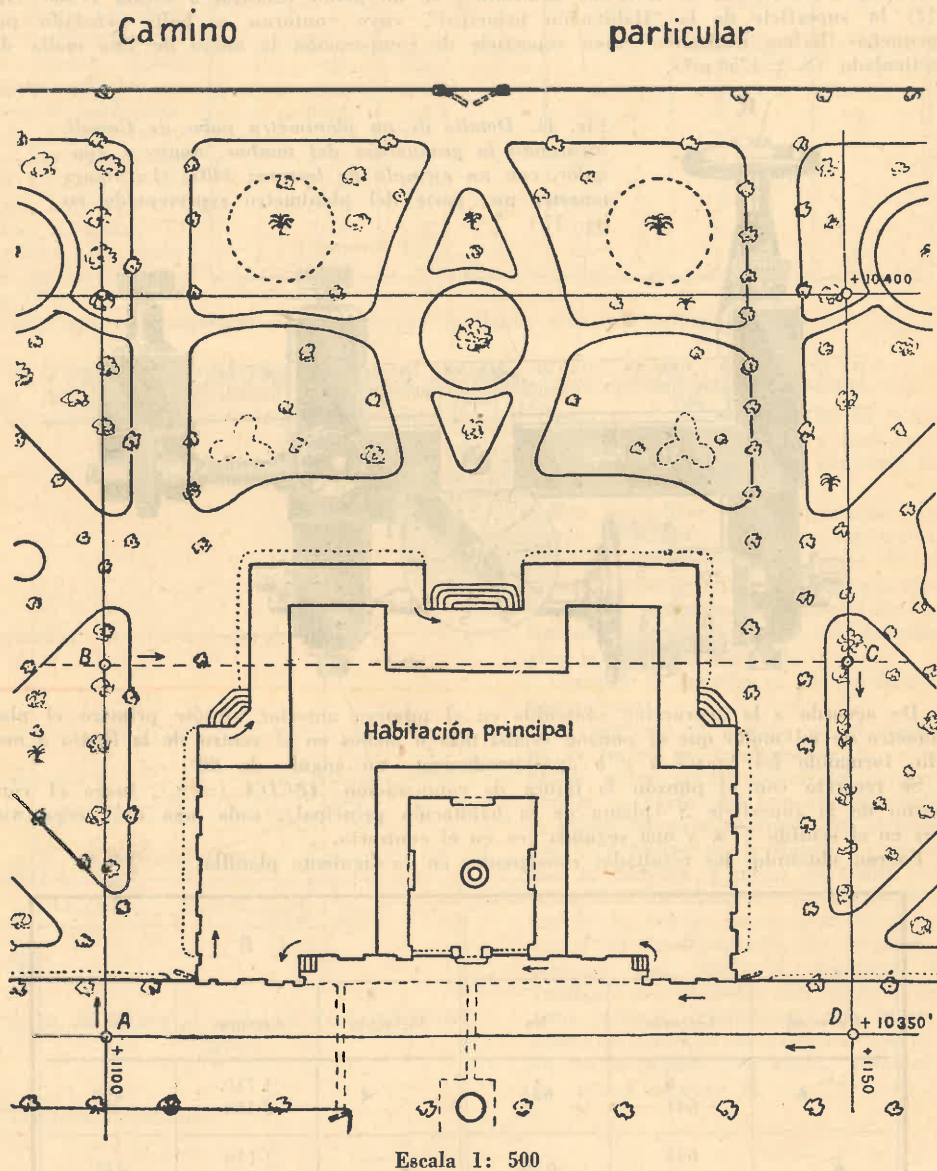
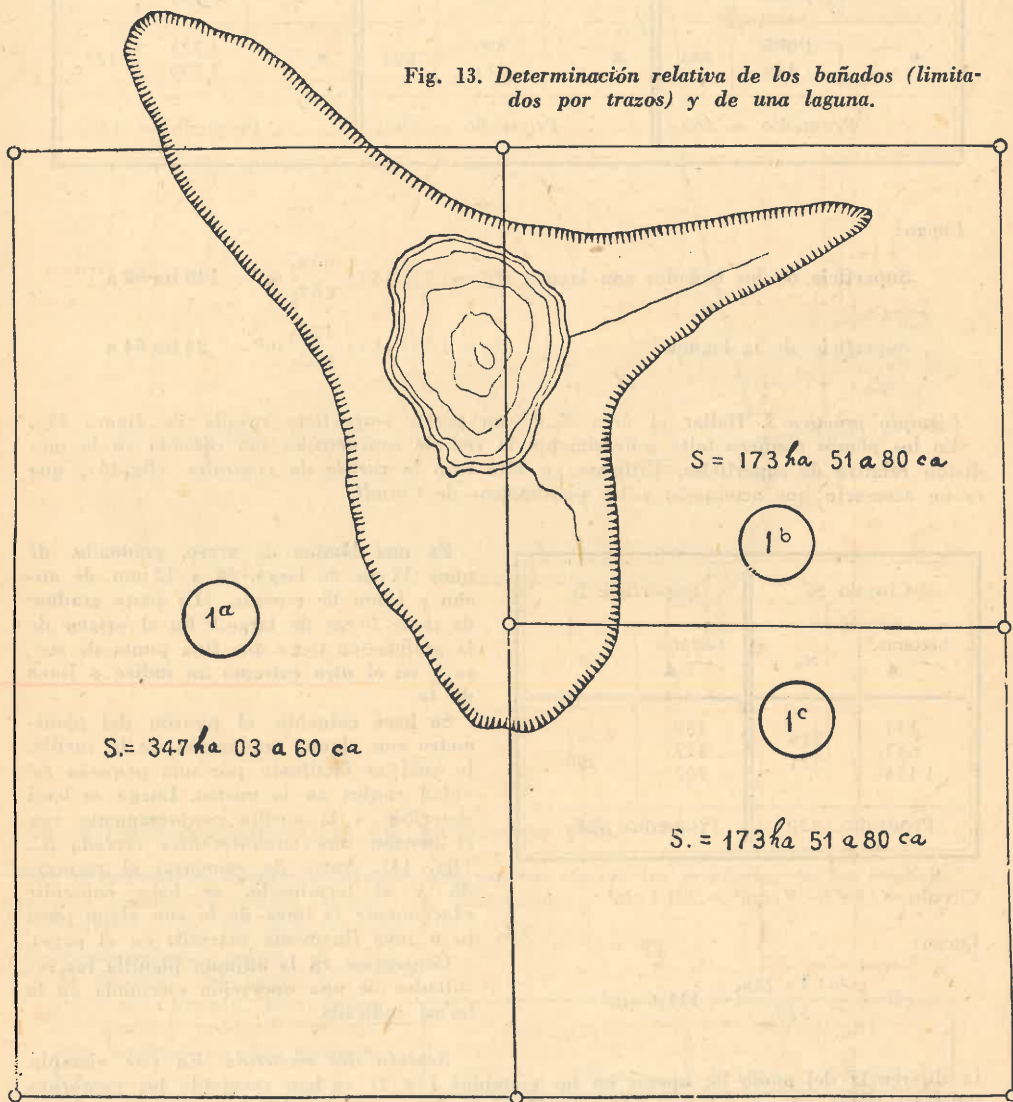


Fig. 12. Medición relativa de un plano catastral provisto de reticulado (ejemplo práctico 1).

Ejemplo práctico 2. Determinar la superficie de los bañados y lagunas que cubren partes de los lotes 1^a , 1^b y 1^c (fig. 13).

Se supone un plano exactamente dibujado en base a las coordenadas planas de los puntos esquineros de los lotes. Puede utilizarse en este caso como superficie de comparación, en lugar de una malla, la superficie de uno de los lotes, por ejemplo la superficie $S_1 = 173 \text{ ha } 51 \text{ a } 80 \text{ ca}$ del lote 1^b .

Fig. 13. Determinación relativa de los bañados (limitados por trazos) y de una laguna.



1: 20 000

Los resultados de las correspondientes mediciones se hallan consignados en la siguiente planilla:

| S ₀ | | | S ₁ (bañados con laguna) | | | S ₂ (laguna) | | |
|-----------------------------|--------------|-----|-------------------------------------|------------|----------------|-----------------------------|----------------|----------------|
| Dirección | Lecturas | No | Dirección | Lecturas | N ₁ | Dirección | Lecturas | N ₂ |
| ↘ | 141 1 005 | 864 | ↘ | 110 809 | 699 | ↘ | 1 598 1 721 | 123 |
| ↙ | 1 005 144 | 861 | ↙ | 809 111 | 698 | ↙ | 1 721 1 599 | 122 |
| Promedio = 862 ₅ | | | Promedio = 698 ₅ | | | Promedio = 122 ₅ | | |

Luego:

Superficie de los bañados con laguna $S_1 = 1\,735\,180 \cdot \frac{698_5}{862_5} \text{ m}^2 = 140 \text{ ha } 52 \text{ a}$

Superficie de la laguna $S_2 = 1\,735\,180 \cdot \frac{122_5}{862_5} \text{ m}^2 = 24 \text{ ha } 64 \text{ a}$

Ejemplo práctico 3. Hallar el área S de un perfil (superficie rayada de figura 14). En los planos técnicos falta generalmente la red de coordenadas tan cómoda en la medición relativa de superficies. Utilízase en este caso la *varilla de contralor* (fig. 14), que es un accesorio que acompaña a los planímetros de Coradi.

| Círculo S ₀ | | Superficie S | |
|------------------------|-----|----------------------------|-----|
| Lecturas | No | Lecturas | N |
| ↘ | | ↘ | |
| 134 | 519 | 130 | 287 |
| 653 | 521 | 417 | 290 |
| 1 174 | | 707 | |
| Promedio: 520 | | Promedio: 288 ₅ | |

Círculo = $(8 \cdot 8 \cdot \pi) \text{ cm}^2 = 201,1 \text{ cm}^2$

Luego:

$S = \frac{201,1 \cdot 288_5}{520} = 111,6 \text{ cm}^2$

Es una lámina de acero, graduada, de unos 12 cm de largo, 10 a 12 mm de ancho y 1 mm de espesor. (La parte graduada tiene 10 cm de largo.) En el origen de la graduación tiene una fina punta de acero y en el otro extremo un índice o línea de fe.

Se hace coincidir el punzón del planímetro con alguna graduación de la varilla, lo cual es facilitado por una pequeña cavidad cónica en la misma. Luego se hará describir a la varilla conjuntamente con el punzón una circunferencia cerrada R₀ (fig. 14). Antes de comenzar el recorrido y al terminarlo, se hace coincidir exactamente la línea de fe con algún punto o raya finamente marcada en el papel.

Consígnase en la adjunta planilla los resultados de una operación ejecutada en la forma indicada.

Sentido del recorrido. En este ejemplo (a diferencia del modo de operar en los ejemplos 1 y 2) se han recorrido los contornos repetidas veces en un solo sentido, obteniéndose para cada superficie medida tres lecturas, cuyas diferencias dan los resultados buscados. Este procedimiento proporciona una mayor seguridad contra errores de lectura que el recorrido de ida y vuelta, que se empleó (en los ejemplos 1 y 2) para contralor del *buen funcionamiento general* del instrumento (de la articulación A, del buen contacto del tambor, su giro fácil pero sin juego perjudicial), todo lo cual se comprueba con recorrer en ida y vuelta una figura de contralor: Si todo se halla en perfectas condiciones, se tendrá, al terminar el recorrido, la misma lectura que al iniciarlo (ver planillas correspondientes a los ejemplos 1 y 2).

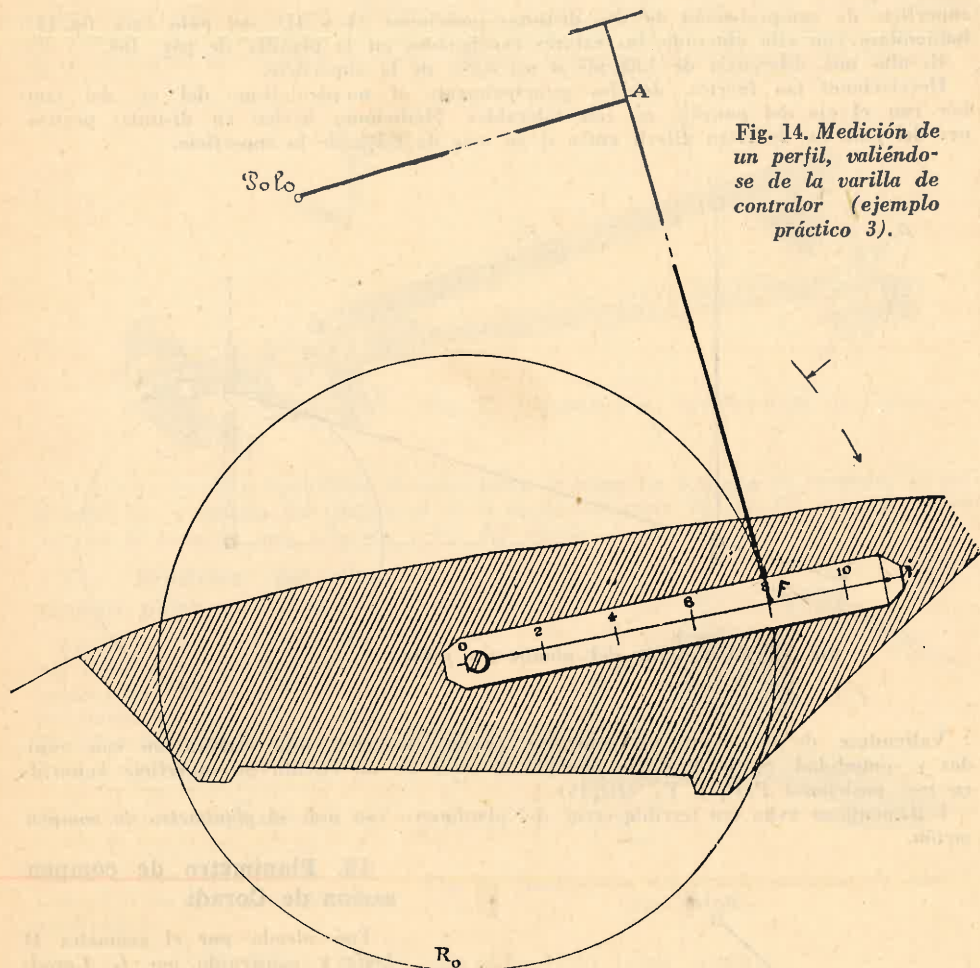


Fig. 14. Medición de un perfil, valiéndose de la varilla de contralor (ejemplo práctico 3).

14. Errores instrumentales del planímetro polar.

Son numerosas las fuentes de errores que pueden afectar los resultados de las mediciones con planímetro polar, siendo las principales:

- 1º Inclinación del eje de los brazos *a* y *b* (fig.1).
- 2º No-parallelismo entre el eje de rotación del tambor y el brazo del punzón. Este defecto puede producir errores muy notables en las mediciones.

15. Verificación y corrección del planímetro polar.

Con el objeto de examinar si un planímetro tiene error de no-parallelismo del eje del tambor con el brazo *a*, hemos medido una misma

| POSICIÓN I | | POSICIÓN II | |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| Lecturas | Diferencias | Lecturas | Diferencias |
| 6970 | 296,8 cm ² | 1620 | 298,3 cm ² |
| 9938 | 296,2 > | 4603 | 298,5 > |
| 2900 | 297,3 > | 7588 | 298,8 > |
| 5873 | 296,8 > | 0576 | 298,8 > |
| 8841 | | 3564 | |
| Media = 296,775 cm ² | | Media = 298,6 cm ² | |

superficie de comprobación de dos distintas posiciones (I y II) del polo (ver fig. 15), habiéndose con ello obtenido los valores consignados en la planilla de pág. 169.

Resulta una diferencia de $1,82 \text{ cm}^2$ o sea $0,6\%$ de la superficie.

Desviaciones tan fuertes, debidas principalmente al no-parallelismo del eje del tambor con el eje del punzón, no son tolerables. Mediciones hechas en distintas posiciones del polo no deberían diferir entre sí en más de $0,5\%$ de la superficie.

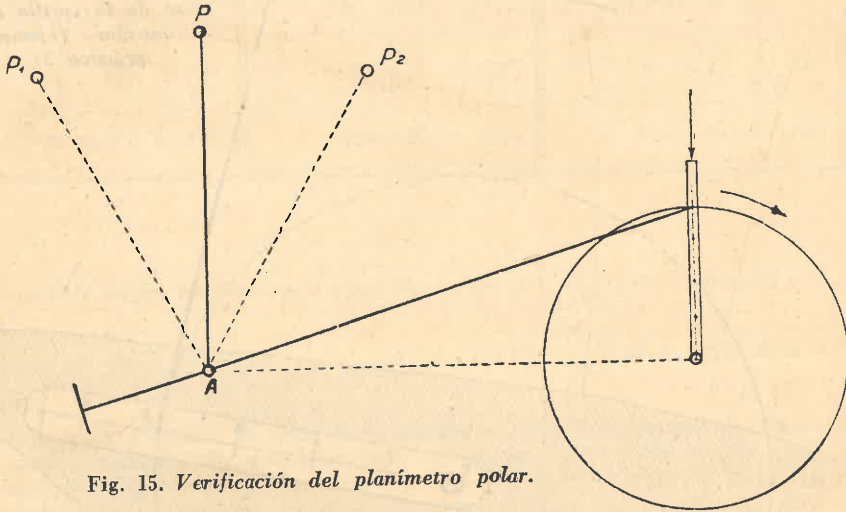


Fig. 15. Verificación del planímetro polar.

Valiéndose de la varilla de contralor, puede efectuarse esta verificación con rapidez y comodidad. Se medirá por ejemplo el área de un círculo de superficie conocida en tres posiciones P, P_1 y P_2 (fig. 15).

Felizmente se evita tan terrible error del planímetro con usar el *planímetro de compensación*.

16. Planímetro de compensación de Coradi.

Fué ideado por el geómetra O. Lang y construído por G. Coradi. En el uso de este planímetro se elimina la influencia del no-parallelismo del eje del tambor con respecto al brazo del punzón por la posibilidad de llevar el brazo del punzón a una segunda posición II (fig. 16), simétrica de la I. En la posición I el polo queda a la derecha de la dirección "punzón-rueda" y en la posición II a la izquierda de la misma. Si se recorre el contorno de la figura en las dos posiciones del polo, una vez con polo a la derecha y otra vez con polo a la izquierda y ambas veces en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, y si se promedian los resultados, se obtendrá en la media un valor libre del error causado por el no-parallelismo entre el eje del tambor y el brazo a .

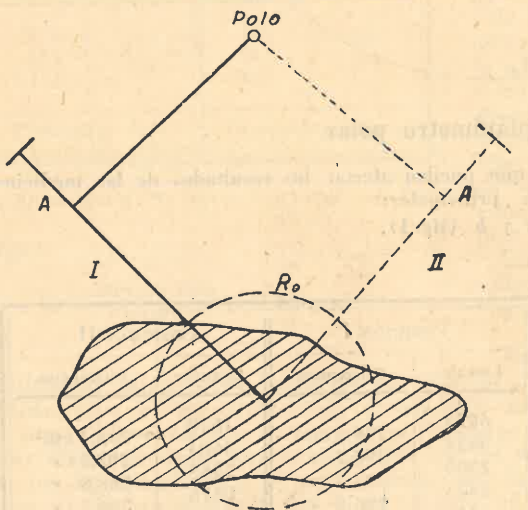


Fig. 16. Posiciones I y II del planímetro de compensación.

La articulación *A*, en este planímetro no es una simple punta como en el primitivo de Amsler, sino una esfera: Un gorrón de acero (ver fig.17), en el extremo del brazo *b*, se interna en una cavidad de forma esférica, que existe en el extremo del brazo *a*.

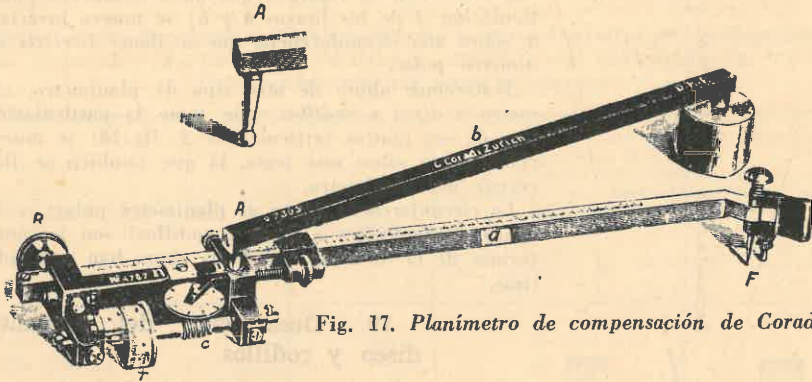


Fig. 17. Planímetro de compensación de Coradi.

El planímetro de compensación descansa sobre el plano en 4 puntos de contacto: el polo, el borde de la pestaña del tambor, el de la rueda-contrapeso *R* (fig. 17) y en el extremo inferior de la pieza guía colocada cerca del punzón *F* (fig.18).

17. Precisión del planímetro polar, polo externo.

Admitimos según Hammer como error medio m_S de una determinación de superficie con planímetro, comprendida entre 50 cm^2 y 300 cm^2 de medida natural, el siguiente valor empírico:

$$(19) \quad m_S = 0,02 \sqrt{S} \text{ cm}^2$$

donde *S* está expresada en cm^2 . Con $S = 100 \text{ cm}^2$, por ejemplo, tendremos:

$$m_S = 0,02 \sqrt{100} = 0,2 \text{ cm}^2 = 1/500 \text{ (error relativo)}$$

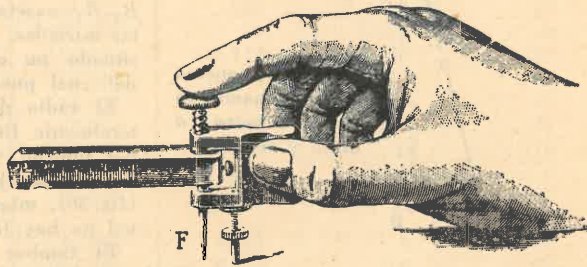


Fig. 18. Conducción del punzón provisto de maniguito y guía.

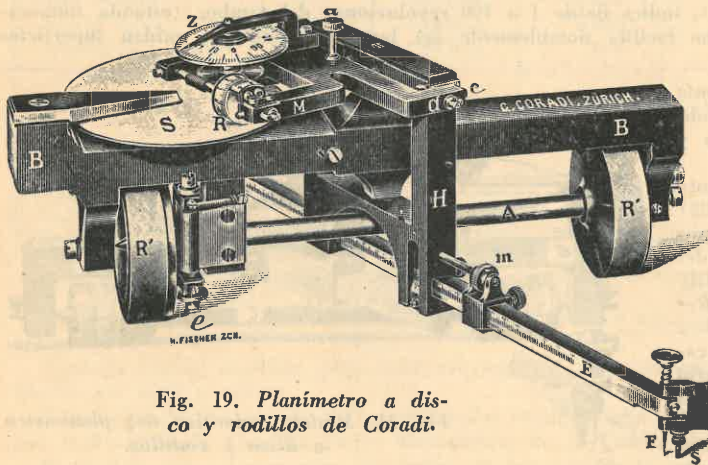


Fig. 19. Planímetro a disco y rodillos de Coradi.

Este valor es susceptible de fuertes variaciones dependientes principalmente de la forma de la figura que se mide —lonjas largas y angostas son desfavorables para la precisión—, de la naturaleza de la superficie del papel (lisa o rugosa, limpia o no) y de pequeños errores inherentes al instrumento.

Para el caso "polo interno" no es posible indicar una fórmula análoga a la (19).

18. Directriz del planímetro.

Hemos visto en figura 4 que un determinado punto (articulación A de los brazos a y b) se mueve invariablemente sobre una circunferencia, que se llama *directriz del planímetro polar*.

Trataremos ahora de otro tipo de planímetro, el *planímetro a disco y rodillos*, que tiene la particularidad que uno de sus puntos (articulación A , fig. 20) se mueve invariablemente sobre una recta, la que también se llama *directriz del planímetro*.

La *circunferencia* (para el planímetro polar) y la *recta* (para el planímetro a disco y rodillos) son las únicas dos formas de la directriz que hasta ahora han resultado prácticas.

19. Descripción del planímetro a disco y rodillos.

La parte principal del planímetro a disco y rodillos la constituye un bastidor BB (fig. 21), que sirve de soporte para los demás elementos del planímetro. Debajo del bastidor está montado el eje E que vincula los dos rodillos R_1, R_1 exactamente iguales, provistos de llantas estriadas. En el centro del bastidor se halla situado un eje vertical A (fig. 20), alrededor del cual puede girar el brazo del punzón F .

El radio de acción del instrumento está lateralmente limitado por la longitud del brazo del punzón y un cierto ángulo máximo que dicho brazo puede formar con la directriz DD (fig. 20), mientras que en el sentido longitudinal no hay límite de acción.

El tambor rueda sobre un disco, sobre el cual descansa por su propio peso, hallándose así evitada la influencia que la naturaleza del papel en el uso de otros planímetros ejerce sobre el movimiento del tambor. En el planímetro a disco y rodillos el tambor gira tan sólo por su contacto con el disco y en virtud del movimiento rotatorio que éste recibe.

El valor de la unidad del nonio puede hacerse muy pequeño, siendo por esto posible medir con este planímetro, con buena precisión, superficies de muy reducidas dimensiones.

El contador c (fig. 21), indica desde 1 a 100 revoluciones del tambor (estando numeradas las decenas), lo que facilita notablemente las lecturas cuando se midan superficies muy grandes.

La figura 19 representa un modelo perfeccionado del planímetro a disco y rodillos.

Con este instrumento (modelo 32a y N° 4722) se midió en el año 1934 por la División Geodesia del Instituto Geográfico Militar la superficie de la República Argentina $S = 2\,785\,648\text{ km}^2$, y la de cada provincia y territorio nacional, en base a la carta militar a escala 1/500 000 del citado instituto, con los resultados que se con-

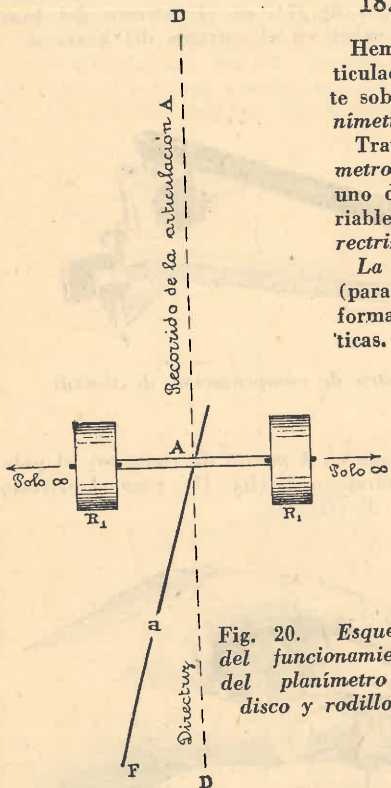


Fig. 20. Esquema del funcionamiento del planímetro a disco y rodillos.

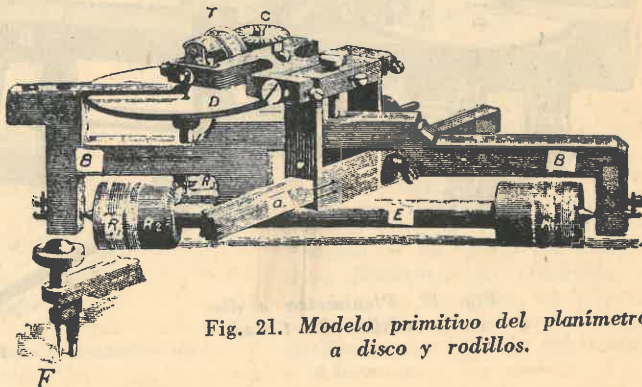


Fig. 21. Modelo primitivo del planímetro a disco y rodillos.

signan en la siguiente planilla, resultados éstos que pueden considerarse como los que más fe merecen entre todos los que se hicieron conocer hasta la fecha.

Superficies de las Provincias, Gobernaciones y otros Distritos de la República Argentina, deducidas de la Carta Militar 1: 500 000, con indicación de las superficies cubiertas por agua y salares.

| (1) Provincia, gobernación u otro distrito | (2) Superficie | (3) (4) | | (5) De las superficies indica- das en la co- lumna (3), son aguas pe- rimetrales: (**) |
|--|-------------------|--|--------------|--|
| | | De las superficies indicadas en la columna (2), aproxi- madamente se encuentran cubiertas por agua (lagos, lagunas, ríos anchos): (*) | por salares: | |
| | km2 | km2 | km2 | km2 |
| Capital Federal | 192 | 0 | 0 | 0 |
| Martín García | 2 | 0 | 0 | 0 |
| Buenos Aires | 307 569 | 3 330 | 450 | 200 |
| Catamarca | 71 931 | 40 | 1 580 | 0 |
| Córdoba | 168 854 | 2 480 | 3 010 | 0 |
| Corrientes | 89 355 | 2 740 | 0 | 1 470 |
| Entre Ríos | 76 216 | 2 280 | 0 | 1 550 |
| Jujuy | 48 561 | 590 | 310 | 10 |
| La Rioja | 92 331 | 70 | 1 830 | 0 |
| Mendoza | 150 839 | 770 | 160 | 80 |
| Salta | 129 444 | 350 | 240 | 40 |
| San Juan | 86 137 | 50 | 200 | 10 |
| San Luis | 76 748 | 60 | 950 | 30 |
| Santa Fe | 133 007 | 2 340 | 0 | 1 170 |
| Santiago del Estero | 135 254 | 330 | 6 820 | 0 |
| Tucumán | 22 524 | 30 | 0 | 0 |
| Chaco | 99 633 | 540 | 0 | 360 |
| Chubut | 224 686 | 2 800 | 290 | 70 |
| Formosa | 74 536 | 660 | 0 | 380 |
| La Pampa | 143 440 | 500 | 900 | 110 |
| Los Andes | 62 642 | 110 | 6 430 | 0 |
| Misiones | 29 801 | 260 | 0 | 260 |
| Neuquén | 94 078 | 1 360 | 20 | 490 |
| Río Negro | 203 013 | 1 800 | 710 | 460 |
| Santa Cruz | 243 943 | 6 010 | 80 | 1 480 |
| Tierra del Fuego | 20 912 | 680 | 0 | 540 |
| Sumas: | 2 785 648 | 30 180 | 23 980 | |
| Islas Orcadas del Sur | 1 064 | 0 | 0 | 0 |
| Islas Malvinas | 11 718 | 10 | 0 | 0 |
| Islas en litigio: Pictón, Nue- va, Lennox, Luff, Augusto. | 351 | 0 | 0 | 0 |

*) Por ríos anchos se entienden los ríos cuyas dos orillas se encuentran indicadas en la Carta Militar de 1: 500 000 por medio de dos líneas finas.

***) Por aguas perimetrales se entienden ríos sobre límites y lagos cortados por límites.

También fueron medidas para cada provincia y territorio nacional las superficies cubiertas por agua y salares.

El mencionado instrumento de tan destacadas cualidades ha sido adquirido en el año 1937 por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata.

El modelo que se representa en figura 22 fué construido especialmente por G. Coradi (fig. 23), por primera vez en 1917, a pedido de las autoridades del Catastro Italiano y en base

Por consiguiente, el ángulo β del movimiento giratorio del disco correspondiente al camino x del punzón será:

$$(20) \quad \beta = \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{x}{r_1}$$

Para facilidad de nuestras explicaciones admitimos que la dirección de la directriz DD sea paralela al eje de las x de un sistema de coordenadas y la dirección del eje E (fig. 21), por consiguiente, paralela al eje de las y .

La rotación β del disco produce una rotación del tambor que más adelante estudiaremos, y que es *proporcional al camino x* , debido a la posición invariable que el tambor conserva respecto al disco cuando el punzón se mueve sobre una paralela a la directriz.

Falta ahora demostrar que la rotación del tambor que se produce cuando el punzón se mueve sobre una paralela $D'D'$ a la directriz DD no sólo es proporcional al camino x , como se desprende de la (20), sino también proporcional a la distancia y que separa $D'D'$ de la directriz.

Sea φ el ángulo que el brazo a del punzón forma con el eje de las x (y por consiguiente, también el ángulo que el brazo r forma con el eje de las y) en una posición cualquiera del instrumento.

Imaginémonos ahora que se haga recorrer el punzón sobre $D'D'$ por el segmento x , lo que equivale a rodar el aparato con ángulo constante φ . Se nota que el tambor gira sin cambiar su posición sobre el disco.

Cuando $\varphi = 0$, es decir, cuando el punzón se mueve sobre la directriz DD , el tambor no gira.

Sea $\rho = OT$ (T designa aquí el punto de contacto del tambor con el disco), magnitud que depende de las cantidades $OA = c$, de r y del ángulo φ .

Las longitudes c y r son constantes del instrumento, y el ángulo φ y, por consiguiente, el triángulo OAT no varía cuando el punzón se mueve sobre la paralela $D'D'$ al eje de las x .

El arco l por el cual el disco gira por debajo del tambor cuando el punzón recorre el camino x , es igual al arco de circunferencia de radio ρ y el ángulo en el centro β :

$$(21) \quad l = \rho \cdot \beta$$

Si el eje del tambor coincidiera con la dirección del vector ρ , el número n de vueltas de tambor sería:

$$(22) \quad n = \frac{l}{2\pi r'} = \frac{N}{1000}$$

en donde r' expresa, como antes, el radio del tambor y N la lectura del tambor y contador en unidades de nonio; o de acuerdo con la (21):

$$(23) \quad n = \frac{\rho \cdot \beta}{2\pi r'}$$

o también, teniendo en cuenta la (20):

$$(24) \quad n = \frac{r_2 \cdot \rho x}{\pi_1 r_3 \cdot 2\pi r'}$$

Pero como el eje del tambor generalmente forma un ángulo α con la dirección del radio vector, se originará un movimiento rotatorio del tambor correspondiente a un arco:

$$(25) \quad l \cdot \cos \alpha$$

Cuando el punzón recorre el segmento x sobre una paralela $D'D'$ al eje de las x , resultará para el número n , teniendo en cuenta las (21) y (23):

$$(26) \quad n = \frac{\rho \cdot \cos \alpha}{2\pi r'} \cdot \beta$$

Según figura 24 tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi + \beta + \alpha &= 90^\circ \\ \varphi + \beta &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Luego:

$$(27) \quad \cos \alpha = \operatorname{sen}(\varphi + \beta)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo AOT , tendremos:

$$(28) \quad \operatorname{sen}(\varphi + \beta) = \frac{c}{\rho} \operatorname{sen} \varphi$$

y de acuerdo con la (27):

$$(29) \quad \cos \alpha = \frac{c}{\rho} \operatorname{sen} \varphi$$

Sustituyendo valores en la (26), resulta:

$$(30) \quad n = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \varphi}{2\pi r'} \cdot \beta$$

Siendo $\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{a}$, donde a expresa como antes la longitud del brazo del punzón, resulta finalmente:

$$(31) \quad n = \frac{cy}{2\pi r' a} \cdot \beta$$

Teniendo en cuenta la (20), obtenemos:

$$(32) \quad n = \frac{cr_2 \cdot xy}{r_1 r_3 \cdot 2\pi r' a}$$

y por consiguiente (en unidades de nonio):

$$(33) \quad N = \frac{1000 cr_2}{2\pi r_1 r_3 r' a} \cdot xy$$

de lo cual resulta:

$$(34) \quad xy = \frac{2\pi r_1 r_3 r' a}{1000 cr_2} \cdot N$$

Pondremos:

$$(35) \quad k = \frac{2\pi r_1 r_3 r' a}{1000 cr_2}$$

y tendremos:

$$(36) \quad xy = kN$$

donde k es la superficie del plano que corresponde a una unidad de nonio.

Es decir: El número de vueltas N del tambor (expresado en unidades de nonio) correspondiente a un recorrido del punzón sobre una paralela al eje de las x no es sólo proporcional a x (que corresponde a la extensión del rectángulo rayado de figura 24 en la dirección de las x), sino también proporcional a y (que es la otra dimensión del rectángulo).

El producto xy expresa el área del rectángulo $F_1 F_2 F_3 F_4$, cuyos lados x están situados sobre la directriz DD y la paralela $D'D'$, respectivamente, expresando el factor y la distancia que separa dichas paralelas.

Recorriendo ahora con el punzón el contorno completo de este rectángulo, el resultado final será este mismo número N que corresponde al segmento x ; puesto que los segmentos $F_1 F_2$ y $F_3 F_4$ son recorridos en sentido contrario, con posiciones análogas del instrumento, debiéndose por eso anular los respectivos desarrollos del tambor. Al efectuarse tales recorridos, el disco hará el mismo camino de ida y vuelta. El recorrido del segmento $F_2 F_3$ sobre la directriz DD , como dijimos, no produce desarrollo alguno.

Tendremos entonces para la superficie S buscada:

(37)

$$S = xy = kN$$

La constante k de este planímetro (como la análoga del planímetro polar) representada por la (35) sólo podemos variar cuando cambiamos la longitud del brazo a .

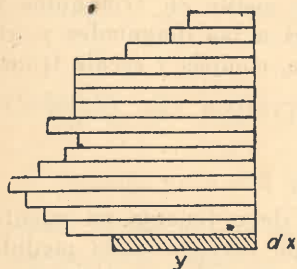


Fig. 25. Ilustrando el caso general.

21. Caso general.

Por un raciocinio análogo al que hicimos en página 160 llegamos a la conclusión de que la fórmula $S = kN$ es válida para figuras planas de forma cualquiera: Imaginamos descompuesta una tal figura en un número infinito de rectángulos elementales de ancho dx y largo y (fig. 25).

El contorno de la figura resulta así sustituido por una línea quebrada que se compone de pequeños segmentos perpendiculares al eje de las x , alternando con pequeños segmentos paralelos a dicho eje. Si ahora se recorre con el punzón esa línea quebrada, nos damos cuenta que los segmentos perpendiculares al eje de las x en total dan un desarrollo nulo, puesto que para cada uno de tales segmentos que se recorra de izquierda a derecha existe otro o una suma de otros segmentos que se recorren en sentido

contrario. En cuanto a los segmentos paralelos al eje de las x , sabemos que cada uno de estos segmentos paralelos, al ser recorrido por el punzón, da un desarrollo que corresponde a un rectángulo situado entre el segmento recorrido y la directriz. La suma de los rectángulos correspondientes a todos los segmentos paralelos al eje de las x que se recorren, da la superficie de la figura propuesta.

El recorrido de un contorno curvilíneo da un desarrollo que difiere muy poco del desarrollo producido por el recorrido de la línea quebrada, y se puede hacer la diferencia tan pequeña como se quiera con tomar los segmentos paralelos y perpendiculares infinitamente pequeños, desapareciendo completamente esa diferencia si el punzón recorre lisamente el perímetro curvilíneo.

Si el punzón recorre el contorno de una figura que se extiende a ambos lados de la directriz, se engendrarán por el recorrido de los segmentos perpendiculares al eje de las x nuevamente desarrollos que se anulan, y por el recorrido de los segmentos paralelos al eje de las x desarrollos que se suman a los que produce el recorrido de los segmentos paralelos situados a la izquierda de la directriz.

Por esta razón deducimos que la fórmula $S = kN$ es válida para figuras de forma cualquiera.

22. Observación final.

El planímetro es un instrumento indispensable para la práctica moderna de agrimensura, catastro e ingeniería: El agrimensor mide con su ayuda superficies en planos y cartas, el ingeniero mecánico valora con él diagramas dibujados, el ingeniero civil lo utiliza para medir los perfiles en el trazado de caminos, el ingeniero naval para la medición de los croquis de construcción.

Para muchos objetos de la práctica es suficiente la *precisión* de 1/500 de la superficie que proporciona el planímetro polar. Para modernos trabajos de catastro y construcciones navales se emplea cada vez más el planímetro a disco y rodillos por su mayor precisión (hasta 1/2 000) y otras ventajas que ofrece.

§ 22.

Cálculo de superficies por el procedimiento gráfico puro.

1. Características del procedimiento.

Cuando no se disponga para la determinación del área de un terreno dibujado en un plano de ninguna medida directamente tomada, como ocurre

cuando se trata de determinar una superficie en una hoja de plancheta u otro plano cualquiera, se tomarán las medidas necesarias gráficamente del dibujo. Se descompondrá para ello la figura a medir en triángulos y trapecios, obteniéndose las medidas correspondientes a las diagonales y alturas con ayuda de la escuadra y escala (o escuadra, compás y escala transversal).

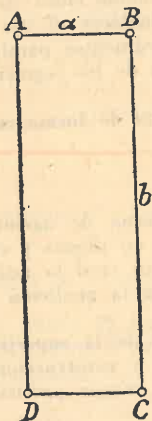
2. Influencia de la deformación del papel.

Es evidente que en esta determinación gráfica debe tenerse en cuenta la deformación del papel, lo que puede hacerse con corregir cada medida en seguida de sacarla del plano. Pero es mucho más práctico determinar primero la superficie S' , sin tener en cuenta la deformación, y aplicar luego la corrección por deformación $\Delta S'$ según la fórmula (1) de página 100.

3. Superficie S_t del terreno.

Como en la superficie S_t del terreno cada longitud l es E -veces más grande que la correspondiente del plano, y como las superficies de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de longitudes correspondientes, tendremos para el pasaje de la superficie S_p del plano a la correspondiente S_t del terreno:

$$S_t = E^2 \times S_p$$



4. Criterio sobre la precisión de la determinación gráfica.

Siendo a y b (fig. 1) las magnitudes (factores) a sacar de un plano para el caso de tratarse de una figura de forma rectangular, y siendo Δa y Δb , respectivamente, los errores que las afectan, tendremos, según vimos en página 154:

$$\Delta S = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$$

Pero, siendo en este caso:

$$\Delta a = \Delta b = \Delta l$$

Fig. 1. Ilustrando el criterio sobre la precisión:

$$\Delta S = \Delta l (a + b)$$

por suponerse ambas magnitudes gráficas obtenidas con la misma precisión, resulta:

$$\Delta S = \Delta l (a + b)$$

Es decir: El error ΔS es tanto más pequeño cuanto más pequeños sean el error Δl y la suma $(a + b)$. El error Δl es tanto más pequeño cuanto más grande sea la escala del plano, siendo para una magnitud de superficie dada la suma $(a + b)$ tanto más pequeña cuanto menos diferente sea la medida de frente comparada con la de fondo.

§ 23.

Cálculo de superficies por el procedimiento semigráfico.

1. Característica del procedimiento.

Este procedimiento utiliza, como lo indica su nombre, cantidades lineales directamente medidas en el terreno conjuntamente con magnitudes calculadas en base a las medidas directas combinadas con medidas gráficas del plano, o cantidades directas combinadas con medidas gráficas sin intervenir cálculos auxiliares.

Descompónese la figura a medir, como en el procedimiento gráfico puro, en triángulos y trapecios.

Valdrémonos de las figuras 1-6 para ilustrar y explicar los casos más típicos que se prestan para la aplicación de este método.

2. Criterio sobre la aplicación del procedimiento semigráfico; casos típicos.

La determinación de la superficie por el procedimiento semigráfico se efectuará, siempre que esto sea posible, dos veces, empleándose en el segundo cálculo siempre elementos distintos que en el primero.

También puede suceder que una primera determinación de una superficie se haga a base de medidas directamente tomadas en el terreno y que el método semigráfico sea empleado tan sólo para una determinación de control tanto del cálculo como del dibujo.

Se utilizarán por ejemplo para la primera determinación las diagonales y las alturas directamente medidas (fig. 1), y para la segunda determinación ilustrada en figura 2, los lados *a*, *f* y *c*, medidos en el terreno, y

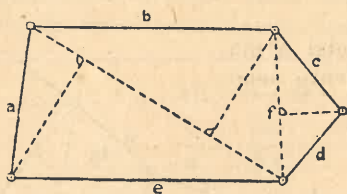


Fig. 1. Primera determinación en base a las diagonales y alturas directamente medidas.

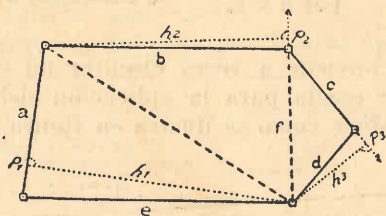


Fig. 2. Segunda determinación de la superficie *S*:

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} a \times h_1 \\ + f \times h_2 \\ + c \times h_3 \end{array} \right.$$

las alturas *h*₁, *h*₂ y *h*₃ obtenidas por el cálculo en base a los lados *e*, *b* y *d* también medidos y las proyecciones *p*₁, *p*₂ y *p*₃ sacadas del plano; por ejemplo:

$$h_1 = \sqrt{e^2 - p_1^2} \text{ (fig. 2).}$$

En caso de ser el lado frontal de una parcela muy corto en comparación con la altura (ver ejemplo de figura 3), la altura puede obtenerse gráficamente con suficiente precisión.

Debe tenerse en cuenta en esta manera de proceder que: Cuanto más cortas sean las proyecciones p (fig. 2), tanto menor será la influencia de una pequeña inseguridad de las mismas sobre el cálculo de las alturas. (Ver fórmula al final de pág. 179.)

Cuando el valor de p es relativamente grande (por ejemplo $p > \frac{1}{4} h$), deberá el mismo ser determinado con especial cuidado.

En caso de ser $p > \frac{1}{2} h$, el cálculo de las alturas resultaría inexacto, siendo en este caso mejor la determinación gráfica pura de la altura h , cuando no sea posible medirla directamente en el terreno.

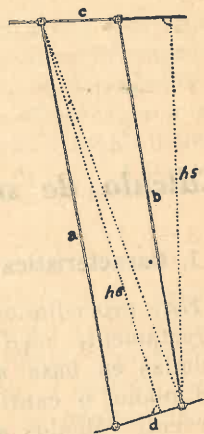


Fig. 3. Triángulos con alturas grandes.

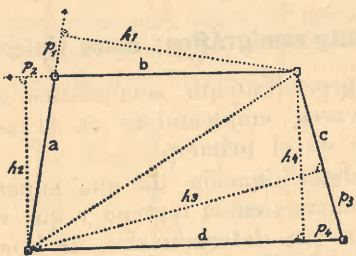


Fig. 4. Primer cálculo.

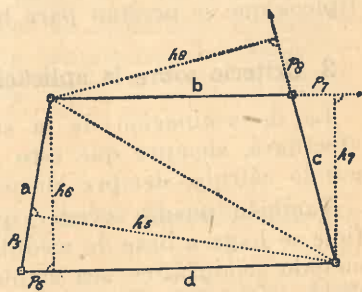


Fig. 5. Segundo cálculo.

$$S = \frac{1}{4} \begin{cases} a \times h_1 \\ + b \times h_2 \\ + c \times h_3 \\ + d \times h_4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se midieron: } a, b, c \text{ y } d; \\ \text{se determinaron gráficamente: } p_1 \text{ hasta } p_8; \\ \text{se calcularon: } h_1 \text{ hasta } h_8. \end{array} \quad S = \frac{1}{4} \begin{cases} a \times h_5 \\ + d \times h_6 \\ + b \times h_7 \\ + c \times h_8 \end{cases}$$

Conviene a veces ejecutar un dibujo especial a mayor escala para la aplicación del procedimiento semigráfico, como se ilustra en figura 6.

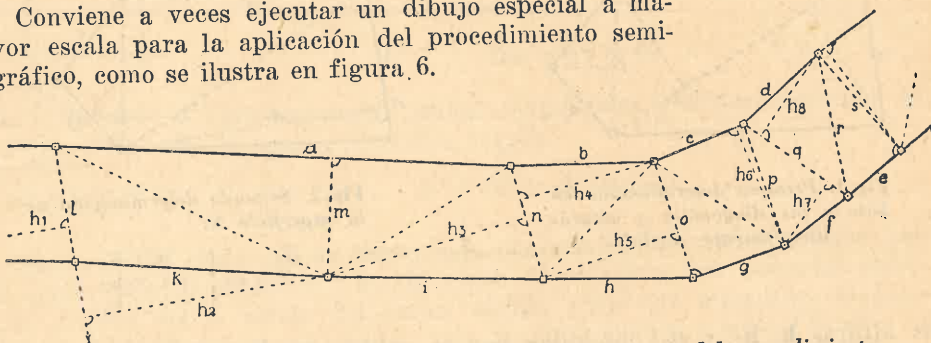


Fig. 6. Dibujo a escala mayor para facilitar la aplicación del procedimiento.

$$S = \frac{1}{2} [l (h_1 + h_2) + am + n (h_3 + h_4) + o (h_5 + g) + ch_6 + q (h_7 + h_8) + es]$$

Es decir: Cuando se conocen las longitudes de los lados del perímetro de una figura y cuando se puede determinar con cierta precisión los pies de las perpendiculares (alturas de triángulos), la aplicación del procedimiento semigráfico caracterizado en las figuras 4 y 5, proporciona una precisión de la determinación generalmente concordante con el valor de la parcela (ver pág. 191, Instrucción II del Catastro de Suiza).

3. Sobre el equilibrio de los efectos de dos distintos tipos de errores.

En el supuesto de tratarse de una figura rectangular, y designado por **a** y **b** (fig. 7), respectivamente, las medidas de frente y fondo de una parcela urbana y por **S** su superficie, tendremos según fórmula (23) de pág. 154 para el error superficial ΔS :

$$\Delta S = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$$

Se nota que en esta fórmula el error Δb del lado largo **b** va multiplicado tan sólo por el factor relativamente pequeño **a**; por consiguiente, puede permitirse para Δb una magnitud relativamente grande (sacándose por eso **b** gráficamente del plano). En cambio, Δa del frente **a** es multiplicado por la cantidad grande **b**, de modo que es necesario mantener el error Δa dentro de límites estrechos, lo que se consigue midiendo el frente directamente en el terreno. De ahí resulta la **regla práctica**:

Sacar la medida grande del plano y medir la distancia corta en el terreno (ver regla práctica en página 154).

Sean por ejemplo $\Delta b = 0,2 \text{ mm} \times E$ y $\Delta a = 2 \text{ cm}$ las inseguridades que afectan respectivamente las medidas del fondo y del frente de una parcela, dibujada a escala $\frac{1}{E} = 1:500$.

Pondremos entonces para establecer un cierto equilibrio de los efectos de los dos tipos de errores Δa y Δb :

$$a \cdot \Delta b = b \cdot \Delta a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{0,2 \text{ mm} \times 500}{2 \text{ cm}} = \frac{10 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 5$$

Es decir: Bajo las condiciones supuestas ($\Delta b = 0,2 \text{ mm} \times E$ y $\Delta a = 2 \text{ cm}$) serán iguales los efectos de los errores Δb y Δa en planos a escala 1:500 cuando la medida de fondo es 5 veces la del frente.

Para planos a escala 1:1000, resultaría la relación:

$$b = 10 a$$

Tolerancias especiales en vigor en los distintos países reglamentan las máximas diferencias admisibles entre los resultados de dos determinaciones semigráficas de una misma superficie (véase § 25).

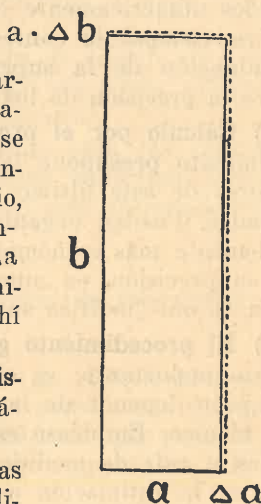


Fig. 7. Ilustrando el equilibrio de dos tipos de errores:

$$a \cdot \Delta b = b \cdot \Delta a$$

§ 24.

Comparación de los tres procedimientos para determinación de superficies.

a) **Cálculo de superficies por fórmulas**, a base de los valores numéricos obtenidos por mediciones en el terreno. Errores en esta determinación de superficies sólo pueden producirse por errores de medición, no teniendo en ello influencia alguna el método de cálculo seguido. Los resultados son obtenidos numéricamente con los datos originales determinados en el terreno. No es esencial la confección del plano de la parcela al objeto de la determinación de la superficie. Eventuales errores de dibujo no influyen sobre la precisión de los resultados.

b) **Cálculo por el procedimiento semigráfico**. La aplicación de este procedimiento presupone la existencia de un plano exactamente dibujado. Los errores de este último influyen directamente sobre la precisión de los resultados. Pueden organizarse estos cálculos de tal modo que resultan notablemente más económicos que los originados por el método a), respondiendo su precisión, en muchos casos, a todas las exigencias de la vida económica, lo que justifica su frecuente uso en los trabajos de catastros modernos.

c) **El procedimiento gráfico puro**, para el cual el planímetro es un elemento importante, es el que menos trabajo exige, dando resultados cuya precisión depende de la exactitud del plano y de la habilidad y prolijidad del técnico. Empléase este procedimiento como contralor de resultados sacados a raíz de medidas originales, para protegerse contra errores groseros, en la estimación muy expeditiva de superficies, y cuando se trate de cálculos que no requieran mayor precisión que la que proporciona el planímetro (ver pág. 191, Instrucción III del Catastro Suizo).

§ 25.

Tolerancias superficiales.

1. **Criterios que se siguen en la compensación de los resultados del doble cálculo de superficies.**

Quando los resultados del doble cálculo son de la misma precisión (como puede ocurrir en cada uno de los tres procedimientos tratados en los párrafos 20 a 23), se formará la **media aritmética** de los dos resultados, la que representa el **valor compensado** de la doble determinación.

Cuando uno de los resultados es obtenido con medidas directas tomadas en el terreno, y el otro con ayuda del planímetro y un plano dibujado, o el procedimiento semigráfico, se adoptará el primero como resultado efectivo, considerándose el segundo sólo como contralor.

Pero muchas veces los promedios de la doble determinación de superficies deben sufrir nuevas, pequeñas modificaciones cuando la suma de un cierto número de parcelas pueda ser comparada con el resultado de una determinación independiente de una suma de parcelas obtenida por medio de coordenadas.

Los resultados de la determinación de superficie de las parcelas sufren, por lo tanto, generalmente dos modificaciones, una por la formación de la media aritmética de los resultados del doble cálculo y una segunda por la compensación de conjuntos (manzanas en el catastro urbano u hojas de plano, de zona o de sección, en el catastro rural).

Es natural que para cada uno de los procedimientos de cálculo de superficies deben regir tolerancias adecuadas que garanticen una cierta uniformidad en la ejecución y precisión de los trabajos de catastro.

Trataremos aquí más detalladamente las **tolerancias para las máximas diferencias admisibles entre dos cálculos de una misma superficie basados en medidas directas**, por ser las que en la actualidad más aplicación pueden tener en nuestro país.

2. Papel preponderante del error lineal en la fijación de tolerancias superficiales.

La exposición de los tres distintos procedimientos de determinación de superficies de parcelas nos ha hecho ver el importante papel de la precisión de las mediciones lineales, las que constituyen la verdadera base para la fijación de las tolerancias superficiales, es decir: el error superficial ΔS depende en último término de los errores lineales Δl .

Según ecuación (43), pág. 107 de nuestra obra "**Tolerancias en Agrimensura Legal**", el error ΔS es proporcional a la raíz cuadrada de la superficie S cuando se trate de una determinación gráfica en base a un plano:

$$(1) \quad \Delta S = \frac{0,0005}{E} \sqrt{S} = \frac{\gamma}{E} \sqrt{S}$$

en donde $1/E$ expresa la escala y γ , como antes (ver N° 7, pág. 20 de este tomo), la inseguridad del dibujo.

Según (25), página 155 de este tomo, el error ΔS_s es proporcional a la superficie S misma cuando se supone que en las mediciones existe un error sistemático β :

$$(2) \quad \Delta S_s = 2\beta S$$

Según (50), página 108 de la citada obra ("Tol. Agr.") el efecto del error accidental α sobre la superficie de un rectángulo cuyo fondo es 10 veces la medida del frente, se traduce por la fórmula:

$$(3) \quad \Delta S_a = 1,865 \alpha \sqrt[4]{S^3}$$

En la práctica concurren generalmente ambos errores, β y α , en la determinación de superficies.

Cuando se trate entonces de establecer las tolerancias para la determinación de superficies en base a medidas directas, los errores ΔS_s y ΔS_a se combinan según la ley de Gauss:

$$(4) \quad \Delta S = \sqrt{(\Delta S_a)^2 + (\Delta S_s)^2}$$

3. Tolerancias para las máximas diferencias admisibles entre los resultados de dos mediciones directas; suplementos a las fórmulas; tablas numéricas de tolerancias superficiales; tabla gráfica.

En base a las tolerancias lineales (IX), pág. 48 de este tomo, hemos deducido según (4), en páginas 106 - 112 de "Tol. Agr.", las siguientes 6 fórmulas de tolerancias superficiales:

Para mediciones urbanas:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} t_{SI} = 0,01 \sqrt{0,313 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0008 S^2} \text{ en cond. favorables} \\ t_{SII} = 0,01 \sqrt{1,252 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0018 S^2} \text{ » » medianas} \\ t_{SIII} = 0,01 \sqrt{2,817 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0032 S^2} \text{ » » desfavorables} \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros} \\ \text{cuadrados} \end{array}$$

Para mediciones rurales:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} t_{SIV} = 0,01 \sqrt{13,91 \sqrt{S^3} + 0,01 S^2} \text{ en cond. favorables} \\ t_{SV} = 0,01 \sqrt{20,87 \sqrt{S^3} + 0,015 S^2} \text{ » » medianas} \\ t_{SVI} = 0,01 \sqrt{27,82 \sqrt{S^3} + 0,02 S^2} \text{ » » desfavorables} \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros} \\ \text{cuadrados} \end{array}$$

Suplementos a las tolerancias superficiales. Las fórmulas (5) y (6) son algo teóricas por no haberse en ellas considerado la inseguridad de la marcación de los puntos límites que puede afectar de un modo sensible la precisión de una determinación de superficie. Como no existe todavía entre nosotros ningún material de experiencia publicado al respecto, del cual pudiéramos deducir los valores que nos interesan, valémonos de un recurso práctico que emana de las exigencias de la vida económica. Nos ponemos la pregunta: *¿Cuál es la precisión que racionalmente se puede exigir de la determinación de una superficie?*

Como las parcelas de nuestras ciudades tienen en la mayor parte de los casos superficies que oscilan entre 200 y 400 metros cuadrados, es decir una superficie media de 300 m² (con 10 metros de frente y 30 de fondo, por ejemplo), juzgamos que se debería exigir de un buen catastro urbano que las parcelas estén medidas con tal precisión que su superficie no tenga una inseguridad mayor de 1 m² en buenas, de 2 m² en medianas y de 3 m² en malas condiciones del terreno.

Tal inseguridad de la superficie proviene principalmente de las marcaciones no bien definidas.

Teniendo entonces en cuenta las condiciones que rigen en la actualidad, creemos justificado admitir para las dimensiones frontales, (que son las que principalmente determinan la precisión de la determinación), los valores: **1 cm** en condiciones favorables, **2 cm** en condiciones medianas, y **3 cm** en condiciones desfavorables del terreno, como inseguridades máximas de las medidas de frente, pudiendo adoptarse estos valores también para los trabajos de restablecimiento de puntos límites destruídos o en la fijación de nuevas líneas limítrofes que originan las obras de ensanche de avenidas o apertura de diagonales.

Partiendo de esta base, podemos establecer que, si bien las fórmulas (5) son aplicables sin modificación, siempre que se trate de marcaciones correctamente colocadas, será necesario, para las circunstancias que actualmente rigen en nuestro país, agregar un aumento a cada una de las fórmulas (5).

En cuanto a las fórmulas (6), que de todas maneras establecen tolerancias muy amplias, no es necesario agregar un aumento debido a la inexacta marcación de los límites.

Juzgamos fundamentados los aumentos de 0,30 m², 0,50 m² y 0,70 m², respectivamente, para las 3 fórmulas (5).

Tendremos entonces las siguientes fórmulas de tolerancias superficiales:

Fórmulas de tolerancias superficiales del autor.

(superficies S y tolerancias t_s expresadas en metros cuadrados)

Para mediciones urbanas:

$$(7) \quad \begin{cases} t_{sI} = 0,01 \sqrt{0,313 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0008 S^2} + 0,30 \text{ m}^2 \\ t_{sII} = 0,01 \sqrt{1,252 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0018 S^2} + 0,50 \text{ m}^2 \\ t_{sIII} = 0,01 \sqrt{2,817 \cdot \sqrt{S^3} + 0,0032 S^2} + 0,70 \text{ m}^2 \end{cases}$$

Para mediciones rurales:

$$(8) \quad \begin{cases} t_{sIV} = 0,01 \sqrt{13,91 \sqrt{S^3} + 0,01 S^2} \\ t_{sV} = 0,01 \sqrt{20,87 \sqrt{S^3} + 0,015 S^2} \\ t_{sVI} = 0,01 \sqrt{27,82 \sqrt{S^3} + 0,02 S^2} \end{cases}$$

Tablas numéricas de tolerancias superficiales. Las tablas (9) y (10) contienen algunos valores de tolerancias calculados para superficies S de 100 m² hasta 50 000 m² en base a las fórmulas (5) y (6) (sin incluir los suplementos), las que pueden servir de guía para un cálculo de tablas de tolerancias más completas.

| S | Mediciones Urbanas | | | | | |
|--------------------|--------------------|------|----------------|------|----------------|------|
| | TABLA I | | TABLA II | | TABLA III | |
| | m ² | % | m ² | % | m ² | % |
| 100 m ² | 0,18 | 1,8 | 0,36 | 3,6 | 0,53 | 5,3 |
| 200 > | 0,30 | | 0,60 | | 0,90 | |
| 300 > | 0,41 | | 0,81 | | 1,22 | |
| 400 > | 0,51 | | 1,01 | | 1,52 | |
| 500 > | 0,61 | | 1,20 | | 1,80 | |
| 600 > | 0,70 | | 1,38 | | 2,06 | |
| 700 > | 0,79 | | 1,55 | | 2,32 | |
| 800 > | 0,87 | | 1,72 | | 2,56 | |
| 900 > | 0,95 | | 1,88 | | 2,80 | |
| 1000 > | 1,03 | 1,0 | 2,03 | 2,0 | 3,04 | 3,0 |
| 2000 > | 1,77 | | 3,45 | | 5,14 | |
| 3000 > | 2,41 | | 4,71 | | 7,01 | |
| 4000 > | 3,03 | | 5,88 | | 8,73 | |
| 5000 > | 3,61 | | 6,98 | | 10,37 | |
| 10000 > | 6,27 | 0,6 | 11,97 | 1,2 | 17,71 | 1,8 |
| 2 ha | 11 | | 21 | | 30 | |
| 5 > | 23 | | 45 | | 63 | |
| 10 > | 43 | | 76 | | 110 | |
| 15 > | 60 | | 106 | | 153 | |
| 20 > | 77 | | 136 | | 195 | |
| 40 > | 144 | | 246 | | 350 | |
| 60 > | 208 | | 342 | | 496 | |
| 80 > | 271 | | 453 | | 638 | |
| 100 > | 334 | 0,33 | 552 | 0,55 | 775 | 0,78 |
| 200 > | 639 | | 1036 | | 1447 | |
| 400 > | 1237 | | 1970 | | 2715 | |
| 600 > | 1828 | | 2705 | | 3957 | |
| 800 > | 2414 | | 3788 | | 5182 | |
| 1000 > | 2998 | 0,30 | 4686 | 0,47 | 6396 | 0,64 |
| 1500 > | 4452 | | 7333 | | 9400 | |
| 2000 > | 5899 | | 9121 | | 12379 | |
| 3000 > | 8783 | | 13512 | | 18283 | |
| 4000 > | 11658 | | 17879 | | 24151 | |
| 5000 > | 14528 | 0,29 | 22232 | 0,44 | 29993 | 0,60 |

(9)

$$t_{sr} = 0,01 \sqrt{0,313 \sqrt{S^3} + 0,0008 S^2} \qquad t_{srr} = 0,01 \sqrt{1,252 \sqrt{S^3} + 0,0018 S^2}$$

$$t_{srr} = 0,01 \sqrt{2,817 \sqrt{S^3} + 0,0032 S^2}$$

| S | Mediciones Rurales | | | | | |
|--------------------|--------------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|
| | TABLA IV | | TABLA V | | TABLA VI | |
| | m ² | % | m ² | % | m ² | % |
| 100 m ² | 1,19 | 1,2 | 1,48 | 1,5 | 1,70 | 1,7 |
| 200 > | 1,99 | | 2,43 | | 2,82 | |
| 300 > | 2,70 | | 3,31 | | 3,82 | |
| 400 > | 3,36 | | 4,11 | | 4,75 | |
| 500 > | 3,98 | | 4,87 | | 5,62 | |
| 600 > | 4,56 | | 5,60 | | 6,45 | |
| 700 > | 5,12 | | 6,28 | | 7,24 | |
| 800 > | 5,67 | | 6,94 | | 8,01 | |
| 900 > | 6,19 | | 7,59 | | 8,76 | |
| 1000 > | 6,71 | 0,7 | 8,22 | 0,8 | 9,49 | 0,9 |
| 2000 > | 11,33 | | 13,87 | | 16,03 | |
| 3000 > | 15,41 | | 18,88 | | 21,80 | |
| 4000 > | 19,18 | | 23,49 | | 27,13 | |
| 5000 > | 22,73 | | 27,84 | | 32,15 | |
| 10000 > | 38,61 | 0,4 | 47,30 | 0,5 | 54,61 | 0,5 |
| 2 ha | 66 | | 81 | | 93 | |
| 5 > | 134 | | 165 | | 190 | |
| 10 > | 232 | | 284 | | 329 | |
| 15 > | 321 | | 394 | | 455 | |
| 20 > | 405 | | 496 | | 573 | |
| 40 > | 715 | | 876 | | 1012 | |
| 60 > | 1003 | | 1264 | | 1419 | |
| 80 > | 1279 | | 1566 | | 1808 | |
| 100 > | 1546 | 0,2 | 1894 | 0,2 | 2187 | 0,2 |
| 200 > | 2817 | | 3450 | | 3983 | |
| 400 > | 5208 | | 6379 | | 7366 | |
| 600 > | 7514 | | 9282 | | 10625 | |
| 800 > | 9771 | | 12008 | | 13818 | |
| 1000 > | 11999 | 0,12 | 14696 | 0,15 | 16969 | 0,17 |
| 1500 > | 17487 | | 21418 | | 24932 | |
| 2000 > | 22900 | | 28047 | | 32389 | |
| 3000 > | 33594 | | 41146 | | 47509 | |
| 4000 > | 44181 | | 54111 | | 62481 | |
| 5000 > | 54697 | | 66991 | | 77353 | |
| 6000 > | 65165 | | 79812 | | 92157 | |
| 7000 > | 75595 | | 92564 | | 106882 | |
| 8000 > | 85996 | | 105325 | | 121616 | |
| 9000 > | 96373 | | 118034 | | 136291 | |
| 10000 > | 106729 | | 130717 | | 150937 | |
| 25000 > | 260764 | | 319372 | | 368776 | |
| 50000 > | 515317 | 0,10 | 631136 | 0,13 | 728768 | 0,15 |

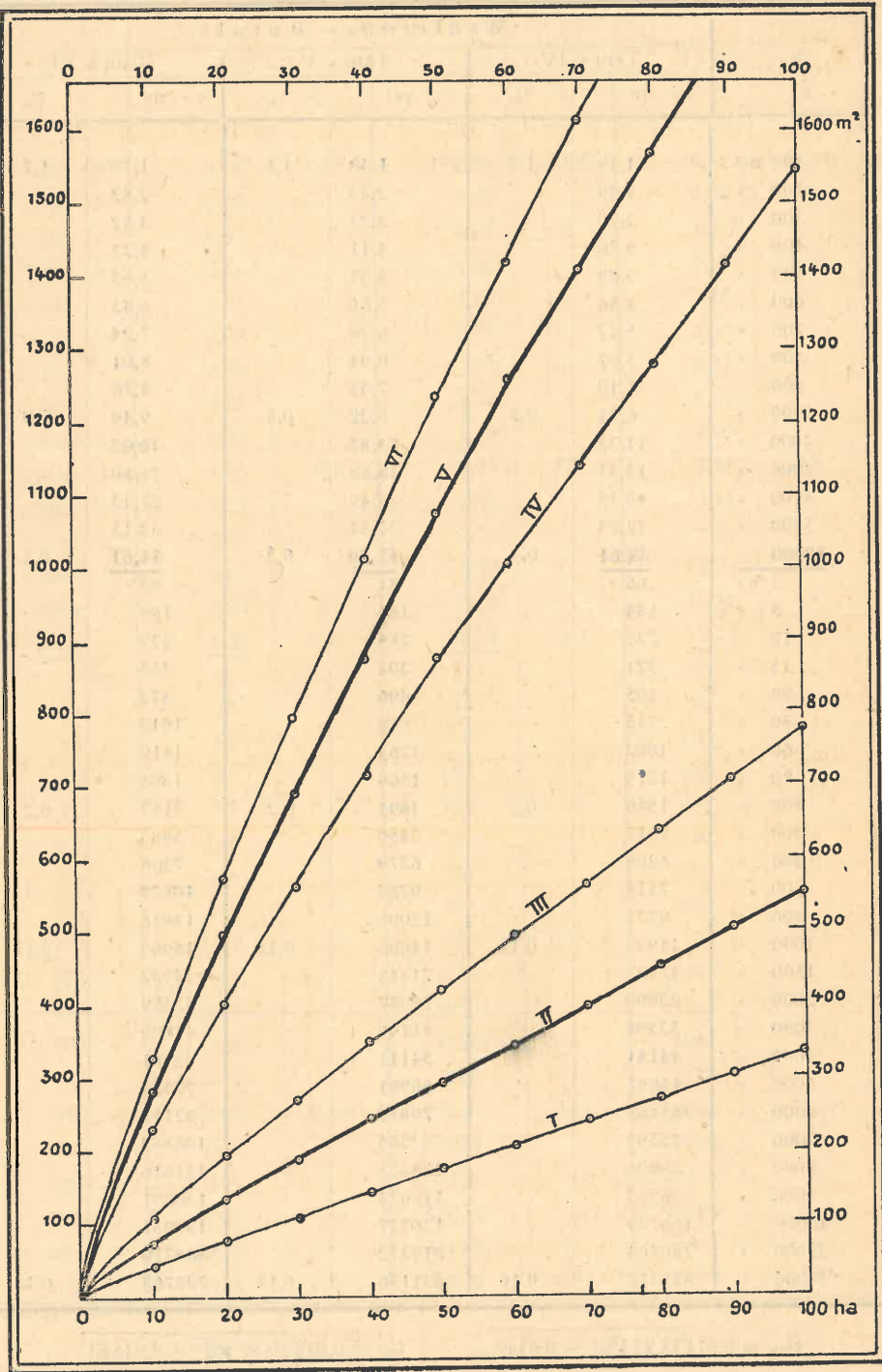
(10)

$$t_{sv} = 0,01\sqrt{13,91\sqrt{S^3} + 0,01S^2}$$

$$t_{sv} = 0,01\sqrt{20,87\sqrt{S^3} + 0,015S^2}$$

$$t_{sv} = 0,01\sqrt{27,82\sqrt{S^3} + 0,02S^2}$$

(11)



Las curvas (ramas de hipérbolas) de tabla (11) expresan gráficamente las tolerancias superficiales I hasta VI según las fórmulas (5) y (6) hasta $S = 100$ ha.

4. Distintos tipos de fórmulas de tolerancias superficiales en uso. Fórmulas de tolerancias que rigen en ciertos países. Cuadros comparativos.

Los principales tipos de fórmulas en uso son:

$$(12) \quad t_s = \sqrt{\alpha \cdot S + \beta \cdot S^2} \quad (I)$$

$$(13) \quad t_s = \alpha\sqrt{S} + \beta S \quad (II)$$

$$(14) \quad t_s = \alpha\sqrt{S} \quad (III)$$

El tipo (I) está adoptado en el catastro de Prusia, el (II) en Austria, Sajonia, Wurtemberg, Italia; el (III) en Suiza, en la ciudad de Berlín, etc.

He aquí las respectivas fórmulas en uso:

Prusia, Túnez.

$$(15) \quad t_s = 0,01\sqrt{60S + 0,02S^2}$$

en donde S y t_s están expresados en áreas, sin distinguir escala de plano ni clase de terreno (rural o urbano).

He aquí algunos valores según la fórmula (15).

| S | t_s | % | S | t_s | % |
|--------------------|------------------|-----|---------------------|-------------------|------|
| 100 m ² | 8 m ² | 8,0 | 2000 m ² | 35 m ² | 1,75 |
| 200 » | 11 » | 5,5 | 5000 » | 55 » | 1,10 |
| 400 » | 16 » | 4,0 | 1 ha | 79 » | 0,79 |
| 600 » | 19 » | 3,2 | 2 » | 113 » | 0,56 |
| 800 » | 22 » | 2,8 | 5 » | 187 » | 0,37 |
| 1000 » | 25 » | 2,5 | 10 » | 283 » | 0,28 |

Esta fórmula (15) en la instrucción VIII del Catastro Prusiano del 25 de octubre de 1881, que fija las cantidades máximas en que pueden diferir dos mediciones de una misma superficie, no tiene en cuenta de manera alguna el procedimiento de determinación empleado (medición directa, procedimiento semigráfico o gráfico puro, con o sin ayuda del planímetro).

Esta generalización de condiciones es considerada hoy demasiado amplia, prefiriéndose una conveniente gradación de los coeficientes de S , para modernos levantamientos de catastro urbano, con distinción de escala.

Para el catastro de la ciudad de Minden (Prusia), por ejemplo, se han adoptado las siguientes fórmulas:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} t_s = 0,01 \sqrt{7,5 S + 0,0025 S^2} \quad \text{escala 1: 250} \\ t_s = 0,01 \sqrt{15 S + 0,005 S^2} \quad \text{» 1: 500} \\ t_s = 0,01 \sqrt{30 S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 1000} \end{array} \right\} \quad t_s \text{ y } S \text{ en áreas}$$

Baviera.

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} t_s = 0,005 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{escala 1: 1000} \\ t_s = 0,0125 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 2500} \\ t_s = 0,0250 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 5000} \end{array} \right\} \quad t_s \text{ y } S \text{ en hectáreas}$$

Alsacia - Lorena.

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} t_s = 0,004 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{escala 1: 500} \\ t_s = 0,006 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 1000} \\ t_s = 0,008 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 2000} \\ t_s = 0,010 \sqrt{S + 0,01 S^2} \quad \text{» 1: 4000} \end{array} \right\} \quad t_s \text{ y } S \text{ en hectáreas}$$

Wurtemberg.

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} t_s = 0,25 \sqrt{S + 0,00075 S} \text{ para buenas cond. del terreno} \\ t_s = 0,50 \sqrt{S + 0,00075 S} \text{ » medianas » » » } \\ t_s = 0,75 \sqrt{S + 0,00075 S} \text{ » malas » » » } \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros} \\ \text{cuadrados} \end{array}$$

Italia. — Nuevo catastro.

$$(21) \quad t_s = 0,7 \sqrt{S + 0,001 S} \quad t_s \text{ y } S \text{ en metros cuadrados}$$

Suiza.

Instrucción I: (terrenos urbanos de gran valor que requieren operación de precisión):

$$(22) \left\{ \begin{array}{ll} t_s = 0,06\sqrt{S} & \text{escala } 1:200 \\ t_s = 0,07\sqrt{S} & \text{» } 1:250 \\ t_s = 0,14\sqrt{S} & \text{» } 1:500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros cuadrados} \end{array}$$

En el dominio de la Instrucción I utilizase el **planímetro** sólo como **instrumento de contralor**.

Instrucción II: (terrenos urbanos y rurales de valor mediano que requieren operaciones de precisión regular):

$$(23) \left\{ \begin{array}{ll} t_s = 0,2\sqrt{S} & \text{escala } 1:500 \\ t_s = 0,4\sqrt{S} & \text{» } 1:1000 \\ t_s = 0,8\sqrt{S} & \text{» } 1:2000 \\ t_s = 1,0\sqrt{S} & \text{» } 1:2500 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros cuadrados} \end{array}$$

En el dominio de la Instrucción II empléase el **procedimiento semigráfico**, permitiéndose la determinación con **planímetro** sólo como **segundo cálculo**. Cuando se utilice el planímetro, debe recorrerse el perímetro de la parcela dos veces en dos distintas posiciones del polo por lo menos.

Instrucción III: (terrenos rurales de valor inferior):

$$(24) \left\{ \begin{array}{ll} t_s = 0,8\sqrt{S} & \text{escala } 1:2000 \\ t_s = 1,0\sqrt{S} & \text{» } 1:2500 \\ t_s = 1,6\sqrt{S} & \text{» } 1:4000 \\ t_s = 2,0\sqrt{S} & \text{» } 1:5000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_s \text{ y } S \\ \text{en metros cuadrados} \end{array}$$

En el dominio de la Instrucción III, la determinación de la superficie puede efectuarse con ayuda del **planímetro**, recorriendo el perímetro de la parcela dos veces en dos distintas posiciones del polo por lo menos.

Tolerancias para las hojas de planos catastrales. Las sumas de las superficies de parcelas no pueden diferir de la superficie total de las hojas correspondientes en más de:

$$(25) \left\{ \begin{array}{ll} 10\sqrt{2,5S + 0,25S^2 + 0,0625n} & \text{escala } 1:500 \\ 10\sqrt{10S + 0,25S^2 + n} & \text{» } 1:1000 \\ 10\sqrt{40S + 0,25S^2 + 4n} & \text{» } 1:2000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S \text{ significa la su-} \\ \text{perficie de la hoja} \\ \text{en ha y } n \text{ la canti-} \\ \text{dad de parcelas.} \end{array}$$

RESUMENES COMPARATIVOS.

a) Catastro suizo.

| CATASTRO DE SUIZA | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|-------------------|----------------|----------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| S | Instrucción | | | | | | | | | | | |
| | I [fórmulas (22)] | | | II [fórmulas (23)] | | | | III [fórmulas (23)] | | | | |
| | 1: 200 | 1: 250 | 1: 500 | 1: 500 | 1: 1000 | 1: 2000 | 1: 2500 | 1: 2000 | 1: 2500 | 1: 4000 | 1: 5000 | |
| (26) áreas | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² |
| 1 | 0,6 | 0,7 | 1,4 | 2 | 4 | 8 | 10 | 8 | 10 | 16 | 20 | |
| 5 | 1,3 | 1,6 | 3,1 | 4 | 9 | 18 | 22 | 18 | 22 | 36 | 45 | |
| 10 | 1,9 | 2,2 | 4,4 | 6 | 13 | 25 | 32 | 25 | 32 | 51 | 63 | |
| 20 | 2,7 | 3,1 | 6,3 | 9 | 18 | 36 | 45 | 36 | 45 | 72 | 89 | |
| 50 | 4,2 | 4,9 | 9,9 | 14 | 28 | 57 | 71 | 57 | 71 | 113 | 141 | |
| 100 | 6,0 | 7,0 | 14,0 | 20 | 40 | 80 | 100 | 80 | 100 | 160 | 200 | |

b) Catastros de otros países dados como ejemplos.

| S | PRUSIA Y TUNEZ (15) | MINDEN (17) | | | BAVIERA (18) | | WURTEMBERG (20) | | | ITALIA (21) | ALSACIA - LORENA (19) | | | |
|------------|------------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------|----------------|----------------|----------------|
| | | Escala: | | | Escala: | | Clase de terreno | | | | Escala: | | | |
| | | 1: 250 | 1: 500 | 1: 1000 | 1: 1000 | 1: 2500 | I | II | III | | 1: 500 | 1: 1000 | 1: 2000 | 1: 4000 |
| (27) áreas | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² | m ² |
| 1 | 8 | 3 | 4 | 5 | 5 | 12 | 3 | 5 | 8 | 8 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 10 | 25 | 9 | 13 | 18 | 16 | 40 | 9 | 17 | 24 | 24 | 13 | 19 | 25 | 32 |
| 50 | 55 | 20 | 28 | 39 | 35 | 89 | 21 | 39 | 57 | 55 | 28 | 42 | 57 | 71 |
| 100 | 79 | 28 | 40 | 56 | 50 | 126 | 33 | 58 | 83 | 80 | 40 | 60 | 80 | 100 |

c) Las 6 fórmulas del autor darían para $S=100$ a, respectivamente, los valores (ver págs. 186 y 187):

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 6,27 + 0,30; & 11,97 + 0,50; & 17,71 + 0,70 \text{ m}^2 \text{ (catastro urbano).} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ 38,61; & 47,30; & 54,61 \text{ m}^2 \text{ („ rural).} \end{matrix}$$

NOTA. En los cálculos de tolerancias [ver ejemplos en planilla (27)], no se suelen aplicar las conocidas reglas de redondeo, prefiriéndose en ellos el "redondeo hacia arriba", con lo cual se responde con más eficacia a la finalidad económica perseguida por toda disposición oficial sobre tolerancias.

§ 26

División de parcelas.

1. **Importancia y antigüedad del problema.**

Podemos decir que la medición y división de parcelas y fijación de los límites en general, fueron las primeras cuestiones transcendentales de carácter geométrico que al nacer la agricultura preocuparon la humanidad en los más remotos tiempos de la antigüedad. Y podemos decir también que tales cuestiones hasta nuestros días constituyen una verdadera síntesis de los problemas fundamentales de la agrimensura.

2. **Enunciado del problema. Distintas condiciones que se plantean.**

En los problemas típicos más sencillos que pasamos a estudiar tratase siempre de separar del área de un lote de terreno dado una parte de superficie prefijada, de tal modo que las nuevas líneas de división cumplan determinadas condiciones, por ejemplo que:

- 1º la línea divisoria arranque de un punto del perímetro (fig. 1);
- 2º la línea divisoria sea paralela a un lado del perímetro (fig. 2);
- 3º la línea divisoria sea perpendicular a un lado del perímetro (fig. 3);
- 4º la línea divisoria corte sobre los lados opuestos de la figura segmentos proporcionales (fig. 7).

3. **Tres problemas típicos sobre el triángulo.**

Problema 1. Separar de la superficie **S** del triángulo **ABC** (fig. 1) una superficie **AMN** = **s** por medio de una recta que arranque del punto **M** del perímetro.

Bajando la perpendicular auxiliar **MF** sobre el lado **AB**, tendremos:

$$2s = AN \cdot FM$$

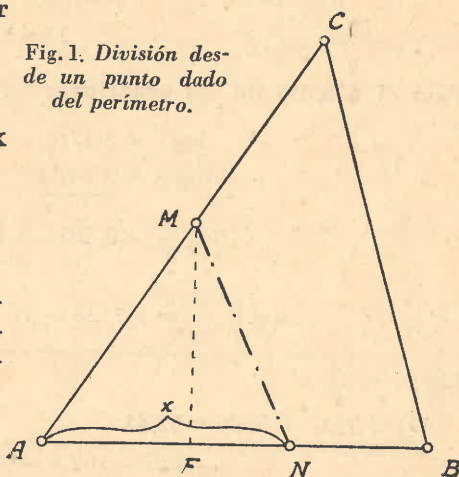
Luego, para el segmento **AN** = **x** buscado:

$$(1) \quad x = \frac{2s}{FM}$$

Cuando no fuera cómoda la medición de la perpendicular **FM**, y en caso de conocerse el ángulo **A**, tendríamos:

$$(2) \quad x = \frac{2s}{AM \operatorname{sen} A}$$

Fig. 1. División desde un punto dado del perímetro.



Problema 2. Separar de la superficie **S** del triángulo **ABC** (fig. 2) una fracción **ADE** de superficie **s** por medio de la línea **ED** paralela al lado **BC**.

Siendo:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} \text{ y } \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}},$$

resulta:

$$(3) \quad \begin{cases} AD = AC \sqrt{\frac{s}{S}} \\ AE = AB \sqrt{\frac{s}{S}} \\ DE = CB \sqrt{\frac{s}{S}} \end{cases}$$

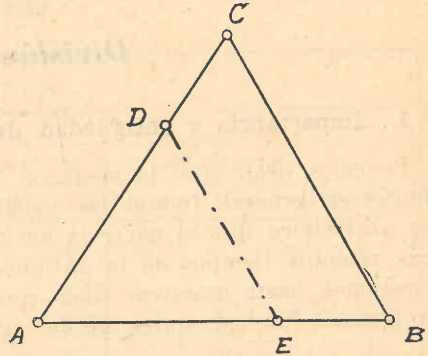


Fig. 2. División paralela.

Ejemplo numérico. Separar de la superficie **S** del triángulo **ABC** (fig. 2) cuyos lados **a**, **b** y **c** se han medido directamente en el terreno, la superficie **s** = 1500 m² de tal modo que la línea de división **ED** sea paralela al lado **BC**.

Siendo: $BC = a = 102,8 \text{ m}$
 $CA = b = 92,6 \text{ »}$
 $AB = c = 125,4 \text{ »}$

Luego: $2p = 320,8 \text{ »}$
 $p = 160,4 \text{ »}$

tendremos para el cálculo de la superficie **S**

la fórmula: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

donde: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

| | | |
|--------------|------------------------|------------------------|
| $p-a = 57,6$ | $\log(p-a) = 1,7604$ | $\log S = 3,6704$ |
| $p-b = 67,8$ | $+ \log(p-b) = 1,8312$ | $S = 4682 \text{ m}^2$ |
| $p-c = 35,0$ | $+ \log(p-c) = 1,5441$ | |
| $p = 160,4$ | $+ \log p = 2,2052$ | |
| | $2 \log S = 7,3409$ | |

Para el cálculo de las ecuaciones (3) tenemos:

$$\begin{aligned} \log s &= 3,1761 \\ \log S &= 3,6704 \\ \log \frac{s}{S} &= 9,5057 - 10 \\ \log \sqrt{\frac{s}{S}} &= 9,7528 - 10 \end{aligned} \quad \sqrt{\frac{s}{S}} = 0,5660$$

Luego:

$$AD = 92,6 \cdot 0,5660 = 52,41$$

$$AE = 125,4 \cdot 0,5660 = 70,98$$

$$DE = 102,8 \cdot 0,5660 = 58,18$$

Cálculo de comprobación. Designando por a' , b' y c' , respectivamente, a los lados **DE**, **AD** y **AE**, tendremos aplicando nuevamente la fórmula de Herón:

| | | |
|-------------------|-------------------|--------------------------|
| DE = a' = 58,18 | $p' - a'$ = 32,60 | $\log(p' - a')$ = 1,5132 |
| AD = b' = 52,41 | $p' - b'$ = 38,37 | $\log(p' - b')$ = 1,5840 |
| AE = c' = 70,98 | $p' - c'$ = 19,80 | $\log(p' - c')$ = 1,2967 |
| $2p' = 181,57$ | | $\log p' = 1,9580$ |
| $p' = 90,78$ | | $2 \log s = 6,3519$ |

$$\log s = 3,1760$$

$$s = 1500 \text{ m}^2$$

Ejemplo 3. Separar del área del triángulo **ABC** (fig. 3) la superficie **AMN** = s de tal modo que la línea divisoria **MN** sea perpendicular sobre **AC**.

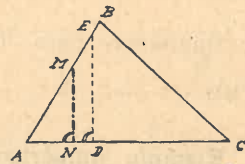


Fig. 3. Condición: $MN \perp AC$.

Levántese en cualquier punto de **AC**, (**D**, por ejemplo) la perpendicular auxiliar **DE**, y mídense **AD** y **DE**. Calcúlese la superficie **S** del triángulo **ADE**.

Tendremos entonces para los segmentos **AM** y **AN** buscados, como antes, las relaciones:

$$\frac{AM}{AE} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} \text{ y } \frac{AN}{AD} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}$$

Luego:

$$(4) \quad AM = AE \sqrt{\frac{s}{S}} \text{ y } AN = AD \sqrt{\frac{s}{S}}$$

4. División paralela del cuadrilátero con un ejemplo numérico.

Problema 4. Separar la superficie s de la superficie **S** del cuadrilátero **ABCD** (fig. 4), dado por las coordenadas de sus vértices, por medio de una recta **MN** = x paralela al lado **AB** = a , y que tenga de a la distancia y .

Trátase en este caso de la determinación de las dos incógnitas x e y , para las cuales tenemos las siguientes relaciones:

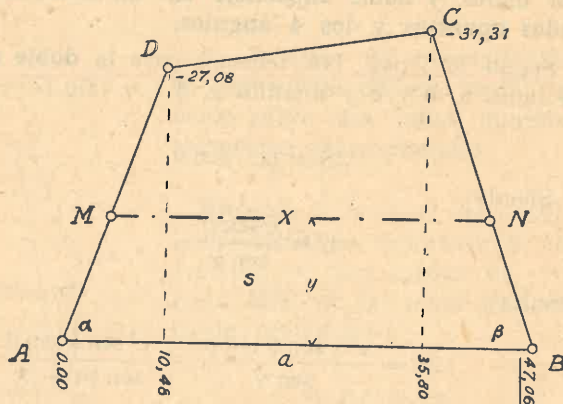


Fig. 4. División paralela de un cuadrilátero, buscando x e y .

$$(5) \quad (a + x)y = 2s$$

$$(6) \quad a - x = y \cdot \text{ctg } \alpha + y \cdot \text{ctg } \beta$$

$$= y (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta)$$

Multiplicando la (5) por la (6), obtendremos:

$$y(a^2 - x^2) = 2sy(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$$

y dividiendo por y :

$$a^2 - x^2 = 2s(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$$

de donde sacamos:

$$(7) \quad x = \sqrt{a^2 - 2s(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$$

y, para y , de la (5):

$$(8) \quad y = \frac{2s}{a + x}$$

donde:

$$(9) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_D - x_A}{y_D} \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{x_B - x_C}{y_C}$$

y finalmente para los segmentos **AM** y **BN** buscados:

$$(10) \quad AM = \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha} \quad BN = \frac{y}{\operatorname{sen} \beta}$$

Ejemplo numérico. Dividir el cuadrilátero **ABCD** (fig. 4) de superficie $S = 1057,4 \text{ m}^2$ en dos partes iguales de tal modo que la línea divisoria **MN** = x sea paralela al lado **AB**.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{10,48}{27,08} = +0,3870; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{11,26}{31,31} = +0,3596$$

$$\alpha = 68^\circ 50' 37'' \quad \beta = 70^\circ 13' 17''$$

$$x = \sqrt{47,06^2 - 1057,4 \cdot 0,7466} = \sqrt{1425,1888} = 37,75 \text{ m}$$

$$y = \frac{1057,4}{47,06 + 37,75} = 12,47 \text{ m}$$

$$AM = \frac{12,47}{0,9326} = 13,37 \text{ m} \quad BN = \frac{12,47}{0,9410} = 13,25 \text{ m}$$

5. Doble superficie de un triángulo con un lado y dos ángulos adyacentes dados, y doble superficie de un cuadrilátero en que se conocen dos lados opuestos y los 4 ángulos.

Según (2), pág. 146, tenemos para la doble superficie $2S$ de un triángulo de lados a , b y c y ángulos α , β y γ (fig. 5):

$$2S = bc \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Siendo:

$$b = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}$$

resulta:

$$\begin{aligned} 2S &= \frac{c^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \end{aligned}$$

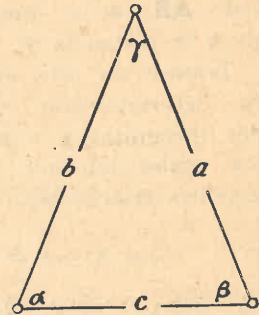


Fig. 5.

o sea, dividiendo por $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$:

$$(11) \quad 2S = \frac{c^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta}$$

Esta fórmula, a pesar de no ser muy cómoda para el cálculo logarítmico (pero muy práctica para el cálculo con la máquina) tiene, sin embargo, frecuente aplicación en el cálculo de superficies.

La figura 6 muestra que cualquier **cuadrilátero** (como el de lados a, m, b y n) puede conceptuarse como diferencia de dos triángulos.

Aplicando entonces a esa figura la fórmula (11), tenemos para la **doble superficie 2S** del cuadrilátero:

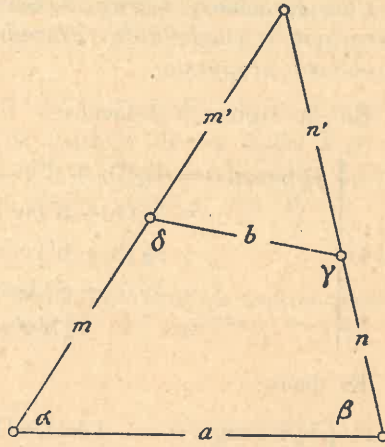


Fig. 6. El cuadrilátero es considerado como diferencia de dos triángulos.

$$(12) \quad 2S = \frac{a^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} - \frac{b^2}{\text{ctg } (180^\circ - \gamma) + \text{ctg } (180^\circ - \delta)}$$

o sea:

$$(13) \quad 2S = \frac{a^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} + \frac{b^2}{\text{ctg } \gamma + \text{ctg } \delta}$$

La fórmula (12) permite deducir inmediatamente la incógnita x (fig. 4) del problema 4 (ver pág. 195):

$$2S = \frac{a^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} - \frac{x^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta}$$

de donde fácilmente se despeja la incógnita obteniendo la (7).

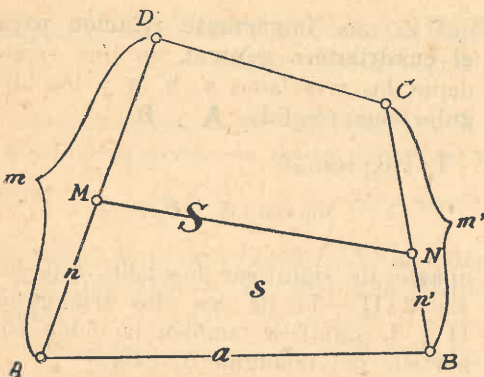


Fig. 7. División proporcional.
 $m : n = m' : n'$

6. División de un cuadrilátero por medio de una recta que corte sobre dos lados opuestos segmentos proporcionales.

Ejemplo 5. Separar del cuadrilátero $ABCD$ de superficie S una fracción s , por medio de una recta MN , de tal modo que valga la proporción:

$$m : n = m' : n'$$

(ver fig. 7).

Consideraciones teóricas sobre el cuadrilátero general (triángulo de convergencia y cuadrilátero cruzado) como preparación para la solución del problema propuesto.

En la figura 8 tenemos:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha &= \frac{1}{2} [(b + b') - b'] [(c + c') - c'] \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{1}{2} (b + b') (c + c') \operatorname{sen} \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} (b + b') c' \operatorname{sen} \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} (c + c') b' \operatorname{sen} \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} b' c' \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right.$$

Es decir:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha &= \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} + \text{V} \\ &\quad - (\text{I} \quad + \text{III} \quad + \text{V}) \\ &\quad - (\text{I} \quad \quad + \text{IV} + \text{V}) \\ &\quad + \quad \quad \quad + \text{V} \end{aligned} \right.$$

De donde:

$$(16) \quad bc \operatorname{sen} \alpha = 2 (\text{II} - \text{I})$$

También tenemos:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} ab \operatorname{sen} B &= 2 (\text{II} + \text{III}) \\ ac \operatorname{sen} A &= 2 (\text{II} + \text{IV}) \end{aligned} \right.$$

Sumando estas dos ecuaciones y restando la (16), se obtiene:

$$(18) \quad ac \operatorname{sen} A + ab \operatorname{sen} B - bc \operatorname{sen} \alpha = 2 (\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}) = 2S,$$

donde **S** es la superficie del cuadrilátero **ABCD**, y, por ser ángulos:

$$A + B + \alpha = 180^\circ, \text{ resulta:}$$

$$(19) \quad 2S = ac \operatorname{sen} A + ab \operatorname{sen} B - bc \operatorname{sen} (A + B),$$

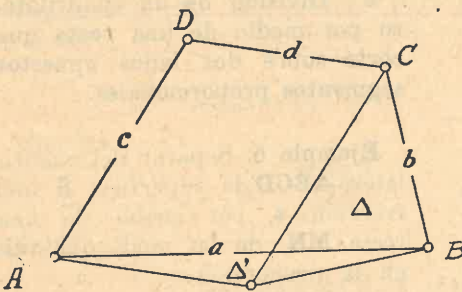


Fig. 9. Triángulos de convergencia Δ y Δ' . Δ es el triángulo de convergencia de los lados b y c ; Δ' , triángulo de convergencia de los lados a y d .

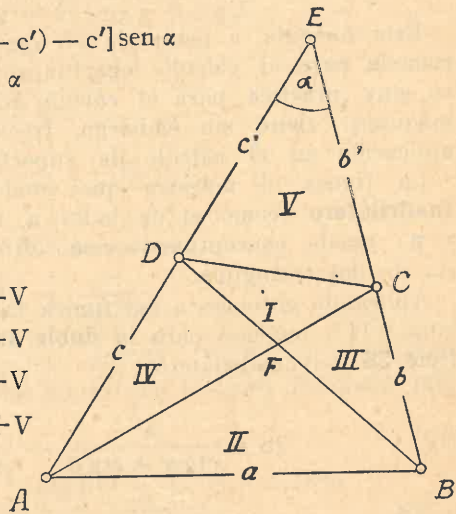


Fig. 8.

que es una importante relación para el cuadrilátero general, en que están dados los tres lados a , b , c y los ángulos comprendidos A y B .

La expresión:

$$bc \operatorname{sen} (A + B),$$

aparte de significar la doble diferencia $2(\text{II} - \text{I})$ de los dos triángulos II y I, significa también la doble superficie del triángulo Δ (fig. 9):

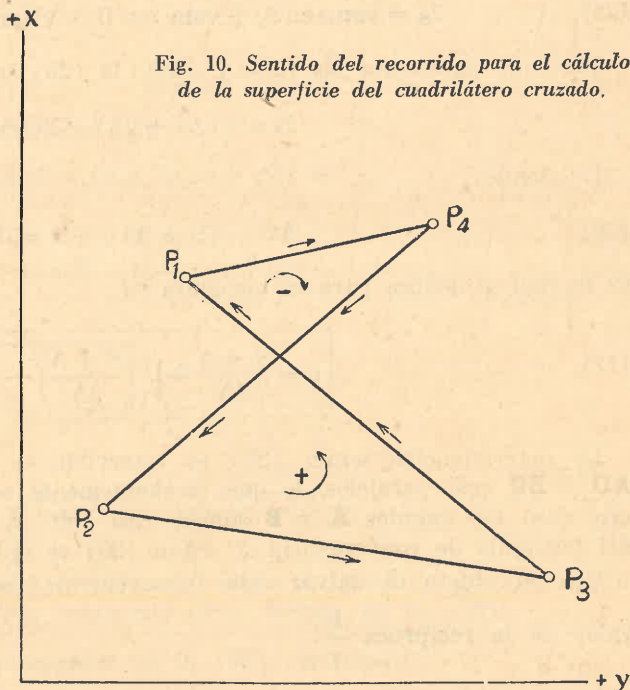
$$(20) \quad \Delta = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} (A + B).$$

En muchos tratados se llama Δ el triángulo de convergencia de los lados b y c , siendo entonces Δ' (fig. 9) el triángulo de convergencia de los lados a y d .

Para cada cuadrilátero se puede construir dos triángulos de convergencia Δ y Δ' . Se traza, por ejemplo, en caso de tratarse de los lados b y c de figura 9, desde el punto C una paralela al lado c , trasladando sobre dicha paralela la longitud del lado c , y uniendo el punto terminal con B .

Del mismo modo se puede construir el triángulo de convergencia Δ' , para el caso de tratarse de los lados a y d .

De las ecuaciones (20) y (16) se deduce que el triángulo de convergencia tiene la misma superficie que el cuadrilátero cruzado $ABDC$ (fig. 8), formado por las dos diagonales AC y BD y los lados opuestos AB y DC , cuya área se calcula de acuerdo al sentido del recorrido del perímetro indicado en figura 10.



Según (19) y fig. 7 tenemos para las dobles superficies $2S$ y $2s$:

$$(21) \quad \begin{cases} 2S = am \operatorname{sen} A + am' \operatorname{sen} B - mm' \operatorname{sen} (A + B) \\ 2s = an \operatorname{sen} A + an' \operatorname{sen} B - nn' \operatorname{sen} (A + B) \end{cases}$$

De acuerdo con la (20) $mm' \operatorname{sen} (A + B)$ es la doble superficie del triángulo de convergencia de los lados m y m' (fig. 7):

$$(22) \quad 2\Delta = mm' \operatorname{sen} (A + B)$$

es decir, Δ es la superficie de un triángulo de lados m y m' y ángulo comprendido $180^\circ - (A + B)$, que fácilmente puede construirse con aquellos datos.

Obtendremos entonces de la (21) para la doble superficie $2S$, teniendo en cuenta la (22):

$$(23) \quad 2S = m \operatorname{sen} A + am' \operatorname{sen} B - 2\Delta$$

Y análogamente, para $2s$ a separar, tomando en cuenta que los lados **AD** y **BC** han de dividirse de tal modo que se verifique la relación:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} = v \\ n = mv; \quad n' = m'v; \quad nn' = mm'v^2 \end{array} \right.$$

Según (21) y considerando las (24):

$$(25) \quad 2s = vam \operatorname{sen} A + vam' \operatorname{sen} B - v^2 mm' \operatorname{sen} (A + B)$$

Teniendo en cuenta las (22) y (23), la (25) se transforma en:

$$2s = v(2S + 2\Delta) - 2v^2\Delta$$

De donde:

$$(26) \quad \Delta v^2 - (S + \Delta)v + s = 0$$

de la cual se deduce para la incógnita v :

$$(27) \quad v = \frac{S + \Delta}{2\Delta} \pm \sqrt{\left(\frac{S + \Delta}{2\Delta}\right)^2 - \frac{s}{\Delta}}$$

La determinación según (27) es inservible en el caso de ser los lados **AD** y **BC** casi paralelos, lo que frecuentemente ocurre en la práctica. En este caso los ángulos **A** y **B** suman casi 180° y, en consecuencia, el área del triángulo de convergencia Δ según (20) es igual a cero.

Con el objeto de salvar este inconveniente, se prefiere determinar el valor de la recíproca $\frac{1}{v}$.

Dividiendo la (26) por v^2 , se obtiene:

$$\Delta - (S + \Delta)\frac{1}{v} + s\left(\frac{1}{v}\right)^2 = 0$$

De donde:

$$(28) \quad \frac{1}{v} = \frac{S + \Delta}{2s} \pm \sqrt{\left(\frac{S + \Delta}{2s}\right)^2 - \frac{\Delta}{s}}$$

Para el caso de ser $s = \frac{1}{2}S$, resulta:

$$(29) \quad \frac{1}{v} = 1 + \frac{\Delta}{S} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{S}\right)^2}$$

En la (28) la raíz con signo negativo no tiene aplicación práctica por dar la división exterior del cuadrilátero.

El signo negativo de la raíz en la (27) corresponde al signo positivo en la (28), de modo que en la (27) se debe tomar el signo negativo.

En general es de observar que tanto en la (27) como en la (28) sólo uno de los dos signos tiene aplicación práctica.

La introducción de las dos razones $q = \frac{s}{S}$ y $z = \frac{\Delta}{S}$ permite obtener directamente el valor de v .

Tenemos entonces:

$$(30) \quad s = qS$$

y

$$(31) \quad \Delta = zS$$

con lo que la (26) se transforma en:

$$Szv^2 - (S + Sz)v + qS = 0$$

Dividiendo por S :

$$zv^2 - (1 + z)v + q = 0$$

De donde se obtiene:

$$(32) \quad v = \frac{1 + z}{2z} \mp \sqrt{\left(\frac{1 + z}{2z}\right)^2 - \frac{q}{z}}$$

$$(33) \quad v = \frac{1 + z \mp \sqrt{(1 + z)^2 - 4q \cdot z}}{2z}$$

En las (32) y (33) debe emplearse el signo negativo de la raíz porque estas ecuaciones representan solamente otras formas de la (27).

Haciendo racional el numerador de la (33), tenemos:

$$v = \frac{[(1 + z) - \sqrt{(1 + z)^2 - 4qz}][(1 + z) + \sqrt{(1 + z)^2 - 4qz}]}{2z [(1 + z) + \sqrt{(1 + z)^2 - 4qz}]}$$

$$(34) \quad v = \frac{2q}{1 + z + \sqrt{(1 + z)^2 - 4qz}}$$

Para $q = \frac{1}{2}$, resulta:

$$(35) \quad v = \frac{1}{1 + z + \sqrt{1 + z^2}}$$

de acuerdo con la (29).

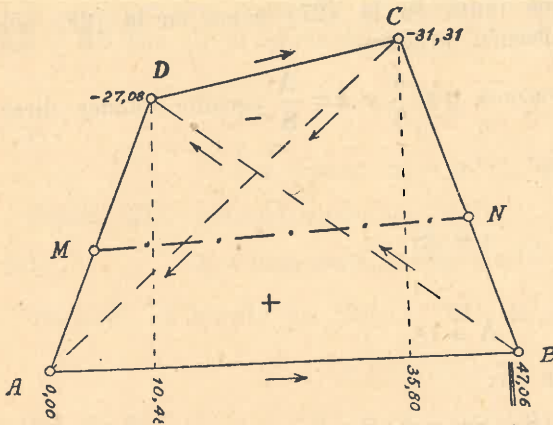


Fig. 11. División proporcional (las flechas indican el camino del cálculo de Δ).

Tendremos entonces:

$$(36) \quad \begin{cases} AM = v \cdot AD \\ BN = v \cdot BC \end{cases}$$

Ejemplo práctico. Dividir el cuadrilátero **ABCD** (fig. 11) de superficie $S = 1057,4 \text{ m}^2$ en dos partes iguales ($q = \frac{1}{2}$) de tal modo que los segmentos **AM** y **BN** determinados, respectivamente, sobre los lados **AD** y **BC**, estén en la misma relación:

$$AM : AD = BN : BC = v$$

cuyo valor se debe hallar.

Cálculo de superficie del cuadrilátero ABCD (fig. 11).
(fórmulas de Gauss).

| Punto | Abcisas x_n | Ordenadas y_n | $\Delta x_n =$ $x_{n+1} - x_{n-1}$ | Productos $y_n \cdot \Delta x_n$ | $\Delta y_n =$ $y_{n+1} - y_{n-1}$ | Productos $x_n \cdot \Delta y_n$ |
|-------|------------------|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| A | 0,00 | 0,00 | +36,58 | 0 | +27,08 | 0 |
| B | 47,06 | 0,00 | +35,80 | 0 | -31,31 | -1473,4486 |
| C | 35,80 | -31,31 | -36,58 | +1145,3198 | -27,08 | -969,4640 |
| D | 10,48 | -27,08 | -35,80 | +969,4640 | +31,31 | +328,1288 |
| | | | + 2 S = | +2114,7838 | - 2 S = | -2114,7838 |
| | | | S = +1057,3919 m ² | | | |

He aquí los datos de la figura:

| | l | Ángulos internos β | Rumbos α | x | y |
|---|---------|--------------------------------|--------------------|-------|--------|
| A | 47,06 m | 68° 51' | 0° 0' | 0,00 | 0,00 |
| B | 33,27 > | 70° 13' | 250° 13' | 47,06 | 0,00 |
| C | 25,67 > | 100° 18' | 170° 31' | 35,80 | -31,31 |
| D | 29,04 > | 120° 38' | 111° 09' | 10,48 | -27,08 |
| A | | | | | |

Cálculo de la superficie del triángulo de convergencia Δ .

Según las fórmulas de Gauss (ver pág. 150) tenemos:

$$\begin{aligned}
 2\Delta &= y_B(x_D - x_A) + y_D(x_C - x_B) + y_C(x_A - x_D) + y_A(x_D - x_C) \\
 &= 0 + 27,08(35,80 - 47,06) - 31,31(0 - 10,48) + 0 \\
 &= +633,05 \\
 \Delta &= +316,52 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Cálculo de v según (35): $v = \frac{1}{1 + z + \sqrt{1 + z^2}}$

(39)

| | | |
|---------------------------------------|---------|----------------|
| Δ | 316,52 | log 2,50040 |
| S | 1057,39 | log 3,02423 |
| $z \left(= \frac{\Delta}{S} \right)$ | 0,29934 | log 9,47617—10 |
| z^2 | 0,08961 | > 8,95234—10 |
| $1 + z^2$ | 1,08961 | > 0,03727 |
| $\sqrt{1 + z^2}$ | 1,04386 | > 0,01864 |
| $1 + z$ | 1,29934 | |
| $1 : v$ | 2,34320 | > 0,36981 |
| v | 0,42677 | > 9,63019—10 |

Tenemos entonces para los segmentos **AM** y **BN** buscados:

$AM = v \cdot AD$

$BN = v \cdot BC$

los que se calculan en la siguiente planilla.

Luego:

$AM = 12,39 \text{ m};$

$BN = 14,20 \text{ m}.$

| | | | |
|--------------|-------|----------------|--------|
| AD | 29,04 | log 1,46 300 | ↑ ↓ |
| v | | > 9,63 019 —10 | |
| BC | 33,27 | > 1,52 205 | |
| $v \cdot AD$ | 12,39 | log 1,09 319 | |
| $v \cdot BC$ | 14,20 | > 1,15 224 | |

Ampliación del problema.

Este método se aplica con ventaja también para superficies largas y angostas, limitadas por poligonales, como la de figura 12 con superficie ΣS . Tales figuras se pueden descomponer en una cadena de cuadriláteros y triángulos. Se calculará para cada figura parcial el triángulo de convergencia Δ . Se formará:

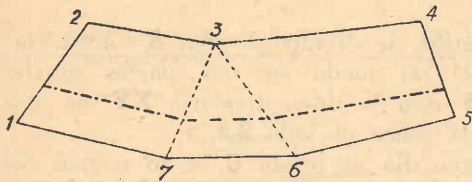


Fig. 12. División proporcional de una cadena de cuadriláteros y triángulos, según C. Müller.

$z = \frac{\Sigma \Delta_i}{\Sigma S}$

y se puede calcular el valor de v por medio de la (26), en que S , s y Δ han sido reemplazadas por ΣS , Σs y $\Sigma \Delta$, respectivamente.

Esta manera de proceder se explica si la (25) es establecida para cada figura parcial (cuadrilátero o triángulo) y si luego se suman las ecuaciones así obtenidas.

Tendremos entonces para la (26) la forma más general:

(40) $\Sigma \Delta \cdot v^2 - (\Sigma S + \Sigma \Delta) v + \Sigma s = 0$

Reglas prácticas y de recapitulación.

Regla 1. El triángulo de convergencia de una figura triangular (ejemplo: 7-3-6, fig. 12) es esta figura misma.

Regla 2. El triángulo de convergencia es de signo positivo cuando los lados opuestos del cuadrilátero o triángulo a dividir convergen hacia arriba (como por ejemplo el cuadrilátero 1-2-3-7 y el triángulo 7-3-6 de figura 12), y negativo cuando los lados a dividir convergen hacia abajo (ejemplo: cuadrilátero 6-3-4-5 de fig. 12).

Regla 3. Cuando se quiere dividir la superficie en más de dos partes, manteniendo siempre la proporcionalidad de los segmentos cortados por las líneas divisorias, se debe para cada valor de q , calcular el correspondiente valor de v , es decir, para $q_1 = 1/3$, por ejemplo, el valor v_1 , para $q_2 = 2/3$ el valor v_2 , etc.

Regla 4. Relaciones entre v , q y z . Como se ve de la (34), son iguales v y q cuando $z = \left(\frac{\Delta}{S}\right)$ es cero, y aproximadamente iguales cuando el valor de z es muy pequeño. Las cantidades v serán más pequeñas que las q [según cuadro (39): $v = 0,42677$, $q = 1/2$] cuando z tiene signo positivo (ejemplo **ABCD**, fig. 11) e inversamente, de modo que resulta:

$$(41) \quad \begin{array}{l} v < q \\ > q \end{array} \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} z > 0 \\ < 0 \end{array}$$

Estas reglas son de mucha utilidad para rápido contralor de cálculo.

7. División de parcelas por ensayos en base a un plano.

Las resoluciones de los problemas 1 a 5 nos han conducido a fórmulas y resultados exactos. No era en ellas indispensable la existencia de un plano exacto de la parcela que se trató de dividir.

Cuando se disponga de un plano exactamente dibujado y a escala suficientemente grande, conviene a veces hacer uso del mismo, determinando gráficamente un valor aproximado de la incógnita, el que luego será corregido a raíz de los resultados de las mediciones directas ejecutadas en el terreno.

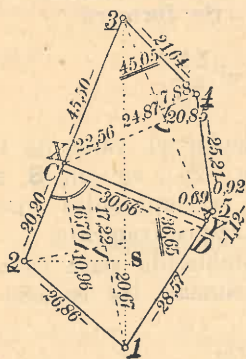


Fig. 13. División por ensayo, según Hohenner.

Ejemplo 6. Trátase de dividir el área $S = 1381,8 \text{ m}^2$ de figura 13, de tal modo en dos partes iguales ($1-2-X-Y = s = 1/2 S$) que la línea divisoria **XY** sea una recta perpendicular sobre el lado 2-3.

Un primer ensayo dió el punto **C**, a 20 metros del punto 2, como probable punto de pie de la perpendicular buscada.

Se trasladó entonces el segmento $2-C = 20$ metros al terreno, marcando el punto **C**. Luego se levantó en **C** la perpendicular, obteniéndose así sobre el lado 1-5 el punto **D**. En seguida se midió la longitud de esta perpendicular auxiliar, encontrándose para ella $CD = (x) = 30,66$ metros.

Sobre la recta **CD** como base de operaciones se le-

vantó luego el cuadrilátero **2-C-D-1**, y se encontró como valor aproximado de la doble superficie **2(s)**:

$$2(s) = 36,65 (16,70 + 20,67) = 1369,6 \text{ m}^2$$

Luego: $(s) = 684,8 \text{ m}^2$

La diferencia $s - (s)$, dividida por (x) , nos dió aproximadamente el valor del desplazamiento dy de la recta **CD** necesario para obtener la posición de la recta **XY** buscada.

Es decir:

$$(42) \quad dy = \frac{s - (s)}{(x)}$$

y con los valores del ejemplo:

$$dy = \frac{690,9 - 684,8}{30,66} = 0,20 \text{ metros}$$

desplazamiento que nos dió la posición de los puntos **X** e **Y** buscados.

Como contralor de la división se determinó la superficie s del cuadrilátero **X-3-4-5-Y** en base a los datos tomados en el terreno y consignados en la figura, y se encontró:

$$2s' = 45,05 \times 22,56 + 44,36 \times 7,88 + 0,92 (0,69 + 24,18) = 1388,8;$$

$$s' = 694,4 \text{ m}^2,$$

es decir, una diferencia con el valor s de $3,5 \text{ m}^2$. Tal diferencia no debe sobrepasar la tolerancia superficial establecida: La fórmula (15), pág. 189, que rige en Prusia y Túnez, da para $s = 694 \text{ m}^2$ una tolerancia $t_s = 20 \text{ m}^2$, las tablas nuestras para mediciones directas y terreno rural (ver pág. 187): según tabla **V**, $t_s = 6,2 \text{ m}^2$.

27.

Rectificación de límites.

Se ilustra el signo de las superficies según regla 2.

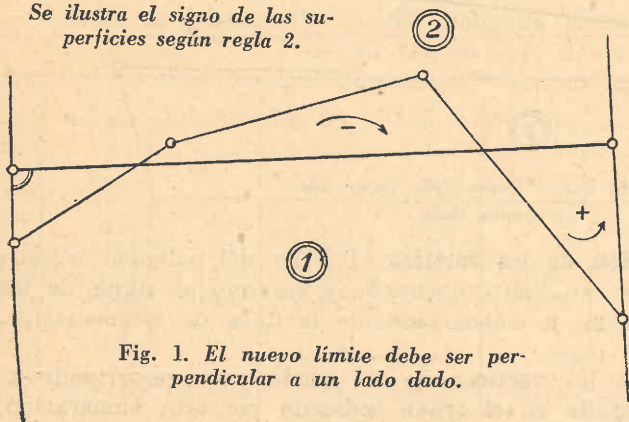


Fig. 1. El nuevo límite debe ser perpendicular a un lado dado.

Trátase de sustituir un lindero irregular constituido por una línea quebrada, por una recta compensadora de tal modo que permanezcan inalteradas las superficies de las propiedades colindantes.

Son 3 los casos principales que se presentan en la práctica con más frecuencia:

- 1º El nuevo límite debe ser perpendicular a un lado dado (fig. 1);
- 2º " " " " " " paralelo a una alineación **AB** dada (fig. 2);
- 3º " " " " " " pasar por un punto **A** dado (fig. 3).

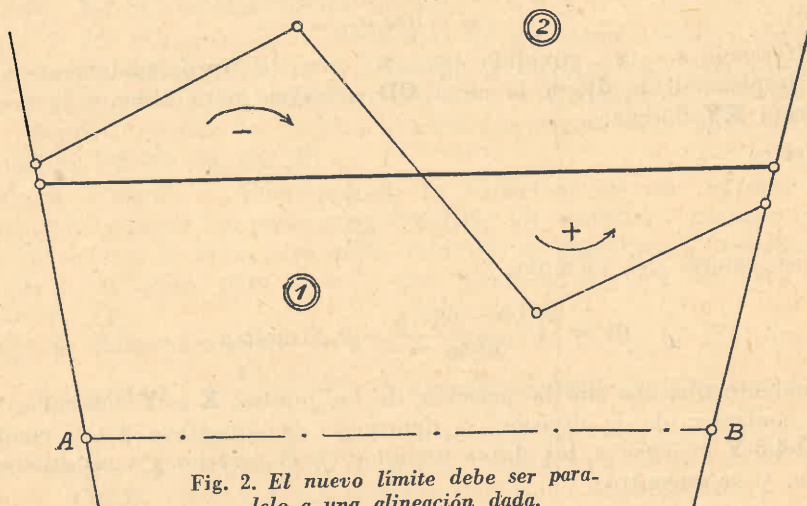


Fig. 2. El nuevo límite debe ser paralelo a una alineación dada.

Respecto a la situación de los ejes de coordenadas (y sucesión de los cuadrantes) nos hemos atenido a la siguiente regla práctica:

Regla 1. Mirando en la dirección de la línea de operaciones, y en el sentido de las abscisas crecientes, se tomarán las ordenadas positivas (ver fig. 10, pág. 138, volumen 2 del Tomo II) hacia la derecha y las negativas hacia la izquierda (ver figuras 4, 5 y 6), de lo que resulta una sucesión de los cuadrantes en el sentido de la marcha de las agujas del reloj.

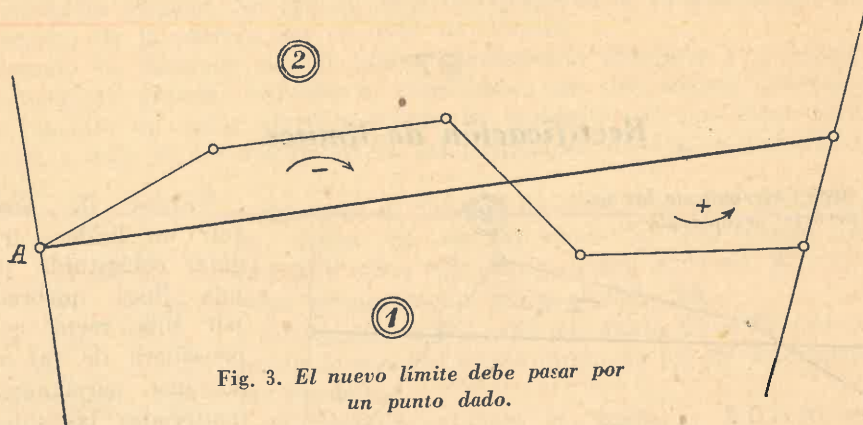


Fig. 3. El nuevo límite debe pasar por un punto dado.

Referente a la numeración de los vértices (1 a n) del polígono cruzado que se forma al rectificarse un límite quebrado, y respecto al signo de las superficies resultantes situadas a ambos lados de la línea de compensación, hemos seguido la siguiente regla:

Regla 2. Se numerarán los vértices de tal modo que, recorriendo el contorno del polígono cruzado en el orden indicado por esta numeración,

las superficies situadas a la izquierda de la línea de operaciones resulten recorridas en el sentido de la marcha de las agujas del reloj, y en el sentido contrario las situadas a la derecha, siendo, por lo tanto, aquéllas de signo negativo y éstas de signo positivo (ver págs. 205 y 206).

Problema 1. El lindero irregular (1)-(2)-(3)-(4) de fig. 4, entre las propiedades ① y ② deberá substituirse por una perpendicular limítrofe MN, sin variar el área de las propiedades colindantes.

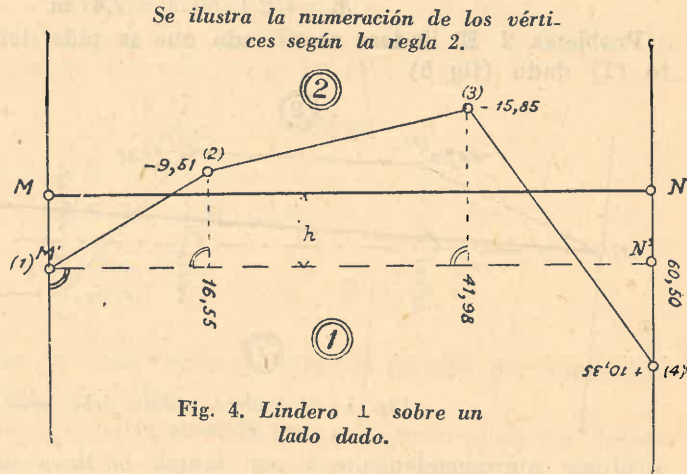


Fig. 4. Lindero 1 sobre un lado dado.

Trácese en el terreno, como solución aproximada del problema, la recta perpendicular M'N', que nos servirá como base de operaciones para la determinación de la línea pedida.

Proyéctense sobre este eje los puntos de la poligonal (1) (2) (3) (4), calculando luego con los datos del levantamiento las superficies parciales.

Según regla 2, resultan positivas las superficies de la derecha y negativa la de la izquierda. La suma algebraica de ellas nos da la magnitud s que servirá para el cálculo del valor h del desplazamiento paralelo de la recta provisional M'N' y del sentido de este desplazamiento.

Tendremos para s:

$$(1) \quad s = M'N' \cdot h$$

Luego:

$$(2) \quad h = \frac{s}{M'N'}$$

Cálculo de la superficie s del polígono cruzado (1)(2)(3)(4)N'(1) con las fórmulas de Gauss.

| Punto | Abscisas x_n | Ordenadas y_n | $\Delta x_n = x_{n+1} - x_{n-1}$ | | $\Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1}$ | | $y_n \cdot \Delta x_n$ | $x_n \cdot \Delta y_n$ |
|---------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------|--------|----------------------------------|-------|------------------------|------------------------|
| | | | + | - | + | - | | |
| (1) | 0,00 | 0,00 | | | | | | |
| (2) | + 16,55 | - 9,51 | 41,98 | 43,95 | | 15,85 | -399,2298 | -262,3175 |
| (3) | + 41,98 | - 15,85 | 43,95 | | 19,86 | | -696,6075 | +833,7228 |
| (4) | + 60,50 | + 10,35 | 18,52 | | 15,85 | | +191,6820 | +958,9250 |
| N' | + 60,50 | 0,00 | | 60,50 | | 10,35 | | -626,1750 |
| (1) | 0,00 | 0,00 | | | | | | |
| Pruebas de cálculo: | | | 104,45 | 104,45 | 35,71 | 35,71 | -904,1553 | +904,1553 |

$$2s = -904,1553 \text{ m}^2$$

$$s = -452,1 \text{ ..}$$

Resulta de este cálculo que la línea **M'N'**, provisionalmente adoptada, divide de tal modo que arriba de dicha línea queda un exceso de 452,1 m² (faltando la misma cantidad abajo). Debe trasladarse, por consiguiente, **M'N'** según (2) hacia arriba en la cantidad **h**:

$$h = 452,1 : 60,50 = 7,47 \text{ m}$$

Problema 2. El lindero rectificado que se pide deberá pasar por el punto (1) dado (fig. 5).

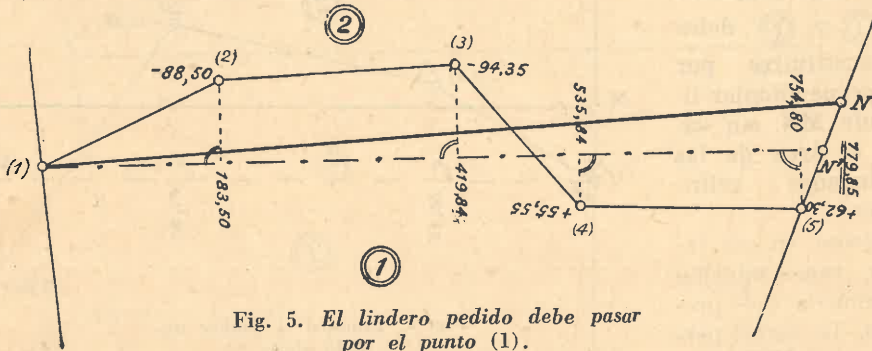


Fig. 5. El lindero pedido debe pasar por el punto (1).

Sitúase aproximadamente y por tanteo la línea provisional (1)-N', utilizándola, análogamente a lo que se hizo en el problema anterior, como base de operaciones, para el levantamiento de los puntos de la poligonal a rectificar. Cálculase la superficie del polígono cruzado. Si ésta resultase igual a cero, la recta (1)-N' tendría la posición pedida. Si esto no se verifica, se desplazará el punto N' en una cantidad **h** cuyo valor y signo se obtendrá de la sencilla relación:

$$(3) \quad s = \frac{1}{2} (1) N' \cdot h$$

$$(4) \quad h = \frac{2s}{(1) N'}$$

Cálculo de la superficie s del polígono cruzado (1)(2)(3)(4)(5)N'(1) con las fórmulas de Gauss.

| Punto | Abscisas x_n | Ordennadas y_n | $\Delta x_n = x_{n+1} - x_{n-1}$ | | $\Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1}$ | | $y_n \cdot \Delta x_n$ | $x_n \cdot \Delta y_n$ | |
|-------|-------------------|---------------------|----------------------------------|----------|----------------------------------|---------|------------------------|-----------------------------|--|
| | | | + | - | + | - | | | |
| (1) | 0,00 | 0,00 | | 596,35 | | 88,50 | | | |
| (2) | +183,50 | -88,50 | 419,84 | | | 94,35 | -37155,8400 | -17313,2250 | |
| (3) | +419,84 | -94,35 | 352,34 | | 144,05 | | -33243,2790 | +60477,9520 | |
| (4) | +535,84 | +55,55 | 334,96 | | 156,65 | | +18607,0280 | +83939,3360 | |
| (5) | +754,80 | +62,30 | 244,01 | | | 55,55 | +15201,8230 | -41929,1400 | |
| N' | +779,85 | 0,00 | | 754,80 | | 62,30 | | -48584,6550 | |
| (1) | 0,00 | 0,00 | | | | | | | |
| | | | +1351,15 | -1351,15 | +300,70 | -300,70 | -36590,2680 | +36590,2680 | |
| | | | | | | | | $2s = -36590,3 \text{ m}^2$ | |
| | | | | | | | | $s = -18295,1$ | |

Resulta de este cálculo que la línea (1)-N', provisionalmente adoptada, divide las superficies ① y ② de tal modo que arriba quedó un exceso de $s = 18295,1 \text{ m}^2$. Es menester, por lo tanto, correr el punto N' sobre la línea (5)-N' hasta que el triángulo cortado resulte equivalente a s .

Para la distancia perpendicular h (no representada en la figura) de este nuevo punto N buscado, tenemos según la (4):

$$h = 2 \cdot \frac{18\,295,1}{779,85} = 46,92 \text{ m}$$

y para obtener la oblicua N'N, la relación:

$$N'N : h = (5)N' : 62,30;$$

de donde:
$$N'N = \frac{\sqrt{62,30^2 + 25,05^2}}{62,30} \cdot 46,92 = 50,57 \text{ m}$$

Problema 3. Rectificar la línea quebrada (1)-(2)-(3)-(4) por una recta paralela a una alineación AB dada (fig. 6).

Trácese una recta paralela auxiliar M'N', que aproximadamente resuelve el problema. Refiérense a esta línea, como base de operaciones, los puntos de la poligonal a rectificar. Cálculase la superficie del polígono cruzado de acuerdo a la regla 2. Si esa superficie resultase de valor $s = 0$, M'N' sería la línea pedida; resultando s con signo positivo, deberá correrse la línea auxiliar hacia las superficies positivas, y hacia las negativas en caso contrario. El valor provisional h' del desplazamiento se determina según (2).

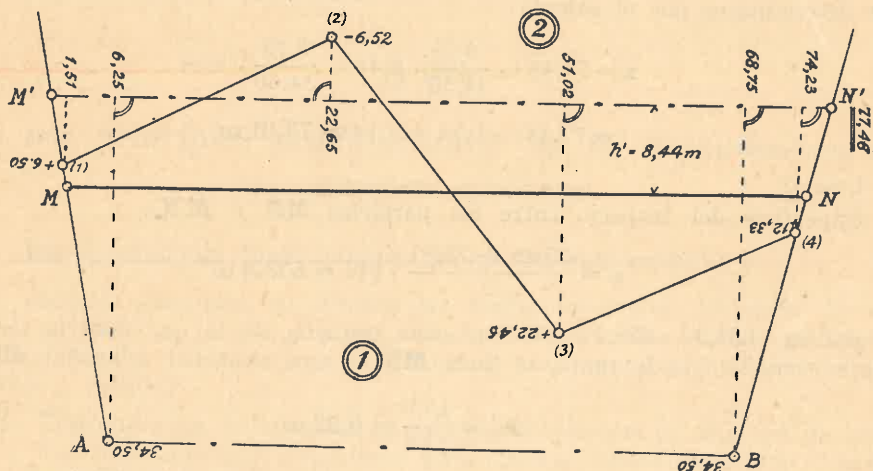


Fig. 6. El nuevo lindero MN debe ser paralelo a una alineación AB dada.

Cálculo de la superficie s del polígono cruzado (1)(2)(3)(4)N'M'(1).

(fórmulas de Gauss)

| Punto | Abcisas | Ordendas | Δx_n | | Δy_n | | $y_n \cdot \Delta x_n$ | $x_n \cdot \Delta y_n$ |
|-------|---------|----------|---------------------|---------|---------------------|---------|------------------------|------------------------|
| | x_n | y_n | $x_{n+1} - x_{n-1}$ | | $y_{n+1} - y_{n-1}$ | | | |
| (1) | + 1,51 | + 6,50 | + 22,65 | | | - 6,52 | + 147,2250 | - 9,8452 |
| (2) | + 22,65 | - 6,52 | + 49,51 | | + 15,95 | | - 322,8052 | + 361,2675 |
| (3) | + 51,02 | + 22,45 | + 51,58 | | + 18,85 | | + 1157,9710 | + 961,7270 |
| (4) | + 74,23 | + 12,33 | + 26,46 | | | - 22,45 | + 326,2518 | - 1666,4635 |
| N' | + 77,48 | 0,00 | | - 74,23 | | - 12,33 | | - 955,3284 |
| M' | 0,00 | 0,00 | | - 75,97 | + 6,50 | | | |
| (1) | + 1,51 | + 6,50 | | | | | | |
| | | | +150,20 | -150,20 | + 41,30 | - 41,30 | +1308,6426 | -1308,6426 |

$$2s = + 1308,6 \text{ m}^2$$

$$s = + 654,3 \text{ m}^2$$

$$h' = \frac{654,3}{77,48} = 8,44 \text{ m}$$

que es el desplazamiento indicado en la figura 6.

En el caso particular de ser **AM** y **BN** paralelas, este valor h' sería el que correspondería a la solución exacta del problema. Cuando esas líneas convergen hacia abajo, como ocurre en nuestra figura 6, ese valor debe ser aumentado, y disminuído, cuando converjan hacia arriba.

El largo **MN** = x , disminuído en consecuencia del desplazamiento, puede determinarse por el cálculo:

$$x = 77,48 - \frac{6,25}{34,50} \cdot 8,44 - \frac{8,73}{34,50} \cdot 8,44$$

$$= 77,48 - 1,53 - 2,14 = 73,81 \text{ m}$$

Luego:

Superficie del trapecio entre las paralelas **MN** y **M'N'**:

$$s = \frac{77,48 + 73,81}{2} \cdot 8,44 = 638,4 \text{ m}^2$$

o sea en $(654,3 - 638,4) = 15,9 \text{ m}^2$ más pequeña de lo que debería ser. Deberá correrse, por lo tanto, la línea **MN** en una cantidad adicional dh' de:

$$dh' = \frac{15,9}{73,8} = 0,22 \text{ m}$$

Tenemos entonces para el valor del desplazamiento h definitivo:

$$h = h' + dh' = 8,44 + 0,22 = \underline{8,66 \text{ m}}$$

§ 28.

Planos topográficos y planos catastrales

El levantamiento y plano topográfico de una región tienen por objeto proporcionar de las localidades, caminos, cursos de agua, bosques, etc. existentes en el terreno, una representación gráfica a escala reducida (**planimetría del terreno**), la que se complementa por la representación de las **formas del terreno** por medio de curvas de nivel fidedignas, resultando así un **plano topográfico completo**, el que no sólo permite deducir las distancias entre puntos cualesquiera, sino que informa rápida y exactamente sobre el carácter altimétrico de la zona que se representa, facilitando, además, la determinación de pendientes y alturas que interesen.

El levantamiento y plano catastral, en cambio, se ocupan principalmente de la determinación y representación de los **límites de las parcelas** y del cálculo de las superficies de las mismas en base a las medidas directas tomadas en el terreno; de la división de las parcelas originadas por herencias, etc.

Ambas clases de levantamientos y planos deben estar basados en puntos fijos trigonométricos, los que les proporcionan el marco de referencia con los necesarios elementos de contralor. Con ello se asegura a ambas clases de trabajos una validez indiscutible no sólo para el presente sino para el porvenir.

(Ver pág. 20 de la **Introducción**.)

§ 29.

Los seis principios fundamentales de la organización de un catastro moderno.**1. Los 6 principios fundamentales de un catastro moderno.**

No obstante discrepar en detalles las reglamentaciones generales de catastros en vigor en distintos países, ellas contienen todas ciertos **principios fundamentales** y presuponen la existencia de una organización como la que pasamos a detallar:

- I. **Triangulación.** Fúndase el procedimiento catastral en una red de puntos trigonométricos. Ejecútanse estos trabajos básicos siguiendo el principio de pasar de lo grande a lo pequeño, midiendo primero los triángulos de primer orden, luego los de segundo y tercer orden para ir así descendiendo a los de cuarto orden de lados de pocos kilómetros de longitud.
- II. **Poligonación.** Apóyase en la red de puntos trigonométricos una red de puntos poligonales, que son los verdaderos puntos básicos para las mediciones de las parcelas.

III. **Levantamiento de parcelas y confección de croquis originales.** Regístranse en croquis originales los resultados del relevamiento parcelario.

IV. **Planos catastrales o registros gráficos.** En base a los croquis originales se confeccionan los planos catastrales a escalas convenientes y en hojas limitadas a veces por accidentes naturales, ríos, caminos, etc. Tales planos son dibujados de acuerdo a las prescripciones que rigen en cada país. Son los llamados "**registros gráficos**".

Cada parcela lleva su número que la individualiza, figurando la misma con este número no sólo en el plano sino también en los **registros catastrales escritos**. Ver decreto de Rivadavia, pág. 16 de la "**Introducción**".

V. **Registros catastrales, objetivo y subjetivo; sus características.** Estos registros conjuntamente con los planos catastrales informan sobre la existencia de la propiedad raíz, sus límites, dimensiones, superficies, nombres de propietarios, etc. Constituyen los registros lo que se llama "**catastro**" en el sentido estricto de la palabra. Técnicamente es una catalogación análoga a la de una biblioteca en continua modificación y transformación. Como en ésta rigen también en el catastro **dos principios o criterios** para poder encontrar un dato del catálogo con el máximo de prontitud y seguridad de la búsqueda: **el orden alfabético y el orden por materias**. En el catastro esto significa: el orden de los propietarios, el **catastro subjetivo**, y el **catastro objetivo** que nos da la situación topográfica de las parcelas. Mientras el **registro subjetivo** tiene por finalidad dar un resumen de todos los bienes raíces de una misma persona, el **catastro objetivo** reúne todas las parcelas de una misma región, siendo, por lo tanto, una especie de **libro de consulta** para saber con qué número una determinada parcela ha de buscarse en el catastro subjetivo. En esta forma la administración está protegida contra el peligro de que un mismo inmueble pueda adjudicarse a varias personas distintas.

VI. **Conservación del catastro.** Con el objeto de mantener al día la obra catastral, se establece un servicio especial denominado "**conservación del catastro**", que tiene por misión asentar en los registros y planos todas las modificaciones y transformaciones que se vayan produciendo en el transcurso del tiempo a consecuencia de compras y ventas, donaciones, herencias, división de condominios, etc.

2. Fundamento de un moderno catastro.

La obra catastral conceptualizada en la forma explicada tiene por base esencial e imprescindible una red de puntos fijos, sólida y precisamente marcados y referidos a un sistema de coordenadas. Tales puntos proporcionan numerosos contralores, lo que garantiza el valor duradero del catastro para largas épocas.

3. Inconveniente de un catastro no basado en puntos fijos.

Un catastro que no estuviera levantado y asegurado en la forma que dejamos ligeramente esbozada, si bien pudiera satisfacer ciertas necesidades apremiantes del presente, carecería de lo principal que se debe exi-

gir a un catastro moderno: **No sería una base fidedigna para la seguridad y conservación de los límites de la propiedad raíz.**

No es suficiente que el agrimensor, para fijar los límites de un bien raíz, mida, por ejemplo, desde los límites del terreno vecino, o que arranque en la esquina edificada más próxima, porque los resultados de tales mediciones pueden ser contradictorios, — dentro de ciertos límites lo serán siempre.

4. Ventajas de un catastro moderno.

Si, en cambio, existen marcas fijas en los caminos, aceras, etc., como las tienen todas las ciudades con **catastro** moderno, ellas permiten al agrimensor tener siempre a mano puntos de arranque de una seguridad absoluta, y si un propietario edifica, lo hará dentro de los límites de su propiedad sin perjudiciar en lo más mínimo al vecino.

Un catastro moderno así fundado es una base técnica indiscutible para todos los levantamientos complementarios del futuro, la que, una vez creada, ha de ir produciendo en el propietario y comprador, como en el público en general, una absoluta confianza en la seguridad del bien raíz, de no despreciable influencia sobre la cotización inmobiliaria y el crédito hipotecario, siendo así un importante factor de progreso.

§ 30.

Variación del objetivo de los planos catastrales en distintas épocas.

Es con el objeto de crear bases geométricas para la fijación justiciera de los impuestos sobre la propiedad raíz, de acuerdo a su valor productivo, que la mayor parte de los países civilizados, a fines del siglo 18 y principalmente durante el 19, efectuaron sus levantamientos catastrales.

Mas, las exigencias cada día mayores de la técnica y economía de los pueblos, el enorme aumento de las vías de comunicación conducían a que poco a poco se sobrepasaban los estrechos límites de la finalidad originaria del catastro: Los levantamientos catastrales modernos ya no sirven al exclusivo objeto de la determinación de las superficies sino **principalmente a la creación de las bases geométricas y jurídicas para la seguridad de la propiedad raíz, facilitándose así la movilización del crédito hipotecario.**

En los países con trabajos topográficos y catastrales muy adelantados los planos de catastro de conjunto sirven para estudios y proyectos de obras públicas urbanas y todas las múltiples necesidades de la administración de un Estado.

Podemos decir, resumiendo, que **el plano catastral moderno es la expresión gráfica más completa de la riqueza inmobiliaria, pública y privada, de un país.**

Indice alfabético de Agrimensura y Catastro.

Los números significan páginas. Las rayitas (—) substituyen los términos impresos en negritas en el presente Indice.

- A**bscisa, definición 72.
Acimut, definición 133.
Agrimensura, definición 2.
Aguilar, F. 127.
Alineación, definición 23, — por prolongación 26, precisión 26, — a través de un valle 27, — reciproca 26, método de — 77.
Altitud, definición 3.
Altura, definición 3.
Amonamiento de los puntos de parcelas 23.
Ampliación de planos 141.
Amsler, J. inventor del planimetro polar, retrato 156.
Angulo de altura 3, — vertical 3, — de elevación 3, — de depresión 3, — de pendiente mínima para la reducción gráfica 36.
Anotación, reglas de — 74.
- B**ase de contraste 37.
Base topográfica; ejecución de la medición 32.
Bauernfeind, inventor del prisma de agrimensurador 64.
Behaim, Martín 108.
Bessel 6.
Bond, Henry 113.
Borda 5.
- C**álculo de superficies por fórmulas 146.
Característica de la proyección Cassini-Soldner 110, — de las fajas meridiana Gauss-Krüger 123.
Característica del procedimiento gráfico puro 177, semigráfico 179.
Característica de la organización de un catastro moderno 211.
Carta, definición 102.
Carta plana, definición 109, — de Marinus 110.
Catastro, principios fundamentales para su organización 211.
Catastro objetivo 212.
Catastro subjetivo 212.
Cinta de acero de agrimensurador, su descripción y práctica con la misma 28, 29.
Cinta de tela 31.
Cinta de invar 32.
Comparador de cintas de acero 38.
Compás de reducción, su descripción 141, su uso 142.
Conservación de catastro 212.
- Contraste de medidas lineales, su necesidad 36, autoridad que lo ejecuta 37.
Convergencia de meridianos, definición 131, 133.
Convergencia magnética, definición 133.
Convergencia de la plomada 22.
Conversión de medidas angulares 14, 15.
Coordenadas planas, método de — 72.
Coordenadas polares, método de — 75.
Coordenadas de cuadrícula, definición 126.
Coordenadas Gauss-Krüger, definición 126.
Coordinatogramas rectangulares, modelo grande 95, modelo pequeño 97.
Coordinatogramas polares, 89, 90.
Copia de planos, 138.
Coradi, G., su retrato 174.
Croquis original, contenido 70, escala 70, orientación 71.
Cruz de espejos 56.
Cuadrícula, coordenadas de — 126.
Cuadrículado, su construcción 128.
Cuadrilátero cruzado 199.
- D**eclinación de la aguja, definición 133.
Declinación magnética, " 133.
Deformación del papel 98.
Deformación producida por una proyección 104, lineal 104, areal 105, angular 104.
Delambre 5.
Designación de las hojas de la carta oficial de la República Argentina, anterior 135, actual 137.
Dioptra 35.
División sexagesimal, su definición 10, sus símbolos 10, su transformación 14.
División centesimal, definición 10, sus símbolos 10, ventajas e inconvenientes 11, perspectiva de triunfar en el futuro 11, su transformación 14.
División horaria, definición 11, sus símbolos 11, su transformación 14.
- E**quiárea, proyección — 105.
Equilibrio de los errores 181.
Equivalente, proyección — 105.
Error grosero 43, — accidental 44, — sistemático 43.
Error accidental máximo 46.
Error sistemático máximo 47.
Error relativo del planimetro 171.
Error de índice de un sextante 61.

- Error de excentricidad de un sextante 62.
 Error de lectura de un transportador 86, 87.
 Escala de reducción de planos, su necesidad 17, su elección 17, clasificación 21.
 Escala gráfica simple 19, — de transversales 19.
 Escuadra de agrimensor 49, — de pinulas 49, — de espejos 54, — de prismas 62.
- F**aja meridiana de coordenadas Gauss-Krüger 123.
 Fernel 40.
 Fichas para marcar 28.
 Formatos 100.
 Formulario Agr. 1: mediciones lineales 31.
 Formulario Agr. 2: mediciones lineales 32.
 Formulario Agr. 3: coordenadas Gauss-Krüger 20, 21 del Apéndice II.
 Formulario Agr. 4: coordenadas Gauss-Krüger 22 del Apéndice II.
 Formulario Agr. 5: fórmulas del trapecio 152.
 Formulario Agr. 6: fórmulas de Gauss 152.
 Fórmula fundamental de Mercátor 112.
 Fórmula de Herón 146.
 Fórmulas del trapecio 148, 149.
 " de Gauss 150, 151.
- G**auss, C. F., retrato 43, fórmulas de — 151.
 Gauss-Krüger, coordenadas — 126.
 Geodesia, definición 1, — inferior 104, — superior 104, — elipsoidica 104, — del geoide 104.
 Goldschmid 143.
 Globo terráqueo, primer constructor 108, su importancia didáctica 108.
 Goulier 66.
- H**ammer 126, precisión del planímetro 171.
 Hayford 6.
 Herón de Alejandría 49.
- I**nclinómetro, 34.
 Inconvenientes del método constructivo 78, de coordenadas planas 79, de coordenadas polares 79.
 Inseguridad gráfica 20, su influencia en las diversas escalas de dibujo 21.
- Instrucciones I, II y III del catastro suizo 191.
 Instrucción IX del catastro de Prusia 46.
 " VIII " " " " 189.
- J**agsich, J. 127.
 Jalón 24.
- K**remer, G., latinizado Mercátor 108.
 Krüger, L. 123.
- L**agrange 126.
 Lambert 105, 109, 117, 141.
 Lang, O. 170.
 Levantamiento constructivo 71, por coordenadas planas 72, por coordenadas polares 75, por rodeo 76, por alineaciones 77.
 Ley de Gauss, 1ª ley 44, 2ª ley 44.
 Libreta de campo 70.
- M**arcación de los puntos catastrales 23.
 Méchain 5.
 Mercátor 108, su retrato 109, fórmula fundamental de — 111.
 Metro, procedencia del término 5.
 Metro Prototipo Internacional 7.
 Mettler, J., 122, 127.
- N**ewton, I., su retrato 57.
 Nivel esférico 25.
 Normalización de los formularios y registros de campo 29.
 Normas prácticas de campo 29, de dibujo 70.
- O**bjetivo, catastro — 212.
 Objetivo, doble — de las proyecciones cartográficas 105.
 Objeto del levantamiento topográfico 211, — del levantamiento catastral 211, de la agrimensura 2, de la topografía 1.
 Ordenada, definición 72.
 Organización de un catastro moderno 211.
 Ott, A. 143, 156, 161.
- P**antógrafo, descripción y uso 143, 144.
 Pantómetro, descripción 53, precisión 53.
 Patrón normal, dos tipos 5, 6.
 Pentaprismas 66, 67.
 Pinula, definición 50.
 Planímetro polar, su descripción 155, teoría 157, uso 164, precisión 171.
 Planímetro a disco y rodillos, su descripción 172, teoría 175.
 Plano, importancia 83, precisión 174.
 Plomada 24.
 Podómetro 39.
 Precisión de la vertical 24, de la medición con planímetro 171, de la medición lineal directa 45, de la determi-

- nación de superficies 154, del dibujo catastral 174.
Principio de la inversión 52, 85.
Principio de la medición relativa con planímetro 164.
Prisma de Bauernfeind 64.
Problemas de obstáculos 80.
Procedimiento gráfico puro 177.
Procedimiento semigráfico 179.
Propagación del error, 1ª ley 44, 2ª ley, 44.
Prototipo Internacional del Metro 7.
Prototipo Nacional del Metro 7.
Proyección sobre el globo terráqueo, su ventaja 104.
Proyección ortogonal 102, 106, sus límites 104.
Proyecciones cartográficas, su doble objetivo 105.
Proyección conforme, definición 106.
Proyección acimutal 106, — estereográfica 106.
Proyección de puntos básicos 107.
Proyección Cassini-Soldner, su característica 110.
Proyección cilíndrica normal de Mercátor 107, primera etapa de un desarrollo 110, fórmula fundamental 112, teoría 113, fórmula completa 114, construcción de una red de carta 115, aplicación de la — 117.
Proyección Lambert cilíndrica conforme 117, su diferencia con la de Mercátor 117, teoría 118, su aplicación 121, construcción de una red Lambert 121.
Proyección Gauss 123.
Proyección Gauss-Krüger 105, 123, 124.
- Radián**, definición 12, constantes de transformación 12, su conversión en otras unidades angulares 14, 15.
Rectificación de límites 205.
Reducción de distancias inclinadas 33.
Reducción de planos 141.
Registros catastrales 212.
Reglas de anotación 74.
Reproducción de planos, — con pantógrafo 143, por el calcado 138, el compás de reducción 142, con papel ferroprusiato 139, ferrogalato 140, papel sepiá 139, con "Ozalid" 140.
Resaltos horizontales, medición por — 35.
Reticulado de coordenadas planas, su necesidad 92, su trazado 94.
Rodeo, método por — 76.
Ruleta de acero 28.
Rumbo magnético, definición 133.
Rumbo verdadero, definición 133.
Rumbo, simplemente, o rumbo trigonométrico, definición 133.
- Salto de la cuadrícula** 133.
Schols, cita relativa a la doble finalidad de las proyecciones 105.
Sellado de las cintas de acero 38.
Señalación de los puntos en el terreno 22.
Sextante, descripción 58, — de bolsillo 59.
Signo de la superficie 149, 151, — del cuadrilátero cruzado 199.
Signos convencionales 79, 90 y Apéndice III.
Símbolos de unidades de medida angular: división sexagesimal 10, centesimal 11, horaria 11.
Sistemas de coordenadas planas, — general 91, — local 91.
Sistemas de coordenadas Gauss-Krüger argentinos 124, 125.
Superficie del terreno, su relación con la del plano 178.
Superficie topográfica, definición 23.
Suplementos a las tolerancias lineales 48, — a las tolerancias superficiales 185.
- Tayllerand** 5.
Temperatura de referencia 38.
Teoría de la proyección Mercátor 113, — Lambert 117.
Teoría del planímetro polar 157, — a disco y rodillos 174.
Teoría de la escuadra de agrimensor 55, — del pantógrafo 144.
Tiralíneas 85.
Toesa 5.
Tolerancias lineales, su necesidad 41, definición 41, fórmulas propuestas por el autor 48.
Tolerancias superficiales 184.
Transformación de unidades angulares en otras 14, 15.
Transportadores 86.
Triángulo de convergencia, definición 199, superficie del — 199.
Troqueómetro, su descripción 40.
- Unidades de medida lineal** 8, — superficial 8, — angular 14, 15.
Unificación de los formularios y registros de campo 29.
- Vara**, su equivalencia 8.
Ventajas de la temperatura de referencias 38, de los diversos métodos de levantamiento 78, 79.
Ventajas de las proyecciones cilíndricas y cónicas 106.
Ventajas de las coordenadas Gauss-Krüger 131.

Índice de Nombres

relacionados con el contenido del present: Tomo.

Aguilar, Félix, ingeniero geógrafo, astrónomo, geodesta, * San Juan, mayo 2 de 1884, † La Plata, septiembre 28 de 1943, ex-director del Observatorio Astronómico Nacional de La Plata, ex-jefe de la División Geodesia del Instituto Geográfico Militar, ex-profesor de la Escuela Superior Técnica del Ejército, ex-profesor de geodesia de la Facultad de Ingeniería de La Plata, organizador



Félix Aguilar.

de la Escuela Superior de Ciencias Astronómicas, ex-presidente de la Comisión para la medición de un Arco de Meridiano, trabajo científico que auspició y llevó a feliz término, miembro de la Comisión de Límites argentino-boliviano y argentino-chileno etc., poseedor de una sólida cultura científica. Desarrolló una intensa labor en los institutos técnicos y observatorios astronómicos en que actuó, tanto nacionales como extranjeros. Profesor prestigioso, ha dejado una nutrida bibliografía, con lo que ha contribuido personalmente a impulsar las actividades geodésicas y astronómicas del país. Entre sus obras merecen destacarse las intituladas: *Determinaciones de la variación de la latitud para las investigaciones del movimiento del polo, 1908-1910, Resultado de las observaciones en la zona 57° a 61° con el círculo meridiano Gauthier, durante el año 1914; Lecciones de geodesia (2 tomos), Una solución del método de Gauss generalizado a más de tres astros y tablas auxiliares, 1940, Determinaciones relativas de gravedad en Postdam, Belgrano, La Plata, Córdoba, etc.*

Barrancos, Leónidas Alfredo, ingeniero civil, * Chivilcoy, noviembre 10 de

1889, † Buenos Aires, noviembre 25 de 1941, ex-geodesta del Instituto Geográfico Militar, ex-jefe de la División Meteorología de la Dirección de Meteorología, Geofísica e Hidrología, ex-profesor de topografía en la Universidad Nacional de La Plata.

Barreiro, Héctor Alejandro, mayor agrimensor, * La Paz (Entre Ríos), febrero 27 de 1890, ex-jefe de la División Topografía del Instituto Geográfico Militar, ex-profesor de topografía en la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo (San Juan), ex-profesor de geodesia en la misma escuela, director de Geodesia, Topografía y Mapa de la Provincia de San Juan.

Bessel, Friedrich Wilhelm, astrónomo y geodesta alemán, *Minden, julio 22 de 1784, † Königsberg, marzo 17 de 1846. Ejecutó en colaboración con *Baeyer* la célebre medición de arco de la Prusia Oriental. En 1843 B. publicó los resultados de un cálculo de compensación de todos los valores relativos a las dimensiones del elipsoide terrestre hasta entonces obtenidos.



F. W. Bessel.

Los resultados de este cálculo de compensación son conocidos bajo la denominación de "*dimensiones del elipsoide de Bessel*", las que constituyen el fundamento de un gran número de extensos trabajos geodésicos realizados durante el siglo pasado y principios del presente siglo.

Borda, Jean Charles, ingeniero francés, * Dax, mayo 4 de 1733, † París, fe-

brero 20 de 1799, ex-jefe de división de la Marina. Inventó el llamado "círculo de Borda", se le debe la introducción del término "metro" para la nueva unidad lineal.

Bowie, William, ingeniero civil y geodesta estadounidense, * Anne Arundel County (Maryland), mayo 6 de 1872, † Washington, agosto 25 de 1940. Se graduó de ingeniero civil en 1895, en la Lehigh University, y doctor en ciencias, en 1922, en la misma universidad. Entró en 1895 en el Coast and Geodetic Survey y realizó como jefe de comisión importantes campañas geodésicas hasta el año 1909, en que fué nombrado jefe de la División Geodesia.



William Bowie.

Bowie ocupó este cargo hasta el año 1936, en que se jubiló. Entre Bowie y Hayford inició en 1909 una intensa colaboración en la aplicación de la isostasia a la determinación de la gravedad, prolongándose esta colaboración hasta más tarde cuando Hayford ya no pertenecía más al personal del Coast and Geodetic Survey. Los resultados de este trabajo de congenial colaboración fueron publicados en una memoria bajo el título: *Effect of Topographic and Isostatic Compensation upon the Intensity of Gravity*, 1912. En el año 1910 había aparecido una publicación de Bowie: *Investigation of Gravity and Isostasy*, en que Bowie había propuesto una fórmula para el cálculo de la gravedad normal hoy muy usada. Fué presidente de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional de 1933-1936. En ocasión de la Asamblea General de Edimburgo de 1936, le fué conferido por la Universidad de Edimburgo el título honorífico de doctor en leyes, en reconocimiento de sus méritos por el desarrollo de la teoría de la isostasia. En 1937 le fué conferido el mismo título por la George Washington University.

Cassini, César Francois, conde de Thury, geodesta y astrónomo francés, * París, junio 17 de 1714, † París, septiembre 4 de 1784, ex-director del Observatorio de París. Inició el levantamiento trigonométrico de Francia y dirigió la construcción

y confección de la "Carte Topographique de France", a la escala 1:86 400 (100 toesas = 1 línea de París), terminada por su hijo Jacques Dominique, la que representa la más importante obra cartográfica de la época.

Chapeaurouge, Carlos de, agrimensor e ingeniero geógrafo argentino, * Buenos Aires, enero 18 de 1846, † Buenos Aires, octubre 7 de 1922, ejecutó los siguientes trabajos: trazado del pueblo y ejido del Tandil, medición de las tierras fiscales del Norte de la Provincia de Santa Fe, fundando y trazando las Colonias de Esperanza, San Justo y Reconquista. En 1872, publicó el primer *Plano Catastral de la Provincia de Santa Fe*, reeditado en 1880.



Carlos de Chapeaurouge.

Delineó en 1882 la ciudad de Mar del Plata, y luego los pueblos de Campana, Arrecifes y Marcos Paz. En 1889, publicó el primer *Plano de la Capital*, con sus deslindes como Capital Federal, el que fué adoptado como plano oficial por la Municipalidad de Buenos Aires. Empezó luego la construcción y publicación del primer *Plano Catastral de la República*, al que dedicó 12 años de intensa labor. Publicó: *Tratado de Agrimensura, teórico y práctico legal*, 1889. En la Dirección General de Ferrocarriles, construyó el *Plano de la República* publicado en 1910. En 1915, Ch. publicó: *El Servicio Topográfico Tunecino*, escrito a raíz de un viaje realizado por Ch., acompañando en calidad de asesor técnico al jurista argentino Dr. Ernesto Quesada, para estudiar la aplicación práctica de la Ley Torrens, recorriendo todos los países que la tienen en vigencia. En 1916 y 1921, fué Presidente de la Sección Agrimensura del Primer y Segundo Congreso Nacional de Ingeniería y presentó al Primer Congreso el trabajo: *Historia de la Agrimensura. Su análisis*, y al Segundo los trabajos: *Catastro Nacional y Sobre Agrimensura Legal*.

Delambre, Jean Baptiste Joseph, astrónomo y matemático francés, * Amiens, septiembre 29 de 1749, † París, agosto 19 de 1822, fué en 1795 miembro del *Bureau des Longitudes* y a partir de 1807 profesor de matemáticas en el *College de France*. Co-

laboró en la célebre *medición de arco Dunkerque-Barcelona* (1792-99). Publicó entre otras obras: *Base du système métrique*, 1810.

Dellepiane, Luis José, general de división, ingeniero civil, * Buenos Aires, febrero 3 de 1865, † Buenos Aires, agosto 2 de 1941,



Lucio J. Dellepiane.

ex-profesor de topografía en la Escuela Superior de Guerra, ex-profesor de geodesia de la Universidad Nacional de Buenos Aires. Publicó: Luis J. Dellepiane y Martín Rogríguez, *Curso de Topografía* 2 tomos, Buenos Aires, 1902, Luis J. Dellepiane, *Instrucciones para los levantamientos con la plancheta "Breithaupt"*, 1902, —, *Curso de geodesia*, Buenos Aires, 1920, 2ª ed. 1924.

Dupeyron, Roberto Manuel, ingeniero civil, * Buenos Aires, junio 19 de 1897, ex-geodesta del Instituto Geográfico Militar, ex-secretario técnico de la Dirección de Meteorología, Geofísica e Hidrología; director del Departamento de Niveles y Calzadas de la Municipalidad de Buenos Aires, profesor de topografía de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata; autor de varios trabajos sobre la especialidad topográfica.

Gast, Paul, doctor en ciencias, geodesta y filósofo alemán, * septiembre 19 de 1876, † Innsbruck, agosto 17 de 1941, ex-jefe de la



P. Gast.

Sección trigonométrica del Instituto Geográfico Militar argentino, ex-profesor de geodesia y topografía en la Escuela Superior de Guerra, ex-profesor de geodesia en la Escuela Superior Técnica de Aquisgrán, ex-profesor de geodesia en la Escuela Superior Técnica de Hanóver, fundador y primer director del Instituto Geodésico de Hanóver. Publicó entre otros asuntos: *Das polygonometrische Triangulierungsverfahren in der argentinischen Landesaufnahme*

(1910), *Von der argentinischen Landesaufnahme* (1913), *Vorlesungen über Photogrammetrie* (1930).

Gauss, Johann Karl Friedrich, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, *Brunsvique, abril 30 de 1777, † Gotinga, febrero 23 de 1855. De sus obras matemáticas interesa mencionar aquí *Theoria combinationis observationum...*, con la cual fundamen-



C. F. Gauss.

tó, en otra forma que *Legendre* e independientemente de éste, el llamado "*método de los mínimos cuadrados*", en el cual aplica el cálculo de las probabilidades a las observaciones, a fin de obtener los resultados más probables y determinar la magnitud del error a temer en cada nueva observación de la incógnita. Gauss se ocupó también de tareas geodésicas (triangulación de Hanóver), de cuestiones ópticas (inventó el heliótropo), topográficas (método de levantamiento con la plancheta que lleva su nombre) y cartográficas (proyección de Gauss). En 1822 obtuvo de la Real Academia de Copenhague un premio por el siguiente trabajo: *Solución general del problema de la proyección de puntos de una superficie dada sobre otra superficie dada, de tal modo que los elementos superficiales de la figura proyección resulten semejantes a los elementos superficiales de la superficie original.*

Guillaume, Charles Edouard, físico suizo, *Fleuer, 1861, † Sevre (cerca de París), junio 13 de 1938, doctor en ciencias de la Universidad de Zürich, Dr. h. c. (doctor honoris causa) de las universidades de Lausana, Ginebra y París, ex-director de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Publicó entre otras cosas: *Unitrés et étalons* (1891), *Recherches sur le nickel et ses alliages* (1898), *Les applications des aciers au nickel* (1904), *Compensateurs des horloges*



Charles E. Guillaume.

et des montres (1921). En el año 1920 obtuvo el Premio Nobel de Física.

González, Fernández Manuel, teniente 1.º (S. R.), * Buenos Aires, abril 19 de 1878, ex-geodesta de la Sección Triangulación del Instituto Geográfico Militar; jefe del Servicio Geodésico Topográfico de la Dirección de Geología y Minas de la Secretaría de Industria y Comercio; autor de numerosos trabajos sobre la especialidad geodésico topográfica, entre las cuales cabe señalar: *Transporte de coordenadas angulares en superficies de revolución* (Boletín del Centro Naval, 1915); *Las mediciones de gravedad y la determinación de la forma del globo* (Vol. IV, 1915-1919, del Anuario del I. G. M.); *Intervención de la ciencia geodésica en el campo de la geografía matemática (unidad cartográfica americana)*, Vol. V, Tomo II, 1920-26, del Anuario del I. G. M.; *Ventajas que para el levantamiento topográfico a plancheta proporciona el cuadrículado de las cartas* (Vol. VI, 1927, del Anuario del I. G. M.); Redactó: *Instrucciones para la utilización del material cartográfico con proyección Gauss-Krüger*, 1927; *Instrucciones para el levantamiento topográfico a escala 1:50 000, en el sistema de proyección Gauss-Krüger* (Disposición Transitoria N.º 226 de la División Topografía del I. G. M., 1928); *Actividades de alta geodesia y cartografía en nuestro país*, 1937; *Fundamentos de geodesia*, 1941; *Fundamentos de cartografía* (Volumen inédito).

Hammer, Ernst von, ingeniero civil y geodesta alemán, * Ludwigsburg, abril 20 de 1858, † Stuttgart, septiembre 11 de 1925. A la edad de 26 años fué nombrado profesor titular de geodesia en la Escuela Superior Técnica de Stuttgart, cargo que ocupó hasta su muerte. Desde muy temprano H. tuvo una marcada inclinación hacia los problemas



E. Hammer.

Como complemento a este trabajo, acompañado de numerosos comentarios y fecundas críticas de los más conocidos métodos, de

proyección en uso, H. publicó en 1889 su principal obra cartográfica propia: *Über geographisch wichtige Kartenprojektionen*, trabajo por el cual la Universidad de Leipzig le confirió el título honorífico de doctor en ciencias. La última importante obra de H. fué: *Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie*, tomo I: *Feldmessen und Nivellieren*. El tomo II que debería tratar de la taquimetría, no pudo aparecer más. A la edad de 66 años, en oportunidad de su cuarentenario como profesor titular de geodesia, la Escuela Superior Técnica de Stuttgart le confirió el título de Dr. ing. h. c.

Hayford, John Fillmore, ingeniero civil y geodesta estadounidense, * Rouses Point (Nueva York), mayo 19 de 1868, † Evanston, marzo 10 de 1925. Se graduó de ingeniero civil, en 1889, en la Cornell University. En este mismo año entró en el Coast and Geodetic Survey y fué jefe de la División Cálculos del mismo hasta 1909, año en que Hayford aceptó un nombramiento como primer director de la Escuela de Ingeniería de la Northwestern University de Evanston. En este cargo permaneció Hayford hasta su muerte. Sus principales obras son dos: *The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States*, publicada por el Coast and Geodetic Survey, 1909, y *Supplemental Investigations in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy*, publicado en 1910. A raíz de estas dos publicaciones Hayford fué elegido en 1911 miembro de la Academia Nacional de Ciencias, que es el más alto título de honor que puede ser conferido a un hombre de ciencias en Estados Unidos. En el año 1918, la George Washington University de Washington le otorgó a Hayford el título honorífico de doctor en ciencias en reconocimiento de la labor científica realizada.



John F. Hayford.

Elipsoide de referencia internacional.

Desde hace tiempo se sentía la necesidad de fijar un elipsoide de referencia internacional para así poder llegar a una unificación en el fundamento de la obra geodésica de todas las naciones. Este deseo de unificación quedó finalmente satisfecho

en la Asamblea General de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional celebrada en Madrid en 1924, en la cual se resolvió adoptar para todos los continentes un elipsoide de referencia internacional, y se adoptaron para el semieje mayor y el aplastamiento del mismo los valores obtenidos por Hayford en su obra: *Supplemental Investigations in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy*, a saber, semieje mayor = 6 378 388 metros \pm 18 metros y aplastamiento $1/297 \pm 0,5$. Este elipsoide de referencia internacional así caracterizado y que los geodestas siguen llamando "elipsoide de Hayford", es, sin duda alguna, un alto timbre de honor para la ciencia geodésica estadounidense.

Helmert, Friedrich Robert, Prof. Dr. * Freiberg (Sajonia), julio 31 de 1843, † Potsdam, junio 15 de 1917. Se graduó de Dr. phil., en la Universidad de Leipzig con la tesis: *Studium über rationelle Vermessungen im Gebiet der Hoheren Geodäsie*, 1886. Ex-profesor de geodesia de la Escuela Superior Técnica de Aquisgrán, ex-director del Instituto Geodésico de Potsdam. Publicó: *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, 1872; *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Hoheren Geodäsie*, años 1880 y 1881; *Lotabweichungen*, 1886; *Beitraege zur Theorie des Reversionspendels*. Organizó el *Servicio Internacional de Latitudes* para la observación de las variaciones de los polos terrestres. En 1900 fué nombrado miembro de la Academia de Ciencias de Berlín.



Robert Helmert.

Instituto Geográfico Militar (I. G. M.), fundado el 5 de diciembre de 1879. Publicó: *Tablas y fórmulas* (elipsoide de Bessel) para el cálculo de la proyección de la Carta de la República, Buenos Aires, 1900, *Elementos de tangencia*, (elipsoide de Hayford y punto de arranque de Córdoba), Anuario Vol. V, Tomo II, Años 1920-26, *Ventajas que para el levantamiento topográfico a plancheta proporciona el cuadrículado de la carta*, Anuario, Vol. VI, 1927, *Colección de tablas y ejemplos para el cálculo de coordenadas Gauss-Krüger y coordenadas geográficas*, 1935, *Tablas de*

coordenadas Gauss-Krüger para las esquinas de planchetas (de 5' en 5' de latitud, entre las latitudes 21° y 56°), publicación geodésica N° 1, 1940, *Comparador de medidas lineales, Base de contraste y Antecedentes de la medida lineal métrica y sus prototipos*, 1935, *Proyección Gauss-Krüger* (desarrollo matemático), 1940, *Tabla de radios de curvatura y arcos de meridianos y paralelos entre las latitudes 21° y 50°* (Elipsoide de Referencia Internacional), publicación geodésica N° 2, 1941, *Publicación técnica N° 9: Coordenadas rectangulares planas Gauss-Krüger, nuevas fórmulas y tablas para cálculo con máquina*, 1946.

Jagsich, Juan, ingeniero diplomado de la Escuela Politécnica de Zürich, * Sopron (antigua Hungría), abril 28 de 1886, profesor de topografía, cartografía y geodesia en la Universidad Nacional de Córdoba.

Juliao, Víctor N., ingeniero civil, * Panamá (Rep. de Panamá), octubre 21 de 1905, profesor de topografía en la Universidad Nacional de Panamá.

Krüger, Johann Heinrich Louis, geodesta y matemático alemán, * Elze, septiembre 21 de 1857, † Berlín Junio 1° de 1923, doctor en ciencias de la Universidad de Gotinga y Dr. ing. h. c. de la Escuela Superior Técnica de Berlín, ex-jefe de Sección del Instituto Geodésico de Potsdam. Publicó entre otros asuntos: L. Krüger, *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene* (representación conforme del elipsoide terrestre en el plano), publicación del Instituto Geodésico de Potsdam, Berlín, 1912, nueva serie N° 52, —, *Fórmulas para la representación conforme del elipsoide en el plano*, Berlín, 1919, que es un formulario con ejemplos destinados al Servicio Geográfico Alemán.

Lagrange, Joseph Louis de, matemático francés * Turín, enero 25 de 1736, † París, abril 10 de 1813, ex-profesor de matemáticas en la Real Academia de Berlín y en la Escuela Politécnica de París. Publicó entre otros asuntos: *Sur la construction des cartes géographiques* (1779). Solucionó L. con este trabajo el problema de la proyección conforme de superficies de revolución.

Lambert, Johann Heinrich, filósofo, matemático y físico alemán, * Mülhausen, agosto 26 de 1728, † Berlín, septiembre 25 de 1777, fundó la teoría de la representación de una superficie sobre otra superficie en sus *Anmerkungen und Zusätze zur Ent-*

stehung der Land- und Himmelskarten, que forma la tercera parte de su famosa obra:



J. H. Lambert.

Beitrag zur Gebrauch der Mathematik und ihrer Anwendung, Berlín 1772, donde L. trata de un modo general la representación de la esfera y del elipsoide en el plano. Estableció L. en la misma obra las condiciones generales de las proyecciones conforme y equivalente. Subrayó especialmente que las deformaciones producidas por la proyección de la esfera sobre el plano son tan considerables que la diferencia entre la esfera y el elipsoide terrestre se hace insensible. Las 5 exigencias formuladas por Lambert cual resumen de sus ideas sobre las *propiedades de una carta*, a saber, 1) que la carta no deforme la figura de los países, 2) que se conserve la magnitud relativa de los países, 3) que las distancias entre diversos puntos de la carta deben hallarse en la misma razón que las correspondientes distancias reales, 4) que lo que en la superficie terrestre se halla situado sobre una línea recta (sobre un círculo máximo de la esfera) debe también en la carta hallarse sobre una línea recta, 5) que debe poderse deducir de la carta la latitud y longitud de un lugar cualquiera; estas exigencias de Lambert que valían ya en el siglo 18 y que dominaban durante todo el siglo 19, son dominantes en el fondo hasta el día de hoy.

Mercátor (en realidad se llamó Kremer, Gerhard), geógrafo y cartógrafo alemán *Rupelmonde, marzo 5 de 1512, † Duisburgo (donde se le erigió un monumento), diciembre 2 de 1594. En 1541 construyó a petición del emperador Carlos V, un celebrado globo terráqueo. En 1554 publicó su gran *Carta de Europa, a escala 1:4 360 000* (5000 toesas = 1 línea de París), a raíz de la cual M. adquirió el renombre de ser el primer



Mercátor.

cartógrafo de su época. En 1569, publicó su famosa *Carta del Mundo* (para el uso de los navegantes), con la cual se inició el primer período de florecimiento de la cartografía.

Méchain, Pierre Francois André, matemático francés, *Laon, agosto 16 de 1744, † Castellón de la Plana (cerca de Valencia), septiembre 20 de 1804, dirigió la célebre *medición de arco meridiano Dunkerque - Barcelona* (1792-99).

Mettler, Jacobo, doctor en ciencias *Beringen (Suiza), octubre 14 de 1877, ex-jefe de la Sección Cálculos del Instituto Geográfico Militar, ex-profesor de matemáticas y física en la Escuela Superior de Guerra.

Müller, Roberto, profesor y agrimensor nacional, *Schleitheim (Suiza), julio 17 de 1876, ex-geodesta del Instituto Geográfico Militar, ex-profesor de topografía en la Escuela de Topógrafos del Instituto Geográfico Militar, ex-profesor del curso libre de topografía en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de La Plata.

Newton, Isaac, físico (fundador de la física moderna), matemático y astrónomo inglés, uno de los más geniales sabios de todos los tiempos, *Whoolstorppe, enero 4 de 1643, † Londres, marzo 31 de 1727, presentó el 28 de abril de 1686 a la Royal Society de Londres el manuscrito de su obra principal "*Philosophiæ naturalis principia mathematica*". Inventó, según Ladham, el *sex tante*, más tarde atribuido a J. Hadley.



Newton.

Ozarán, Alberto Ricardo, teniente coronel ingeniero militar, *Buenos Aires, mayo 15 de 1908, profesor de topografía en la Escuela Superior Técnica del Ejército.

Perazzo, Rodolfo Carlos, teniente coronel ingeniero militar, *Buenos Aires, octubre 1º de 1905, ex-profesor de topografía y cartografía en la Escuela Superior Técnica del Ejército, profesor de fotogrametría en la misma escuela.

Pigretti, Adolfo, ingeniero civil, *Buenos Aires, diciembre 6 de 1877, †Buenos Aires, mayo 19 de 1942, ex-jefe de la División Geodesia de la Dirección General de Tierras de la Nación, ex-profesor de topografía en la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Quiroga, Pedro Roberto, teniente coronel ingeniero militar, *Puerto San Martín (Santa Fe), marzo 21 de 1904, ex-profesor de topografía y fotogrametría en la Escuela Superior Técnica del Ejército, profesor de cartografía en la misma escuela.

Tissot, A. matemático francés, publicó en 1881 la célebre obra: *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections cartographiques*, con la cual creó en forma definitiva la base de la ciencia de las proyecciones cartográficas moderna. *Frischauf*

demostró en 1891 que, no obstante el análisis independiente y original que caracteriza el trabajo de Tissot y no obstante hallarse Tissot separado de Lambert por el espacio de más de un siglo, en muchos puntos de su análisis Tissot se encuentra con Lambert, debiendo por ello Lambert ser considerado principal precursor de Tissot. Dijo *Germain* en el año 1866 respecto a *Lambert*: "que l'illustre professeur de Berlin (1765) a doté l'art des projections de plus de méthodes ingénieuses et utiles que tous ceux qui se sont occupés du même sujet avant et après lui", palabras a las cuales cabe agregar las de *Zoeppritz* (1884): "Las fecundas ideas y el nuevo material científico presentados en aquel entonces por *Lambert* en sus clases y en sus *Beitraege...* a los matemáticos y geógrafos de todas las naciones acaban de ser retribuidos con creces por *Tissot* en su *Mémoire...*, por lo que a Francia se refiere".

APENDICE I

Tolerancias lineales

| | <i>Págs.</i> |
|--------------------------------|--------------|
| Fórmulas y tabla gráfica | 2 |
| Tablas numéricas | 3 |
| Ejemplos de aplicación | 14 |

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|------|------|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 0 | 0 | 0 | 0,001 |
| 0 | 0 | 0 | 0,002 |
| 0 | 0 | 0 | 0,003 |
| 1 | 0 | 0 | 0,004 |
| 2 | 0 | 0 | 0,005 |
| 3 | 0 | 0 | 0,006 |
| 5 | 1 | 0 | 0,007 |
| 6 | ---- | 0 | 0,008 |
| 8 | 2 | 0 | 0,009 |
| 10 | ---- | 1 | 0,010 |
| 12 | 3 | ---- | 0,011 |
| 14 | ---- | ---- | 0,012 |
| 16 | 4 | 2 | 0,013 |
| 19 | 5 | ---- | 0,014 |
| 21 | 6 | ---- | 0,015 |
| 24 | 7 | 3 | 0,016 |
| 27 | ---- | ---- | 0,017 |
| 30 | 8 | 4 | 0,018 |
| 33 | 9 | ---- | 0,019 |
| 36 | 10 | ---- | 0,020 |
| 40 | 11 | 5 | 0,021 |
| 43 | 12 | ---- | 0,022 |
| 47 | 14 | 6 | 0,023 |
| 50 | 15 | 7 | 0,024 |
| 54 | 16 | ---- | 0,025 |
| 57 | 17 | 8 | 0,026 |
| 61 | 18 | ---- | 0,027 |
| 65 | 20 | 9 | 0,028 |
| 69 | 22 | 10 | 0,029 |
| 73 | 23 | ---- | 0,030 |
| 77 | 24 | 11 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 0 | 0 | 0 | 0,01 |
| 1 | 0 | 0 | 0,02 |
| 2 | 1 | 1 | 0,03 |
| 3 | 2 | 2 | 0,04 |
| 5 | 3 | 3 | 0,05 |
| 7 | 5 | 4 | 0,06 |
| 10 | 7 | 5 | 0,07 |
| 14 | 9 | 7 | 0,08 |
| 18 | 12 | 9 | 0,09 |
| 22 | 15 | 11 | 0,10 |
| 27 | 18 | 14 | 0,11 |
| 32 | 21 | 16 | 0,12 |
| 37 | 25 | 19 | 0,13 |
| 43 | 29 | 22 | 0,14 |
| 50 | 34 | 26 | 0,15 |
| 56 | 38 | 29 | 0,16 |
| 63 | 43 | 33 | 0,17 |
| 70 | 48 | 37 | 0,18 |
| 78 | 53 | 41 | 0,19 |
| 86 | 59 | 45 | 0,20 |
| 94 | 65 | 50 | 0,21 |
| 102 | 71 | 54 | 0,22 |
| 111 | 77 | 59 | 0,23 |
| 120 | 83 | 64 | 0,24 |
| 129 | 90 | 69 | 0,25 |
| 139 | 97 | 74 | 0,26 |
| 148 | 104 | 80 | 0,27 |
| 158 | 111 | 85 | 0,28 |
| 168 | 118 | 91 | 0,29 |
| 178 | 125 | 97 | 0,30 |
| 188 | 133 | 103 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 77 | 24 | 11 | 0,031 |
| 82 | 26 | 12 | 0,032 |
| 86 | 28 | 13 | 0,033 |
| 90 | 29 | --- | 0,034 |
| 94 | 31 | 14 | 0,035 |
| 98 | 32 | 15 | 0,036 |
| 102 | 34 | 16 | 0,037 |
| 106 | 36 | 17 | 0,038 |
| 110 | 38 | 18 | 0,039 |
| 115 | 39 | 19 | 0,040 |
| 119 | 41 | 20 | 0,041 |
| 124 | 43 | --- | 0,042 |
| 128 | 45 | 21 | 0,043 |
| 132 | 47 | 22 | 0,044 |
| 137 | 49 | 23 | 0,045 |
| 141 | 51 | 24 | 0,046 |
| 146 | 53 | 25 | 0,047 |
| 150 | 55 | 26 | 0,048 |
| 155 | 57 | 28 | 0,049 |
| 159 | 59 | 29 | 0,050 |
| 164 | 61 | 30 | 0,051 |
| 169 | 63 | 31 | 0,052 |
| 173 | 66 | 32 | 0,053 |
| 178 | 68 | 33 | 0,054 |
| 182 | 70 | 34 | 0,055 |
| 187 | 72 | 36 | 0,056 |
| 192 | 75 | 37 | 0,057 |
| 196 | 78 | 38 | 0,058 |
| 201 | 80 | 39 | 0,059 |
| 206 | 82 | 40 | 0,060 |
| 21 ⁰ | 84 | 42 | |

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 188 | 133 | 103 | 0,31 |
| 199 | 141 | 109 | 0,32 |
| 209 | 148 | 115 | 0,33 |
| 220 | 156 | 122 | 0,34 |
| 231 | 165 | 128 | 0,35 |
| 242 | 173 | 135 | 0,36 |
| 253 | 181 | 142 | 0,37 |
| 264 | 189 | 148 | 0,38 |
| 276 | 198 | 155 | 0,39 |
| 287 | 207 | 162 | 0,40 |
| 299 | 215 | 169 | 0,41 |
| 310 | 224 | 176 | 0,42 |
| 322 | 233 | 184 | 0,43 |
| 334 | 242 | 191 | 0,44 |
| 346 | 251 | 198 | 0,45 |
| 358 | 260 | 206 | 0,46 |
| 370 | 270 | 213 | 0,47 |
| 382 | 279 | 221 | 0,48 |
| 394 | 288 | 229 | 0,49 |
| 406 | 298 | 236 | 0,50 |
| 419 | 307 | 244 | 0,51 |
| 431 | 317 | 252 | 0,52 |
| 443 | 326 | 260 | 0,53 |
| 456 | 336 | 268 | 0,54 |
| 468 | 346 | 276 | 0,55 |
| 481 | 355 | 284 | 0,56 |
| 494 | 365 | 292 | 0,57 |
| 506 | 375 | 300 | 0,58 |
| 519 | 385 | 309 | 0,59 |
| 532 | 395 | 317 | 0,60 |
| 545 | 405 | 325 | |

Suplementos:
I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

Suplementos:
IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 210 | 84 | 42 | 0,061 |
| 215 | 86 | 44 | 0,062 |
| 220 | 89 | 45 | 0,063 |
| 224 | 91 | 46 | 0,064 |
| 229 | 94 | 47 | 0,065 |
| 234 | 96 | 48 | 0,066 |
| 239 | 99 | 50 | 0,067 |
| 243 | 101 | 51 | 0,068 |
| 248 | 104 | 52 | 0,069 |
| 253 | 106 | 54 | 0,070 |
| 258 | 109 | 55 | 0,071 |
| 262 | 111 | 57 | 0,072 |
| 267 | 114 | 58 | 0,073 |
| 272 | 116 | 60 | 0,074 |
| 277 | 119 | 61 | 0,075 |
| 281 | 121 | 63 | 0,076 |
| 286 | 124 | 64 | 0,077 |
| 291 | 127 | 66 | 0,078 |
| 296 | 129 | 67 | 0,079 |
| 300 | 132 | 69 | 0,080 |
| 305 | 135 | 70 | 0,081 |
| 310 | 137 | 72 | 0,082 |
| 315 | 140 | 74 | 0,083 |
| 320 | 143 | 75 | 0,084 |
| 325 | 145 | 77 | 0,085 |
| 330 | 148 | 78 | 0,086 |
| 334 | 151 | 80 | 0,087 |
| 339 | 154 | 82 | 0,088 |
| 344 | 156 | 83 | 0,089 |
| 349 | 159 | 85 | 0,090 |
| 354 | 162 | 86 | |

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 545 | 405 | 325 | 0,61 |
| 557 | 415 | 334 | 0,62 |
| 570 | 425 | 342 | 0,63 |
| 583 | 435 | 351 | 0,64 |
| 596 | 445 | 359 | 0,65 |
| 609 | 456 | 368 | 0,66 |
| 622 | 466 | 376 | 0,67 |
| 635 | 476 | 385 | 0,68 |
| 648 | 486 | 393 | 0,69 |
| 661 | 497 | 402 | 0,70 |
| 674 | 507 | 411 | 0,71 |
| 687 | 517 | 419 | 0,72 |
| 701 | 528 | 428 | 0,73 |
| 714 | 538 | 437 | 0,74 |
| 727 | 549 | 446 | 0,75 |
| 740 | 559 | 454 | 0,76 |
| 753 | 570 | 463 | 0,77 |
| 767 | 580 | 472 | 0,78 |
| 780 | 591 | 481 | 0,79 |
| 793 | 601 | 490 | 0,80 |
| 807 | 612 | 499 | 0,81 |
| 820 | 623 | 508 | 0,82 |
| 834 | 633 | 517 | 0,83 |
| 847 | 644 | 526 | 0,84 |
| 860 | 655 | 535 | 0,85 |
| 874 | 665 | 544 | 0,86 |
| 887 | 676 | 553 | 0,87 |
| 900 | 687 | 562 | 0,88 |
| 914 | 697 | 571 | 0,89 |
| 927 | 708 | 580 | 0,90 |
| 941 | 719 | 590 | |

Suplementos:
I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

Suplementos:
IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 354 | 162 | 86 | 0,091 |
| 359 | 165 | 88 | 0,092 |
| 363 | 168 | 90 | 0,093 |
| 368 | 170 | 92 | 0,094 |
| 373 | 173 | 93 | 0,095 |
| 378 | 176 | 95 | 0,096 |
| 383 | 179 | 97 | 0,097 |
| 388 | 182 | 98 | 0,098 |
| 393 | 184 | 100 | 0,099 |
| 398 | 187 | 102 | 0,100 |
| 403 | 190 | 104 | 0,101 |
| 407 | 193 | 105 | 0,102 |
| 412 | 196 | 107 | 0,103 |
| 417 | 199 | 109 | 0,104 |
| 422 | 202 | 111 | 0,105 |
| 427 | 205 | 112 | 0,106 |
| 432 | 208 | 114 | 0,107 |
| 437 | 211 | 116 | 0,108 |
| 442 | 213 | 118 | 0,109 |
| 446 | 216 | 120 | 0,110 |
| 451 | 219 | 122 | 0,111 |
| 456 | 222 | 123 | 0,112 |
| 461 | 225 | 125 | 0,113 |
| 466 | 228 | 127 | 0,114 |
| 471 | 231 | 129 | 0,115 |
| 476 | 234 | 131 | 0,116 |
| 481 | 237 | 133 | 0,117 |
| 486 | 240 | 135 | 0,118 |
| 491 | 243 | 137 | 0,119 |
| 495 | 246 | 138 | 0,120 |
| 500 | 249 | 140 | |

Suplementos:
I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|------|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 941 | 719 | 590 | 0,91 |
| 954 | 730 | 599 | 0,92 |
| 968 | 741 | 608 | 0,93 |
| 981 | 751 | 617 | 0,94 |
| 995 | 762 | 626 | 0,95 |
| 1009 | 773 | 635 | 0,96 |
| 1022 | 784 | 645 | 0,97 |
| 1036 | 795 | 654 | 0,98 |
| 1049 | 806 | 663 | 0,99 |
| 1063 | 817 | 672 | 1,00 |
| 1076 | 827 | 682 | 1,01 |
| 1090 | 838 | 691 | 1,02 |
| 1104 | 849 | 700 | 1,03 |
| 1117 | 860 | 710 | 1,04 |
| 1131 | 871 | 719 | 1,05 |
| 1145 | 882 | 728 | 1,06 |
| 1158 | 893 | 738 | 1,07 |
| 1172 | 904 | 747 | 1,08 |
| 1186 | 915 | 756 | 1,09 |
| 1199 | 926 | 766 | 1,10 |
| 1213 | 937 | 775 | 1,11 |
| 1227 | 948 | 785 | 1,12 |
| 1240 | 959 | 794 | 1,13 |
| 1254 | 970 | 803 | 1,14 |
| 1268 | 981 | 813 | 1,15 |
| 1282 | 992 | 822 | 1,16 |
| 1295 | 1003 | 832 | 1,17 |
| 1309 | 1015 | 841 | 1,18 |
| 1322 | 1026 | 851 | 1,19 |
| 1336 | 1037 | 860 | 1,20 |
| 1350 | 1048 | 870 | |

Suplementos:
IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|------------|------------|--------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 500 | 249 | 140 | 0,121 |
| 505 | 252 | 142 | 0,122 |
| 510 | 255 | 144 | 0,123 |
| 515 | 258 | 146 | 0,124 |
| 520 | 261 | 148 | 0,125 |
| 525 | 264 | 150 | 0,126 |
| 530 | 267 | 152 | 0,127 |
| 535 | 270 | 154 | 0,128 |
| 540 | 273 | 156 | 0,129 |
| 545 | 276 | 158 | 0,130 |
| 550 | 279 | 160 | 0,131 |
| 555 | 282 | 162 | 0,132 |
| 560 | 285 | 164 | 0,133 |
| 564 | 288 | 166 | 0,134 |
| 569 | 291 | 168 | 0,135 |
| 574 | 294 | 170 | 0,136 |
| 579 | 297 | 172 | 0,137 |
| 584 | 300 | 174 | 0,138 |
| 589 | 303 | 176 | 0,139 |
| 594 | 306 | 178 | 0,140 |
| 599 | 309 | 180 | 0,141 |
| 604 | 312 | 182 | 0,142 |
| 609 | 315 | 184 | 0,143 |
| 614 | 318 | 186 | 0,144 |
| 619 | 322 | 188 | 0,145 |
| 624 | 325 | 190 | 0,146 |
| 628 | 328 | 192 | 0,147 |
| 633 | 331 | 194 | 0,148 |
| 638 | 334 | 196 | 0,149 |
| 643 | 337 | 198 | 0,150 |
| 648 | 340 | 200 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 1350 | 1048 | 870 | 1,21 |
| 1364 | 1059 | 879 | 1,22 |
| 1378 | 1070 | 889 | 1,23 |
| 1392 | 1081 | 898 | 1,24 |
| 1406 | 1092 | 908 | 1,25 |
| 1419 | 1103 | 917 | 1,26 |
| 1433 | 1114 | 927 | 1,27 |
| 1447 | 1126 | 936 | 1,28 |
| 1461 | 1137 | 946 | 1,29 |
| 1475 | 1148 | 955 | 1,30 |
| 1488 | 1159 | 965 | 1,31 |
| 1502 | 1170 | 975 | 1,32 |
| 1516 | 1181 | 984 | 1,33 |
| 1530 | 1193 | 994 | 1,34 |
| 1544 | 1204 | 1003 | 1,35 |
| 1558 | 1215 | 1013 | 1,36 |
| 1571 | 1226 | 1022 | 1,37 |
| 1585 | 1237 | 1032 | 1,38 |
| 1599 | 1249 | 1042 | 1,39 |
| 1613 | 1260 | 1051 | 1,40 |
| 1627 | 1271 | 1061 | 1,41 |
| 1641 | 1282 | 1070 | 1,42 |
| 1655 | 1293 | 1080 | 1,43 |
| 1668 | 1305 | 1090 | 1,44 |
| 1682 | 1316 | 1099 | 1,45 |
| 1696 | 1327 | 1109 | 1,46 |
| 1710 | 1338 | 1119 | 1,47 |
| 1724 | 1350 | 1128 | 1,48 |
| 1738 | 1361 | 1138 | 1,49 |
| 1752 | 1372 | 1148 | 1,50 |
| 1766 | 1383 | 1158 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 648 | 340 | 200 | |
| 653 | 343 | 202 | 0,151 |
| 658 | 346 | 204 | 0,152 |
| 663 | 349 | 207 | 0,153 |
| 668 | 352 | 209 | 0,154 |
| 673 | 356 | 211 | 0,155 |
| 678 | 359 | 213 | 0,156 |
| 683 | 362 | 215 | 0,157 |
| 688 | 365 | 217 | 0,158 |
| 693 | 368 | 219 | 0,159 |
| | | | 0,160 |
| 698 | 371 | 221 | 0,161 |
| 703 | 374 | 223 | 0,162 |
| 708 | 377 | 225 | 0,163 |
| 713 | 381 | 228 | 0,164 |
| 718 | 384 | 230 | 0,165 |
| 723 | 387 | 232 | 0,166 |
| 728 | 389 | 234 | 0,167 |
| 733 | 393 | 336 | 0,168 |
| 737 | 396 | 238 | 0,169 |
| 742 | 399 | 240 | 0,170 |
| | | | 0,171 |
| 747 | 402 | 243 | 0,171 |
| 752 | 406 | 245 | 0,172 |
| 757 | 409 | 247 | 0,173 |
| 762 | 412 | 249 | 0,173 |
| 767 | 415 | 251 | 0,174 |
| 772 | 418 | 253 | 0,175 |
| 777 | 421 | 256 | 0,176 |
| 782 | 425 | 258 | 0,177 |
| 787 | 428 | 260 | 0,178 |
| 792 | 431 | 262 | 0,179 |
| | | | 0,180 |
| 797 | 434 | 264 | |

Suplementos:

I: + 0,015. II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|------|------|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 1766 | 1383 | 1158 | |
| 1779 | 1395 | 1167 | 1,51 |
| 1793 | 1406 | 1176 | 1,52 |
| 1807 | 1417 | 1186 | 1,53 |
| 1821 | 1428 | 1196 | 1,54 |
| 1835 | 1440 | 1206 | 1,55 |
| 1849 | 1451 | 1215 | 1,56 |
| 1863 | 1462 | 1225 | 1,57 |
| 1877 | 1473 | 1235 | 1,58 |
| 1891 | 1485 | 1245 | 1,59 |
| | | | 1,60 |
| 1905 | 1496 | 1254 | 1,61 |
| 1919 | 1507 | 1264 | 1,62 |
| 1933 | 1519 | 1273 | 1,63 |
| 1947 | 1530 | 1283 | 1,64 |
| 1961 | 1541 | 1293 | 1,65 |
| 1974 | 1552 | 1303 | 1,66 |
| 1988 | 1564 | 1312 | 1,67 |
| 2002 | 1575 | 1322 | 1,68 |
| 2016 | 1586 | 1332 | 1,69 |
| 2030 | 1598 | 1342 | 1,70 |
| | | | 1,71 |
| 2044 | 1609 | 1351 | 1,71 |
| 2058 | 1620 | 1361 | 1,72 |
| 2072 | 1632 | 1371 | 1,73 |
| 2086 | 1643 | 1381 | 1,74 |
| 2100 | 1654 | 1390 | 1,74 |
| 2114 | 1666 | 1400 | 1,75 |
| 2128 | 1677 | 1410 | 1,76 |
| 2142 | 1688 | 1420 | 1,77 |
| 2156 | 1700 | 1429 | 1,78 |
| 2170 | 1711 | 1439 | 1,79 |
| | | | 1,80 |
| 2184 | 1722 | 1449 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 797 | 434 | 264 | 0,181 |
| 802 | 437 | 267 | 0,182 |
| 807 | 440 | 269 | 0,183 |
| 812 | 444 | 271 | 0,184 |
| 817 | 447 | 273 | 0,185 |
| 822 | 450 | 275 | 0,186 |
| 827 | 453 | 277 | 0,187 |
| 832 | 456 | 279 | 0,188 |
| 837 | 459 | 282 | 0,189 |
| 842 | 463 | 284 | 0,190 |
| 847 | 466 | 286 | 0,191 |
| 852 | 469 | 288 | 0,192 |
| 857 | 472 | 291 | 0,193 |
| 862 | 475 | 293 | 0,194 |
| 866 | 478 | 295 | 0,195 |
| 871 | 482 | 297 | 0,196 |
| 876 | 485 | 300 | 0,197 |
| 881 | 488 | 302 | 0,198 |
| 886 | 491 | 304 | 0,199 |
| 891 | 494 | 306 | 0,200 |
| 899 | 499 | 310 | 0,202 |
| 909 | 506 | 314 | 0,204 |
| 919 | 512 | 318 | 0,206 |
| 929 | 518 | 323 | 0,208 |
| 939 | 525 | 327 | 0,210 |
| 948 | 531 | 332 | 0,212 |
| 958 | 538 | 336 | 0,214 |
| 968 | 544 | 341 | 0,216 |
| 978 | 550 | 345 | 0,218 |
| 988 | 557 | 350 | 0,220 |
| 998 | 563 | 354 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|------|------|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 2184 | 1722 | 1449 | 1,81 |
| 2196 | 1734 | 1459 | 1,82 |
| 2212 | 1745 | 1468 | 1,83 |
| 2226 | 1756 | 1478 | 1,84 |
| 2240 | 1768 | 1488 | 1,85 |
| 2254 | 1779 | 1498 | 1,86 |
| 2268 | 1790 | 1507 | 1,87 |
| 2282 | 1802 | 1517 | 1,88 |
| 2296 | 1813 | 1527 | 1,89 |
| 2310 | 1824 | 1537 | 1,90 |
| 2324 | 1836 | 1546 | 1,91 |
| 2338 | 1847 | 1556 | 1,92 |
| 2352 | 1859 | 1566 | 1,93 |
| 2366 | 1870 | 1576 | 1,94 |
| 2380 | 1881 | 1586 | 1,95 |
| 2394 | 1893 | 1596 | 1,96 |
| 2408 | 1904 | 1605 | 1,97 |
| 2422 | 1915 | 1615 | 1,98 |
| 2436 | 1927 | 1625 | 1,99 |
| 2450 | 1938 | 1635 | 2,00 |
| 2471 | 1955 | 1649 | 2,02 |
| 2499 | 1978 | 1669 | 2,04 |
| 2527 | 2000 | 1689 | 2,06 |
| 2555 | 2023 | 1708 | 2,08 |
| 2583 | 2046 | 1728 | 2,10 |
| 2611 | 2069 | 1748 | 2,12 |
| 2639 | 2092 | 1767 | 2,14 |
| 2667 | 2114 | 1787 | 2,16 |
| 2695 | 2137 | 1807 | 2,18 |
| 2723 | 2160 | 1826 | 2,20 |
| 2751 | 2183 | 1846 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-----|-----|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 998 | 563 | 354 | 0,222 |
| 1008 | 570 | 359 | 0,224 |
| 1018 | 576 | 364 | 0,226 |
| 1028 | 583 | 368 | 0,228 |
| 1038 | 589 | 373 | 0,230 |
| 1048 | 596 | 377 | 0,232 |
| 1058 | 602 | 382 | 0,234 |
| 1068 | 609 | 386 | 0,236 |
| 1078 | 615 | 391 | 0,238 |
| 1088 | 621 | 395 | 0,240 |
| 1099 | 628 | 400 | 0,242 |
| 1108 | 634 | 405 | 0,244 |
| 1118 | 641 | 409 | 0,246 |
| 1128 | 647 | 414 | 0,248 |
| 1138 | 654 | 419 | 0,250 |
| 1148 | 660 | 423 | 0,252 |
| 1157 | 667 | 428 | 0,254 |
| 1167 | 673 | 433 | 0,256 |
| 1177 | 680 | 437 | 0,258 |
| 1187 | 686 | 442 | 0,260 |
| 1197 | 693 | 447 | 0,262 |
| 1207 | 699 | 451 | 0,264 |
| 1217 | 706 | 456 | 0,266 |
| 1227 | 712 | 461 | 0,268 |
| 1237 | 719 | 465 | 0,270 |
| 1247 | 725 | 470 | 0,272 |
| 1257 | 732 | 475 | 0,274 |
| 1267 | 738 | 479 | 0,276 |
| 1277 | 745 | 484 | 0,278 |
| 1284 | 751 | 488 | 0,280 |
| 1297 | 758 | 494 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|------|------|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 2751 | 2183 | 1846 | 2,22 |
| 2779 | 2206 | 1866 | 2,24 |
| 2807 | 2228 | 1885 | 2,26 |
| 2835 | 2251 | 1905 | 2,28 |
| 2863 | 2274 | 1925 | 2,30 |
| 2891 | 2297 | 1944 | 2,32 |
| 2919 | 2320 | 1964 | 2,34 |
| 2947 | 2343 | 1984 | 2,36 |
| 2975 | 2366 | 2004 | 2,38 |
| 3003 | 2389 | 2023 | 2,40 |
| 3032 | 2411 | 2043 | 2,42 |
| 3060 | 2434 | 2063 | 2,44 |
| 3088 | 2457 | 2082 | 2,46 |
| 3116 | 2480 | 2102 | 2,48 |
| 3144 | 2503 | 2122 | 2,50 |
| 3172 | 2526 | 2142 | 2,52 |
| 3200 | 2549 | 2161 | 2,54 |
| 3228 | 2572 | 2181 | 2,56 |
| 3256 | 2594 | 2201 | 2,58 |
| 3285 | 2617 | 2221 | 2,60 |
| 3313 | 2640 | 2241 | 2,62 |
| 3341 | 2663 | 2260 | 2,64 |
| 3369 | 2686 | 2280 | 2,66 |
| 3397 | 2709 | 2300 | 2,68 |
| 3425 | 2732 | 2320 | 2,70 |
| 3453 | 2755 | 2339 | 2,72 |
| 3481 | 2778 | 2359 | 2,74 |
| 3510 | 2801 | 2379 | 2,76 |
| 3538 | 2823 | 2399 | 2,78 |
| 3566 | 2846 | 2419 | 2,80 |
| 3594 | 2869 | 2438 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|------------|------------|--------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 1297 | 758 | 494 | 0,282 |
| 1307 | 764 | 498 | 0,284 |
| 1317 | 771 | 503 | 0,286 |
| 1327 | 777 | 508 | 0,288 |
| 1337 | 784 | 512 | 0,290 |
| 1347 | 790 | 517 | 0,292 |
| 1357 | 797 | 522 | 0,294 |
| 1367 | 803 | 527 | 0,296 |
| 1377 | 810 | 531 | 0,298 |
| 1387 | 817 | 536 | 0,300 |
| 1397 | 823 | 541 | 0,302 |
| 1407 | 830 | 546 | 0,304 |
| 1417 | 836 | 550 | 0,306 |
| 1427 | 843 | 555 | 0,308 |
| 1437 | 849 | 560 | 0,310 |
| 1447 | 856 | 564 | 0,312 |
| 1457 | 862 | 569 | 0,314 |
| 1467 | 869 | 574 | 0,316 |
| 1476 | 875 | 579 | 0,318 |
| 1486 | 882 | 584 | 0,320 |
| 1496 | 888 | 588 | 0,322 |
| 1506 | 895 | 593 | 0,324 |
| 1516 | 901 | 598 | 0,326 |
| 1526 | 908 | 603 | 0,328 |
| 1536 | 914 | 607 | 0,330 |
| 1546 | 921 | 612 | 0,332 |
| 1556 | 928 | 617 | 0,334 |
| 1566 | 934 | 622 | 0,336 |
| 1576 | 941 | 626 | 0,338 |
| 1586 | 947 | 631 | 0,340 |
| 1596 | 954 | 636 | |

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 3594 | 2869 | 2438 | 2,82 |
| 3622 | 2892 | 2458 | 2,84 |
| 3650 | 2915 | 2478 | 2,86 |
| 3678 | 2938 | 2498 | 2,88 |
| 3706 | 2961 | 2518 | 2,90 |
| 3735 | 2984 | 2537 | 2,92 |
| 3763 | 3007 | 2557 | 2,94 |
| 3791 | 3030 | 2577 | 2,96 |
| 3819 | 3053 | 2597 | 2,98 |
| 3847 | 3076 | 2617 | 3,00 |
| 3876 | 3099 | 2637 | 3,02 |
| 3904 | 3122 | 2656 | 3,04 |
| 3932 | 3144 | 2676 | 3,06 |
| 3960 | 3167 | 2696 | 3,08 |
| 3988 | 3190 | 2716 | 3,10 |
| 4016 | 3213 | 2736 | 3,12 |
| 4045 | 3236 | 2756 | 3,14 |
| 4073 | 3259 | 2775 | 3,16 |
| 4101 | 3282 | 2795 | 3,18 |
| 4129 | 3305 | 2815 | 3,20 |
| 4157 | 3328 | 2835 | 3,22 |
| 4185 | 3351 | 2855 | 3,24 |
| 4214 | 3374 | 2875 | 3,26 |
| 4242 | 3397 | 2894 | 3,28 |
| 4270 | 3420 | 2914 | 3,30 |
| 4298 | 3443 | 2934 | 3,32 |
| 4326 | 3466 | 2954 | 3,34 |
| 4354 | 3489 | 2974 | 3,36 |
| 4383 | 3512 | 2994 | 3,38 |
| 4411 | 3535 | 3014 | 3,40 |
| 4439 | 3558 | 3033 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES URBANAS | | | |
|--------------------|-------------|------------|--------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 1596 | 954 | 636 | |
| 1606 | 961 | 641 | 0,342 |
| 1616 | 967 | 646 | 0,343 |
| 1626 | 974 | 650 | 0,346 |
| 1636 | 980 | 655 | 0,348 |
| | | | 0,350 |
| 1646 | 987 | 660 | 0,352 |
| 1656 | 994 | 665 | 0,354 |
| 1666 | 1000 | 670 | 0,356 |
| 1676 | 1007 | 675 | 0,358 |
| 1686 | 1013 | 679 | 0,360 |
| | | | 0,362 |
| 1696 | 1020 | 684 | 0,362 |
| 1706 | 1026 | 689 | 0,364 |
| 1716 | 1033 | 694 | 0,366 |
| 1726 | 1040 | 699 | 0,368 |
| 1736 | 1046 | 703 | 0,370 |
| 1746 | 1053 | 708 | 0,372 |
| 1756 | 1059 | 713 | 0,374 |
| 1766 | 1066 | 718 | 0,376 |
| 1776 | 1073 | 723 | 0,378 |
| 1786 | 1079 | 728 | 0,380 |
| | | | 0,382 |
| 1796 | 1086 | 733 | 0,382 |
| 1806 | 1092 | 738 | 0,384 |
| 1816 | 1099 | 742 | 0,386 |
| 1826 | 1106 | 747 | 0,388 |
| 1836 | 1112 | 752 | 0,390 |
| 1846 | 1119 | 756 | 0,392 |
| 1856 | 1125 | 762 | 0,394 |
| 1866 | 1132 | 766 | 0,396 |
| 1876 | 1138 | 771 | 0,398 |
| 1886 | 1145 | 776 | 0,400 |
| 1896 | 1152 | 781 | |

Suplementos:

I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|------|------|-------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| VI | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 4439 | 3558 | 3033 | |
| 4467 | 3581 | 3053 | 3,42 |
| 4495 | 3604 | 3073 | 3,44 |
| 4524 | 3627 | 3093 | 3,46 |
| 4552 | 3650 | 3113 | 3,48 |
| | | | 3,50 |
| 4580 | 3673 | 3133 | 3,52 |
| 4608 | 3696 | 3153 | 3,54 |
| 4636 | 3719 | 3173 | 3,56 |
| 4665 | 3742 | 3192 | 3,58 |
| 4693 | 3765 | 3212 | 3,60 |
| | | | 3,62 |
| 4721 | 3788 | 3232 | 3,62 |
| 4749 | 3811 | 3252 | 3,64 |
| 4777 | 3834 | 3272 | 3,66 |
| 4806 | 3857 | 3292 | 3,68 |
| 4834 | 3880 | 3312 | 3,70 |
| 4862 | 3903 | 3332 | 3,72 |
| 4890 | 3926 | 3351 | 3,74 |
| 4918 | 3949 | 3371 | 3,76 |
| 4947 | 3972 | 3391 | 3,78 |
| 4975 | 3995 | 3411 | 3,80 |
| | | | 3,82 |
| 5003 | 4018 | 3431 | 3,82 |
| 5031 | 4041 | 3451 | 3,84 |
| 5059 | 4064 | 3471 | 3,86 |
| 5088 | 4087 | 3491 | 3,88 |
| 5116 | 4110 | 3511 | 3,90 |
| 5144 | 4133 | 3530 | 3,92 |
| 5172 | 4156 | 3550 | 3,94 |
| 5200 | 4179 | 3570 | 3,96 |
| 5229 | 4202 | 3590 | 3,98 |
| 5257 | 4225 | 3610 | 4,00 |
| 5285 | 4248 | 3630 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| URBANAS | | | |
|---------|------|------|--------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| I | II | III | t |
| m | m | m | m |
| 1896 | 1152 | 781 | |
| 1906 | 1158 | 786 | 0,402 |
| 1916 | 1165 | 790 | 0,404 |
| 1926 | 1171 | 795 | 0,406 |
| 1936 | 1178 | 800 | 0,408 |
| | | | 0,410 |
| 1946 | 1185 | 805 | |
| 1956 | 1191 | 810 | 0,412 |
| 1966 | 1198 | 814 | 0,414 |
| 1976 | 1204 | 819 | 0,416 |
| 1986 | 1211 | 824 | 0,418 |
| | | | 0,420 |
| 1996 | 1217 | 829 | |
| 2005 | 1224 | 834 | 0,422 |
| 2015 | 1231 | 839 | 0,424 |
| 2025 | 1237 | 844 | 0,426 |
| 2035 | 1244 | 849 | 0,428 |
| | | | 0,430 |
| 2045 | 1251 | 854 | |
| 2055 | 1257 | 859 | 0,432 |
| 2065 | 1264 | 864 | 0,434 |
| 2075 | 1270 | 869 | 0,436 |
| | | | 0,438 |
| 2330 | 1439 | 992 | |
| | | | 0,538 |
| 2830 | 1771 | 1238 | 0,638 |
| 3329 | 2102 | 1485 | 0,738 |
| 3829 | 2434 | 1733 | 0,838 |
| 4329 | 2767 | 1982 | 0,938 |
| 4829 | 3099 | 2230 | |

Suplementos:
I: + 0,015, II: + 0,03, III: + 0,05 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-------|-------|--------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | n: | m | m |
| 5285 | 4248 | 3630 | |
| 5313 | 4271 | 3650 | 4,02 |
| 5342 | 4294 | 3670 | 4,04 |
| 5370 | 4317 | 3690 | 4,06 |
| 5398 | 4340 | 3710 | 4,08 |
| | | | 4,10 |
| 5426 | 4363 | 3730 | |
| 5454 | 4386 | 3749 | 4,12 |
| 5482 | 4409 | 3769 | 4,14 |
| 5511 | 4432 | 3789 | 4,16 |
| 5539 | 4455 | 3809 | 4,18 |
| | | | 4,20 |
| 5567 | 4478 | 3829 | |
| 5595 | 4501 | 3849 | 4,22 |
| 5623 | 4524 | 3869 | 4,24 |
| 5652 | 4547 | 3889 | 4,26 |
| 5680 | 4570 | 3909 | 4,28 |
| | | | 4,30 |
| 5708 | 4593 | 3929 | |
| 5736 | 4616 | 3949 | 4,32 |
| 5764 | 4639 | 3968 | 4,34 |
| 5793 | 4662 | 3988 | 4,36 |
| | | | 4,38 |
| 6513 | 5249 | 4496 | |
| | | | 5,38 |
| 7925 | 6401 | 5494 | 6,38 |
| 9338 | 7554 | 6492 | 7,38 |
| 10752 | 8708 | 7490 | 8,38 |
| 12165 | 9862 | 8489 | 9,38 |
| 13578 | 11016 | 9488 | 10,38 |
| 14992 | 12169 | 10487 | 11,38 |
| 16406 | 13323 | 11487 | 12,38 |
| 17820 | 14477 | 12486 | 13,38 |
| 19233 | 15632 | 13486 | 14,38 |
| 20647 | 16786 | 14485 | 15,38 |
| 22061 | 17940 | 15485 | |

Suplementos:
IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

| MEDICIONES RURALES | | | |
|--------------------|-------|-------|------------|
| Tablas | | | Tolerancia |
| IV | V | VI | t |
| m | m | m | m |
| 22061 | 17940 | 15485 | 16,38 |
| 23475 | 19095 | 16485 | 17,38 |
| 24889 | 20250 | 17484 | 18,38 |
| 26303 | 21404 | 18484 | 19,38 |
| 27717 | 22559 | 19484 | 20,38 |
| 29132 | 23713 | 20484 | 21,38 |
| 30546 | 24868 | 21484 | 22,38 |
| 31960 | 26022 | 22483 | 23,38 |
| 33374 | 27177 | 23483 | 24,38 |
| 34788 | 28331 | 24483 | 25,38 |
| 36202 | 29486 | 25483 | 26,38 |
| 37616 | 30641 | 26483 | 27,38 |
| 39030 | 31795 | 27483 | 28,38 |
| 40445 | 32950 | 28483 | 29,38 |
| 41859 | 34105 | 29483 | 30,38 |
| 43273 | 35259 | 30483 | 31,38 |
| 44687 | 36414 | 31482 | 32,38 |
| 46101 | 37569 | 32482 | 33,38 |
| 47515 | 38723 | 33482 | 34,38 |
| 48929 | 39878 | 34482 | 35,38 |
| 50344 | 41033 | 35482 | 36,38 |
| 51758 | 42187 | 36482 | 37,38 |
| 53172 | 43342 | 37482 | 38,38 |
| 54586 | 44497 | 38482 | 39,38 |
| 56000 | 45651 | 39482 | 40,38 |
| 57415 | 46806 | 40482 | 41,38 |
| 58829 | 47961 | 41482 | 42,38 |
| 60243 | 49115 | 42482 | 43,38 |
| 61657 | 50270 | 43482 | 44,38 |
| 63077 | 51425 | 44482 | 45,38 |
| 64485 | 52579 | 45482 | |

Suplementos:

IV: + 0,10, V: + 0,15, VI: + 0,20 m.

EJEMPLOS DE APLICACION

Ejemplo 1. Hallar las tolerancias t para las siguientes distancias en las tablas indicadas:

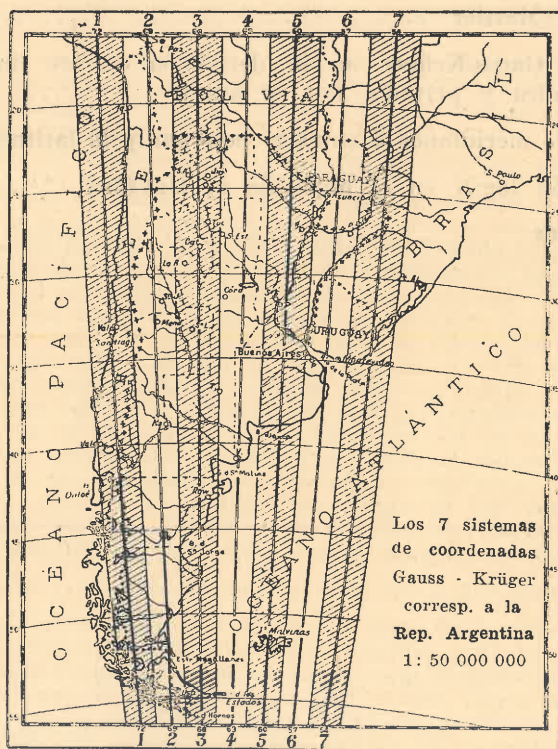
102 m, en I, $t = 0,036$ m,499 m, en II, $t = 0,201$ »993 m, en III, $t = 0,488$ »1009 m, en IV, $t = 0,96$ »4018 m, en V, $t = 3,81$ »14485 m, en VI, $t = 14,88$ »

Ejemplo 2. Hallar para $l = 460$ m las tolerancias t en las 6 distintas tablas.

Tabla I: $t = 0,112$ m,» II: $t = 0,189$ »» III: $t = 0,266$ »» IV: $t = 0,54$ »» V: $t = 0,66$ »» VI: $t = 0,76$ »

APENDICE II

Coordenadas Gauss-Krüger



SUMARIO

| | <i>Págs.</i> |
|---|--------------|
| ¿Por qué la proyección Gauss-Krüger conviene al territorio argentino? Por el Dr. J. Mettler | 3 |
| Las coordenadas Gauss-Krüger en la definición de los límites de la propiedad pública y privada. Por el autor | 6 |
| Tabla I: Arcos de meridianos S entre el polo sur y la latitud φ (*).... | 11 |
| Tabla II: Función $\log N$ en el elipsoide de Hayford (*)..... | 17 |
| Ejemplos prácticos | 20 |

(*) Extracto de las correspondientes tablas publicadas por el Instituto Geográfico Militar Argentino, Buenos Aires, 1935.

¿Por qué la proyección Gauss-Krüger conviene al territorio argentino? (❖)

Por el Dr. JACOBO METTLER

Es sabido que existen innumerables proyecciones cartográficas, y podrían imaginarse otras más, tantas como se quisieran. Cuando nos encontramos delante de un problema que implica representar en un plano una parte de la superficie de la Tierra, la que con gran aproximación se parece a un gran elipsoide de rotación, o también cuando queremos representar el cielo estrellado, siempre es necesario examinar con cuidado la cuestión cuál es la proyección que mejor satisface los fines que nos proponemos.

Cada proyección reúne ciertas ventajas y adolece también de desventajas. Son ventajas:

- 1º La representación fiel de las figuras geométricas en cuanto a ángulos, distancias y superficies. Estas exigencias pueden solamente satisfacerse en parte.
- 2º La sencillez de las fórmulas de cálculo y de las reflexiones mentales a que debemos recurrir para utilizar la proyección y que nos permiten pasar de la imagen proyectada de un objeto al concepto exacto del objeto mismo que nos interesa.
- 3º La sencillez de la deducción teórica de las fórmulas de la proyección.

De estas ventajas la primera y segunda, que se refieren a la representación fiel de las figuras y al manejo fácil de la proyección, son indudablemente de gran importancia. En cuanto a la tercera ventaja que puede tener una proyección, de ser muy fácil la deducción matemática de sus fórmulas fundamentales, no le podemos atribuir el mismo peso; pues no es necesario que todos los que usan una proyección sepan desarrollar su sistema de fórmulas. Para explicarme mejor quisiera hacer un símil: Todo el mundo usa la electricidad manipulando el interruptor para encender y apagar la luz, calentar y cocinar. ¿Pero es acaso necesario que todos comprendamos a fondo las complicadas máquinas que producen la electricidad tan útil a nosotros? No nos preocupamos de ellas. Una cosa parecida ocurre con la proyección Gauss. La deducción de las fórmulas de esta proyección requiere ciertos conocimientos matemáticos del cálculo infinitesimal y de la teoría de las funciones con variables complejas, conocimientos que solamente pueden poseer un pequeño porcentaje de las personas que deben usar la proyección. Pero en cuanto a la sencillez de las fórmulas que deben aplicarse en la práctica, la proyección Gauss satisface ampliamente todas las exigencias. Fórmulas tan sencillas como la de la razón del aumento: $m = 1 + \frac{\rho^2}{2r^2}$, que nos da este aumento en función de un solo dato, de la distancia al meridiano central, dos o tres fórmulas más, igualmente sencillas, para la razón de aumento y las reducciones de direcciones; además unas pocas fórmulas más para la transformación de coordenadas geográficas en coordenadas Gauss y viceversa y dos tablas para los arcos de meridianos y los radios de curvatura, son generalmente toda la herramienta que necesitamos para aplicar en la práctica la proyección Gauss con todo éxito. En cuanto a la reflexión mental que debemos hacer para pasar de los signos representativos dibujados en la carta a la imaginación de los objetos mismos, esa reflexión no puede ser más sencilla. De las exigencias

(*) Conferencia dada el 6 de agosto de 1936 en ocasión de la Primera Conferencia de Coordinación Cartográfica, celebrada en Buenos Aires bajo los auspicios de la Sociedad Geográfica "Gæa".

que se pueden tener respecto a la representación fiel de los objetos, hemos renunciado solamente a una: hemos renunciado a la equidistancia absoluta o sea a la representación rigurosamente fiel de la distancia en toda la extensión de la carta; hemos renunciado a la escala absolutamente uniforme, la cual, de todas maneras, no la puede ofrecer ninguna carta destinada a representar en un plano la imagen de una superficie curva con sus figuras geométricas. Pero podemos decir que ni esta renuncia es definitiva cuando se trata de cartas con proyección conforme, especialmente de cartas con la proyección Gauss, porque lo renunciado, para decir así, lo salvamos y lo recuperamos todavía a último momento con hacer la reflexión sencilla respecto a la razón de aumento. En lo que se refiere a las cartas dibujadas, no debemos inquietarnos demasiado por la razón de aumento. Se puede dibujar toda la República Argentina en proyección Gauss sin que el aumento de distancias pase del uno por ciento. Hasta superficies tan extensas como Estados Unidos de Norteamérica o el continente sudamericano pueden ser representados en proyección Gauss sin que los aumentos de las distancias en los extremos Este y Oeste pasen de 1/15. Cuando se trate de representar superficies más pequeñas, como la de la República Argentina o parte de la misma, los aumentos de distancias son siempre inapercibibles a simple vista y solamente pueden constatarse con ayuda de la regla milimetrada. Si comparamos las representaciones cartográficas de tales superficies en proyecciones distintas, las diferencias generalmente son poco sensibles. De ahí que algunos cartógrafos a veces dicen: ¿Por qué hemos de emplear siempre la proyección Gauss, cuando otras, como la policónica, por ejemplo, dan prácticamente las mismas cartas? Pero no es así como hay que considerar las cosas. El hecho es que para ciertos fines hay varias y hasta muchas proyecciones que podrían servir, pero que existe una sola, la proyección Gauss, que para una superficie como la de nuestro país llena todas las necesidades. En tal caso, ya por razones de armonía y estética hay que decidirse por esta última, y no se debe mantener una variedad innecesaria, que solamente complica el estudio sin provecho alguno y produce en la mente de muchos una cierta perturbación e inseguridad de los conceptos. Sólo cuando se trate de construir cartas geográficas de superficies mucho mayores, como países grandes extendidos principalmente de Oeste a Este, tales como Rusia, Estados Unidos, el continente euroasiático, hemisferios enteros de la Tierra o del cielo, o la Tierra entera, solamente entonces conviene echar mano a otras proyecciones, como las cónicas conformes, la proyección Mercator, la de Bonne, la globular de Nell y otras. Para representar los hemisferios Norte y Sur del cielo, podría convenir alguna proyección intermedia entre la estereográfica y la acimutal simple, equidistante en los círculos de declinación, dado que la estereográfica aumenta demasiado el tamaño de las constelaciones ecuatoriales en comparación con las polares, y que en la proyección acimutal simple hay demasiada desfiguración de las constelaciones cerca del ecuador.

Pero para los problemas cartográficos, geodésicos y catastrales de un país como la República Argentina, que tiene su mayor extensión de Norte a Sur, no cabe la menor duda que la proyección conforme de Gauss, equidistante según un meridiano, es la única indicada, la única que está de acuerdo con el estado actual de la ciencia geográfica y geodésica. Ningún país joven que esté por empezar su obra geodésica y cartográfica la podría dejar a un lado. El Japón, que en corto tiempo tan maravillosamente ha aprovechado lo mejor que ha producido la ciencia europea, adoptó la proyección Gauss a fines del siglo pasado.

La razón principal por la que ahora se da preferencia a la proyección Gauss reside en que la vida cultural y la técnica moderna presentan mayores exigencias respecto a las proyecciones cartográficas que la técnica de antaño. Especialmente se exige que las proyecciones sean tales que se pueda ejecutar en ellas cómodamente cálculos geodésicos, catastrales y de agrimensura. Únicamente las proyecciones conformes, especialmente la proyección Gauss pueden satisfacer tales exigencias. Las proyecciones no conformes, como las de Cassini y Soldner y la equivalente de Bonne no sirven para esos fines, debido a la falta de sencillez en la relación entre la proyección y la figura original, dado que en ellas la razón de aumento, tan importante para la representación cartográfica y para los cálculos, varía no solamente de punto en punto, sino también con los acimutes, aunque éstos correspondan a un mismo punto de arranque. Es cierto que la

proyección de Soldner se empleó mucho en Alemania durante el siglo pasado, pero pudo satisfacer las necesidades hasta cierto punto tan sólo debido a la circunstancia de que se trataba de países pequeños — Soldner la introdujo para la obra geodésica de Baviera —, dentro de los cuales la Tierra puede considerarse como esfera. Pero cuando se trata de superficies más grandes, en que es necesario tener en cuenta la forma elipsoidal de la Tierra, las ventajas relativas de la proyección Soldner se esfuman, pudiendo solamente satisfacer una proyección conforme. Mucho menos adecuadas todavía para los cálculos serían proyecciones como las policónicas y las poliédricas, por adolecer aún de una mayor falta de sencillez de la relación entre el objeto y la imagen. Para países que tienen su mayor extensión en el sentido Este-Oeste, se ofrecen las proyecciones cónicas conformes, equidistantes según paralelos. Efectivamente, Suiza, a principio de este siglo, ha adoptado tal proyección, y podría parecer a primera vista que sería también lo más adecuado para países grandes como Estados Unidos y Rusia; pero como tales países, por su extensión, precisarían ser divididos en varias fajas, para evitar que la relación de aumento llegase a valores muy grandes, tales fajas que se extenderían de Este a Oeste, no serían iguales entre sí, ni serían simétricas respecto a una línea central de dirección Este-Oeste, circunstancias éstas que hacen menos satisfactorias las proyecciones cónicas conformes en comparación con la proyección Gauss, la cual se puede emplear sin inconveniente alguno en fajas meridianas exactamente iguales entre sí y simétricas respecto a los meridianos centrales. La falta de igualdad de las fajas en las proyecciones cónicas conformes y su asimetría respecto a la línea de equidistancia trae como consecuencia la falta de fórmulas tan sencillas y generales para la razón de aumento y las reducciones de direcciones. De esto se desprende que también en países que tienen su mayor extensión de Este a Oeste siempre conviene la proyección Gauss-Krüger con sus fajas meridianas completamente iguales y simétricas respecto a los meridianos centrales, con la consiguiente simplificación de fórmulas y conceptos. Mucha mayor razón tiene la República Argentina para adoptar tal sistema, dado que su mayor extensión es de Norte a Sur.

El agrimensor desea efectuar sus cálculos en un sistema de coordenadas planas; el interés del país, para poder coordinar todos los trabajos, sería que todos los agrimensores calcularan en un mismo sistema de coordenadas planas, en lugar de los innumerables que se introducen con diferentes orígenes y orientaciones. Siendo imposible esta unificación absoluta, debido a la curvatura de la Tierra, se ha encontrado con la proyección Gauss aplicada a 7 fajas meridianas, de 3 grados de ancho cada una, una solución que en la práctica ofrece aproximadamente las mismas ventajas que un sistema único de coordenadas planas, dado que esas fajas son de estructura perfectamente igual y que en cada una, no obstante abarcar superficies muy grandes, por ser ilimitadas en dirección Norte-Sur, la deformación queda dentro de límites estrechos. Se puede decir que con la proyección Gauss-Krüger se ha salvado para las superficies curvas el máximo posible de las ventajas que tienen los sistemas de coordenadas cartesianas para la representación de los puntos de un plano.

Podrían algunos preguntar: ¿Si la proyección Gauss-Krüger es una cosa tan preciosa, cómo se explica que en Alemania haya tardado tanto para imponerse, cuando Gauss ya estableció sus fundamentos matemáticos alrededor del año 1820? La contestación la da la historia de la geodesia alemana. La Alemania de entonces estaba dividida en muchos Estados pequeños, que emprendían cada uno independientemente su obra geodésica, catastral y topográfica. Así es que unos dos decenios antes de que Gauss ideara su proyección para el Estado de Hannover, el geodesta Soldner había introducido para Baviera la proyección que desde entonces llamamos proyección Soldner, la que poco después fué adoptada también por Wurtemberg, Prusia y otros Estados. Cuando el conocimiento de los trabajos de Gauss se había difundido, en muchos Estados ya se había calculado en la proyección Soldner un considerable volumen de trabajos geodésicos y catastrales, y el que sabe cuán grande es el esfuerzo necesario para cambiar un sistema de proyección con que se ha calculado un mayor número de trabajos, no se extraña que esos Estados conservaran los sistemas de proyección adoptados hasta que fuerzas muy grandes finalmente obligaron a su abandono. Se puede decir que la proyección Soldner y hasta cierto punto también la proyec-

ción doble conforme usada por la Landesaufnahme obstruyeron el camino a la proyección Gauss. Recién la gran guerra terminó con los sistemas anticuados. En la guerra, donde cada error se transforma en pérdidas de vidas y empeoramiento de las condiciones para defender con éxito la existencia y el patrimonio heredado, sale finalmente triunfando lo mejor sobre lo que es menos bueno. En la última gran guerra las naciones beligerantes sintieron intensamente las deficiencias de las proyecciones empleadas hasta entonces y la necesidad de introducir mejoras. Y se dió la feliz coincidencia que en 1912, dos años antes que estallara la guerra, el geodesta y matemático Luis Krüger había preparado la generalización de la proyección Gauss y la había hecho práctica para países grandes, con la introducción de las fajas meridianas, en las que Gauss no necesitaba pensar, por la pequeñez de la superficie del Estado de Hannover, al cual destinaba su genial concepción. Krüger, también con establecer fórmulas adecuadas para fajas, preparó el camino para la proyección Gauss, en que ésta finalmente llegó a la posición que habría merecido ocupar en el siglo pasado. En muy buena hora se han producido estos progresos para la República Argentina, la que, no es de dudar, los aprovechará sin pérdida de tiempo en bien del eficaz y fecundo desarrollo cultural y técnico de la nación.

Las coordenadas Gauss-Krüger en la definición de los límites de la propiedad pública y privada (*)

Por el Agrimensor ROBERTO MÜLLER

SUMARIO

1. *Importancia de la seguridad de los límites en el orden internacional, interprovincial y privado.*
2. *Mirada retrospectiva.*
3. *Criterio económico en los trabajos de mensura.*
4. *Falacia de la teoría de la estabilidad de los mojones límites de la propiedad raíz.*
5. *Introducción de los sistemas de coordenadas Gauss-Krüger. Puntos principales de oportunas medidas de gobierno.*
6. *Vinculación de los límites de la propiedad raíz.*
7. *Nuevos ingresos impositivos compensan los gastos de levantamiento trigonométrico.*
8. *Carácter nacional de la triangulación fundamental.*
9. *Lo que es posible realizar sin demora. Reglamentación general.*
10. *Necesidad de disponer de fondos públicos para la creación de la base de los límites de la propiedad raíz.*
11. *El problema de los límites es un problema económico nacional.*
12. *El apoyo del pueblo. La divulgación científica.*
13. *El Código Civil Suizo y el proyecto de reforma del Código Civil Argentino.*

(*) Conferencia dada el 6 de agosto de 1936 en ocasión de la Primera Conferencia de Coordinación Cartográfica, celebrada en Buenos Aires bajo los auspicios de la Sociedad Geográfica "Gæa".

1. Importancia de la seguridad de los límites en el orden internacional, interprovincial y privado.

Considérase como una verdad universalmente admitida que el derecho a la propiedad de la tierra es una de las más poderosas fuerzas constructivas del bienestar y de la estabilidad de las naciones. En consecuencia, cualquier esfuerzo, cualquier trabajo conducente a aumentar la seguridad de los límites de la propiedad, merece la más alta atención de todo gobierno. Proporcionar los elementos básicos, los elementos numéricos que no admiten discusión ni doble interpretación para la duradera fijación de los límites, es establecer un valioso fundamento para las amistosas relaciones entre personas, entre provincias y entre naciones vecinas.

La mayor parte de nuestros límites internacionales se hallan incontrovertiblemente establecidos y marcados en el terreno, quedando la posición de los hitos expresada por sus coordenadas geográficas, latitud y longitud, obtenidas por observaciones astronómicas.

Y si en el orden internacional el arreglo definitivo de las cuestiones pendientes promete ser pronto una realidad, en el orden interprovincial, en cambio, la cuestión de los límites ofrece un cuadro verdaderamente triste: La Provincia de Catamarca discute con Santiago del Estero y con La Rioja, ésta con San Juan y ésta con Mendoza y la Provincia de Buenos Aires con la de Entre Ríos, sobre extensas líneas divisorias, que son zonas de discordia y muchas veces de violencias que el espíritu de solidaridad nacional no puede ni debe seguir tolerando indefinidamente.

En el orden privado, la cuestión de los límites es más grave aún: ¿Cómo arreglar definitivamente los numerosos títulos informativos falsos, que suplen a títulos que se dicen perdidos o destruidos y que se protocolizan como instrumentos sustitutivos de los que los testigos dicen haber visto? ¿Cómo arreglar las falsas mercedes y las superposiciones que pululan en nuestros registros y que no deberían ser posibles como tampoco las inscripciones de títulos que comprenden a otros ya inscriptos? De ahí, y motivados por otras causas que no es el caso de detallar, los numerosos pleitos que gravan como una pesada carga sobre los inmuebles afectados, deprimiendo su valor.

2. Mirada retrospectiva.

Los hechos que acabamos de señalar reflejan situaciones no sólo nuestras sino de todo el continente americano, situaciones que tienen su origen en un pasado no muy remoto. Sabemos que las mensuras hace unos 50 a 60 años eran notoriamente inexactas, sabemos que las poligonales de deslinde de los campos muchas veces no se cerraban, quizás por temor de que tal operación de contralor pudiera revelar algún delito o por lo menos algún grave pecado no confesable. Cabe preguntar: ¿Qué seguridad podían tener puntos límites obtenidos en tales condiciones?

3. Criterio económico en los trabajos de mensura.

No es empero nuestro propósito criticar el trabajo del agrimensor de aquella época. Los terrenos entonces no valían nada, casi nada o muy poco, sólo algunos centavos o algunos pesos la hectárea, según la región; y todo trabajo de mensura que hubiera tenido por objeto más que la determinación del perímetro, hubiera estado en desacuerdo con un principio económico inamovible, que debe primar en todo levantamiento catastral de cualquier época y que establece que los gastos invertidos o a invertir en la mensura de una propiedad raíz, deben guardar siempre una relación adecuada y racional con el valor del inmueble.

Pero, con el aumento de la población de nuestro territorio acrecentó también el valor del bien raíz, y este mayor valor de la tierra exige lógicamente levantamientos más exactos.

4. Falacia de la teoría de la estabilidad de los mojones límites de la propiedad raíz.

El sistema actual en uso general para demarcar los puntos límites de la propiedad raíz, está basado en la idea de que un punto de la superficie de la Tierra se perpetúa con colocar un mojón, una estaca u otro objeto físico en el lugar del mismo. Los egipcios, hace más de dos mil años, reconocieron y comprobaron ya la falacia de esta teoría, y, sin embargo, nosotros seguimos tenazmente adheridos a ella, no obstante las numerosas pruebas en contra que la vida y la experiencia a diario nos suministran. No es posible prever todo lo que puede ocurrir en la vecindad de un punto límite y no se puede prevenir la acción de los múltiples agentes que frecuentemente concurren para destruirlo por completo.

5. Introducción de los sistemas de coordenadas Gauss-Krüger. Puntos principales de oportunas medidas de gobierno.

No es, pues, el objeto físico, la estaca o mojón de hierro, piedra o madera que asegura y garantiza la permanencia de un punto límite de la propiedad raíz. Esta seguridad la proporciona sólo la triangulación, cuyos resultados se expresan racionalmente en coordenadas Gauss-Krüger. Los fundamentos y características de estas coordenadas acaban de ser tratados en otras dos disertaciones de esta reunión. Esta aplicación de la triangulación a la determinación y perpetuación de los puntos límites de la propiedad raíz constituye uno de los valores más altos de la misma. La influencia de la triangulación va ir aumentando a medida que se vayan extendiendo las zonas dotadas de puntos fijos trigonométricos, puntos que están sólidamente marcados en el terreno, quedando su posición definida en términos tales que permiten su rápido restablecimiento si cualquiera de ellos fuera destruido.

Naturalmente, un cierto número de estos puntos desaparecerán con el tiempo debido a la obra de la naturaleza y a la acción del hombre. Por esta razón, los puntos trigonométricos, básicos para el establecimiento de un sistema de coordenadas Gauss-Krüger, deben ser periódicamente inspeccionados, arreglados los que hayan sufrido daño y restablecidos los que hayan sido destruidos.

Cuando se trate de organizar el levantamiento catastral de un gran territorio, serán necesarios varios sistemas de coordenadas Gauss-Krüger, tres por ejemplo, para la provincia de Buenos Aires, mientras que bastarían dos, por ejemplo para la provincia de Santa Fe y uno solo para la ciudad de Buenos Aires.

La introducción de estos sistemas de coordenadas Gauss-Krüger aparece así como una importante mejora, un notable progreso de incalculables consecuencias en los métodos de determinación y descripción de los límites de la propiedad pública y privada. Y siendo una de las principales características de esta conferencia de coordinación cartográfica su tendencia a conclusiones prácticas y concretas, juzgamos útil sugerir que las autoridades técnicas correspondientes inicien cuanto antes los estudios preparatorios, considerando la conveniencia de la adopción de este nuevo método mediante oportunas medidas de gobierno, cuyos principales puntos podrían ser los siguientes:

- 1º Adoptar para todo el territorio de la provincia o territorio nacional los sistemas de coordenadas Gauss-Krüger, por ejemplo fajas 6, 5 y 4, con los meridianos centrales -57 , -60 , y -63 , respectivamente, como nuevo método de determinación y descripción de los límites de la propiedad pública y privada, debiendo emplearse este método como medio de identificación principal, sin perjuicio del método por rumbo y distancia de la reglamentación actualmente en vigor.
- 2º Los sistemas de coordenadas Gauss-Krüger a los cuales nos hemos referido, quedan establecidos por la triangulación del Instituto Geográfico Militar, debiendo emplearse en las aplicaciones prácticas los valores numéricos publicados por dicho Instituto.
- 3º El Ministerio de Obras Públicas, por intermedio de la repartición técnica correspondiente, fijará la fecha y las zonas trigonométricamente preparadas para la aplicación del nuevo método.

- 4° A los efectos de la vinculación de los límites con los puntos trigonométricos, los propietarios de los terrenos en que se hallan situados dichos puntos, facilitarán a los profesionales debidamente autorizados el acceso a los mismos.
- 5° En las zonas donde no existen todavía puntos trigonométricos ni astronómicos de arranque, los agrimensores determinarán latitud, longitud y acimut de los puntos de arranque necesarios para sus mensuras, debiendo transformar las coordenadas así obtenidas en coordenadas Gauss-Krüger y ejecutar todos los demás cálculos en este sistema.

6. Vinculación de los límites de la propiedad raíz.

La vinculación de los límites de la propiedad con la triangulación es una operación muy sencilla. Naturalmente tal vinculación sólo puede ser exigida en zonas donde el Instituto Geográfico Militar tenga establecidas redes de puntos fijos trigonométricos suficientemente densas, y no puede ser la obligación de un agrimensor que tenga que mensurar una parcela aislada, de vincularla con puntos trigonométricos muy distantes. En tal caso, el agrimensor determinará su punto astronómico de arranque, como lo ha hecho hasta hoy, transformará las coordenadas así obtenidas en coordenadas Gauss-Krüger, las cuales empleará en todos los demás cálculos a que da lugar su trabajo.

7. Nuevos ingresos impositivos compensan los gastos de levantamiento trigonométrico.

Por falta de vinculación trigonométrica de los límites de la propiedad raíz, se ignora en muchas partes de nuestro territorio la existencia de numerosos lotes de terreno, los que, en consecuencia de esta situación privilegiada, no pagan contribución, situación ésta que existe también en ciudades y hasta en la metrópoli. Se ha dicho que los trabajos de levantamiento de los terrenos que no pagan contribución, costarían menos que las sumas adicionales que ingresarían en concepto de impuestos.

8. Carácter nacional de la triangulación fundamental.

Hemos dicho que la triangulación, obra del Instituto Geográfico Militar, será la base para la definición de los límites de la propiedad pública y privada. En este orden de ideas cabe destacar el carácter nacional de esta obra. Tenemos que considerar en ella nuestro territorio de casi tres millones de kilómetros cuadrados como un conjunto y no detenernos en su ejecución en las fronteras de las provincias que para ella no tienen significado, apareciendo, así, la triangulación fundamental de nuestro territorio como un nuevo vínculo, un hermoso símbolo de la unidad nacional.

9. Lo que es posible realizar sin demora. Reglamentación general.

Ahora bien, nadie abogaría por un plan general según el cual toda propiedad raíz, pública y privada, tendría que ser remensurada para expresar la posición de los límites en coordenadas Gauss-Krüger. Pero todo el mundo considera posible y conveniente que cualquier nueva mensura judicial, practicada en zona suficientemente dotada de puntos trigonométricos, sea vinculada con la triangulación y ejecutada según las normas de una reglamentación general válida para todo el país. Con un elevado espíritu de colaboración fué estudiada y redactada esta reglamentación, en el año 1933, por una comisión especial presidida por el entonces jefe de la División Geodesia, Ingeniero Félix Aguilar.

10. Necesidad de disponer de fondos públicos para la creación de la base de los límites de la propiedad raíz.

La creación del fundamento trigonométrico para la aplicación del nuevo método en beneficio de la seguridad del bien raíz, lógicamente exige dinero, exige fondos públicos, fondos relativamente insignificantes cuando se comparen

con los que nuestro país anualmente invierte en la ejecución de obras públicas y de vialidad. Pero existen ciertos gastos que ningún Estado puede permitirse el lujo de no afrontar en el debido momento, por el peligro de verse más tarde obligado a efectuar gastos incomparablemente mayores. Así como una persona, ordenada y previsora, no dejará de arreglar una gotera en el techo de su casa, tan pronto que la advierta, así el Estado, responsable de la seguridad de los cimientos de su gran edificio, deberá afirmarlos a su debido tiempo, antes de que sea tarde o antes de que el caos haya ocasionado daños enormes e irreparables, daños materiales y daños morales. "En todo el país se están minando las bases mismas del crédito real", dice el Dr. Bibiloni. "Es deber patriótico buscar la solución del problema fundamental".

11. El problema de los límites es un problema económico nacional.

Es éste nuestro problema, el problema vuestro que representáis fuertes núcleos de intereses vivos de nuestro pueblo que es soberano, el problema vuestro, repetimos, mucho más que un problema de triangulación del Instituto Geográfico Militar. Y no es sólo un problema de límites de la propiedad raíz, es un problema económico de gran trascendencia. El modo de decir que a la larga la democracia consigue lo que merece, se aplica también a los trabajos de levantamiento y la carta como expresión del grado de cultura de un pueblo.

12. El apoyo del pueblo. La divulgación científica.

El éxito final de la reforma, de la reforma legal y de la reforma de los procedimientos técnicos para garantizar la seguridad de la propiedad raíz, depende en último término del apoyo que le presta el pueblo y no del apoyo de un pequeño grupo de técnicos especializados. En este sentido la acción vuestra, señores delegados, puede ser muy fecunda. Y si vosotros llegarais a hacer trascender a las masas, a difundir en el pueblo la comprensión y la convicción de que la triangulación sirve para perpetuar la vida de los límites de la propiedad raíz, este pueblo tendrá entonces mucho más interés en el cuidado y la conservación de los puntos trigonométricos, y vosotros habréis cumplido una alta misión de cultura en el beneficio de todos. (*)

13. El Código Civil Suizo y el proyecto de reforma del Código Civil Argentino.

Los principios técnicos levemente esbozados por nosotros son los que sustentan los correspondientes artículos del Código Civil Suizo, hermoso modelo de legislación que expresa la voluntad de una de las más antiguas democracias del mundo. Es en este Código que se inspiró principalmente el Dr. Bibiloni en la redacción de su conocido Proyecto de Reforma del Código Civil Argentino (1932). Es también ese mismo Código que se aplicó con tanto éxito en la legislación de la moderna Turquía, y son aquellos mismos principios técnicos por nosotros preconizados que actualmente invaden cual majestuosa ola conquistadora todo el territorio de los Estados Unidos de Norte América.

La importancia de la reforma de nuestro Código Civil aparece así de gran trascendencia, dependiendo de su adopción nuestro crédito hipotecario y la economía nacional.

(*) Ver: "Triangulación de orden menor", pág. 31, por el mismo autor.

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| — 56° 0' | 3793 589,391 | | — 53° 0' | 4127 545,089 | |
| — 55° 55' | 3802 868,186 | 30,929 32 | — 52° 55' | 4136 819,231 | 30,913 81 |
| 50' | 3812 146,855 | 30,928 89 | 50' | 4146 093,243 | 30,913 37 |
| 45' | 3821 425,396 | 30,928 47 | 45' | 4155 367,122 | 30,912 93 |
| 40' | 3830 703,810 | 30,928 05 | 40' | 4164 640,870 | 30,912 49 |
| 35' | 3839 982,097 | 30,927 62 | 35' | 4173 914,487 | 30,912 05 |
| 30' | 3849 260,256 | 30,927 17 | 30' | 4183 187,971 | 30,911 61 |
| 25' | 3858 538,287 | 30,926 76 | 25' | 4192 461,323 | 30,911 17 |
| 20' | 3867 816,191 | 30,926 35 | 20' | 4201 734,544 | 30,910 76 |
| 15' | 3877 093,967 | 30,925 92 | 15' | 4211 007,632 | 30,910 29 |
| 10' | 3886 371,615 | 30,925 49 | 10' | 4220 280,588 | 30,909 85 |
| 5' | 3895 649,134 | 30,925 06 | 5' | 4229 553,412 | 30,909 41 |
| — 55° 0' | 3964 926,526 | 30,924 64 | — 52° 0' | 4238 826,103 | 30,908 97 |
| — 54° 55' | 3914 203,789 | 30,924 21 | — 51° 55' | 4248 098,662 | 30,908 53 |
| 50' | 3923 480,923 | 30,923 78 | 50' | 4257 371,088 | 30,908 09 |
| 45' | 3932 757,928 | 30,923 35 | 45' | 4266 643,381 | 30,907 64 |
| 40' | 3942 034,805 | 30,922 92 | 40' | 4275 915,542 | 30,907 20 |
| 35' | 3951 311,553 | 30,922 49 | 35' | 4285 187,570 | 30,906 76 |
| 30' | 3960 588,171 | 30,922 06 | 30' | 4294 459,464 | 30,906 31 |
| 25' | 3969 864,661 | 30,921 63 | 25' | 4303 731,226 | 30,905 87 |
| 20' | 3979 141,021 | 30,921 20 | 20' | 4313 002,854 | 30,905 43 |
| 15' | 3988 417,251 | 30,920 77 | 15' | 4322 274,350 | 30,904 98 |
| 10' | 3997 693,352 | 30,920 34 | 10' | 4331 545,711 | 30,904 54 |
| 5' | 4006 969,323 | 30,919 90 | 5' | 4340 816,940 | 30,904 10 |
| — 54° 0' | 4016 245,165 | 30,919 47 | — 51° 0' | 4350 088,035 | 30,903 65 |
| — 53° 55' | 4025 520,876 | 30,919 04 | — 50° 55' | 4359 358,997 | 30,903 21 |
| 50' | 4034 796,457 | 30,918 60 | 50' | 4368 629,824 | 30,902 76 |
| 45' | 4044 071,908 | 30,918 17 | 45' | 4377 900,518 | 30,902 31 |
| 40' | 4053 347,229 | 30,917 74 | 40' | 4387 171,079 | 30,901 87 |
| 35' | 4062 622,419 | 30,917 30 | 35' | 4396 441,505 | 30,901 42 |
| 30' | 4071 897,479 | 30,916 87 | 30' | 4405 711,798 | 30,900 98 |
| 25' | 4081 172,408 | 30,916 43 | 25' | 4414 981,956 | 30,900 51 |
| 20' | 4090 447,206 | 30,915 99 | 20' | 4424 251,981 | 30,900 10 |
| 15' | 4099 721,873 | 30,915 56 | 15' | 4433 521,871 | 30,899 63 |
| 10' | 4108 996,410 | 30,915 12 | 10' | 4442 791,627 | 30,899 19 |
| 5' | 4118 270,815 | 30,914 68 | 5' | 4452 061,249 | 30,898 74 |
| — 53° 0' | 4127 545,089 | 30,914 25 | — 50° 0' | 4461 330,736 | 30,898 29 |

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| — 50° 0' | 4461 330,736 | | — 47° 0' | 4794 942,316 | |
| — 49° 55' | 4470 600,089 | 30,897 84 | — 46° 55' | 4804 206,795 | 30,881 60 |
| 50' | 4479 869,307 | 30,897 39 | 50' | 4813 471,138 | 30,881 14 |
| 45' | 4489 138,391 | 30,896 95 | 45' | 4822 735,344 | 30,880 69 |
| 40' | 4498 407,340 | 30,896 50 | 40' | 4831 999,415 | 30,880 24 |
| 35' | 4507 676,155 | 30,896 05 | 35' | 4841 263,349 | 30,879 78 |
| 30' | 4516 944,834 | 30,895 60 | 30' | 4850 527,147 | 30,879 33 |
| 25' | 4526 213,379 | 30,895 15 | 25' | 4859 790,809 | 30,878 87 |
| 20' | 4535 481,789 | 30,894 70 | 20' | 4869 054,335 | 30,878 42 |
| 15' | 4544 750,065 | 30,894 25 | 15' | 4878 317,725 | 30,877 97 |
| 10' | 4554 018,205 | 30,893 80 | 10' | 4887 580,978 | 30,877 51 |
| 5' | 4563 286,210 | 30,893 35 | 5' | 4896 844,095 | 30,877 06 |
| — 49° 0' | 4572 554,080 | 30,892 90 | — 46° 0' | 4906 107,076 | 30,876 60 |
| — 48° 55' | 4581 821,815 | 30,892 45 | — 45° 55' | 4915 369,920 | 30,876 15 |
| 50' | 4591 089,415 | 30,892 00 | 50' | 4924 632,629 | 30,875 70 |
| 45' | 4600 356,879 | 30,891 55 | 45' | 4933 895,201 | 30,875 24 |
| 40' | 4609 624,208 | 30,891 10 | 40' | 4943 157,637 | 30,874 79 |
| 35' | 4618 891,402 | 30,890 65 | 35' | 4952 419,936 | 30,874 33 |
| 30' | 4628 158,461 | 30,890 20 | 30' | 4961 682,099 | 30,873 88 |
| 25' | 4637 425,384 | 30,889 74 | 25' | 4970 944,126 | 30,873 43 |
| 20' | 4646 692,171 | 30,889 29 | 20' | 4980 206,017 | 30,872 96 |
| 15' | 4655 958,823 | 30,888 84 | 15' | 4989 467,771 | 30,872 51 |
| 10' | 4665 225,340 | 30,888 39 | 10' | 4998 729,389 | 30,872 06 |
| 5' | 4674 491,721 | 30,887 94 | 5' | 5007 990,870 | 30,871 60 |
| — 48° 0' | 4683 757,966 | 30,887 48 | — 45° 0' | 5017 252,216 | 30,871 15 |
| — 47° 55' | 4693 024,076 | 30,887 03 | — 44° 55' | 5026 513,424 | 30,870 69 |
| 50' | 4702 290,050 | 30,886 58 | 50' | 5035 774,497 | 30,870 24 |
| 45' | 4711 555,888 | 30,886 13 | 45' | 5045 035,434 | 30,869 79 |
| 40' | 4720 821,590 | 30,885 67 | 40' | 5054 296,234 | 30,869 33 |
| 35' | 4730 087,156 | 30,885 22 | 35' | 5063 556,897 | 30,868 88 |
| 30' | 4739 352,587 | 30,884 77 | 30' | 5072 817,425 | 30,868 43 |
| 25' | 4748 617,882 | 30,884 32 | 25' | 5082 077,816 | 30,867 97 |
| 20' | 4757 883,041 | 30,883 86 | 20' | 5091 338,071 | 30,867 52 |
| 15' | 4767 148,063 | 30,883 41 | 15' | 5100 598,190 | 30,867 06 |
| 10' | 4776 412,950 | 30,882 96 | 10' | 5109 858,172 | 30,866 61 |
| 5' | 4785 677,701 | 30,882 50 | 5' | 5119 118,019 | 30,866 16 |
| — 47° 0' | 4794 942,316 | 30,882 05 | — 44° 0' | 5128 377,729 | 30,865 70 |

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| - 44° 0' | 5128 377,729 | 30,865 25 | - 41° 0' | 5461 636,807 | 30,848 97 |
| - 43° 55' | 5137 637,303 | 30,364 79 | - 40° 55' | 5470 891,499 | 30,848 52 |
| 50' | 5146 896,740 | 30,864 34 | 50' | 5480 146,056 | 30,848 07 |
| 45' | 5156 156,042 | 30,863 88 | 45' | 5489 400,478 | 30,847 63 |
| 40' | 5165 415,207 | 30,863 41 | 40' | 5498 654,766 | 30,847 18 |
| 35' | 5174 674,237 | 30,862 98 | 35' | 5507 908,920 | 30,846 73 |
| 30' | 5183 933,130 | 30,862 52 | 30' | 5517 162,938 | 30,846 28 |
| 25' | 5193 191,887 | 30,862 07 | 25' | 5526 416,823 | 30,845 83 |
| 20' | 5202 450,508 | 30,861 62 | 20' | 5535 670,573 | 30,845 38 |
| 15' | 5211 708,994 | 30,861 16 | 15' | 5544 924,188 | 30,844 94 |
| 10' | 5220 967,343 | 30,860 71 | 10' | 5554 177,670 | 30,844 49 |
| 5' | 5230 225,556 | 30,860 26 | 5' | 5563 431,017 | 30,844 04 |
| - 43° 0' | 5239 483,633 | 30,859 81 | - 40° 0' | 5572 684,230 | 30,843 60 |
| - 42° 55' | 5248 741,575 | 30,859 35 | - 39° 55' | 5581 937,309 | 30,843 15 |
| 50' | 5257 999,380 | 30,858 90 | 50' | 5591 190,254 | 30,842 70 |
| 45' | 5267 257,050 | 30,858 45 | 45' | 5600 443,065 | 30,842 26 |
| 40' | 5276 514,584 | 30,858 00 | 40' | 5609 695,743 | 30,841 81 |
| 35' | 5285 771,982 | 30,857 54 | 35' | 5618 948,286 | 30,841 37 |
| 30' | 5295 029,244 | 30,857 09 | 30' | 5628 200,696 | 30,840 92 |
| 25' | 5304 286,371 | 30,856 64 | 25' | 5637 452,972 | 30,840 48 |
| 20' | 5313 543,362 | 30,856 19 | 20' | 5646 705,115 | 30,840 03 |
| 15' | 5322 800,218 | 30,855 73 | 15' | 5655 957,125 | 30,839 59 |
| 10' | 5332 056,938 | 30,855 28 | 10' | 5665 209,001 | 30,839 14 |
| 5' | 5341 313,522 | 30,854 83 | 5' | 5674 460,744 | 30,838 70 |
| - 42° 0' | 5350 569,971 | 30,854 38 | - 39° 0' | 5683 712,353 | 30,838 26 |
| - 41° 55' | 5359 826,284 | 30,853 92 | - 38° 55' | 5692 963,830 | 30,837 81 |
| 50' | 5369 082,462 | 30,853 48 | 50' | 5702 215,173 | 30,837 39 |
| 45' | 5378 338,505 | 30,853 02 | 45' | 5711 466,384 | 30,836 93 |
| 40' | 5387 594,412 | 30,852 58 | 40' | 5720 717,462 | 30,836 48 |
| 35' | 5396 850,185 | 30,852 12 | 35' | 5729 968,407 | 30,836 04 |
| 30' | 5406 105,821 | 30,851 67 | 30' | 5739 219,219 | 30,835 60 |
| 25' | 5415 361,323 | 30,851 22 | 25' | 5748 469,899 | 30,835 16 |
| 20' | 5424 616,690 | 30,850 77 | 20' | 5757 720,446 | 30,834 72 |
| 15' | 5433 871,922 | 30,850 32 | 15' | 5766 970,861 | 30,834 28 |
| 10' | 5443 127,018 | 30,849 87 | 10' | 5776 221,144 | 30,833 83 |
| 5' | 5452 381,980 | 30,849 42 | 5' | 5785 471,294 | 30,833 40 |
| - 41° 0' | 5461 636,807 | | - 38° 0' | 5794 721,313 | |

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| — 38° 0' | 5794 721,313 | 30,832 95 | — 35° 0' | 6127 634,915 | 30,817 37 |
| — 37° 55' | 5803 971,199 | 30,832 52 | — 34° 55' | 6136 880,125 | 30,816 94 |
| 50' | 5813 220,954 | 30,832 07 | 50' | 6146 125,205 | 30,816 52 |
| 45' | 5822 470,576 | 30,831 64 | 45' | 6155 370,161 | 30,816 09 |
| 40' | 5831 720,067 | 30,831 20 | 40' | 6164 614,988 | 30,815 67 |
| 35' | 5840 969,427 | 30,830 76 | 35' | 6173 859,688 | 30,815 24 |
| 30' | 5850 218,655 | 30,830 32 | 30' | 6183 104,261 | 30,814 82 |
| 25' | 5859 467,751 | 30,829 89 | 25' | 6192 348,707 | 30,814 40 |
| 20' | 5868 716,717 | 30,829 45 | 20' | 6201 593,027 | 30,813 98 |
| 15' | 5877 965,551 | 30,829 01 | 15' | 6210 837,220 | 30,813 55 |
| 10' | 5887 214,251 | 30,828 57 | 10' | 6220 081,286 | 30,813 13 |
| 5' | 5896 462,826 | 30,828 14 | 5' | 6229 325,226 | 30,812 71 |
| — 37° 0' | 5905 711,267 | 30,827 70 | — 34° 0' | 6238 569,040 | 30,812 29 |
| — 36° 55' | 5914 959,578 | 30,827 27 | — 33° 55' | 6247 812,728 | 30,811 88 |
| 50' | 5924 207,758 | 30,826 83 | 50' | 6257 056,291 | 30,811 45 |
| 45' | 5933 455,807 | 30,826 40 | 45' | 6266 299,727 | 30,811 04 |
| 40' | 5942 703,727 | 30,825 96 | 40' | 6275 543,038 | 30,810 62 |
| 35' | 5951 951,515 | 30,825 53 | 35' | 6284 786,224 | 30,810 20 |
| 30' | 5961 199,174 | 30,825 10 | 30' | 6294 029,284 | 30,809 79 |
| 25' | 5970 446,703 | 30,824 66 | 25' | 6303 272,220 | 30,809 37 |
| 20' | 5979 694,102 | 30,824 23 | 20' | 6312 515,030 | 30,808 95 |
| 15' | 5988 941,370 | 30,823 80 | 15' | 6321 757,716 | 30,808 54 |
| 10' | 5998 188,510 | 30,823 36 | 10' | 6331 000,277 | 30,808 12 |
| 5' | 6007 435,519 | 30,822 94 | 5' | 6340 242,714 | 30,807 71 |
| — 36° 0' | 6016 682,400 | 30,822 50 | — 33° 0' | 6349 485,026 | 30,807 29 |
| — 35° 55' | 6025 929,151 | 30,822 07 | — 32° 55' | 6358 727,214 | 30,806 88 |
| 50' | 6035 175,773 | 30,821 64 | 50' | 6367 969,279 | 30,806 47 |
| 45' | 6044 422,265 | 30,821 21 | 45' | 6377 211,219 | 30,806 06 |
| 40' | 6053 668,629 | 30,820 78 | 40' | 6386 453,036 | 30,805 65 |
| 35' | 6062 914,864 | 30,820 37 | 35' | 6395 694,730 | 30,805 23 |
| 30' | 6072 160,971 | 30,819 93 | 30' | 6404 936,300 | 30,804 83 |
| 25' | 6081 406,949 | 30,819 50 | 25' | 6414 177,748 | 30,804 41 |
| 20' | 6090 652,798 | 30,819 07 | 20' | 6423 419,072 | 30,804 00 |
| 15' | 6099 898,519 | 30,818 65 | 15' | 6432 660,273 | 30,803 59 |
| 10' | 6109 144,113 | 30,818 22 | 10' | 6441 901,352 | 30,803 19 |
| 5' | 6118 389,578 | 30,817 79 | 5' | 6451 142,309 | 30,802 78 |
| — 35° 0' | 6127 634,915 | | — 32° 0' | 6460 383,143 | |

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| — 32° 0' | 6460 383,143 | | — 29° 0' | 6792 973,323 | |
| — 31° 55' | 6469 623,855 | 30,802 37 | — 28° 55' | 6802 209,766 | 30,788 14 |
| 50' | 6478 864,446 | 30,801 97 | 50' | 6811 446,095 | 30,787 76 |
| 45' | 6488 104,915 | 30,801 56 | 45' | 6820 682,309 | 30,787 38 |
| 40' | 6497 345,262 | 30,801 16 | 40' | 6829 918,408 | 30,787 00 |
| 35' | 6506 585,487 | 30,800 75 | 35' | 6839 154,393 | 30,786 62 |
| 30' | 6515 825,592 | 30,800 35 | 30' | 6848 390,264 | 30,786 24 |
| 25' | 6525 065,576 | 30,799 95 | 25' | 6857 626,022 | 30,785 86 |
| 20' | 6534 305,439 | 30,799 54 | 20' | 6856 861,665 | 30,785 48 |
| 15' | 6543 545,181 | 30,799 14 | 15' | 6876 097,195 | 30,785 10 |
| 10' | 6552 784,802 | 30,798 74 | 10' | 6885 332,613 | 30,784 72 |
| 5' | 6562 024,304 | 30,798 34 | 5' | 6894 567,917 | 30,784 35 |
| — 31° 0' | 6571 263,685 | 30,797 94 | — 28° 0' | 6903 803,100 | 30,783 97 |
| — 30° 55' | 6580 502,947 | 30,797 54 | — 27° 55' | 6913 038,188 | 30,783 60 |
| 50' | 6589 742,089 | 30,797 14 | 50' | 6922 273,155 | 30,783 22 |
| 45' | 6598 981,111 | 30,796 74 | 45' | 6931 508,010 | 30,782 85 |
| 40' | 6608 220,014 | 30,796 34 | 40' | 6940 742,753 | 30,782 48 |
| 35' | 6617 458,798 | 30,795 96 | 35' | 6949 977,385 | 30,782 11 |
| 30' | 6626 697,463 | 30,795 55 | 30' | 6959 211,905 | 30,781 73 |
| 25' | 6635 936,010 | 30,795 16 | 25' | 6968 446,311 | 30,781 35 |
| 20' | 6645 174,437 | 30,794 76 | 20' | 6977 680,612 | 30,780 99 |
| 15' | 6654 412,747 | 30,794 37 | 15' | 6986 914,800 | 30,780 63 |
| 10' | 6663 650,938 | 30,793 97 | 10' | 6996 148,877 | 30,780 26 |
| 5' | 6672 889,011 | 30,793 58 | 5' | 7005 382,844 | 30,779 89 |
| — 30° 0' | 6682 126,967 | 30,793 19 | — 27° 0' | 7014 616,700 | 30,779 52 |
| — 29° 55' | 6691 364,805 | 30,792 79 | — 26° 55' | 7023 850,448 | 30,779 16 |
| 50' | 6700 602,526 | 30,792 40 | 50' | 7033 084,085 | 30,778 79 |
| 45' | 6709 840,129 | 30,792 01 | 45' | 7042 317,614 | 30,778 43 |
| 40' | 6719 077,616 | 30,791 62 | 40' | 7051 551,033 | 30,778 06 |
| 35' | 6728 314,986 | 30,791 23 | 35' | 7060 784,344 | 30,777 70 |
| 30' | 6737 552,239 | 30,790 84 | 30' | 7070 017,546 | 30,777 34 |
| 25' | 6746 789,376 | 30,790 46 | 25' | 7079 250,640 | 30,776 98 |
| 20' | 6756 026,397 | 30,790 07 | 20' | 7088 483,625 | 30,776 62 |
| 15' | 6765 263,302 | 30,789 68 | 15' | 7097 716,503 | 30,776 26 |
| 10' | 6774 500,091 | 30,789 30 | 10' | 7106 949,273 | 30,775 90 |
| 5' | 6783 736,765 | 30,788 91 | 5' | 7116 181,936 | 30,775 54 |
| — 29° 0' | 6792 973,323 | 30,788 53 | — 26° 0' | 7125 414,492 | 30,775 19 |

| φ | S | Dif. por 1'' | φ | S | Dif. por 1'' |
|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|
| -26° 0' | 7125 414,492 | | -23° 0' | 7457 717,300 | |
| -25° 55' | 7134 646,941 | 30,774 83 | -22° 55' | 7466 946,072 | 30,762 57 |
| 50' | 7143 879,284 | 30,774 48 | 50' | 7476 174,747 | 30,762 25 |
| 45' | 7153 111,520 | 30,774 12 | 45' | 7485 403,325 | 30,761 93 |
| 40' | 7162 343,649 | 30,773 76 | 40' | 7494 631,807 | 30,761 61 |
| 35' | 7171 575,673 | 30,773 41 | 35' | 7503 860,192 | 30,761 28 |
| 30' | 7180 807,592 | 30,773 06 | 30' | 7513 088,481 | 30,760 96 |
| 25' | 7190 039,405 | 30,772 71 | 25' | 7522 316,674 | 30,760 64 |
| 20' | 7199 271,113 | 30,772 36 | 20' | 7531 544,772 | 30,760 33 |
| 15' | 7208 502,716 | 30,772 01 | 15' | 7540 772,774 | 30,760 01 |
| 10' | 7217 734,214 | 30,771 66 | 10' | 7550 000,682 | 30,759 69 |
| 5' | 7226 965,608 | 30,771 31 | 5' | 7559 228,495 | 30,759 38 |
| -25° 0' | 7236 195,898 | 30,770 97 | -22° 0' | 7568 456,213 | 30,759 06 |
| -24° 55' | 7245 428,084 | 30,770 62 | -21° 55' | 7577 683,837 | 30,758 75 |
| 50' | 7254 659,167 | 30,770 28 | 50' | 7586 911,368 | 30,758 44 |
| 45' | 7263 890,146 | 30,769 93 | 45' | 7596 138,805 | 30,758 12 |
| 40' | 7273 121,022 | 30,769 59 | 40' | 7605 366,149 | 30,757 81 |
| 35' | 7282 351,795 | 30,769 24 | 35' | 7614 593,399 | 30,757 50 |
| 30' | 7291 582,466 | 30,768 90 | 30' | 7623 820,557 | 30,757 18 |
| 25' | 7300 813,034 | 30,768 56 | 25' | 7633 047,623 | 30,756 88 |
| 20' | 7310 043,501 | 30,768 22 | 20' | 7642 274,596 | 30,756 58 |
| 15' | 7319 273,865 | 30,767 88 | 15' | 7651 501,478 | 30,756 27 |
| 10' | 7328 504,128 | 30,767 54 | 10' | 7660 728,268 | 30,755 97 |
| 5' | 7337 734,290 | 30,767 21 | 5' | 7669 954,967 | 30,755 66 |
| -24° 0' | 7346 964,351 | 30,766 87 | -21° 0' | 7679 181,575 | 30,755 36 |
| -23° 55' | 7356 194,311 | 30,766 52 | | | |
| 50' | 7365 424,170 | 30,766 20 | | | |
| 45' | 7374 653,930 | 30,765 87 | | | |
| 40' | 7383 883,589 | 30,765 53 | | | |
| 35' | 7393 113,149 | 30,765 20 | | | |
| 30' | 7402 342,609 | 30,764 87 | | | |
| 25' | 7411 571,971 | 30,764 52 | | | |
| 20' | 7420 801,233 | 30,764 21 | | | |
| 15' | 7430 030,397 | 30,763 88 | | | |
| 10' | 7439 259,462 | 30,763 55 | | | |
| 5' | 7448 488,430 | 30,763 23 | | | |
| -23° 0' | 7457 717,300 | 30,762 90 | | | |

| φ | log N | dif. | φ | log N | dif. |
|-----------|-------------|------|-----------|-------------|------|
| - 56° 0' | 6,805 71673 | | - 50° 0' | 6,805 56940 | |
| - 55° 50' | 71277 | 396 | - 49° 50' | 56520 | 420 |
| 40' | 70880 | 397 | 40' | 56099 | 421 |
| 30' | 70482 | 398 | 30' | 55678 | 421 |
| 20' | 70083 | 399 | 20' | 55257 | 421 |
| 10' | 69684 | 399 | 10' | 54835 | 422 |
| - 55° 0' | 69283 | 401 | - 49° 0' | 54413 | 422 |
| - 54° 50' | 68882 | 401 | - 48° 50' | 53991 | 422 |
| 40' | 68480 | 402 | 40' | 53568 | 423 |
| 30' | 68077 | 403 | 30' | 53145 | 423 |
| 20' | 67673 | 404 | 20' | 52722 | 423 |
| 10' | 67268 | 405 | 10' | 52298 | 424 |
| - 54° 0' | 66863 | 405 | - 48° 0' | 51875 | 423 |
| - 53° 50' | 66457 | 406 | - 47° 50' | 51450 | 425 |
| 40' | 66050 | 407 | 40' | 51026 | 424 |
| 30' | 65643 | 407 | 30' | 50602 | 424 |
| 20' | 65234 | 409 | 20' | 50177 | 425 |
| 10' | 64825 | 409 | 10' | 49752 | 425 |
| - 53° 0' | 6,805 64116 | 409 | - 47° 0' | 6,805 49327 | 425 |
| - 52° 50' | 64005 | 411 | - 46° 50' | 48902 | 425 |
| 40' | 63594 | 411 | 40' | 48476 | 426 |
| 30' | 63183 | 411 | 30' | 48051 | 425 |
| 20' | 62770 | 413 | 20' | 47625 | 426 |
| 10' | 62358 | 412 | 10' | 47199 | 426 |
| - 52° 0' | 61944 | 414 | - 46° 0' | 46773 | 426 |
| - 51° 50' | 61530 | 414 | - 45° 50' | 46347 | 426 |
| 40' | 61115 | 415 | 40' | 45921 | 426 |
| 30' | 60700 | 415 | 30' | 45495 | 426 |
| 20' | 60284 | 416 | 20' | 45069 | 426 |
| 10' | 59868 | 416 | 10' | 44643 | 426 |
| - 51° 0' | 59451 | 417 | - 45° 0' | 44217 | 426 |
| - 50° 50' | 59034 | 417 | - 44° 50' | 43791 | 426 |
| 40' | 58616 | 418 | 40' | 43365 | 426 |
| 30' | 58197 | 419 | 30' | 42939 | 426 |
| 20' | 57779 | 418 | 20' | 42513 | 426 |
| 10' | 57359 | 420 | 10' | 42087 | 426 |
| - 50° 0' | 6,805 56940 | 419 | - 44° 0' | 6,805 41661 | 426 |

| φ | log N | dif. | φ | log N | dif. |
|-----------|-------------|------|-----------|-------------|------|
| — 44° 0' | 6,805 41661 | | — 38° 0' | 6,805 26504 | |
| — 43° 50' | 41235 | 426 | — 37° 50' | 26091 | 413 |
| 40' | 4080 | 426 | 40' | 25679 | 412 |
| 30' | 4038 | 425 | 30' | 25267 | 412 |
| 20' | 39958 | 426 | 20' | 24857 | 410 |
| 10' | 39533 | 425 | 10' | 24446 | 411 |
| — 43° 0' | 39108 | 425 | — 37° 0' | 24037 | 409 |
| — 42° 50' | 38683 | 425 | — 36° 50' | 23628 | 409 |
| 40' | 38258 | 424 | 40' | 23220 | 408 |
| 30' | 37834 | 424 | 30' | 22812 | 408 |
| 20' | 37410 | 424 | 20' | 22405 | 407 |
| 10' | 36986 | 424 | 10' | 21999 | 406 |
| — 42° 0' | 36562 | 424 | — 36° 0' | 21594 | 405 |
| — 41° 50' | 36138 | 423 | — 35° 50' | 21190 | 404 |
| 40' | 35715 | 423 | 40' | 20786 | 404 |
| 30' | 35292 | 422 | 30' | 20383 | 403 |
| 20' | 34870 | 423 | 20' | 19981 | 402 |
| 10' | 34447 | 422 | 10' | 19580 | 401 |
| — 41° 0' | 6,805 34025 | 421 | — 35° 0' | 6,805 19179 | 399 |
| — 40° 50' | 33604 | 422 | — 34° 50' | 18780 | 399 |
| 40' | 33182 | 420 | 40' | 18381 | 398 |
| 30' | 32762 | 421 | 30' | 17983 | 396 |
| 20' | 32341 | 420 | 20' | 17587 | 396 |
| 10' | 31921 | 420 | 10' | 17191 | 396 |
| — 40° 0' | 31501 | 419 | — 34° 0' | 16795 | 394 |
| — 39° 50' | 31082 | 419 | — 33° 50' | 16401 | 393 |
| 40' | 30663 | 418 | 40' | 16008 | 392 |
| 30' | 30245 | 418 | 30' | 15616 | 391 |
| 20' | 29827 | 417 | 20' | 15225 | 391 |
| 10' | 29410 | 417 | 10' | 14834 | 389 |
| — 39° 0' | 28993 | 416 | — 33° 0' | 14445 | 388 |
| — 38° 50' | 28577 | 416 | — 32° 50' | 14057 | 387 |
| 40' | 28161 | 415 | 40' | 13670 | 387 |
| 30' | 27746 | 414 | 30' | 13283 | 385 |
| 20' | 27332 | 414 | 20' | 12898 | 384 |
| 10' | 26918 | 414 | 10' | 12514 | 384 |
| — 38° 0' | 6,805 26504 | | — 32° 0' | 6,805 12131 | |

| φ | log N | dif. | φ | log N | dif. |
|-----------|-------------|------|-----------|-------------|------|
| - 32° 0' | 6,805 12131 | | - 26° 0' | 6,804 99168 | |
| - 31° 50' | 11749 | 382 | - 25° 50' | 98834 | 334 |
| 40' | 11369 | 380 | 40' | 98501 | 333 |
| 30' | 10989 | 380 | 30' | 98170 | 331 |
| 20' | 10610 | 379 | 20' | 97840 | 330 |
| 10' | 10233 | 377 | 10' | 97512 | 328 |
| - 31° 0' | 09857 | 376 | - 25° 0' | 97186 | 326 |
| - 30° 50' | 09482 | 375 | - 24° 50' | 96861 | 325 |
| 40' | 09108 | 374 | 40' | 96537 | 324 |
| 30' | 08735 | 373 | 30' | 96216 | 321 |
| 20' | 08364 | 371 | 20' | 95896 | 320 |
| 10' | 07993 | 371 | 10' | 95577 | 319 |
| - 30° 0' | 07624 | 369 | - 24° 0' | 95260 | 317 |
| - 29° 50' | 07257 | 367 | - 23° 50' | 94945 | 315 |
| 40' | 06890 | 367 | 40' | 94632 | 313 |
| 30' | 06525 | 365 | 30' | 94320 | 312 |
| 20' | 06161 | 364 | 20' | 94010 | 310 |
| 10' | 05798 | 363 | 10' | 93702 | 308 |
| - 29° 0' | 6,805 05437 | 361 | - 23° 0' | 6,804 93395 | 307 |
| - 28° 50' | 05077 | 360 | - 22° 50' | 93090 | 305 |
| 40' | 04718 | 359 | 40' | 92787 | 303 |
| 30' | 04360 | 358 | 30' | 92485 | 302 |
| 20' | 04004 | 356 | 20' | 92186 | 299 |
| 10' | 03650 | 354 | 10' | 91888 | 298 |
| - 28° 0' | 03296 | 354 | - 22° 0' | 91591 | 297 |
| - 27° 50' | 02944 | 352 | - 21° 50' | 91297 | 294 |
| 40' | 02594 | 350 | 40' | 91004 | 293 |
| 30' | 02245 | 349 | 30' | 90714 | 290 |
| 20' | 01897 | 348 | 20' | 90425 | 289 |
| 10' | 01551 | 346 | 10' | 90137 | 288 |
| - 27° 0' | 01206 | 345 | - 21° 0' | 6,804 89852 | 285 |
| - 26° 50' | 00863 | 343 | | | |
| 40' | 00521 | 342 | | | |
| 30' | 6,805 00181 | 340 | | | |
| 20' | 6,804 99842 | 339 | | | |
| 10' | 99504 | 338 | | | |
| - 26° 0' | 6,804 99168 | 336 | | | |

Ejemplo práctico 1

(precisión de cálculos para Agrimensura)

Hallar las coordenadas Gauss-Krüger del punto: Chalet Green (Buenos Aires)

$$\begin{aligned}\varphi &= -34^{\circ} 34' 10,6210'' \\ L &= -58^{\circ} 26' 14,2396''\end{aligned}$$

FÓRMULAS:

$$(1) \quad y = \underbrace{k \cdot 1\,000\,000 + 500\,000}_{\text{T}} + \underbrace{l \cdot \cos \varphi \cdot N}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{(l \cdot \cos \varphi)^3 N}{6} (1 - l^2 + \eta^2)}_{\text{III}} \dots$$

$$(2) \quad x = S + \underbrace{\frac{(l \cdot \cos \varphi)^2 \cdot N t}{2}}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{(l \cdot \cos \varphi)^4 N t}{24} (5 - t^2 + 9 \eta^2)}_{\text{IV}} \dots$$

Como la longitud del punto difiere en menos que $1^{\circ}30'$ de la longitud -57° , el punto pertenece a la 6ª faja meridiana, de modo que tenemos:

$$k = 6, \quad \varphi = -34^{\circ} 34' 10,6210'', \quad l = -1^{\circ} 26' 14,2396'' = -5\,174,2396'' = -\frac{5174,2396}{\rho}$$

$$\log (-5\,174,2396) = 3,713\,8465 \pi$$

$$\log 1/\rho = 4,685\,5749 - 10$$

$$\log l = 8,399\,4214 - 10 \pi$$

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$

Ejemplo práctico 2 (*)

(para fines cartográficos)

Hallar las coordenadas conformes del punto $\varphi = -36^\circ$ y $L = -57^\circ$ con respecto al meridiano central $L = -60^\circ$ y con la precisión necesaria para la confección de una carta de la Provincia de Buenos Aires a escala 1:200 000.

En vista de que para la escala 1:200 000 la x y la y se necesitan solamente con la aproximación de 20 m (que en la carta se representa por 0,1 mm), tendremos en cuenta para los términos parciales de las fórmulas solamente las decenas de metros. Empléanse las fórmulas (1) y (2) de pág. 20 simplificadas.

FÓRMULAS:

$$(3) \quad y = \overbrace{l \cdot \cos \varphi \cdot N}^{\text{I}} + \frac{\overbrace{(l \cdot \cos \varphi)^3 \cdot N}^{\text{III}}}{6} (1-t^2)$$

$$(4) \quad x = S + \frac{\overbrace{(l \cdot \cos \varphi)^2 N \cdot t}^{\text{II}}}{2}$$

Tenemos: $\varphi = -36^\circ$, $l = +3^\circ = \frac{\pi}{60}$, $t = \text{tg } \varphi$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|----------------------|-----------------|----------------------|--------------------------|--------------|----------------------|--------------|-------------------|--|-------------|--|--|
| $\log l = 8,71900-10$ $\log \cos \varphi = 9,90796-10$ $\log (l \cdot \cos \varphi) = 8,62696-10$ $\log N = 6,80522$ (tabla II) $\log I = 5,43218$ $I = +270\ 510$ | $\log N = 6,8052$ $\log t = 9,8613-10$ n $\log (N \cdot t) = 6,6665$ n $\log (l \cdot \cos \varphi)^2 = 7,2539-10$ $\log 1/2 = 9,6990-10$ $\log 11 = 3,6194$ n $11 = -4160$ | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none;">$\log (l \cdot \cos \varphi)^3 = 5,83-10$</td> <td style="border: none;">$\log t = 9,86-10$ n</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$\log N = 6,81$</td> <td style="border: none;">$\log t^2 = 9,72-10$</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$\log (1-t^2) = 9,68-10$</td> <td style="border: none;">$t^2 = 0,52$</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$\log 1/6 = 9,22-10$</td> <td style="border: none;">$1-t = 0,48$</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$\log III = 1,59$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$III = +40$</td> <td></td> </tr> </table> | $\log (l \cdot \cos \varphi)^3 = 5,83-10$ | $\log t = 9,86-10$ n | $\log N = 6,81$ | $\log t^2 = 9,72-10$ | $\log (1-t^2) = 9,68-10$ | $t^2 = 0,52$ | $\log 1/6 = 9,22-10$ | $1-t = 0,48$ | $\log III = 1,59$ | | $III = +40$ | | |
| $\log (l \cdot \cos \varphi)^3 = 5,83-10$ | $\log t = 9,86-10$ n | | | | | | | | | | | | |
| $\log N = 6,81$ | $\log t^2 = 9,72-10$ | | | | | | | | | | | | |
| $\log (1-t^2) = 9,68-10$ | $t^2 = 0,52$ | | | | | | | | | | | | |
| $\log 1/6 = 9,22-10$ | $1-t = 0,48$ | | | | | | | | | | | | |
| $\log III = 1,59$ | | | | | | | | | | | | | |
| $III = +40$ | | | | | | | | | | | | | |
| $I = +270\ 510$ $111 = +\quad 40$ $y = +270\ 550$ | $S = 6\ 016\ 680$ (tabla I) $11 = -\quad 4\ 160$ $x = 6\ 012\ 520$ | | | | | | | | | | | | |

Form. Agr. 4.

(*) Se sacaron estos dos ejemplos prácticos de la publicación del Instituto Geográfico Militar, citada en pág. 2 del Apéndice II.

APÉNDICE III

Signos convencionales argentinos (*)

(en negro)

para las cartas topográficas a escalas:

1 : 25 000

1 : 50 000

(*) Ver: *Reglamento Cartográfico del Instituto Geográfico Militar*, año 1933.

SIGNOS CONVENCIONALES

SUMARIO

| | | |
|--|------|-----------|
| A. Terrenos y vegetación..... | Nos. | 1 - 33 |
| B. Hidrografía..... | " | 34 - 48 |
| C. Comunicaciones..... | " | 49 - 105 |
| a. Fluviales y marítimas..... | " | 49 - 74 |
| b. Caminos y ferrocarriles..... | " | 75 - 96 |
| c. Medios de comunicación..... | " | 97 - 103 |
| d. Servicios aéreos..... | " | 104 y 105 |
| D. Construcciones..... | " | 106 - 129 |
| E. Límites y deslindes..... | " | 130 - 142 |
| F. Signos militares..... | " | 143 - 147 |
| <i>Suplemento.</i> | | |
| Algunos signos convencionales para croquis originales de catastro .. | " | 1 - 10 |

Modelos de letras y aplicación de los signos convencionales.



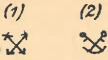


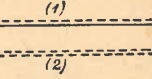

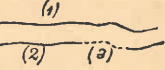


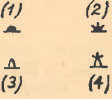

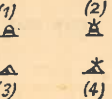
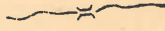







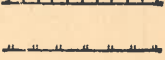


| | | |
|-------------------------------|------|----|
| Modelos de letras..... | Pág. | 10 |
| Zona de valle de erosión..... | " | 11 |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|--------------------------------|---|--|----|--|--------------------------|
| A. Terreno y Vegetación | | | | | |
| 1 | 1) Punto acotado 2) Punto fijo altimétrico de precisión (*) | 1) <u>248,5</u> 2) 25,72 ⊕ 26,41 | 10 | Helero con curvas de nivel | |
| 2 | Curvas de nivel 1) principal 2) de equidistancia 3) auxiliar | 1) <u> </u> 2) <u> </u> 3) - - - - - | 11 | Arenal | |
| 3 | Isóbatas 1) auxiliar 2) de equidistancia 3) principal | | 12 | Suelo arenoso con ri-pio y canto rodado | |
| 4 | 1) Barranco 2) Escarpado 3) Altura de 3 m aprox. | 1) 2) | 13 | Pedregal | |
| 5 | Zanjón, cortaduras grandes, hualcos, etc. | | 14 | Tacuruzal | |
| 6 | Médanos o dunas | | 15 | Malezal correntino 1) sin agua 2) con agua | |
| 7 | Bancos de arena con barranca | | 16 | Cangrejal | |
| 8 | Escollo o arrecife | | 17 | Turbal | |
| 9 | Rocas con curvas de nivel | | 18 | Terreno cultivado o de labranza | |
| | | | 19 | Vega | |
| | | | 20 | Matorral, cardal, cordateral, quisical | |

(*) La cota subrayada se refiere a la marca del punto fijo, la otra cota colocada debajo de la raya, corresponde al terreno natural en el lugar del punto.

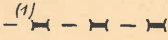
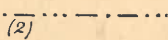


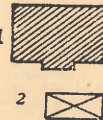


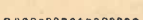



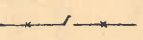
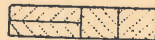
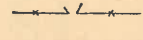

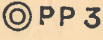








| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|----|--|--------------------------|-----------------------|--|--------------------------|
| 21 | Pajonal, juncal . . . | | 32 | Arboles visibles de lejos | |
| 22 | Viñedo de alambrado | | 33 | Parque | |
| 23 | Viñedo de cepa . . . | | B. Hidrografía | | |
| 24 | Caña de azúcar . . . | | 34 | Curso de agua permanente 1) ancho menor de 5 metros 2) ancho mayor de 5 metros | |
| 25 | Monte bajo 1) transitable 2) intransitable | | 35 | Curso de agua no permanente (1) y (2) como en el anterior | |
| 26 | Bosque 1) transitable 2) intransitable | | 36 | 1) Canal de riego 2) Acequia 3) Canal navegable 4) Zanja incluyendo las de drenaje y de desagüe | |
| 27 | Monte de coníferos . . | | 37 | Acueducto 1) descubierto 2) subterráneo 3) Boca toma de agua corriente 4) Oleoducto | |
| 28 | Palmar | | 38 | Lago o laguna permanente 1) no potable 2) salada 3) navegable | |
| 29 | Monte artificial . . . | | 39 | Lago o laguna temporal | |
| 30 | Filas de árboles . . . | | 40 | Bañado o terreno anegadizo | |
| 31 | Grupos aislados de árboles | | | | |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|---------------------------------|--|--------------------------|----|--|--------------------------|
| 41 | Estero | | 51 | Puente 1) de hierro 2) de piedra 3) de madera | |
| 42 | Cañada | | 52 | 1) Puente de cablete 2) Alcantarilla | |
| 43 | Ciénaga, tembladeral, embalsado | | 53 | Puente de barcos | |
| 44 | Salina, salar, salitral, salitrera, etc. | | 54 | Esclusas de 1) madera 2) mampostería | |
| 45 | 1) Manantial, ojo de agua, aguada, 2) tanque 3) jagüel 4) represa | | 55 | Línea de navegación | |
| 46 | Fuente de agua mineral | | 56 | Lugar donde empieza a ser posible la navegación | |
| 47 | 1) Catarata 2) Salto, rápido | | 57 | Ferry-boat | |
| 48 | Tajamar o embalse | | 58 | Desembarcadero 1) fijo 2) flotante | |
| C. Comunicaciones | | | 59 | Malecón de 1) madera 2) mampostería 3) piedra (escollera) | |
| a. FLUVIALES Y MARITIMAS | | | 60 | Muelle | |
| 49 | 1) Balsa 2) Vado o paso | | 61 | Dársena y dique 1) Grúa | |
| 50 | Pasadera o pasarela | | | | |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|----|--|---|----|---|--|
| 62 | Fondeadero 1) para barcos grandes 2) para pequeños |  | 75 | b. CAMINOS Y FERROCARRILES Camino pavimentado |  |
| 63 | 1) Puerto militar 2) Puerto comercial |  | 76 | Camino de tierra consolidado ... 1) trozo intransitable |  |
| 64 | Astilleros 1) nave de guerra 2) nave mercante |  | 77 | Camino 1) de material 2) secundario |  |
| 65 | Boya |  | 78 | 1) Senda 2) senda con parte difícil (a) |  |
| 66 | Boya luminosa . . . |  | 79 | Camino 1) en terraplén 2) en desmonte |  |
| 67 | 1) Boya de babor 2) ídem luminosa 3) Boya de estribor 4) ídem luminosa |  | 80 | Indicador de camino |  |
| 68 | 1) Boya de bifurcación 2) Ídem luminosa 3) Ídem de peligro 4) Ídem luminosa |  | 81 | Paso, boquete, portillo o portezuelo . |  |
| 69 | 1) Baliza a farola 2) Hidrómetro |  | 82 | Ferrocarril en explotación 1) vía simple 2) vía doble |  |
| 70 | Faro |  | 83 | Ferrocarril a cremallera |  |
| 71 | Faro flotante |  | 84 | Ferrocarril en construcción |  |
| 72 | Casco a pique |  | 85 | Tranvía rural F. C. secundario o decauville permanente |  |
| 73 | Cable submarino 1) Telégrafo 2) Teléfono |  | | | |
| 74 | Mareógrafo |  | | | |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|----------------------------------|--|--------------------------|----------------------------|--|--------------------------|
| 86 | Cablecarril | | 99 | Telégrafo y teléfono | |
| 87 | Desvío y estación o parada 1) número de vías auxiliares | | 100 | Cable conductor de energía eléctrica 1) Llave de conexión | |
| 88 | Paso a nivel | | 101 | Usina eléctrica | |
| 89 | Vía a bajo nivel | | 102 | Estación radiotelegráfica 1) Torre de transmisión | |
| 90 | Vía a alto nivel | | 103 | Estación radiotelefónica, o radiotelefónica y radiotelegráfica | |
| 91 | Túnel 1) de ferrocarril 2) de camino | | d. SERVICIOS AEREOS | | |
| 92 | Viaducto | | 104 | Aeródromo 1) para dirigible 2) para avión | |
| 93 | Semáforo | | 105 | Plaza de aterrizaje permanente | |
| 94 | Oficina de correos | | D. Construcciones | | |
| 95 | Oficina de telégrafos | | 106 | Ciudad, pueblo, villa y, en general, lugar habitado | |
| 96 | Oficina de teléfono | | 107 | | |
| c. MEDIOS DE COMUNICACION | | | 108 | | |
| 97 | Telégrafo | | 109 | Iglesia 1) de una torre 2) de dos torres | |
| 98 | Teléfono | | | | |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|-----|---|--------------------------|-------------------------------|---|--------------------------|
| 110 | Capilla | | 123 | Galpón | |
| 111 | Cementerio | | 124 | Corral de palo . . . | |
| 112 | Fábrica con chimeneas | | 125 | Corral de pirca . . . | |
| 113 | Torre | | 126 | 1) Mina 2) Pozo de petróleo | |
| 114 | 1) Baño 2) Dirección de la corriente | | 127 | Cantera | |
| 115 | Ruinas | | 128 | Gruta o cueva . . . | |
| 116 | Hospital | | 129 | Punto trigonométrico | |
| 117 | Monumento | | E. Límites y Deslindes | | |
| 118 | Hipódromo | | 130 | Límite internacional 1) marcado 2) no marcado | |
| 119 | Horno de ladrillos . . | | 131 | Límite interprovincial y de gobernación | |
| 120 | Horno de cal | | 132 | Límite de partido o departamento . . | |
| 121 | Estancia, escuela, finca, chacra, granja, puesto, almacén, tambo, comisaría, edificio aislado, etc. | | 133 | Límite de distrito . . | |
| 122 | Molino 1) de viento 2) ídem con motor | | 134 | Límite de cuartel . . | |

| Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO | Nº | INDICACION DEL SIGNO | REPRESENTACION DEL SIGNO |
|----------------------------|---|--|--|--|---|
| 135 | Límites en litigio . 1) internacional 2) interprovincial y de gobernación | (1)  (2)  | SUPLEMENTO | | |
| 136 | Mojón o hito |  | Algunos signos convencionales para croquis originales. (*) | | |
| 137 | Muralla, tapia o verja |  | 1 | Edificación 1) de mampostería 2) de madera |  |
| 138 | Pirca |  | 2 | Muro o pared |  |
| 139 | Cerco vivo o de ramas |  | 3 | Límite de propiedad |  |
| 140 | Alambrado |  | 4 | Prado |  |
| 141 | Alambrado con puerta para jinetes |  | 5 | Huerta |  |
| 142 | Alambrado con tranquera para vehículos |  | 6 | Prado con árboles |  |
| F. Signos Militares | | | 7 | Punto poligonal 3 |  |
| 143 | Fortín |  | 8 | Mojón de piedra |  |
| 144 | Polígono de tiro |  | 9 | Mojón de hierro |  |
| 145 | Lugar de combate |  | 10 | Mojón de madera |  |
| 146 | Asiento de comando de división de ejército |  | (*) Ver para aplicaciones prácticas de estos signos: Roberto Müller, Confeción de catastros, Buenos Aires, 1935, y Nº 12 del § 11 del presente Tomo. | | |
| 147 | Asiento de distrito militar |  | | | |

TIPOS DE LETRAS CARTOGRAFICAS

Letras bastón — Letras cursivas inclinadas a la izquierda — Letras romanas — Letras cursivas — Letras bastón inclinadas

Letras bastón

ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnpqrstu
vwxyz 1234567890

Letras cursiva inclinada a la izquierda

ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnpqrstu
vwxyz 1234567890

Romana Capital

ABCDEFGHIJKL

Letras bastón inclinada

ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnpqrstu
vwxyz 1234567890

ABCDEFGHIJKL

RDAsa — inclinación de la caligrafía —

Letras romanas

Les majuscules se lientent capitales.

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnpqr
stuvwxyz 1234567890

ABC en romans Letras cursivas ABCabc en romans

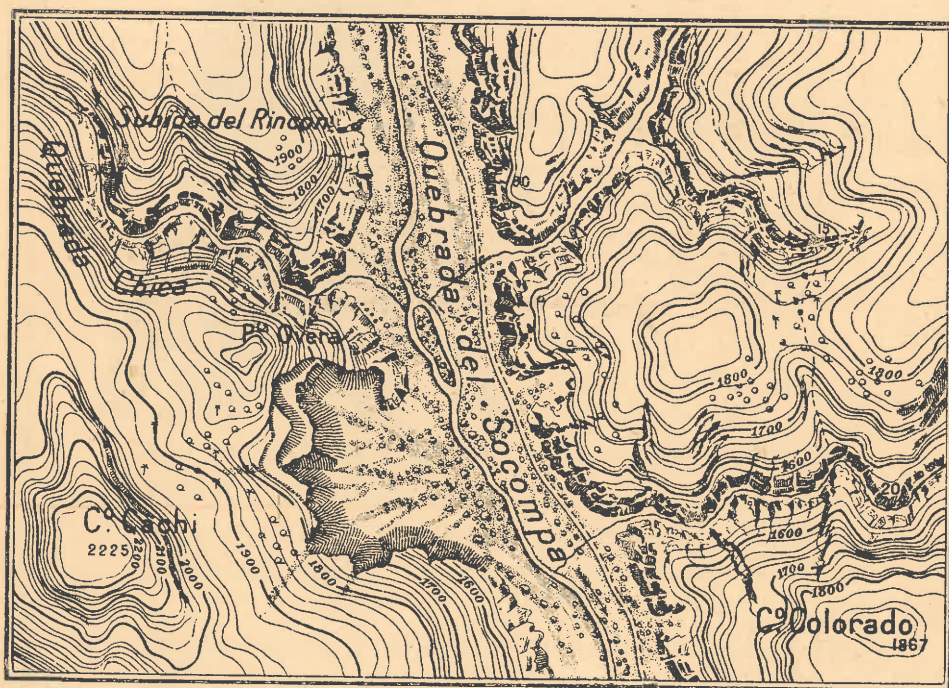
ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnpqrstu
vwxyz 1234567890

Romana Capital (hueca)

ABCDEFGHIJKLMN
OPQRS
TUV

APLICACION DE LOS SIGNOS CONVENCIONALES

ZONA DE VALLE DE EROSION



Acabóse de imprimir este libro en las
Escuelas Gráficas del Colegio León XIII
Obra de Don Bosco
Dorrego 2112 - Buenos Aires
el 2 de Septiembre
de 1946.

(Printed in Argentine)