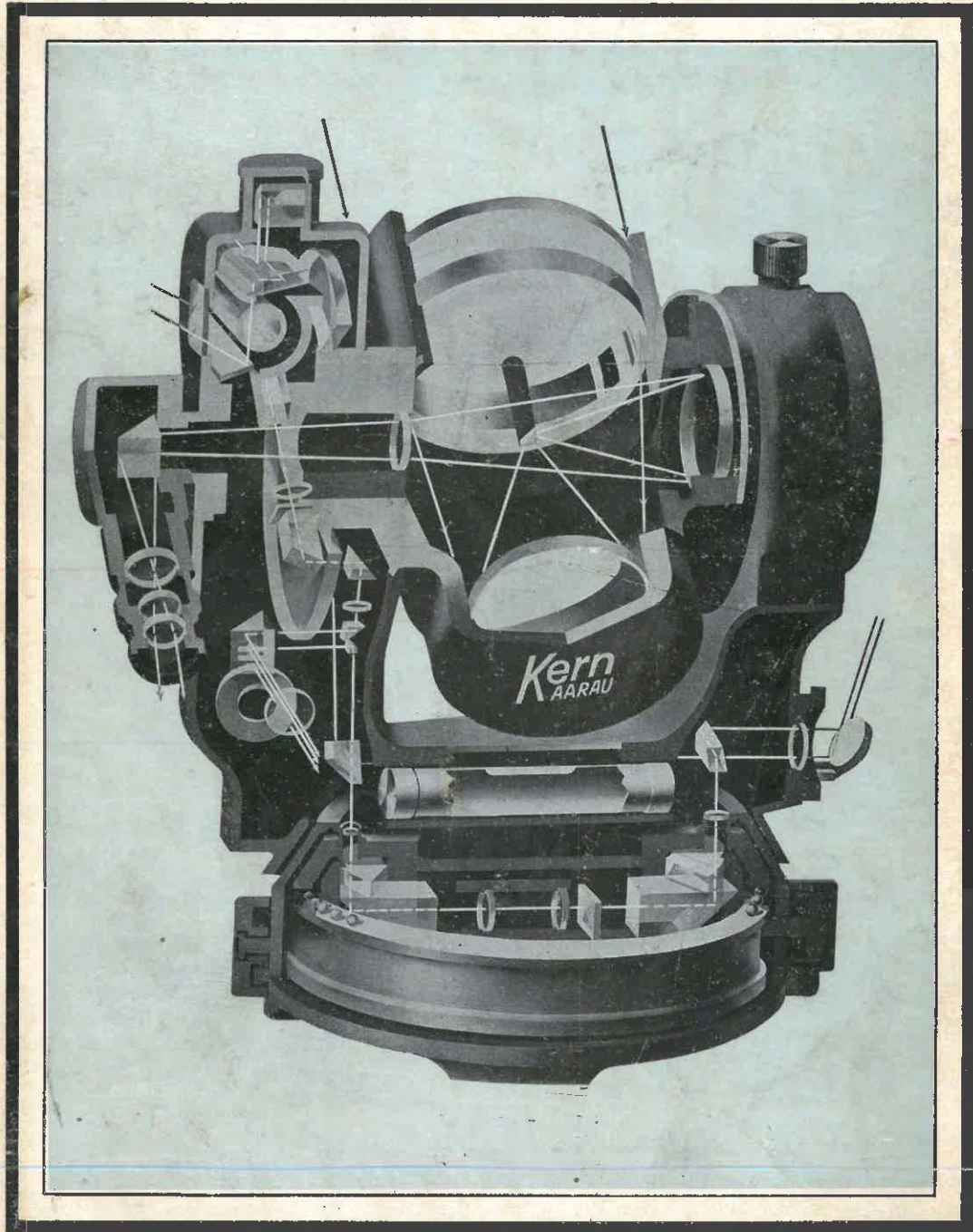


ROBERTO MÜLLER

# OPTICA

*relativa a instrumental topográfico y astronómico*

CUARTA EDICION



**Compendio General**  
de  
**Topografía Teórico Práctica**

POR

**ROBERTO MÜLLER**

AGRIMENSOR NACIONAL  
EXPROFESOR DEL CURSO LIBRE DE TOPOGRAFIA DE LA FACULTAD  
DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS  
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
EXGEODESTA DEL INSTITUTO GEOGRAFICO MILITAR ARGENTINO

Tomo II, Volumen 1:

**OPTICA**

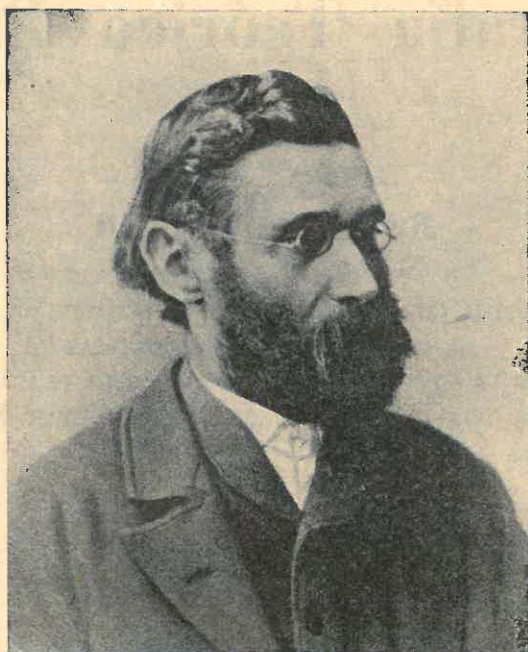


Cuarta Edición

Con un *Apéndice sobre Novedades ópticas* aplicadas a la *Fotogrametría*

EDITORIAL  
**ROBERTO MÜLLER**  
AMENABAR 1526 — T. E. 73 - 5331  
Buenos Aires  
1952 (Junio 30)

528 425 535



Ernesto Abbe (1840 - 1905)

Don: Martín Harcoide	
Fecha: 27/03/13	MÜL
Inv.: 00767	T II VI I

Queda hecho por el autor el depósito que marca la ley N° 11723.

# Juicio del Dr. Teófilo Isnardi

relativo a la 1.<sup>a</sup> edición.

*La utilización de los instrumentos que la técnica científica pone a disposición de quienes la aplican, exige un estudio previo desde el punto de vista teórico si se desea obtener de ellos toda la eficacia de que son capaces, en cada una de las condiciones variables de la práctica.*

*Por otra parte, la elección de un determinado instrumental sólo puede hacerse racionalmente después de un estudio prolijo de las condiciones a que debe satisfacer, y de las cualidades de cada modelo.*

*El Sr. Roberto Müller, con muy buen criterio a mi juicio, ha incluido en su tratado de Topografía una exposición de la teoría de los instrumentos ópticos, sucinta pero completa, dentro de los límites impuestos por la naturaleza de la obra. Los técnicos encontrarán en ella los fundamentos teóricos de la realización y utilización de los instrumentos que emplean, expuestos en forma correcta y eficaz; y podrán formarse un criterio propio sobre sus cualidades.*

*Resulta, además, interesante la descripción de los diversos tipos de instrumentos modernos, cuyo conocimiento mediante las revistas especiales no siempre está al alcance de los técnicos, quienes sin duda agradecerían al autor el empeño puesto para compendiar las características, cualidades e inconvenientes de cada uno de los sistemas ópticos actualmente empleados en los instrumentos topográficos.*

*Contribuir al estudio científico de la técnica es entre nosotros, no sólo cimentar el futuro, sino también edificar el presente; porque si el progreso técnico de nuestro país fué hasta ayer sólo una aspiración plausible, hoy es ya una necesidad imperiosa. Y en tal sentido, este libro será sin duda útil.*

Buenos Aires, agosto de 1933.

TEÓFILO ISNARDI.



## *Prefacio del autor para la primera edición.*

Vivimos, como lo dijo recientemente el filósofo español D. JOSÉ ORTEGA Y GASSET, en una "*época del imperialismo de la Física*".

En efecto: Todos los grandes progresos en la construcción de instrumentos topográficos y geodésicos que se realizaron en los últimos 30 años, tuvieron su punto de partida en la óptica. Y más de una vez los éxitos obtenidos en tales construcciones sobrepasaron las más halagüeñas esperanzas de los mismos creadores.

Es en este orden de ideas que he creído oportuno anteponer a este Tomo II de mi Compendio, el retrato del eminente físico ERNESTO ABBE (1841-1905), quien por sus fructíferas investigaciones teórico-prácticas, en el campo de la óptica instrumental, supo lograr inesperados triunfos, cuyas proyecciones alcanzan hasta la época actual.

Creo, por lo tanto, hacer obra útil y de actualidad, al tratar en forma sucinta, ilustrada con numerosos ejercicios prácticos, los tópicos enunciados en el Sumario de la Primera Parte de este tomo, proporcionando así al lector elementos de fácil consulta para poder rápidamente resolver, con criterio propio, cualquier cuestión o duda, cada vez que se trate de juzgar sobre las cualidades y capacidades ópticas de un nuevo instrumento geodésico o topográfico.

He perseguido en este segundo tomo el mismo objetivo que en el primero: *Que el libro represente para el ingeniero un fiel amigo que lo guíe en el áspero camino de su carrera, es decir, que no sólo contenga la necesaria descripción de los instrumentos más necesarios en uso, las teorías que los rigen, métodos de trabajo, rendimientos y problemas fundamentales, sino también sendos ejemplos, convenientemente elegidos, didácticamente ordenados y detalladamente estudiados; los que lo conducirán al dominio de todas las cuestiones teóricas y prácticas atingentes.*

De las numerosas obras de consulta sobre Óptica Geométrica, consignadas en pág. V debo mencionar especialmente las de los eminentes maestros y físicos LUMMER, GLEICHEN, HEATH, KOENIG, ISNARDI, JORDAN, GRUNER, en las que principalmente me he inspirado y que más me han servido como fuente a los fines que perseguí, de tal modo que, si bien mi trabajo no puede tener, en general la originalidad del fondo, aspiro a la del método, a cuyo desarrollo, mejoramiento y perfeccionamiento he venido dedicando las mejores energías de mi vida profesional.

Cumplo con mi deber expresando aquí también mi agradecimiento a los señores cartógrafos CARLOS KRÖLL y JOSÉ ROMANO, al auxiliar geodesta JAVIER MICHEL y topógrafo VÍCTOR M. GILARDONI, por su desinteresada y valiosa colaboración en el dibujo de las numerosas figuras con que ha sido notablemente beneficiado mi trabajo.

Finalmente, tengo que hacer extensiva mi gratitud a la CASA CARL ZEISS, que gentilmente puso a mi disposición el retrato de ABBE.

Buenos Aires, septiembre de 1933.

R. MÜLLER.

## *Prefacio del autor para la segunda edición.*

El libro fué corregido y completamente reformado en muchas partes. Más de la mitad de las figuras de la primera edición fueron eliminadas y substituídas por el doble número de nuevas figuras con el fin de facilitar en todo lo posible la comprensión de las múltiples cuestiones tratadas. Para realizar esta finalidad también se ha redactado de nuevo todo el texto del libro.

Se ha agregado un capítulo "*Introducción*" para primera orientación del lector, en el cual se hallan expuestos los principios y leyes fundamentales de la óptica geométrica, así como algunas aplicaciones de los mismos a aparatos sencillos.

Se amplió considerablemente todo lo relativo al ojo humano y al microscopio compuesto, con el cual quedan aclaradas importantes cuestiones relacionadas con el uso de los instrumentos de observación.

En cambio, hemos suprimido en esta edición la parte que se refiere a la *estadimetría* y *telemetría*, por considerar que es más conveniente tratar esos dos temas de carácter especial en unión con los respectivos instrumentos y aparatos, los que serán estudiados en los volúmenes 2 de tomos II y III.

Algunos asuntos están tratados desde diferentes puntos de vista en varias partes del libro, por lo cual aconsejamos al lector el uso de los *índices alfabéticos*, el de las *notaciones* y el de los *términos técnicos*, en los cuales se indica para cada notación o término técnico las correspondientes páginas donde se hallan tratados. Hemos dedicado un cuidado especial a estos índices para que resulten lo más completo posible, facilitándose así al lector la rápida búsqueda de una información deseada.

Respecto al plan de la obra, podrá el lector consultar el *índice analítico de materias* y el *sumario*.

En la página dedicada a la *bibliografía* damos los nombres de algunos libros de consulta, los cuales en parte nos han servido de guía, y en los que el lector podrá encontrar nueva y más extensa información.

Nos es grato dejar constancia aquí de la ayuda que hemos recibido de la casa CARL ZEISS, Jena (Alemania).

Debemos expresar nuestra cordial gratitud a nuestro buen amigo y compañero, Dr. J. METTLER, por el trabajo de revisión de los originales, de cuyos valiosos comentarios y anotaciones ha sido notablemente beneficiada nuestra obra.

Agradecemos también a nuestro alumno, MARIO DI MARCO, por el dibujo de las numerosas figuras de esta segunda edición.

El presente libro de óptica no está exclusivamente destinado a los estudiantes universitarios de ingeniería, y en especial de topografía, geodesia y astronomía. Hemos tendido a interesar a un círculo de lectores más amplio, incluyendo también estudiantes de medicina y ciencias naturales, por ser ellos los que se dedican a investigaciones con uso del microscopio e incluyendo, finalmente, a todas las personas que por razones de cultura general o de necesidad profesional deseen tener a su alcance una información fundamental sobre los instrumentos ópticos y sus límites de capacidad.

Nos llenaría de satisfacción si nuestro modesto trabajo alcanzara esos fines y aportara así un grano útil en el adelanto de la cultura argentina.

Buenos Aires, julio de 1940.

R. MÜLLER.

---

### *Prefacio para la tercera edición.*

Esta tercera edición no se diferencia en ningún punto fundamental de la segunda, porque no ha habido necesidad de introducir cambio alguno.

Podemos dejar constancia en esta oportunidad, con gran satisfacción, de que ha comenzado a cumplirse nuestro anhelo. Se ha ensanchado el círculo de los interesados por nuestra obra, dentro y fuera del país. La vimos en la mesa de trabajo de los jefes de talleres de óptica y mecánica de precisión, oficiales y particulares, lo cual para nosotros es muy significativo: Nos permite comprobar también desde nuestro punto de vista que, si el progreso de la técnica en nuestro país fué hasta ayer una mera aspiración, es hoy ya una necesidad imperiosa y una realidad, y nos sentimos felices por haber aportado un grano de arena para el adelanto de la cultura argentina.

Después de la nueva revisión de nuestro libro, quedamos más convencidos que antes, si cabe, de la verdad del hecho de que el ingeniero que no domine la teoría de los instrumentos ópticos y que sólo se limite a aprender su manejo práctico, no sabrá realmente apreciar, en determinados casos, lo que tiene entre manos: porque sólo el dominio de esa teoría le proporciona el fundamento de las modernas construcciones ópticas, habilitándole para formar un juicio con criterio propio sobre sus cualidades y rendimientos prácticos.

Buenos Aires, octubre de 1944.

R. MÜLLER.

## *Prefacio para la cuarta edición.*

*En cuanto al cuerpo principal del libro, la presente edición de nuestra "Optica" es una reimpresión de la anterior, sin modificaciones esenciales. Cabe ser señalado el hecho de que nuestra obra ha sido adoptada recientemente como libro de texto en una de las escuelas industriales de la Nación; quedando con ello en cierta forma documentada una acertada tendencia oficial hacia la creación y el fomento de la conciencia óptica argentina.*

*Respondiendo patrióticamente a tal elogiosa iniciativa oficial y animado con gran espíritu de colaboración en tan hermosa tarea, agregamos a esta nueva edición un Apéndice cual pieza explicativa intermedia entre la teoría del texto y las tareas de gabinete.*

*Eligióse como tema el objetivo, parte principal de todo instrumento óptico, del antejo, del microscopio y de la cámara fotográfica, ocupándonos de su origen, su construcción, corrección y aplicación a los más modernos instrumentos de observación y medición.*

*Buenos Aires, 15 Junio de 1952.*

**R. MÜLLER.**

### *Del mismo autor:*

*Tolerancias en Agrimensura Legal*, (1) Buenos Aires, 1921.

*Teoría de los Errores y Cálculo de Compensación*, (2) 2.ª edición, Buenos Aires, 1949.

*Confección de Catastros*, Buenos Aires, 1925.

*Regla de Cálculo al Alcance de Todos*, Buenos Aires, 1925.

*Regla de Cálculo*, tipo técnico, 8.ª edición, Buenos Aires, 1951.

*Compendio general de Topografía:*

Tomo I, 4.ª ed.: *Agrimensura y Catastro*, Buenos Aires, 1946.

" II, 4.ª " Volumen 2: *Teodolitos y Poligonación*, Buenos Aires, 1947.

" III, 4.ª " Volumen 1: *Triangulación y Nivelación*, Buenos Aires, 1951.

" III, 4.ª " Volumen 2: *Taquimetría y Confección de Planos*, Buenos Aires, 1951.

" IV, 1.ª " *Introducción a la Fotogrametría Terrestre y Aérea*, Buenos Aires, 1951.

*Morfología Argentina*, Buenos Aires, 1945.

*Planímetros Coradi*, 2.ª edición, Buenos Aires, 1937.

*Libreta Topográfica*, Buenos Aires, 1936.

*Libretas de Campo: Nivelación común*, 7.ª ed., Buenos Aires, 1949.

*Taquimetría*, 9.ª ed., Buenos Aires, 1949.

*Poligonales Taquimétricas*, Buenos Aires, 1935.

*Nivelación de Precisión*, 3.ª ed., Buenos Aires, 1940

(1) Usase en el texto la abreviatura: "Tol. Agr.", cuando se cita esta obra.

(2) " " " " " " : "C. de C.", " " " " " "

## Bibliografía sobre *Optica*.

1. *Heath, R. S.* ..... Lehrbuch der geometrischen Optik, Berlín 1894.
2. *Czapski, Siegfried* .. Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, 2ª edición, Leipzig, 1904.
3. *Classen J.* ..... Mathematische Optik, Colección Schubert, tomo XL, Leipzig.
4. *Drude, Paul* ..... Lehrbuch der Optik, 2ª edición, Leipzig, 1912.
5. *Reina* ..... Teoria degli strumenti diottrici, Milano, 1908.
6. *Isnardi, Collo* ..... Física, 2º curso, segundo fascículo: Optica, Río Santiago, 1926.
7. *Gleichen, A.* ..... Lehrbuch der geometrischen Optik, Leipzig, 1902.
8. *Gruner, P.* ..... Leitfaden der geometrischen Optik, Bern, 1921.
9. *Abbe, Ernst* ..... Gesammelte Abhandlungen, tomo II, Jena, 1906.
10. *Lummer, Otto* ..... Optik. Tomo II de la física de Müller - Pouillet, 10ª edición, Braunschweig, 1909.
11. *Pulfrich, Carl.* ..... Stereoscopisches Sehen und Messen, Jena, 1911.
12. *Helmholtz* ..... Handbuch der physiologischen Optik, 2ª edición, Leipzig, 1896.
13. *Koenig, A.* ..... Die Fernrohre und Entfernungsmesser, 2ª edición, Berlín, Springer, 1937.
14. *Koenig A,* ..... Geometrische Optik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1929.
15. *Jordan, W.* ..... Handbuch der Vermessungskunde, tomo II, 9ª edición redactada por O. Eggert, Stuttgart, 1931.
16. *Volkmann* ..... Die Linsenoptik in der Schule, Berlín, Springer, 1927.
17. *Hofe von* ..... Fernoptik, Leipzig, Barth, 1921.
18. *Spiers* ..... The microscope, London, Griffin & Comp., 1920.
19. *Pariselle* ..... Instruments optiques, París, Collin, 1923.
20. *Rohr von* ..... Theorie der opt. Instr., Band. I: Die Bilderzeugung in opt, Instr. vom Standp. der geom. Optik, Berlín, Springer, 1904.
21. *Rohr von* ..... Die optischen Instrumente, 4ª edición, Berlín, Springer, 1930.
22. *Kepler* ..... Dioptrik, Ostwalds Klass., Nº 144, Leipzig, Engelmann.
23. *Newton* ..... Optik, Ostwalds Klass., Nos. 96 y 97, Leipzig, Engelmann.
24. *Herman* ..... Treat. on geom. optics, Cambridge Univ. Press, 1900.
25. *Whittaker* ..... Theory of opt. instr. Cambridge Univ. Press, 1907.
26. *Blein* ..... Optique géom., París, Doin, 1913.
27. *Bouasse* ..... Optique géom. sup., París, Delegrave, 1917.
28. *Conrady* ..... Appl. Optics and optical Design. Oxford University, Press, 1929.
29. *Berek, M.* ..... Grundlagen der praktischen Optik, Leipzig, Walter de Gruyte & Co., 1930.
30. *Schrott, P.* ..... Praktische Optik, Viena, Springer, 1930.
31. *Henker, O.* ..... Introducción al estudio de los anteojos, Jena, 1923.
32. *Mañas y Bonví, J.*... Optica práctica, 2ª edición, Barcelona, 1935.
33. *Bouass, H.*  
*et Carriere, Z.* ..... Diffraction, París, Delagrave, 1923.
34. *Pistor, H.* ..... Der Augenoptiker, tomo I, Pause, Weimar, 1934.

# Indice de Materias

## § 1. Introducción: Conceptos y leyes fundamentales, aplicaciones prácticas sencillas.

*Observaciones generales. Los dos primeros principios fundamentales de la óptica geométrica.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Radiaciones: Ondas electromagnéticas, ondas infrarrojas, radiaciones visibles (luz) .....	3	tica geométrica) .....	3
2. Propagación rectilínea de la luz (primer principio fundamental de la óptica geométrica) .....	3	3. Haz de luz, rayos luminosos; su independencia (segundo principio fundamental de la óptica geométrica) .....	3

*Reflexión (tercer principio fundamental de la óptica geométrica); instrumentos sencillos basados en ella.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
4. Leyes de reflexión .....	4	al plano de incidencia de un rayo; aplicación al sextante .....	7
5. Imagen real e imagen virtual ....	4	9. Reflexión doble; ángulo de espejos, escuadra de espejos, cruz de espejos. ....	7
6. Diafragma de campo o lumbreira de entrada de un espejo .....	5	10. Heliótropo de Gauss .....	9
7. Espejo iluminador .....	6	11. Reflexión difusa .....	11
8. Consecuencia de un giro del espejo alrededor de un eje perpendicular			

*Refracción (cuarto principio fundamental de la óptica geométrica); prisma.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
12. Leyes de refracción. Ejemplo práctico .....	11	noso .....	15
13. Forma general de la ley de refracción. Invariante óptica .....	14	16. Construcción del rayo refractado ..	15
14. Índice de refracción absoluto e índice de refracción relativo. Ejemplo práctico .....	14	17. Refracción en placas de vidrio de caras planas y paralelas. Ejemplos prácticos .....	16
15. Inversión del camino del rayo luminoso .....	14	18. Refracción en un prisma. Prisma delgado (cuña) .....	18
		19. Reflexión y refracción .....	19

*Prisma de reflexión, importantes aplicaciones prácticas.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
20. Reflexión total .....	19	gular cuyos ángulos están en una relación tal que el ángulo de refracción del prisma es el duplo de uno de los otros ángulos del mismo; instrumentos prismáticos sencillos que en ella se basan (escuadra y cruz de prismas de Bauernfeind). Imagen fija e imagen móvil .....	25
21. Prisma de reflexión total .....	20		
22. Aplicación de los prismas de reflexión total en el nivel de coincidencia .....	21		
23. Aplicación de los prismas de reflexión total y de las placas planoparalelas a la lectura de los círculos de teodolito .....	22		
24. Ley óptica sobre un prisma trian-			

*Enderezamiento de la imagen.*

Nº	Pág.
25. Prisma de inversión de Porro y su aplicación práctica .....	27

*Descomposición de la luz, dispersión, aberración cromática, acromatismo visual.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
26. Descomposición de la luz blanca ..	23	29. Determinación de los ángulos $\gamma_1$ y $\gamma_2$ de una combinación de prismas con un ejemplo práctico .....	31
27. Dispersión, aberración cromática, acromatismo visual .....	30		
28. Combinaciones de prismas, sus efectos .....			

*Característica principal de un instrumento óptico.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
30. Instrumento óptico, definición ....	34	31. Finalidad general de la construcción de un instrumento óptico .....	34

*Importancia de la teoría de Gauss como fundamento del estudio de los instrumentos ópticos.*

Nº	Pág.	Nº	Pág.
32. Representación colineal. Punto conjugado, rayo conjugado y plano conjugado. Homografía de Gauss ..		33. Rayos paraxiales .....	35

**§ 2. Refracción de rayos paraxiales o rayos centrales sobre una sola superficie esférica.**

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Ecuación dióptrica fundamental para la refracción de rayos paraxiales o rayos centrales .....	36	11. Construcción de la imagen de un punto situado fuera del eje óptico con ayuda de los focos de la superficie refringente .....	44
2. Distancias focales. Definición de los focos como puntos imágenes de puntos objetos infinitamente lejanos .....	39	12. Determinación de la magnitud $\Delta y'$ de la imagen P' Q' del objeto PQ = $\Delta y$ perpendicular al eje óptico. Signo de $\Delta y$ y de $\Delta y'$ .....	45
3. Discusión de la fórmula dióptrica fundamental. Lugares que ocupa la imagen P' cuando el punto objeto P recorre el eje .....	40	13. Construcción directa de la imagen P' del punto axial P con ayuda de dos pares de rayos conjugados ....	46
4. Signo del radio de curvatura $r$ y signos de las cantidades $v$ y $v'$ y de las distancias focales $f$ y $f'$ .....	41	14. Ángulos conjugados $\mu$ y $\mu'$ , sus signos .....	46
5. Cociente y diferencia de las distancias focales .....	41	15. Aumento, definición; distintas clases de aumentos .....	47
6. Puntos conjugados, rayos conjugados .....	41	16. Aumento axial, longitudinal o de profundidad, su signo .....	47
7. Convergencia de una superficie refringente .....	42	17. Aumento lateral o transversal, su signo .....	48
8. Otra forma de la ecuación dióptrica fundamental para rayos paraxiales .....	42	18. Aumento angular o razón de convergencia, su signo .....	48
9. Formación de la imagen de un punto y de un pequeño objeto lineal mediante rayos paraxiales con ayuda del centro de la superficie refringente .....	42	19. Ecuación de Lagrange-Helmholtz ..	49
10. Planos conjugados, planos focales ..	43	20. Otra fórmula para la magnitud de la imagen $\Delta y'$ .....	49
		21. Definición de las distancias focales según Gauss .....	50
		22. Resumen de fórmulas .....	52
		23. Observación de recapitulación ....	52

**§ 3. Refracción de rayos paraxiales en varias superficies esféricas centradas.**

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Sistema de superficies esféricas centradas. Definición .....	53	3. Focos y planos focales de un sistema centrado; su introducción ....	54
2. Aplicación práctica del concepto de la representación colineal .....	53	4. Haces de rayos levemente inclinados con respecto al eje óptico ....	55

Nº	Pág. Nº	Nº	Pág.
5.	55	14.	61
6.	56	15.	62
7.	56	16.	62
8.	57	17.	63
9.	59	18.	64
10.	60	19.	65
11.	60	20.	68
12.	61	21.	69
13.	61		

§ 4. Lentes y sistemas de lentes.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	70	10.	79
2.	71	11.	80
3.	73	12.	81
4.	73	13.	83
5.	74	14.	84
6.	76	15.	84
7.	76	16.	85
8.	78	17.	85
9.	78	18.	86
		19.	86
		20.	88
		21.	90
		22.	102

§ 5. Aberraciones.

Aberración esférica.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1.	104	3.	106
2.	106	4.	106
		5.	106
		6.	107

Aberración cromática.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
7. Descomposición de la luz blanca. Dispersión cromática, su medida ..	107	12. Explicación del efecto de la lente ocular del sistema ocular de Ramsden en cuanto se refiere a la reducción del cromatismo ..	109
8. Aberración cromática. Sistema acromático, definición ..	108	13. Combinación acromática convergente de pequeña distancia focal, realizada en el sistema ocular de Huygens con dos lentes planoconvexas de la misma clase de vidrio ..	111
9. Acromatismo visual. Chester Moor Hall y John Dollond ..	108		
10. Dos clases típicas de sistemas acromáticos y su combinación ..	108		
11. Sistema acromático de gran distancia focal (objetivo de anteojo) ....	109		

§ 6. El ojo.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Experimento ..	113	18. Poder de acomodación o amplitud acomodativa. Declinación de la acomodación del ojo normal con la edad. Presbicia del ojo normal ....	123
2. Cámara oscura de agujero ..	114	19. Ojo míope y ojo hipermetrope ....	124
3. Cámara oscura con lente objetiva ..	114	20. Lentes correctoras ..	125
4. Breve descripción anatómica del ojo ..	115	21. Magnitud real y magnitud aparente (o magnitud angular) de un objeto ..	127
5. El cristalino ..	116	22. Angulo de la agudeza natural de la vista ..	127
6. La retina ..	116	23. Determinación práctica del ángulo de la agudeza natural de la vista ..	128
7. Puntos cardinales del ojo ..	117	24. Optima distancia de visión clara $w$ ..	129
8. Distancias focales $f$ y $f'$ del ojo ....	117	25. Poder separador del ojo ..	129
9. Línea visual (línea de mirada o de fijación). Definición ..	117	26. Gran capacidad del ojo para la apreciación de pequeños desplazamientos laterales de trozos de líneas ..	129
10. El eje óptico del ojo. Definición ..	118	27. Precisión de la bisección de delgadas fajas blancas verticales u horizontales con ayuda de un hilo negro ..	130
11. Centro de rotación del ojo ..	118	28. Imagen invertida sobre la retina ..	130
12. Campo visual ..	118	29. Microscopios y anteojos, su necesidad para producir el agrandamiento del ángulo visual ..	130
13. Ojo reducido de Listing ..	118		
14. El ojo no es un sistema óptico rígido. Acomodación ..	119		
15. Punto próximo $P$ y punto remoto $R$ y distancias $p$ y $r$ ; su signo ..	120		
16. El ojo no puede ver simultáneamente con nitidez dos objetos de los cuales el uno se halla muy distante y el otro muy próximo al ojo ....	122		
17. Consecuencias prácticas relativas a la divergencia de los haces de rayos incidentes al ojo correspondientes a los puntos próximo y remoto, respectivamente ..	122		

§ 7. Limitación de rayos o diafragmas y pupilas.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Necesidad de los diafragmas; su posición ..	131	casos considerados ..	131
2. Diafragma de rayos. Pupila de entrada y pupila de salida. Diversos		3. Diafragma de campo; su necesidad ..	135
		4. Angulo de campo de un anteojo ..	136

§ 8. Lupa o microscopio simple.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Definición ..	137	3. Lupa compuesta ..	141
2. Diferentes maneras de usar la lupa simple; aumento ..	137	4. Distintos tipos de lupas ..	144
		5. Armadura de la lupa ..	145

§ 9. Microscopio compuesto.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Definición .....	146	pio compuesto .....	147
2. Sistema óptico del microscopio compuesto con lente ocular simple ....	146	4. Ventaja del microscopio compuesto comparado con la lupa .....	148
3. Cálculo del aumento del microscopio .....			

§ 10.

EL ANTEOJO

Anteojo astronómico simple.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
1. Nota histórica .....	149	15. Claridad o luminosidad superficial	163
2. Anteojo de Kepler o anteojo astronómico simple. Principales elementos constructivos .....	151	16. Difracción. Poder separador y aumento útil de un microscopio y de un anteojo .....	166
3. Camino de los rayos en el anteojo astronómico simple, en el supuesto de tratarse de lentes delgadas. Pupila de entrada y pupila de salida de un anteojo .....	151	Concepto del movimiento ondulatorio de la luz. Principio de Huygens	166
4. Sitio en que se forma la pupila de salida (circulito de Ramsden) de un anteojo .....	152	Interferencia. Superficies de ondas	167
5. Aumento del anteojo astronómico simple .....	153	Propagación de un movimiento ondulatorio en general y de la luz en particular. Período, frecuencia, longitud de onda, velocidad de la propagación .....	167
6. Diafragma del campo .....	154	Experimento demostrativo de la difracción de la luz .....	169
7. Variación de la longitud del anteojo astronómico simple debido a su enfoque para puntos objetos situados a distancias distintas. Reticulo, eje de colimación. Modo de operar ....	154	Modificación del experimento, idea de por Fraunhofer y sus resultados prácticos .....	169
8. Antecedentes históricos sobre el retículo .....	156	Rejados de difracción; su observación en el microscopio .....	172
9. Paralaje .....	156	Concepto de la abertura numérica	174
10. Determinación práctica del aumento de un anteojo astronómico; distintos métodos .....	157	Límite del poder separador de un microscopio con iluminación oblicua	175
11. Determinación práctica del ángulo de campo de un anteojo .....	160	Observación de preparados en el microscopio .....	175
12. Claridad o luminosidad de las imágenes de estrellas o claridad o luminosidad puntual .....	161	Aumento útil del microscopio ....	176
13. Pérdida de luz .....	162	Fenómeno de difracción producido por la abertura circular de un diafragma. Resultado de la teoría pertinente .....	177
14. Concepto del aumento normal ....	162	Poder separador del objetivo ....	178
		Poder separador de un anteojo. Aumento útil .....	179

Anteojo astronómico compuesto.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
17. Anteosos con objetivos y oculares compuestos .....	182	tos en lo relativo a la dispersión cromática .....	186
Objetivo acromático .....	183	Reducción de la dispersión cromática en el ocular de Huygens ....	188
Ocular compuesto; su doble función	183	Condición del acromatismo de un sistema de lentes adosadas .....	190
Aumento del campo en el ocular Huygens .....	183	Ejemplo práctico de cálculo de una lente acromática .....	192
Aumento del campo en el ocular Ramsden .....	183	Ortoscopia .....	194
Ventajas de los oculares compuestos .....			

Otros tipos de anteojos de construcción antigua.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
18. Anteojo terrestre .....	195	20. Anteojo prismático .....	213
Aumento .....	200	Sensación de la distancia (profundidad o relieve) de los objetos ....	216
Rendimiento óptico .....	200	Caso de la visión monocular ....	216
19. Anteojo holandés o anteojo de Galilei .....	200	Perspectiva principal (visión directa) y perspectiva complementaria (visión indirecta) .....	217
<i>Preparación para el estudio del campo del anteojo holandés.</i>		Visión monocular con anteojo ....	218
Campo visual verdadero y campo visual aparente .....	203	Visión binocular sin anteojo; visión estereoscópica .....	218
Estudios sobre rayos que puedan o no pasar por dos diafragmas sucesivos .....	204	Aumento del efecto estereoscópico por medio de anteojos .....	221
Estudio del campo del anteojo holandés .....	206	Aumento del efecto estereoscópico por medio del agrandamiento óptico de la distancia interpupilar ....	223
Otra manera de calcular el campo del anteojo holandés .....	208	Consideraciones preparatorias ....	223
Deducción de la fórmula general para el campo total y el campo de claridad máxima del anteojo holandés	210	Telestereoscopio de Helmholtz ....	224
		Telestereoscopio con anteojos ....	225

Anteojos de construcción moderna para mediciones.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
21. Anteojo con lente de enfoque interior .....	226	próximo al mismo. Aumento lateral	231
Teoría del anteojo de enfoque interior .....	226	Discusión de la fórmula del espejo (132) .....	232
Discusión de la fórmula (123) para la distancia $d$ .....	228	Espejos esféricos convexos .....	233
22. Telescopios reflectores .....	228	Construcción de la imagen $\Delta y'$ ....	233
<i>Reflexión de rayos paraxiales en espejos esféricos.</i>		22. Aumento lateral del espejo convexo	234
Definiciones .....	230	Espejos planos .....	235
Espejo cóncavo. Descripción del camino del rayo reflejado .....	230	Telescopio reflector de Newton ....	235
Construcción de la imagen de un punto situado fuera del eje, pero		Telescopio reflector de Gregory ..	235
		Telescopio reflector de Cassegrain .	236
		Telescopio reflector de Herschel ..	236
		23. Nuevo anteojo de Wild con sistema óptico compuesto de lentes y espejos .....	237

Indices alfabéticos.

Nº	Pág.	Nº	Pág.
Notaciones .....	239	Términos técnicos .....	241

Apéndice.

Nociones fundamentales sobre óptica instrumental. Modernos objetivos granangulares; su origen, construcción y aplicación a los modernos aparatos de toma fotogramétrica..	249
---	-----



# **OPTICA**

*relativa a instrumental topográfico, geodésico,  
astronómico y a microscopía*

## SUMARIO

	<i>Pág.</i>
§ 1. <i>Introducción: conceptos y leyes fundamentales; aplicaciones prácticas sencillas</i> .....	3
§ 2. <i>Refracción de rayos paraxiales o rayos centrales sobre una sola superficie esférica</i> .....	36
§ 3. <i>Refracción de rayos paraxiales en varias superficies esféricas centradas</i> .....	53
§ 4. <i>Lentes y sistemas de lentes</i> .....	70
§ 5. <i>Aberraciones</i> .....	104
§ 6. <i>El ojo</i> .....	113
§ 7. <i>Limitación de rayos o diafragmas y pupilas</i> .....	131
§ 8. <i>Lupa o microscopio simple</i> .....	137
§ 9. <i>Microscopio compuesto</i> .....	146
§ 10. <i>El anteojo</i> .....	149

## Introducción.

### Conceptos y leyes fundamentales, aplicaciones prácticas sencillas

#### 1. Radiaciones: ondas electromagnéticas, ondas infrarrojas, radiaciones visibles (luz).

Las radiaciones de energía que emanan de un cuerpo se propagan en todas las direcciones por medio de ondas, vibraciones u oscilaciones dentro del éter (fluido muy sutil que se supone llena los espacios sidéreos, el aire y todos los cuerpos). Las distintas denominaciones de esta energía, las que varían según la **longitud de onda**, son vulgarmente conocidas. Las más largas son las llamadas **ondas electromagnéticas** u **ondas hertzianas**, cuya aplicación a la radiotelegrafía se ha difundido enormemente en los últimos decenios.

Cuando las ondas son mucho más cortas, sólo de unos milésimos de milímetro de longitud, nos dan la sensación de calor; son las ondas de los **rayos infrarrojos**.

Ondas mucho más cortas aún, de sólo 0,0008 hasta 0,0004 mm de longitud <sup>(1)</sup>, son las **ondas de luz** o **radiaciones visibles**, que son las que nos ocuparán exclusivamente en el presente Volumen.

#### 2. Propagación rectilínea de la luz (primer principio fundamental de la óptica geométrica).

El impulso vibratorio dentro de las partículas del éter se transmite a las partículas vecinas, es decir, la luz se **propaga**. Lo hace en **dirección rectilínea** (primer principio fundamental de la óptica geométrica), en la dirección del movimiento vibratorio, siempre que este movimiento se realice en el vacío o dentro de un medio homogéneo.

Pero, cuando la luz pasa del vacío a un medio de alguna densidad, o de un medio a otro de densidad distinta, la propagación cambia de dirección, es decir, el rayo se **refracta**.

También cambia la dirección un rayo de luz que caiga sobre una superficie pulida de un cuerpo **opaco** (que no deja pasar la luz), fenómeno que se denomina **reflexión**.

#### 3. Haz de luz, rayos luminosos; su independenciam. (Segundo principio fundamental de la óptica geométrica).

Un cono de luz, generalmente limitado en los instrumentos ópticos por una abertura circular llamada **diafragma**, <sup>(2)</sup> practicada en un cuerpo opaco, recibe el nombre de **haz de luz**. Las propiedades de la luz permanecen prácticamente sin variar cuando se achica dicha abertura. Si el haz se es-

(1) Conviene indicar las longitudes  $\lambda$  de las ondas de luz en millonésimos de milímetro. Esta unidad se llama *micromicrón* y se designa por  $\mu\mu$ . De acuerdo con esta unidad de medida la luz roja (raya C del espectro) tiene longitud de onda  $\lambda = 656 \mu\mu$ ; amarillo (raya D);  $\lambda = 589 \mu\mu$ ; azul (raya F),  $\lambda = 486 \mu\mu$ ; violeta (raya G'),  $\lambda = 434 \mu\mu$ .

(2) *Diafragma*, del griego *diapressein*, cerrar el paso.

trecha hasta una recta, se le llama **rayo de luz** o **rayo luminoso**. Los distintos rayos de un haz son independientes unos de otros, lo que constituye el **segundo principio fundamental** de la óptica geométrica.

*Reflexión (tercer principio fundamental de la Óptica Geométrica): instrumentos sencillos basados en ella.*

#### 4. Leyes de reflexión.

Al incidir un rayo luminoso sobre un cuerpo opaco pulido, por ejemplo una superficie metálica pulida, no podrá penetrarla, **se refleja**, es decir, toma una nueva dirección en el mismo medio en que ha venido.

Si en el punto de incidencia trazamos una normal a la superficie, regirán para la reflexión las siguientes **leyes**:

1. El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado se hallan en un mismo plano (perpendicular a la superficie, ver figura 1).
2. El ángulo (ángulo de incidencia) que forma con la normal el rayo incidente y el ángulo (ángulo de reflexión) que forma con la normal el rayo reflejado, son siempre iguales (fig. 1).

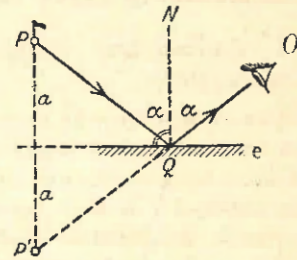


Fig. 1. — *Construcción de la imagen de un rayo que emite un punto luminoso P. El rayo incidente PQ y el reflejado QO están, conjuntamente con la normal QN, en un mismo plano (1ª ley). El ángulo de reflexión OQN es igual al de incidencia PQN (2ª ley). El punto imagen P' es simétrico del punto objeto P con respecto al plano del espejo e. El ojo en O ve en P' la imagen del punto P.*

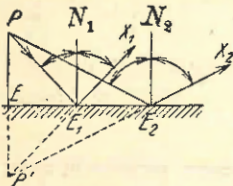


Fig. 2. — *Construcción de la imagen P' de P por medio de dos rayos luminosos. E<sub>1</sub>X<sub>1</sub> es el reflejado del rayo PE<sub>1</sub>; E<sub>2</sub>X<sub>2</sub> el reflejado del rayo PE<sub>2</sub>. Prolongando X<sub>1</sub>E<sub>1</sub> y X<sub>2</sub>E<sub>2</sub> hasta su punto de intersección en P', será este punto P' la imagen virtual de P.*

#### 5. Imagen real e imagen virtual.

Todo cuerpo que emite luz, sea luz propia o luz reflejada (solar o artificial) esparce esa luz en todas las direcciones.

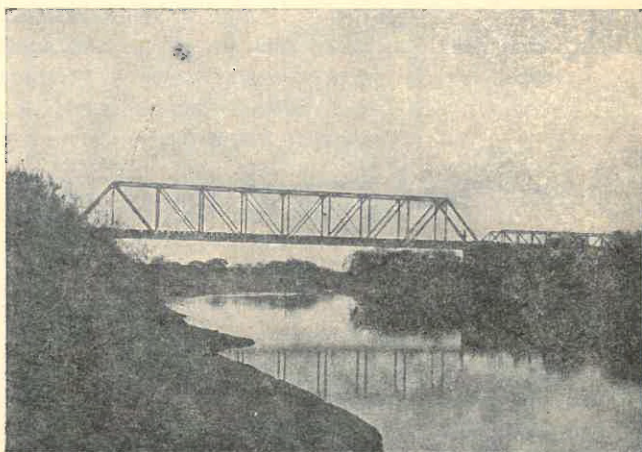
Cuando los rayos que salen de un punto objeto **P** concurren realmente a otro punto **P'**, se dice que **P'** es **imagen real de P**. Esta imagen **puede recibirse sobre una pantalla**, lo que constituye su principal característica.

Pero también puede ocurrir que los rayos emitidos por un punto **P**, después de sufrir reflexión (y eventualmente también refracción) continúen en direcciones tales que parecen proceder de un punto **P'** (sin que tal procedencia realmente exista), y que solamente las prolongaciones de esos rayos hacia atrás concurren a ese punto geométrico **P'**, donde en realidad no ocurre fenómeno luminoso alguno. En este caso se dice que el punto **P'** es la ima-

gen virtual del punto  $P$ . Tal imagen, en vista de que en realidad no existe sino sólo como una construcción abstracta geométrica, **no puede recibirse sobre una pantalla**, pero el ojo de un observador puede recibir la sensación de su existencia cuando el ojo se coloque dentro del cono de los rayos reflejados (o refractados), aunque divergentes, encargándose la lente cristalina del ojo a reunirlos en una imagen real sobre la retina, imagen que sería exactamente la misma si fuera producida por un objeto real situado en  $P'$ .

La imagen reflejada por un espejo no existe realmente, es imaginaria, por no poder salir del mismo rayo de luz alguno. Recién cuando el ojo forme de ella una imagen real sobre la retina, o cuando un aparato fotográfico produzca de ella una imagen real sobre la capa sensibilizada de una placa negativa (ver fig. 3), recién entonces recibimos una sensación como si la imagen virtual tuviera realidad.

Fig. 3. — A la imagen virtual del puente producida por la superficie del agua (espejo de agua) corresponde, en una placa negativa, una imagen real formada por la lente de un aparato fotográfico, imagen real que se ve también en la copia positiva de esta figura.



Es que la experiencia de la vida diaria nos acostumbra a suponer el origen de los rayos de luz siempre en la dirección en que nos llegan. Tal experiencia nos hace creer que los rayos proceden de la imagen virtual como si ésta fuera un objeto o una imagen real. No nos damos cuenta de que de la imagen virtual no pueden salir rayos y de que los rayos que llegan a nuestros ojos proceden del objeto mismo por el camino quebrado de la reflexión.

#### 6. Diafragma de campo o lumbrera de entrada de un espejo.

Para construir la imagen virtual de un objeto (segmento rectilíneo  $AB$ , fig. 4) originada por un espejo plano, construiremos las imágenes  $A'$  y  $B'$  de los puntos extremos  $A$  y  $B$  según queda explicado en figura 1. La  $A'B'$  es la imagen virtual del objeto  $AB$ . Es **simétrica** con respecto al plano del espejo.

Vemos en la figura 4 que, aproximadamente, sólo el haz limitado por los rayos  $AE_A$  y  $BE_B$  llega al ojo situado en  $O$ . Es sólo la porción de espejo  $E_AE_B$  la parte útil, pudiendo por ello tener el espejo dimensiones mucho más reducidas que el objeto.

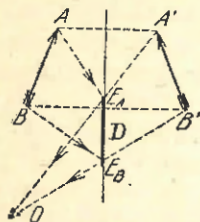


Fig. 4. — Imagen virtual  $A'B'$  del objeto  $AB$  vista desde  $O$ . Se ilustra la función del espejo  $E_A E_B$  como *diafragma de campo* o *luzbrera de entrada*.

El espejo  $E_A E_B$  no refleja todos los rayos que salen del objeto  $AB$ . Gran parte de ellos se dispersan en todas las direcciones, no llegando al espejo.

A través del marco de una ventana observamos los objetos exteriores desde el interior de una habitación. Del mismo modo que en tales circunstancias el marco de la ventana, cual el de un cuadro, limita la visión, así también el marco (o borde) de un espejo limita las dimensiones de un haz de rayos, con centro en el ojo, los cuales, procediendo de un objeto como el  $AB$  (fig. 4) llegan a dicho ojo.

Llámanse **diafragma** a toda limitación de rayos, la que puede obtenerse por los bordes de un espejo, los bordes de una lente o por los bordes de un orificio practicado en un cuerpo opaco. Para el ojo es el borde de la **pupila** el que constituye el diafragma del mismo.

Si desde el ojo  $O$  (fig. 4), que mira en el espejo  $E_A E_B$  la imagen virtual del objeto  $AB$ , trazamos los rayos a los puntos de la periferia del espejo, se comprenderá que los bordes o el marco de dicho espejo formarán la limitación material del haz de rayos o sea el **diafragma de campo** del espejo. El espacio limitado por el diafragma se llama **luzbrera de entrada** del espejo (ver fig. 5).

(Recordamos aquí el pequeño espejo que el lector habrá visto frecuentemente aplicado en los automóviles y dispuesto en tal forma y con tales dimensiones como para que el conductor pueda observar los vehículos que se hallan sobre el camino detrás del coche que maneja).

### 7. Espejo iluminador.

Para las observaciones nocturnas con anteojo emplease a menudo otro recurso que el indicado en figura 5: Un espejo plano y redondo (ver figura 6) con cara azogada hacia el objetivo del anteojo y un agujero redondo en el medio, espejo que permite iluminar el campo visual del anteojo con ayuda de una lámpara de bolsillo.



Fig. 5. — *Luzbrera de iluminación*, según O. FENNEL. Es un pequeño espejo montado delante de un anteojo, con ayuda del cual se proyecta luz dentro de aquél para iluminar el campo visual. Se le utiliza en trabajos de minería y túneles.

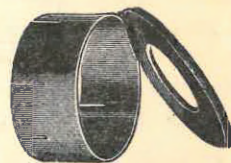


Fig. 6. — *Espejo iluminador*. El espejo está sostenido por un anillo colocado sobre la cabeza de un anteojo. El espejo tiene inclinación de  $45^\circ$  con respecto a dicho anillo sostén.

8. Consecuencia de un giro del espejo alrededor de un eje perpendicular al plano de incidencia de un rayo; aplicación al sextante.

Cuando se gire el espejo *e* (fig. 7) por un ángulo  $\varphi$  pasando de la posición *e* a la *e'*, girará también la normal **NQ** por el mismo ángulo  $\varphi$ . El ángulo de incidencia del rayo procedente de **P**, debido al giro sufrido por el espejo, ha aumentado en  $\varphi$ . En consecuencia también el ángulo **N'QP''** es mayor en  $\varphi$  que el anterior ángulo de reflexión **NQP'**, lo que quiere decir que el rayo reflejado ha girado en  $2\varphi$ , mientras el espejo lo ha hecho en  $\varphi$ . Esta desviación doble representa un importante principio óptico del cual se saca provecho en el sextante (ver Tomo I, figura 10, página 60: A un giro del espejo en  $\frac{\alpha}{2}$  corresponde un giro del rayo reflejado en  $\alpha$ ).

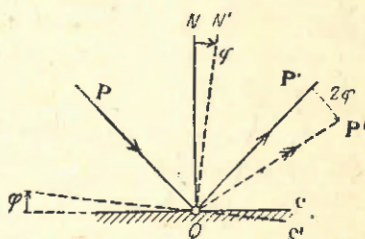


Fig. 7. — Efecto de un giro del espejo sobre el rayo reflejado. El rayo incidente *PQ* permanece fijo. *QP'* es el rayo reflejado antes del giro, *QP''* es el rayo reflejado después del giro.

9. Reflexión doble; ángulo de espejos, escuadra de espejos, cruz de espejos.

Los dos espejos de figura 8, que forman entre sí el ángulo  $\alpha$ , constituyen un **ángulo de espejos**.

Contando las desviaciones que sufre el rayo incidente como positivas cuando se realizan en el sentido de la marcha de las agujas del reloj y negativas cuando ellas se realizan en sentido contrario, e introduciendo los **ángulos de giro**  $\alpha'$  y  $\beta'$  complementos de los de incidencia y reflexión  $\alpha$  y  $\beta$ , tendremos según figura 8:

$$\begin{array}{r} \text{Desviación producida por la 1ª reflexión: } + 2 \alpha' \\ \text{» » » » 2ª » : } + 2 \beta' \\ \hline \text{Desviación total.....} = 2 \alpha' + 2 \beta' = 360^\circ - x \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 360^\circ - 2(\alpha' + \beta') \\ &= 2[180^\circ - (\alpha' + \beta')] \end{aligned}$$

y siendo resulta:

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha' + \beta'),$$

(1)

$$\boxed{x = 2 \varphi}$$

Es decir: El rayo emitido por el punto **A**, que recibe el ojo situado en **O** después de una doble reflexión en los espejos **I** y **II**, queda girado, con respecto a la dirección del rayo inicial incidente, por el doble valor del ángulo  $\varphi$  que forman entre sí dichos espejos.

La imagen virtual **A'** del punto objeto **A** obtenida por doble reflexión, es fija.

El sextante (ver págs. 57-62 de tomo I), en su parte esencial, es un ángulo de espejos, en el que uno de los espejos es **móvil**, siendo así el ángulo de espejos una consecuencia directa del invento del sextante.

**Escuadra de espejos.** Cuando el ángulo  $\varphi$  entre los dos espejos es igual a  $45^\circ$ , tendremos el instrumento llamado **escuadra de espejos** ya descrita y analizada en páginas 54-57 del tomo I.

Cuando el ángulo  $\varphi$  entre los dos espejos es de  $90^\circ$ , tenemos otro pequeño instrumento óptico, llamado **cruz de espejos** (fig. 9), que sirve para trazar ángulos de  $180^\circ$  o alinear nuevos puntos sobre una línea dada del terreno.

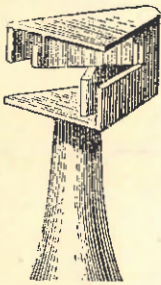


Fig. 9. — Cruz de espejos.

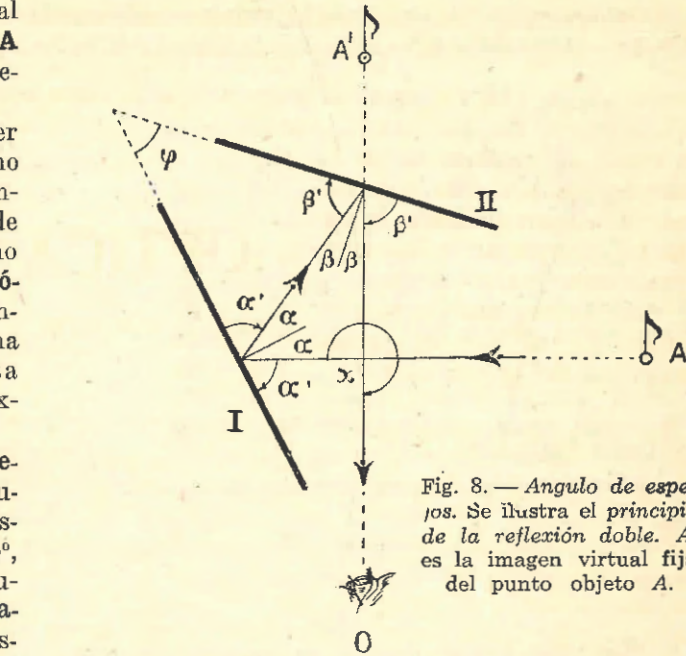


Fig. 8. — Angulo de espejos. Se ilustra el principio de la reflexión doble. **A'** es la imagen virtual fija del punto objeto **A**.

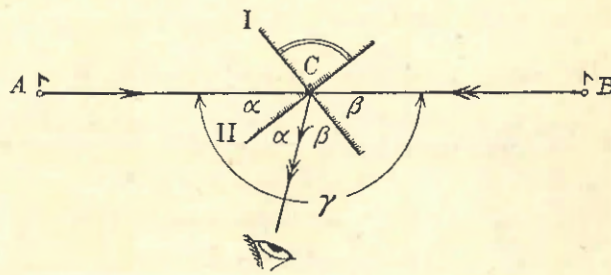


Fig. 10. — Teoría de la cruz de espejos.

La teoría de la cruz de espejos es muy sencilla: El punto **C** (fig. 10) estará situado sobre la alineación **AB** cuando se hallen en coincidencia (una sobre otra) las imágenes **A'** y **B'** de los puntos **A** y **B**. Tales imágenes formadas por **reflexión simple** en los espejos **I** y **II**, respectivamente, son **móviles**.

Tendremos en este caso para el ángulo  $\gamma$  comprendido entre los dos rayos incidentes **AC** y **BC**:

$$\gamma = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$$

Como lo sabemos de la vida diaria, la reflexión simple en un espejo vertical **invierte** lo de derecha a izquierda (fig. 11).

Otro interesante ejemplo de aplicación de espejos planos nos ofrece el **heliótropo**.

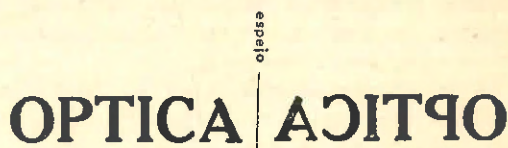


Fig. 11. — *Inversión lateral producida por un espejo vertical.*

### 10. Heliótropo de Gauss.

En las extensas llanuras las impurezas del aire reducen mucho la transparencia de la atmósfera y por ende la visibilidad de las lejanas señales de los puntos trigonométricos. Con el objeto de evitar en lo posible el efecto de este inconveniente, que significa un gran obstáculo para los trabajos de triangulación de primer orden, el matemático y astrónomo **C. F. Gauss** ideó en 1830 un aparato óptico llamado **heliótropo**, el que más tarde fué perfeccionado por **Bertram**.

Fig. 12 a. — Detalle: Vista de frente de la horquilla portareticulo y del tubo *t*.

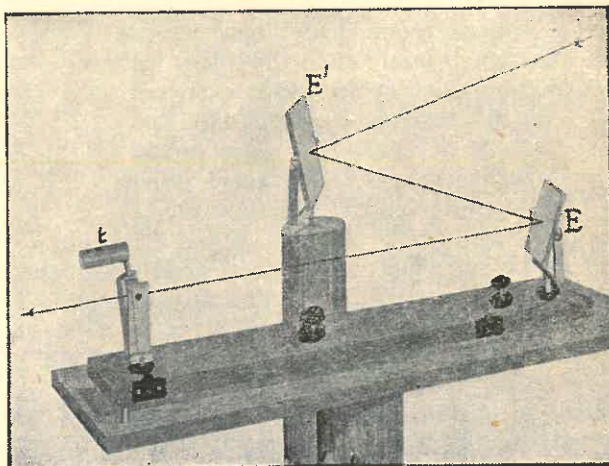


Fig. 12. — *Heliótropo según GAUSS-BERTRAM. E es el espejo reflector, E' el espejo auxiliar, t el tubo director de luz.*

Las partes principales de este sencillo aparato son las siguientes: El espejo plano **E** de forma cuadrática, llamado **espejo reflector** (fig. 12), con un pequeño agujero en el medio para mirar a su través. Está montado este espejo en un extremo de una tabla; posee dos ejes de giro, uno horizontal y otro vertical, que permiten su rápida orientación.

En el otro extremo de la tabla hállase dispuesto un retículo  $r$  dentro de una horquilla sostén (ver fig. 12a) y un pequeño tubo  $t$  provisto de una articulación con eje horizontal (figs. 12 y 12a).

Para el caso muy frecuente de una posición desfavorable del Sol, o para cuando el aparato tenga que instalarse en el interior de una torre, por ejemplo, se dispone de un **espejo auxiliar E'**, que sirve para proyectar la luz solar sobre el espejo **E**.

El heliótropo se instala en un punto trigonométrico **A** que debe ser visto desde otro punto trigonométrico lejano, al que llamamos punto de observación **B**.

El pequeño agujero del espejo reflector **E** forma conjuntamente con el centro de la cruz del retículo  $r$  una **dioptra**, por medio de la cual se puede dirigir una visual hacia el punto de observación **B**, es decir, hacia el punto en que se supone que se encuentre un observador con un teodolito. Cuando el **heliotropista**, o sea el auxiliar encargado del servicio del heliótropo, instalado en **A**, no pudiera distinguir a ojo la señal del punto lejano **B**, el observador en **B** la hará visible por medio de los destellos producidos con ayuda de un espejo.

Orientado con este recurso el aparato en **A**, trátase ahora de enviar el haz de luz en la dirección de la visual al punto **B**.

Bájese para ello el tubito  $t$  y gírese el espejo reflector **E** del aparato (y, si fuera necesario también el espejo auxiliar **E'**) hasta ver la sombra redonda del agujero en el medio del campo del fondo del tubo. En tales condiciones del aparato, se levantará el tubo  $t$  (posiciones representadas en figuras 12 y 12a), y el observador de la lejana estación **B** verá entonces la luz solar reflejada, que le permite realizar debidamente la bisección del punto **A**.

Como el diámetro del Sol es de  $\frac{1}{2}^\circ$  aproximadamente, cada punto del espejo **E** será vértice de un cono de luz con ángulo de  $\frac{1}{2}^\circ$  o sea de:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{57} \sim \frac{1}{100} \text{ (en radián)}$$

Mientras el observador en **B** se halle dentro de dicho cono, podrá ver la luz enviada por el heliotropista en **A**.

Siendo  $d$  la distancia a la lejana señal en **B y  $a$  la abertura del cono de luz en **B**, tendremos según la segunda de las ecuaciones (II) de pág. 14 del tomo I:**

$$(2) \quad a = d \times \frac{1}{100}$$

Ejemplo:

$$a = 30\,000 \times \frac{1}{100} = 300 \text{ metros en un punto}$$

**B** distante 30 km de **A**.

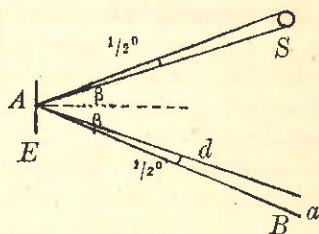


Fig. 13.— Ilustrando para la distancia  $d$  la magnitud de la abertura  $a$  del cono de luz reflejado desde **A** hacia **B**.

$$a = d \times \frac{1}{100}$$

La considerable magnitud de esta abertura facilita mucho el eficaz servicio del aparato. Será necesario recordar que el sol se desplaza en 15 minutos de medida angular por cada 5 minutos de tiempo transcurrido, debiendo por ello el heliotropista ir moviendo el espejo cada minuto un poquito. De ahí el nombre que recibió el aparato: **heliótopo** (de **helios**, Sol y **tropein**, girar).

### 11. Reflexión difusa.

Las leyes de reflexión suponen que en el punto de incidencia del rayo sobre la superficie de separación exista una sola normal a la misma. Esta suposición se verifica con suficiente exactitud cuando se trata de superficies planas y pulidas. Pero, siendo áspera la superficie, habrá innumerables normales en los puntos de incidencia de los rayos: Cada partícula de superficie refleja la luz en todas las direcciones, apareciendo entonces la superficie iluminada uniformemente. Es el fenómeno de la llamada **reflexión difusa**.

Mientras el rayo reflejado permanece siempre en el mismo medio en que se propaga el rayo incidente, el **rayo refractado**, que pasamos a tratar, penetra en el segundo medio.

*Refracción (cuarto principio fundamental de la Óptica Geométrica); prisma.*

### 12. Leyes de refracción. Ejemplo práctico.

Cuando un rayo luminoso pasa de un medio a otro de distinta densidad en tal forma que caiga oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios, se lo ve desviarse en esta superficie.

El rayo que incide normalmente en la superficie de separación, en cambio, no se desvía en el paso del primer medio al segundo.

La refracción del rayo luminoso se verifica según las siguientes **leyes**:

1. El rayo incidente, el refractado y la normal a la superficie de separación (erigida en el punto de incidencia), se hallan en un mismo plano.
2. Los senos de los ángulos  $i$  e  $i'$  (fig. 14) que el rayo incidente y el refractado forman con la normal, están en una relación constante de valor  $n$ , que se llama **índice de refracción** del segundo medio con respecto al primero, el que depende sólo de la naturaleza de los dos medios.

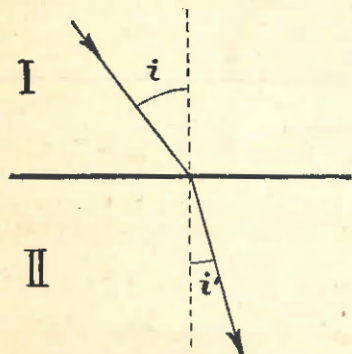


Fig. 14. — Refracción de un rayo de luz;  $i$  es el ángulo de incidencia,  $i'$  el ángulo de refracción.

$$(3) \quad \frac{\text{sen } i}{\text{sen } i'} = n_{II,I}$$

Es ésta la **ley de refracción** propiamente dicha descubierta por SNELLIUS. (\*).

Esta cantidad  $n_{II,I}$  tiene un valor mayor que 1 cuando el segundo medio es ópticamente más denso que el primero (por ejemplo: primer medio **aire** y segundo medio **vidrio**) y menor que 1 en caso contrario (primer medio **vidrio** y segundo medio **aire**). Depende  $n_{II,I}$ , además, de la clase de luz, color (longitud de onda), pero **no** de la magnitud del ángulo de incidencia.



Fig. 15. — JUAN KEPLER (1571-1630).

Este índice de refracción cambia también cuando varía la densidad de uno de los medios atravesados por el rayo luminoso.

(\*) **NOTA HISTORICA.** — En su famosa obra "Dióptrica" el gran astrónomo KEPLER hizo conocer en el año 1611 la *razón constante* que existe entre los ángulos de incidencia y refracción para el cuarzo; pero la ley natural que rige la refracción no la pudo hallar, no obstante los grandes esfuerzos que hizo para ello. Es a Willerbrord SNELLIUS (1591-1626) a quien debemos el descubrimiento de la *ley de refracción* que lleva su nombre:  $\text{sen } i : \text{sen } i' = n$ , la que fué publicada por primera vez por DESCARTES.

3. Cuando se conozcan los índices de refracción de los medios **A** y **B** con respecto a un tercer medio **C**, el cociente de dichos dos índices será el índice de refracción de **B** con respecto a **A**.

Para demostrar esta **tercera ley** basémonos en el hecho experimentalmente comprobado de que un rayo luminoso que viniendo del medio **C** (fig. 16) tenga ángulo de incidencia  $\gamma$ , que luego atraviese varios otros cuerpos (**A** y **B**) y salga finalmente al mismo medio **C**, afectúa esta salida con el mismo ángulo de refracción  $\gamma$ .

Siendo  $n_{A,C}$ ,  $n_{B,A}$  y  $n_{C,B}$  los índices de refracción para el paso del rayo de **C** a **A**, de **A** a **B** y de **B** a **C**, respectivamente, tendremos según la segunda ley de refracción:

$$(4) \quad \begin{cases} n_{A,C} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} \\ n_{B,A} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \\ n_{C,B} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} \end{cases}$$

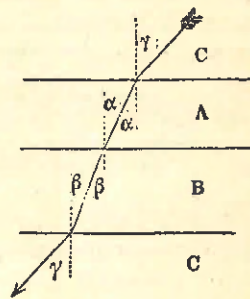


Fig. 16. — Ilustrando la 3ª ley de refracción

Multiplicando estas tres ecuaciones (4) entre sí, obtendremos:

$$(5) \quad n_{A,C} \times n_{B,A} \times n_{C,B} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} \times \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \times \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

Suponiendo conocidos los índices  $n_{A,C}$  y  $n_{B,C}$ , tendremos para el índice  $n_{B,A}$  que nos interesa:

$$n_{B,A} = \frac{1}{n_{A,C} \times n_{C,B}} = \frac{1}{n_{A,C} \times \frac{1}{n_{B,C}}} = \frac{n_{B,C}}{n_{A,C}}$$

o sobreentendiendo tácitamente el cuerpo de referencia **C** (aire o vacío):

$$(9) \quad \boxed{n_{B,A} = \frac{n_B}{n_A}}$$

$$n_{B,A} = \frac{n_B}{n_A}$$

La flecha indica el camino de un rayo de luz que incide en el medio **C** (vacío o aire) y que atraviesa luego los medios **A** y **B** (separados por caras planas y paralelas) para salir nuevamente al medio **C**.

**Ejemplo:** Siendo el índice de refracción del agua  $n_{\text{agua}} = \frac{4}{3}$  y el de una cierta clase de vidrio  $n_{\text{vidrio}} = \frac{3}{2}$ , ambos referidos al aire, se pregunta: ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio con respecto al agua?

Se obtiene:

$$n_{\text{vidrio agua}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$$

## 13. Forma general de la ley de refracción. Invariante óptica.

Tenemos ahora los elementos para establecer la forma general de la ley de refracción: Siendo **C** y **A** dos medios con los índices de refracción  $n_C$  y  $n_A$  y llamando otra vez  $\gamma$  y  $\alpha$  los ángulos que forma el rayo luminoso en uno y otro medio con la normal, tendremos:

$$(7) \quad \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{n_A}{n_C}$$

o sea:

$$(8) \quad \boxed{n_A \times \text{sen } \alpha = n_C \times \text{sen } \gamma}$$

La ecuación (8) expresa que en toda refracción el producto del índice por el seno del ángulo de refracción, ambos tomados para el mismo medio, es una **invariante**, lo que quiere decir que tiene el mismo valor para todos los puntos en que el rayo pasa de un medio a otro. Se le llama **invariante óptica**.

Según fig. 16 tenemos:

$$n_C \text{sen } \gamma = n_A \text{sen } \alpha = n_B \text{sen } \beta$$

Si suponemos que el medio **C** es el vacío con índice de refracción  $n_C = 1$ , tendremos nuevamente la ecuación (7) simplificada:

$$\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \alpha} = \frac{n_A}{n_C} = \frac{n_A}{1} = n_A = n,$$

designándose así por  $n$  el índice de refracción del medio **A**.

## 14. Índice de refracción absoluto e índice de refracción relativo. Ejemplo práctico.

Llámase **índice de refracción absoluto** a la relación de los senos de los ángulos de incidencia y de refracción del rayo luminoso en su paso del vacío a un cuerpo dado.

Cuando se conozcan los índices de refracción absolutos de dos cuerpos, el cociente de ambos es el **índice de refracción relativo** para el paso del rayo luminoso de un cuerpo al otro (tercera ley de refracción).

**Ejemplo práctico.** El índice de refracción absoluto del aire es  $n_{\text{aire}} = 1,000\,294$  y el del agua  $n_{\text{agua}} = 1,336$ . Se pregunta: ¿Cuál es el índice de refracción relativo  $n$  del agua con respecto al aire?

Se tiene:

$$n = \frac{n_{\text{agua}}}{n_{\text{aire}}} = \frac{1,336}{1,000\,294} = 1,3356$$

Cuando no se expresa lo contrario, el índice de refracción  $n$  se refiere al aire.

**15. Inversión del camino del rayo luminoso.**

Cuando un rayo de luz que pasa de un medio I menos denso a otro medio II más denso (fig. 17), recorra un camino **PAP'**, otro rayo (invertido) que viniendo del medio más denso en la dirección **P'A**, tomaría, después de la refracción en **A**, la dirección **AP**. Es esto una ley llamada **principio de la inversión del camino de luz**.

Cuando se invierte el camino del rayo haciéndolo recorrer primero el medio más denso (vidrio, por ejemplo) y luego el menos denso (aire), la segunda ley de refracción dará entonces para el índice de refracción del medio menos denso con respecto al más denso:

$$\frac{\text{sen } i'}{\text{sen } i} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \text{ (aire, vidrio),}$$

donde **n** es el índice del medio más denso con respecto al menos denso.

**16. Construcción del rayo refractado (fig. 17).**

En base a la ley de refracción obtiéndose una construcción muy sencilla para un rayo refractado: Trácese para ello alrededor del punto de incidencia **A** del rayo **P** dos circunferencias de radios **n** y **n'** en una escala cualquiera. Hemos elegido la escala de 2 cm por cada unidad del índice de refracción, correspondiendo entonces al radio  $n_{\text{aire}} = n' = \frac{3}{2} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ . Prolónguese el rayo incidente **PA** hasta encontrar en **B** a la semicircunferencia de radio **n**. Trácese por **B** la paralela a la normal **AC**. El punto de intersección de dicha paralela con la segunda semicircunferencia de radio **n'** es el punto **D** por el cual pasa el rayo refractado **AP'**.

En efecto, del triángulo **ABD** tenemos directamente:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } i'} = \frac{n'}{n} = \frac{3/2}{1} = 3/2$$

Vemos en la figura 17 que cuanto más pequeño el ángulo de incidencia tanto más pequeño el de refracción, es decir, tanto más este último se acerca a la normal. Para un valor  $i = 0^\circ$  (rayo normal) el rayo refractado conserva la dirección del rayo incidente.

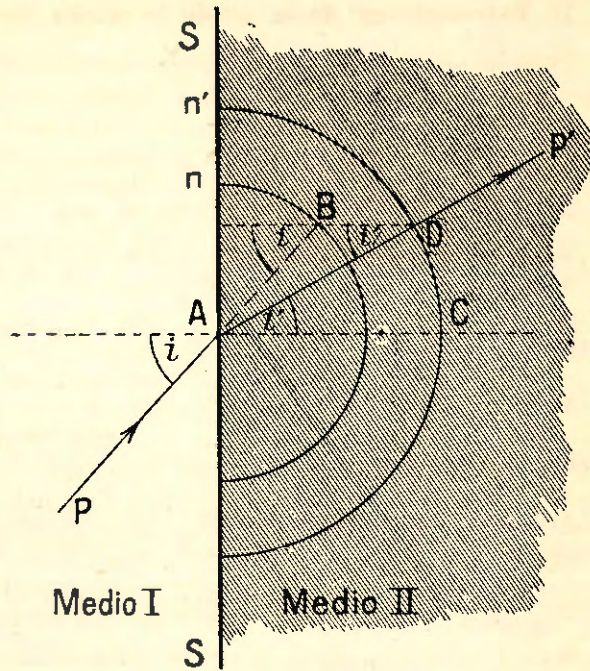


Fig. 17. — Principio de la inversión del camino de la luz y construcción del rayo refractado.

## 17. Refracción en placas de vidrio planas y paralelas. Ejemplos prácticos.

Cuando un rayo luminoso atraviesa una placa de vidrio de caras planas y paralelas rodeadas de aire, el rayo saliente es paralelo al incidente y desplazado con respecto a éste, siendo el desplazamiento tanto mayor cuanto mayor sea el espesor de la placa y cuanto mayor sea el ángulo de incidencia.

En efecto, de la fig. 18 sacamos directamente para el desplazamiento  $x$ :

$$(9) \quad x = AB \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Y siendo:

$$(10) \quad AB = \frac{e}{\cos \beta}$$

resulta:

$$(11) \quad x = \frac{e}{\cos \beta} \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Desarrollando la (11), tendremos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e}{\cos \beta} (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \\ &= e \operatorname{sen} \alpha - e \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \end{aligned}$$

Por ser:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{n}$$

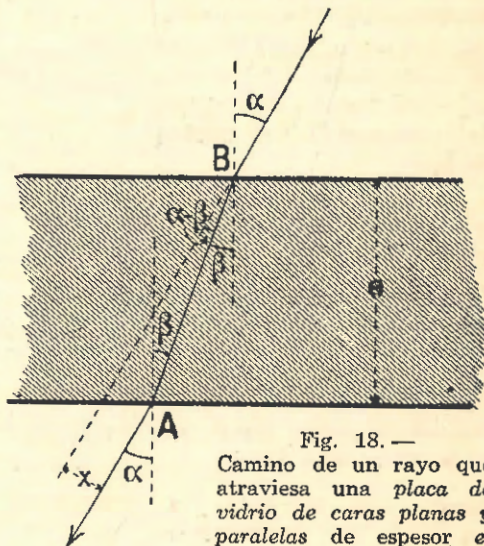


Fig. 18. — Camino de un rayo que atraviesa una placa de vidrio de caras planas y paralelas de espesor  $e$ .

tendremos:

$$x = e \operatorname{sen} \alpha - e \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{n \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{n^2}}}$$

$$(12) \quad \boxed{x = e \operatorname{sen} \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} \right)}$$

Cuando el ángulo de incidencia  $\alpha$  es pequeño, la complicada fórmula exacta (12) puede reducirse a esta otra:

$$(13) \quad x = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) e \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{n-1}{n} e \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

o, si nos limitamos sólo a los rayos que forman muy pequeños ángulos de incidencia (**rayos paraxiales**):

$$(14) \quad x = \frac{n-1}{n} e \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ en radianes})$$

El Ing. H. Wild ha demostrado que la fórmula (12) puede substituirse para valores de  $\alpha$  de  $0^\circ$  hasta  $25^\circ$  por esta otra simplificada:

$$(15) \quad x = \frac{n-1}{n} e \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

**Ejemplo numérico.** Sobre una placa de vidrio de caras planas y paralelas (con  $n = 1,58$ ) de  $e = 30$  mm de espesor incide un rayo con  $\alpha = 25^\circ$ . Se pregunta: ¿Cuál es el desplazamiento  $x$  del rayo saliente?

Según (12) tenemos:

$$x = 30 \times \operatorname{sen} 25^\circ \left( 1 - \frac{\cos 25^\circ}{\sqrt{1,58^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} \right) = 5,12 \text{ mm,}$$

y según (15): 
$$x = \frac{0,58}{1,58} \times 30 \times 0,46631 = 5,31 \text{ mm.}$$

**Ejemplo ilustrativo de aplicación práctica a un instrumento de nivelación de precisión** (fig 19). Cuando la placa de caras planas y paralelas se halla en "posición cero" (indicada en la figura con trazo interrumpido), la visual (siempre determinada por el centro de la cruz del retículo y el centro del objetivo) pasa **sin refractarse**. Se supone que ella bisecta un espacio blanco de una mira graduada en medios centímetros.

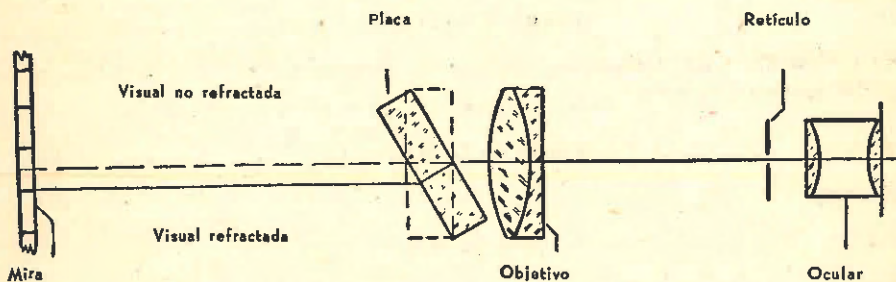


Fig. 19. — Aplicación de una placa de vidrio de 2 cm con caras planas y paralelas a un instrumento de nivelación de precisión Zeiss, modelo III.

Cuando inclinamos la placa girándola alrededor de un eje horizontal, la visual se refracta, desplazándose según se ilustra en figura 19. El alcance del giro de la placa es generalmente tal que, a partir de la "posición cero", la visual puede llegar a bisectar el trazo inmediatamente más bajo o el inmediatamente más alto que el punto de la mira que correspondería a la visual no refractada.

La magnitud lineal del desplazamiento paralelo de la visual correspondiente al giro angular de la placa, se calcula según (15) y se la lee directamente con la precisión de un veintavo de milímetro sobre un tambor (no indicado en la figura).

Para más detalles ver § 13, Volumen 1 del Tomo III de este Compendio.

## 18. Refracción en un prisma. Prisma delgado (cuña).

La figura 20 representa una sección obtenida por un plano normal a las aristas del prisma. Se supone situado en este plano un rayo  $L$  que incide sobre la primera cara del prisma bajo el ángulo  $\alpha_1$ , al cual corresponde un ángulo de refracción  $\beta_1$ . Este rayo, después de atravesar el prisma, sale al aire, sufriendo una segunda refracción con ángulos de incidencia y refracción  $\beta_2$  y  $\alpha_2$ .

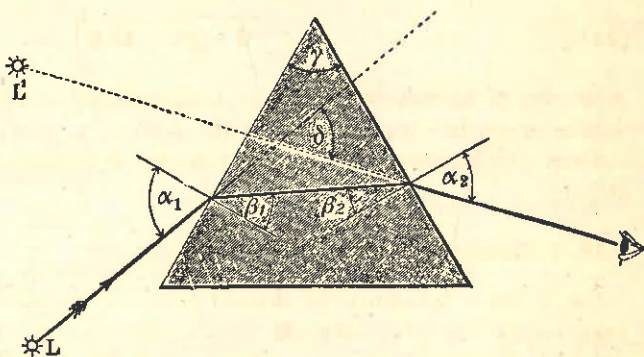


Fig. 20. — Desviación  $\delta$  sufrida por un rayo  $L$  en un prisma de ángulo  $\gamma$ .

Tendremos entonces:

$$(16) \quad \text{sen } \alpha_1 = n \cdot \text{sen } \beta_1$$

$$(17) \quad \text{sen } \alpha_2 = n \cdot \text{sen } \beta_2$$

y para el ángulo de desviación  $\delta$  que la dirección del rayo saliente forma con la del rayo entrante:

$$(18) \quad \delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

o, por ser:

$$(19) \quad \beta_1 + \beta_2 = \gamma$$

resulta:

$$(20) \quad \boxed{\delta = \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma}$$

Estando dado  $\alpha_1$ , se puede calcular el ángulo  $\beta_1$  de la (16) y  $\beta_2$  de la (19); luego  $\alpha_2$  de la (17) y, por fin, la desviación  $\delta$  de la (20).

**Prisma delgado (cuña).** Si el ángulo  $\gamma$  del prisma es pequeño (cuña), y pequeño también el ángulo de incidencia  $\alpha$  (rayos que inciden casi perpendicularmente sobre la primera cara del prisma), se puede admitir que las ecuaciones (16) a (20) pasen a ser éstas:

$$(21) \quad \alpha_1 = n \cdot \beta_1$$

$$(22) \quad \alpha_2 = n \cdot \beta_2$$

Luego, teniendo en cuenta las (18) y (19), resulta:

$$(23) \quad \delta = n (\beta_1 + \beta_2) - \gamma$$

$$(24) \quad \boxed{\delta = (n - 1) \gamma}$$

Es decir, la **desviación**  $\delta$  es **proporcional** al ángulo del prisma  $\gamma$  e independiente del ángulo de incidencia  $\alpha$ .

Para vidrio con  $n = 1,5$ , la desviación  $\delta$  resulta la mitad del ángulo  $\gamma$  del prisma.

### 19. Reflexión y refracción.

Cada rayo incidente se descompone en su paso del aire al vidrio e inversamente, en el punto de incidencia, en dos partes, de las cuales una penetra al segundo medio, reflejándose la otra por la superficie separadora, que también actúa como espejo. El rayo reflejado forma con la perpendicular en el punto de incidencia el mismo ángulo que el rayo incidente.

Es fácil cerciorarse prácticamente de este fenómeno: Mirando en dirección oblicua hacia una placa de vidrio (ventana), podemos observar simultáneamente los objetos vistos por transparencia y una imagen especular.

*Prisma de reflexión, importantes aplicaciones prácticas.*

### 20. Reflexión total.

Cuando un rayo luminoso pasa de un medio menos denso a otro más denso, por ejemplo del aire al vidrio, el ángulo de refracción  $\beta$  se calcula por la fórmula:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{sen } \alpha}{n}$$

El valor máximo de  $\beta$  se obtiene cuando se hace  $\alpha = 90^\circ$ .

Entonces:

$$\text{sen } \beta_{\text{máx}} = \frac{1}{n}$$

Para cierta clase de vidrio (con respecto al aire) tenemos:  $n = 1,53$ .

Luego:

$$\text{sen } \beta_{\text{máx}} = \frac{1}{1,53}$$

de lo cual resulta:

$$\beta_{\text{máx}} = 40^\circ 49'$$

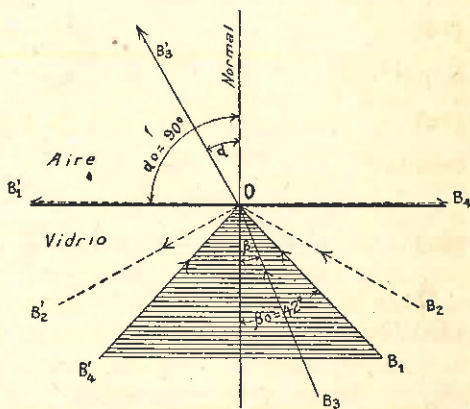


Fig. 21. — *Reflexión total.* El rayo  $B_3$ , situado dentro del ángulo límite  $\beta_{\text{máx}}$  (en la figura  $\beta_0$ ) sale refractado. Los rayos  $B_1$  y  $B_4$  salen rasantes con la superficie de separación. El  $B_2$  se refleja totalmente por formar un ángulo mayor que el límite  $\beta_0$ .

Consideramos ahora el caso que los rayos procedan del medio más denso (vidrio) e incidan sobre una superficie que separe el medio más denso de un medio menos denso (aire).

El ángulo de refracción  $\alpha$  (fig. 21) se calcula entonces de  $\beta$  con la fórmula:

$$\text{sen } \alpha = n \cdot \text{sen } \beta$$

Pero de esta fórmula se desprende que el  $\text{sen } \beta$  no puede ser mayor que la recíproca de  $n$ , puesto que de otro modo resultaría un valor de  $\text{sen } \alpha$  mayor de 1, lo que es imposible, y no habría refracción. Para una cierta clase de vidrio (respecto al aire) tenemos:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1,53} = 0,6536$$

Este número representa el valor máximo de  $\text{sen } \beta$ , al cual corresponde  $\alpha = 40^{\circ}49'$ .

Todos los rayos que incidan con un ángulo  $\beta$  mayor que dicho valor límite (de  $40^{\circ}49'$ ) como el  $B_2$  de figura 21, retroceden al vidrio reflejados en la superficie de separación, fenómeno que se llama **reflexión total**.

**Resumimos:** Este fenómeno de la reflexión total se produce cuando el rayo procede del medio más denso y cuando el seno del ángulo de incidencia  $\beta$  es mayor que la recíproca  $\frac{1}{n}$  del índice de refracción  $n$ . Para vidrio y aire la reflexión total se produce cuando el ángulo de incidencia  $\beta$ , dentro del vidrio, es mayor de  $40^{\circ}49'$ .

### 21. Prisma de reflexión total.

Hemos visto en fig. 14, página 64 del tomo I, que el prisma triangular puede servir como espejo debido al fenómeno de la reflexión total. Es el prisma el mejor de los espejos de que disponemos, siendo insignificante la pérdida de luz que el rayo sufre en su paso por el interior del vidrio.

En las figuras 22 y 23 el rayo incidente es perpendicular sobre las ca-

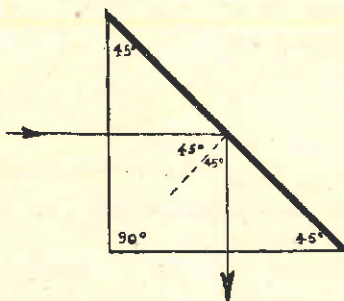


Fig. 22. — Prisma triangular (rectangular e isósceles). El rayo incidente perpendicular sobre una cara cateto, sufre una desviación de  $90^{\circ}$ . Cuando se coloca un tal prisma delante del objetivo u ocular de un anteojo (*ocular acodado*), se pueden tomar cómodamente visuales muy inclinadas.

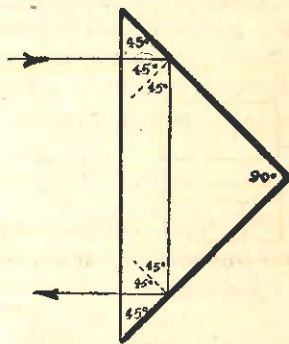


Fig. 23. — El rayo que incide perpendicularmente sobre una cara hipotenusa, sufre dos desviaciones de  $90^{\circ}$ , una en cada cara cateto del prisma triangular (rectangular e isósceles), es decir, sale paralelo a la dirección de entrada.

ras catetos o hipotenusa, respectivamente, es decir, en ambos casos el rayo incidente forma con la cara inclinada del prisma un ángulo de  $45^\circ$ ; por ende mayor que el ángulo límite (de  $40^\circ 49'$ ) para la refracción. Se produce por eso en ambos casos el fenómeno de la reflexión total, razón por la cual este tipo de prisma se llama **prisma de reflexión total**.

**22. Aplicación de los prismas de reflexión total en el nivel de coincidencia.**

El **nivel de coincidencia** (fig. 24), investigado y aplicado de un modo notable por el ingeniero suizo **H. Wild** en 1908, es llamado así porque se puede llevar a la coincidencia las imágenes de los extremos de una burbuja de aire, reflejadas una sobre la otra, mediante un sistema de prismas de reflexión total. Cada vez que se superponen las imágenes **A** y **B** de los extremos de la burbuja de un nivel (figs. 24 y 24 a), el eje de un anteojo que se supone vinculado con el nivel, tendrá, en la dirección de este nivel, una misma determinada inclinación con respecto al horizonte.

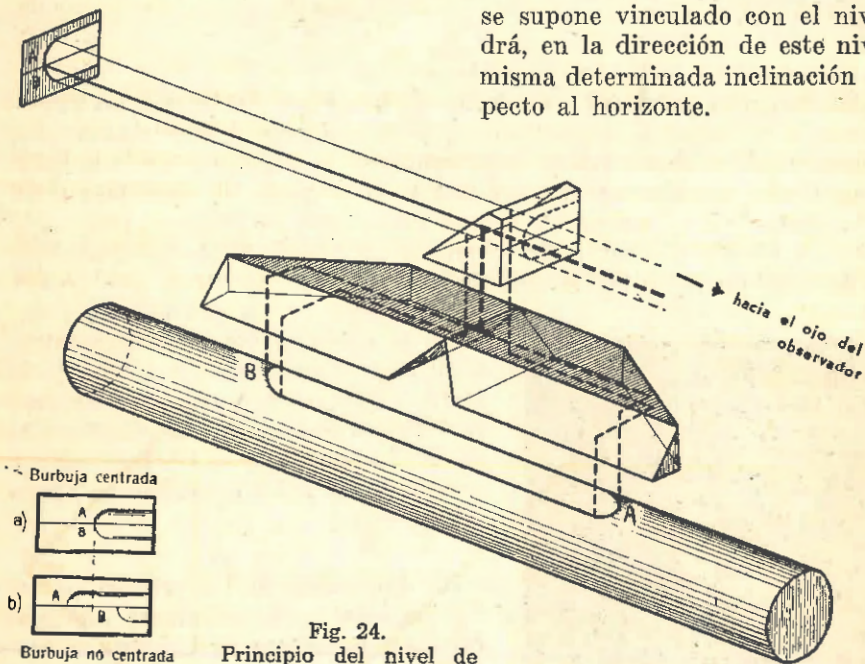
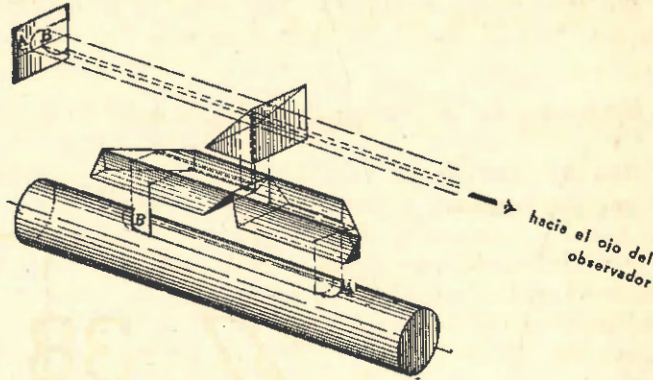


Fig. 24. Principio del nivel de coincidencia de WILD-ZEISS (para burbuja centrada).

Esta idea fué llevada a la práctica por **Wild** de un modo muy ingenioso, yuxtaponiendo o adosando una mitad de la imagen de un extremo de burbuja a una mitad del otro extremo, formando así las imágenes un semicírculo cuando hay coincidencia (posición de burbuja centrada, ver figs. 24 y 24 a). Los rayos que emanan de los vértices de los extremos de burbuja se superponen entonces en el trazo final de su recorrido (trazo grueso). La coincidencia de las imágenes puede producirse solamente cuando la burbuja tienen una determinada posición (la de fig. 24) dentro del tubo.

Para darnos cuenta de que la coincidencia se deshace cuando la burbuja se mueve algo dentro del tubo, llegando a ocupar por ejemplo la posición **AB** indicada con trazo lleno en fig. 25, es necesario examinar cómo se modifican

Fig. 25. — Nivel de coincidencia con burbuja descentrada, según A. KÖNIG: "Die Einrichtung der Zeiss'schen Nivellier Instrumente und ihre Beurteilung in der Praxis". A - B indica la posición de burbuja descentrada (ver fig. 24 b).



dentro del sistema de prismas los caminos de los rayos emitidos por los extremos al salir la burbuja de la posición indicada con trazo interrumpido para ocupar la posición **AB**, es decir, al descentrarse la burbuja. En este caso los rayos de los extremos quedan desviados de la posición correspondiente a burbuja centrada (la que se marca por una rayita en figura 24 b), cada uno en una misma cantidad proporcional a la magnitud de la descentración de la burbuja, resultando así que el segmento de línea que separa las imágenes de los dos extremos expresa el **doble efecto de la descentración**. Esta duplicación del efecto de la descentración de la burbuja es una **característica** del nivel de coincidencia de **Wild - Zeiss**, que se traduce en una ventaja en rapidez y mayor precisión del trabajo.

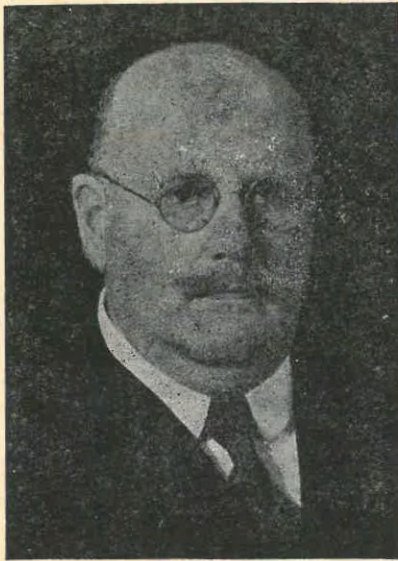


Fig. 26. — Dr. h. c. Ing. Enrique Wild.

En 1930, la Escuela Técnica de Zurich le confirió el título de Dr. h. c.

### 23. Aplicación de los prismas de reflexión total y de las placas planoparalelas a la lectura de círculos de teodolito.

En un forma análoga el ingeniero **Wild** consiguió la superposición de las imágenes de lugares diametralmente opuestos de círculos de teodolitos para la más cómoda y más rápida lectura.

Es en el año 1920 que salió de los talleres de la casa **Carl Zeiss**, Jena, el primer modelo de un teodolito de la construcción ideada por **H. Wild** (fig. 26).

Mediante la reflexión realizada por un sistema de prismas, las imágenes de divisiones diametralmente opuestas quedan situadas una (derecha) arriba de la otra (invertida) y con numeración de sentido contrario (figura 27). Con esta figura 27 se explica la lectura de círculo de un instrumento sencillo, en que se aprecian los minutos.

*Explicación de la lectura*

**Primer método:**

En la división superior se lee ..... 38°12',  
(los 12' por apreciación); en la división inferior ... 218°16'.

**Promedio** (dando preferencia a los grados de la división superior) ..... 38°14'.

**Segundo método:**

Atribuyendo ahora, por conveniencia, a los intervalos de 20' el valor de 10'; y efectuando, en base a este supuesto valor, nuevamente la apreciación de la posición de la raya índice, tendremos:

en la división superior: ... 6',  
" " " inferior: ... 8',

los que **sumados** nos dan directamente el **promedio** buscado de 14' de las lecturas que corresponderían a las lecturas de índices diametralmente opuestos en un círculo de teodolito común. Este método, es por eso algo más rápido que el primero porque evita la formación del promedio.

En el teodolito **Wild** destinado para la triangulación, más perfeccionado que el que acabamos de mencionar, las lecturas se efectúan al segundo por medio del **principio de coincidencia**: Con ayuda de dos placas de vidrio planoparalelas (las que se mueven mediante un tambor llamado "micrómetro óptico"), las imágenes de las dos divisiones son desplazadas en el sentido de la numeración creciente de cada una hasta que los trazos más próximos a la raya índice del círculo se hallen en coincidencia (ver fig. 28).



Fig. 27. — Imagen de las divisiones de círculo diametralmente opuestas vista en el campo visual de un anteojo de teodolito sencillo.

Lectura: 38°14'

La magnitud angular del giro del tambor se lee directamente sobre una división auxiliar, cuya numeración indica los minutos (unidades) y segundos a agregar a la lectura del círculo que corresponde a lugares diametralmente opuestos del mismo.

*Explicación de la lectura del círculo*

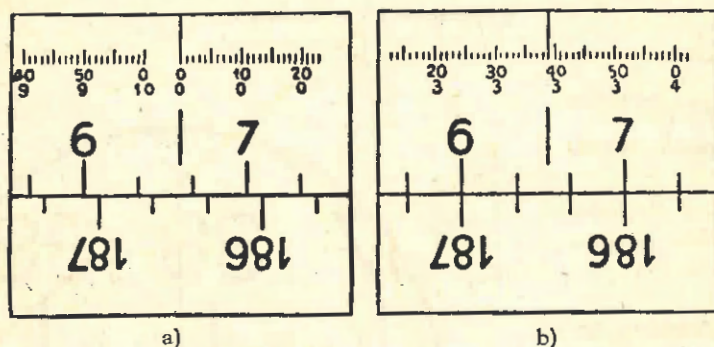


Fig. 28. — Imagen del campo visual del anteojo lector de un teodolito de triangulación.

- a) antes de haber establecido la coincidencia.  
b) después de haber hecho coincidir los correspondientes trazos de círculo.

Lectura: 6°33'39"

**Primer método:** Establecida la coincidencia, se podrá leer directamente, con ayuda de la raya índice, el valor: 6°30'.

**Segundo método:** (sin utilizar la raya índice): Como la cantidad de decenas de minutos que corresponde a una lectura de círculo es igual a la mitad de los intervalos que separan el número bajo de grados (6° en el ejemplo de la figura) de la división superior, del correspondiente número de grados (aumentado o disminuído en 180°) de la división inferior, se puede, para obtener las decenas de minutos, proceder también así: Contar dichos intervalos, atribuyéndoles a cada uno, en lugar del valor de 20', que en realidad tienen, el valor de 10'. En el ejemplo de la figura 28 b contamos desde el trazo de los 6° hasta el de los 186° tres intervalos de 10', resultando así como lectura de círculo: 6°30'.

*Lectura del micrómetro óptico*

Para leer las unidades de los minutos y los segundos a agregar a la lectura de círculo, se utiliza la división del micrómetro, en cuyo centro se ve una raya más larga que sirve de índice. En el caso representado en la figura se leerá directamente: 3'39".

Luego, **lectura total:**  $6°30' + 3'39" = \underline{6°33'39"}$ .

24. Ley óptica sobre un prisma triangular cuyos ángulos están en una relación tal que el ángulo de refracción del prisma es el duplo de uno de los otros ángulos del mismo; instrumentos prismáticos sencillos que en ella se basan (escuadra y cruz de prismas de Bauernfeind). Imagen fija e imagen móvil.

Sea **ABC** (fig. 29) el corte perpendicular de un prisma triangular con los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$  cualesquiera. En esta figura se ilustra el recorrido 1-2-3-4 de un rayo luminoso **P** a través del prisma triangular. Los ángulos inscriptos en la misma demuestran que con el ángulo de refracción  $i'$ , en el punto 1, se obtiene el ángulo de incidencia  $2\gamma - \alpha + i'$  en el punto 4.

Si entonces el prisma tiene una forma especial tal que  $\alpha = 2\gamma$  (fig. 30), el ángulo de incidencia en el punto 4 resulta ser igual a  $i'$ . Es decir, el rayo incide sobre la cara **AC** con el mismo ángulo  $i'$  que forma con la normal a la cara **AB** después de refractarse. Podemos

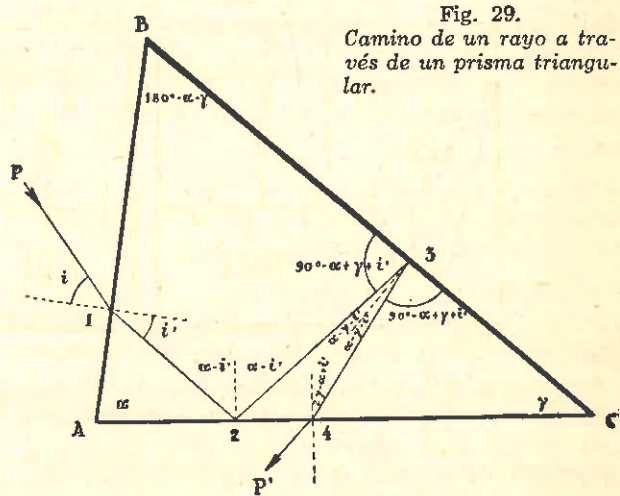


Fig. 29. Camino de un rayo a través de un prisma triangular.

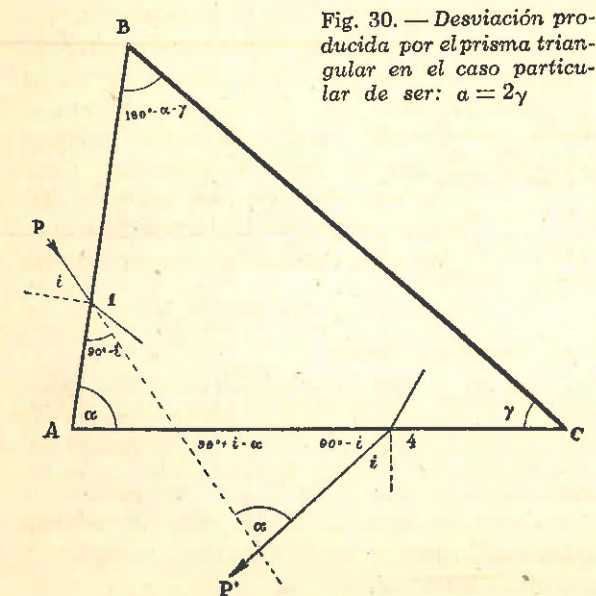


Fig. 30. — Desviación producida por el prisma triangular en el caso particular de ser:  $\alpha = 2\gamma$

decir también que el rayo forma con las normales a las caras de entrada y salida el mismo ángulo, quedando por ende desviado al salir del prisma por el ángulo  $\alpha$ , que las caras **AB** y **AC** forman entre sí. En esta figura 30 se encuentran inscriptos los ángulos que para este caso particular forman los rayos entrante y saliente entre sí y con las caras del prisma. En especial se deduce que en tal caso el rayo entrante **P-1** y el saliente **4-P'** forman entre sí siempre el ángulo fijo  $\alpha$ , que se llama el ángulo de refracción del mismo.

Queda, en consecuencia, demostrada la siguiente **ley óptica**: Un rayo situado en una sección (principal) perpendicular **ABC** de un prisma triangular, con dos de sus ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que  $\alpha = 2\gamma$  sufre, después de dos refracciones y de dos reflexiones en el interior del prisma, una **desviación constante**  $\alpha$  independiente del ángulo de incidencia.

De esta ley se deduce lo siguiente: Un ojo situado en **P'** (fig. 30) percibirá en la dirección **P'-4** la imagen de **P**, y la verá siempre en la misma dirección fija aunque el prisma sea girado alrededor de una paralela a sus aristas (eje vertical). Por esto se dice que la imagen producida por la doble reflexión **es fija**, es decir, no la afecta el movimiento indicado del prisma.

Hemos visto en pág. 64 del tomo I que la ley que acabamos de anunciar se cumple en el prisma triangular rectangular e isósceles de **Bauernfeind**, en el que  $\alpha = 90^\circ$  y  $\gamma = 45^\circ$ .

Recordamos aquí también que los prismas (como los de figura 29 y 30) pueden producir también imágenes por **reflexión simple** dentro de los mismos (ver fig. 15, pág. 65 de tomo I). Son éstas las imágenes **móviles** conocidas desde hace mucho tiempo. En cambio, la imagen producida por reflexión doble y que fué descubierta por **Bauernfeind** en 1851, es **fija**, y por esta razón se la aprovecha con ventaja para el trazado de ángulos de  $90^\circ$  (**escuadra de prisma**) y  $180^\circ$  (**cruz de prismas**) en el terreno.

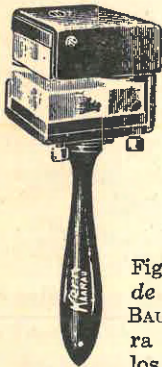


Fig. 31. — Cruz de prismas de BAUERNFEIND para trazar ángulos de  $180^\circ$ .

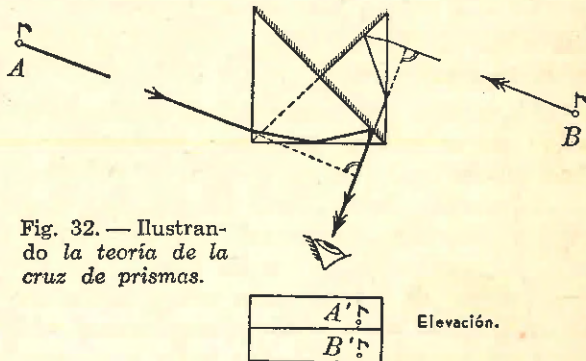


Fig. 32. — Ilustrando la teoría de la cruz de prismas.

**Cruz de prismas** (fig. 31). Dos escuadras de prismas están combinadas de tal modo que dos caras catetos se hallan una encima de otra, mientras que las caras hipotenusas forman entre sí un ángulo de  $90^\circ$  (fig. 32, planta).

La **teoría de la cruz de prismas** es muy sencilla: La cruz de prismas se encuentra muy aproximadamente sobre la alineación **AB** (fig. 32) cuando las imágenes **A'** y **B'** coinciden (estando una arriba de la otra), como se ve en la parte inferior (elevación) de la figura 32.

*Enderezamiento de la imagen.*

**25. Prisma de inversión de Porro y su aplicación práctica.**

El objetivo de un anteojo astronómico (el que trataremos más adelante) produce de un objeto lejano una imagen invertida, la que es observada a través de un ocular. En los llamados **anteojos prismáticos** se introduce en el camino de los rayos (desde el objetivo hasta el ocular) dos prismas que

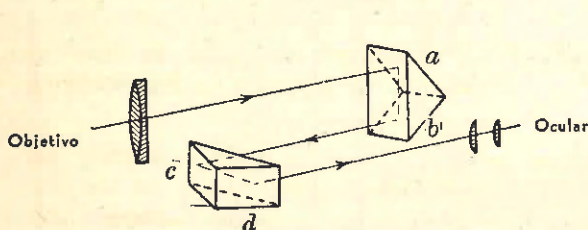


Fig. 33. — *Combinación de prismas según PORRO. Su aplicación para enderezar la imagen y reducir la longitud de un anteojo.*

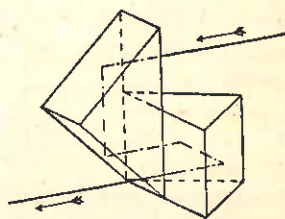


Fig. 34. — *Prisma de inversión de PORRO de primera especie (las aristas de los dos prismas de reflexión total que lo componen forman entre sí un ángulo de 90°).*

actúan como dos pares de espejos (a/b y c/d, fig. 33) y que permiten **reducir la longitud** de los anteojos mediante la descomposición del camino de los rayos en tres trozos aproximadamente iguales (ver fig. 33), siendo la longitud del anteojo determinado, aproximadamente, por la de cada trozo, en lugar de serlo por la distancia focal entera.



Fig. 35. — *Pablo Ig. PORRO (1801 - 1875).*

Los prismas son dispuestos en una forma tal que se obtiene frente al ocular una imagen derecha del objeto (en lugar de la imagen invertida que da un anteojo astronómico).

Este efecto se obtiene con disponer, de acuerdo a lo indicado por el físico italiano P. I. PORRO (fig. 35), uno de los dos prismas de la combinación, el a/b, con arista horizontal (el que produce la inversión de arriba a abajo) y el otro, el c/d, con arista vertical (el que invierte lo situado a la derecha o lo situado a la izquierda).

Una tal combinación de prismas se llama **prismas de inversión de Porro**. En su aplicación al anteojo prismático quedan separados los dos prismas a/b y c/d con el fin, como ya dijimos, de reducir la longitud del mismo.

En los gemelos prismáticos o dobles anteojos prismáticos (fig. 36), contruidos por primera vez según indicaciones de Abbe por la casa Zeiss, se unieron dos de estos anteojos prismáticos, consiguiéndose con esta combinación aparte de las ventajas del enderezamiento de la imagen y del acortamiento del anteojo ya analizadas, un aumento de la distancia que separa los dos objetivos, en comparación con la distancia de los dos oculares, y, por

ende, un aumento del efecto plástico o sensación de relieve en la visión binocular, de la cual nos ocuparemos detalladamente más adelante.

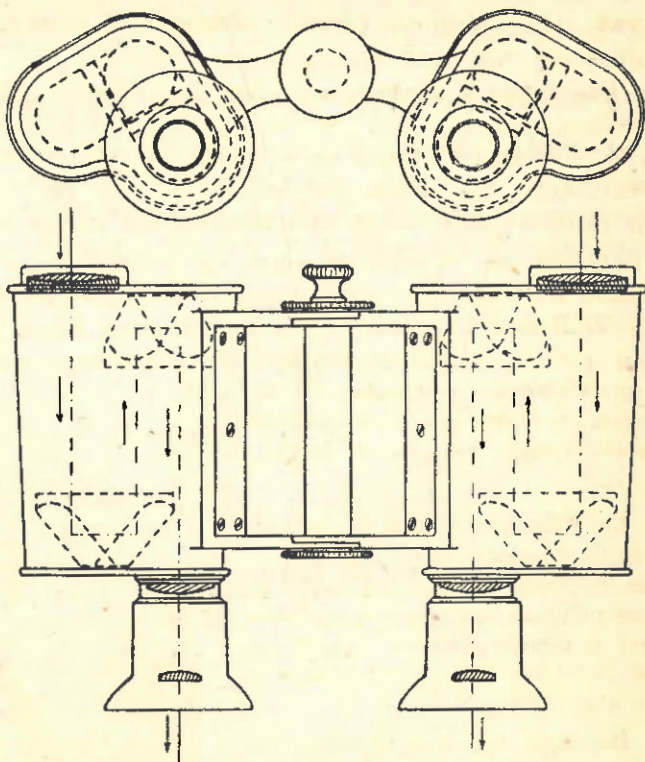


Fig. 36 — Gemelos prismáticos de ABBE - ZEISS.

### *Descomposición de la luz, dispersión, aberración cromática, acromatismo visual*

#### 26. Descomposición de la luz blanca.

La luz solar u otra clase de luz blanca es una luz **compuesta** que, por medio de la refracción en un prisma, puede **descomponerse** en unos **7 colores** simples que la integran. El conjunto de los 7 colores elementales en que se descompone la luz del día se llama **espectro solar**. Esos colores reunidos nuevamente, **recomponen** la luz blanca. La descomposición de la luz blanca se realiza en un **experimento clásico**, ejecutado y explicado por primera vez por **Newton** y tiene por causa los diferentes índices de refracción correspondientes a los colores, aumentando esos índices del rojo al violeta. Descompónese así un rayo solar por un prisma de vidrio

**crown** <sup>(1)</sup>, (vidrio sin plomo), formando el conocido **espectro** en que los índices del rojo al violeta varían de 1,52 a 1,55 <sup>(2)</sup>. Para el vidrio **flint** <sup>(1)</sup> (el que contiene plomo) los índices de refracción desde rojo hasta violeta varían entre 1,62 y 1,67. Se nota, por ende, que la refracción es más fuerte en el vidrio flint que en el crown; además, para el flint hay más diferencia entre los índices de refracción de la luz roja y de la violeta, lo que explica que el vidrio flint produce una mayor dispersión que el crown.

Sabemos que el espectro solar no es continuo, como lo había supuesto el gran **Newton**, sino interrumpido por diversas rayas oscuras descubiertas por **Wollaston** (1766-1828) y estudiadas por **Fraunhofer** (fig. 37). Se llaman por eso **rayas de Fraunhofer**; ellas representan dentro del espectro verdaderas posiciones de referencia, a las que corresponden determinados índices de refracción.

La principal causa de las rayas de **Fraunhofer** en el espectro de luz solar reside en el hecho de que ciertas clases de luz, emitidas por el cuerpo sólido o líquido solar, son absorbidas en su paso por la atmósfera del Sol.

He aquí las designaciones de algunas rayas, como ejemplos:

- Raya **A** en el rojo oscuro del espectro solar,  
 „ **B** „ „ rojo vivo,  
 „ **C** „ „ rojo amarillento,  
 „ **D** „ „ amarillo,  
 „ **E** „ „ verde,  
 „ **F** „ „ azul claro,  
 „ **G** „ „ añil,  
 „ **H** „ „ violeta.



Fig. 37. — José von FRAUNHOFER  
(1787 - 1826).

(1) *Crown, flint* (silicatos de sodio, potasio o calcio, óxido de plomo, etc). Estas designaciones de vidrios ópticos provienen del modo primitivo de fabricarlo: el crown (palabra inglesa que significa *corona*) o *vidrio de corona* se obtuvo por soplado en forma de platos: el *flint* fué fabricado a base de pedernal, cuando aún no se conocía otra forma de sílice más pura. *Flint* es también palabra inglesa (pariente del alemán *Flinte*, fusil) que significa *piedra de chispas*. El nombre común para crown sería: *vidrio*, para flint: *crystal*.

(2) Llámase *rayos infrarrojos* a los que tienen índice de refracción inferior al de la luz roja y *rayos ultravioletas* a los que tienen índice de refracción superior al de la luz violeta.

## 27. Dispersión, aberración cromática, acromatismo visual.

El fenómeno de la descomposición de la luz blanca en colores simples, se llama **dispersión**. El defecto para la visión clara que tal fenómeno origina en los prismas y las lentes ha recibido el nombre de **cromatismo** o **aberración cromática**. Se forman imágenes confusas bordeadas de diversos colores debido a dicho defecto. Llámase **acromático** a todo sistema óptico en que se ha corregido la aberración cromática. Ya en el año 1728 el físico inglés

**Chester Moor Hall** demostró que la parte principal de la aberración cromática desaparece cuando se consigue hacer coincidir las imágenes formadas por los rayos rojos y azules, lo que logró mediante la combinación de dos prismas o lentes de distintas clases de vidrio. Se realizó así lo que se llama **acromatismo visual**, el que nos interesa particularmente por su frecuente aplicación en los instrumentos de observación, topográficos, geodésicos y astronómicos. Pero es de observar que cuando por medio de una combinación de vidrios hacemos coincidir exactamente las imágenes producidas por los rayos rojos y azules, entonces coincidirán con esas imágenes

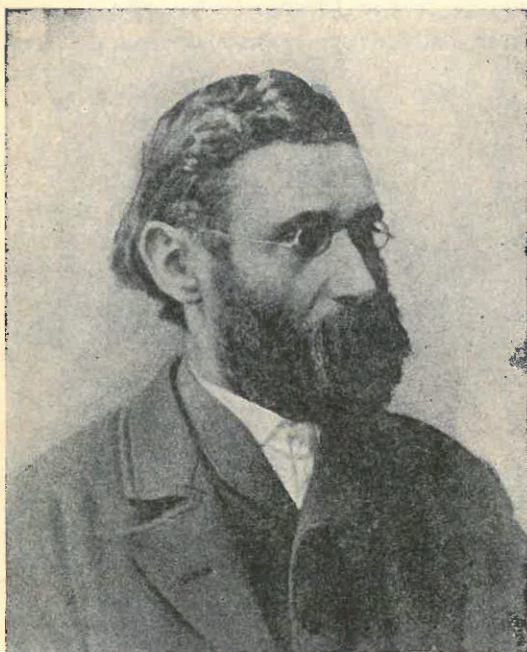


Fig. 38. — Ernesto ABBE (1840 - 1905).

muchas muy aproximadamente (pero no con exactitud absoluta) también las imágenes producidas por los rayos de otros colores (amarillo, verde, etc.). Un pequeñísimo resto de dispersión de los colores intermedios (el llamado **espectro secundario**), que así no es posible corregir, no se nota generalmente en los instrumentos de observación. Es sólo a partir del año 1885 que se logró eliminar también el espectro secundario mediante **nuevos tipos de vidrios ópticos** creados en fructífera colaboración por el físico **E. Abbe** (fig. 38) y el químico **O. Schott**, Jena.

Para los objetivos fotográficos, en cambio, se tiene en cuenta que la sensibilidad de las placas es mayor para los rayos de luz azul y violeta, y se los acromatiza, en consecuencia, exactamente para los colores azul y violeta (y, por consiguiente, tan sólo aproximadamente para los colores del lado de la luz roja).

## 28. Combinaciones de prismas, sus efectos.

Distinguimos:

1º **Combinación de dos prismas de la misma clase de vidrio en sentido invertido, pero de distintos ángulos de abertura.** Tal combinación da un conjunto que actúa como un prisma único con ángulo igual a la diferencia de los dos prismas usados. Esta combinación de prismas origina una dispersión de los rayos que la atraviesan; por ende no es acromática.

2º **Combinación de prismas de distintos ángulos y diferentes clases de vidrio.** Con elegir convenientemente los ángulos de los dos prismas de vidrios distintos, se puede obtener una combinación acromática, que deja subsistir la refracción (algo disminuida), pero anula prácticamente la dispersión. Esto es debido al hecho, descubierto en 1758 por el óptico inglés John Dollond, de que las dispersiones de los vidrios crown y flint no son proporcionales a la refracción. Se elegirán los ángulos de los dos prismas, el de crown (fig. 39) y el de flint y su posición relativa de tal modo que se produzcan iguales dispersiones en sentido inverso. Se obtendrá entonces un sistema **acromático**, quedando la desviación producida por el prisma crown reducida en parte por la que origina el prisma de flint.

Estos ángulos,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , nos proponemos calcular para una cierta desviación deseada.

29. Determinación de los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de una combinación de prismas con un ejemplo de aplicación práctica.

El problema del acromatismo de un prisma consiste en producir el efecto simple de la refracción, es decir, una desviación de los rayos sin dispersión, a fin de obtener imágenes nítidas, no irisadas.

Si se trata de un prisma con ángulo pequeño  $\gamma$  (cuña), y si llamamos  $n_C$  y  $n_F$  a los índices de refracción de los rayos rojos y azules, correspondientes, respectivamente, a las rayas **C** y **F**, tenemos para las correspondientes desviaciones  $\delta_C$  y  $\delta_F$  producidas según la ecuación (24):

$$\delta_C = (n_C - 1) \gamma$$

$$y \quad \delta_F = (n_F - 1) \gamma$$

$$\text{por consiguiente:} \quad \delta_F - \delta_C = (n_F - n_C) \gamma$$

$$\text{o si ponemos:} \quad \delta_F - \delta_C = \Delta\delta$$

$$y \quad n_F - n_C = \Delta n,$$

podemos escribir:

(25)

$$\Delta\delta = \Delta n \cdot \gamma$$

donde  $\Delta\delta$  significa para una cierta clase de vidrio la diferencia entre las desviaciones sufridas por la luz roja (raya **C**) y la azul (raya **F**), y  $\Delta n$  la diferencia de los respectivos índices de refracción.

Establezcamos ahora la ecuación (25) para dos cuñas de diferentes vidrios y en posición invertida (fig. 39). Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los ángulos de las cuñas de vidrio crown y flint, respectivamente, además,  $\Delta n_1$  y  $\Delta n_2$  las correspondientes diferencias de índices de refracción entre luz roja (raya **C**) y azul (raya **F**).

Tendremos entonces según (25) para la cuña de crown:

$$(26) \quad \Delta\delta_1 = \Delta n_1 \cdot \gamma_1$$

y para la cuña de flint:

$$(27) \quad \Delta\delta_2 = \Delta n_2 \cdot \gamma_2$$

Para que se anulen las dispersiones producidas por las dos cuñas, tienen que ser iguales las dispersiones  $\Delta\delta_1$  y  $\Delta\delta_2$  (y naturalmente tener el sentido contrario que resulta de la posición invertida de los prismas).

De acuerdo a esta condición ponemos:

$$\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2$$

o, según (26) y (27):

$$(28) \quad \Delta n_1 \cdot \gamma_1 = \Delta n_2 \cdot \gamma_2$$

de donde:

$$(29) \quad \boxed{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}}$$

Es decir: Los ángulos de los dos prismas tienen que ser entre sí inversamente proporcionales a las diferencias de los índices de refracción de rojo y azul (rayas **C** y **F**) en ambos prismas. Una combinación de dos prismas que llenan esta condición, se llama un **prisma acromático**.

Nos proponemos ahora calcular, como ejemplo, los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  correspondientes a un prisma acromático que produzca una desviación deseada.

El índice de refracción  $n$  de un vidrio generalmente se refiere a la luz amarilla (raya **D**); se llama por eso índice de refracción medio del mismo o simplemente índice de refracción del vidrio. Los índices de refracción de los nuevos vidrios crown y flint usados en la práctica varían entre los límites 1,49 y 1,65. Entendemos entonces por  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente los índices medios de los prismas de crown y flint que se trata de combinar.

Obtendremos entonces para la desviación total  $\delta$  producida por la combinación de dos prismas de acuerdo con la (24):

$$(30) \quad \delta = (n_1 - 1) \gamma_1 - (n_2 - 1) \gamma_2$$

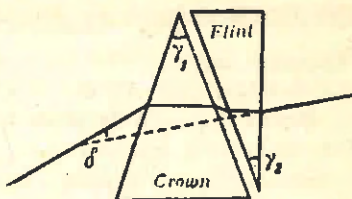


Fig. 39. — Prisma acromático. Se unieron dos cuñas (una de crown de ángulo  $\gamma_1$  y la otra de flint de ángulo  $\gamma_2$ ) con sus aristas paralelas, pero invertidas (una arriba y la otra abajo), anulándose así la dispersión, sin anularse la desviación.

Pero como según (29)  $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$  debe ser igual a  $\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}$  (para anular las dispersiones), la (30) se transforma en:

$$\begin{aligned} \delta &= (n_1 - 1) \gamma_1 - (n_2 - 1) \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} \cdot \gamma_1 \\ &= \frac{\gamma_1 [(n_1 - 1) \Delta n_2 - (n_2 - 1) \Delta n_1]}{\Delta n_2} \end{aligned}$$

de donde se saca para  $\gamma_1$ :

$$\gamma_1 = \frac{\delta \cdot \Delta n_2}{(n_1 - 1) \Delta n_2 - (n_2 - 1) \Delta n_1}$$

o también, dividiendo por  $\Delta n_2$ :

$$(31) \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{\Delta n_1} \cdot \frac{1}{\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} - \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2}}$$

y si en la (31) reemplazamos  $\gamma_1$  por su equivalente  $\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \cdot \gamma_2$  sacado de la (29), obtendremos para  $\gamma_2$ :

$$(32) \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{\Delta n_1} \cdot \frac{1}{\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} - \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2}}$$

Para la comodidad de los cálculos ópticos suele introducirse, en lugar de la dispersión  $n_F - n_C$  el poder dispersivo  $v$  y su recíproca  $\frac{1}{v}$  definidos así:

$$(33) \quad v = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{\text{diferencia de los índices de rojo y azul}}{\text{índice medio menos uno}}$$

y su recíproca:

$$(34) \quad \frac{1}{v} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

En la siguiente planilla damos, según O. Lummer (1860-1925) los valores de los índices de refracción media  $n_D$  y de las recíprocas  $\frac{1}{v}$  del poder dispersivo correspondiente a dos vidrios (crown y flint), con los cuales nos proponemos obtener un prisma acromático.

(35)

N.º de fábrica	Designación	$n_D$	$n_F - n_C$	$\frac{1}{v} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$
0.60	Crown ligero	1,5179	0,00860	60,22
0.103	Flint medio	1,6202	0,01709	36,29

**Ejemplo práctico.** Calcular los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de una combinación de prismas crown-flint, que produzca una desviación  $\delta = 1/100 = 34,38'$ .

De la planilla (35) sacamos:

$$\begin{aligned} n_D(\text{crown}) = n_1 &= 1,5179 & n_D(\text{flint}) = n_2 &= 1,6202 \\ n_F - n_C(\text{crown}) = \Delta n_1 &= 0,00860 & n_F - n_C(\text{flint}) = \Delta n_2 &= 0,01709 \\ \frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} &= 60,22 & \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2} &= 36,29 \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} - \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2} = 23,93$$

con lo que las ecuaciones (31) y (32) nos dan los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  buscados:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{3438'}{100 \times 0,0086} \times \frac{1}{23,93} = \underline{2^{\circ}47'} \\ \gamma_2 &= \frac{3438'}{100 \times 0,01709} \times \frac{1}{23,93} = \underline{1^{\circ}24'} \end{aligned}$$

Es decir, la cuña de crown deberá tener un ángulo de abertura  $\gamma_1$  doble del  $\gamma_2$  que corresponde al prisma de flint.

### *Característica general de un instrumento óptico.*

#### **30. Instrumento óptico.**

Llámase **instrumento óptico** a todo sistema compuesto de medios ópticamente diferentes y limitados por superficies reflectantes y refringentes.

#### **31. Finalidad general de la construcción de un instrumento óptico.**

Las finalidades para las cuales se concibe y realiza la construcción de un instrumento óptico pueden ser muy diversas; y las indicaremos en el estudio de cada instrumento por separado. Pero, por más que se diferencien los instrumentos ópticos, en todos ellos se destaca una **característica general**: Son contruidos de tal modo que proporcionan la representación de un determinado plano (o porción de plano) en otro plano, determinado también, y con propiedades características para cada instrumento.

### *Importancia de la teoría de Gauss como fundamento del estudio de los instrumentos ópticos.*

#### **32. Representación colineal. Punto conjugado, rayo conjugado y plano conjugado. Homografía de Gauss.**

En todo sistema óptico trátase de obtener de cada punto, situado en el espacio objeto, por imagen otro punto, situado en el espacio imagen, de una

recta otra recta y de un plano otro plano, pudiendo así la imagen servir para conocer el objeto que corresponda a dicha imagen.

Cuando todos los rayos salientes de un punto objeto  $P$ , después de reflejarse y refractarse en un sistema óptico, se encuentran en un determinado punto imagen  $P'$ , se dice que la representación es **colineal**. A cada punto  $P$  del espacio objeto, o a cada rayo  $PA$  o a cada figura  $\Phi$  situada en el espacio objeto en un plano  $\pi$ , perpendicular al eje del sistema óptico, corresponderán entonces, en el espacio imagen, respectivamente, un solo punto  $P'$ , un solo rayo  $P'A'$ , una sola figura  $\Phi'$ , los que se llaman punto conjugado, rayo conjugado y figura conjugada, respectivamente. A cada elemento plano perpendicular al eje óptico, en el espacio objeto, corresponderá entonces otro elemento plano perpendicular al eje, en el espacio imagen.

Debido a la inversibilidad del camino óptico, nada cambiaría en lo que acabamos de decir, cuando en alguna oportunidad se considerara el espacio imagen como espacio objeto.

La correspondencia exacta entre los elementos geométricos del espacio objeto y los del espacio imagen, se ha llamado **homografía de Gauss**, por haber sido este gran matemático y físico el que la introdujo en el estudio de los instrumentos ópticos.

### 33. Rayos paraxiales.

La representación colineal ligeramente caracterizada en el número anterior, no es físicamente realizable de un modo general en los instrumentos ópticos. La homografía de **Gauss** sólo existe aproximadamente para un espacio muy estrecho, el llamado "espacio filiforme de **Gauss**", es decir, para **rayos paraxiales** o **rayos centrales** que se imaginan emanados de objetos muy pequeños y muy próximos al eje de un sistema (de ahí el nombre de "paraxiales" (\*), formando por ello haces de muy pequeña abertura.

La investigación de este caso particular de la representación colineal condujo a **Gauss** a establecer ya en el año 1840 una famosa **teoría** que lleva su nombre. Esta teoría nos permite deducir de un modo muy sencillo los más importantes conceptos y leyes ópticas relativas a los instrumentos topográficos, geodésicos y astronómicos, siendo ella básica para el estudio, la comprensión y el correcto empleo de dichos instrumentos. "La utilización de los instrumentos que la teoría científica pone a disposición de quienes los aplican, exige un estudio previo desde el punto de vista teórico si se desea obtener de ellos toda la eficacia de que son capaces en cada una de las condiciones variables de la práctica", dice el Dr. Teófilo **Isnardi** en su juicio sobre la primera edición de este Compendio.

En los dos siguientes párrafos trataremos la refracción de rayos paraxiales, en el primero sobre una sola y en el segundo sobre dos o más superficies esféricas.

---

(\*) *Paraxial*, del griego *para*, al lado, *axial*, perteneciente al eje.

## § 2.

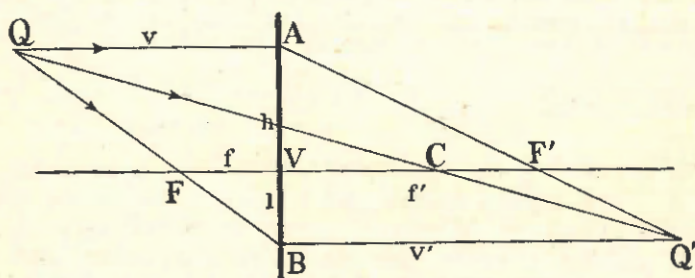
Refracción de rayos paraxiales o rayos centrales  
sobre una sola superficie esférica

Figura sintética.

1. Ecuación dióptrica fundamental para la refracción de rayos paraxiales o rayos centrales.

Sea  $SS$  (fig. 1) la sección meridiana de una superficie esférica de centro  $C$ , que separa el medio I, con índice de refracción  $n$ , del medio II, con índice de refracción  $n' > n$ , es decir, un segundo medio más denso que el primero.

Sea  $P$  un punto luminoso que llamaremos **punto objeto**. Suponemos un primer rayo saliente de  $P$  que pase por el centro  $C$ . Este rayo, que incide en  $V$ , normalmente sobre la superficie  $SS$ , sigue sin refractarse. A la recta  $PC$  podemos llamar **eje óptico** del sistema y al punto  $V$  el **vértice** del mismo. Imaginemos un segundo rayo saliente de  $P$ , que forme con el eje el ángulo  $\mu$  y, en  $A$ , antes de la refracción, con la normal a la superficie  $SS$ , el ángulo  $i$  y, después de la refracción, el ángulo  $i'$ . Entre los ángulos  $i$  e  $i'$ , según (8) del N° 13 del § 1, existe la relación:

$$(1) \quad n \cdot \text{sen } i = n' \cdot \text{sen } i'$$

y  $PV$ , por un lado, y entre  $P'A$  y  $P'V$ , por el otro, son despreciables. Podremos, en consecuencia, substituir las magnitudes  $p$  y  $p'$  (fig. 2), respectivamente, por las cantidades  $v$  y  $v'$ .

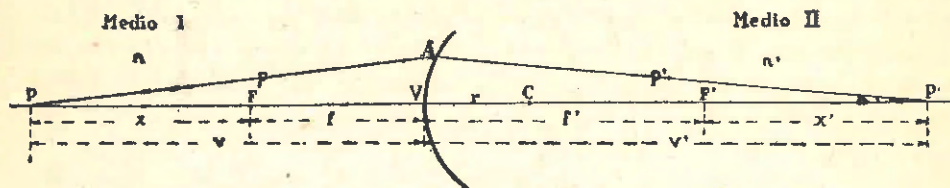


Fig. 2. — Rayos paraxiales ( $p = v$ ;  $p' = v'$ ). Abscisas focales  $x$  y  $x'$ .

Tendremos entonces, en lugar de la (6), la relación buscada:

$$(7) \quad n \cdot \frac{v+r}{v} = n' \cdot \frac{v'-r}{v'}$$

o también:

$$n + \frac{nr}{v} = n' - \frac{n'r}{v'}$$

$$(8) \quad \frac{nr}{v} + \frac{n'r}{v'} = n' - n$$

Dividiendo la (8) por  $r$ , resulta:

$$(9) \quad \boxed{\frac{n}{v} + \frac{n'}{v'} = \frac{1}{r} (n' - n)}$$

ecuación en la cual se basa la teoría de todos los instrumentos ópticos.

Dividiendo la (8) por  $(n' - n)$ , se obtiene:

$$(10) \quad \frac{nr}{v(n'-n)} + \frac{n'r}{v'(n'-n)} = 1$$

Introduzcamos ahora las designaciones  $f$  y  $f'$ :

$$(11) \quad f = \frac{nr}{n' - n}$$

$$(12) \quad f' = \frac{n'r}{n' - n}$$

cuyo significado geométrico veremos más adelante.

Entonces la (10) se transforma en:

$$(13) \quad \boxed{\frac{f}{v} + \frac{f'}{v'} = 1}$$

que es la ecuación dióptrica fundamental para la refracción de rayos paraxiales o rayos centrales que se trató de establecer.

Para rayos paraxiales la ecuación (13), en la que no entran ni  $\mu$ , ni  $\nu$ , ni el ángulo de incidencia  $i$ , permite calcular la distancia  $v'$  en base a la  $v$  con una precisión tal que satisface todas las exigencias de la práctica. La consecuencia de ello es que todo el haz de rayos paraxiales que salen de un punto  $P$  del medio I, se reúnen prácticamente, después de refractarse, en un determinado punto  $P'$ , en el medio II.

## 2. Distancias focales. Definición de los focos como puntos imágenes de puntos objetos infinitamente lejanos.

Vemos de las (11) y (12) que las magnitudes  $f$  y  $f'$  sólo dependen del radio  $r$  de la superficie esférica y de los índices de refracción  $n$  y  $n'$ , vale decir que son constantes para determinados medios y una determinada forma de la superficie refringente.

Para  $v = \infty$ , la (13) nos da:

$$(14) \quad f' = v'$$

Es decir, un punto  $P$  muy lejano (estrella, por ejemplo), que emite rayos prácticamente paralelos al eje, tiene su imagen en un punto que designaremos por  $F'$ , y cuya "distancia de imagen" es igual a  $f'$ . Es decir, en el punto  $F'$  se reúnen los rayos que en el espacio objeto son paralelos al eje. A este punto  $F'$  le llamaremos **foco** y a la distancia  $f'$  **distancia focal del espacio imagen**.

Igualmente obtendremos de la (13) para  $v' = \infty$ :

$$(15) \quad f = v$$

Es decir, cuando el punto imagen se desplaza hasta el infinito (llegando a ser paralelos los rayos refractados), el punto objeto  $P$  llega a ocupar una posición en un determinado punto  $F$ , cuya "distancia de objeto" es igual a  $f$ . Designase por  $F$  el **foco** y  $f$  la **distancia focal en el espacio objeto**. Al foco  $F$  en el espacio objeto se le llama también **foco anterior** y al  $F'$  (en el espacio imagen) **foco posterior**. Del mismo modo,  $f$  y  $f'$  se llaman también **distancias focales anterior y posterior**, respectivamente.

**Resumiendo:** El **foco posterior**  $F'$  es la imagen de un punto objeto, situado sobre el eje, infinitamente lejano, y el **foco anterior**  $F$  es el punto objeto que da una imagen, sobre el eje, infinitamente lejana.

Debido al principio de la inversión del camino de la luz (ver N° 15 del § 1), podemos también considerar el espacio del medio II como espacio objeto

y el espacio del medio I como espacio imagen. Entonces resulta: La imagen de un punto  $P'$  situado en el infinito, se halla en el foco anterior  $F$ . Quedan así los focos definidos como **puntos imágenes de puntos objetos situados en el infinito.**

### 3. Discusión de la fórmula dióptrica fundamental. Lugares que ocupa la imagen $P'$ cuando el punto objeto $P$ recorre el eje.

**A.** Supondremos primero que el punto  $P$  recorre la parte del eje situado en el medio I (ver figs. 1 y 2), a la izquierda del vértice  $V$  ( $v$  positiva).

Caso 1). Cuando el objeto axial  $P$  se halla en el infinito del espacio objeto ( $v = \infty$ ), la correspondiente distancia de "imagen"  $v'$

$$\left( v' = \frac{f'}{1 - \frac{f}{v}} \right) \text{ llega a ser igual a } f'. \text{ Es decir, la imagen } P' \text{ de un}$$

punto  $P$  situado en el infinito del espacio objeto, se forma en el foco  $F'$  posterior del espacio imagen.

Caso 2). Cuando el punto objeto  $P$  se mueve desde el infinito hasta el foco anterior  $F$  (ver fig. 2), la correspondiente imagen  $P'$  se desplazará desde el foco posterior  $F'$  hasta el infinito del espacio imagen.

Caso 3). Cuando el punto objeto  $P$  se mueve desde el foco anterior  $F$  hasta el vértice  $V$ , la correspondiente imagen  $P'$  se viene acercando rápidamente desde el infinito del espacio objeto (medio I) hacia dicho vértice  $V$ , punto en que objeto e imagen coinciden.

**B.** El punto  $P$  recorre la parte del eje situado en el medio II, a la derecha del vértice  $V$ . Conviene entonces que en la fórmula  $\frac{f}{v} + \frac{f'}{v'} = 1$

consideremos  $v'$  como distancia (positiva) de objeto, y la  $v = \frac{f}{1 - \frac{f'}{v'}}$  será

entonces la distancia de imagen buscada. Si para diferentes valores  $v'$  calculamos así las correspondientes cantidades  $v$ , llegaremos a los siguientes resultados:

Caso 1). Cuando el objeto  $P$  se mueve desde el vértice  $V$  hasta el centro  $C$  de la superficie refringente, la correspondiente imagen  $P'$  también recorre el segmento  $VC$ .

Caso 2). Cuando el punto  $P$  se traslada desde  $C$  hasta  $F'$ , la correspondiente imagen  $P'$  se mueve desde  $C$  hasta el infinito.

4. Signo del radio de curvatura  $r$  y signos de las cantidades  $v$  y  $v'$  y de las distancias focales  $f$  y  $f'$

El radio de curvatura  $r$  es tomado con signo **positivo** cuando la superficie refringente (en que incide el rayo) es **convexa** hacia el lado del espacio objeto (ver fig. 1) y **negativo** cuando es **cóncava** hacia dicho espacio (ver figura 8).

Las cantidades  $v$  y  $v'$  son contadas desde el vértice  $V$  hacia ambos lados, es decir,  $v$  es **positiva** hacia la **izquierda**, y  $v'$  **positiva** hacia la **derecha** de  $V$ . (En figs. 1 y 2, ambas son positivas, en fig. 8,  $v$  es positiva y  $v'$  negativa). Resulta entonces, análogamente para las distancias focales:  $f$  **positiva** cuando  $F$  se halla a la **izquierda** de  $V$ , y  $f'$  **positiva** cuando  $F'$  se halla a la **derecha** de  $V$ .

Como los índices de refracción  $n$  y  $n'$  son siempre positivos, se ve de las (11) y (12) que las distancias focales  $f$  y  $f'$  tendrán siempre el mismo signo, ambas **positivas** para superficies refringentes **convexas** (hacia el espacio objeto) y ambas **negativas** para superficies **cóncavas**. (En figs. 1 y 2 ambas son positivas, en fig. 8 ambas son negativas).

5. Cociente y diferencia de las distancias focales.

El cociente  $\frac{f}{f'}$  de las distancias focales nos da:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\frac{nr}{n' - n}}{\frac{nr}{n' - n}}$$

(16)

$$\boxed{\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}}$$

Es decir: La distancia focal  $f$  del primer medio es a la distancia focal  $f'$  del segundo como el índice de refracción  $n$  del primer medio es al índice de refracción  $n'$  del segundo. Podemos decir también que hay **proporcionalidad** entre las distancias focales  $f$  y  $f'$  y los respectivos índices de refracción  $n$  y  $n'$ .

Para la **diferencia** ( $f' - f$ ) de las distancias focales  $f$  y  $f'$ , tenemos:

$$f' - f = \frac{n'r}{n' - n} - \frac{nr}{n' - n} = r$$

(17)

$$\boxed{f' - f = r}$$

6. Puntos conjugados, rayos conjugados.

Cada punto objeto  $P$  y su imagen  $P'$  se dice que son **puntos conjugados**. Podemos decir entonces que  $F'$  es el punto conjugado de un punto objeto  $P$  situado en el infinito, y que  $F$  es el punto conjugado de un punto imagen  $P'$  situado en el infinito. Así el punto  $P'$  (fig. 1) es punto conjugado de  $P$ .

**Rayos conjugados.** El rayo  $AP'$  (fig. 1) es conjugado del rayo  $PA$ . A un rayo incidente paralelo al eje óptico corresponde un rayo (refractado) conjugado que pasa por el foco posterior  $F'$ , y a un rayo paralelo al eje, en el espacio imagen, corresponde un rayo conjugado que pasa por el foco anterior  $F$ .

### 7. Convergencia de una superficie refringente.

Combinando las ecuaciones (9), (11) y (12), tendremos:

$$(18) \quad \frac{n}{v} + \frac{n'}{v'} = \frac{n' - n}{r} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

Las cantidades  $\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$  se llaman **convergencia, poder convergente o potencia de una superficie refringente**. Se las designa por la letra  $D$ .

### 8. Otra forma de la ecuación dióptrica fundamental para rayos paraxiales.

Introduciendo en lugar de las cantidades  $v$  y  $v'$  las llamadas **abscisas focales**, según se indica en figura 2, a saber:

$x = FP$  = distancia desde el foco anterior  $F$  hasta el punto objeto  $P$  (**positiva hacia la izquierda**),

$x' = F'P'$  = distancia desde el foco posterior  $F'$  hasta el punto imagen  $P'$  (**positiva hacia la derecha**),

tendremos:

$$v = f + x \qquad v' = f' + x'$$

Luego, introduciendo estas cantidades en la (13), tendremos:

$$\frac{f}{f + x} + \frac{f'}{f' + x'} = 1$$

de la cual se obtiene la ecuación dióptrica fundamental en esta otra forma:

$$(19) \quad \boxed{x \cdot x' = f \cdot f'}$$

ecuación conocida por el nombre de **fórmula de Newton**, la que establece una importante relación entre las distancias a los focos de puntos axiales conjugados.

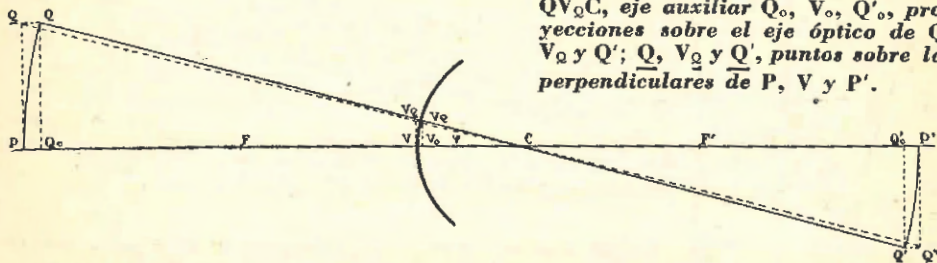
### 9. Formación de la imagen de un punto y de un pequeño objeto lineal mediante rayos paraxiales con ayuda del centro de la superficie esférica refringente.

Si suponemos conocida la imagen  $P'$  (fig. 3) de un punto axial  $P$ , sobre el eje óptico  $PC$ , es fácil de hallar la imagen  $Q'$  de otro punto  $Q$ , situado en la proximidad de  $P$ , pero algo fuera del eje y a igual distancia de  $C$  que el punto  $P$ . Para este punto  $Q$  podemos considerar la línea  $QC$  como eje, de modo que la imagen de  $Q$  se hallará sobre esta línea en un punto  $Q'$ , que tiene de  $C$  igual distancia que  $P'$ .

Sean  $Q_0$ ,  $V_0$  y  $Q'$  las proyecciones de los puntos  $Q$ ,  $V_Q$  y  $Q'$  sobre el eje óptico  $PC$ . Tales proyecciones son próximas a los puntos axiales  $P$ ,  $V$  y  $P'$ , respectivamente, tanto más cuanto más pequeño sea el ángulo  $\varphi$ , en el centro  $C$ . Para  $\varphi = 1^\circ$  por ejemplo, tendríamos:

$$\begin{aligned} PQ_0 &= CP - CP \cos \varphi = CP(1 - \cos \varphi) \\ &= 0,00015 \times CP \end{aligned}$$

Fig. 3. — Formación de la imagen  $Q'$  del punto  $Q$  con ayuda del centro  $C$  de la superficie esférica. Se designa por:  $PVC$ , eje óptico;  $QV_QC$ , eje auxiliar  $Q_0$ ,  $V_0$ ,  $Q'$ , proyecciones sobre el eje óptico de  $Q$ ,  $V_Q$  y  $Q'$ ;  $Q_0$ ,  $V_Q$  y  $Q'$ , puntos sobre las perpendiculares de  $P$ ,  $V$  y  $P'$ .



Hemos llamado  $V_Q$  a la intersección de la línea  $QC$  con la superficie refringente. Designaremos, además, por  $Q_0$ ,  $V_Q$  y  $Q'$ , respectivamente, a los tres puntos situados sobre perpendiculares levantadas en  $P$ ,  $V$  y  $P'$  y que tienen del eje las distancias respectivamente iguales a  $Q_0Q$ ,  $V_QV$  y  $Q'Q'$ . Para valores muy pequeños de  $\varphi$  podemos admitir entonces que los puntos  $Q$  y  $Q_0$ ,  $V_Q$  y  $V_0$ ,  $Q'$  y  $Q'$  coinciden.

Siendo  $QC$  el eje de un haz de rayos que salen del punto  $Q$ , podemos admitir que el punto  $Q'$ , imagen de  $Q$ , se halla en la intersección de la línea  $QC$  con la normal  $P'Q'$ .

Del mismo modo podemos decir: A cualquier otro punto o grupo de puntos o pequeño objeto lineal situados sobre un plano perpendicular al eje  $PC$ , corresponderán imágenes situadas sobre otro plano perpendicular al eje, en el espacio imagen. Cada imagen de elemento lineal aparecerá, vista desde el centro  $C$ , bajo el mismo ángulo visual  $\varphi$  que el elemento lineal objeto. De una pequeña figura plana situada en el plano normal  $PQ$  se formará entonces en el plano normal  $P'Q'$  del espacio imagen una imagen semejante, real o virtual, derecha o invertida, según la situación de la figura objeto respecto a la superficie refringente.

Como se trata aquí siempre de rayos paraxiales, pueden considerarse coincidentes los puntos  $V_Q$  y  $V_0$ , y el elemento de arco  $V_QV$  puede ser substituído por el elemento plano  $V_QV_0$  perpendicular al eje.

### 10. Planos conjugados, Planos focales.

Haciendo pasar por un punto  $P$  y por su imagen  $P'$  planos perpendiculares al eje óptico, se dice que tales planos son **conjugados**. A una figura plana en el plano perpendicular al eje trazado por  $P$ , corresponderá entonces una imagen semejante en el plano perpendicular al eje trazado por  $P'$ .

**Planos focales.** Un interés especial merecen los planos perpendiculares al eje en los focos  $F$  y  $F'$ , los llamados planos focales (fig. 4).

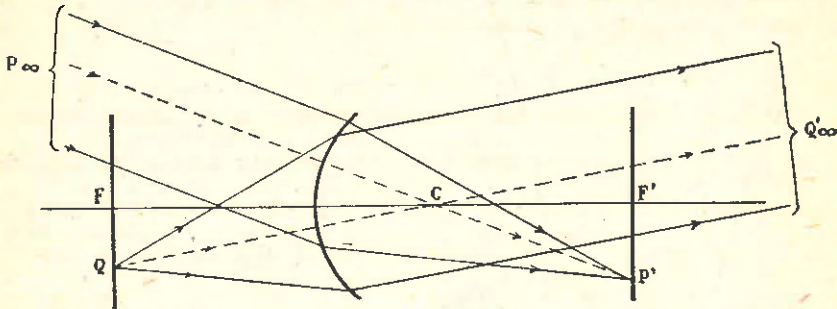


Fig. 4. — Planos focales. Se ilustra el principio de que los planos focales contienen los puntos conjugados de puntos infinitamente lejanos.

Un objeto  $P$  infinitamente lejano (que designaremos por  $P_\infty$ ) tendrá su imagen  $P'$  en el plano focal de  $F'$ , mientras que la imagen  $Q'$  de un punto objeto  $Q$  situado en el plano focal de  $F$ , se halla en el infinito del espacio imagen, la que designaremos por  $Q'_\infty$ .

Los rayos de un haz de luz que suponemos emanan del objeto  $P_\infty$ , se reunirán entonces, después de refractarse, en el punto  $P'$  del plano focal  $F'$ , y un haz de rayos que salen del punto  $Q$  del plano focal de  $F$ , se propagan, después de refractarse, en el espacio imagen, como cilindro de rayos con imagen  $Q'$  infinitamente lejana. Los planos focales, en consecuencia, son aquellos que contienen los puntos conjugados de los puntos infinitamente lejanos del espacio objeto y espacio imagen, respectivamente.

### 11. Construcción de la imagen de un punto situado fuera del eje óptico con la ayuda de los focos de la superficie refringente.

Sea  $Q$  (fig. 5) el punto objeto del cual se trata de hallar la imagen  $Q'$ . Esta imagen quedará determinada por los siguientes rayos:

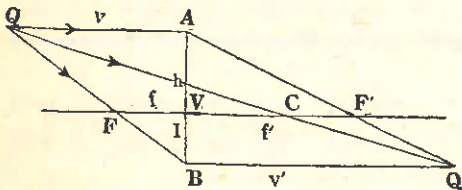


Fig. 5. — Formación de la imagen  $Q'$  del punto  $Q$  con ayuda de los focos de la superficie refringente.

1) El rayo  $QA$  paralelo al eje, que incide en  $A$  sobre la superficie refringente y que, después de refractarse, pasa por el foco posterior  $F'$ .

2) El rayo  $QB$  que pasa por el foco anterior  $F$ , incidiendo en  $B$  sobre la superficie refringente y continúa, después de refractarse, paralelo al eje.

3) El rayo  $QC$  que pasa por el centro  $C$  de la esfera y continúa sin refractarse.

Dos de estos rayos son suficientes para determinar el punto imagen  $Q'$ .

Demostremos ahora que la construcción indicada en la figura 5 está de acuerdo con la ecuación dióptrica fundamental (13).

De los triángulos semejantes **BFV** y **BQA**, por un lado, y los triángulos semejantes **AF'V** y **AQ'B**, por el otro, tenemos:

$$(20) \quad l:(h+l) = f:v$$

$$(21) \quad h:(h+l) = f':v'$$

Transformando convenientemente esta ecuación, tendremos:

$$(22) \quad l:(h+l) = (v'-f'):v'$$

la que combinada con la (20) nos da:

$$f:v = (v'-f'):v'$$

o sea:

$$\frac{f}{v} = \frac{v'-f'}{v'}$$

$$= 1 - \frac{f'}{v'}$$

$$(23) \quad \frac{f}{v} + \frac{f'}{v'} = 1$$

idéntica con la (13).

**12. Determinación de la magnitud  $\Delta y'$  de la imagen  $P'Q'$  del objeto  $PQ = \Delta y$  perpendicular al eje óptico. Signos de  $\Delta y$  y  $\Delta y'$ .**

A un segmento situado en el espacio objeto, perpendicular al eje, corresponderá en el espacio imagen siempre una imagen también perpendicular a dicho eje.

Bajaremos desde el punto **Q** (del cual se supone construída la imagen **Q'** según explicación del número anterior) la perpendicular **QP** (fig. 6), y desde **Q'** la perpendicular **Q'P'** sobre el eje óptico. Será entonces **Q'P' =  $\Delta y'$**  la imagen de **QP =  $\Delta y$**  buscada.

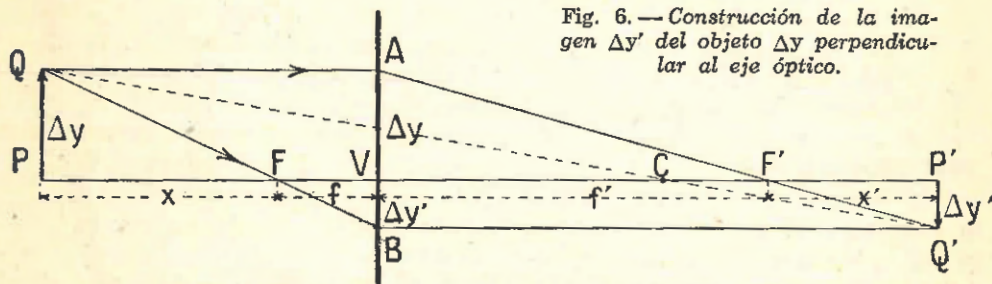


Fig. 6. — Construcción de la imagen  $\Delta y'$  del objeto  $\Delta y$  perpendicular al eje óptico.

Signos de  $\Delta y$  y  $\Delta y'$ . Las dimensiones de las magnitudes  $\Delta y$  y  $\Delta y'$ , perpendiculares al eje óptico, se cuentan a partir del eje:  $\Delta y$  positiva hacia arriba y  $\Delta y'$  positiva hacia abajo, siendo, por ende, en figura 6 ambas magnitudes de signo positivo.

13. Construcción directa de la imagen  $P'$  del punto axial  $P$ , con ayuda de dos pares de rayos conjugados.

Trácese por el punto axial  $P$  el rayo  $PA$  (fig. 7) bajo un ángulo de incli-

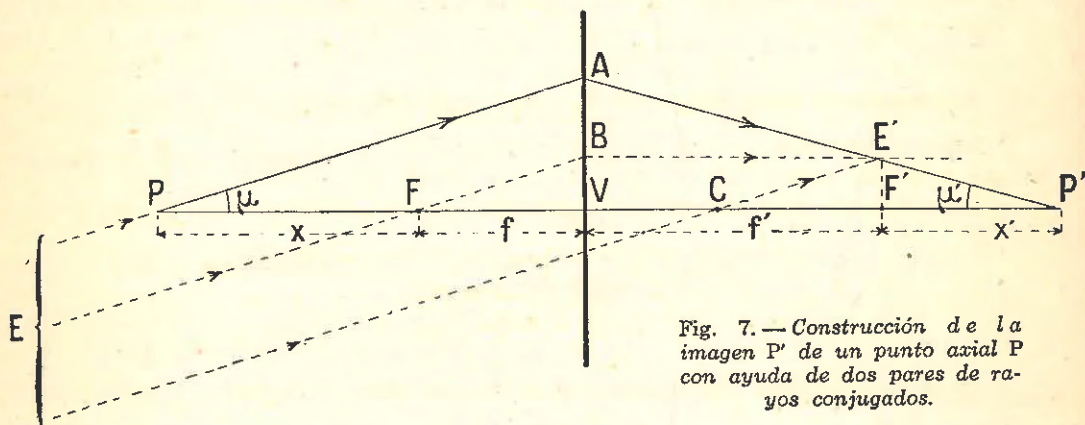


Fig. 7. — Construcción de la imagen  $P'$  de un punto axial  $P$  con ayuda de dos pares de rayos conjugados.

nación  $\mu$  cualquiera. Por el foco anterior  $F$  se hará pasar el rayo  $FB$  paralelo al rayo  $PA$ . Después de refractarse el rayo  $FB$  en  $B$ , seguirá paralelo al eje óptico. Los rayos paralelos  $PA$  y  $FB$  pueden considerarse como procedentes de un punto objeto  $E$  infinitamente lejano. Por consiguiente, después de refractarse, se unirán en un punto  $E'$  situado en el plano focal de  $F'$ . Tal punto  $E'$  queda así determinado como intersección del rayo que pasa por  $B$  y que es paralelo al eje con la perpendicular levantada en  $F'$ . Por este punto  $E'$  debe pasar también el rayo  $AP'$  conjugado de  $PA$ , estando así determinado también el punto imagen  $P'$  buscado.

14. Ángulos conjugados  $\mu$  y  $\mu'$ ; sus signos.

Los ángulos de inclinación  $\mu$  y  $\mu'$  (ver figs. 1, 7 y 8) que los rayos conjugados  $PA$  y  $P'A$  forman, respectivamente, con el eje óptico, los llamaremos dos ángulos conjugados.

Signos de  $\mu$  y  $\mu'$ . Ambos se cuentan a partir del eje:  $\mu$  (en el espacio objeto) lo tomamos como positivo cuando en el corte considerado (figs. 1, 7 y 8) ese ángulo tiene sentido contrario a la marcha de las agujas del reloj, y  $\mu'$  (en el es-

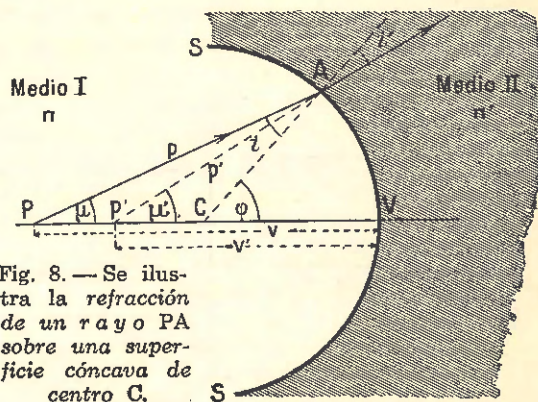


Fig. 8. — Se ilustra la refracción de un rayo  $PA$  sobre una superficie cóncava de centro  $C$ .

El radio  $CA$  es negativo, la "distancia de imagen"  $VP'$  así como el ángulo de inclinación  $\mu$  son negativos. Son negativas también las distancias focales (no indicadas en la figura)  $f$  (a la derecha de  $V$ ) y  $f'$  (a la izquierda del vértice  $V$ ).

pacio imagen) lo tomamos como positivo cuando en el corte considerado ese ángulo tiene el sentido de la marcha de las agujas del reloj, siendo, por ende, en figuras 1 y 7 ambos positivos y, en figura 8,  $\mu$  positivo y  $\mu'$  negativo.

Vemos en la figura 8 que los espacios objeto e imagen pueden superponerse parcialmente.

### 15. Aumento, definición; distintas clases de aumentos.

Llámanse aumento a la relación que existe entre las dimensiones de la imagen a las del objeto.

Consideramos tres clases de aumentos, los que llamaremos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , siendo:

- $\alpha$  el aumento axial, longitudinal o de profundidad,
- $\beta$  " " lateral o transversal y
- $\gamma$  " " angular o razón de convergencia.

### 16. Aumento axial, longitudinal o de profundidad; su signo.

Si la distancia  $x$  de un punto P al foco aumenta en una pequeña cantidad  $\Delta x$ , llegando así a ser  $x + \Delta x$ , la posición del correspondiente punto imagen P' variará también en una pequeña cantidad  $\Delta x'$ , con lo cual su abscisa será:  $x' + \Delta x'$ .

A la razón  $\frac{\Delta x'}{\Delta x}$  se llama el aumento axial, longitudinal o de profundidad  $\alpha$ .

Introduciendo los valores de estas nuevas abscisas  $x + \Delta x$  y  $x' + \Delta x'$  en la ecuación (19), se tendrá:

$$(x + \Delta x)(x' + \Delta x') = f \cdot f'$$

de donde:

$$x \cdot \Delta x' + x' \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x' = 0$$

$$\Delta x'(x + \Delta x) = -x' \cdot \Delta x$$

Luego:

$$\text{aumento axial } \alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = - \frac{x'}{x + \Delta x}$$

Cuando la cantidad  $\Delta x$  es pequeña en comparación con  $x$ , puede ser despreciada, obteniéndose entonces:

$$\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = - \frac{x'}{x}$$

y teniendo en cuenta la (19):

(24)

$$\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = - \frac{f \cdot f'}{x^2}$$

**Signo de  $a$ .** Como  $x$  y  $x'$  tienen siempre el mismo signo, resulta ser  $a$  siempre de signo **negativo**, es decir, si  $\Delta x$  expresa un incremento de la abscisa  $x$ , la abscisa  $x'$  disminuirá en la cantidad  $\Delta x'$ .

### 17. Aumento lateral o transversal $\beta$ .

De los triángulos semejantes **FPQ** y **FVB** (fig. 6), por un lado, y los triángulos semejantes **F'P'Q'** y **F'VA**, por el otro, sacamos directamente para el aumento lateral o transversal  $\beta$ :

$$(25) \quad \beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

**Signo de  $\beta$ .** Siendo, como dijimos en el N° 12,  $\Delta y$  positiva hacia arriba y  $\Delta y'$  positiva hacia abajo, resulta ser  $\beta$  de signo **positivo** cuando el segmento objeto y el segmento imagen están dirigidos en **sentido contrario** ("invertidos"), y **negativo** cuando están dirigidos en el mismo sentido ("derechos").

### 18. Aumento angular o razón de convergencia $\gamma$ ; su signo.

Llámase **aumento angular** o **razón de convergencia**  $\gamma$  (\*) a la relación  $\text{tg } \mu' / \text{tg } \mu$  entre las tangentes de los ángulos de inclinación  $\mu'$  y  $\mu$  de dos rayos conjugados **P'A** y **PA**.

De los dos triángulos **PAV** y **P'AV** (fig. 7) se deduce:

$$\frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{\frac{AV}{f' + x'}}{\frac{AV}{f + x}} = \frac{f + x}{f' + x'} = \frac{v}{v'}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (19), resulta:

$$\frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{f + \frac{f \cdot f'}{x'}}{f' + x'} = \frac{f \cdot x' + f \cdot f'}{x' \cdot (f' + x')} = \frac{f}{x'}$$

Análogamente, de la misma (19):

$$\frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{\frac{x \cdot x'}{f'} + x}{f' + x'} = \frac{x}{f'}$$

Luego:

$$(26) \quad \gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{v}{v'} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'}$$

(\*) "Convergencia" significa aquí *inclinación* de los rayos con respecto al eje óptico difiriendo, por tanto, un poco del significado que se dió al término en la definición del N° 7.

**Signo del aumento  $\gamma$ .** El aumento angular  $\gamma$  es de signo **positivo** cuando el objeto y la imagen se hallan a distintos lados de la superficie refringente (ver figs. 1 y 7), y **negativo** cuando ambos se encuentran a un mismo lado (ver fig. 8).

**19. Ecuación de Lagrange - Helmholtz.**

El producto de las fórmulas (25) y (26) nos da:

$$(27) \quad \beta \cdot \gamma = \frac{\Delta y'}{\Delta y} \cdot \frac{\text{tg} \mu'}{\text{tg} \mu} = \frac{f}{x} \cdot \frac{x}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \text{ [Según ecuación (16)]}$$

Es decir: **En planos conjugados es constante el producto de los aumentos lateral y angular.**

O también:

$$(28) \quad \boxed{n \cdot \Delta y \cdot \text{tg} \mu = n' \cdot \Delta y' \cdot \text{tg} \mu'}$$

que es la llamada **ecuación de Lagrange - Helmholtz**, la que expresa la invariabilidad de las magnitudes  $(n \cdot \Delta y \cdot \text{tg} \mu)$  antes y después de la refracción, la que existe aún en el caso de tratarse de varias refracciones sucesivas en distintas superficies refringentes.

Llamando todavía **divergencia óptica** al producto  $(n \cdot \text{tg} \mu)$ , podemos expresar la ecuación (28) así: **El producto de la divergencia óptica por la magnitud de objeto  $\Delta y$  perpendicular al eje, se conserva constante en todas las refracciones.**

Es de observar que para rayos paraxiales las magnitudes  $\Delta y$  y  $\Delta y'$  así como los ángulos de inclinación  $\mu$  y  $\mu'$  son muy pequeños, pudiendo por ello substituirse  $\text{tg} \mu$  y  $\text{tg} \mu'$  por  $\mu$  y  $\mu'$ , respectivamente.

**20. Otra fórmula para la magnitud de la imagen  $\Delta y'$ .**

Sea un ojo colocado en el foco **F** del espacio objeto, mirando al objeto  $\Delta y$  (fig. 9), situado a la distancia  $x$ ; lo ve bajo el ángulo  $\omega$ .

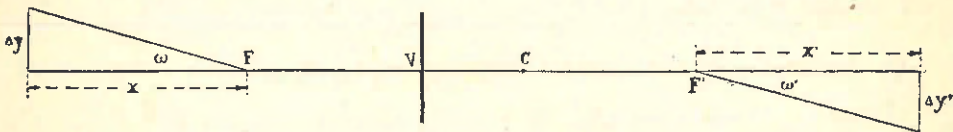


Fig. 9. — Se ilustran las fórmulas:  $\Delta y' = f \cdot \text{tg} \omega$  y  $\Delta y = f' \cdot \text{tg} \omega'$

Tendremos entonces:  $\Delta y = x \cdot \text{tg} \omega$

y siendo según (25):  $x = \frac{f \cdot \Delta y}{\Delta y'}$

resulta:  $\Delta y = \frac{f \cdot \Delta y}{\Delta y'} \cdot \text{tg} \omega$

Luego:

(29)

$$\Delta y' = f \cdot \operatorname{tg} \omega$$

Es decir: La magnitud de la imagen es igual al producto de la distancia focal anterior por la tangente del ángulo visual  $\omega$  bajo el cual el objeto aparece visto desde el foco  $F$ .

Análogamente, si la imagen  $\Delta y'$ , situada a la distancia  $x'$ , aparece en  $F'$  bajo el ángulo  $\omega'$ , tendremos:

$$\Delta y' = x' \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

y siendo según (25):

$$x' = \frac{f' \cdot \Delta y'}{\Delta y}$$

resulta:

$$\Delta y' = \frac{f' \cdot \Delta y'}{\Delta y} \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

Luego:

(30)

$$\Delta y = f' \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

Es decir: La magnitud del objeto es igual al producto de la distancia focal posterior por la tangente del ángulo visual  $\omega'$  bajo el cual aparece la imagen vista desde el foco  $F'$ .

Si el objeto  $\Delta y$  es infinitamente lejano y al mismo tiempo infinitamente grande, la correspondiente imagen  $\Delta y'$  se formará en el plano focal posterior. Admitamos que sea de altura  $h'$ .

Entonces la fórmula (29) nos da:

(31)

$$h' = f \cdot \operatorname{tg} \omega$$

de donde se saca:

(32)

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} \omega}$$

La ecuación (32) da lugar a otra interpretación y una nueva definición de las distancias focales.

### 21. Definición de las distancias focales según Gauss.

Cuando la imagen  $\Delta y'$  (fig. 9) se aleja hacia el infinito y al mismo tiempo se hace infinitamente grande, el objeto, de magnitud finita  $\Delta y$ , llega a situarse en el plano focal de  $F$ . Entonces el rayo  $QA$  (fig. 10) paralelo al eje óptico y que pasa por el extremo superior  $E$  del objeto  $FE$ , incide sobre el lado convexo de la superficie refringente a la altura  $h = \Delta y$ , pasando luego, después de refractarse, con ángulo de inclinación  $\omega'$  por el foco posterior. La imagen del punto  $E$  se halla entonces en el infinito sobre el rayo  $AF'$  o sobre la paralela  $EC$  a dicho rayo (indicada con línea punteada). La imagen de  $FE$  es infinitamente grande, pero aparece bajo un ángulo de inclinación  $\omega'$  bien determinado.

**Definición.** Se designa por  $\text{tg } \omega'$  a la magnitud angular, llamada también magnitud aparente de la imagen de **FE**. Es de observar que, dada la gran distancia de la imagen, ésta aparecerá con la misma magnitud angular en cualquier otro punto finito del eje óptico.

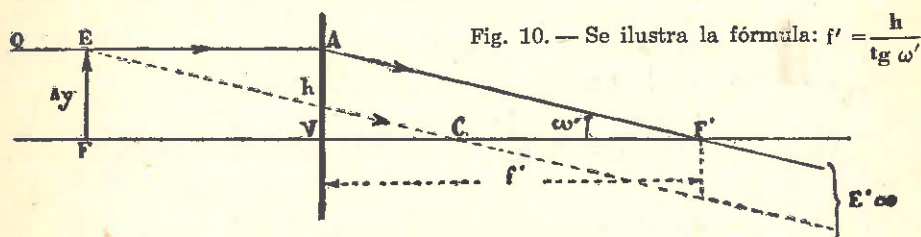


Fig. 10. — Se ilustra la fórmula:  $f' = \frac{h}{\text{tg } \omega'}$

Del triángulo **F'VA** (fig. 10) sacamos para la distancia focal posterior  $f'$ :

$$(33) \quad \boxed{f' = \frac{h}{\text{tg } \omega'}}$$

Es decir: La distancia focal posterior es igual a la relación entre la altura  $h$  de un objeto perpendicular al eje óptico, situado en el plano focal anterior, y la magnitud  $\text{tg } \omega'$  de su imagen en el infinito.

Consideramos ahora el caso de un objeto infinitamente lejano y al mismo tiempo infinitamente grande que emite rayos sobre el lado convexo de una superficie refringente (Fig. 11). Se produce en el plano focal posterior la ima-

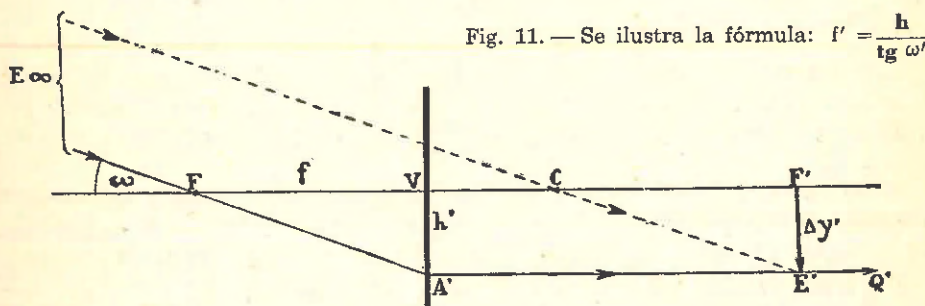


Fig. 11. — Se ilustra la fórmula:  $f = \frac{h}{\text{tg } \omega}$

gen **F'E'** =  $\Delta y'$ . Tendremos, en este caso, del triángulo **FVA'** para la distancia focal anterior  $f$ :

$$(34) \quad \boxed{f = -\frac{h'}{\text{tg } \omega}}$$

Es decir: La distancia focal anterior es igual a la relación entre la altura  $h'$  de la imagen perpendicular al eje óptico, situada en el plano focal posterior, y la magnitud  $\text{tg } \omega$  de su objeto en el infinito.

## 22. Resumen de fórmulas.

(35) {	Ecuación dióptrica fundamental:	$\frac{f}{v} + \frac{f'}{v'} = 1$	Ecuación (13)
	Ecuación de NEWTON:	$x \cdot x' = f \cdot f'$	„ (19)
	Aumento axial, longitudinal o de profundidad $\alpha$ :		
		$\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x} = -\frac{f \cdot f'}{x^2}$	„ (24)
	Aumento lateral o transversal $\beta$ :		
		$\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$	„ (25)
	Aumento angular o razón de convergencia $\gamma$ :		
	$\gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{v}{v'} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'}$	„ (26)	
	Definiciones de las distancias focales $f$ y $f'$ :		
	$f = -\frac{h'}{\text{tg } \omega} \qquad f' = \frac{h}{\text{tg } \omega}$	„(33)y(34)	
	Relación entre las distancias focales $f$ y $f'$ :		
	$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$	„ (16)	

## 23. Observación de recapitulación.

Las 7 fórmulas (35) se refieren a la refracción de rayos paraxiales sobre una sola superficie esférica. Ellas expresan de un modo completamente general las leyes según las cuales se modifica el camino de los rayos al incidir sobre dicha superficie refringente.

Veremos más adelante que dichas fórmulas son válidas para cualquier sistema de “superficies esféricas centradas” (concepto que se explicará en el próximo párrafo), en el que cada rayo puede sufrir varias refracciones. Tales fórmulas fueron reunidas por E. ABBE como síntesis de la teoría de GAUSS, la que, cual sólido armazón, sostiene el hermoso edificio de la óptica geométrica.

## § 3.

## Refracción de rayos paraxiales en varias superficies esféricas centradas

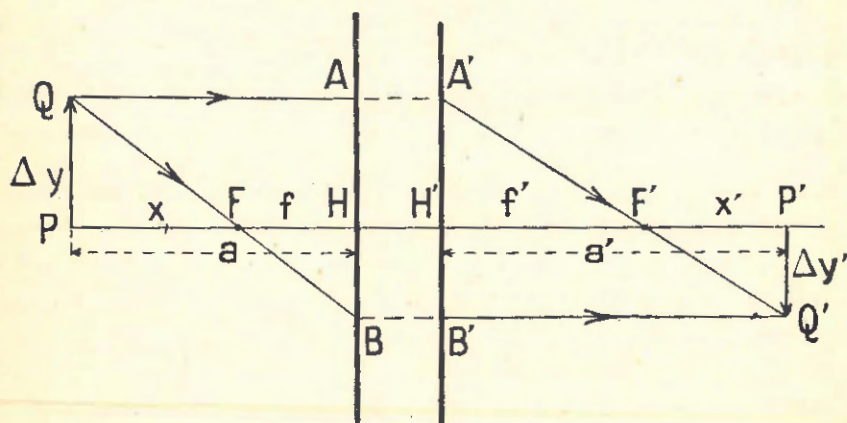


Figura sintética.

## 1. Sistema de superficies esféricas centradas. Definición.

El caso de la refracción de rayos paraxiales sobre una sola superficie esférica que hemos estudiado en el párrafo anterior, raras veces se presenta en la práctica. Generalmente se trata de lentes formadas por dos superficies esféricas refringentes o sistemas de lentes.

Nos limitaremos a considerar aquí sistemas de superficies esféricas centradas, que son aquellas cuyos centros de curvatura se hallan todos sobre una misma recta llamada eje óptico del sistema.

## 2. Aplicación práctica del concepto de la representación colineal.

Podríamos ahora investigar la representación óptica producida por varias superficies refringentes siguiendo el camino de los rayos a través de las

mismas. Es lo que se hizo en los comienzos de la óptica geométrica. Cualquiera que sea la clase y número de las superficies refringentes, para cada una rigen las leyes (35) del párrafo 2, las que por eso podrían aplicarse sucesivamente para cada una de ellas. La imagen (real o virtual) de un objeto formada por la primera superficie pasaría a ser objeto para la segunda superficie, la imagen formada por ésta sería el objeto para la tercera, etc., y la imagen final la que correspondería al objeto original.

Pero, más tarde se reconoció que las leyes de la representación óptica pueden obtenerse más rápidamente partiendo simplemente de las **homografías de Gauss** o del concepto de la representación colineal (ver N° 32, § 1). Para tal representación se exige, como hemos visto, que a cada recta del espacio objeto portadora de ciertos puntos objetos corresponda una recta imagen, y una sola, sobre la cual se hallan las correspondientes imágenes de puntos, y que a cada punto objeto en que se cortan varias rectas corresponda un punto imagen, y uno solo, en que se cortan las correspondientes rectas imágenes. Y como un plano está determinado por dos rectas que se cortan, resulta que también a los puntos objetos situados sobre un plano corresponden puntos imágenes situados sobre un plano imagen.

De estos fundamentos fluyen finalmente todas las leyes básicas de la representación óptica. Es decir, en base a las dimensiones y características de los elementos de un sistema óptico, podremos encontrar las leyes que nos permiten **calcular** (o **construir**) directamente la imagen final correspondiente a un determinado objeto.

### 3. Focos y planos focales de un sistema centrado; su introducción.

Todo sistema centrado debe tener dos focos: Rayos paraxiales paralelos al eje en el espacio objeto, después de refractarse en las distintas superficies del sistema, se reunirán en un determinado punto sobre el eje, llamado **foco posterior** o **foco imagen** del sistema. Lo designamos por **F'**. Análogamente: Un haz de rayos paraxiales paralelos al eje que sale de la última superficie del sistema, debe proceder de un punto objeto situado sobre el eje, llamado **foco anterior** o **foco objeto** del sistema. Lo designamos por **F**.

Los planos perpendiculares al eje y que pasan por los focos **F** y **F'** se llaman **planos focales del sistema**, análogamente a lo ilustrado en figura 4 del párrafo 2 para una sola superficie refringente.

Es de observar que el foco o plano focal "anterior" no necesita hallarse siempre **delante** ni el foco o plano focal "posterior" siempre **detrás** de todas las superficies refringentes.

4. Haces de rayos levemente inclinados con respecto al eje óptico.

El hecho de que rayos paralelos al eje en el espacio objeto se reúnen en un determinado punto del espacio imagen y que rayos paralelos al eje en el espacio imagen proceden de un determinado punto del espacio objeto, nos lleva a considerar haces de rayos paralelos que en el espacio objeto forman un pequeño ángulo con el eje, y notamos que tales rayos se reúnen también en otro punto imagen situado en el plano focal posterior, y que rayos paralelos en el espacio imagen, levemente inclinados con respecto al eje, proceden cada vez de un punto objeto del plano focal anterior. En consecuencia, los planos focales contienen los puntos correspondientes, imágenes u objetos, de todos los puntos infinitamente lejanos del espacio objeto y del espacio imagen, respectivamente (ver N° 10 de § 2).

5. Sistema de dos superficies esféricas centradas. Definiciones. Intervalo óptico.

Sean los medios I, II y III (fig. 1) separados por las superficies 1 y 2. Sean  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  los respectivos índices de refracción de los 3 medios.

En la figura 1 hemos representado las secciones meridianas de las superficies refringentes como rectas. En realidad, esas superficies son curvas, generalmente esféricas, pero de una curvatura poco pronunciada. Debido a esta última circunstancia, y de acuerdo a lo expuesto en el N° 9 del párrafo 2, conviene substituir en forma sistemática, en las figuras que siguen, las secciones curvas por trozos de rectas.

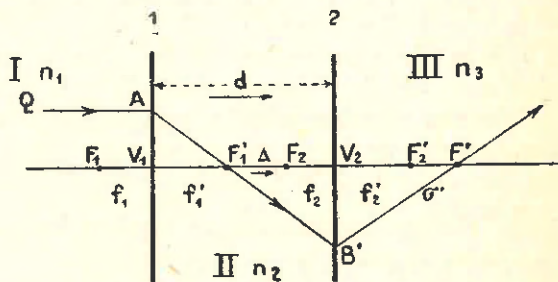


Fig. 1. — Se ilustran diversas definiciones, especialmente el concepto del foco posterior  $F'$  del sistema centrado.

Designamos, además, por  $d$  a la distancia que separa los dos vértices  $V_1$  y  $V_2$  de las superficies refringentes. El segmento  $d = V_1V_2$  se cuenta positivo hacia la derecha según lo indica la flecha.

Sea  $r_1$  el radio de curvatura de la superficie 1, y  $r_2$  el de la superficie 2;  $f_1$  y  $f_1'$ , respectivamente, las distancias focales anterior y posterior de la superficie 1;  $f_2$  y  $f_2'$  las de la superficie 2, las que pueden determinarse fácilmente (con su signo aplicando las fórmulas (11) y (12) del párrafo anterior, en base a los correspondientes radios de curvatura e índices de refracción del siguiente modo:

$$(1) \quad f_1 = \frac{n_1 \cdot r_1}{n_2 - n_1} \quad f_1' = \frac{n_2 \cdot r_1}{n_2 - n_1}$$

$$(2) \quad f_2 = \frac{r_2 \cdot r_2}{n_3 - n_2} \quad f_2' = \frac{n_3 \cdot r_2}{n_3 - n_2}$$

Recordamos que, de acuerdo a lo dicho en el N° 4 del párrafo anterior, atribuímos el signo positivo a cada radio de curvatura ( $r_1$ ,  $r_2$ ) cuando la superficie refringente que le corresponde es convexa hacia la izquierda, o sea hacia el espacio objeto, siendo negativo en caso contrario.

Mediante dichas distancias focales queda determinada la posición de los respectivos focos  $F_1$  y  $F_1'$ ,  $F_2$  y  $F_2'$  y de los correspondientes planos focales.

**Intervalo óptico  $\Delta$ .** Llámase **intervalo óptico** a la distancia entre el foco posterior  $F_1'$  de la superficie 1 y el foco anterior  $F_2$  de la superficie 2, la que consideramos positiva cuando  $F_2$  se encuentra a la derecha de  $F_1'$  y negativa en el caso contrario. El intervalo óptico lo designamos por  $\Delta$ .

$$(3) \quad F_1' F_2 = \Delta = d - f_1' - f_2$$

### 6. Concepto de los focos $F$ y $F'$ de un sistema centrado de dos superficies refringentes.

La posición de los focos  $F$  y  $F'$  de un sistema centrado se obtiene por la construcción indicada en figuras 1 y 2.

Un rayo luminoso  $QA$  (fig. 1) paralelo al eje óptico en el espacio objeto, después de refractarse en la superficie 1, debe pasar por el foco posterior  $F_1'$  de la misma. Suponemos que la prolongación de dicho rayo refractado cae en  $B'$  sobre la superficie 2, en la que se refracta una segunda vez. Tal rayo refractado, imagen del rayo incidente  $QA$ , corta al eje óptico en un determinado punto, el que, según la definición del foco, es el **foco posterior  $F'$**  del sistema centrado.

Análogamente: Un rayo  $A'Q'$  (fig. 2) paralelo al eje en el espacio imagen, antes de refractarse en la superficie 2, debe haber pasado por el foco anterior  $F_2$  de la misma, y antes de cruzar la superficie 1 debe haber pasado por el **foco anterior  $F$**  del sistema centrado, siendo así el rayo incidente  $FB$  rayo objeto para el rayo refractado  $A'Q'$ .

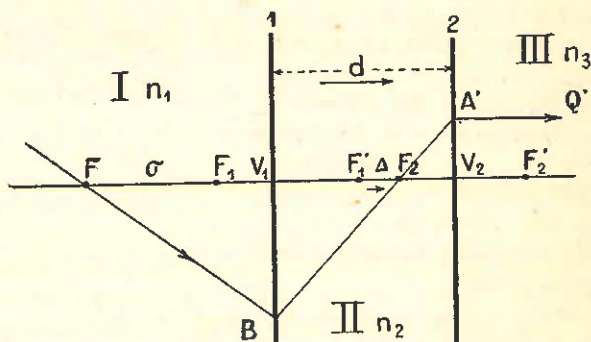


Fig. 2. — Se ilustran diversas definiciones, especialmente el concepto del foco anterior  $F$  de un sistema centrado.

### 7. Distancias interfocales $\sigma$ y $\sigma'$ de un sistema centrado.

De acuerdo a las consideraciones precedentes el foco imagen  $F'$  (fig. 1) es conjugado de  $F_1'$  con respecto a la superficie 2, y el foco objeto  $F$  (fig. 2) es conjugado de  $F_2$  con respecto a la superficie 1.

Aplicaremos la ecuación fundamental de NEWTON:

$$(4) \quad x \cdot x' = f \cdot f'$$

para estos dos pares de puntos conjugados. A este efecto introducimos los segmentos  $\sigma$  y  $\sigma'$ , los que definimos en la forma siguiente:

Ponemos (fig. 2):

$$(5) \quad \sigma = F_1F$$

o sea la distancia que media entre el foco  $F_1$  (foco anterior de la superficie 1) y el foco anterior  $F$  del sistema centrado, la que se cuenta **positiva desde  $F_1$  hacia la izquierda**; y para  $\sigma'$  (ver fig. 1):

$$(6) \quad \sigma' = F_2'F'$$

o sea la distancia que media entre el foco  $F_2'$  (foco posterior de la superficie 2) y el foco posterior  $F'$  del sistema centrado, la que se cuenta **positiva desde  $F_2'$  hacia la derecha**.

Podemos entonces substituir en la (4) para la superficie 1 según figura 2:

$$(7) \quad \begin{array}{l} x \text{ por } \sigma, x' \text{ por } \Delta, \\ f \text{ por } f_1, f' \text{ por } f_1' \end{array}$$

con lo que resulta:

$$(8) \quad \Delta \cdot \sigma = f_1 \cdot f_1'$$

De donde:

$$(9) \quad \sigma = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta}$$

Análogamente se obtiene para la superficie 2 según figura 1:

$$(10) \quad \Delta \cdot \sigma' = f_2 \cdot f_2'$$

De donde:

$$(11) \quad \sigma' = \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}$$

Queda por tanto fijada por medio de las distancias interfocales  $\sigma$  y  $\sigma'$  de un modo inequívoco la posición de los focos  $F$  y  $F'$  del sistema centrado.

Para las distancias  $V_1F$  y  $V_2F'$  resulta entonces:

$$(12) \quad V_1F = f_1 + \sigma$$

$$(13) \quad V_2F' = f_2' + \sigma'$$

### 8. Definición de las distancias focales de un sistema centrado según Gauss. Puntos y planos principales.

Valémonos nuevamente de la figura 1, en la que dejamos a un lado algunos de los elementos ya explicados, agregando, en cambio, los nuevos que necesitamos (ver fig. 3).

Prolongamos el rayo incidente  $QA$  paralelo al eje a la altura  $V_1A = h$  hasta su intersección en  $A'$  con el correspondiente rayo imagen refractado en  $B'$  que pasa por el foco posterior  $F'$  del sistema centrado.

Según (33) y figura 10 del párrafo 2 tenemos para la distancia focal posterior  $f'$  de una superficie refringente (con las mismas designaciones):

$$(14) \quad f' = \frac{h}{\operatorname{tg} \omega'}$$

Conviene mantener la misma ecuación (14) para la definición de la distancia focal posterior del sistema de dos superficies centradas.

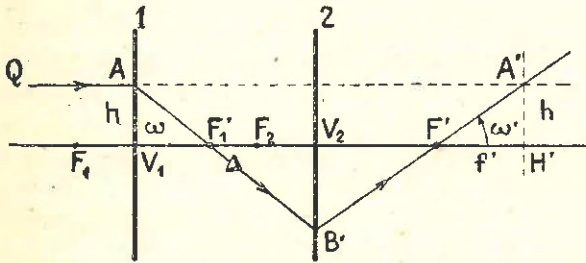


Fig. 3. — Ilústrase la definición del punto principal posterior  $H'$ .

Designando por  $H'$  (fig. 3) el pie de la perpendicular bajada desde  $A'$  y por  $\omega'$  el ángulo  $H'F'A'$ , tendremos para la distancia focal posterior  $f'$ :

$$(15) \quad f' = H'F' = \frac{h}{\operatorname{tg} \omega'}$$

o sea, la relación de la altura  $h$  a la cual un rayo paralelo al eje incide en el espacio objeto, a la tangente del ángulo de inclinación  $\omega'$  que el rayo conjugado forma en el espacio imagen con el eje.

Como en figura 3 el ángulo  $\omega'$  es negativo, resulta para la distancia focal  $H'F' = f'$  también un valor negativo.

Al punto  $H'$  desde el cual contamos la distancia focal posterior, lo llamamos en adelante, según GAUSS, **punto principal posterior** del sistema, y al plano que pasa por  $H'$  y es perpendicular al eje, lo llamamos **plano principal posterior** del sistema.

Como se ve, la **distancia focal posterior  $f'$**  se cuenta, a partir del punto principal  $H'$  **positiva hacia la derecha**, siendo ella **negativa** en fig. 3, porque  $F'$  se encuentra a la izquierda de  $H'$ .

Existen otros sistemas centrados de superficies refringentes en los cuales  $F'$  se encuentra a la derecha de  $H'$ , resultando en esos casos positiva la distancia focal posterior  $f'$ .

Análogamente para la **distancia focal anterior** de un sistema centrado: Consideremos el rayo  $A'Q'$  (figura 4) paralelo al eje y que sale del sistema a la altura  $h'$ . (Como la magnitud  $h'$  se presenta como una imagen situada arriba

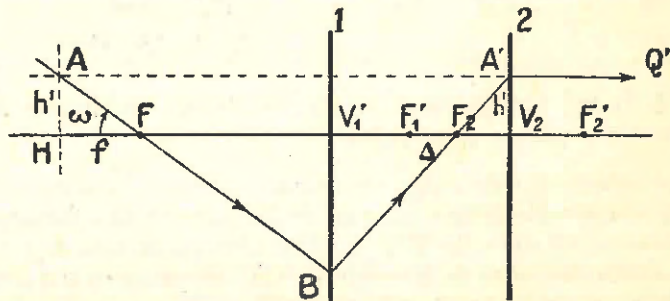


Fig. 4. — Ilústrase la definición del punto principal anterior  $H$ .

del eje, tenemos que atribuirle un valor negativo de acuerdo con las definiciones de signos de  $\Delta y$  y  $\Delta y'$  dadas en el N° 12 del párrafo anterior).

Prolonguemos el rayo  $A'Q'$  (fig. 4) hacia atrás hasta su punto de intersección  $A$  con el rayo  $FB$ , que es el rayo objeto de  $A'Q'$ .

Designando por  $H$  el pie de la perpendicular bajada desde  $A$  sobre el eje y por  $\omega$  el ángulo  $HFA$  (el que, como se ve, tiene en la figura 4 un valor negativo de acuerdo con la definición de signos dada en el N° 14 del párrafo anterior).

Tendremos entonces:

$$(16) \quad HF = f = -\frac{h'}{\operatorname{tg} \omega}$$

o sea la relación de la altura  $-h'$ , a la cual un rayo sale paralelo al eje en el espacio imagen, a la tangente del ángulo de inclinación  $\omega$  que el rayo conjugado forma en el espacio objeto con el eje.

Según (34) y figura 11 de § 2 tenemos para una superficie refringente simple:

$$(17) \quad f = -\frac{h'}{\operatorname{tg} \omega}$$

Manteniendo la misma ecuación para la definición de la distancia focal de un sistema de superficies centradas, resulta de la (16) que la magnitud  $HF$  debe considerarse como esa distancia focal anterior, la que, de acuerdo con la figura 4 y también con la ecuación (16) resulta tener un valor negativo. (Tanto  $h'$  como  $\omega$  son negativos.)

El punto  $H$  lo llamamos **punto principal anterior** del sistema, y el plano que pasa por  $H$  y que es perpendicular al eje, lo llamamos **plano principal anterior**.

La **distancia focal anterior**  $f$  se cuenta, a partir del punto principal  $H$ , **positiva hacia la izquierda**, siendo ella negativa en figura 4, porque  $F$  se encuentra a la derecha de  $H$ .

### 9. Demostración de que $A'$ (fig. 3) es imagen de $A$ (fig. 4).

Consideremos ahora un punto  $A$  (fig. 3) situado sobre el plano principal anterior y construyamos la imagen de dicho punto. Utilizando para eso un rayo  $QA$  paralelo al eje a la altura  $h$ , notamos según figura 3, que este rayo, después de refractarse dos veces, pasará por el punto  $A'$ , situado sobre el plano principal posterior y a la misma altura  $h$  sobre el eje. Para darnos cuenta de que  $A'$  no sólo se encuentra sobre el rayo conjugado de  $QA$ , sino que es precisamente la imagen del punto  $A$ , consideramos todavía un segundo rayo que sale de  $A$ . Al fin buscado se presta el rayo  $AF$  que pasa por el foco anterior del sistema y que, según figura 4, después de refractarse dos veces, sale paralelo al eje y a la altura  $h$ , de modo que pasa por  $A'$ , con lo cual queda demostrado que  $A'$  es realmente la imagen de  $A$  y que  $HA' = -h$  es imagen de  $AH = h$ , de igual magnitud que  $h$  en valor absoluto. ( $A$  y  $A'$  se encuentran así el uno frente al otro y cada uno situado en uno de los planos principales del sistema.) Ver también figura 5, resumen de las figuras 3 y 4.

### 10. Otros casos posibles en la situación relativa de los puntos principales de un sistema centrado.

En las figuras 3 y 4 hemos considerado una posición de las superficies refringentes 1 y 2 tal que los focos  $F$  y  $F'$  resulten situados dentro del segmento  $HH'$ , situación que se ilustra en figura 5.

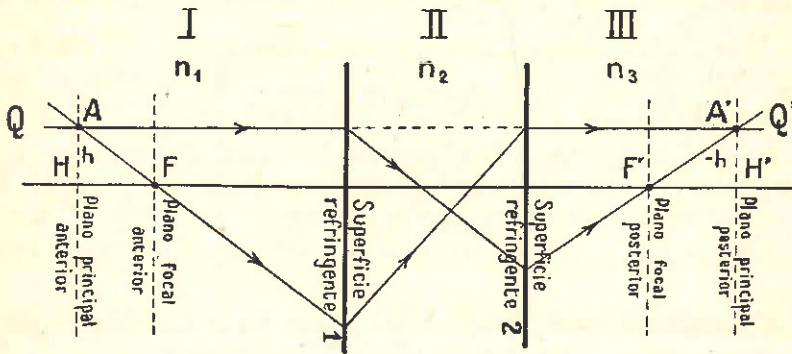


Fig. 5. — Resumen de las figuras 3 y 4.

Con achicar la distancia  $d$  (ver figs. 1 y 2) de las superficies refringentes se puede llegar a un sistema centrado, en el cual los puntos principales se hallan situados dentro del segmento  $FF'$  y hasta dentro de las dos superficies refringentes. Este es el caso que hemos supuesto en la figura 6. En el párrafo siguiente deduciremos las correspondientes fórmulas.

### 11. Breve recapitulación sobre los planos focales y los planos principales.

En un sistema centrado (del mismo modo como lo demostramos en fig. 4 del párrafo 2 para una sola superficie) corresponde al plano focal en el espacio objeto el plano imagen en el infinito y al plano focal en el espacio imagen el plano objeto en el infinito.

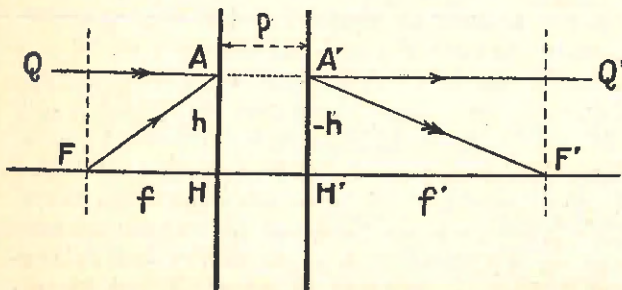


Fig. 6. — Sistema centrado en el que los puntos principales se hallan dentro de las dos superficies refringentes.

A un rayo  $QA$  (figuras 5 y 6) paralelo al eje y con la distancia  $h$  del mismo corresponde en el espacio imagen un rayo  $F'A'$  que pasa por el foco  $F'$ , y a un rayo  $AF$  en el espacio objeto un rayo  $A'Q'$  que corre paralelamente al eje a la distancia  $h'$ .  $A$  y  $A'$  son los puntos de inflexión en los

cuales se cortan cada vez un rayo paralelo al eje (saliente o entrante) con su correspondiente rayo del otro espacio. El plano imagen por  $H'$  (plano principal posterior) reproduce los objetos contenidos en el plano por  $H$  (plano principal anterior) con igual tamaño e igual dirección, o sea con aumento igual a  $-1$ , según la definición de signos dada en el N° 12 de § 2.

### 12. Aumento lateral de un sistema centrado. Ecuación de Newton.

De los dos pares de triángulos semejantes  $FPQ$  (fig. 7) y  $FHB$  por un lado, y  $F'P'Q'$  y  $F'H'A'$  por el otro, sacamos directamente para el aumento lateral o transversal  $\beta$  de un sistema centrado:

(18)

$$\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

de acuerdo con la ecuación (25) de § 2 deducida para una sola superficie refringente.

De la (18) sacamos para las distancias axiales  $x$  y  $x'$  (abscisas focales, ver N° 8 de § 2) del par de puntos conjugados  $P$  y  $P'$  a los focos  $F$  y  $F'$  respectivamente:

(19)

$$x \cdot x' = f \cdot f' \quad (\text{ecuación de NEWTON})$$

de acuerdo con la (19) encontrada en § 2 para una sola superficie.

Si en la (19) ponemos  $x = -f$ , es decir, si tomamos el punto  $H$  (figuras 5 y 6) como punto objeto, resulta:

(20)

$$\begin{aligned} x' &= -f' \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

### 13. Construcciones. Observaciones generales.

Veremos que un sistema de superficies centradas queda ópticamente determinado (lo que quiere decir que el camino de un rayo cualquiera queda determinado) cuando se conocen dos pares de planos característicos perpendiculares al eje óptico, a saber:

1° Los dos planos focales que contienen cada uno los puntos conjugados de los respectivos puntos situados en el infinito.

2° Los planos principales caracterizados en los números que anteceden.

Conociendo de un sistema óptico la posición de tales planos, pueden construirse (o calcularse) de todo punto o rayo objeto el correspondiente punto o rayo imagen, sin que se necesite conocer otros elementos del sistema.

### 14. Construcción de la imagen $\Delta y'$ de un objeto $\Delta y$ perpendicular al eje.

Cuando se trata de encontrar la imagen  $\Delta y' = P'Q'$  (fig. 7) de un objeto  $\Delta y = PQ$  perpendicular al eje, se trazarán el rayo  $QA$  paralelo al eje y el

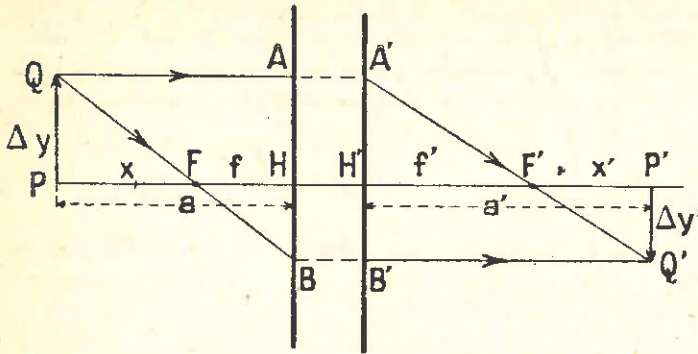


Fig. 7. — Construcción de la imagen  $\Delta y'$  de un objeto  $\Delta y$  perpendicular al eje, situado fuera de la distancia focal  $f$ , con ayuda de los planos principales de un sistema centrado.

rayo **QB** que pasa por el foco anterior **F** del sistema. Los puntos **A** y **B** en que los rayos **QA** y **QB** encuentran al plano principal anterior, deben tener su imagen a igual altura y con igual posición sobre el plano principal posterior, es decir, en **A'** y **B'**.

El rayo **QA**, después de refractarse, debe pasar por **F'**, y el rayo **QB** debe salir paralelo al eje. El punto de encuentro de ambos rayos refractados es la imagen **Q'** del punto objeto **Q**.

**15. Construcción de la imagen  $A'P'$  (fig. 8) del rayo objeto  $PA$  inclinado con respecto al eje o construcción de la imagen  $P'$  de un punto axial  $P$ .**

La construcción del rayo **A'P'** (fig. 8) queda ilustrada por esta figura cuya explicación es análoga a la de fig. 7 del N° 13 de párrafo 2.

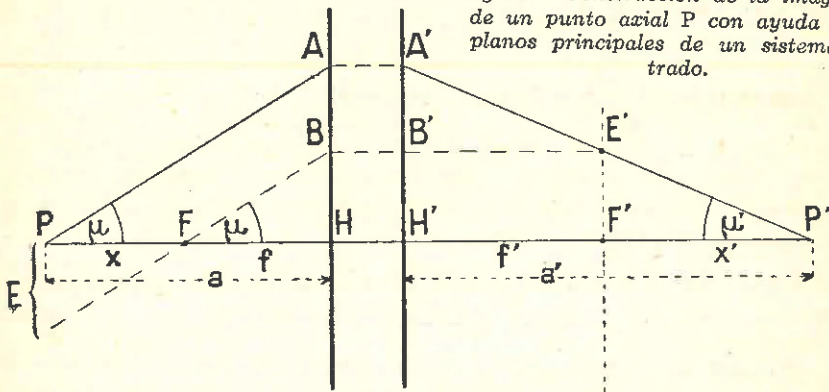


Fig. 8. — Construcción de la imagen  $P'$  de un punto axial  $P$  con ayuda de los planos principales de un sistema centrado.

**16. Longitudes principales  $a$  y  $a'$ . "Primera ecuación dióptrica fundamental".**

La posición del punto imagen **P'** (fig. 7) puede obtenerse análogamente mediante la fórmula de **NEWTON**:

$$(21) \quad x \cdot x' = f \cdot f'$$

Introduciremos para ello, en reemplazo de las abscisas focales  $x$  y  $x'$ , las llamadas **longitudes principales**,  $a$  y  $a'$ , definidas así (figs. 7 y 8):

$HP = a = f + x$  = distancia del objeto desde  $H$  hacia la izquierda, y  
 $H'P' = a' = f' + x'$  = " de la imagen desde  $H'$  hacia la derecha.

Tendremos entonces para las abscisas focales  $x$  y  $x'$ :

$$(22) \quad x = a - f \qquad x' = a' - f'$$

Luego, substituyendo estos valores en la (21), resulta:

$$(23) \quad \boxed{(a - f)(a' - f') = f \cdot f'}$$

De donde:

$$(24) \quad aa' - af - a'f' + f \cdot f' = f \cdot f'$$

o sea, dividiendo por  $aa'$ :

$$(25) \quad \boxed{\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1}$$

La ecuación (23) o (25), llamada "**primera ecuación dióptrica fundamental**" nos sirve para el cálculo de la situación referida a  $H'$  de la imagen de un punto objeto cuando se conozca la posición de éste con respecto al punto principal  $H$ , e inversamente.

### 17. Aumento angular $\gamma$ de un sistema centrado.

Considerando en la figura 8 los triángulos semejantes  $FHB$  y  $P'F'E'$ , obtendremos para el aumento angular  $\gamma$ :

$$(26) \quad \gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{F'E'}{x'} \cdot \frac{HB}{f} = \frac{f}{x'}$$

y, por deducirse de la (18):

$$\frac{f}{x'} = \frac{x}{f'}$$

también:

$$(27) \quad \gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'}$$

de acuerdo con la (26) de § 2.

Además, tenemos de la misma figura:

$$(28) \quad \gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{H'A'}{a'} \cdot \frac{HA}{a} = \frac{a}{a'}$$

con lo que tenemos finalmente:

$$(29) \quad \boxed{\gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'} = \frac{a}{a'}}$$

## 18. Puntos nodales de Listing. Puntos cardinales de un sistema centrado.

Así como el valor especial:  $\beta = -1$  del aumento lateral nos llevaba a objetos e imágenes situados en los planos principales, de acuerdo a la (20) de este párrafo, veremos que también el valor especial:  $\gamma = -1$  del aumento angular nos conduce al concepto de otro par de **puntos característicos N y N'**, los que fueron especialmente estudiados por LISTING.

En la figura 8 el aumento angular  $\gamma = \text{tg } \mu' / \text{tg } \mu$  es positivo, porque tanto  $\mu'$  como  $\mu$  son ángulos positivos, de acuerdo a lo establecido sobre los signos en el N° 14 de § 2. También son posibles posiciones de **P y P'** tales que  $\mu$  es negativo cuando  $\mu'$  es positivo, lo que da lugar a un aumento angular negativo. Si además, en un caso particular,  $\mu$  y  $\mu'$  son iguales en valor absoluto, (lo que quiere decir que el rayo saliente es paralelo al rayo incidente), obtendremos un aumento angular  $\gamma = -1$ .

Suponemos que en la sección representada en figura 9 el rayo incidente **QA** (emitido por **Q**), sea el especial cuya imagen **A'Q'** le es paralelo, y para el cual, en consecuencia, se verifica la ecuación  $\gamma = -1$ . Llamamos entonces **puntos nodales** al punto axial **N**, al cual está dirigido el rayo objeto **QA**, y **N'**, por el que pasa el rayo imagen **A'Q'**.

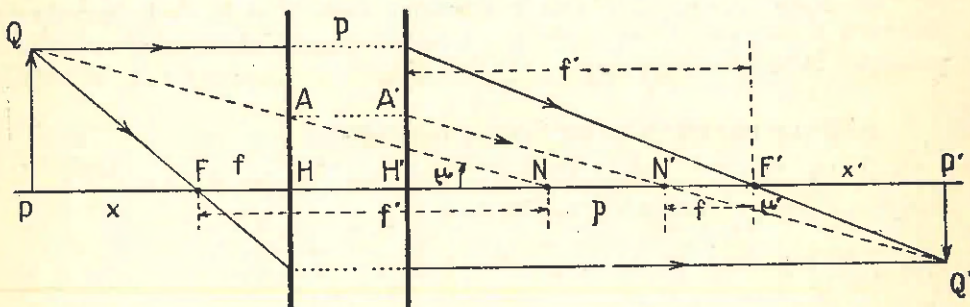


Fig. 9. — Se ilustra la posición relativa de los tres pares de puntos cardinales: F y F', H y H' (C. F. GAUSS), N y N' (J. B. LISTING).

Para estos rayos **QA** y **A'Q'** la fórmula (26) nos da:

$$(30) \quad \gamma = \frac{\text{tg } \mu'}{\text{tg } \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f} = -1$$

de donde sacamos:

$$(31) \quad x = -f'; \quad x' = -f$$

Es decir, las abscisas focales  $x$  y  $x'$  de los puntos nodales son cada vez iguales a las distancias focales conjugadas.

Para hallar, por ejemplo, la posición del punto nodal **N** (fig. 9), en el espacio objeto, se trasladará la distancia focal  $f'$  a partir de **F** en el sentido negativo (hacia la derecha). Se procederá de un modo análogo para el punto nodal **N'**.

**Puntos cardinales de un sistema centrado.** Los focos  $F, F'$ , los puntos principales  $H, H'$  y los nodales  $N, N'$  son llamados puntos cardinales del sistema. La figura 8 indica la situación relativa de los mismos.

Cuando en figura 9 se trasladan ambas distancias focales desde  $F$  hacia la derecha, nos dará  $f$  el punto principal  $H$ , y  $f'$  el nodal  $N$  del espacio objeto. Trasladando, en cambio, a partir de  $F'$  ambas distancias focales hacia la izquierda, nos dará  $f'$  el punto principal  $H'$ , y  $f$  el nodal  $N'$  del espacio imagen.

Del paralelograma  $AA'NN'$  de figura 9 se desprende que la distancia  $NN'$  de los puntos nodales es igual a la que separa los puntos principales. La designamos por  $p$ :

$$(32) \quad NN' = HH' = p$$

Para el caso de ser:

$$f = f'$$

(veremos que este caso ocurre en las llamadas lentes), los puntos nodales coinciden con los puntos principales.

**19. Cálculo de las distancias focales de un sistema centrado. "Segunda ecuación dióptrica fundamental".**

Las distancias focales de un sistema centrado pueden calcularse en base a las distancias focales de las superficies refringente que intervienen y de la distancia que las separa.

Representátese en figura 10 el recorrido de un rayo  $QA$  que incide paralelamente al eje y que pasa por el foco posterior  $F'$  del sistema de dos superficies centradas.

De acuerdo a la definición de la distancia focal posterior  $f'$  de un sistema (según GAUSS) dada por la ecuación (15), tenemos:

$$(33) \quad f' = \frac{h}{\text{tg } \omega'}$$

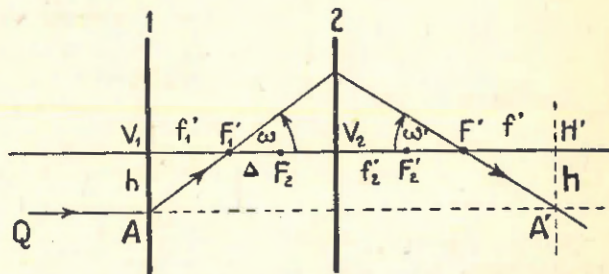


Fig. 10. — Se ilustra el cálculo de la distancia focal posterior  $f'$  de un sistema centrado considerando la imagen  $F'$  de  $F_1$  formada por la superficie 2.

Trátase ahora de obtener los valores de  $h$  y  $\text{tg } \omega'$  correspondientes al sistema. Del triángulo  $F_1V_1A$  (fig. 10) deducimos para  $V_1A = h$ :

$$(34) \quad h = -f_1' \cdot \text{tg } \omega.$$

Como en la figura  $h$  es negativa según la definición de signos dada en N° 12 de § 2, y en vista de que  $\omega$ , como ángulo que un rayo incidente sobre

la superficie 2 forma con el eje, es una cantidad positiva según el N° 14 de § 2, resulta que el ángulo  $\mathbf{V}_1\mathbf{F}'\mathbf{A}$ , siendo el ángulo que un rayo saliente de la superficie 1 forma con el eje, es  $-\omega$ , y como

$$f_1' = \frac{h}{\operatorname{tg}(-\omega)} \quad [\text{véase, (33) de § 2}]$$

resulta la (34) con el signo negativo que en ella figura.

Por otra parte tenemos según (26) de § 2 para una sola superficie refringente.

$$(35) \quad \frac{\operatorname{tg} \mu'}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{x}{f'}$$

Aplicando esta ecuación a la superficie 2 y el punto objeto  $\mathbf{F}'$ , debemos reemplazar en la (35):

$$\begin{aligned} \mu' &\text{ por } \omega', \mu \text{ por } \omega \\ x &\text{ por } \Delta \quad f' \text{ por } f_2', \end{aligned}$$

con lo que tendremos:

$$(36) \quad \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\Delta}{f_2'}$$

Luego:

$$(37) \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{\Delta}{f_2'} \cdot \operatorname{tg} \omega$$

Introduciendo ahora en la (33) los valores de  $h$  y  $\operatorname{tg} \omega'$  dados por las (34) y (37), obtendremos:

$$f' = - \frac{f_1' \cdot \operatorname{tg} \omega}{\frac{\Delta}{f_2'} \cdot \operatorname{tg} \omega}$$

Resulta entonces:

$$(38) \quad \boxed{f' = - \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}}$$

Análogamente para la **distancia focal anterior**  $f$  del sistema centrado.

De acuerdo con la definición de la distancia focal anterior  $f$  de un sistema centrado (según GAUSS) dada por la ecuación (16), tenemos:

$$(39) \quad f = - \frac{h'}{\operatorname{tg} \omega}$$

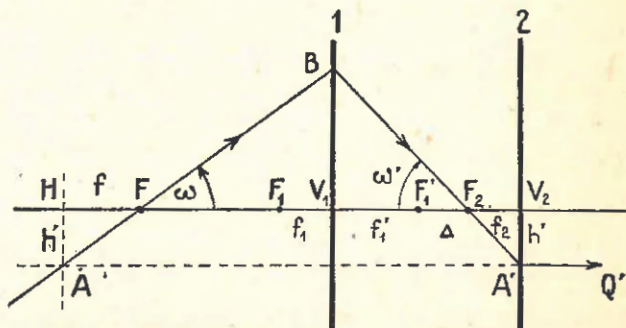


Fig. 11. — Se ilustra el cálculo de la distancia focal anterior  $f$  del sistema centrado, considerando el objeto  $F$  correspondiente a la imagen  $F_2$  formada por la superficie 1.

Del triángulo  $F_2V_2A'$  (fig. 11) sacamos para  $V_2A' = h'$ :

$$(40) \quad h' = f_2 \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

Como en la figura  $h'$  es positivo, según la definición de signos dada en el N° 12 del § 2, y en vista de que  $\omega'$ , como ángulo que un rayo saliente de la superficie 1 forma con el eje, es también una cantidad positiva según N° 14 de § 2, resulta que el ángulo  $V_2F_2A'$ , siendo ángulo que un rayo incidente sobre la superficie 2 forma con el eje, es  $-\omega'$ , y como

$$f_2 = - \frac{h'}{\operatorname{tg}(-\omega')}, \quad [\text{véase (34) de § 2}]$$

resulta la (40) con su signo.

Por otra parte tenemos para una sola superficie refringente según (26) de § 2:

$$(41) \quad \frac{\operatorname{tg} \mu'}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{f}{x'}$$

Aplicando esta ecuación a la superficie 1 y el punto objeto  $F$ , debemos reemplazar en la (41):

$$\begin{array}{ll} \mu' \text{ por } \omega', & \mu \text{ por } \omega, \\ f \text{ por } f_1, & x \text{ por } \Delta, \end{array}$$

con lo que tendremos:

$$(42) \quad \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{f_1}{\Delta}$$

Luego:

$$(43) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \operatorname{tg} \omega'$$

Introduciendo en la (39) los valores de  $h'$  y  $\operatorname{tg} \omega$  dados por las (40) y (43), obtendremos:

$$f = - \frac{f_2 \cdot \operatorname{tg} \omega'}{\frac{\Delta \cdot \operatorname{tg} \omega'}{f_1}}$$

Resulta entonces:

$$(44) \quad \boxed{f = - \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}}$$

Con tener en cuenta la relación (3) para el intervalo óptico  $\Delta$ :

$$\Delta = F_1' F_2 = d - f_1' - f_2.$$

resulta en lugar de la (38):

$$(45) \quad \boxed{f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2 - d}}$$

y en lugar de la (44):

$$(46) \quad f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' + f_2' - d}$$

Cuando se verifica  $n_1 = n_3$  (caso de una lente rodeada por un solo medio), resulta de las ecuaciones (1) y (2) la igualdad de los productos  $f_1 \cdot f_2$  y  $f_1' \cdot f_2'$ , es decir:

$$(47) \quad f_1 \cdot f_2 = f_1' \cdot f_2'$$

con lo que obtendremos:

$$(48) \quad f = f' = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' + f_2' - d}$$

relación que es la llamada "segunda ecuación dióptrica fundamental".

**20. Sistemas convergentes o sistemas positivos y sistemas divergentes o sistemas negativos.**

La ecuación (16) de § 2:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

es válida para una superficie refringente simple. Demostraremos que ella se verifica también para un sistema centrado de dos superficies refringentes.

En efecto, de las (45) y (46) se obtiene:

$$(49) \quad \frac{f}{f'} = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' \cdot f_2'}$$

Introduciendo en esta ecuación los valores de  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_1'$  y  $f_2'$  dados por las (1) y (2), resulta:

$$(50) \quad \frac{f}{f'} = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot r_1 \cdot r_2}{n_2 \cdot n_3 \cdot r_1 \cdot r_2} = \frac{n_1}{n_3}$$

Es decir: Las distancias focales anterior y posterior son entre sí como los índices de refracción de los medios de los espacios objeto e imagen (no teniendo influencia para esta relación el índice de refracción del medio comprendido entre las dos superficies refringentes).

Como  $n_1$  y  $n_3$  son cantidades siempre positivas, las dos distancias focales tendrán siempre el mismo signo.

Resultan entonces dos tipos de sistemas refringentes, o sea los de distancias focales  $f$  y  $f'$  positivas y los de distancias focales negativas. Los primeros los llamaremos **sistemas convergentes** (figs. 6, 7, 8, 9 y 12), los segundos **sistemas divergentes** (figs. 3, 4, 5, 10, 11 y 13). La conveniencia de tales denominaciones se aclara con ayuda de las figuras 12 y 13.

Un haz de rayos que incide en un sistema convergente paralelamente al eje, sale convergente del plano principal posterior del mismo (fig. 12).

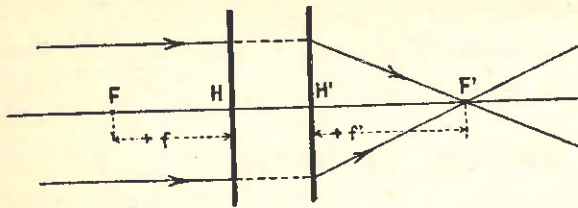


Fig. 12. — Sistema convergente,  $f$  y  $f'$  positivas.

Un haz de rayos que incide en un sistema divergente paralelamente al eje, sale divergente del plano principal posterior del mismo.

**21. Resumen de nuevas fórmulas fundamentales.**

A las 7 relaciones básicas (35) de § 2, deducidas para una sola superficie, cuya aplicación general a un sistema centrado acabamos de comprobar en el presente párrafo, agregamos todavía las siguientes 9 fórmulas fundamentales:

“Primera ecuación dióptrica fundamental” referida a los puntos **H** y **H'** de un sistema centrado:

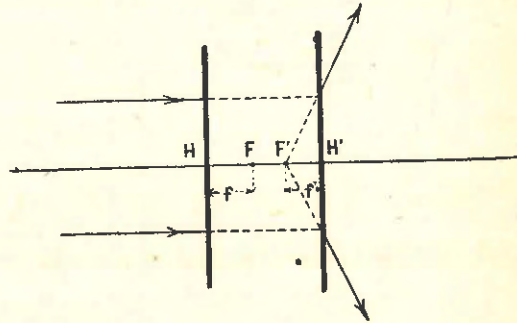


Fig. 13. — Sistema divergente,  $f$  y  $f'$  negativas.

$$(a-f)(a'-f') = f \cdot f' \quad \text{Ver ecuación (23)}$$

o sea:  $\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad \text{'' '' (25)}$

**Aumento lateral o transversal  $\beta$ :**

$$\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} \quad \text{'' '' (18)}$$

**Aumento angular o razón de convergencia  $\gamma$ :**

$$\gamma = \frac{\text{tg} \mu'}{\text{tg} \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'} = \frac{a}{a'} \quad \text{'' '' (29)}$$

**Ecuación de Newton:**

$$x \cdot x' = f \cdot f' \quad \text{'' '' (19)}$$

**Distancias focales  $f$  y  $f'$  de un sistema centrado:**

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1' + f_2 - d} \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2' - d} \quad \text{'' '' (45)}$$

y (46)

**Razón de las distancias focales de un sistema centrado:**

$$\frac{f}{f'} = \frac{n_1}{n_3} \quad \text{Ver ecuación (50)}$$

“Segunda ecuación dióptrica fundamental” para el caso  $n_1 = n_3$ :

$$f = f' = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad \text{Ver ecuación (48)}$$

## § 4.

## Lentes y sistemas de lentes

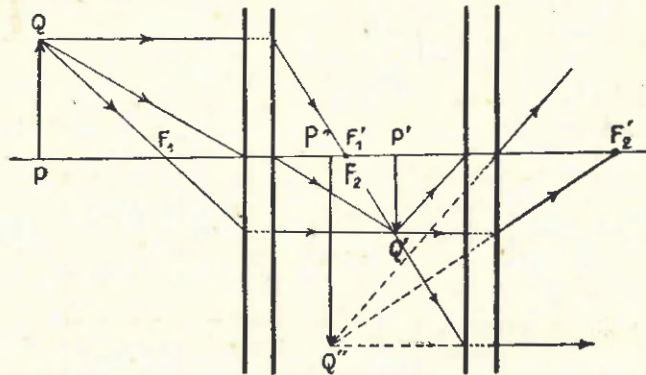


Figura sintética.

## 1. Lentes esféricas. Definiciones.

Llámanse **lente esférica** o simplemente **lente** a un cuerpo transparente (por ejemplo vidrio), generalmente homogéneo (exceptuado por ejemplo la lente cristalina del ojo), limitado por superficies esféricas.

Las lentes esféricas se emplean en 6 distintas formas, las que pueden dividirse, cuando se trate de **lentes delgadas**, en dos grupos: **lentes convergentes** (fig. 1-3) y **lentes divergentes** (fig. 4-6). Las lentes convergentes se llaman también **lentes positivas** y las divergentes **lentes negativas**, de acuerdo al N° 20 del párrafo anterior, porque, en el supuesto de tratarse de lentes delgadas, las distancias focales son positivas para las lentes convergentes y negativas para las divergentes.

## Lentes convergentes o lentes positivas



Fig. 1  
Lente biconvexa  
 $r_1$  positivo,  
 $r_2$  negativo.



Fig. 2  
Lente planoconvexa  
 $r_1 = \infty$ ,  
 $r_2$  negativo  
o también  
 $r_1$  positivo,  
 $r_2 = \infty$ .



Fig. 3.  
Lente cóncavoconvexa  
 $r_1$  y  $r_2$  positivos,  
 $r_2 > r_1$ ;  
o también:  
 $r_1$  y  $r_2$  negativos,  
 $r_1 > r_2$

Lentes divergentes o lentes negativas



Fig 4  
Lente bicóncava.

$r_1$  negativo  
 $r_2$  positivo



Fig. 5  
Lente planocóncava.

$r_1$  negativo  
 $r_2 = \infty$ ,  
o también:  
 $r_1 = \infty$ ,  
 $r_2$  positivo.



Fig. 6  
Lente convexocóncava.

$r_1$  y  $r_2$  negativos,  
 $r_1 < r_2$ ;  
o también:  
 $r_1$  y  $r_2$  positivos,  
 $r_2 < r_1$

Las formas de figs. 3 y 6 se llaman también **meniscos**, **menisco positivo** el de la fig. 3, y **menisco negativo**, el de fig. 6.

Queda caracterizada una lente por medio de las siguientes magnitudes (fig. 7):

$V_1V_2 = d =$  distancia entre los vértices de las dos superficies de la lente, la que se toma siempre con signo positivo, (ver también la definición de  $d$  en N° 12);

$r_1$  y  $r_2 =$  radios de curvatura de las dos superficies de la lente, de signo **positivo** cuando la superficie es convexa hacia el espacio objeto, y de signo **negativo** cuando es cóncava en dicha dirección (ver N° 4 de párrafo 2).

La línea de unión de los centros de las esferas que limitan la lente se llama **eje de la lente**.

**2. Cálculo de las distancias focales  $f_1$ ,  $f_1'$ ,  $f_2$  y  $f_2'$  de las dos superficies de la lente.**

Suponemos que los índices de refracción del espacio objeto y del espacio imagen son, respectivamente,  $n_1$  y  $n_3$ ;  $n_2$  el índice de la substancia de la lente.

Si en adelante suponemos  $n_1 = n_3 = 1$ , y si escribimos  $n$  en lugar de  $n_2$  tendremos las 4 magnitudes  $d$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $n$  (ver fig. 7) que determinan el camino de los rayos que atraviesan la lente o los elementos característicos de la misma.

En efecto, según ecuaciones (1) y (2) de párrafo 3, tendremos para las 4 distancias focales  $f_1$ ,  $f_1'$ ,  $f_2$  y  $f_2'$  de las dos superficies de la lente (ver fig. 7:

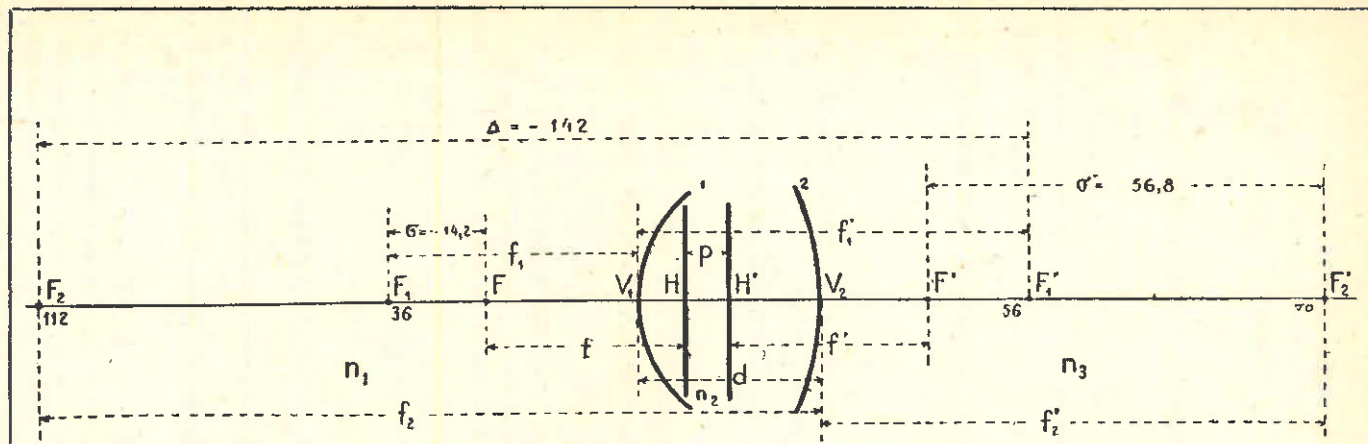


Fig. 7.— Se ilustra la posición de los elementos característicos de una lente gruesa biconvexa y el cálculo de los mismos.

Datos básicos:  $n = 14/9$  (vidrio crown),  $r_1 = 20$  mm,  $r_2 = -40$  mm,  $d = 26$  mm,

Resultados del cálculo que no se consignan en la figura:

$$f = f' = 28,4 \text{ mm}, \quad V_1F = 21,8 \text{ mm}, \quad V_1H = -6,6 \text{ mm}, \quad HH' = p = 6,2$$

$$V_2F' = 15,2 \text{ mm}, \quad V_2H' = -13,2 \text{ mm},$$

Controlador de cálculo:

$$6,6 + 13,2 + 6,2 = 26 = d$$

Ejemplo numérico (fig. 7):

(1)	$V_1F_1 = f_1 = \frac{r_1}{n-1}$	para $n = 14/9, r_1 = 20 \text{ mm}$ $r_2 = -40$	$f_1 = \frac{20}{5/9} = 36 \text{ mm},$
(2)	$V_1F_1' = f_1' = \frac{n \cdot r_1}{n-1}$	idem idem	$f_1' = \frac{14/9 \cdot 20}{5/9} = 56 \text{ mm},$
(3)	$V_2F_2 = f_2 = -\frac{n \cdot r_2}{n-1}$	idem idem	$f_2 = -\frac{14/9 \cdot (-40)}{5/9} = 112 \text{ mm},$
(4)	$V_2F_2' = f_2' = -\frac{r_2}{n-1}$	idem idem	$f_2' = -\frac{-40}{5/9} = 72 \text{ mm}.$

3. Distancias focales  $f$  y  $f'$  de la lente; su característica principal. Poder convergente o potencia de la lente.

Según ecuaciones (1) a (4) tenemos:

$$f_1' = n \cdot f_1; \quad f_2' = \frac{1}{n} \cdot f_2$$

Luego:

$$(5) \quad f_1' \cdot f_2' = f_1 \cdot f_2$$

de acuerdo con la (47) del párrafo anterior.

Recordando también la (48) de § 3, resulta para las distancias focales del sistema de dos superficies:

$$(6) \quad f = f'$$

Es decir: Las distancias focales  $f$  y  $f'$  de una lente rodeada por un solo medio son iguales entre sí.

El poder convergente (o potencia)  $D$  de la lente lo definimos en analogía con el N° 7 de párrafo 2:

$$(7) \quad D = \frac{1}{f}$$

4. Cálculo de la distancia focal  $f$  de una lente en base a las distancias focales  $f_1, f_1', f_2, f_2'$  de las superficies refringentes que la componen.

Según (44) y (38) de párrafo 3 y teniendo en cuenta las ecuaciones (1) a (4), obtendremos:

$$(8) \quad f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1)^2 \cdot \Delta}$$

en donde según (3) de párrafo 3 tenemos para  $\Delta$ :

$$\Delta = d - f_1' - f_2 \quad \text{Ejemplo de fig. 7: } \Delta = 26 - 56 - 112 = -142 \text{ mm}$$

$$\Delta = d - \frac{n \cdot r_1}{n-1} + \frac{n \cdot r_2}{n-1} = \frac{(n-1)d + n(r_2 - r_1)}{n-1}$$

Poniendo para abreviación:

$$(9) \quad (n-1)d + n(r_2 - r_1) = R,$$

resulta:

$$(10) \quad R = (n-1)\Delta$$

Luego, distancia focal de la lente según (8):

$$(11) \quad \boxed{f = f' = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1)R}}$$

Ejemplos de fig. 7.

$$R = 5/9 \cdot 26 - 14/9 \cdot 60 = -78,8 \text{ mm} \quad f = \frac{14/9 \cdot 20 \cdot (-40)}{5/9 \cdot (-78,8)} = 28,4 \text{ mm}$$

### 5. Cálculo de los puntos cardinales de la lente.

En base a las magnitudes  $d$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $n$  pueden calcularse: la posición de los focos, puntos principales y puntos nodales con respecto a los vértices de la lente. En cuanto a estos últimos, sabemos que en la lente coinciden con los puntos principales (ver final del N° 18 de § 3).

Las distancias interfocales  $\sigma$  entre los focos  $F_1$  y  $F'$  y  $\sigma'$  entre  $F_2'$  y  $F'$  (ver figs. 1 y 2 del párrafo anterior) se obtienen según (9) y (11) de § 3, con tener en cuenta las (9) y (10) del siguiente modo:

$$(12) \quad F_1 F' = \sigma = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta} = \frac{f_1 \cdot f_1'}{R} (n-1) = \frac{n \cdot r_1^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n-1}{R} = \frac{n \cdot r_1^2}{(n-1)R}$$

(positiva desde  $F_1$  hacia la izquierda)

$$(13) \quad F_2' F' = \sigma' = \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta} = \frac{f_2 \cdot f_2'}{R} (n-1) = \frac{n \cdot r_2^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n-1}{R} = \frac{n \cdot r_2^2}{(n-1)R}$$

(positiva desde  $F_2'$  hacia la derecha)

Ejemplos de fig. 7  $\sigma = \frac{36 \cdot 56}{-142} = -14,2 \text{ mm}$ ;  $\sigma' = \frac{112 \cdot 72}{-142} = -56,8 \text{ mm}$ .

Por consiguiente, para las distancias  $V_1 F$  y  $V_2 F'$  desde los vértices  $V_1$  y  $V_2$  hasta los focos  $F$  y  $F'$  de la lente, respectivamente:

$$V_1 F = V_1 F_1 + F_1 F = f_1 + \sigma = \frac{r_1}{n-1} + \frac{n \cdot r_1^2}{(n-1)R} = \frac{r_1(n \cdot r_1 + R)}{(n-1)R}$$

$$= \frac{r_1[n \cdot r_1 + (n-1)d + n(r_2 - r_1)]}{(n-1)R}$$

o sea:

$$(14) \quad \boxed{V_1 F = r_1 \frac{(n-1)d + n \cdot r_2}{(n-1)R}} \quad \text{(positiva desde } V_1 \text{ hacia la izquierda)}$$

Análogamente para  $V_2F'$ :

$$V_2F' = V_2F_2' + F_2'F' = f_2' + \sigma' = -\frac{r_2}{n-1} + \frac{n \cdot r_2^2}{(n-1)R} = \frac{r_2(n \cdot r_2 - R)}{(n-1)R}$$

$$= \frac{r_2[n \cdot r_2 - (n-1)d - n(r_2 - r_1)]}{(n-1)R}$$

o sea:

$$(15) \quad \boxed{V_2F' = r_2 \frac{n \cdot r_1 - (n-1)d}{(n-1)R}} \quad (\text{positiva desde } V_2 \text{ hacia la derecha})$$

Ejemplo de fig. 7;  $V_1F = 20 \cdot \frac{5/9 \cdot 26 + 14/9 \cdot (-40)}{5/9 \cdot (-78,8)} = 21,8 \text{ mm}$

$$V_2F' = -40 \cdot \frac{14/9 \cdot 20 - 5/9 \cdot 26}{5/9 \cdot (-78,8)} = 15,2 \text{ mm}$$

Para las distancias  $V_1H$  y  $V_2H'$  desde los vértices  $V_1$  y  $V_2$  hasta los puntos principales  $H$  y  $H'$  tenemos:

$$(16) \quad V_1H = V_1F - f$$

$$(17) \quad V_2H' = V_2F' - f'$$

Introduciendo las (11), (14) y (15) en las (16) y (17), tenemos:

$$V_1H = V_1F - f = r_1 \frac{(n-1)d + n \cdot r_2}{(n-1)R} - \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1)R}$$

o sea:

$$(18) \quad \boxed{V_1H = +r_1 \frac{d}{R}} \quad (\text{positiva desde } V_1 \text{ hacia la izquierda})$$

Análogamente:

$$V_2H' = V_2F' - f' = r_2 \frac{n \cdot r_1 - (n-1)d}{(n-1)R} - \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1)R}$$

o sea:

$$(19) \quad \boxed{V_2H' = -r_2 \frac{d}{R}} \quad (\text{positiva desde } V_2 \text{ hacia la derecha})$$

Ejemplos de fig. 7:  $V_1H = 20 \cdot \frac{25}{-78,8} = -6,6 \text{ mm}$ ,

$$V_2H' = +40 \cdot \frac{26}{-78,8} = -13,2 \text{ mm}.$$

De las (18) y (19) se desprende que las distancias  $V_1H$  y  $V_2H'$  son entre sí siempre como los valores absolutos de los radios  $r_1$  y  $r_2$ .

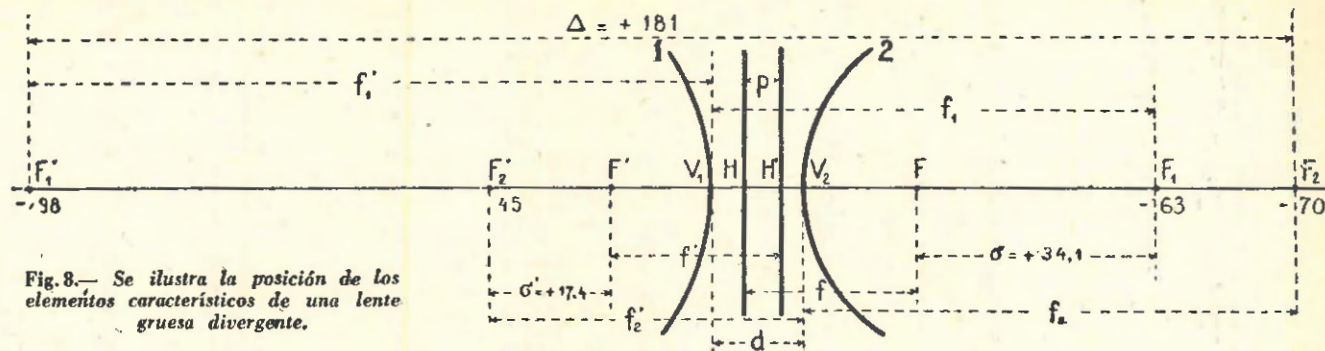


Fig. 8.— Se ilustra la posición de los elementos característicos de una lente gruesa divergente.

Datos básicos:  $r_1 = -35$  mm,  $r_2 = +25$  mm,  $d = 13$  mm,  $n = 14/9$ .

Algunos cálculos numéricos correspondientes a la lente representada en figura 8:

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} = \frac{-35}{5/9} = -63 \text{ mm}; \quad f_1' = \frac{n \cdot r_1}{n-1} = \frac{14/9 \cdot (-35)}{5/9} = -98:$$

$$f_2 = -\frac{n \cdot r_2}{n-1} = -\frac{14/9 \cdot 25}{5/9} = -70 \text{ mm}; \quad f_2' = -\frac{r_2}{n-1} = -\frac{25}{5/9} = -45.$$

Resultados del cálculo que no se consignan en la figura:

$$f = f' = -24,4 \text{ mm}, \quad V_1F = -28,9 \text{ mm}, \quad V_1H = -4,5 \text{ mm}, \quad HH' = \eta = 5,2 \text{ mm}$$

$$V_2F' = -27,6 \text{ mm}, \quad V_2H' = -3,2 \text{ mm},$$

Controlador de cálculo:

$$4,5 + 3,2 + 5,2 = 12,9 = d$$

Y finalmente para la distancia  $HH' = p$ :

$$\begin{aligned} HH' = p &= V_1H + V_2H' + d = r_1 \frac{d}{R} - r_2 \frac{d}{R} + d = \frac{r_1 - r_2}{R} d + d \\ &= \frac{(r_1 - r_2) d + d[(n-1)d + n(r_2 - r_1)]}{R} \\ &= \frac{(r_2 - r_1) d (n-1) + d^2 (n-1)}{R} \end{aligned}$$

o sea:

$$(20) \quad \boxed{HH' = p = \frac{d(n-1)(d+r_2-r_1)}{R}} \quad (\text{positiva desde } H \text{ hacia la derecha})$$

Ejemplo de fig. 7:  $HH' = p = \frac{26 \cdot \frac{5}{9} \cdot (26 - 40 - 20)}{-78,8} = 6,2 \text{ mm}$

**6. Caso de la lente divergente. Ejemplos de cálculo.**

En la figura 7 hemos supuesto una lente convergente de la cual las distancias focales  $f$  y  $f'$  son positivas. En figura 8, página 76, suponemos los radios  $r_1$  y  $r_2$  tales que las distancias focales  $f$  y  $f'$  resulten negativas, con lo cual llegamos al caso de una **lente divergente**.

Hemos elegido para el ejemplo representado en figura 8 los siguientes valores:

$$r_1 = -35 \text{ mm}, \quad r_2 = 25 \text{ mm}, \quad d = 13 \text{ mm} \quad \text{y} \quad n = \frac{14}{9},$$

de lo cual se deducen los valores calculados debajo de la figura 8.

**7. Construcciones.**

En las figuras 8 y 10 se ilustra la construcción de una imagen con ayuda de rayos paralelos al eje y rayos que pasan por los focos y puntos principales. La figura 9 se refiere al caso de una lente convergente y la 10 al caso de una lente divergente.

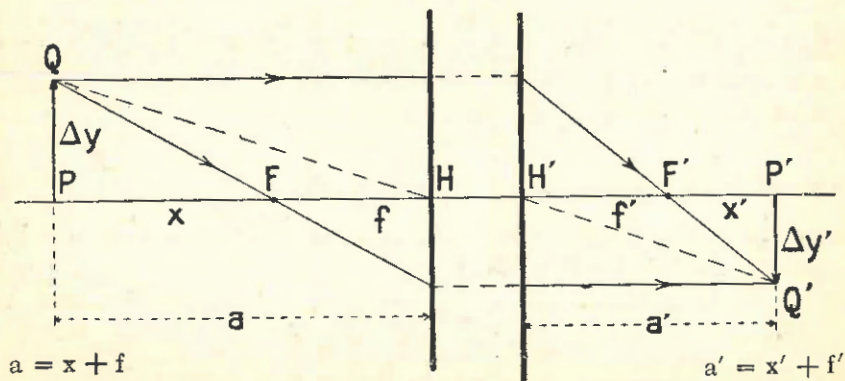
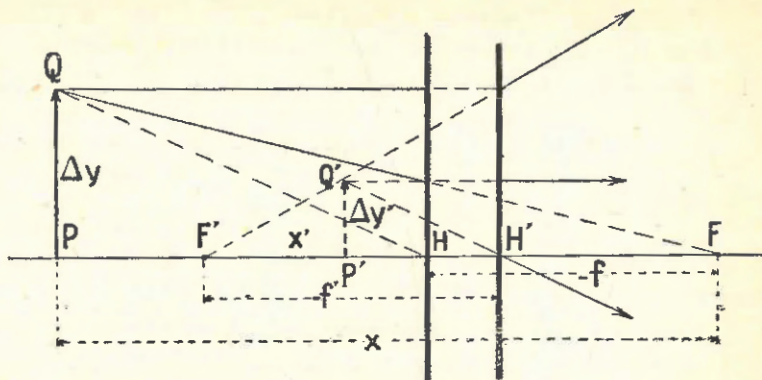


Fig. 9. — Se ilustra el camino de los rayos en una lente convergente.

Fig. 10.— Se ilustra el camino de los rayos en una lente divergente.



8. "Primera ecuación dióptrica fundamental" referida a los puntos principales  $H$  y  $H'$  de la lente o "fórmula de la lente".

Por ser para la lente  $f = f'$ , la ecuación fundamental NEWTON:

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

se simplifica así:

(21)

$$x \cdot x' = f^2$$

con lo que las ecuaciones (23) y (25) del párrafo anterior se transforman en las siguientes:

(22)

$$(a - f)(a' - f) = f^2$$

(23)

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{a'} = 1$$

o sea, dividiendo por  $f$ :

(24)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

La ecuación (24) que de ahora en adelante llamaremos simplemente "fórmula de la lente", nos sirve para el cálculo de la distancia  $a'$  (referida al punto principal  $H'$ ) de la imagen de un objeto cuando se conozca la distancia  $a$  de éste a partir del punto principal  $H$ .

#### 9. Aumento axial longitudinal o de profundidad $\alpha$ .

Designando por  $x_1$  y  $x_2$  las abscisas focales de dos puntos axiales próximos uno de otro, tendremos según (21):

$$x_1 \cdot x_1' = f^2$$

$$x_1' = \frac{f^2}{x_1}$$

$$x_2 \cdot x_2' = f^2$$

$$x_2' = \frac{f^2}{x_2}$$

Formando la diferencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= f^2 \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \\ &= f^2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2} \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$(25) \quad \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = - \frac{f^2}{x_1 \cdot x_2} = \alpha$$

Teniendo en cuenta que según (18) de § 3 el aumento transversal  $\beta$  para un objeto de abscisa focal  $x$  es igual a  $\frac{f}{x}$  obtenemos para las abscisas focales  $x_1$  y  $x_2$  los valores

$$\beta_1 = \frac{f}{x_1}$$

$$\beta_2 = \frac{f}{x_2}$$

los que introducidos en la (25) dan:

$$(26) \quad \alpha = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = - \beta_1 \cdot \beta_2.$$

El aumento axial, longitudinal o de profundidad  $\alpha$  es igual al producto  $\beta_1 \cdot \beta_2$  de los aumentos transversales  $\beta_1$  y  $\beta_2$  de los extremos del segmento, con signo invertido.

Cuando  $x_1$  y  $x_2$  tienden hacia un mismo valor  $x$ , es decir, cuando  $x_2 - x_1$  tiende hacia cero, resulta para el aumento axial  $\alpha$ :

$$(27) \quad \boxed{\alpha = \frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = - \beta^2}$$

Si suponemos un objeto que se mueve a lo largo del eje con la velocidad  $v$ , la correspondiente imagen tendrá la velocidad  $v'$ :

$$(28) \quad v' = - \beta^2 \cdot v$$

#### 10. Aumento lateral o transversal $\beta$ .

Según (18) de § 3 hemos establecido para el aumento lateral o transversal  $\beta$  de un sistema de dos superficies la siguiente ecuación:

$$(29) \quad \beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

La figura 9 nos permite hallar otra relación.

De los triángulos semejantes  $PQH$  y  $P'Q'H'$  se deduce:

$$(30) \quad \beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{a'}{a}$$

Luego, aumento lateral o transversal  $\beta$ :

$$(31) \quad \boxed{\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} = \frac{a'}{a}}$$

La figura 11 muestra la posición y magnitud de la imagen  $\Delta y'$  para diferentes distancias  $a$  del objeto  $\Delta y$  en una lente convergente. Se supone que dicho objeto se halla delante del foco anterior de la lente. Se ve que el punto objeto 1, por ejemplo, tiene su imagen en 1', el 2 en 2', el 3 en 3'. Se ve también que el aumento lateral  $\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y}$  varía con la distancia  $a$ . Para  $a = \infty$ ,  $\beta = 0$ .

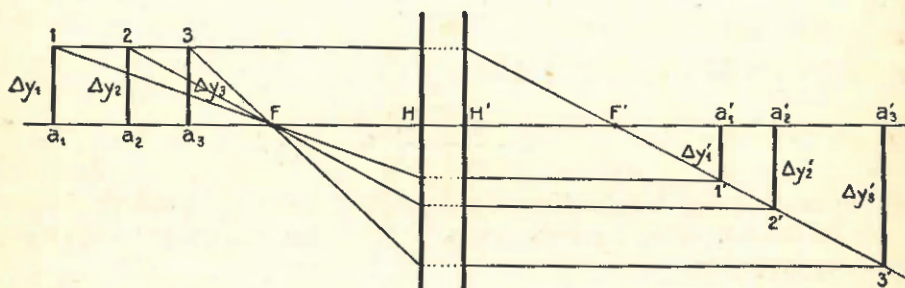


Fig. 11. — Se ilustra la variación del aumento lateral  $\beta$  con la distancia  $a$  del objeto.

### 11. Aumento angular o razón de convergencia $\gamma$ .

Según (29) y fig. 8 de § 3 tenemos para el aumento angular o razón de convergencia  $\gamma$  de un sistema de dos superficies centradas:

$$(32) \quad \gamma = \frac{\text{tg} \mu'}{\text{tg} \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'} = \frac{a}{a'}$$

Comparando la (31) con la (32), podemos decir que el aumento angular  $\gamma$  es igual a la recíproca del aumento lateral  $\beta$ , es decir:

$$(33) \quad \gamma = \frac{1}{\beta} \text{ o sea: } \beta \cdot \gamma = 1$$

Para los puntos principales  $H$  y  $H'$  el aumento angular  $\gamma$  es igual a  $-1$ , lo que significa que el rayo imagen correspondiente a un rayo objeto que pasa por  $H$ , le es paralelo y pasa por  $H'$  (ver figs. 9 y 10).

12. Combinación de dos lentes. Definiciones.

Un sistema compuesto de varias lentes es un sistema centrado de superficies esféricas refringentes.

Trataremos una combinación centrada de dos lentes, las que suponemos separadas y rodeadas por el mismo medio (aire). Las reflexiones relativas a las figs. 1 a 4 del párrafo 3 pueden extenderse a una tal combinación de dos lentes con sólo substituir a los planos perpendiculares al eje que pasan por  $V_1$  y  $V_2$  (ver fig. 1 de § 3) los pares de planos principales de las dos lentes que se combinan, entendiéndose entonces por  $f_1$  y  $f_1'$  las distancias focales de la primera lente y por  $f_2$  y  $f_2'$  las de la segunda; por  $D_1$  y  $D_2$  los poderes convergentes (convergencias o potencias) de las mismas. Por  $d$  (que en las figuras 1 y 2 del párrafo 3 es la distancia que separa los vértices  $V_1$  y  $V_2$ ) entendemos en la combinación de dos lentes la distancia que media entre el punto principal posterior  $H_1'$  (fig. 12) de la primera lente y el punto principal anterior  $H_2$  de la segunda.

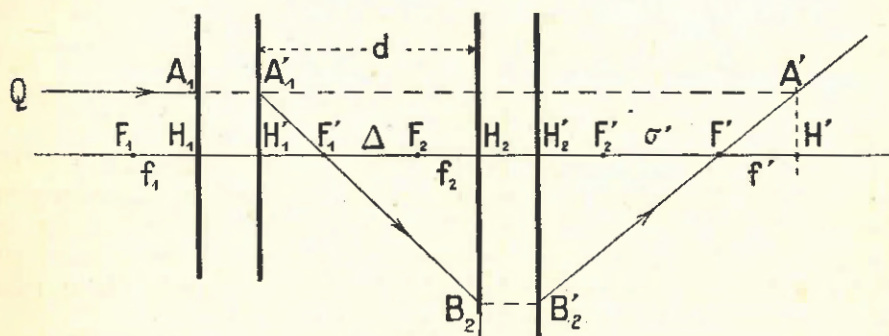


Fig. 12. — Se ilustra una combinación de dos lentes convergentes.

Para la determinación de las distancias focales  $f$  y  $f'$  de esta combinación de dos lentes se ha supuesto en fig. 12, análogamente a lo que hicimos en fig. 1 de § 3, un rayo  $QA$  que incide paralelamente al eje. Después de refractarse en  $A_1'$ ,  $B_2$  y  $B_2'$ , dicho rayo debe pasar por el foco posterior  $F'$  del sistema.

Para calcular las distancias focales  $f$  y  $f'$  de la combinación de dos lentes (las que se contarán a partir de los planos principales por  $H$  y  $H'$  de esa combinación), podemos hacer consideraciones completamente análogas a las establecidas en el N° 19 de § 3 para un sistema de dos superficies, debiéndose en cada caso reemplazar "superficie 1" por "primera lente" y "superficie 2" por "segunda lente". Llegaremos así a las siguientes expresiones para las distancias focales  $f$  y  $f'$  de una combinación de dos lentes:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} \\ f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta} \end{array} \right.$$

donde significa:  $\Delta$  la distancia que media entre el foco posterior  $F_1'$  de la primera lente y el foco anterior  $F_2$  de la segunda,  $f_1, f_1'$  las distancias focales de la primera lente,  $f_2, f_2'$  las de la segunda. Y como hemos supuesto dos lentes rodeadas de un solo medio (aire), tenemos todavía, de acuerdo con la (6):

$$f_1 = f_1' \qquad f_2 = f_2'$$

de modo que la (34) nos da:

$$(35) \qquad f = f' = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$$

o también según (3), § 3:

$$(36) \qquad \boxed{f = f' = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}}$$

Para el **poder convergente** (potencia o convergencia)  $D$  de la combinación de dos lentes resulta (véase también N° 3 de este párrafo).

$$(37) \qquad D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

o sea:

$$\boxed{D = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2}$$

Llámase a la distancia focal  $f$  según (36) también la **distancia focal de la lente teórica equivalente** o, más brevemente, **distancia focal equivalente**. Es decir, para cada sistema centrado de superficies refringentes existen dos planos principales  $H$  y  $H'$  (ver fig. 5 de § 3) correspondientes a una lente teórica con distancia focal perfectamente determinada, la que puede substituir al sistema en todos sus efectos y rendimientos ópticos.

Aplicando la fórmula de NEWTON [ecuación (19) de § 3] a la segunda lente de la combinación con punto objeto en  $F_1'$  (fig. 12), obtendremos:

$$\Delta \cdot \sigma' = f_2 \cdot f_2' = f_2^2$$

de donde se deduce:

$$(39) \qquad \sigma' = \frac{f_2^2}{\Delta} = \frac{f_2^2}{d - f_1 - f_2}$$

o teniendo en cuenta la (36):

$$(40) \qquad \boxed{\sigma' = -f \cdot \frac{f_2}{f_1}}$$

Y para la distancia  $H_2' H'$  (ver fig. 12):

$$H_2' H' = f_2 + \frac{f_2^2}{d - f_1 - f_2} - f'$$

(dado que  $f'$  es negativa, por consiguiente  $-f'$  positiva)

o también, en vista de la (36):

$$\begin{aligned} H_2' H' &= f_2 + \frac{f_2^2}{d - f_1 - f_2} + \frac{f_1 \cdot f_2}{d - f_1 - f_2} \\ &= f_2 \left( 1 + \frac{f_1 + f_2}{d - f_1 - f_2} \right) \end{aligned}$$

o sea:

(41)

$$H_2'H' = \frac{f_2 \cdot d}{d - f_1 - f_2}$$

Teniendo en cuenta la (36), se puede expresar la (41) también en esta forma:

(42)

$$H_2'H' = -f \cdot \frac{d}{f_1}$$

Análogamente se obtiene según fig. de § 3:

$$\Delta \cdot \sigma = f_1 \cdot f_1' = f_1^2$$

de donde se deduce:

(43)

$$\sigma = \frac{f_1^2}{\Delta} = \frac{f_1^2}{d - f_1 - f_2}$$

y en vista de la (36):

(44)

$$\sigma = -f \cdot \frac{f_1}{f_2}$$

Para la distancia  $H_1H$  tenemos:

$$H_1H = f_1 + \frac{f_1^2}{d - f_1 - f_2} - f$$

o también, en vista de la (36):

$$\begin{aligned} H_1H &= f_1 + \frac{f_1^2}{d - f_1 - f_2} + \frac{f_1 \cdot f_2}{d - f_1 - f_2} \\ &= f_1 \left( 1 + \frac{f_1 + f_2}{d - f_1 - f_2} \right) \end{aligned}$$

o sea:

(45)

$$H_1H = \frac{f_1 \cdot d}{d - f_1 - f_2}$$

En vista de la (36) se puede expresar la (45) también así:

(46)

$$H_1H = -f \cdot \frac{d}{f_2}$$

Cuando se trata de combinar 3 y más lentes, se puede calcular la lente equivalente de las dos primeras y combinar aquélla con la tercera, obteniéndose así una nueva lente equivalente, que se puede combinar con una cuarta lente, extendiéndose de este modo el procedimiento a un número cualquiera de lentes a combinar.

### 13. Características de tres casos particulares.

Tenemos para la distancia  $d$  que media entre el plano principal posterior de la primera lente y el plano principal anterior de la segunda, los siguientes tres casos particulares de importantes aplicaciones prácticas:

**Caso 1,  $d = 0$ .** (Solamente posible cuando por lo menos uno de los puntos principales  $H_1'$  y  $H_2$  se encuentra fuera de la lente correspondiente o en una

cara de la misma), **Caso 2**,  $d = f_1 + f_2$  ó  $\Delta = 0$  (Sistema telescópico o sistema afocal) y **Caso 3**,  $d > f_1 + f_2$  ó  $\Delta > 0$ .

14. **Caso 1**, ( $d = 0$ ). Cuando  $d = 0$ , la ecuación (36) se transforma en:

$$(47) \quad f = f' = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}$$

y la (38) en:

$$(48) \quad D = D_1 + D_2$$

Es decir, en una combinación de dos lentes, en la cual coinciden el punto principal posterior de la primera lente con el punto principal anterior de la segunda, el poder convergente de la combinación es igual a la suma de los poderes convergentes de las dos lentes que la integran.

15. **Caso 2** o sea caso del sistema telescópico o sistema afocal.

Siendo en este caso:

$$d = f_1 + f_2 \text{ ó } \Delta = 0,$$

resulta de la ecuación (36) para la distancia focal  $f$  del sistema:

$$(49) \quad f = f' = \infty$$

Es decir, los focos  $F$  y  $F'$  de esta combinación de lentes se hallan en el infinito; lo que equivale a decir que un objeto infinitamente lejano da una imagen también infinitamente lejana.

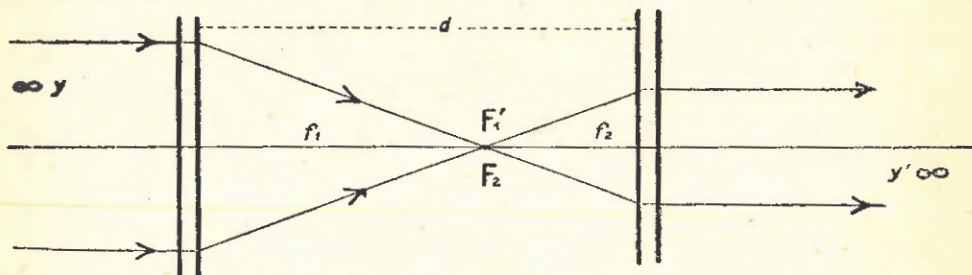


Fig. 13. — Sistema afocal o sistema telescópico:  $d = f_1 + f_2$ . El sistema telescópico forma de un objeto  $y$  situado en el infinito, la imagen real  $y'$  situada también en el infinito.

Hemos visto en figura 11 que el aumento transversal (o lateral)  $\beta$  varía generalmente con la longitud principal  $a$  a la cual se halla el objeto. La combinación representada en figura 13, en cambio, proporciona un aumento transversal fijo o constante. Un rayo objeto que incide paralelamente al eje a la distancia  $y$ , sale del mismo paralelamente al eje a la distancia  $y'$ .

Tendremos así para el aumento transversal (o lateral)  $\beta$  del sistema:

$$(50) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1}$$

y para el aumento angular (o razón de convergencia)  $\gamma$  del sistema según ecuación (33):

$$(51) \quad \boxed{\gamma = \frac{f_1}{f_2}}$$

El poder convergente (potencia o convergencia)  $D$  del sistema es nulo, por ser infinita la distancia focal  $f$  del mismo. El plano objeto (perpendicular al eje) situado en el infinito, tiene por imagen otro plano (perpendicular al eje) situado en el infinito. El sistema se llama **afocal** por no tener foco en el infinito. Se le llama también **telescópico** porque se halla realizado en los telescopios o anteojos astronómicos.

**16. Caso 3, en que la distancia  $d$  es mayor que la suma de las distancias focales de las dos lentes de la combinación.**

Cuando se verifica:  $d > f_1 + f_2$

resulta según (36) para la distancia focal  $f$  de la combinación de dos lentes un valor **negativo**, es decir, el sistema es **divergente** aun cuando las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  de las lentes componentes tienen signo positivo. Se puede, por lo tanto, obtener un sistema divergente mediante una combinación de lentes convergentes.

### 17. Dioptría.

Hemos llamado poder convergente (potencia o convergencia)  $D$  de una lente (o de un sistema de dos lentes) o la recíproca  $1/f$  de la distancia focal  $f$ :

$$D = \frac{1}{f} \quad (\text{Véase Nros. 3 y 12})$$

Como unidad de medida para el poder convergente se emplea la **dioptría** (designación abreviada internacional **dptr**), que es el valor de  $D$  correspondiente a una lente de distancia focal igual a un metro.

La indicación de las dioptrías de una lente sirve también para expresar la distancia focal de la misma.

Una lente de  $m$  dioptrías significa entonces una lente para la cual

$$(52) \quad m = \frac{1}{f} \quad \text{ó} \quad f = \frac{1}{m}$$

(siendo  $f$  expresada en metros), resultando, en consecuencia:

$$f = \frac{100}{m} \text{ cm}$$

Siendo, por ejemplo,  $f = 0,5$  metro, resulta para el poder convergente  $D$ :

$$D = \frac{1}{\frac{1}{2}} = + 2 \text{ dptr}$$

Para lentes negativas de anteojos con  $f = -20$  cm, resulta un poder convergente  $D$ :

$$D = -\frac{1}{\frac{1}{5}} = - 5 \text{ dptr}$$

Para lentes positivas de anteojos con  $f = 12 \frac{1}{2}$  cm, resulta:

$$D = \frac{1}{\frac{1}{8}} = + 8 \text{ dptr}$$

Inversamente:

Lentes de  $m = + 2$  dptr,  $m = - 5$  dptr,  $m = + 8$  dptr, tendrán según (52) distancias focales  $f$  de  $+ 50$  cm,  $- 20$  cm,  $+ 12 \frac{1}{2}$  cm, respectivamente.

## 18. Lente delgada. Definición.

Todas las fórmulas relativas a las lentes quedan notablemente simplificadas cuando el espesor  $d$  de las mismas es pequeño comparado con los radios  $r_1$  y  $r_2$  y con su diferencia  $(r_2 - r_1)$ .

Llámase **lente delgada** a una lente cuando en ella puede ser despreciado:  $(n-1)d$  al lado de  $n(r_2 - r_1)$  es decir, cuando la expresión:

$$R = (n-1)d + n(r_2 - r_1)$$

puede ser reemplazada por esta otra:

$$53 \quad R = n(r_2 - r_1)$$

Las llamadas "lentes delgadas" (ver figs. 1 a 6), positivas o negativas, son del tipo de las que vulgarmente se emplean en los anteojos, mientras que las "lentes gruesas" suelen emplearse en los aparatos fotográficos.

La ecuación (11) nos dará entonces para la distancia focal  $f$ :

$$(54) \quad f = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$$

Luego, el poder convergente (potencia) resulta:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{(n-1)(r_2 - r_1)}{r_1 \cdot r_2}$$

o sea:

$$(55) \quad D = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Para las magnitudes  $V_1H$  y  $V_2H'$  tendremos según (18) y (19):

$$56) \quad \begin{cases} V_1H = +r_1 \frac{d}{R} = + \frac{r_1 \cdot d}{n(r_2 - r_1)} \\ V_2H' = -r_2 \frac{d}{R} = - \frac{r_2 \cdot d}{n(r_2 - r_1)} \end{cases}$$

Para las distancias  $HH' = p$ , despreciándose en la (20) la cantidad  $d$  al lado de  $(r_2 - r_1)$ , y teniendo en cuenta la (53), resulta:

$$(57) \quad HH' = p = \frac{n-1}{n} \cdot d$$

Es decir, la distancia  $p$  entre los planos principales de una lente delgada es casi independiente de la curvatura de la misma y aproximadamente proporcional al espesor  $d$ .

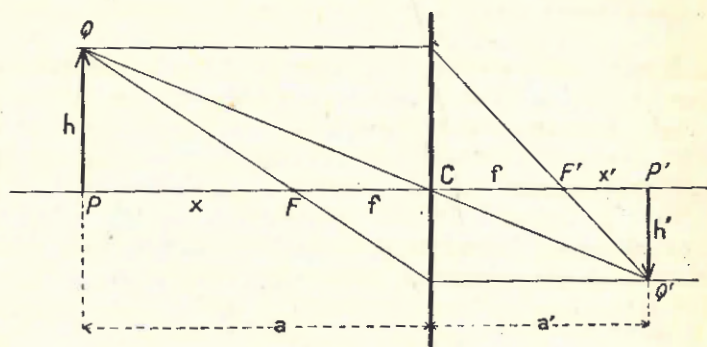
Como  $n$  para vidrio es aproximadamente igual a  $3/2$ , podemos decir que la distancia  $p$  de los planos principales es aproximadamente  $1/3$  del espesor  $d$  de la lente delgada.

## 19. Lente ideal.

Cuando una lente es sumamente delgada, se tiene lo que se llama una **lente ideal**. Coinciden en este caso no sólo los vértices  $V_1$  y  $V_2$  sino también los puntos principales  $H$  y  $H'$  (y conjuntamente con aquéllos los nodales  $N$  y  $N'$ , de acuerdo a lo expuesto en el final del N° 18 de § 3), en un único punto  $C$  llamado **centro óptico** de la lente. La lente queda así matemáticamente re-

dueida a un trozo de plano perpendicular al eje, con respecto al cual los focos ocupan una posición simétrica (ver figs. 14, 15 y 16).

Fig. 14. — Ilústrase la construcción de la imagen real P'Q' de un objeto real PQ (situado fuera de la distancia focal) por medio de una lente convergente.



Este concepto de la lente ideal o sumamente delgada es de extraordinaria importancia práctica en la óptica geométrica, porque nos permite obtener en forma sencilla una buena orientación previa para el estudio de los instrumentos ópticos.

Las relaciones fundamentales del N° 21 del párrafo 3 son aplicables también al caso de la lente ideal. Si nos proponemos calcular, por ejemplo, una de las longitudes principales a ó a' cuando esté dada la otra (ver definición en N° 16 del párrafo 3), correspondientes a dos puntos conjugados P y P' (que son las distancias de los mismos al centro C de la lente, ver fig. 14), tendremos:

$$CP = a$$

$$CP' = a'$$

permitiéndonos entonces la "fórmula de la lente", ecuación (24) de este

párrafo: 
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

obtener las relaciones buscadas:

$$(58) \quad a' = \frac{a \cdot f}{a - f} \quad a = \frac{a' \cdot f}{a' - f}$$

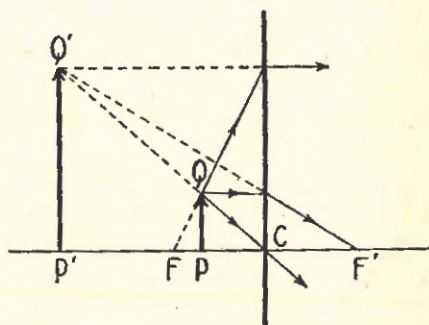
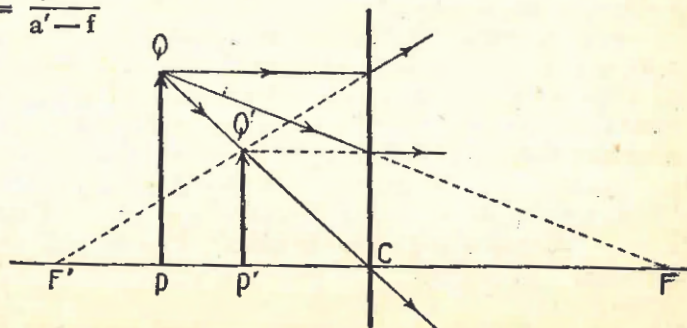


Fig. 15. — Construcción de la imagen virtual P'Q' de un objeto real PQ (situado dentro de la distancia focal) mediante una lente convergente.

Fig. 16. — Construcción de la imagen virtual P'Q' de un objeto real PQ (situado dentro de la distancia focal) por medio de una lente divergente.



## 20. Discusión de la "fórmula de la lente".

La "fórmula de la lente":  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$

nos permite calcular, como acabamos de decir, la longitud principal  $a'$  correspondiente a la imagen cuando, además de la distancia focal  $f$ , se conozca la longitud principal  $a$  correspondiente al objeto. También sirve dicha fórmula para calcular la distancia focal  $f$  cuando se han medido las longitudes  $a$  y  $a'$  correspondientes.

Si en la fórmula de la lente ponemos:  $a = 2f$ , (suponiendo un objeto que se encuentra a la doble distancia focal delante de la lente, ver fig. 17), obtendremos la distancia de imagen  $a'$  también igual a  $2f$ , dado que:

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{2f} = \frac{1}{f}$$

Si tomamos  $a > 2f$ ,  $a'$  tiene que resultar menor que  $2f$  para que la ecuación de la lente pueda subsistir, y si  $a < 2f$ ,  $a'$  será mayor que  $2f$ .

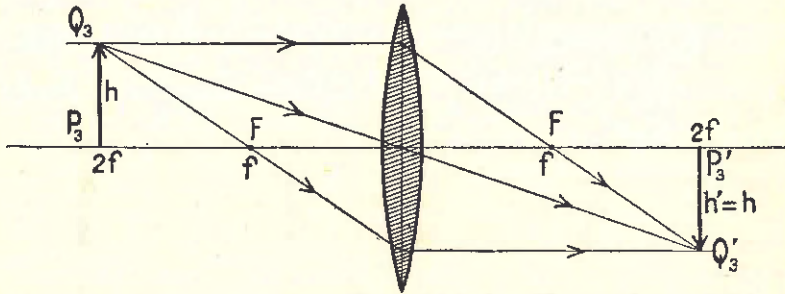


Fig. 17. — Se ilustra el caso 3 del cuadro de la página 89:  $a = 2f$ .

Para la longitud principal  $a'$  de la imagen rige entonces la 1ª de las fórmulas (58), y para la altura  $h'$  de la imagen tendremos según (31):

$$\frac{h'}{h} = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{a'}{a}$$

(59)

$$h' = h \cdot \frac{a'}{a}$$

En la figura 18 se dan para algunas distancias características  $a$  las correspondientes magnitudes  $a'$  y  $h'$ .

Cuando el objeto  $PQ = h$  (fig. 18) se mueve desde el infinito hasta un punto  $P_3$  que dista de la lente en la doble distancia focal, recorriendo la magnitud  $a$  los valores desde  $\infty$  hasta  $2f$ , la imagen  $P'Q'$ , real e invertida, se mueve desde el foco posterior  $F'$  hasta el punto  $P'_3$  que se encuentra también a la doble distancia focal detrás de la lente (ver fig. 17). Durante este movimiento el tamaño de la imagen aumenta desde 0 hasta  $h$ .

Caracterizamos este caso con los términos: "Objetos grandes lejanos ( $a > 2f$ ), imágenes pequeñas cercanas". Función del objetivo del anteojo astronómico (ver fig. 19).

Cuando el objeto  $h$  sigue su movimiento desde  $P_3$  ( $a = 2f$ ) hasta el foco  $F$ , la imagen  $P'Q'$ , real e invertida, se mueve desde  $P'_3$  ( $a' = 2f$ ) hasta el infi-

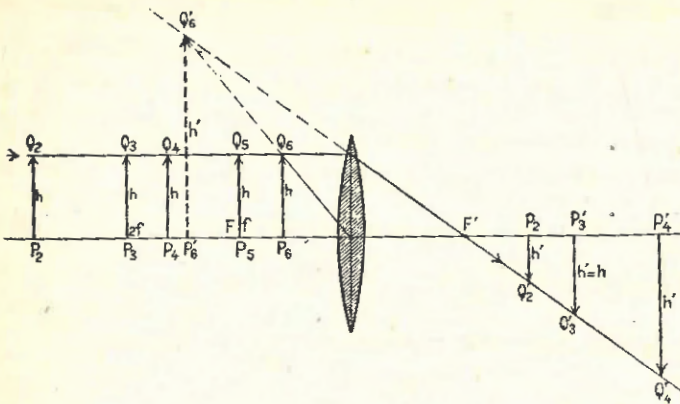


Fig. 18.—Lente convergente delgada. Se ilustran algunas posiciones del segmento rectilíneo objeto PQ = h con las correspondientes magnitudes h' de la imagen P'Q'.

nito. Durante este movimiento el tamaño de la imagen (real) aumenta desde h hasta ∞.

Caracterizamos este caso con los términos: “Objetos pequeños cercanos (2f > a > f), imágenes grandes lejanas”. Función del objetivo del microscopio.

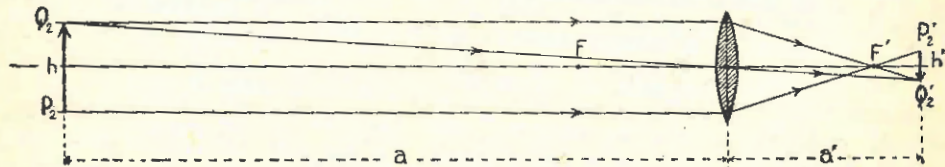


Fig. 19.—Se ilustra la función del objetivo del anteojo astronómico.

Cuando el objeto h sigue su movimiento desde F hasta la lente, la imagen P'Q', virtual y derecha, se mueve desde el infinito del espacio objeto hasta la lente. Durante este movimiento el tamaño de la imagen (virtual), en valor absoluto, disminuye desde ∞ hasta h.

Caracterizamos este caso con los términos: “Objetos pequeños muy cercanos (f > a > 0), imágenes virtuales grandes”. Caso de la lupa.

En todos estos casos se ve que la imagen se desplaza siempre en el mismo sentido en que lo hace el objeto (de izquierda a derecha o viceversa).

Caso 1.  $a = \infty, a' = \frac{af}{a-f}$  nos da:  $a' = f$ ;  $h' = h \cdot \frac{a'}{a}$  nos da:  $h' = 0$

- |                    |   |   |   |                    |   |   |   |               |
|--------------------|---|---|---|--------------------|---|---|---|---------------|
| > 2. $a > 2f,$     | > | > | > | $f < a' < 2f$      | > | > | > | $h' < h$      |
| > 3. $a = 2f,$     | > | > | > | $a' = 2f$          | > | > | > | $h' = h$      |
| > 4. $2f > a > f,$ | > | > | > | $2f < a' < \infty$ | > | > | > | $h' > h$      |
| > 5. $a = f,$      | > | > | > | $a' = \infty$      | > | > | > | $h' = \infty$ |
| > 6. $a < f,$      | > | > | > | a' negativo        | > | > | > | $ h'  >  h $  |
| > 7. $a = 0,$      | > | > | > | $a' = 0$           | > | > | > | $h' = -h$     |

Imagen real e invertida  
Imagen virtual y derecha

Reemplazando en la “fórmula de la lente” f por -f, obtendríamos relaciones análogas para la lente delgada divergente.

## 21. Aplicaciones prácticas.

**Ejemplo 1 (lente biconvexa):** Sea una lente biconvexa delgada (ver fig. 1) de vidrio con  $n = 1,5$ ; el radio de la primera cara sea  $r_1 = 30$  cm, y el de la segunda  $r_2 = -40$  cm. Se pregunta: 1° ¿Cuál es la distancia focal  $f$  de la lente? 2° ¿Cuál es su poder convergente  $D$ ?

1° Según (54) tenemos para la distancia  $f$  (en centímetros):

$$f = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)} = \frac{30 \cdot (-40)}{0,5 \cdot (-70)} = \frac{240}{7} \text{ cm} = 34\frac{2}{7} \text{ cm}$$

2° Para el poder convergente  $D$  según (7):

$$D = \frac{1}{f} = \frac{7}{240} \text{ cm}^{-1} = \frac{1}{\frac{240}{7} \text{ cm}} = \frac{1}{\frac{2,4}{7} \text{ m}} = \frac{1}{0,343 \text{ m}} = 2,9 \text{ dptr}$$

**Caso de la lente biconvexa simétrica.** Cuando además  $r_1 = -r_2 = r$ , se tiene lo que se llama una **lente delgada biconvexa simétrica**, para la cual la (54) nos da:

$$(60) \quad f = \frac{r}{2(n-1)}$$

la que para  $n = 1,5$  da:

$$(61) \quad \boxed{f = r}$$

Es decir, en la **lente delgada biconvexa simétrica** la distancia focal es igual al valor absoluto del radio de curvatura de las superficies.

Para  $r = 40$  cm resulta  $f = 40$  cm.

Para el poder convergente  $D$ :

$$(62) \quad D = \frac{1}{r} = \frac{1}{0,4 \text{ m}} = 2,5 \text{ dptr}$$

y según (56):

$$(63) \quad V_1H = V_2H' = \frac{d}{2n}$$

Análogamente se puede deducir que en la **lente delgada bicóncava simétrica** (ver fig. 4) el valor absoluto de la distancia focal también es igual al valor absoluto del radio de curvatura de las superficies.

**Ejemplo 2.** Dada una lente biconvexa simétrica con  $r = 3,5$  cm, y suponiendo  $n = 1,5$ , se pregunta:

1° ¿Cuál es la distancia focal  $f$  considerando la lente como lente delgada, y ¿cuál su poder convergente  $D$ ?

2° ¿Cuál es la distancia focal  $f$  cuando su espesor  $d = 1$  cm, y ¿cuál su poder convergente  $D$  en este caso?

3° ¿Cuáles son para  $d = 1$  cm las distancias  $V_1H$  y  $V_2H'$ ? y finalmente:

4° ¿Cuál es la distancia  $HH'$  en el supuesto de tratarse de una lente gruesa con  $d = 1$  cm (caso a) y en el supuesto de tratarse de una lente delgada (caso b)?

Respuestas:

1º Distancia focal  $f$  según (61):

$$f = r = 3,5 \text{ cm y } D = \frac{1}{0,035 \text{ m}} = 28,6 \text{ dptr}$$

2º Según (11):

$$f = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1) R}$$

donde  $R$ :

$$R = (n-1) d - n \cdot 2r$$

según (9)

Resulta:

$$R = 0,5 - 1,5 \cdot 7 = -10 \text{ cm}$$

y

$$f = \frac{-1,5 \cdot 3,5^2}{0,5 \cdot (-10)} = 3,68 \text{ cm}$$

Para el poder convergente  $D$  según (7):

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,0368 \text{ m}} = 27,2 \text{ dptr}$$

3º Para las distancias  $V_1H$  y  $V_2H'$  tenemos según (18) y (19):

$$V_1H = V_2H' = r \cdot \frac{d}{R} = 3,5 \cdot \frac{1}{-10} = -0,35 \text{ cm}$$

4º Caso a):

$$HH' = p = V_1H + V_2H' + d = -0,35 - 0,35 + 1 = 0,3 \text{ cm.}$$

Caso b): según (57)

$$p = \frac{n-1}{n} \cdot d = 0,33 \text{ cm}$$

Es decir: En este caso, como ya dijimos en el N° 18, la distancia  $p$  es casi independiente del radio de curvatura de las superficies.

**Ejemplo 3 (lente planoconvexa):** ¿Cuáles son las magnitudes  $f$  y  $D$  de una lente planoconvexa con  $r_1 = \infty$  (fig. 20) y  $r_2 = -40$  cm?

Fig. 20. — Lente planoconvexa con cara plana hacia la izquierda (coinciden los puntos  $V_2$  y  $H'$ ).

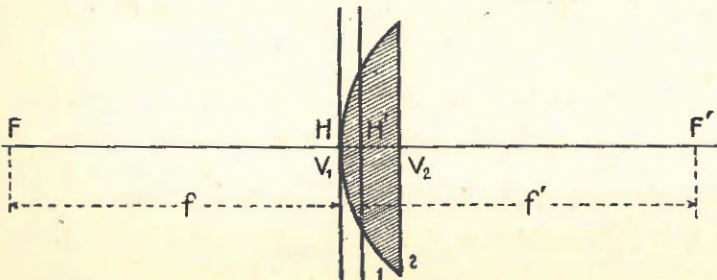
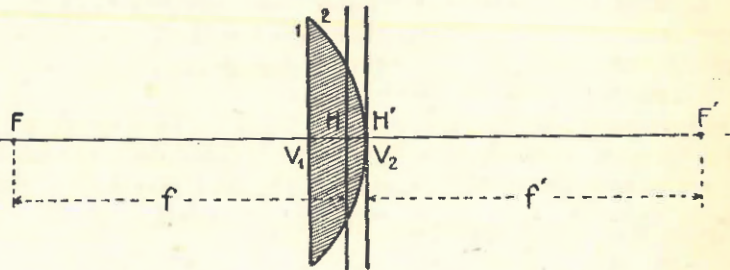


Fig. 21. — Lente planoconvexa con cara plana hacia la derecha (coinciden los puntos  $V_1$  y  $H$ ).

Un rayo paralelo al eje que suponemos incide sobre la cara plana, la atraviesa sin refractarse, siendo refractado sólo por la segunda cara.

Resulta entonces para la distancia focal  $f$  de la lente según (4):

$$(64) \quad f = f'_2 = -\frac{r_2}{n-1} = -\frac{r_2}{\frac{1}{2}} = -2r_2 = +80 \text{ cm}$$

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4} \text{ dptr}$$

Comparando este caso con el de la lente biconvexa (ejemplo 1), se deduce: **El poder convergente de una lente planoconvexa es la mitad del de una lente biconvexa simétrica de igual curvatura.**

Cuando la lente planoconvexa se halla en posición invertida, con cara plana hacia la derecha (fig. 21), tendremos análogamente según (1) para  $r_1 = 40 \text{ cm}$ ,  $r_2 = \infty$ :

$$(65) \quad f = f_1 = \frac{r_1}{n-1} = \frac{40}{\frac{1}{2}} = 80 \text{ cm}; D = \frac{5}{4} \text{ dptr}$$

(Para las lentes planocóncavas se obtienen valores de  $f$  y  $D$  de signo negativo, hallándose entonces el llamado "foco anterior" detrás de la lente y el "foco posterior" delante de la misma).

Si tales lentes planoconvexas y planocóncavas son consideradas como lentes delgadas, resulta para las magnitudes  $V_1H$  y  $V_2H'$  según (56):

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para el caso de fig. 20: } V_1H = +\frac{d}{n}; \quad V_2H' = 0; \\ \text{» » » » » 21: } V_1H = 0; \quad V_2H' = -\frac{d}{n} \end{array} \right.$$

Es decir, uno de los puntos principales de la lente planoconvexa coincide con el vértice de la cara curva, estando el otro situado en el interior de la lente y siempre más próximo de la cara curva que de la plana (dista aproximadamente  $\frac{1}{3}d$ ).

**Ejemplo 4 (meniscos):** Determinar la distancia focal de una lente cóncavoconvexa (menisco positivo o menisco convergente) y de una lente convexcóncava (menisco negativo o menisco divergente).

En el primer tipo de menisco (ver fig. 3 de § 4) el radio  $r_2$  de la segunda cara es mayor que el radio  $r_1$  de la primera, es decir,  $r_2 > r_1$ . La lente es más gruesa en el medio que en los bordes, resultando convergente.

En el segundo tipo de menisco (ver fig. 6 de § 4) el radio  $r_2$  es mayor que  $r_1$  en valor absoluto. La lente es más delgada en el medio que en los bordes, resultando divergente.

Según (54) y con valor  $n = 1,5$  tenemos para la distancia focal del menisco:

$$(67) \quad f = 2 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

**Ejercicio 1 (menisco convergente):** Siendo  $r_1 = 7 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 14 \text{ cm}$ , resulta:

$$f = 2 \frac{7 \cdot 14}{7} = 28 \text{ cm}$$

**Ejercicio 2 (menisco divergente):** Siendo  $r_1 = -7 \text{ cm}$ ,  $r_2 = -14 \text{ cm}$ , resulta:

$$f = 2 \frac{7 \cdot 14}{-7} = -28 \text{ cm}$$

*Combinaciones de lentes*

**Ejemplo 5:** Construcción de la imagen final  $P''Q''$  (Fig. 22) de un objeto  $PQ$  formada por medio de un sistema telescópico.

Por lo visto en el N° 15 sabemos que los focos de un sistema de dos lentes centradas se hallan en el infinito (sistema afocal) cuando coinciden el foco posterior de la primera lente con el foco anterior de la segunda. Podemos en este caso obtener la imagen final correspondiente a un objeto dado siguiendo el método primitivo indicado en el primer inciso del N° 2 del párrafo 3.

Se construirá del objeto  $PQ$  primero la imagen  $P'Q'$  formada por la primera lente. En el caso de fig. 22 tal imagen es real e invertida. Esta imagen sirve de objeto para la segunda lente, la que formará de  $P'Q'$  la imagen virtual  $P''Q''$ , aumentada e invertida en comparación con el objeto  $PQ$ , la que es la **imagen final** del objeto producida por el sistema.

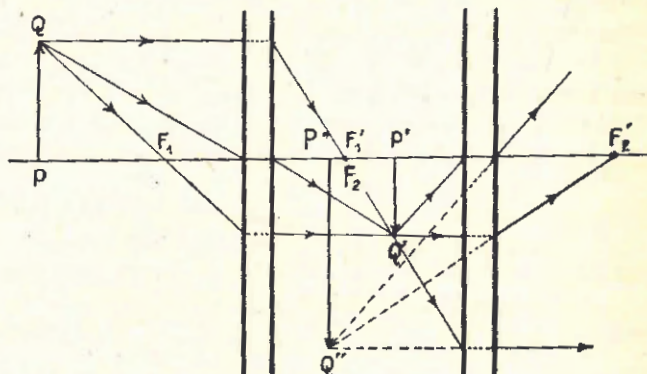


Fig. 22. — Construcción de la imagen final  $P''Q''$  de un objeto  $PQ$  mediante un sistema telescópico.

**Ejemplo 6:** Trátase de combinar dos lentes planoconvexas representadas en fig. 23. Sean los radios de curvatura de las caras curvas:

$$r_2 = -11 \text{ mm (de la primera lente),}$$

$$r_1 = + 8 \text{ ,, (de la segunda lente),}$$

siendo  $d = 9 \text{ mm}$  la distancia que las separa. Se pregunta: ¿Cuál es la distancia focal  $f$  del sistema?

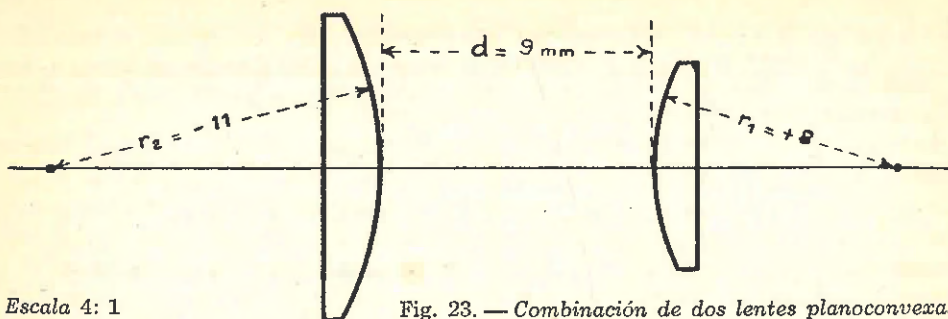
Designando por  $f_1$  y  $f_2$  las distancias focales de las dos lentes planoconvexas, respectivamente, tenemos según (64) y (65):

$$f_1 = -\frac{r_2}{n-1} = -\frac{11}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{\frac{1}{2}} = 22 \text{ mm}$$

$$f_2 = \frac{r_1}{n-1} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \text{ mm}$$

Teniendo presente que en lentes planoconvexas los vértices de las caras curvas son puntos principales (ver figs. 20 y 21), tenemos según (36) para la distancia focal  $f$  del sistema:

$$(68) \quad f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{22 \cdot 16}{22 + 16 - 9} = \frac{352}{29} = 12,1 \text{ mm}$$



Escala 4: 1

Fig. 23. — Combinación de dos lentes planoconvexas.

Es decir, la combinación de las dos lentes planoconvexas de distancias focales  $f_1 = 22$  mm y  $f_2 = 16$  mm, respectivamente, tiene una distancia focal menor que la de cada una de las lentes componentes. Si examinamos la fórmula (68) nos damos cuenta que esta **reducción de la distancia focal** expresada en las desigualdades (que se verifican simultáneamente):

$$(69) \quad \begin{cases} f < f_1 \\ f < f_2 \end{cases}$$

será siempre posible con tal que subsistan simultáneamente las relaciones:

$$(70) \quad \begin{cases} d < f_1 \\ d < f_2 \end{cases}$$

**Ejemplo 7.** Trátase de determinar la distancia focal  $f$  y los planos principales  $H$  y  $H'$  de otra combinación de lentes planoconvexas de distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  tales que el foco posterior  $F_1'$  de la primera lente coincida con el foco posterior  $F_2'$  de la segunda (ver fig. 24, parte de arriba). Se supone además que la posición relativa de las dos lentes sea tal que la cara curva de la primera esté orientada hacia la cara curva de la segunda, en la misma forma que en fig. 23. Sea  $d$  la distancia  $H_1H_2$  que separa las dos lentes. Entre las magnitudes  $f_1$ ,  $f_2$  y  $d$  se exige entonces que se cumplan las relaciones:

$$(71) \quad \begin{cases} d < f_2 \\ f_1 = f_2 + d \end{cases}$$

En el ejemplo que tratamos suponemos además que se verifica la proporción:

$$(72) \quad f_1 : d : f_2 = 9 : 4 : 5$$

Valores para el ejemplo de fig. 24:  $f_1 = 9$  mm,  $d = 4$  mm,  $f_2 = 5$  mm. Tenemos entonces:

$$(73) \quad \begin{cases} d = \frac{4}{9} f_1, & f_1 = \frac{9}{4} d \\ d = \frac{4}{5} f_2, & f_2 = \frac{5}{4} d \\ f_2 = \frac{5}{9} f_1, & f_1 = \frac{9}{5} f_2 \end{cases}$$

con lo que tendremos para la distancia focal  $f$  de la combinación según

$$(36): \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f_1 \cdot \frac{5}{9} f_1}{f_1 + \frac{5}{9} f_1 - \frac{4}{9} f_1} = \frac{1}{2} f_1 \end{aligned} \right.$$

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{\frac{9}{5} f_2 \cdot f_2}{\frac{9}{5} f_2 + f_2 - \frac{4}{5} f_2} = \frac{9}{10} f_2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Ejemplo de fig. 24: } f = \frac{9 \cdot 5}{9 + 5 - 4} = 4,5 \text{ mm}$$

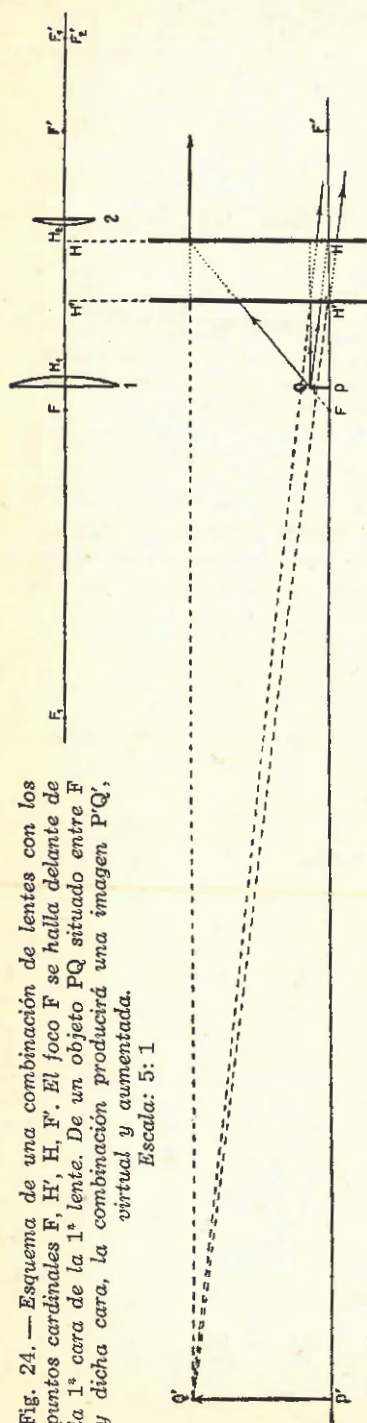


Fig. 24. — Esquema de una combinación de lentes con los puntos cardinales  $F, H, F', H, H'$ . El foco  $F$  se halla delante de la 1ª cara de la 1ª lente. De un objeto  $PQ$  situado entre  $F$  y dicha cara, la combinación producirá una imagen  $P'Q'$ , virtual y aumentada.  
Escala: 5: 1

Resulta entonces para la posición de los focos  $F$  y  $F'$  de la combinación, con tener en cuenta las (44) y (40) y las (73) y (74):

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1F &= H_1F_1 + \sigma = f_1 - f \frac{f_1}{f_2} = \\ & f_1 - \frac{1}{2}f_1 \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{10}f_1 \\ H_2F' &= H_2F_2' + \sigma' = f_2 - f \frac{f_2}{f_1} = \\ & f_2 - \frac{9}{10}f_2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{2}f_2 \end{aligned} \right.$$

Ejemplo de la fig. 24:  $H_1F = \frac{1}{10}f_1 = 0,9 \text{ mm}$   
 $H_2F' = \frac{1}{2}f_2 = 2,5 \text{ mm}$

En las distancias  $H_1F_1$  y  $H_2F_2'$  que figuran en las (75), por tratarse de lentes delgadas, hemos despreciado las distancias que separan los puntos principales de cada lente.

Para la posición de los puntos principales  $H$  y  $H'$  de la combinación, resulta, con tener en cuenta las (46) y (42), (74) y (72):

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1H &= -f \frac{d}{f_2} = -\frac{1}{2}f_1 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}f_1 \\ H_2H' &= -f \frac{d}{f_1} = -\frac{9}{10}f_2 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{2}{5}f_2 \end{aligned} \right.$$

Fig. 24:  $H_1H = -\frac{2}{5}f_1 = -\frac{2}{5} \cdot 9 = -3,6 \text{ mm}$   
 $H_2H' = -\frac{2}{5} \cdot f_2 = -\frac{2}{5} \cdot 5 = -2 \text{ mm}$

Como se desprende de las (75), los focos de la combinación se hallan situados fuera del sistema, el foco anterior  $F$  a  $\frac{1}{10} \cdot f_1$  delante de la primera lente y el foco posterior  $F'$  a  $\frac{1}{2} \cdot f_2$  detrás de la segunda.

En la parte inferior de la figura 24 se supone situado algún objeto  $PQ$  delante del sistema, entre la primera lente y el foco  $F$  de la combinación. Suponemos que en tales condiciones se producirá una imagen  $P'Q'$ , virtual, derecha y aumentada, la que podría ser observada por un ojo colocado detrás de la segunda lente.

El efecto de esta lente es, como ya dijimos en el ejemplo 6, el de una lente equivalente de más fuerte curvatura o sea una distancia focal más corta y, por ende, de mayor poder convergente.

Por tal propiedad esta combinación de lentes se aprovecha en la construcción de anteojos (ver fig. 25) Ella corresponde a un tipo medio del **ocular de Ramsden**, llamado así por haberlo introducido el óptico inglés J. RAMSDEN (1735 - 1800) en el año 1783.

**Ejemplo 8.** Consideramos ahora otra combinación de lentes planoconvexas, la que se diferencia de la anteriormente tratada en que la distancia  $d$  que las separa es mayor que la distancia focal de la segunda lente, es decir:

$$(77) \quad d > f_2$$

y que las lentes se hallan orientadas en tal forma que ambas vuelven sus caras curvas hacia el lado de los rayos incidentes (ver fig. 26). En lo demás se supone otra vez que los focos posteriores de las dos lentes coinciden. Entre las magnitudes  $f_1$ ,  $f_2$  y  $d$  del sistema se exige entonces que se cumplan las relaciones:

$$(78) \quad \begin{cases} d > f_2 \\ f_1 = f_2 + d \end{cases}$$

En el ejemplo que trataremos suponemos, además, que se verifique la proporción:

$$(79) \quad f_1 : d : f_2 = 3 : 2 : 1$$

Los valores que suponemos para fig. 26, son:

$$f_1 = 9 \text{ mm}, d = 6 \text{ mm}, f_2 = 3 \text{ mm}.$$

Obtendremos entonces para la distancia focal  $f$  de la combinación según (36) y (79):

$$(80) \quad \begin{cases} f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f_1 \cdot \frac{1}{3} f_1}{f_1 + \frac{1}{3} f_1 - \frac{2}{3} f_1} = \frac{1}{2} f_1 \\ f = \frac{3 f_2 \cdot f_2}{3 f_2 + f_2 - 2 f_2} = \frac{3}{2} f_2 \end{cases}$$

**Ejemplo de fig. 26:**  $f = \frac{1}{2} f_1 = 4,5 \text{ mm}$ .

Resulta entonces para la posición de los focos  $F$  y  $F'$  del sistema, con tener en cuenta el significado de  $\sigma$  y  $\sigma'$  según (5) y (6) de § 3 y los valores de estas magnitudes dados por las (44) y (40) de § 4, y finalmente las ecuaciones (80):

$$(81) \quad \begin{cases} H_1 F = H_1 F_1 + \sigma = f_1 - f \frac{f_1}{f_2} = f_1 - \frac{3}{2} f_1 = -\frac{1}{2} f_1 \\ H_2' F' = H_2' F_2' + \sigma' = f_2 - f \frac{f_2}{f_1} = f_2 - \frac{1}{2} f_2 = \frac{1}{2} f_2 \end{cases}$$

**Ejemplo de fig. 26:**  $H_1 F = -\frac{1}{2} f_1 = -4,5 \text{ mm}$ ,  $H_2' F' = \frac{1}{2} f_2 = 1,5 \text{ mm}$ .

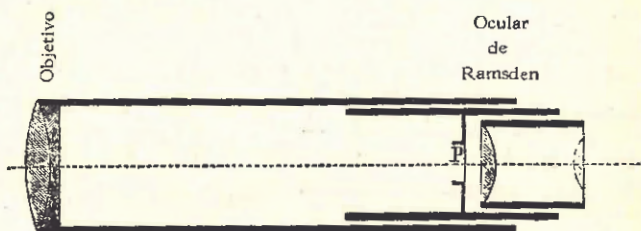


Fig. 25. — Esquema de un anteojo con ocular de Ramsden; p indica el sitio en el cual se halla ubicada una placa portaretículo.

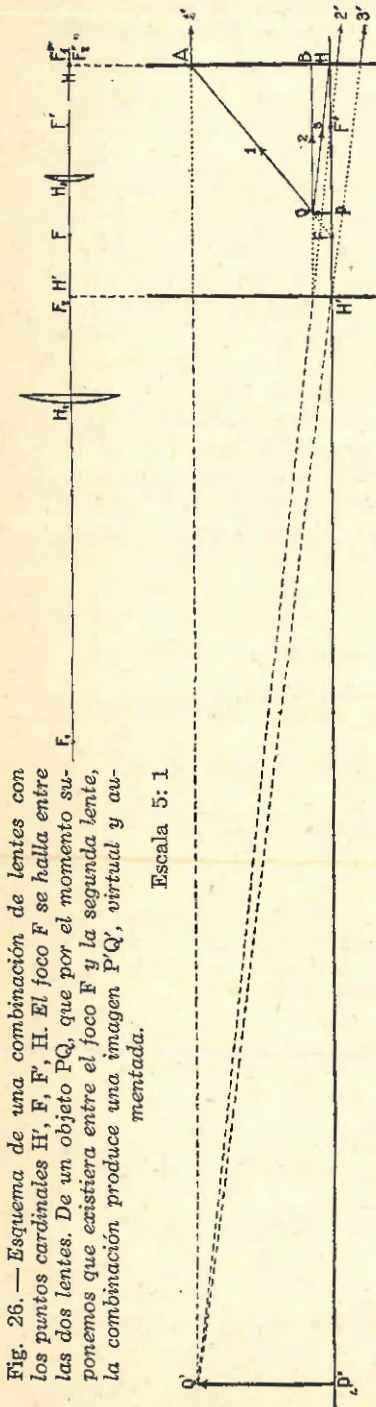


Fig. 26. — Esquema de una combinación de lentes con los puntos cardinales  $H, F, F', H'$ . El foco  $F$  se halla entre las dos lentes. De un objeto  $PQ$ , que por el momento suponemos que existiera entre el foco  $F$  y la segunda lente, la combinación produce una imagen  $P'Q'$ , virtual y aumentada.

Escala 5: 1

Para la posición de los puntos principales  $H$  y  $H'$  de la combinación resulta, con tener en cuenta las (46), (42), (80) y (79):

$$(82) \quad \begin{cases} H_1H = -f \frac{d}{f_2} = -\frac{1}{2} f_1 \cdot 2 = -f_1 \\ H_2H' = -f \frac{d}{f_1} = \frac{3}{2} f_2 \cdot \frac{2}{3} = -f_2 \end{cases}$$

Ejemplo de fig. 26:  
 $H_1H = -f_1 = -9 \text{ mm}$ ,  $H_2H' = -f_2 = -3 \text{ mm}$ .

Las ecuaciones (82) expresan que el punto principal anterior  $H$  de la combinación coincide con los focos posteriores  $F'_1$  y  $F'_2$  de ambas lentes, y el punto principal posterior  $H'$  con el foco anterior  $F_2$  de la segunda lente. Las ecuaciones (81) nos dicen que los focos  $F$  y  $F'$  del sistema se hallan situados en los puntos medios de las distancias focales de las dos lentes (ver fig. 26); y es de observar que  $F$  se halla dentro y  $F'$  fuera del sistema.

Esta combinación de lentes representa un tipo medio del llamado ocular de *Huygens*.

Se han supuesto en figura 26 los tres rayos  $QA, QB$  y  $QH$ , emitidos por el punto objeto  $Q$ , los que numeramos con 1, 2 y 3 y que, después de refractarse en las lentes del sistema, dan los rayos salientes 1', 2' y 3'. Estos rayos salen divergentes; pero, si suponemos situado el objeto  $PQ$  muy próximo al foco  $F$ , los rayos salientes resultan prácticamente paralelos.

La imagen virtual  $P'Q'$ , formada por esta combinación de lentes planoconvexas según figura 26, podría ser observada por un ojo colocado detrás de la segunda lente.

Ya en el año 1670 el físico holandés Cristóbal HUYGENS (fig. 27) construyó ese ocular que lleva su nombre, de acuerdo a las relaciones expresadas por las (78), y lo aplicó al anteojo (ver fig. 28) en posición tal que el foco  $F$  de la combinación coincidiera muy aproximadamente con el plano focal del objetivo del anteojo.

A continuación explicaremos la función del ocular de *Huygens* cuando se halle colocado en un anteojo en la forma indicada.



Fig. 27. — Cristóbal Huygens 1629 - 1695

Sea  $Q$  (fig. 29) un punto objeto que emite rayos sobre el objetivo de un anteojo. Si no existiera la primera lente de la combinación del ocular, dichos rayos se reunirían en un punto imagen  $Q'$  situado en el plano focal del objetivo. Pero, si se coloca el sistema del ocular en la forma indicada (coincidiendo aproximadamente los focos posterior del objetivo y anterior  $F'$  (ver fig. 29) de la combinación, y hallándose, en consecuencia, el punto  $Q'$  en el plano focal objeto de la combinación, la refracción producida por la primera lente de la combinación hace que los rayos procedentes del punto objeto  $Q$  ya no se reúnan en el punto  $Q'$ , sino en otro punto  $Q''$ , más próximo de la primera lente del ocular. Es por este efecto de la primera lente de la combinación, de aumentar la convergencia de los rayos y reunirlos en un punto más próximo a la lente, que la misma suele llamarse "lente colectora", mientras que la segunda lente de la combinación es denominada simplemente "lente ocular".

(Estas designaciones úsanse también para distinguir las dos lentes del ocular de Ramsden.)

La posición de la imagen  $P'' Q''$  de un objeto  $PQ$  puede fácilmente calcularse mediante la conocida "fórmula de la lente".

La posición de la imagen  $P'' Q''$  de un objeto  $PQ$  puede fácilmente calcularse mediante la conocida "fórmula de la lente".

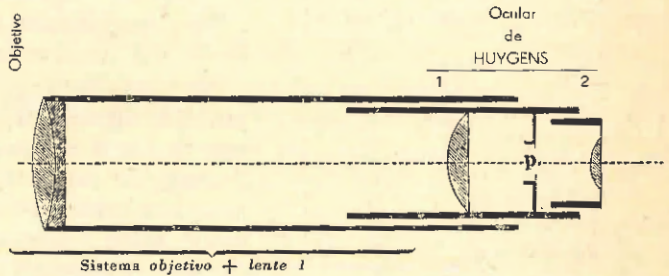


Fig. 28. — Esquema de un anteojo con ocular de Huygens; p indica el sitio del plano focal imagen del sistema "objetivo + lente 1", en el cual se halla ubicada una placa porta-retículo.

$$(83) \quad \frac{1}{a'} + \frac{1}{a''} = \frac{1}{f_1}$$

donde  $a'$  y  $a''$  expresan las distancias del objeto y de la imagen al punto principal  $H_1$  (ver figs. 26 y 29), respectivamente.

Siendo en este caso  $a' = H_1F = -\frac{1}{2} f_1$ , obtenemos de la (83) para  $a'' = H_1P''$  la siguiente ecuación:

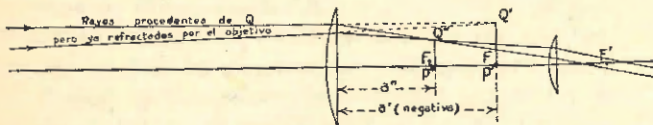


Fig. 29. — Se ilustra la formación de la imagen  $P'Q'$  (correspondiente a un objeto  $PQ$  no representado en la figura) que forma el objetivo solo y de la imagen real  $P''Q''$  producida por el sistema "objetivo + lente colectora".

$$\frac{1}{-\frac{1}{2} f_1} + \frac{1}{a''} = \frac{1}{f_1}$$

de lo cual resulta:

$$(84) \quad a'' = H_1P'' = \frac{f_1}{3}$$

En el ejemplo de las figuras 26 y 29 resulta:  $a' = -4,5 \text{ mm}$ ,  $a'' = 3 \text{ mm}$ .

Es decir, cuando el ocular de *Huygens* responde a la proporción (79), la imagen se produce en el punto medio de la distancia que separa las dos lentes (ver fig. 29). Es en este sitio que suele colocarse, como dijimos, una placa porta-retículo y un diafragma de campo (fig. 28).

**Conceptos del objeto real y del objeto virtual.** Recordamos los conceptos de las imágenes real y virtual, tratados en el N° 5 de § 1. De lo dicho en esa referencia se desprende que la imagen real de un punto objeto **A** es otro punto **A'** al cual realmente concurren los rayos emitidos por **A**, después de ser reflejados o refractados una o varias veces. En cambio, cuando los rayos emitidos por **A**, después de reflejarse o refractarse, tienen una divergencia tal que parecen proceder de un punto **A'**, aunque en realidad de allí no procedan, por impedirlo algún objeto material interpuesto, como espejos, lentes, etc., entonces el **A'** es llamado imagen virtual de **A**. (Véanse fig. 2 de § 1 y fig. 15 de § 4).

También se forma una imagen virtual **A'** de un punto **A** cuando los rayos emitidos por **A**, después de reflejarse o refractarse, si bien son convergentes y tienen direcciones como para concurrir a un punto **A'** en realidad no llegan a ese punto por impedirlo objetos materiales (espejos, lentes, etc.) interpuestos. (Por ejemplo en la figura 29: **P'Q'** es una imagen virtual de un objeto **PQ** no representado en la figura.)

Como en la teoría de los espejos y de las lentes las concepciones de "objeto" e "imagen" son recíprocas, es natural que no sólo en las imágenes sino también en los objetos tenemos que distinguir dos clases: los reales y los virtuales. Así un objeto real es, por ejemplo, un punto que emite rayos, los que, luego son reflejados o refractados. En cambio, hablaremos de un objeto virtual **A** cuando por reflexiones o refracciones anteriores se ha obtenido un conjunto de rayos (divergentes o convergentes) que parecen proceder de un punto **A**, o concurrir a tal punto, pero que en realidad no proceden de **A**, ni concurren a **A**, por impedirlo objetos materiales, y que este conjunto de rayos luego es reflejado o refractado otra vez. Por ejemplo, si

en la figura 29 consideramos **P''Q''** con relación a **P'Q'**, se nota que, de acuerdo a la definición dada, **P'Q'** es objeto virtual para la imagen (real) **P''Q''**.

En la figura 30 daremos otro ejemplo de un objeto virtual.

La lente divergente **L<sub>2</sub>** intercalada en el camino de los rayos que han atravesado la lente convergente **L<sub>1</sub>**, impide la formación de la imagen real **P'Q'**; pero los rayos emitidos por ejemplo por el punto **Q**, después de pasar la lente **L<sub>1</sub>**, y antes de pasar la **L<sub>2</sub>**, están

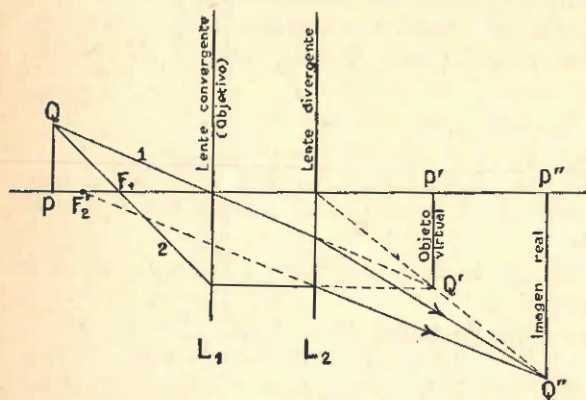


Fig. 30. — Se ilustra el efecto de la intercalación de una lente divergente **L<sub>2</sub>** en el camino de los rayos que han atravesado una lente convergente **L<sub>1</sub>** (objeto de un anteojo, por ejemplo). Ejemplo de un objeto virtual **P'Q'** y de la imagen real **P''Q''**. (**F'<sub>2</sub>** es el foco posterior de la lente divergente).

todos dirigidos hacia el punto  $Q'$ , que es objeto virtual para la imagen real  $Q''$ . En lugar de la imagen  $P'Q'$  se produce la imagen  $P''Q''$ , más alejada de la lente convergente, real y aumentada en relación al tamaño del objeto virtual  $P'Q'$ .

Las figuras 29 y 30 tratan de dos casos típicos del objeto virtual y su imagen real. La intercalación de una lente en el camino de los rayos que han atravesado el objetivo, tienen por efecto una modificación del poder convergente (o sea de la distancia focal) del sistema, correspondiendo a la combinación "objetivo + lente intercalada" un aumento del poder convergente o sea una disminución de la distancia focal, en comparación con la el objetivo simple, cuando la lente intercalada es convergente, y una disminución del poder convergente o sea un aumento de la distancia focal cuando la lente intercalada es divergente.

**Teleobjetivo fotográfico; concepto general.** Si se dirige un objetivo fotográfico de 150 mm de distancia focal hacia una casa de 10 metros de alto y situada a 1 km de distancia, la imagen formada sobre el vidrio esmerilado tiene la altura  $h$ :

$$h = \frac{10\,000}{1\,000\,000} \cdot 150\text{ mm} = 1,5\text{ mm}$$

Si se quisiera obtener dicha imagen con tamaño tres veces mayor, es decir, de un alto de 4,5 mm, sería necesario emplear un objetivo de 450 mm de distancia focal. Pero el montaje con objetivo de tan gran distancia focal requeriría dispositivos de dimensiones muy incómodas para el manejo del aparato. Tratóse entonces de conseguir una gran distancia focal sin aumentar sensiblemente las dimensiones del aparato, lo que se logró realizar con intercalar una lente divergente en el camino de los rayos, entre el objetivo propiamente dicho y el vidrio esmerilado. El sistema así obtenido (objetivo + lente divergente) se llama **teleobjetivo fotográfico**.

Está compuesto el teleobjetivo fotográfico de una primera lente convergente de distancia focal  $f_1$  (ver fig. 31) y de una segunda lente divergente de distancia focal  $f_2$ , con la condición de que el valor absoluto de  $f_1$  sea mayor que el de  $f_2$ , es decir:

$$(85) \quad |f_1| > |f_2|$$

La distancia  $d$  que separa las dos lentes puede ser fija o variable, dando lugar a dos tipos de teleobjetivos: el **teleobjetivo fotográfico fijo** y el **teleobjetivo fotográfico variable**.

Entre los años 1851 y 1856 el físico italiano J. Porro construyó por primera vez un teleobjetivo fotográfico.

Daremos a continuación un ejemplo de teleobjetivo fotográfico fijo.

**Ejemplo 9.** Calcular la distancia focal de un teleobjetivo fijo y la posición de los puntos principales del mismo, siendo  $f_1 = 8$  cm,  $f_2 = -7$  cm y  $d = 6$  cm (fig. 31).

Tanto para el dibujo del croquis de figura 31 como para el cálculo de los elementos pedidos suponemos lentes ideales, coincidiendo entonces los vértices de las caras de las lentes 1 y 2, respectivamente, con los centros  $C_1$  y  $C_2$  de las mismas.

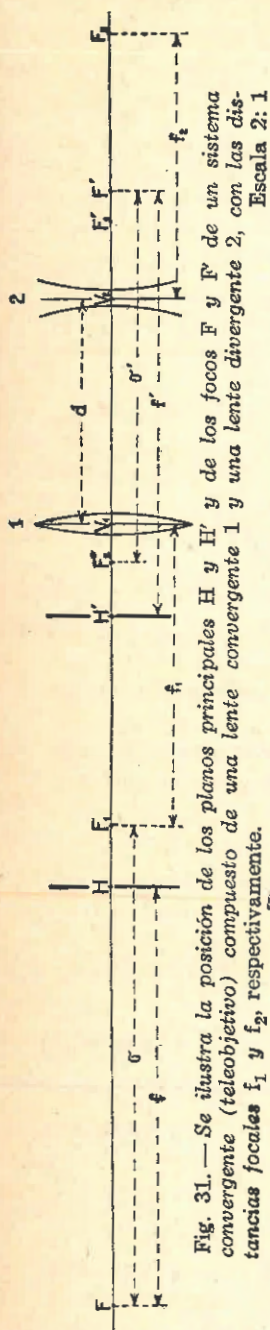


Fig. 31. — Se ilustra la posición de los planos principales  $H$  y  $H'$  y de los focos  $F$  y  $F'$  de un sistema convergente (teleobjetivo) compuesto de una lente convergente 1 y una lente divergente 2, con las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente. Escala 2: 1

Según (36) tenemos para la distancia focal  $f$  del sistema:

$$(86) \quad f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{8 \cdot (-7)}{8 - 7 - 6} = 11,2 \text{ cm.}$$

Es decir, la combinación de las dos lentes de distancias focales  $f_1$  de + 8 cm y  $f_2$  de - 7 cm, con la separación de  $d = 6$  cm, ha dado una lente equivalente convergente de distancia focal de 11,2 cm. (Una combinación con  $f_1 = + 10$  cm,  $f_2 = - 7$  cm y  $d = 5$  cm, hubiera dado una lente equivalente convergente de distancia focal de 35 cm.)

Para las magnitudes interfocales  $\sigma$  y  $\sigma'$  según las (44) y (40) resulta:

$$(87) \quad \begin{cases} \sigma = -f \frac{f_1}{f_2} = -11,2 \frac{8}{-7} = +12,8 \text{ cm,} \\ \sigma' = -f \frac{f_2}{f_1} = -11,2 \frac{-7}{8} = +9,8 \text{ cm.} \end{cases}$$

Luego según (12) y (13) de § 3, para las magnitudes  $V_1 F = C_1 F$  y  $V_2 F' = C_2 F'$ :

$$(88) \quad \begin{cases} C_1 F = f_1 + \sigma = 8 + 12,8 = +20,8 \text{ cm,} \\ C_2 F' = f_2 + \sigma' = -7 + 9,8 = +2,8 \text{ cm.} \end{cases}$$

y, según (16) y (17) de § 4, para las cantidades  $V_1 H = C_1 H$  y  $V_2 H' = C_2 H'$ :

$$(89) \quad \begin{cases} V_1 H = C_1 H = C_1 F - f = 20,8 - 11,2 = +9,6 \text{ cm,} \\ V_2 H' = C_2 H' = C_2 F' - f = 2,8 - 11,2 = -8,4 \text{ cm.} \end{cases}$$

Para darnos cuenta en general de la posición de los planos principales  $H$  y  $H'$  del sistema del teleobjetivo, establecemos las expresiones de las distancias  $V_1 H$  y  $V_2 H'$  en función de los datos  $f_1$ ,  $f_2$  y  $d$ . Obtenemos entonces, con tener en cuenta las (89), (88), (87) y (86):

$$\begin{aligned} V_1 H &= C_1 F - f \\ &= f_1 + \sigma - f \\ &= f_1 - f \frac{f_1}{f_2} - f = f_1 - f \left( \frac{f_1}{f_2} + 1 \right) \\ &= f_1 - \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \cdot \frac{f_1 + f_2}{f_2} = f_1 \left( 1 - \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2 - d} \right) \end{aligned}$$

o sea:

$$V_1 H = f_1 \frac{-d}{f_1 + f_2 - d}$$

y análogamente:

$$\begin{aligned}
 V_2 H' &= C_2 F' - f \\
 &= f_2 + \sigma' - f \\
 &= f_2 - \frac{f_2}{f_1} - f = f_2 - f \left( \frac{f_2}{f_1} + 1 \right) \\
 &= f_2 - \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \cdot \frac{f_1 + f_2}{f_1} \\
 &= f_2 \left( 1 - \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2 - d} \right)
 \end{aligned}$$

o sea:

$$(91) \quad \boxed{V_2 H' = f_2 \frac{-d}{f_1 + f_2 - d}}$$

Ejemplos de figura 31:  $V_1 H = 8 \frac{-6}{8-7-6} = +9,6 \text{ cm},$

$$V_2 H' = -7 \frac{-6}{8-7-6} = -8,4 \text{ cm}.$$

Las fórmulas (90), (91) y (86) nos dan la posición de los planos principales y la distancia focal de cualquier teleobjetivo.

El dispositivo del **teleobjetivo con lente divergente variable** se emplea hoy en gran escala en la construcción de los modernos anteojos geodésicos y topográficos.

## 22. Resumen de fórmulas sobre la lente y combinaciones de lentes.

N° 1	$f_1 = \frac{r_1}{n-1}$	$f_1' = \frac{n \cdot r_1}{n-1}$	Ver (1) y (2)
> 2	$f_2 = -\frac{n \cdot r_2}{n-1}$	$f_2' = -\frac{r_2}{n-1}$	> (3) y (4)
	$\Delta = d - f_1' - f_2$		> pág. 73
	$R = (n-1)d + n(r_2 - r_1) = (n-1) \cdot \Delta$		> (9) y (10)
> 3	$f = f' = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1)R}$		> (11)
> 4	$F_1 F = \sigma = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta}$	$F_2' F' = \sigma' = \frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta}$	> (12) y (13)
> 5	$V_1 F = r_1 \frac{(n-1)d + n \cdot r_2}{(n-1)R}$	$V_2 F' = r_2 \frac{n \cdot r_1 - (n-1)d}{(n-1)R}$	> (14) y (15)
> 6	$V_1 H = r_1 \frac{d}{R}$	$V_2 H' = -r_2 \frac{d}{R}$	> (18) y (19)

Nº 7  $HH' = p = \frac{(dn - 1)(d = r_2 - r_1)}{R}$  Ver (20)

» 8  $x \cdot x' = f^2$  ecuación de Newton simplificada » (21)

» 9  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$  "Fórmula de la lente" » (24)

» 10  $\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} = \frac{a'}{a}$  » (31)

» 11  $\gamma = \frac{\text{tg} \mu'}{\text{tg} \mu} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'} = \frac{a'}{a}$  » (32)

Lente delgada.

Nº 12  $f = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n - 1)(r_2 - r_1)}$  Ver (54)

» 13  $D = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  Pág. 86

Algunas formas especiales de lentes delgadas.

Lente simétrica:

Nº 14 Para  $n = 1,5$   $\begin{cases} f = \frac{r}{2(n-1)} \\ f = r \end{cases}$  Ver (60)  
» (61)

Lente planoconvexa:

» 15 Para  $n = 1,5$   $\begin{cases} f = \frac{r_1}{n-1} \text{ ó } -\frac{r_2}{n-1} \\ f = 2r_1 \text{ o } f = -2r_2 \end{cases}$  Ver (64) y (65)

Combinación de lentes.

Nº 16  $f = f' = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$  Ver (36)

» 17  $D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$  » (37)

» 18  $F_1 F = \sigma = -f \frac{f_1}{f_2}$   $F_2 F' = \sigma' = -f \frac{f_2}{f_1}$  » (44) y (40)

» 19  $H_1 H = -f \frac{d}{f_2}$   $H_2 H' = -f \frac{d}{f_1}$  » (46) y (42)

Teleobjetivo:

» 20  $V_1 H = f_1 \frac{-d}{f_1 + f_2 - d}$   $V_2 H' = f_2 \frac{-d}{f_1 + f_2 - d}$  Ver (90) y (91)

## § 5.

## Aberraciones

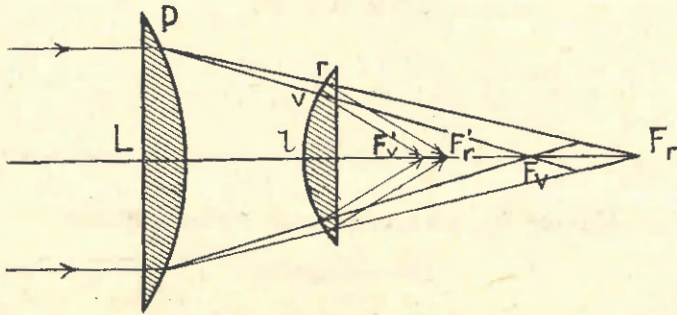


Figura sintética sobre aberración cromática.

## a) Aberración esférica.

1. Explicación de la aberración esférica para dos clases de rayos incidentes: rayos paralelos al eje procedentes de puntos objetos lejanos, y rayos salientes de puntos axiales próximos a la lente.

Las leyes y propiedades relativas a la refracción en superficies esféricas y formación de la imagen, deducidas en los párrafos 2 a 4, se verifican siempre con extrema aproximación cuando se trata de rayos que inciden paralelos al eje, en la proximidad del centro óptico de la lente (**rayos paraxiales**). Tales rayos, una vez refractados por la lente, se reunirán prácticamente todos en un único punto imagen, llamado **foco**. Pero, sin embargo, se reúnen en puntos axiales algo diferentes los rayos paraxiales un poco más alejados del eje en comparación con el punto de reunión de los rayos muy próximos al eje. La figura 1 ilustra este fenómeno.

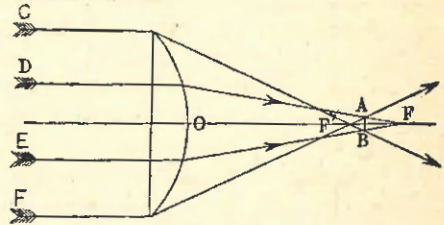


Fig. 1. — Se ilustra el fenómeno de la aberración esférica. F, foco de los rayos centrales; F' foco de los rayos marginales; AB, diámetro de un círculo de dispersión.

Los rayos marginales **C** y **F**, que pertenecen a un cilindro de rayos paralelos provenientes de un objeto lejano, se reúnen en el punto **F'**, que puede llamarse el **foco** para tales **rayos marginales**. En cambio, los rayos **D** y **E**, pertenecientes a un cilindro de rayos de más pequeña abertura, se reúnen en otro punto **F**, el que, como se puede demostrar matemáticamente, se halla un poco más distante de la lente que el punto **F'**. Es decir, las superficies cilíndricas de rayos paralelos al eje tienen todos sus focos particulares, estando esos focos comprendidos entre el foco **F** correspondiente a los rayos sumamente próximos al eje y el foco **F'** correspondiente a los rayos marginales. A esta variedad de foco se le llama a veces también **aberración focal**. El segmento **FF'** expresa la magnitud del fenómeno.

Cuando se trata de lentes con superficies esféricas, se nota un fenómeno análogo si de un **punto objeto axial**, próximo a una lente, salen rayos que inciden sobre la misma con muy distintos ángulos de divergencia respecto al eje.

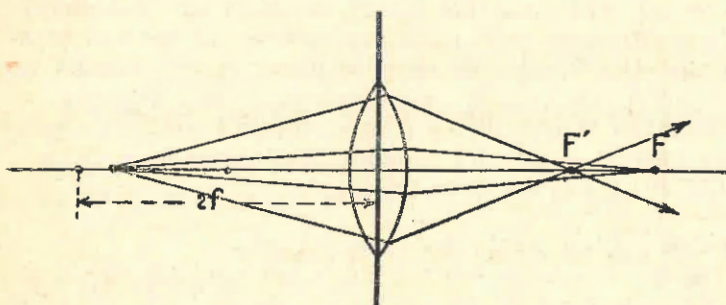


Fig. 2. — Se ilustra (suponiendo una lente ideal) el fenómeno de la aberración esférica. Desde un punto axial situado entre la simple y la doble distancia focal, salen rayos de diferente divergencia, formando una imagen real.

Consideramos el caso en que el punto objeto axial que emite rayos, se encuentra entre la simple y la doble distancia focal (ver fig. 2), de modo que se forma del mismo una **imagen real**. Los rayos marginales que forman un cono de gran abertura, se reúnen en un punto más próximo a la lente que los rayos de pequeño ángulo de divergencia.

Generalmente se designa con el nombre de **aberración esférica** este defecto de las lentes, que consiste en no reunirse exactamente en un mismo punto imagen los rayos que salen de un punto objeto.

En los casos de hallarse el objeto dentro de la simple distancia focal (ver fig. 3), se forman **imágenes virtuales**, y es de observar que las imágenes formadas por los rayos marginales (que divergen siempre) se encuentran más alejadas de la lente que las imágenes formadas por rayos centrales.

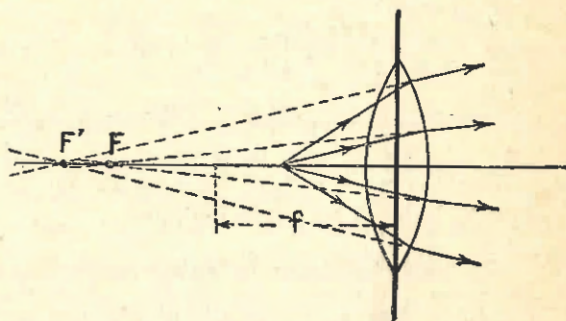


Fig. 3. — Se ilustra (suponiendo una lente ideal) el fenómeno de la aberración esférica. Desde un punto axial situado dentro de la simple distancia focal, salen rayos de diferente divergencia, formando una imagen virtual.

## 2. Consecuencias de la aberración esférica.

Las diferencias entre los lugares de reunión de los rayos marginales y los rayos centrales salientes del mismo punto objeto es tanto mayor cuanto mayor sea el ángulo de abertura del cono de los rayos emitidos por el punto objeto. La aberración esférica tiene por consecuencia una **falta de claridad y nitidez** de la imagen. En lugar de puntos imágenes luminosos, se formarán sobre una pantalla o sobre la retina del ojo pequeños círculos, llamados **círculos de dispersión** (de un cierto diámetro **AB**, ver fig. 1), es decir, pequeñas superficies en lugar de puntos. Similares círculos se forman por todos los puntos de un objeto, y esos círculos se superponen en parte, produciéndose entonces en conjunto una imagen a la cual falta nitidez y la que parece cubierta de un ligero velo.

## 3. Los defectos del ojo tienen su ventaja.

A pesar de la aberración esférica de las lentes, las imágenes producidas sobre la retina del ojo son prácticamente nítidas, debido a la circunstancia de que el ojo, por la constitución de la retina, no es capaz de percibir separados dos puntos cuando los rayos, que de ellos llegan al ojo, forman un ángulo menor de un minuto de arco. En consecuencia, no hay necesidad de que los instrumentos ópticos formen de los puntos objetos exactamente puntos imágenes, siendo suficiente que los círculos de dispersión producidos sean tan pequeños que el ojo los vea como puntos.

## 4. Aberración esférica mínima. Lente de la mejor forma.

Con una sola lente la aberración esférica no puede ser completamente eliminada, pero sí reducida a un mínimo para una determinada distancia del objeto. Esto se realiza mediante una adecuada elección de los radios de curvatura. Una tal lente, en la cual resulta reducida a un mínimo la aberración esférica para un objeto infinitamente lejano, se llama "**lente de la mejor forma**".

Se puede demostrar que esa lente es de forma biconvexa, y que para ella existe entre los radios de curvatura de las dos caras,  $r_1$  y  $r_2$ , la siguiente proporción:

$$(1) \quad r_1 : r_2 = (4 + n - 2n^2) : (2n^2 + n) \quad (\text{siendo } n \text{ el índice de refracción})$$

la que para  $n = \frac{3}{2}$  nos da:

$$(2) \quad r_1 : r_2 = 1 : 6$$

Es decir, la aberración esférica, para rayos que proceden del infinito, es mínima en una lente biconvexa (con  $n = \frac{3}{2}$ ), en la cual se verifica la relación:  $r_1 : r_2 = 1 : 6$ . La cara de mayor curvatura debe estar dirigida hacia el lado de los rayos incidentes.

## 5. Importancia de la lente planoconvexa.

En lo que se refiere a la aberración esférica, la lente planoconvexa se aproxima mucho a la lente de la mejor forma cuando aquélla se halla en posición tal que la cara curva esté dirigida hacia los rayos incidentes (ver fig. 28 de § 4). Cuando el objeto es cercano y se encuentra situado próximo al foco anterior (ver fig. 24, § 4), se volverá convenientemente la cara plana hacia el mismo.

Por permitir así la fácil reducción de la aberración esférica, en diferentes casos, la lente planoconvexa es empleada tan frecuentemente en la construcción de instrumentos ópticos.

#### 6. Sistema aplanático; definición.

Con emplear dos o más lentes planoconvexas en posición adecuada, es posible eliminar casi por completo la aberración esférica para una determinada distancia del objeto. Llámase un tal sistema corregido del defecto de la aberración esférica, **sistema aplanático**.

Fué NEWTON el primero que se ocupó de la reducción de la aberración esférica.

Pero la nitidez de la imagen formada por una lente no está afectada solamente por la aberración esférica sino también por otro fenómeno que tiene su origen en la descomposición de la luz, y que se denomina **aberración cromática**.

#### *Aberración cromática.*

#### 7. Descomposición de la luz blanca. Dispersión cromática; su medida.

Por lo expuesto en págs. 28 y siguientes sabemos que la luz solar es una luz compuesta, la que al caer sobre un prisma o una lente se descompone en colores simples, de los cuales hemos distinguido 7 principales. Es el fenómeno de la **dispersión cromática**. Sabemos que el conjunto de tales colores se llama **espectro solar**, y si se reúnen otra vez tales colores, recomponen la luz blanca. Sabemos también que la descomposición de la luz blanca realizada mediante un experimento clásico que por primera vez lo efectuó NEWTON, tiene por causa los diferentes índices de refracción de las diversas clases de luz, correspondientes a los colores, índices que aumentan del rojo al violeta. Descompónese así un rayo solar en una lente de vidrio **crown** (ver pág. 29), formando el conocido espectro, en que los índices del rojo al violeta varían de 1,52 a 1,55, mientras que en el **flint** varían de 1,62 a 1,68. Esto significa que, además de ser la refracción más fuerte en el flint que en el crown en la proporción de 15 a 16 aproximadamente, existe para el flint una diferencia notablemente más grande entre los índices de rojo y violeta, por lo cual **el flint produce una dispersión cromática mucho más fuerte que el crown**.

La **medida para la dispersión cromática** en el vidrio crown la da la diferencia entre los índices de refracción correspondientes a las luces roja y violeta. Esta diferencia resulta para el vidrio crown aproximadamente de:  $1,55 - 1,52 = 0,03$ , mientras que para el flint esa diferencia es de  $1,68 - 1,62 = 0,06$ , es decir, **la dispersión en el vidrio flint es más o menos la doble de la dispersión en el vidrio crown**.

Por tanto, si a una lente convergente de crown se le adosa una divergente de flint, pero de doble distancia focal, ésta anula la dispersión cromática producida por la lente convergente, pero sin cambiar por completo el carácter del sistema, que siempre queda convergente, aunque la convergencia se halle reducida más o menos a la mitad.

### 8. Aberración cromática. Sistema acromático; definición.

El defecto que la dispersión en las lentes produce para la visión clara se designa con el nombre de **cromatismo** o **aberración cromática**. Si se deja subsistir tal defecto, se forman imágenes confusas, bordeadas de distintos colores. Llámase **acromático** (\*) a todo sistema óptico en que se halla corregido el cromatismo por medio de dos lentes.

### 9. Acromatismo visual. Chester Moor Hall y John Dollond.

Más de un siglo había transcurrido desde la invención del antejo (año 1608) hasta que en Inglaterra se realizaron los primeros esfuerzos para reducir los errores de cromatismo en las lentes.

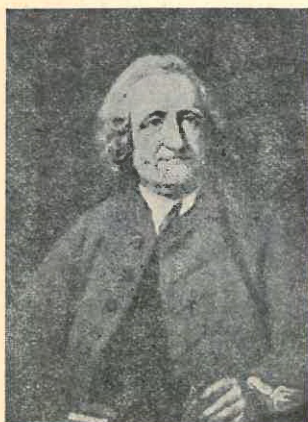


Fig. 4  
John Dollond  
1706 - 1761

Es en el año 1728 que el físico inglés CHESTER MOOR HALL indicó que la parte principal de la aberración cromática desaparece cuando se logra hacer coincidir la imagen formada por los rayos rojos con la formada por los rayos azules, combinando lentes de distintas clases de vidrio para llegar al llamado **acromatismo visual**; el que nos interesa particularmente por su frecuente aplicación en los instrumentos de observación, topográficos, geodésicos y astronómicos.

En el año 1758, otro inglés el óptico John DOLLOND obtuvo la primera patente para la construcción de lentes acromáticas. DOLLOND repitió el experimento de NEWTON relativo al espectro solar; y basándose en sus investigaciones en el principio de corrección establecido por HALL, llegó a la invención de la lente acromática y la construcción industrial de los primeros ejemplares de la misma. Publicó por primera vez el resultado de sus trabajos sobre el tópico, y en consecuencia de ello es considerado como el **inventor** de la lente acromática.

### 10. Dos clases típicas de sistemas acromáticos y su combinación.

La reducción del cromatismo es posible realizar con las llamadas **combinaciones acromáticas**.

Como el fenómeno del cromatismo tiene su origen en la dispersión, es lógica la idea de producir, con el objeto de anular dicho defecto, la recomposición de la luz blanca mediante una combinación de lentes. Para tal recomposición de la luz blanca existen dos **formas típicas** de combinaciones de lentes:

(\*) *Acromático*, del griego *achromátikos*, sin color, compuesto del prefijo griego privativo *a*, y *chroma*, color.

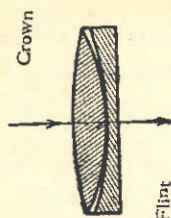


Fig. 5. — Objetivo acromático (lente convergente de crown con lente divergente de flint). La flecha indicada la dirección de los rayos incidentes.

1) El sistema se compone de dos lentes adosadas de distintas clases de vidrio, una lente convergente de **crown** (ver fig. 5) con otra divergente de **flint** (sistema adoptado en los objetivos de anteojos).

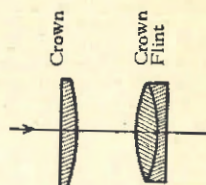


Fig. 6. — Ocular ortoscópico de Kellner. La lente ocular del sistema (que es un ocular de Ramsden) es una lente acromática.

2) El sistema se compone de dos lentes de la misma clase de vidrio, pero convenientemente distanciadas (oculares de RAMSDEN y HUYGENS).

Combinando la forma 2) con la 1), obtiéndose un sistema conocido por el nombre de "ocular ortoscópico de Kellner" (fig. 6). Kellner lo construyó por primera vez en el año 1849. El ocular ortoscópico tiene muchísimas aplicaciones en la construcción de anteojos para los modernos instrumentos topográficos y geodésicos.

### 11. Sistema acromático de gran distancia focal (objetivo de antejo).

Cuando se quiere obtener un sistema acromático convergente de gran distancia focal, se emplean generalmente dos lentes de distintas clases de vidrio, una lente convergente de **crown** y otra divergente de **flint**, adosándolas en la forma indicada en figura 5.

Como el vidrio flint tiene un poder de dispersión mucho mayor que el crown, es posible eliminar la dispersión producida por la lente convergente de crown por medio de una divergente de flint de potencia menor.

Con usar entonces la lente divergente de flint, de una distancia focal más grande (la doble, por ejemplo), se consigue realizar (además de la reducción de la aberración esférica), una **combinación acromática**, con potencia menor que la de la lente convergente simple.

Es debido a esa destacada propiedad de tal combinación de lentes que ella se emplea casi en todos los objetivos de anteojos (ver fig. 19, pág. 17, y figs. 25 y 28 de § 4).

### 12. Explicación del efecto de la "lente ocular" del sistema ocular de Ramsden, en cuanto se refiere a la reducción del cromatismo.

Suponemos que de un punto lejano, situado en el eje de una lente planoconvexa, salgan rayos que inciden sobre dicha lente (ver fig. 7), y que de estos rayos usemos sólo los que se encuentran refractados y descompuestos aproximadamente a una determinada distancia  $a$  del eje. Eso lo conseguimos

por medio de un diafragma **DD**, que impide el paso tanto de rayos más centrales como más excéntricos que los deseados. Este diafragma tiene por finalidad impedir que la aberración esférica intervenga en el experimento sobre la **dispersión cromática** que se va a explicar (ver fig. 7).

Los rayos que atraviesan la lente a una determinada distancia **a** del eje, son refractados y descompuestos en sus colores en la cara curva, de tal modo que los rayos violetas **v** (que tienen mayor índice de refracción) son más fuertemente refractados que los rayos rojos **r**. Reúnense entonces los primeros en un foco **F<sub>v</sub>**, que se encuentra más próximo de la lente que el foco **F<sub>r</sub>** de los rayos rojos.

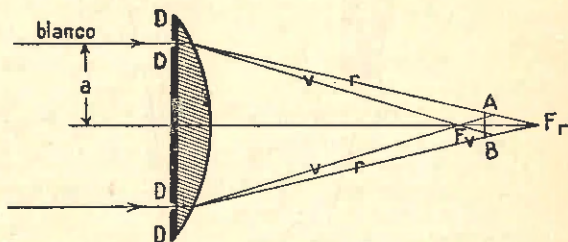


Fig. 7. — Se ilustra el fenómeno de la descomposición de un rayo de luz blanca en sus colores. **F<sub>v</sub>**, foco de los rayos violetas; **F<sub>r</sub>**, foco de los rayos rojos; **DD**, diafragma; **AB**, diámetro de un círculo de dispersión cromática (con borde de color rojo).

En consecuencia, cada color tiene su foco particular, estando esos focos comprendidos entre los focos de los colores extremos del espectro, es decir entre **F<sub>r</sub>** y **F<sub>v</sub>**. Esta dispersión cromática tiene por efecto una falta de claridad de la imagen. En lugar de puntos imágenes correspondientes a puntos objetos, se forman sobre una pantalla o la retina del ojo, generalmente para cada clase de luz, pequeños círculos, los llamados **círculos de dispersión cromática** (de un cierto diámetro **AB**, ver fig. 7). Todos los puntos de un objeto dan lugar a tales círculos de colores, los que se superponen en parte, produciéndose entonces en conjunto una imagen con bordes coloreados.

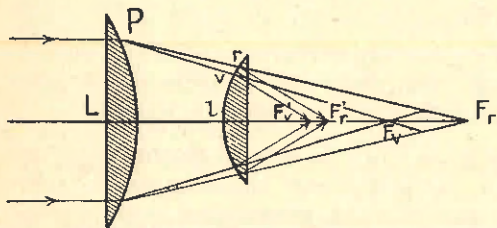


Fig. 8. — Se ilustra el efecto de la "lente ocular" **l** del sistema ocular de Ramsden. Está indicado también el efecto de la lente colectora **L** sola. Se nota que la distancia **F<sub>r</sub>'F<sub>v</sub>'** es mucho menor que la distancia **F<sub>v</sub>F<sub>r</sub>**.

Pero si los rayos rojos y violetas, antes de haberse separado sensiblemente después de la primera refracción, pudieran ser refractados nuevamente (por otra lente plano convexa) de manera de seguir luego paralelos entre sí (ver fig. 8), entonces los rayos de diversos colores se reunirán sobre el eje en puntos muy poco distantes entre sí, es decir, aproximadamente en un solo punto.

Con el objeto de lograr el paralelismo de los rayos rojos y violetas, colócase a una distancia apropiada de la lente colectora **L** y entre ésta y el foco **F<sub>v</sub>** una segunda lente **l**, la llamada **lente ocular** del sistema de RAMSDEN (ver ejemplo 7 de § 4), de más pequeña distancia focal que **L**. Esta lente

ocular  $l$  producirá entonces en  $v$  y  $r$  una segunda refracción de los rayos violeta y rojo. En dicha refracción el rayo rojo, que incide en  $r$  sobre la lente  $l$ , es más fuertemente refractado que el rayo violeta, por ser más grande el ángulo de incidencia del primero. Y sólo dependerá de la adecuada elección de la distancia que separa las dos lentes el conseguir que sea suficientemente grande la diferencia entre los ángulos de incidencia en los puntos  $r$  y  $v$ , para que el rayo rojo, no obstante su menor refrangibilidad, sea más fuertemente desviado de la dirección  $Pr$  que el rayo violeta de la dirección  $Pv$ . Entre todas las distancias posibles entre las dos lentes habrá una en la cual la segunda refracción producirá el paralelismo de los rayos rojo y violeta. Cuando los rayos rojos y violeta llegan paralelamente entre sí al ojo éste recibirá aproximadamente la impresión de un rayo blanco.

Para conseguir que los rayos de luz blanca que caen sobre  $L$  salgan de la lente  $l$  como rayos blancos, es necesario que se cumplan ciertas condiciones relativas a la elección de las distancias focales de las dos lentes componentes y de la distancia que las separa.

**13. Combinación acromática convergente de pequeña distancia focal, realizada en el sistema ocular de Huygens con dos lentes planoconvexas de la misma clase de vidrio.**

Si se quiere obtener una combinación acromática en un ocular de HUYGENS (ejemplo 8 de § 4) con dos lentes de la misma clase de vidrio, se puede demostrar matemáticamente que se logra el efecto buscado en la forma más perfecta cuando, además de cumplirse las relaciones (78) de § 4, se verifica la condición de que la distancia que separa las dos lentes es la **media aritmética** de las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  de las mismas, es decir, cuando:

$$(3) \quad d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Podemos demostrar que esta última condición conduce directamente a la proporción (79) de § 4, o sea:

$$f_1 : d : f_2 = 3 : 2 : 1$$

En efecto, como según la (78) de § 4, se tiene:

$$(4) \quad f_1 = f_2 + d$$

la (3) se transforma en: 
$$d = \frac{f_2 + d + f_2}{2}$$

de donde se obtiene: 
$$\frac{d}{2} = f_2$$

Por consiguiente:

$$(5) \quad d = 2 f_2$$

Introduciendo este valor en la (4), resulta:

$$(6) \quad f_1 = 3 f_2$$

Las ecuaciones (5) y (6) demuestran que las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  y la distancia  $d$  satisfacen la proporción (79) de § 4, o sea:

$$f_1 : d : f_2 = 3 : 2 : 1$$

siendo por tanto esta proporción una consecuencia de las condiciones (78) de § 4 y (3) de este párrafo.

---

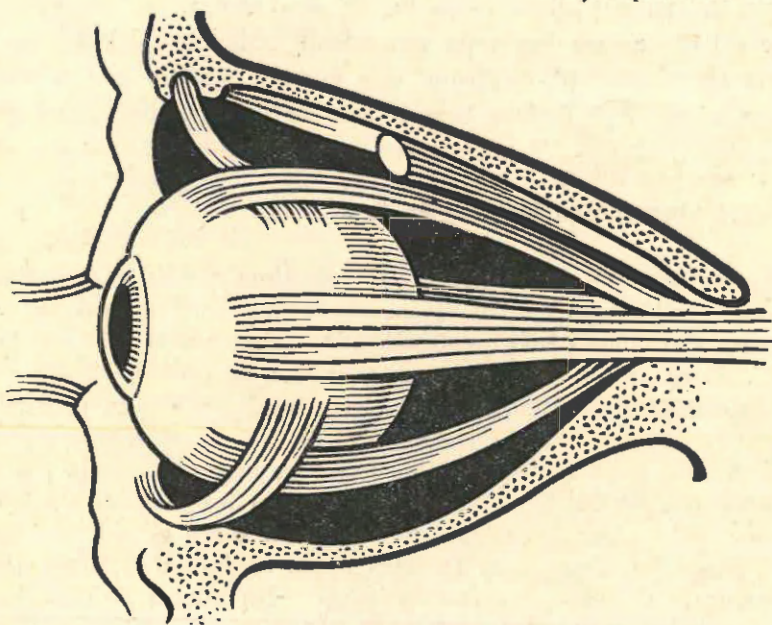
## § 6

## El ojo

*“Wär nicht das Auge sonnenhaft,  
Die Sonne könnt es nicht erblicken”.*

GOETHE.

*(Si el ojo no tuviera substancia solar,  
El ojo no podría ver al Sol)*



### Experimento.

Cuando durante un día de Sol practicamos en uno de los postigos de un cuarto oscuro un pequeño agujero, notamos que sobre una pantalla colocada a cualquier distancia del agujero o sobre la pared opuesta del cuarto, se forma la imagen del paisaje situado frente a dicho agujero. Verificase en este experimento de un modo muy sencillo la validez del primer principio fundamental de la óptica geométrica, el **principio de la propagación rectilínea de la luz** (ver pág. 3). Cada punto objeto y el correspondiente punto imagen están alineados con el centro de la abertura, lo que permitiría calcular las dimensiones de la imagen en base a las del objeto y

las respectivas distancias desde el objeto y la imagen hasta el orificio. Por causa del reducido grosor del haz de luz incidente, tal imagen será poco luminosa, tanto menos cuanto más alejada de la abertura se halle la pantalla o pared en cuestión. Es de notar que la distancia de la imagen puede elegirse arbitrariamente y no depende de la distancia del objeto.

Sobre este experimento se funda la **cámara oscura de agujero** (sin objetivo), cuya invención se debe a ROGER BACON (1214 - 1294).

## 2. Cámara oscura de agujero.

Es una caja de cartón o de otro material adecuado, una de cuyas caras está constituida por un vidrio. En la cara opuesta se halla practicada una pequeña abertura de unos 2 mm de diámetro. El operador que se protege de la luz por medio de un paño negro, puede ver sobre el vidrio esmerilado la imagen del paisaje situado delante de la abertura.

Puede así observarse con toda comodidad la imagen del Sol sin necesidad de **vidrio ahumado**. Fue empleada esta cámara sencilla por el astrónomo KEPLER para medir el ángulo bajo el cual se ve el diámetro del Sol (diámetro aparente, ver N° 21) y para ver las manchas solares.

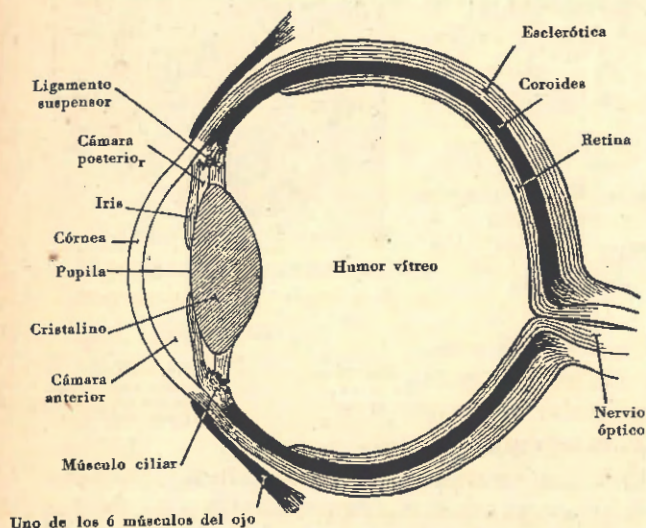
## 3. Cámara oscura con lente objetiva.

Cuando agrandamos la abertura del sencillo aparato que acabamos de mencionar, y colocamos dentro de la misma una lente convergente, obtendremos un instrumento más perfeccionado, vulgarmente llamado "**cámara oscura**". Si se coloca un vidrio esmerilado a una distancia conveniente, se verá una imagen considerablemente más luminosa que la producida por la cámara de agujero, por ser cada punto de imagen el vértice de un cono luminoso de base relativamente ancha, base que está constituida por toda la abertura en que se halla la lente. Sólo cuando los vértices de los conos luminosos emitidos por los puntos objetos caen sobre el vidrio esmerilado, se produce una imagen nítida. De otro modo se formarán sobre aquél, en lugar de puntos luminosos correspondientes a los puntos objetos, pequeños círculos, los llamados **círculos de dispersión**, los que en parte se superponen, dando lugar a una imagen confusa sin nitidez. Es decir: Las distancias del objeto y de la imagen no son más independientes entre sí. La distancia de la imagen a la lente es tanto mayor cuanto más cerca de la misma se halle el objeto. Para ver con claridad la imagen, debe entonces poderse modificar la longitud del aparato para que la imagen de un objeto cercano o lejano llegue siempre a situarse sobre el vidrio esmerilado.

El **ojo humano** es en el fondo una cámara oscura.

A continuación daremos una breve descripción de los principales elementos del mismo.

4. Breve descripción anatómica del ojo.



La capa exterior del globo del ojo, es en su mayor parte una membrana blanca, dura, opaca. Es la primera membrana del ojo, llamada esclerótica (ver fig. 1), que sirve de protección a las partes interiores más delicadas. La parte anterior de la esclerótica, que es llamada córnea, es transparente y de curvatura más fuerte que el resto de la membrana.

**Movilidad del ojo.** Con ayuda de seis músculos (fig. 2) todo el globo del ojo puede ser girado dentro de la cavidad llamada órbita, en que se halla alojado.

**Segunda membrana del ojo: coroides.** La esclerótica se encuentra recubierta al interior por una segunda membrana, la llamada coroides, la que es blanda, pigmentada y muy rica en vasos sanguíneos. A ella le incumbe como tarea principal la nutrición de la retina. La continuación de la coroides en la parte anterior del ojo es el llamado iris, membrana circular coloreada, la que determina el "color del ojo". En el centro del iris hay una abertura circular, la llamada pupila. El iris contiene músculos cuya contracción o relajamiento produce una variación de la magnitud de la pupila. Esos músculos entran en acción cuando el ojo pasa de un lugar oscuro a otro más iluminado o viceversa.

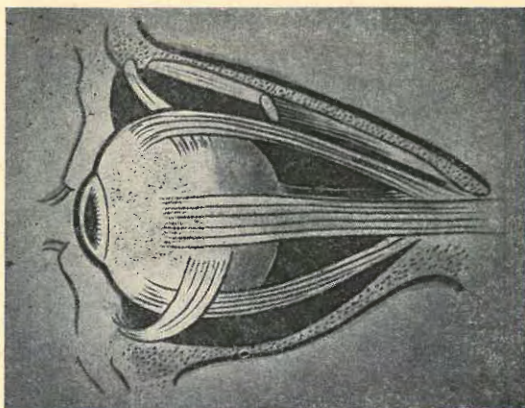


Fig. 2. — Los 6 músculos del ojo.

Detrás del iris está la lente cristalina, llamada también simplemente cristalino, cuerpo transparente envuelto en una cápsula también transparente, la que se prolonga en los ligamentos suspensorios (fig. 1) fijos en la esclerótica por intermedio del músculo ciliar (fig. 1), que es un engrosamiento de la coroides y

cuya contracción y relajamiento son capaces de producir ligeras modificaciones del cristalino.

**Tercera membrana principal del ojo: la retina.** En el interior de la coroides se extiende la tercera membrana del ojo, llamada **retina**, la que está formada por las terminaciones del nervio óptico.

**Las cámaras del ojo.** El espacio comprendido entre la córnea y el iris es la llamada **cámara anterior**; el espacio entre el iris y el cristalino es la **cámara posterior** del ojo. Ambas cámaras están llenas de un líquido llamado **humor acuoso**.

Indicados así brevemente los principales elementos constitutivos del ojo, daremos todavía importantes detalles sobre algunos de ellos.

### 5. El cristalino.

El cristalino (fig. 4) está constituido por una serie de capas concéntricas (parecidas a las del tubérculo de la cebolla), cuyos índices de refracción aumentan de afuera hacia el centro, resultando así, como lo demostró HELMHOLTZ (fig. 5), una lente de distancia focal menor que la que correspondería a una lente homogénea que tuviera la substancia de la capa exterior.



Fig. 4. — *Formas extremas del cristalino.*

a, cuando se mira un punto cercano.  
b, cuando se mira un punto lejano.  
c, lugares donde están fijos dos ligamentos suspensorios.

### La retina.

Las imágenes de los puntos objetos son proyectadas por el cristalino sobre la retina. Son dos los principales tipos de elementos nerviosos sensitivos a la luz, contenidos en la retina, los **conos** (c, fig. 6) y los **bastoncillos** (b, fig. 6).



Fig. 5. — *Germán von HELMHOLTZ, 1821 - 1894.*

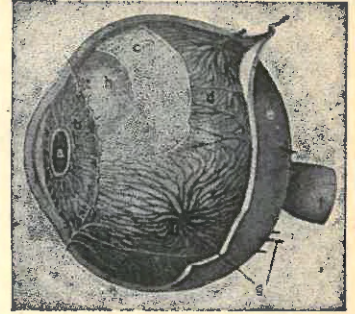


Fig. 3. — *Las 3 membranas del ojo gradualmente descubiertas.*

(Escala 3:2)

a, retina.  
b, iris.  
c, pupila.  
d, coroides.  
e, esclerótica.  
f, vasos sanguíneos.  
g, nervio óptico.  
h, humor vítreo.

Llegando la luz en la dirección de la flecha, atravesará primero la capa I de los filetes (terminaciones) del nervio óptico, luego las capas múltiples II de las células nerviosas y finalmente la capa profunda III compuesta de conos y bastoncillos, los que se hallan en contacto con la capa pigmentada de la coroides. Los bastoncillos son alargados y delgados, los conos cortos y gruesos. La sensibilidad de la retina no es uniforme en todas sus partes. En la región opuesta a la pupila, la retina presenta una mancha circular de color amarillo, llamada **mancha amarilla**, en

cuyo centro se encuentra una pequeña depresión, la "fóvea centralis", donde la membrana de la retina es finísima, faltando en ella los bastoncillos y existiendo solamente los conos. Es ésta la región más sensible a la luz de toda la retina. Los conos de la "fóvea centralis" tienen un diámetro de sólo  $2\mu$ , mientras los más alejados del centro son más grandes y menos numerosos hasta llegar a tener un diámetro de  $5,5\mu$ . Aparece así la retina cual superficie cubierta de mosaicos, cuyos elementos, los conos y bastoncillos, son cada vez más grandes a partir de la "fóvea centralis" hacia el borde de la retina, elementos que en algunas partes faltan completamente. Esto último se verifica en el lugar donde entra el nervio óptico en el globo del ojo (ver figs. 1 y 8). Dicho lugar en que faltan las células visuales es la llamada "mancha ciega" del ojo.

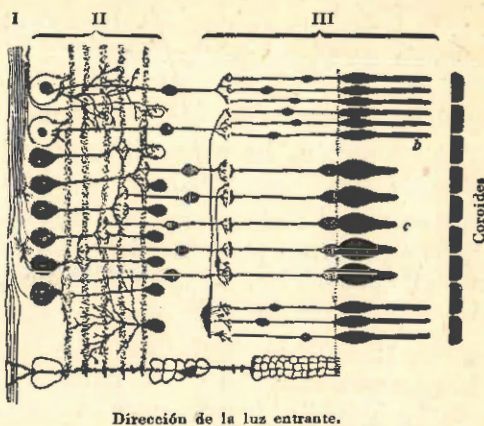


Fig. 6. — Corte transversal por la retina según RAMÓN Y CAJAL.

Escala aproximada 600: 1.

- I, Capa de los filetes del nervio óptico.
- II, Capas múltiples de células nerviosas.
- III, Capa de los conos (c) y bastoncillos (b).

### 7. Puntos cardinales del ojo.

Las partes transparentes del ojo (córnea, humor acuoso, cristalino, humor vítreo) de las cuales la más importante es el cristalino, forman un sistema óptico, el que tiene sus puntos cardinales (ver págs. 54, 56, 57, 60 y 64): dos focos, dos puntos principales y dos puntos nodales (ver figs. 8 y 10). Las distancias que separan los focos de los respectivos puntos principales, son las distancias focales del ojo.

### 8. Distancias focales $f$ y $f'$ del ojo.

La sucesión de varios medios refringentes en el ojo, córnea, humor acuoso, cristalino y humor vítreo, de diversa refrangibilidad, limitados en un lado por aire y en el otro por la retina, hacen que sean distintas las distancias focales anterior  $f$  y posterior  $f'$  del sistema así resultante, siendo más corta la anterior  $f$  y más larga la posterior  $f'$ .

En base al procedimiento constructivo indicado en figura 7 de página 62, podemos obtener la magnitud y posición de la imagen formada por tal sistema cuando se conozca la posición de los puntos principales  $H$  y  $H'$  y las distancias focales  $f$  y  $f'$ .

### 9. Línea visual (línea de mirada o de fijación). Definición.

Cuando miramos un punto objeto, su imagen se forma en la mancha amarilla. Tal imagen determina, conjuntamente con el centro óptico del ojo (N,

fig. 7) una recta, la llamada **línea visual**, **línea de mirada** o **de fijación**.

### 10. El eje óptico del ojo. Definición.

El ojo normal, haciendo abstracción de la esclerótica opaca, puede ser considerado aproximadamente como una sucesión de cuerpos transparentes limitados por superficies esféricas centradas. El **eje óptico** es la recta que pasa por los centros de curvatura de la córnea y del cristalino, la que corta la retina en un punto de la mancha amarilla situado entre la "fóvea centralis" y la mancha ciega.

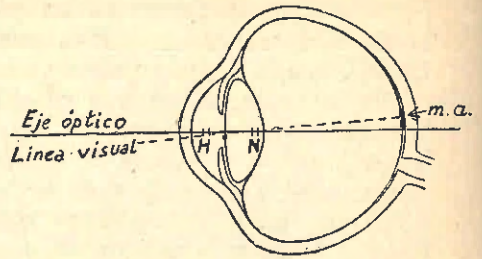


Fig. 7. — Corte horizontal por el ojo derecho para ilustrar la situación relativa del eje óptico y de la línea visual. Se indica por H el lugar aproximado de los puntos principales, por N el de los puntos nodales y por m. a. la mancha amarilla. (Escala 4:3).

### 11. Centro de rotación del ojo.

El punto fijo alrededor del cual puede girar el globo del ojo dentro de su órbita se llama **centro de rotación** del mismo. Tal punto coincide aproximadamente con el centro del ojo, estando situado a 10,5 mm detrás del centro de la pupila.

### 12. Campo visual.

El campo visual del ojo es muy amplio: Abarca de 40° a 50° a cada lado en sentido horizontal, unos 70° hacia abajo y unos 30° hacia arriba.

### 13. Ojo reducido de Listing.

Por la multitud de los cuerpos con sus superficies refringentes que intervienen en la visión, córnea, humor acuoso, cristalino y humor vítreo, el ojo constituye un sistema óptico muy complicado. Pero para la mayor parte de los cálculos ópticos que se efectúan para fines prácticos e industriales, el ojo real puede ser substituído, como lo propuso Listing (1808-1882), por un ojo esquematizado llamado **ojo reducido de Listing**. Está formado por una única superficie esférica refringente (ver fig. 9) de 5 mm de radio de curvatura, la que separa el espacio objeto del espacio imagen, lleno este último de una substancia de índice de refracción  $n' = 1,33$ .

Las **distancias focales**  $f$  y  $f'$  correspondientes a tal superficie refringente se calculan con las fórmulas (11) y (12), pág. 39 y el poder convergente  $D$  de la superficie refringente según (18), pág. 42.

$$(1) \quad n = 1, \quad n' = \frac{4}{3}, \quad r = 5 \text{ mm},$$

resulta:

$$(2) \quad f = \frac{nr}{n' - n} = \frac{5}{\frac{4}{3} - 1} = 15 \text{ mm},$$

$$(3) \quad f' = \frac{n'r}{n' - n} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 5}{\frac{4}{3} - 1} = 20 \text{ mm},$$

$$(4) \quad D = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \frac{1}{0,015} = 66 \frac{2}{3} \text{ dptr} \quad (\text{Ver también N}^\circ 17, \text{ § 4})$$

La ecuación  $f' = 20$  mm nos da la posición del vértice de la superficie refringente del ojo de Listing respecto a la retina. Dada la corta distancia (de sólo 0,4 mm) que separa entre sí los puntos principales del ojo real (ver fig. 7), se los puede suponer coincidentes en un punto **H**, como también los nodales en un punto **N**.

Los datos consignados en las ecuaciones (1), (2) y (3), los cuales definen la situación de la superficie refringente *s* (fig. 9) del ojo de Listing, equivalen a situar esta superficie *m* y *y* aproximadamente en el punto medio **H** de los puntos principales del ojo real; y el centro **C** de curvatura de la superficie *s* cae muy aproximadamente en el punto medio **N** de los puntos nodales del ojo real.

El punto **H** se encuentra a unos 2 mm detrás del vértice **V** de la superficie anterior de la córnea, y el punto **N** a unos 0,4 mm delante de la superficie posterior del cristalino.

Trataremos todavía algunas otras importantes propiedades del ojo en cuanto ellas pueden servirnos para la mejor comprensión de los instrumentos ópticos.

#### 14. El ojo no es un sistema óptico rígido. Acomodación.

Si el ojo fuera un sistema óptico rígido con distancia focal invariable, sólo sería capaz de ver con claridad objetos situados a una determinada distancia, puesto que en tal caso existiría una sola distancia de objeto, la que correspondería a la distancia fija de la retina.

La experiencia nos enseña que el ojo puede "enfocar" o ver con claridad objetos situados a distancias muy distintas. Se ve con claridad un objeto cuando su imagen nítida se forma sobre la retina en el sitio ocupado por la mancha amarilla (ver fig. 7).

El hecho de que esta nitidez de la imagen se realiza con distancias del objeto muy diferentes y sin que varíe sensiblemente la distancia entre el cristalino y la retina, es sólo posible por la facultad que tiene el ojo de variar la curvatura del cristalino por la acción del músculo ciliar. Esa adaptación de la curvatura del cristalino a las necesidades de la visión nítida, aún con muy diferentes distancias del objeto, se llama **acomodación**.

El mecanismo fisiológico de la acomodación no está aún completamente aclarado. No se sabe con exclusión de toda duda cómo el ojo en realidad ejecuta tal proceso. No está comprobado que la acomodación se debe exclusivamente a una deformación del cristalino; es posible que en la acomodación coayude un poco una muy pequeña deformación del ojo entero, que hace

Fig. 8. — Se ilustra la posición relativa del ojo reducido de LISTING (trazo interrumpido) y del ojo real (trazo lleno).

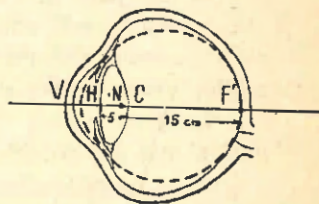
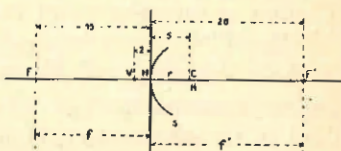


Fig. 9. — Ojo reducido de LISTING.



(Escala 1:1)

variar insensiblemente las distancias relativas entre córnea, cristalino y retina, de acuerdo con la teoría del norteamericano **Bates**. Lo que sabemos con certeza es que en la visión de un ojo normal a un punto lejano, la cara anterior del cristalino está menos fuertemente encorvada que la posterior (ver figs. 1, 4, 7, 8 y 10); y que para la visión de un punto cercano el ojo se acomoda encorvando especialmente la cara anterior del cristalino, de tal modo que ambas caras llegan a tener aproximadamente la misma curvatura (ver figs. 4 y 11). Es decir: el ojo ha reducido sus distancias focales.

Que la acomodación consiste principalmente en una deformación del cristalino ha sido demostrado por mediciones directas de la curvatura de las caras. Se confirmó, además, esta explicación por el hecho de que en las personas operadas de catarata (extracción del cristalino cuando ha perdido la transparencia), el poder de acomodación queda sumamente disminuído y reducido, en lo principal, a la debilísima deformación de la córnea.

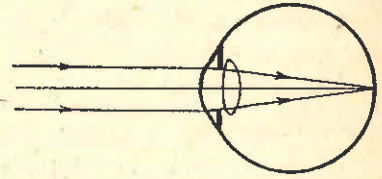


Fig. 10. — Ojo normal en el cual los rayos procedentes de un punto objeto lejano, se reúnen sobre la retina.

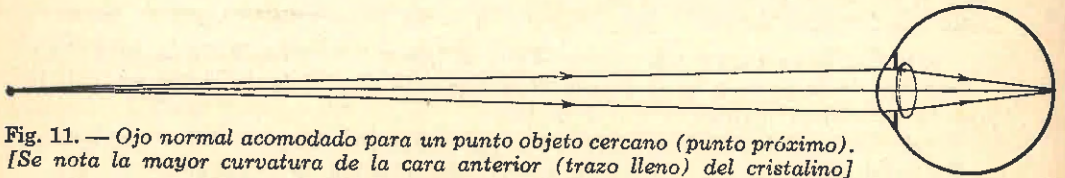


Fig. 11. — Ojo normal acomodado para un punto objeto cercano (punto próximo). [Se nota la mayor curvatura de la cara anterior (trazo lleno) del cristalino]

### 15. Punto próximo P y punto remoto R y distancias p y r; su signo.

Pero la acomodación del ojo tiene sus límites. Para todo ojo existen generalmente dos distancias dentro de las cuales pueden verse con claridad los objetos. El punto más cercano al ojo para el cual es posible la acomodación, se llama **punto próximo P**, y el punto más lejano que puede ser enfocado el **punto remoto R** (ver fig. 12).

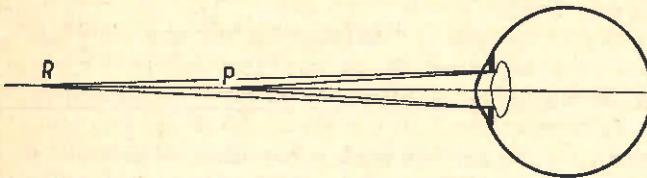


Fig. 12. — Se ilustra la posición de los puntos próximo P y remoto R para el caso normal, en que dichos puntos se hallan delante del ojo.

Mirando al punto P: Cristalino con curvatura fuerte, rayos salientes del objeto fuertemente divergentes,

Mirando al punto R: Cristalino con curvatura poco pronunciada, rayos salientes del objeto poco divergentes.

Para el ojo normal el punto próximo se encuentra entre 10 y 15 centímetros de distancias de la pupila del ojo, mientras que el punto remoto está situado en el infinito.

Cuando el punto remoto se encuentra en el infinito, el cristalino del ojo, en estado de mínima curvatura (estado de reposo), es justamente capaz de reunir sobre la retina los rayos paralelos al eje emitidos por un punto objeto situado en el infinito (ver fig. 10). Pero puede ocurrir también el caso

(ver fig. 13) de que el cristalino de un ojo está tan poco encorvado o el ojo (en sentido longitudinal) tan corto que sólo puede reunir sobre la retina rayos que le llegan con cierta convergencia (como pueden ser, por ejemplo los rayos que, luego de ser emitidos por un punto objeto, han sido refractados por alguna lente convergente o combinación de lentes). En tal caso, los rayos ya algo convergentes antes de llegar al ojo desnudo, tienen direcciones hacia un punto situado detrás de la retina, y ese punto es el punto remoto o el punto próximo según que el cristalino se encuentre en su estado de curvatura mínima (estado de reposo) o máxima de que es capaz.

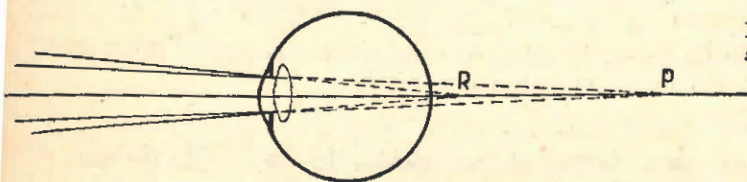


Fig. 13. — Se ilustra la posición de los puntos próximo **P** y remoto **R** para el caso anormal (ojo hipermetrope), en que dichos puntos se hallan detrás del ojo.

Cristalino con fuerte curvatura: los rayos llegan al ojo con débil convergencia, llevando dirección al punto próximo **P**.

Cristalino con curvatura poco pronunciada: los rayos llegan al ojo con fuerte convergencia, llevando dirección al punto remoto **R**.

De las figuras 12 y 13 se desprende que, cuando el ojo mira hacia la izquierda, y cuando ambos puntos, el próximo **P** y el remoto **R**, se hallan a un mismo lado del cristalino, el punto remoto se encuentra siempre más a la izquierda que el próximo, tanto en el caso en que esos puntos se hallan delante del ojo como en el otro de hallarse detrás del mismo. En este último caso, el punto "remoto" **R** conserva esta denominación, no obstante hallarse más cerca del cristalino que el punto "próximo" **P**. También ocurre frecuentemente el caso de que la capacidad de acomodación del ojo es tal que el punto próximo cae todavía delante del ojo (a relativamente gran distancia) y el punto remoto detrás del mismo, tratándose entonces de un cristalino capaz de reunir sobre la retina tantos rayos débilmente divergentes, como paralelos y débilmente convergentes.

Designamos por **p** y **r** a las distancias que median entre la pupila del ojo y los puntos próximo y remoto, respectivamente; y se ha convenido (por ciertas razones prácticas relacionadas con las necesarias dioptrías de las lentes correctoras) dar el signo + a las cantidades **p** y **r** cuando los correspondientes puntos **P** y **R** se hallan detrás del cristalino (caso de la hipermetropía y se da el signo - a las cantidades **p** y **r** cuando los puntos próximo y remoto se hallan delante del ojo (caso del ojo normal y del ojo míope).

Cuando un objeto es visto con nitidez, de todo punto del mismo saldrá entonces un cono de luz que tendrá por base la abertura de la pupila y como vértice el punto mismo, cono de rayos luminosos que será refractado de tal modo, que la imagen del punto se forma sobre la retina, es decir, el punto de concurrencia de los rayos refractados se halla sobre la retina.

Cuando el objeto está más cerca del ojo que el punto próximo, el cono de rayos refractados ya no tendrá su punto de **conurrencia** sobre la retina sino detrás de ella (ver fig. 14).

Cuando el ojo no está acomodado para la distancia de un cierto punto objeto hacia el cual mira (o cuando el punto objeto no está "enfocado"), éste se proyecta sobre la retina en forma de un círculo luminoso llamado **círculo de dispersión**, es decir, el ojo no ve el punto con nitidez.

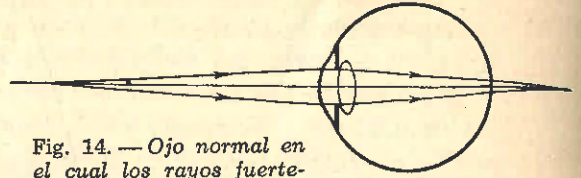


Fig. 14. — Ojo normal en el cual los rayos fuertemente divergentes procedentes de un punto muy cercano (de menor distancia que el punto próximo) concurren hacia un punto situado detrás de la retina, formando así sobre ésta un círculo de dispersión.

**16. El ojo no puede ver simultáneamente con nitidez dos objetos de los cuales el uno se halla muy distante y el otro muy próximo al ojo.**

Lo único que nuestra vista puede realizar es ver con claridad sucesivamente a objetos situados a distancias muy diferentes: primero el uno y luego el otro, lo que constituye un cierto inconveniente en el uso de las alidadas simples a pínulas (ver fig. 2, pág. 49 de tomo I, 4ª edición) y en el tiro al blanco. No se puede observar simultáneamente con claridad el hilo (erín) de la pínula, a unos 20 cm de distancia, y el objeto a visar, a varios centenares de metros de distancia. En el tiro al blanco con fusil común, no se puede ver simultáneamente con nitidez el guión, el alza y el objeto al cual se apunta.

**17. Consecuencias prácticas relativas a la divergencia de los haces de rayos incidentes al ojo correspondientes a los puntos próximo y remoto, respectivamente.**

**Haces divergentes que corresponden al punto próximo.**

Cuando el ojo debe observar una imagen formada por un instrumento óptico (anteojo), la podrá ver con claridad sólo a condición de que el cono de rayos luminosos incidentes sobre la pupila no sea más divergente que el que corresponde al punto próximo del ojo.

**Divergencia de haces correspondientes al punto remoto.**

Como el ojo se acomoda sin esfuerzo alguno para un punto en el infinito, se tratará siempre de conseguir que en los instrumentos ópticos que se utilizan para la observación ocular, el camino de los rayos sea tal que los rayos emergentes del sistema resulten paralelos entre sí o con ángulo de divergencia muy pequeño. El ojo verá entonces el objeto con acomodación para infinito, es decir, sin esfuerzo alguno.

**18. Poder de acomodación o amplitud acomodativa. Declinación de la acomodación del ojo normal con la edad. Presbicia del ojo normal.**

Se llama **poder de acomodación o amplitud acomodativa** a la diferencia  $(1/p - 1/r)$ , en la cual  $p$  y  $r$  deben entrar expresadas en metros. Se la designa por **A**. Este procedimiento es análogo al que hemos empleado cuando expresamos en dioptrías el poder convergente de una lente (ver N° 17, pág. 85 de este tomo). Por tal causa también empleamos el término de "dioptría" como denominación de las fracciones  $1/p$  y  $1/r$ , no obstante que las cantidades  $p$  y  $r$  no son precisamente distancias focales.

Para los cálculos del poder de acomodación del ojo, se puede siempre reemplazar por  $\infty$  a toda distancia  $r$  mayor de 5 metros, puesto que el ojo que ve con nitidez a tal distancia también puede acomodar para una distancia infinita.

En las columnas (2) y (3) del siguiente cuadro damos para diversas edades las distancia  $p$  y  $r$  al punto próximo **P** y punto remoto **R**, respectivamente, como también en columna (4) los correspondientes poderes de acomodación **A**.

(1) Años de edad	(2)				(3)		(4)	(5) Observaciones
	Distancia al				Punto remoto		Poder de acomodación:	
	Punto próximo	$\frac{1}{p}$	Punto	$\frac{1}{r}$	$A = 1/p - 1/r$			
	p	dptr.	r	dptr.	dptr.			
	cm		cm					
10	— 7	—14	$\infty$	0	— 14		} Presbicia del ojo normal	
20	— 10	—10	$\infty$	0	— 10			
30	— 14	— 7	$\infty$	0	— 7			
40	— 20	— 5	$\infty$	0	— 5			
50	— 40	— 2,5	$\infty$	0	— 2,5			
60	— 200	— 0,5	$\infty$	0	— 0,5			

Despréndese de este cuadro [ver columna (2)] que el punto próximo se aleja con el aumento de la edad, es decir, el **poder de acomodación (o amplitud acomodativa) A** del ojo normal declina rápidamente con la edad: **A** es igual a — 14 dptr para la edad de 10 años y nulo para la edad senil, [ver columna (4)], edad en la cual el ojo funciona propiamente como una lente.

Se puede decir también que el poder de acomodación es el esfuerzo que realiza el ojo para cambiar de refracción desde el punto remoto **R** hasta el punto próximo **P**.

Tenemos entonces para el poder de acomodación o amplitud acomodativa **A** del ojo:

$$(5) \quad A = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{r-p}{pr}$$

Para el ojo normal, en la edad media del hombre, se puede estimar:

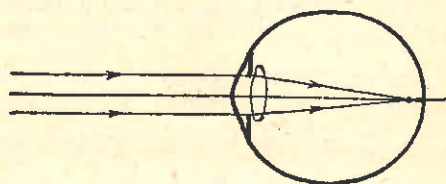
$$A = -5 \ 6 \ 6 \text{ dptr.}$$

**Presbicia.** Cuando el poder de acomodación del ojo normal (para el cual  $r$  es siempre igual a  $\infty$ ) ha declinado a  $-5$  dptr (lo que ocurre después de los 40 años de edad debido a un gradual endurecimiento del cristalino y la consiguiente pérdida de elasticidad), el ojo empieza a ser **presbíope** o **présbita**. El ojo fuertemente présbita tiene el punto próximo a considerable distancia (ver cuadro), necesitando, por lo tanto, **lentes correctoras** para ver con claridad objetos cercanos.

### 19. Ojo míope y ojo hipermétrope.

Si en la posición de reposo el foco posterior del ojo no coincide con la retina, el ojo no es normal; el punto remoto  $R$  se halla en el finito.

Fig. 15. — Ojo míope (más largo) en el que los rayos paralelos procedentes de un punto objeto lejano, se reúnen en un punto situado delante de la retina.



**Ojo míope.** Debido a la forma algo alargada (en sentido longitudinal) que generalmente posee el ojo míope (ver figs. 15 y 16), el foco posterior del mismo se halla delante de la retina (ver fig. 15). El ojo míope no puede acomodar para objetos lejanos porque las imágenes de los mismos quedan siempre delante de la retina. El ojo míope sólo puede enfocar para objetos cercanos (ver fig. 16).

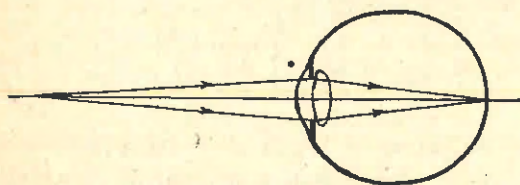
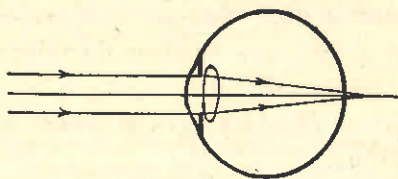


Fig. 16. — Ojo míope enfocado para un punto objeto cercano. Sólo rayos fuertemente divergentes pueden reunirse sobre la retina.

**Ojo hipermétrope.** Debido a una forma algo acortada (en sentido longitudinal) que posee el ojo hipermétrope (ver fig. 17), los rayos procedentes de un punto objeto lejano no pueden reunirse sobre la retina sino tienden hacia

Fig. 17. — Ojo hipermétrope (más corto) en el cual los rayos procedentes de un punto objeto lejano tienden hacia un punto de concurrencia situado detrás de la retina.



un punto situado detrás de la retina. El punto remoto  $R$  se halla entonces detrás de la pupila del ojo.

El punto próximo, en este caso, puede hallarse delante o detrás de la pupila.

20. Lentes correctoras.

Con el objeto de corregir los mencionados defectos de la vista, la miopía, la presbicia y la hipermetropía, se anteponen al ojo lentes correctoras, len-

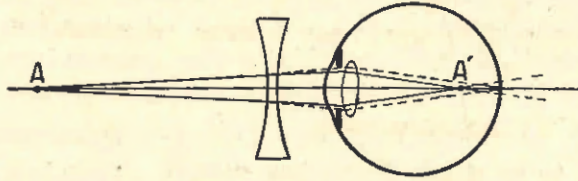


Fig. 18. — Ojo miope en el cual los rayos procedentes de un punto A no pueden reunirse en un punto de la retina, por haberse reunido ya antes en el punto imagen A'. La lente divergente antepuesta corrige este defecto.

tes divergentes al ojo míope (ver fig. 18) y lentes convergentes al ojo presbita o hipermetrope (ver fig. 19). Las distancias focales de tales lentes correctoras deben ser elegidas iguales a las distancias  $r$  de los respectivos puntos remotos  $R$ .

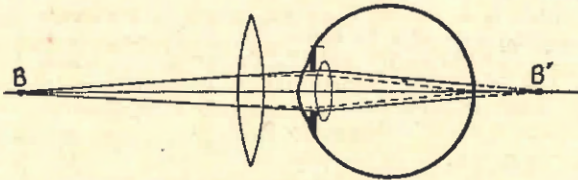


Fig. 19. — Ojo hipermetrope en el cual los rayos procedentes de un punto B no pueden reunirse sobre la retina. Ellos tienden hacia un punto de concurrencia B' situado detrás de la retina. La lente convergente antepuesta corrige este defecto.

En efecto, considerando, por ejemplo, el caso del ojo míope (fig. 20), la lente cristalina, en su estado de mínima curvatura (estado de reposo), pero sin lente correctora, es capaz de reunir sobre la retina los rayos que antes

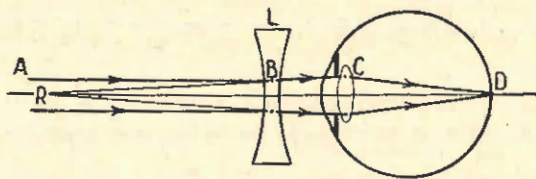


Fig. 20. — Ojo miope. El punto remoto R se halla situado delante del ojo. Se corrige con lente divergente con distancia focal  $f$  igual a la distancia  $r$  (negativa) del punto remoto R.

de entrar al ojo tienen la dirección  $RBC$  (que es una recta). Si anteponeamos la lente correctora divergente  $L$ , de distancia focal  $r$ , un rayo  $AB$  procedente del infinito, tendrá, después de atravesar la lente correctora  $L$ , la misma di-

rección **BC**, como si procediera de **R**, y, por consiguiente, el ojo lo proyecta al punto **D** de la retina. Luego, el ojo así corregido, siempre en el estado de mínima curvatura del cristalino, puede ver con nitidez un punto situado en el infinito. Con curvaturas algo más fuertes del cristalino, las cuales puede realizar mediante la acomodación, el ojo es capaz de ver con nitidez puntos más cercanos, es decir, el ojo puede ver bien puntos entre el infinito y un cierto punto próximo **P** situado en el finito, en la misma forma que un ojo normal.

Análogamente, considerando el caso del ojo **hipermétrope** (fig. 21), la lente cristalina, en su estado de mínima curvatura (estado de reposo), pero sin lente correctora, es capaz de reunir sobre la retina los rayos que antes

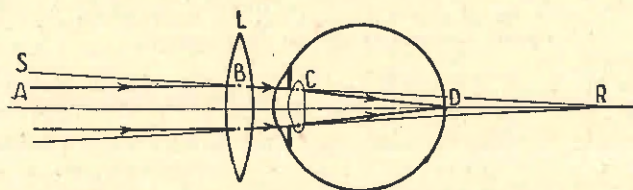


Fig. 21. — Ojo *hipermétrope*. El punto remoto **R** se halla detrás del ojo. Se corrige por medio de una lente convergente de distancia focal  $f$  igual a la distancia  $r$  (positiva) del punto remoto **R**.

de entrar al ojo tienen la dirección **SBC** (que es una recta). Si anteponeamos la lente correctora convergente **L**, de distancia focal  $r$ , un rayo **AB** procedente del infinito, tendrá después de atravesar la lente correctora **L**, la misma dirección **BC** como si procediera de **S**, y, por consiguiente, el ojo lo proyecta al punto **D** de la retina. Luego, el ojo así corregido, siempre en el estado de mínima curvatura del cristalino, puede ver con nitidez un punto situado en el infinito. Con curvaturas algo más fuertes del cristalino, las cuales puede realizar mediante la acomodación, el ojo es capaz de ver con nitidez puntos más cercanos, es decir, el ojo puede ver bien puntos entre el infinito y un cierto punto próximo **P** situado en el finito, en la misma forma que el normal.

Se nota entonces que el punto remoto **R** situado en el finito en el ojo sin corregir, es llevado al infinito por medio de la lente correctora según se ilustra en las figuras 20 y 21.

Un ojo míope con  $r = -12\frac{1}{2}$  cm, por ejemplo, necesitaría lentes divergentes de  $-8$  dptr para ver lejos, y un ojo hipermétrope con  $r = +12\frac{1}{2}$  cm, necesitaría lentes convergentes de  $+8$  dptr.

El ojo míope así corregido podrá ver entonces con claridad también objetos no muy cercanos, y el ojo hipermétrope podrá ver nítidamente objetos cercanos, como, por ejemplo, el texto de un libro.

Es de observar que el ojo míope, debido a la tendencia del cristalino de achatarse cada vez más, cuando avance la edad, altera sus condiciones con el tiempo en el sentido de disminuir poco a poco la miopía, y en caso de que en la juventud la miopía no haya sido fuerte, puede ocurrir fácilmente que en la edad avanzada el ojo no necesite más la lente correctora para ver algún objeto lejano. Si en la juventud la miopía ha sido muy débil, hasta puede transformarse en leve presbicia en la vejez. En cambio, un ojo medianamente míope (de  $-4$  a  $-5$  dptr) no va a mostrar nunca síntomas de presbicia, ni a los 70 años de edad.

**21. Magnitud real y magnitud aparente (o magnitud angular) de un objeto.**

Un objeto que sucesivamente se sitúa a diferentes distancias del ojo, aparece a éste con distintas magnitudes según la distancia a que se halle, no obstante el hecho de que el objeto en realidad no ha variado sus dimensiones verdaderas. Debemos, por lo tanto, distinguir entre la **magnitud real** y la **magnitud aparente** (o **magnitud angular**)  $\alpha$  del mismo. La primera está dada por las dimensiones lineales directamente tomadas en el objeto, y es una magnitud que no varía. La segunda, en cambio, como acabamos de decir, es una magnitud angular que varía con la distancia a que se encuentra el objeto y disminuye con el aumento de la distancia.

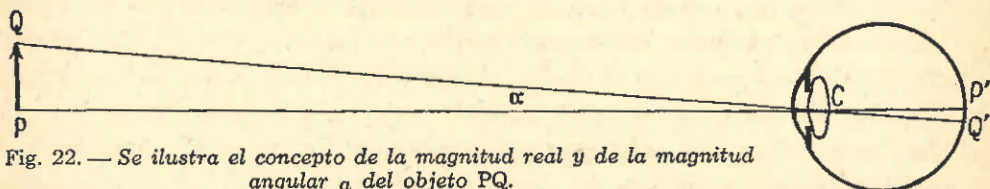


Fig. 22. — Se ilustra el concepto de la magnitud real y de la magnitud angular  $\alpha$  del objeto PQ.

Designando por **PQ** (fig. 22) la magnitud real (altura) de un objeto lineal, y por **P'Q'** la magnitud real de su imagen sobre la retina, por **CP** y **CP'**, respectivamente, las distancias del objeto y de la imagen contadas desde **C**, y por  $\alpha$  el ángulo visual **QCP**, tendremos, según la figura, para la magnitud angular (magnitud aparente)  $\alpha$  del objeto **PQ**:

$$(6) \quad \text{Magnitud angular } \alpha = \frac{\text{Altura}}{\text{Distancia entre objeto y ojo}} \quad (\text{en radianes})$$

**22. Angulo de la agudeza natural de la vista.**

Cuando se reduce la magnitud lineal de un objeto (por ejemplo el diámetro de un círculo negro sobre fondo blanco) dejando sin variar su distancia al ojo, o también: cuando se aleja más y más un determinado objeto de magnitud lineal invariable, se llegará finalmente a un límite en que el ojo empieza a no ver más el objeto. El ángulo que corresponde a tal magnitud y distancia del objeto se llama **ángulo de la agudeza natural de la vista**, al que designaremos por  $\alpha_0$ .

Si se trata de establecer para diferentes ojos el valor del ángulo  $\alpha_0$  de la agudeza natural de la vista, se llega aproximadamente al **valor medio** de un minuto de arco. La fórmula (6) da entonces la siguiente expresión:

$$(7) \quad \alpha_0 = \frac{\text{Distancia}}{\text{Altura}} = 1' = \frac{1}{3438}$$

A este ángulo de la agudeza natural de la vista corresponde sobre la retina del ojo, con  $CP' = 15 \text{ mm}$  (ver fig. 22), la magnitud real:

$$(8) \quad \frac{1}{3438} \cdot 15 \text{ mm} = 4,4 \mu$$

es decir, aproximadamente la magnitud del diámetro de un cono de la retina.

La ecuación (7) significa lo siguiente: **Cuando un objeto se presenta al ojo bajo el ángulo de  $1'$  o menor (lo que ocurre cuando el objeto observado se halla a la distancia por lo menos 3438 veces mayor que la medida de su diámetro o altura), el ojo no lo distingue más.**

Pero esta regla vale solamente para objetos medianamente iluminados (como, por ejemplo, manchas negras sobre fondo blanco o manchas blancas sobre fondo negro) y no se aplicará de ninguna manera para los casos en que el objeto es muy luminoso, como, por ejemplo, una estrella sobre el cielo oscuro, la luz de un colimador en la noche o la luz solar reflejada por un heliótropo. En estos últimos ejemplos la visibilidad no depende mayormente de la magnitud del objeto sino solamente de la cantidad de luz que emite. Así por ejemplo, se llegó a distinguir la luz solar reflejada por un heliótropo cuando el espejo del mismo apareció al ojo bajo un ángulo de solamente medio segundo de arco.

### 23. Determinación práctica del ángulo de la agudeza natural de la vista.

Dada la gran importancia que tiene el ángulo de la agudeza natural de la vista para la práctica de la topografía, es conveniente que uno de los primeros ejercicios prácticos tenga por objeto la determinación de este ángulo fundamental. Elegimos para ello como objeto un círculo negro de un milímetro de diámetro, dibujado sobre un fondo blanco. La distancia máxima a la cual un dado ojo puede todavía distinguir el círculo, nos da el elemento necesario para la determinación del ángulo de la agudeza de la vista que corresponde a dicho ojo.

El promedio de numerosas determinaciones individuales ha dado el **valor medio** de:

$$(9) \quad \alpha_0 = \frac{1}{4000} = \frac{1}{4000} \cdot 206\,265'' \sim 50''$$

Es una condición imprescindible para el buen resultado de este experimento que el ojo sea capaz de acomodar sin esfuerzo para la distancia a la que se halla el objeto (ojo normal). En el caso de no tratarse de un ojo normal sino de un ojo míope o un ojo hipermetrope, es necesario que éste se encuentre provisto de la lente correctora correspondiente.

#### 24. Optima distancia de visión clara $w$ .

Con el fin de agrandar el ángulo visual  $\alpha$  de un objeto (y, por consiguiente su imagen sobre la retina) a los efectos de la más clara visión, el objeto debe acercarse al ojo. Aumenta entonces gradualmente el esfuerzo del ojo para la acomodación. Tal acomodación tiene su límite en el punto próximo. Pero para todo ojo existe una cierta distancia (mayor que la que corresponde al punto próximo) a la cual puede ver con claridad los pequeños objetos sin esfuerzo sensible. Esa distancia se llama **óptima distancia de visión clara** y la designaremos por  $w$ . Es de unos 25 cm para el ojo normal, siendo menor (hasta llegar a 10 cm o menos) o mayor (hasta llegar a 50 cm y más) según se trate de un ojo míope o presbíta.

#### 25. Poder separador del ojo.

Para que las imágenes de dos puntos o dos finas líneas puedan ser vistas separadas, es necesario que tales imágenes se formen en conos distintos de la retina. Si las imágenes de dos puntos se formaran sobre un mismo cono, el observador las percibirá como un solo punto. El ángulo mínimo que forman en el ojo las visuales trazadas a dos puntos (o rayas) que el ojo es capaz de ver separados, se llama **poder separador** del ojo. El experimento ha demostrado que su valor mínimo es de 2 minutos de arco. La buena iluminación aumenta la sensibilidad del ojo para la separación.

#### 26. Gran capacidad del ojo para la apreciación de pequeños desplazamientos laterales de trozos de líneas.

El ojo puede apreciar con una precisión especial un pequeño desplazamiento lateral de un trozo de línea respecto a otro que es casi su prolongación (ver fig. 23). Tal desplazamiento puede ser notado por el ojo aun en el caso de que su magnitud sea mucho menor que la distancia que deben tener dos puntos para ser vistos separados.

Hay observadores que pueden distinguir desplazamientos laterales que aparecen al ojo bajo un ángulo de sólo 10". En lecturas de nonios se estima generalmente que el ojo nota un desplazamiento de una raya del nonio respecto a otra del limbo cuando dicho desplazamiento aparece al ojo bajo un ángulo de unos 30".

Fig. 23. — Se ilustra un pequeño desplazamiento de un trozo de línea respecto a otro que es casi su prolongación.

### 27. Precisión de la bisección de delgadas fajas blancas verticales u horizontales con ayuda de un hilo negro.

Para las mediciones con instrumentos topográficos, geodésicos y astronómicos es de mucha importancia la gran capacidad que tiene el ojo de biseccionar con ayuda de un hilo negro una angosta faja blanca limitada por dos rayas negras (verticales, ver fig. 24, u horizontales). Interviene en esta bisección la capacidad del ojo para la comparación fotométrica de las dos fajas blancas que quedan a ambos lados del hilo biseccionador.

La experiencia ha demostrado que el **error accidental** de esta bisección de espacio blanco por medio de un hilo negro, puede ser fuertemente reducido por una conveniente proporción entre el grosor del hilo biseccionador y el ancho de la faja que se bisecciona. Es siempre conveniente que las fajas blancas que quedan a ambos lados del hilo sean tan reducidas como la iluminación lo permita.

Fig. 24 — Se ilustra la bisección de una delgada faja blanca por medio de un hilo negro; se expresa por  $a$  el ancho de la faja biseccionada.



Fig. 25. — Cristóbal SCHEINER. 1579 - 1650.

### 28. Imagen invertida sobre la retina.

La imagen real formada por la lente cristalina sobre la retina del ojo, es invertida con respecto al objeto, igual que la producida sobre el vidrio esmerilado por la lente de una cámara fotográfica. Los primeros hombres de ciencia que han opinado que existe tal inversión de la imagen han sido el gran astrónomo **Kepler** y el padre jesuíta **Cristobal Scheiner** (ver fig. 25).

El hecho de la imagen invertida sobre la retina nos indica que los elementos del nervio óptico que nos transmiten las sensaciones de objetos situados en lo alto, deben tener sus terminaciones en las partes más bajas de la retina.

### 29. Microscopios y anteojos, su necesidad para producir el agrandamiento del ángulo visual.

La magnitud aparente de un objeto puede ser demasiado pequeña para ser posible su percepción a ojo desnudo. El objeto puede ser cercano pero **demasiado pequeño** (primer caso), o si no es cercano puede ser demasiado **distante** (segundo caso) para presentarse al ojo con una magnitud aparente suficientemente grande.

Para el **agrandamiento del ángulo visual**, nos valemos de instrumentos ópticos: del **microscopio** en el primer caso y del **anteojo** en el segundo. Antes de entrar al estudio detallado de esos instrumentos, intercalaremos un párrafo dedicado a ciertos dispositivos llamados **diafragmas**, que tienen un papel importante en los dos tipos de instrumentos mencionados.

## § 7

## Limitación de rayos o diafragmas y pupilas

## 1. Necesidad de los diafragmas; su posición.

Los medios indicados en párrafo 5 (Nº 4, lente de la mejor forma, pág. 106 y Nº 12, combinaciones de dos lentes, pág. 110), tendientes a mejorar las cualidades de la imagen producida por una lente o un sistema óptico, si bien con ellos se logra reducir notablemente las aberraciones esférica y cromática, no son tan eficaces como para permitir en los instrumentos ópticos la utilización de conos de rayos de luz de cualquier ángulo de abertura o rayos de cualquiera inclinación respecto al eje óptico.

Para que la imagen de un punto objeto formada por una lente objetiva de un instrumento tenga un alto grado de claridad y nitidez, sería deseable que todos los rayos luminosos emitidos por el mismo e incidentes sobre una lente concurrieran a la formación del correspondiente punto imagen. Pero esto no se verifica nunca matemáticamente, así que los rayos emitidos por un punto objeto son reunidos por la lente en puntos diferentes del espacio imagen (ver § 5, Nros. 1 y 2, págs. 104 y 106). Si nos limitamos a utilizar rayos que forman ángulos muy pequeños con el eje (ángulos paraxiales), las distintas imágenes producidas por un determinado punto objeto difieren muy poco en su situación, de modo que el ojo humano tiene la impresión de un solo punto imagen, lo que equivale a decir que la imagen resulta nítida.

Es por tanto necesario introducir **diafragmas** (\*) que limitan los haces de rayos emitidos por los puntos objetos (**diafragmas de rayos**) y otros diafragmas (**diafragmas de campo**) que limitan los puntos objetos mismos que se observan, con lo cual se consiguen imágenes más perfectas.

Los diafragmas pueden consistir en las monturas mismas de las lentes, o ellos pueden ser láminas metálicas, perpendiculares al eje, con aberturas circulares, cuyos centros se hallan sobre dicho eje.

Los diafragmas de rayos pueden estar colocados delante, detrás o en el interior del sistema óptico, mientras que el diafragma de campo debe situarse siempre en el plano de la imagen real formada por el sistema óptico (por ejemplo de un anteojo).

## 2. Diafragma de rayos. Pupila de entrada y pupila de salida. Diversos casos considerados.

**Caso 1º** Sea **L** (fig. 1) una lente biconvexa, **F** y **F'** sus focos, **D** un diafragma material, que llamaremos **diafragma de rayos**, el que suponemos colocado

---

(\*) *Diafragma*, del griego *diafragma*, derivado de *diaphressein*, cerrar el paso, interceptar.

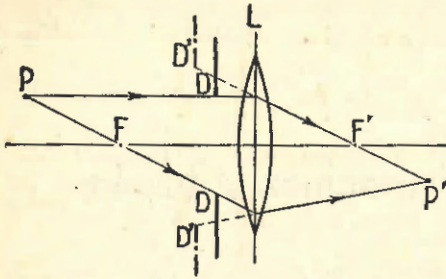


Fig. 1.— Se ilustra el caso de un diafragma colocado delante de la lente. El diafragma limita el cono de los rayos luminosos entrantes, con vértice en el punto objeto P. La imagen virtual D' del diafragma D formada por la lente L, limita el cono de luz saliente con vértice en el punto imagen P'.

cuenta de que el cono de rayos luminosos que concurren a la formación del punto imagen P' se encuentra limitado por esta imagen virtual D' del diafragma de rayos D.

**Caso 2º** En el caso de hallarse situado el diafragma de rayos D detrás de la lente (ver fig. 2), caso que se presenta en algunos objetivos fotográficos sencillos, es el diafragma de rayos D el que limita el cono de rayos luminosos concurrentes a la formación del punto

imagen P', mientras que la imagen virtual D' del diafragma de rayos D limita el cono de luz entrante con vértice en el punto objeto P.

Llámase, según Abbe, pupila de entrada P. E. al diafragma de rayos o su imagen, según los casos, que limita en el espacio objeto el cono de los rayos luminosos utilizados que emanan del

objeto, y pupila de salida P. S. al diafragma de rayos o su imagen, según los casos, que limita en el espacio imagen el cono de los rayos luminosos utilizados, siendo así, por ejemplo, la pupila de entrada en figura 1 el diafragma de rayos D y en figura 2 la imagen D'.

Las pupilas de entrada y de salida así definidas no dependen de la situación del punto P sino que ocupan una posición fija con respecto a la lente o sistema de lentes.

**Caso 3º** Un caso muy frecuente que se presenta especialmente en los objetivos fotográficos, es aquel en que el diafragma de rayos está situado entre dos lentes de un sistema (ver fig. 3). En este caso ni la pupila de entrada ni

delante de la lente. Sea P un punto objeto cualquiera. De todos los rayos luminosos que emanan del punto P evidentemente sólo aquellos que penetran por el diafragma de rayos D pueden concurrir al punto imagen P', es decir, el diafragma de rayos D limita en el espacio objeto el cono de luz utilizado, que tiene su vértice en el punto objeto P.

Pero también podemos indicar la limitación del cono de rayos luminosos que tiene su vértice en el punto imagen P'. Construimos para ello del diafragma de rayos D la imagen virtual D' formada por la lente, y nos damos

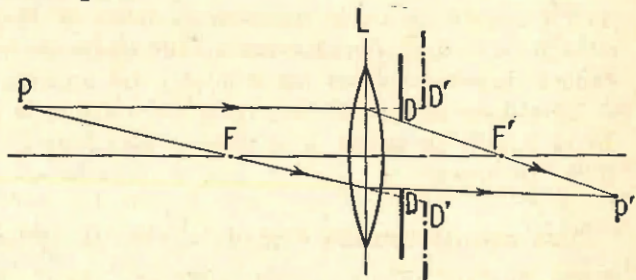


Fig. 2.— Se ilustra el caso de un diafragma colocado detrás de la lente L. El diafragma D limita el cono de luz saliente, con vértice en el punto imagen P'. La imagen virtual D' del diafragma D, formada por la lente, limita el cono de rayos entrantes con vértice en el punto objeto P.

la pupila de salida están representadas por el diafragma material **D**, sino que cada una de ellas es una imagen virtual o real del diafragma de rayos **D**. En el caso representado en figura 3 la lente **L<sub>1</sub>** produce del diafragma de rayos **D** la imagen virtual **P. E.**, que es la pupila de entrada del sistema, y la lente **L<sub>2</sub>** produce del diafragma de rayos **D** la imagen virtual **P. S.**, que es la pupila de salida del sistema.

Cuando dentro de un sistema óptico se hallan intercalados varios diafragmas de rayos, la elección de los rayos a utilizar es determinada por aquel diafragma que causa la mayor limitación de los conos de luz que atraviesan el sistema. Este hecho tiene su importancia en el caso de que el ojo humano forma parte del sistema óptico que se considere, por ejemplo en combinación con un anteojo. En tal caso, fuera del diafragma de rayos de que puede estar provisto el anteojo, puede intervenir en la limitación de los conos de luz el iris, que es otro diafragma de rayos. Cuando sucediera que la pupila de salida del anteojo fuera de mayor diámetro que la pupila del ojo (caso que la construcción debe tratar de evitar), no sería aprovechada toda la luz emitida por los objetos y transmitida por el anteojo.

En el caso de que el diafragma de rayos es la montura misma de la lente **L<sub>1</sub>** la pupila de salida es la imagen real o virtual que la lente **L<sub>2</sub>** forma de dicha montura.

**Caso del ojo humano.** Cuando el sistema óptico considerado es el ojo humano, el diafragma de rayos intercalado entre las diferentes partes del sistema es el llamado iris (ver N° 4, § 6, pág. 115). La abertura circular del mismo llamada pupila, tiene un radio  $p'$ , que varía entre 1 y 4 mm según la mayor o menor luminosidad del ambiente. La parte del ojo situada delante del iris puede ser considerada como una lente planoconvexa, cuya substancia, en lo principal, es el humor acuoso de la cámara anterior del ojo (ver fig. 1, pág. 115). El índice de refracción de ese líquido es muy aproximadamente igual a  $4/3$ . El radio de curvatura de la superficie anterior de dicha lente planoconvexa, o sea, el radio de la córnea, es aproximadamente de 8 mm, y el grosor  $V_1V_2$  (ver fig. 4) de esa lente es de unos 4 mm. Según la fórmula (65), pág. 92, la distancia focal de dicha lente es:

$$f = \frac{r_1}{n - 1} = \frac{8}{\frac{4}{3} - 1} = 24 \text{ mm}$$

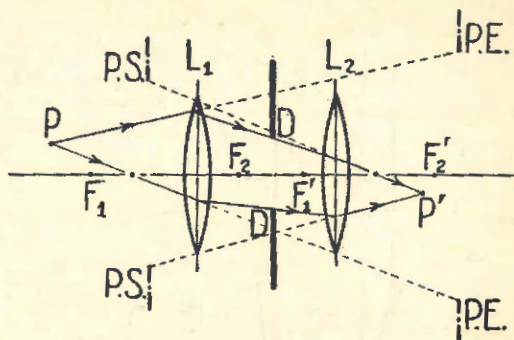


Fig. 3. — Se ilustra el caso de que el diafragma de rayos **D** se halla colocado en el interior de un sistema de dos lentes **L<sub>1</sub>** y **L<sub>2</sub>**. Las imágenes **P.E.** y **P.S.**, producidas por las lentes **L<sub>1</sub>** y **L<sub>2</sub>** respectivamente, son las pupilas de entrada y de salida del sistema. En el caso de la figura dichas imágenes son virtuales.

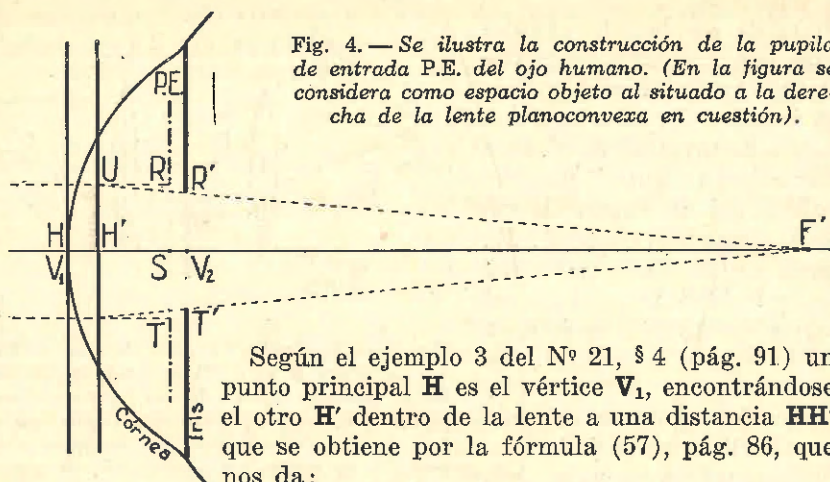


Fig. 4.— Se ilustra la construcción de la pupila de entrada P.E. del ojo humano. (En la figura se considera como espacio objeto al situado a la derecha de la lente planoconvexa en cuestión).

Según el ejemplo 3 del N° 21, § 4 (pág. 91) un punto principal **H** es el vértice **V<sub>1</sub>**, encontrándose el otro **H'** dentro de la lente a una distancia **HH'** que se obtiene por la fórmula (57), pág. 86, que nos da:

$$HH' = \frac{n-1}{n} \cdot d = \frac{1/3}{4/3} \cdot 4 = 1 \text{ mm.}$$

En consecuencia, la distancia **V<sub>2</sub>H'** resulta igual a:  $4 - 1 = 3$  mm.

Consideramos ahora al punto **V<sub>2</sub>** como objeto, y por medio de la fórmula de la lente:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

calcularemos la distancia de la imagen virtual de **V<sub>2</sub>** (distancia que en este caso está expresada por **a** en la fórmula de la lente).

Siendo  $a' = 3$  mm y  $f = 24$  mm, la fórmula de la lente nos da:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

de lo cual resulta:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{24} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{24}$$

Luego:

$$a = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7} \text{ mm.}$$

Designando por **S** a la imagen virtual de **V<sub>2</sub>**, vemos que **HS** es igual a  $-3\frac{3}{7}$  mm, resultando entonces que:

$$V_2S = V_1V_2 - HS = 4 - 3\frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ mm,}$$

lo que quiere decir que la imagen virtual de la pupila (producida por la parte del ojo situada delante del iris), dista aproximadamente  $\frac{4}{7}$  mm del iris. Dicha imagen se llama "pupila de entrada" del ojo y se le designa por el símbolo **P. E.**

Construiremos ahora la imagen  $2p_0 = RT$  del diámetro de la pupila  $2p'_0 = R'T'$  del ojo, y calcularemos su tamaño. Trazamos para ello el rayo

objeto  $F'R'$  y buscamos su rayo imagen, que es paralelo al eje y nos da el punto imagen  $R$ . En igual forma hallamos el punto imagen  $T$ .

De los triángulos semejantes  $F'V_2R'$  y  $F'H'U$  resulta:

$$\frac{H'U}{V_2R'} = \frac{F'H'}{F'V_2}$$

Por ser:  $H'U = SR = p_0$  y  $V_2R' = p_0'$

tenemos:  $\frac{p_0}{p_0'} = \frac{F'H'}{F'V_2}$

$$p_0 = p_0' \cdot \frac{F'H'}{F'V_2}$$

Con tener en cuenta los valores numéricos del ejemplo del ojo, tenemos:

$$p_0 = \frac{24 \text{ mm}}{21 \text{ mm}} p_0' = \frac{8}{7} p_0'$$

Luego, con  $p' = 2 \text{ mm}$ :

$$p_0 = 2 \frac{2}{7} \text{ mm}$$

Es decir, habiendo supuesto para el radio  $p_0'$  de la pupila del iris un valor de 2 mm, resulta que su imagen virtual  $p_0$ , o sea el radio de la pupila de entrada **P. E.** del ojo es de  $2 \frac{2}{7}$  mm.

De las deducciones que anteceden se desprende que esta imagen virtual (que es la que se ve desde afuera como círculo negro) de la pupila se encuentra a  $\frac{4}{7}$  o sea a unos 0,6 mm delante del iris y, en comparación con la abertura material del iris, su diámetro resulta agrandado en  $\frac{1}{7}$  de su valor.

### 3. Diafragma de campo; su necesidad.

Cuando puntos objetos distan demasiado del eje de un sistema óptico (anteojo), de modo que todos los rayos emitidos por los mismos e incidentes sobre la primera lente (objetivo) forman ángulos demasiado grandes con el eje, también resulta una imagen turbia de esos puntos. Es por eso conveniente excluir de la observación tales objetos demasiado excéntricos. Esta **limitación de objetos observables** se consigue por medio de un diafragma, (disco negro con agujero central), que se sitúa en el plano de la imagen real y que se llama **diafragma de campo**.

La práctica de la construcción de anteojos ha enseñado la conveniencia de detener por medio de un diafragma de campo todos aquellos conos de rayos de los cuales ni sus ejes (o sea los **rayos principales**) caerían sobre el ocular.

Como la situación del plano de la imagen real depende de la distancia del objeto, el diafragma de campo debe estar dispuesto de tal forma que pueda ser desplazado, para poder así llevarlo siempre a dicho plano de la imagen.

En tales condiciones la parte del objeto vista a través del ocular de un anteojo se presentará uniformemente iluminada y nítidamente contorneada como por el marco de una ventana redonda.

## 4. Ángulo de campo de un anteojo.

Por los puntos extremos  $A'$ ,  $B'$  del diámetro del diafragma de campo  $D. C.$  (fig. 5), trazamos dos rayos paralelos al eje de un anteojo, los cuales, después de ser refractados por la lente objetiva, pasarán por el foco anterior  $F$  de la

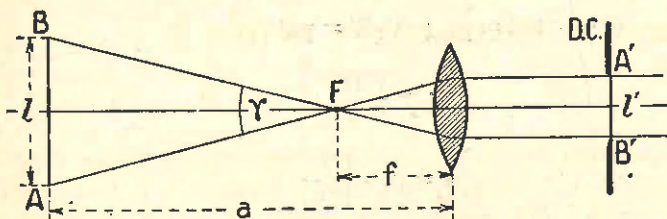


Fig. 5. — Se ilustra la definición del ángulo de campo  $\gamma$  de un anteojo para el caso de un objeto relativamente cercano. Se designa por  $l$  la parte del objeto  $AB$  visible en el anteojo limitada por los bordes del diafragma de campo  $D.C.$

misma, donde formarán un ángulo  $\gamma$ , que llamamos **ángulo de campo**. Resulta entonces que: **El ángulo de campo de un anteojo es el ángulo  $\gamma$  bajo el cual se ve el diámetro del diafragma desde una distancia igual a la distancia focal del objetivo.**

En la figura 5 hemos supuesto que  $l' = A'B'$  es la imagen real de un objeto  $l = AB$ , relativamente cercano.

Si  $a$  expresa la distancia del objeto, se desprende de la fig. 5:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{l}{2}}{a-f}$$

Pero como  $\gamma$  es siempre un ángulo pequeño, reemplazamos la tangente por el arco y escribimos:

$$(2) \quad \gamma = \frac{l}{a-f}$$

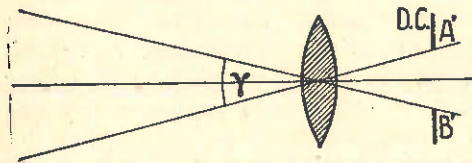


Fig. 6. — Se ilustra la definición del ángulo de campo de un anteojo para el caso de un objeto lejano.

Cuando el objeto se halla a gran distancia (fig. 6), el plano del diafragma coincide con el plano focal del objetivo, pudiendo en este caso definirse el ángulo de campo  $\gamma$  como el ángulo bajo el cual desde el centro óptico del objetivo se ve el diámetro del diafragma.

Tenemos entonces:

$$(3) \quad \gamma = \frac{l'}{f}$$

§ 8

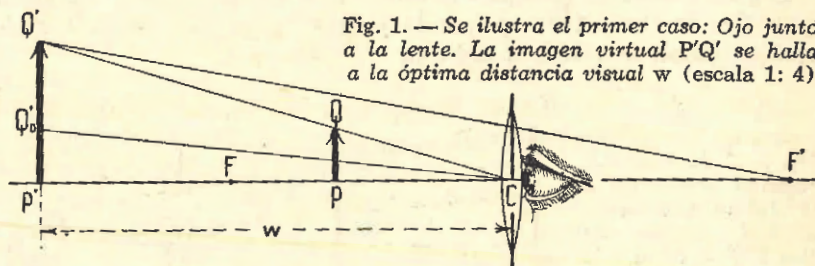
Lupa o microscopio simple

1. Definición.

Llámase **lupa** o **microscopio simple** a toda lente convergente (lupa simple) o sistema de lentes convergente (lupa compuesta) destinada a la observación ocular de la imagen (virtual) que esa lente o sistema de lentes producen de un objeto situado dentro de la distancia focal anterior (ver fig. 15, pág. 87 y caso 6 del cuadro de pág. 89). La imagen virtual es derecha y aumentada respecto a la posición y el tamaño del objeto.

2. Diferentes maneras de usar la lupa simple. Aumento.

**Primer caso.** Suponemos que la lupa sea una sola lente convergente (lupa simple), que el ojo se coloque junto a la misma, y que el objeto vaya situado de tal manera que su imagen virtual se halle a la óptima distancia visual  $w$  del ojo (ver fig. 1 y pág. 129).



Por medio de la fórmula de la lente:

$$(1) \quad a = \frac{a'f}{a' - f} \quad (\text{ver pág. 87})$$

calculamos la situación del objeto  $PQ$  correspondiente a la distancia  $w$  de la imagen. Ponemos para ello en la (1):

$$a' = -w$$

y obtendremos:

$$CP = a = \frac{-wf}{-w - f} = \frac{wf}{w + f}$$

(Ejemplo de fig. 1: Con  $f = 15$  cm y  $w = 25$  cm resulta:  $a = \frac{25 \cdot 15}{40} = 9,4$  cm.)

Hallemos ahora el aumento  $A$  de la lupa. Entendemos por tal aumento la razón del ángulo bajo el cual el ojo ve la imagen virtual, al ángulo bajo el cual el ojo desnudo vería el objeto mismo colocado a la óptima distancia visual  $w$ .

Si en la figura 1 hacemos  $P'Q'_o = PQ$ , resulta para el aumento  $A$ :

$$A = \frac{\sphericalangle P'CQ'}{\sphericalangle PCQ'_o}$$

En vista de la pequeñez de los ángulos se puede poner:

$$A = \frac{P'Q'}{P'Q'_o} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CP'}{CP} = \frac{w}{wf} = \frac{w+f}{f}$$

o sea:

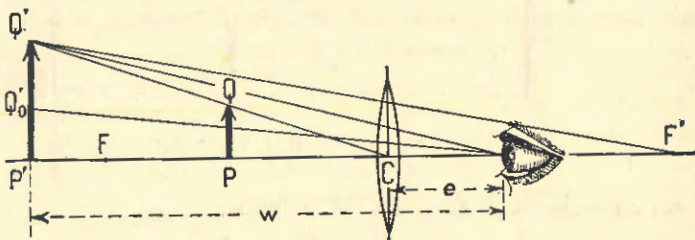
(2)

$$A = 1 + \frac{w}{f}$$

(Para los valores adoptados en el ejemplo de fig. 1 resulta:  $A = 1 + \frac{25}{15} = 2,7$ .)

**Segundo caso.** Suponemos que el ojo se halle a una distancia arbitraria  $e$  (ver fig. 2) de la lente y que la imagen virtual se encuentre siempre a la óptima distancia visual  $w$  del ojo.

Fig. 2. — Se ilustra el segundo caso: Ojo a la distancia  $e$  de la lente. La imagen virtual  $P'Q'$  se halla a la óptima distancia visual  $w$  (escala 1:4).



Calculemos ahora la situación del objeto correspondiente a estas condiciones. Ponemos para este caso en la fórmula (1):

$$a' = -(w - e)$$

con lo que obtendremos:

$$CP = a = \frac{-(w - e)f}{-(w - e) - f} = \frac{(w - e)f}{w - e + f}$$

(Ejemplo de la fig. 2: Con  $f = 15$  cm,  $w = 25$  cm y  $e = 6$  cm resulta:

$$a = \frac{19 \cdot 15}{34} = 8,4 \text{ cm})$$

Calculemos el aumento  $A$  para este caso. Haciendo  $P'Q'_o = PQ_o$ , obtenemos:

$$A = \frac{P'Q'}{P'Q'_o} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CP'}{CP} = \frac{w-e}{(w-e)f} = \frac{f+w-e}{f}$$

o sea:

(3)

$$A = 1 + \frac{w-e}{f}$$

(Para los valores numéricos del ejemplo de fig. 2 resulta:  $A = 1 + \frac{19}{15} = 2,3$ .)

La comparación de la (3) con la (2) demuestra que en los casos en que la imagen se halla a la distancia  $w$  del ojo, el aumento disminuye algo cuando el ojo se aleja de la lente.

Un ojo que no fuera capaz de acomodarse y que solamente pudiera ver nítidamente objetos a una determinada distancia  $w$  del ojo, tendría que usar la lupa forzosamente en una de las formas indicadas en figs. 1 y 2. Pero como nuestro ojo puede acomodarse para diferentes distancias de objetos, dentro de ciertos límites, no es necesario usar la lente de tal modo que la imagen  $P'Q'$  se produzca siempre a la distancia de óptima visión clara  $w$  del ojo. El ojo puede preferir que la imagen se produzca a una distancia mayor  $g$ , si la desventaja de esa mayor distancia es aproximadamente compensada por un correspondiente mayor tamaño de la imagen. El ojo actúa entonces con menor curvatura de la lente cristalina, es decir, con menor esfuerzo del músculo ciliar, evitándose así un pronto cansancio. Un ojo normal, al usar la lupa, hasta puede estar casi en el estado de reposo (acomodado para el infinito), cuando el objeto se coloca tan cerca del foco de la lupa para que se produzca una imagen muy grande y muy alejada.

Estudiaremos ahora las consecuencias correspondientes al caso general, en que la imagen virtual producida por una lupa se halle a una distancia  $g$  del ojo, tal que  $g$  es mayor que la óptima distancia visual  $w$ .

**Tercer caso.** El ojo se encuentra, como antes, a la distancia arbitraria  $e$  de la lupa. La imagen virtual del objeto se halla entonces, como dijimos, a una distancia  $g > w$  (ó  $g < w$ ) del ojo, donde  $w$  es siempre la óptima distancia visual del ojo. Suponemos en fig. 3 que  $g$  es mayor que  $w$ .

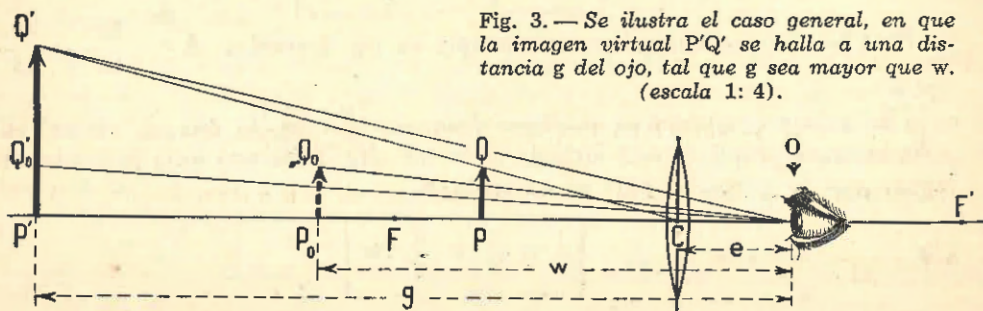


Fig. 3.— Se ilustra el caso general, en que la imagen virtual  $P'Q'$  se halla a una distancia  $g$  del ojo, tal que  $g$  sea mayor que  $w$ . (escala 1: 4).

Calculemos ahora la distancia del objeto correspondiente a estas condiciones. Ponemos en (1):

$$a' = -(g - e)$$

y obtendremos:

$$CP = a = \frac{-(g - e)f}{-(g - e) - f} + \frac{(g - e)f}{g - e + f}$$

(En el ejemplo de fig. 3, con  $f = 15$  cm,  $w = 25$  cm,  $g = 40$  cm y  $e = 6$  cm, resulta:  $a = \frac{34 \cdot 15}{49} = 10,4$  cm)

Calculamos el aumento  $A$  para este caso. Haciendo  $P'Q_o' = PQ$ , y trazando  $P_oQ_o = PQ$  a la distancia  $w$  del ojo, tendremos:

$$\sphericalangle P_oOQ_o = \frac{P_oQ_o}{w}$$

$$\sphericalangle P'OQ_o' = \frac{P'Q_o'}{g} = \frac{P_oQ_o}{g}$$

de modo que:

$$\frac{\sphericalangle P_oOQ_o}{\sphericalangle P'OQ_o'} = \frac{g}{w}$$

Por consiguiente:

$$\sphericalangle P_oOQ_o = \frac{g}{w} \cdot (\sphericalangle P'OQ_o')$$

Obtenemos entonces para el aumento  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sphericalangle P'OQ_o'}{\sphericalangle P_oOQ_o} = \frac{\sphericalangle P'OQ_o'}{\frac{g}{w} (\sphericalangle P'OQ_o')} = \frac{w}{g} \cdot \frac{\sphericalangle P'OQ_o'}{\sphericalangle P'OQ_o'} = \frac{w}{g} \cdot \frac{P'Q_o'}{P'Q_o'} \\ &= \frac{w}{g} \frac{P'Q_o'}{PQ} = \frac{w}{g} \cdot \frac{CP'}{CP} = \frac{w}{g} \cdot \frac{g - e}{(g - e)f} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{1}{f + g - e} \end{aligned}$$

o sea:

(4)

$$A = \frac{w}{g} \cdot \frac{f + g - e}{f}$$

(Para los valores numéricos del ejemplo de fig. 3 resulta:  $A = \frac{25}{40} \cdot \frac{49}{15} = 2,0$ .)

Si se coloca el objeto en el plano focal de la lupa, la imagen virtual es infinitamente grande y está situada en el infinito. Para este caso ponemos en la (4)  $g = \infty$  y resulta para el aumento  $A$ :

(5)

$$A = \frac{w}{f} = \frac{1}{f} \cdot w$$

En palabras: El aumento es igual al producto de la potencia  $1/f$  de la lupa por la óptima distancia visual del ojo del observador.

(Para los valores antes indicados,  $f = 15$  cm,  $w = 25$  cm, e imagen virtual en el infinito, resulta para el aumento  $A: \frac{25}{15} = 1,7$ )

En este caso no tiene influencia sobre el aumento la distancia  $e$  entre el ojo y la lente.

Si la lupa fuera usada por un ojo hipermetrope, que tuviera tanto el punto remoto como el punto próximo detrás del ojo, el objeto tendría que colocarse un poco fuera de la distancia focal de la lente, para que tal ojo pudiera ver nítidamente una imagen virtual de aquél.

Las fórmulas (2), (3), (4) y (5) demuestran que aumentos fuertes los dan lupas de distancia focal  $f$  pequeña. Lupas fuertes, por consiguiente, tienen distancias focales de pocos centímetros.

Las mismas fórmulas enseñan también que una lupa da diferentes aumentos según la manera de usarla y según las condiciones del ojo que la use. Por consiguiente, hablar del "aumento de la lupa" tiene un sentido claro solamente si al mismo tiempo se fija el modo de usarla y las condiciones del ojo que trabaja con ella. Se podría, por ejemplo, definir según (5) el aumento de una lupa para un ojo normal e imágenes en el infinito como "el número que indica cuantas veces cabe la distancia focal en la óptima distancia visual de 25 cm".

Si dos ojos diferentes, por ejemplo, uno normal y otro míope, usan una misma lupa y del mismo modo (o sea con las mismas distancias del ojo a la lupa y a la imagen), las fórmulas (2), (3), (4) y (5), en las que la distancia  $w$  es menor para el ojo míope, demuestran que la lupa da menos aumento para el ojo míope que para el ojo normal.

Pero si se tiene en cuenta que un ojo míope, al observar un objeto sin lupa, lo coloca a distancia relativamente corta y que, en consecuencia, recibe sobre la retina una imagen más grande que un ojo normal, se comprende fácilmente que, comparada con esa imagen (relativamente grande) sobre la retina, dada por el ojo desnudo, la otra imagen que se obtiene sobre la retina al usar la lupa, no pueda resultar tan aumentada como lo es en el caso del ojo normal.

### 3. Lupa compuesta.

Estudiaremos ahora un caso de lupa compuesta de dos lentes. Consideramos un sistema de lentes como el ilustrado en fig. 24 de pág. 95, en el supuesto de que dicha figura represente el tamaño natural de las lentes 1 y 2, de su distancia  $d$  y de sus distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ . Suponemos así los siguientes valores (ver fig. 4):

$$f_1 = 45 \text{ mm}, \quad f_2 = 25 \text{ mm}, \quad d = 20 \text{ mm}.$$

Calculemos la posición de los focos  $F$  y  $F'$  y de los puntos principales  $H$  y  $H'$  del sistema.

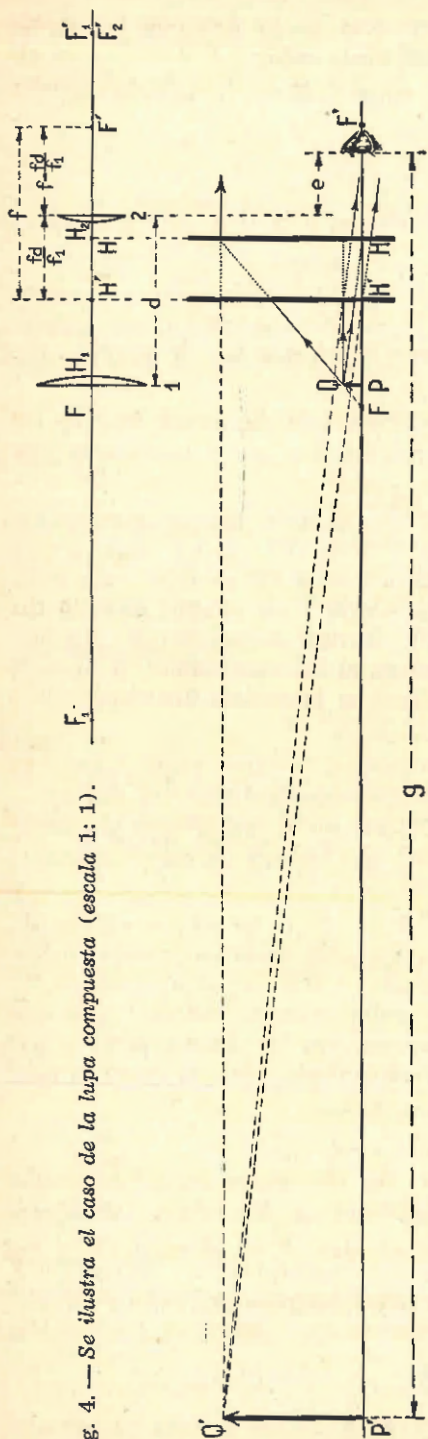


Fig. 4. — Se ilustra el caso de la lupa compuesta (escala 1: 1).

La ecuación (36) de § 4 (pág. 82) nos da:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{45 \cdot 25}{50} = 22,5 \text{ mm}$$

Con tener en cuenta las (44) y (40) de § 4, resulta:

$$H_1F = H_1F_1 + F_1F = f_1 + \sigma = f_1 - f \frac{f_1}{f_2} = 45 - 22,5 \cdot \frac{45}{25} = 4,5 \text{ mm}$$

$$H_2F' = H_2F_2' + F_2'F' = f_2 + \sigma' = f_2 - f \frac{f_2}{f_1} = 25 - 22,5 \cdot \frac{25}{45} = 12,5 \text{ mm}$$

y las (46) y (42) del § 4 nos dan:

$$H_1H = -f \frac{d}{f_2} = -22,5 \cdot \frac{20}{25} = -18 \text{ mm}$$

$$H_2H' = -f \frac{d}{f_1} = -22,5 \cdot \frac{20}{45} = -10 \text{ mm}$$

(Al reemplazar en la (42)  $H_2H'$  por  $H_2H'$  hemos despreciado el grosor de la lente 2.)

Supongamos ahora que el ojo esté colocado a la distancia  $e$  de la lente 2 (fig. 4) y que la imagen virtual  $P'Q'$  se halle a la distancia  $g$  del ojo.

Para hallar la distancia  $a$  del objeto, necesitamos la distancia  $H_2H'$ , cuyo

valor absoluto es  $\frac{fd}{f_1}$  según la fórmula

la (42), pág. 83. Tenemos entonces el valor absoluto de la distancia de la

imagen  $a'$ :  $|a'| = g - e - \frac{fd}{f_1}$

y la distancia de la imagen con su signo:

$$a' = e - g + \frac{fd}{f_1}$$

Introduciendo este valor en la fórmula

de la lente  $a = \frac{a'f}{a' - f}$  [fórmula

(58) de pág. 87], obtenemos:

$$|a| = \frac{\left( e - g + \frac{fd}{f_1} \right) f}{e - g + \frac{fd}{f_1} - f}$$

Si llamamos  $h$  el tamaño lineal de  $PQ$  del objeto, y si tenemos en cuenta que según la (31) de § 4 (pág. 80) el tamaño de la imagen  $P'Q'$ , en valor absoluto, es a  $PQ$  como  $a'$  es a  $a$ , obtenemos el tamaño  $h'$  de  $P'Q'$  en valor absoluto por la proporción:

$$\frac{|h'|}{h} = \frac{|a'|}{a}$$

Por consiguiente:

$$|h'| = h \cdot \frac{|a'|}{a} = h \cdot \frac{\left| e - g + \frac{fd}{f_1} - f \right|}{f}$$

Como se ha supuesto el objeto colocado dentro de la distancia focal,  $a'$  es negativo y podemos escribir la última ecuación así:

$$|h'| = h \cdot \frac{g - e + f - \frac{fd}{f_1}}{f}$$

Este segmento  $|h'|$ , es decir, la imagen virtual de  $h$ , se ve desde la distancia  $g$  bajo el ángulo:

$$h \cdot \frac{g - e + f - \frac{fd}{f_1}}{fg}$$

A ojo desnudo el objeto  $h$  se veía desde la óptima distancia visual  $w$  bajo el ángulo:

$$\frac{h}{w}$$

Dividiendo el primero de estos ángulos por el segundo, obtenemos el aumento  $A$  dado por la lupa compuesta:

$$(6) \quad A = \frac{w}{g} \cdot \frac{g - e + f - \frac{fd}{f_1}}{f}$$

Se nota que esta fórmula difiere de la (4) solamente en el numerador del segundo factor: La cantidad  $f$  que figura en el numerador de la (4) hállase reemplazada en la (6) por la expresión  $f - \frac{fd}{f_1}$  (ver fig. 4) que significa la distancia del foco  $F'$  a la segunda lente del sistema.

En el ejemplo de fig. 4 hemos adoptado los valores numéricos  $g = 168$  mm,  $e = 8$  mm, y como

$$\frac{fd}{f_1} = \frac{22,5 \cdot 20}{45} = 10 \text{ mm}$$

resulta :

$$a' = e - g + \frac{fd}{f_1} = 8 - 168 + 10 = -150 \text{ mm}$$

y para a :

$$a = \frac{-150 \cdot 22,5}{-172,5} = 19,6 \text{ mm}$$

Según la (6) resulta entonces para la posición del objeto adoptada y la del ojo y  $w = 250 \text{ mm}$ , el aumento **A** de la lupa compuesta:

$$A = \frac{250}{168} \cdot \frac{168 - 8 + 22,5 - \frac{22,5 \cdot 20}{45}}{22,5} = \frac{250}{168} \cdot \frac{172,5}{22,5} = \underline{11,4}$$

#### 4. Distintos tipos de lupas.

La lupa simple no acromática (fig. 5) sólo se emplea para pequeños aumentos (hasta 6). La mejor forma de la lente es la planoconvexa o casi planoconvexa, estando la cara de menor curvatura vuelta hacia el ojo del observador (la llamada lente de mejor forma, ver pág. 106).

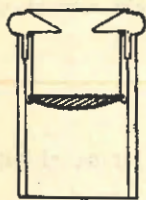


Fig. 5.  
Lupa simple.

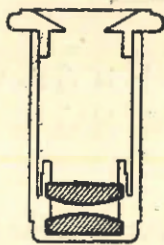


Fig. 6  
Lupa de  
FRAUNHOFER.



Fig. 7.  
Lupa tipo WILSON.

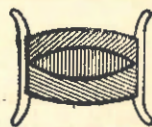


Fig. 8.  
Lupa acromática de  
STEINHEIL.

La lupa de **Fraunhofer** (fig. 6) está constituida por dos lentes planoconvexas iguales, muy aproximadas la una a la otra, con las caras curvas vueltas hacia adentro.

La lupa tipo **Wilson** (fig. 7) es análoga a la anterior, pero sus lentes están más separadas. Está en uso general en los instrumentos topográficos y geodésicos, hallándose en ella corregidos gran parte de los errores de aberración. Aumento hasta 10.

La lupa acromática de **Steinheil** (fig. 8) es una de las mejores que se construyen. Está constituida por una lente convergente simétrica, de vidrio crown, a la cual están encolados, a ambos lados, meniscos divergentes (fig 6, pág. 71) de vidrio flint.

La lupa de **Stanhope** es un pequeño cilindro de vidrio, cuyas bases están laminadas en forma esférica, a veces con curvaturas distintas. Se la emplea en la regla de cálculo.

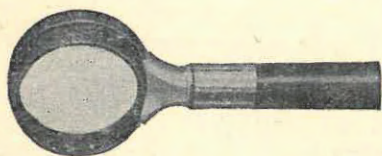


Fig. 9. — Lupa de lectura "Zeiss".



Fig. 10. — Lupa de bolsillo "Zeiss".

Las figuras 9, 10 y 11 representan algunos tipos de lupas de lectura.



Fig. 11. — Moderna lupa "Violett" de Zeiss, de pequeño aumento, pero de gran luminosidad.

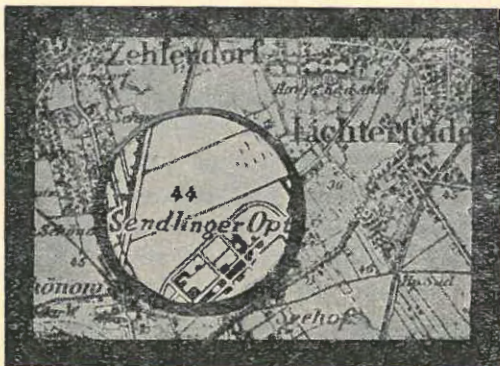


Fig. 12. — La lupa "Violett" facilita la rápida lectura de los detalles de una carta.

### 5. Armadura de la lupa.

La armadura de la lupa depende generalmente del uso que se da a la misma. Para evitar que el ojo ocupe una posición inadecuada, es decir, excéntrica con respecto al eje de la lente, se emplea muchas veces como armadura un tubo cilíndrico (ver figs. 5, 6 y 7).

## § 9

## Microscopio compuesto

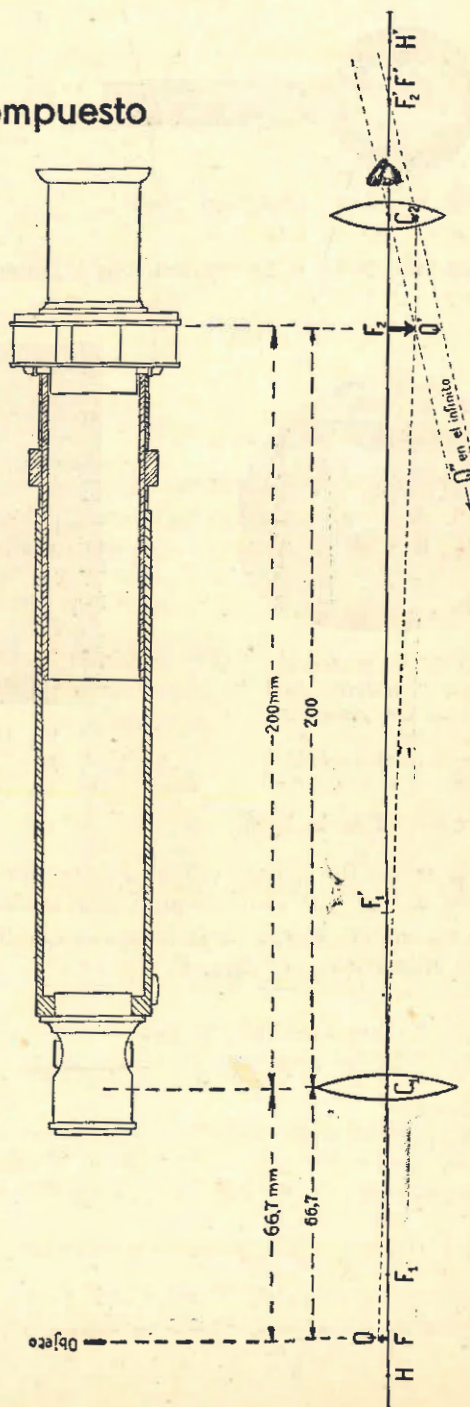
## 1. Definición.

Las partes principales del microscopio son: una lente objetiva convergente (generalmente acromática) y una lupa ocular, unidas las dos por medio de un tubo metálico. La lente objetiva produce de un objeto muy cercano una imagen aumentada y lejana, la cual se observa visualmente a través de la lupa ocular. Esta imagen es real y puede medirse micrométricamente en caso de emplearse como ocular el de RAMSDEN (págs. 94-96), que es el tipo de ocular que se usa en los teodolitos para lecturas de círculos.

En cambio, cuando se utilice el ocular de HUYGENS (ver págs. 97 y 98), la imagen producida por el objetivo es virtual y se halla situada entre las dos lentes del ocular. Tal imagen sólo sirve para la observación visual, pero no para la medición de la misma.

## 2. Sistema óptico del microscopio compuesto, con lente ocular simple.

Consideramos un microscopio con una lente objetiva de distancia focal  $f_1$  y una lente ocular de distancia focal  $f_2$  siendo  $d$  la dis-



Se ilustra en la parte superior de esta figura el microscopio empleado en el Comparador de 4 m del Instituto Geográfico Militar Argentino (ver fig. 21, Cap. I, Vol. 1 del Tomo III) y, en el esquema en la parte inferior, el camino de los rayos correspondientes al mismo. (Escala 1:2)

tancia que media entre las dos lentes. En la figura hemos adoptado los siguientes valores:

$$f_1 = 50 \text{ mm}, \quad f_2 = 30 \text{ mm y } d = 230 \text{ mm}.$$

Según fórmula (36) de § 4 (ver pág. 82) resulta entonces para la distancia focal  $f$  del sistema:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{50 \cdot 30}{-150} = -10 \text{ mm}.$$

Las distancias interfocales  $F_1F' = \sigma$  y  $F_2'F' = \sigma'$  resultan de las fórmulas (43) y (39) del § 4 (págs. 83 y 82):

$$F_1F' = \frac{f_1^2}{d - f_1 - f_2} = \frac{50^2}{150} = 16\frac{2}{3} \text{ mm}.$$

$$F_2'F' = \frac{f_2^2}{d - f_1 - f_2} = \frac{30^2}{150} = 6 \text{ mm}.$$

Con estos valores están también fijadas las posiciones de los puntos principales  $H$  y  $H'$  del sistema, en vista de que:

$$HF = H'F' = f = -10 \text{ mm}.$$

Colocado un objeto  $FQ$  en el plano focal anterior del sistema, la lente objetiva formará del mismo una imagen real  $F_2Q'$ , la que es observada a través de la lente ocular. Esta lente ocular está colocada de tal manera que su plano focal anterior coincida con la imagen real producida por la lente objetiva, formándose entonces una imagen virtual  $F''Q''$  infinitamente grande y situada en el infinito (ver función del microscopio, 2º inciso de pág. 89).

### 3. Cálculo del aumento del microscopio compuesto.

En la figura hemos supuesto el objeto  $FQ = 2,5 \text{ mm}$ . Como la distancia  $a$  del objeto a la lente objetiva es:

$$C_1F = a = C_1F_1 + F_1F = f_1 + F_1F = 50 + 16\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3} \text{ mm},$$

obtenemos para la distancia  $a' = C_1F_2$  de la imagen, por medio de la fórmula de la lente:

$$C_1F_2 = a' = \frac{a \cdot f_1}{a - f_1} = \frac{66\frac{2}{3} \cdot 50}{16\frac{2}{3}} = 200 \text{ mm}.$$

Para el ángulo  $FC_1Q$  tenemos entonces:

$$\frac{2\frac{1}{2}}{66\frac{2}{3}} = \frac{3}{80}$$

El ángulo  $F_2C_2Q'' = \alpha$ , bajo el cual el ojo situado detrás del ocular ve la imagen al infinito es:

$$\frac{3}{80} \cdot \frac{C_1F_2}{C_2F_2} = \frac{3}{80} \cdot \frac{200}{30} = \frac{1}{4}$$

El ojo desnudo verá el objeto  $FQ = 2,5$  mm desde una distancia de  $w = 250$  mm (óptima distancia visual) bajo un ángulo  $\beta$  de:

$$\beta = \frac{2,5}{250} = \frac{1}{100}$$

Resulta entonces para el aumento  $A$  del microscopio compuesto en cuestión:

$$A = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4} : \frac{1}{100} = 25$$

Este aumento 25 resulta por una parte del aumento de la imagen producida por el objetivo y por otra del aumento dado por el ocular. El aumento dado por el objetivo, en el ejemplo de la figura, es 3 (siendo el tamaño supuesto del objeto  $FQ = 2,5$  mm, el tamaño de la imagen  $F_2Q'$  es 7,5 mm), dando el ocular, con la distancia focal de 30 mm, un aumento de  $\frac{w}{30} = \frac{250}{30} = 8\frac{1}{3}$  [de acuerdo a la fórmula (5) de § 8].

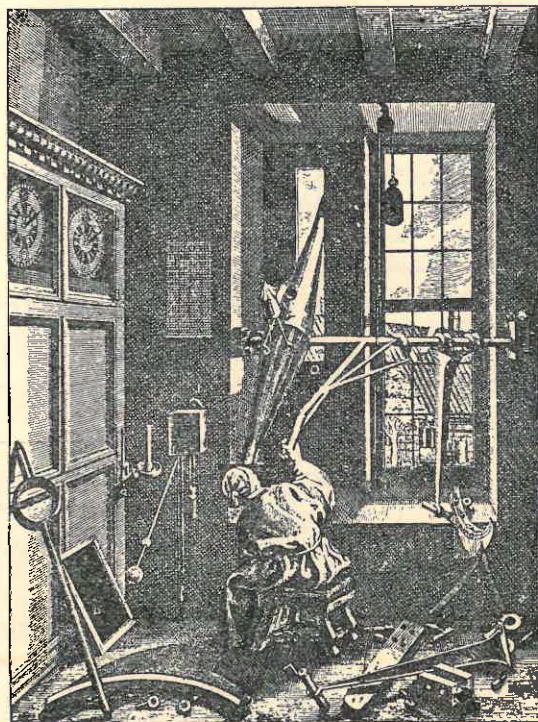
El aumento total del microscopio es entonces:  $3 \times 8\frac{1}{3} = 25$ .

#### 4. Ventaja del microscopio compuesto comparado con la lupa.

Siendo el aumento producido por el microscopio compuesto el producto de dos aumentos (el dado por el objetivo y el dado por el ocular), se puede obtener con tal microscopio aumentos mucho mayores de los que permitiría alcanzar una lupa. Además de esta ventaja principal del microscopio compuesto, se puede mencionar esta otra: que es más fácil corregir con el microscopio los errores de aberración y producir imágenes perfectas, por la circunstancia de emplearse en él generalmente mayor número de lentes que en la lupa.

## § 10

## El anteojo



“Máquina doméstica” (año 1689) del astrónomo dinamarqués *O. Roemer* (1644 - 1710).

El anteojo constituye una parte tan esencial en la mayor parte de los instrumentos topográficos, geodésicos y astronómicos destinados a la observación ocular, que merece un lugar de preferencia en la descripción de esos instrumentos.

*Anteojo astronómico simple*

**1. Nota histórica.**

La cuestión: ¿Quién fué el inventor del anteojo? ha sido muy discutida y no será probablemente nunca completamente aclarada. Lo único que se sabe con certeza es que, según documentos de fecha 2 de octubre de 1608 hallados en Holanda, se deliberaba allí en aquel entonces sobre el otorgamiento de una patente relativa a la construcción de un anteojo, solicitada por **Juan**



JUAN LIPPERHEY († 1609).  
Fig. 1

Lipperhey (fig. 1), óptico de Middelburg (Holanda), y que tal solicitud fué denegada a causa de ser ya conocido entonces el invento.

En el mes de julio de 1609, el astrónomo **Galileo Galilei** (fig. 2), según su propia declaración, supo del invento del anteojo y se puso a construir uno independientemente. Con fecha 21 de agosto de 1609 lo presentó en la torre de la catedral de San Marco de Venecia. Era un anteojo de 2,4 metros de largo, con un objetivo de 42 mm de diámetro y un aumento de 9. Tiene **Galilei** el mérito de haber puesto por vez primera y con todo éxito el anteojo al servicio de las investigaciones del cielo: Descubrió los 4 satélites más grandes de Júpiter, el anillo de Saturno, las manchas del Sol, etc.

Es debido a estos hechos que el primer anteojo inventado lleva el doble nombre de **anteojo holandés** o **anteojo de Galilei**.

Consiste este anteojo en una combinación de dos lentes, una lente convergente que es el **objetivo**, y una lente divergente que es el **ocular**.

En el año 1611, el astrónomo **Kepler** (ver fig. 15, página 12) indicó en su famosa obra "**Dióptrica**" las características y la disposición de las lentes constitutivas de otro tipo de anteojo llamado **anteojo astronómico** o **anteojo de Kepler**. Tal anteojo está constituido por un objetivo igual al del anteojo holandés y un ocular que es una lente convergente. En el año 1615 fué construído por primera vez este segundo tipo de anteojo. Es entonces el ocular la parte óptica en que difieren los dos tipos de anteojos.

En vista de la mayor sencillez de la **teoría del anteojo de Kepler**, la trataremos en primer lugar.

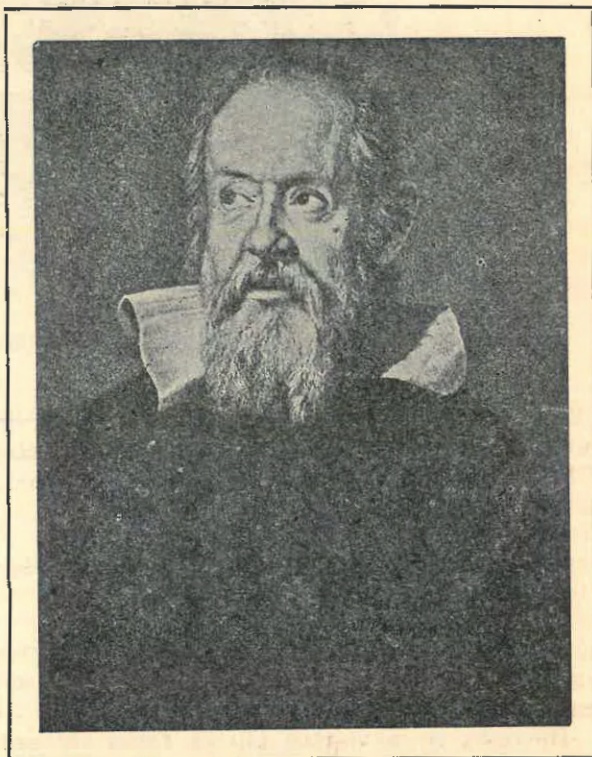


Fig. 2. — GALILEO GALILEI (1564 - 1642).

2. El anteojo de Kepler simple o anteojo astronómico simple. Principales elementos constructivos.

Consiste este anteojo, como dijimos, en una combinación de dos lentes convergentes, del objetivo *O* (fig. 3) de distancia focal  $f_1$  relativamente gran-

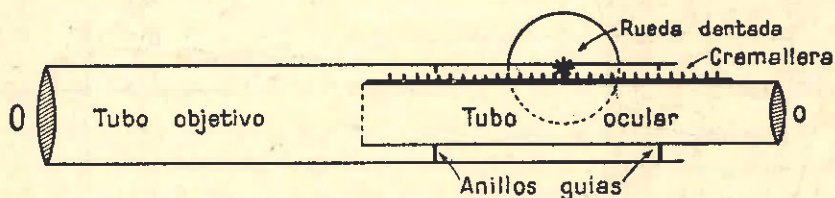


Fig. 3. — Esquema del anteojo astronómico simple (anteojo de Kepler) en su forma más primitiva destinado a la observación solamente. Se ilustra la movilidad relativa de los dos tubos portalentes.

de (la que varía entre 10 y 30 centímetros en los pequeños teodolitos y niveles de anteojo), y del ocular, *o*, de distancia focal  $f_2$  relativamente pequeña (por ejemplo de 1 a 2 cm). Ambas lentes están montadas en los extremos de tubos metálicos, el objetivo en el tubo objetivo y el ocular en el tubo ocular.

3. Camino de los rayos en el anteojo astronómico simple, en el supuesto de tratarse de lentes delgadas. Pupila de entrada y pupila de salida de un anteojo.

La forma fundamental de un anteojo astronómico simple es la de un sistema telescópico (ver págs. 84 y 93) esquemáticamente representado en fig. 4. Es decir, las dos lentes  $L_1$  (objetivo) y  $L_2$  (ocular) son centradas en tal forma que sus focos posteriores  $F'_1$  y anterior  $F_2$  coinciden en un mismo punto  $F$  y que la distancia  $C_1C_2$  resulta ser igual a la suma de las dos distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ :

$$C_1C_2 = f_1 + f_2$$

La lente objetiva forma (ver final de la pág. 88) de un objeto *y* generalmente lejano y grande una imagen *y'* invertida y muy disminuída, la que sirve como objeto para el ocular. Y como dicha imagen *y'* se forma dentro de la distancia focal del ocular, la imagen *y''* formada por éste, será virtual, aumentada y derecha con respecto al tamaño y posición de la imagen objetiva.

Sean 1, 2 y 3 (fig. 4) tres rayos de un cono (casi cilindro) de rayos que emanan de un punto objeto *Q* muy lejano y que inciden sobre el objetivo de un anteojo. El rayo principal 2 (trazado con línea más gruesa) forma con el eje el ángulo  $\beta$ . Tales rayos, después de refractarse en el objetivo, se reúnen en el punto imagen *Q'*, situado prácticamente sobre el plano focal que pasa por  $F$ . Dicho punto sirve de objeto para la lente ocular. El cono de rayos luminosos que emite *Q'* (y que incide sobre el ocular con base *A'B'*), después de refractarse en el ocular, sale en forma de cilindro de rayos 1', 2', 3'. Un ojo normal situado detrás del ocular, que intercepte este cilindro de rayos,

vería a la imagen virtual  $Q''$  situada en el infinito, la que corresponde al punto objeto  $Q$ . La dirección de los rayos que forman este cilindro de luz, es paralela a la recta  $Q'C_2$ .

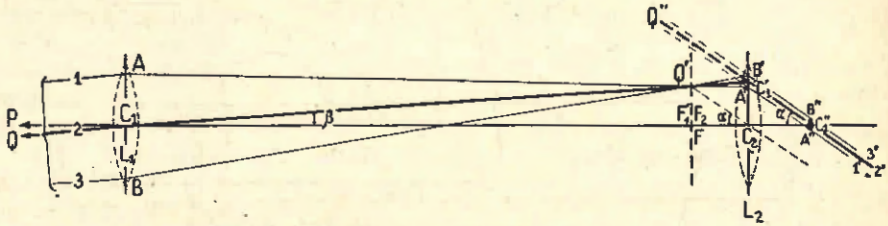


Fig. 4. — Se ilustra el camino de los rayos 1, 2 y 3 procedentes de un punto objeto  $Q$  lejano. El borde  $AB$  de la lente objetiva limita la pupila de entrada del anteojo, y su imagen  $A''B''$ , formada por el ocular, da la pupila de salida.  $\beta$  es el ángulo que el rayo principal entrante 2 forma con el eje del sistema, siendo  $\alpha$  el ángulo que el rayo conjugado saliente 2' forma con dicho eje.

Esto se comprende, porque  $Q'C_2$  representa un rayo que se supone saldría de  $Q'$  y pasaría por el centro óptico del ocular y que, por consiguiente, no sufre desviación alguna. En vista de que  $Q'$  es un punto del plano focal, todos los rayos emanados del mismo, después de refractarse en el ocular, tienen que resultar paralelos. Son por ello paralelos los rayos  $1', 2', 3'$  y  $Q'C_2$ .

Como **diafragma de campo** generalmente la montura del objetivo, siendo entonces la **pupila de entrada P. E.** del anteojo la abertura  $AB$  misma:

$$(2) \quad AB = 2p_e$$

La **pupila de salida P. S.** del anteojo es la imagen real  $A''B'' = 2p_s$ , que el ocular forma de la pupila de entrada o sea de la montura del objetivo.

Al rayo medio 2 del cono de rayos (1, 2, 3) que pasa por el centro de la pupila de entrada, se le llama **rayo principal** de ese cono. Al ángulo  $\beta$  que el rayo principal entrante forma con el eje, corresponde un ángulo  $\alpha$  del rayo principal saliente. Lo que ocurre con el cono de rayos (1, 2, 3) ocurriría con otros conos de rayos luminosos emanados de otros puntos objetos y que atravesaran el objetivo bajo diferentes ángulos: Todos ellos, después de refractarse en el objetivo, pasarían por la pupila de salida **P. S.**, la que aparece detrás del ocular cual pequeño círculo brillante. Este pequeño círculo, denominado **circulito de Ramsden** (1735 - 1800) es conocido desde largo tiempo, y ha llamado la atención de los ópticos mucho antes de que el físico **Abbe** (1840 - 1905) diera la teoría completa de la limitación de los rayos.

#### 4. Sitio en que se forma la pupila de salida (circulito de Ramsden) de un anteojo.

Calculemos ahora la distancia  $C_2C''_1$  entre el ocular y la pupila de salida **P. S.**

Siendo en este caso la distancia del objeto  $a = C_1C_2 = f_1 + f_2$  y la distancia de la imagen  $a' = C_2C''_1$ , la fórmula de la lente nos da:

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{C_2 C_1''} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{C_2 C_1''} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 + f_2 - f_2}{f_2(f_1 + f_2)} = \frac{f_1}{f_2(f_1 + f_2)}$$

o sea:

$$(3) \quad C_2 C_1'' = f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1} = f_2 \left( 1 + \frac{f_2}{f_1} \right)$$

Si la pupila del ojo observador debe recibir toda la luz que atraviesa el anteojo, será necesario que se coloque justamente en el sitio de la pupila de salida del anteojo. Es en este lugar donde, después de pasar por el anteojo, todos los rayos principales correspondientes a los distintos puntos objetos, o sea los ejes de todos los cilindros de luz que recibe el ojo, se cortan en un único punto, que es el centro de la pupila de salida (circulito de Ramsden). Y desde este punto el ojo verá entonces a todos los puntos de la imagen real que emiten rayos.

Cuando se observan con el anteojo objetos más cercanos, se deberá substituir en la fórmula (3) la distancia focal  $f_1$  del objetivo por la distancia  $a'$  de la imagen real correspondiente a tales objetos, y por ser en este caso  $a' > f_1$ , el segundo factor de la (3) se aproximará más todavía a la unidad, siendo por eso en todos los casos el foco posterior  $F'_2$  del ocular un lugar muy aproximado al sitio más favorable para el ojo observador.

### 5. Aumento del anteojo astronómico simple.

Suponemos ahora que el rayo principal emanado de un punto objeto lejano  $Q$  (fig. 4) forme con el eje del anteojo el ángulo  $\beta$ .

Sea  $P$  la proyección del punto objeto sobre el eje. Un ojo desnudo colocado en  $C_1$  vería entonces el objeto  $PQ$  bajo un ángulo  $\beta = \angle FC_1 Q$ .

Pero aunque coloquemos el ojo desnudo en  $C''_1$  (en lugar de colocarlo en  $C_1$ ), ese ojo vería el objeto  $PQ$  prácticamente bajo el mismo ángulo  $\beta$ , porque el traslado del ojo de  $C_1$  a  $C''_1$  no influiría sensiblemente sobre la magnitud del ángulo visual  $\beta$  debido a la gran distancia del objeto.

Mirando ahora a través del anteojo, el ojo, en  $C''_1$ , vería la imagen virtual  $P''Q''$  bajo el ángulo  $\alpha = \angle C_2 C''_1 C_1$ .

Llamaremos aumento del anteojo  $A$  al cociente de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir:

$$A = \frac{\alpha}{\beta}$$

Pero como  $\angle FC_2 Q'$  es también igual al ángulo  $\alpha$ , tenemos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{FQ'}{f_2} \quad \text{y} \quad \text{tg } \beta = \frac{FQ'}{f_1}$$

Resulta:

$$(5) \quad \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \frac{f_1}{f_2}$$

Tratándose de ángulos pequeños, podemos reemplazar  $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta}$  por  $\frac{\alpha}{\beta}$ , con lo que resulta:

$$(6) \quad A = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_1}{f_2}$$

Es decir: El aumento del anteojo es igual al cociente de las distancias focales del objetivo y del ocular.

De la semejanza de los triángulos  $ABQ$  y  $A'B'Q'$  deducimos que los diámetros de las pupilas de entrada ( $AB$ ) y salida ( $A'B''$ ) son también entre sí como las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ .

Es decir:

$$(7) \quad \frac{AB}{A''B''} = \frac{f_1}{f_2}$$

Comparando la (7) con la (6), resulta para el aumento  $A$ :

$$(8) \quad A = \frac{AB}{A''B''}$$

Expresado en palabras: El aumento de un anteojo astronómico se obtiene dividiendo el diámetro del objetivo por el diámetro del circulito de Ramsden.

#### 6. Diafragma de campo.

Si en la figura 4 el punto objeto  $Q$  se encuentra más alejado del eje, resultando así más grande el ángulo  $\beta$ , podría ocurrir que el segmento  $A'B'$  en parte cayese fuera de la superficie del ocular. En este caso el ojo colocado en  $C''_1$  recibiría solamente una parte de la luz que el punto objeto  $Q$  proyecta sobre el objetivo. Es decir, de tales puntos  $Q$  se percibiría una imagen de luminosidad defectuosa. Para que el ojo pueda percibir imágenes de claridad uniforme en toda su extensión, y para que no sea molesto por partes excéntricas de luminosidad no satisfactoria, es práctica corriente excluir completamente de la observación los objetos demasiados excéntricos, lo que se consigue con colocar un adecuado **diafragma de campo** en el plano de la imagen real formada por el objetivo.

La práctica ha enseñado la conveniencia de elegir para el diámetro de tal diafragma una magnitud que es aproximadamente  $1/3$  ó  $1/4$  de la distancia focal  $f_2$  del ocular.

#### 7. Variación de la longitud del anteojo astronómico simple debido a su enfoque para puntos objetos situados a distancias distintas. Retículo, eje de colimación. Modo de operar.

La distancia  $a'$  de la imagen, la que se calcula fácilmente por medio de la fórmula de la lente [ver (58), pág. 87], en base a la distancia  $a$  del objeto y la distancia focal  $f_1$  del objetivo, varía según la distancia del punto objeto. En la observación de puntos muy lejanos (caso que hemos supuesto en figura 4), las imágenes se forman en el plano focal posterior del objetivo.

Cuando el punto objeto  $Q$  está más próximo, la imagen real  $Q'$  se encuentra más alejada del objetivo por el foco  $F'$ . Para poder observar a través del ocular la imagen formada por un anteojo, el ocular debe ser desplazable en sentido longitudinal con respecto al objetivo. Esto se consigue montando el objetivo y el ocular en dos tubos distintos (ver fig. 3), de los cuales el uno está enchufado en el otro. Puede el tubo objetivo estar montado en un soporte, siendo movable entonces el tubo ocular, lo que representa el caso más corriente. También es posible que el tubo ocular esté fijo al soporte, siendo entonces movable el tubo objetivo. La manipulación necesaria para conseguir que la imagen producida por el objetivo se sitúe en el plano focal del ocular, se llama "enfocar el anteojo para un objeto" o más brevemente "enfocar un objeto".

**Retículo.** Para que el anteojo astronómico pueda servir como una parte de instrumento para mediciones angulares, es necesario proveerlo de un **retículo**.

En su forma más simple el retículo consiste en una cruz de hilos muy finos colocados en el plano focal del ocular, o sea en el mismo lugar donde se forma la imagen real. Para el retículo pueden utilizarse hilos de tela de araña. Se fija en el anillo (en su cara vuelta hacia el ocular), que sirve como diafragma de campo (ver fig. 5). En otros casos, especialmente en muchos instrumentos topográficos y geodésicos modernos, el retículo es grabado sobre una placa de vidrio.

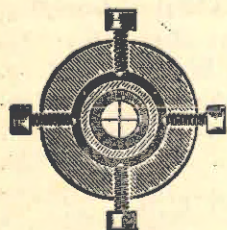


Fig. 5.  
Cruz de retículo y diafragma de campo del anteojo, con los dos pares de tornillos de corrección.

Cuando un anteojo, montado sobre un soporte y girable alrededor de un eje vertical y otro horizontal, es dirigido hacia el lugar donde se encuentra un punto objeto nítido  $P$ , por ejemplo, la punta de una torre de iglesia, la imagen de  $P$  se halla en algún punto del campo visual. Moviendo todavía el anteojo en sentido horizontal y vertical, se podrá conseguir que la imagen de  $P$  se sitúe justamente en el cruce de los hilos del retículo. Solamente en una determinada y única posición del anteojo se producirá esta coincidencia. Decimos entonces que el anteojo está **dirigido** hacia el punto  $P$ , o que se ha **apuntado** el punto  $P$ , o que se lo ha "bisectado".

**Eje de colimación.** Todos los rayos emitidos por el punto  $P$  y que caigan sobre el objetivo, se reúnen entonces en el cruce del retículo. Entre estos rayos es especialmente interesante el que pasa por el centro óptico del objetivo, el que (según lo expuesto en el N° 19 de pág. 86) no sufre desviación al atravesar el objetivo. De lo que se deduce que, cuando el anteojo está dirigido al punto  $P$ , se encuentran en una línea recta el punto objeto  $P$ , el centro óptico del objetivo y el cruce del retículo. Esta línea, definida en el anteojo por el **centro óptico del objetivo y el cruce del retículo**, se llama **eje de colimación**. Apuntar a un punto  $P$  implica entonces dirigir el eje de colimación a ese punto. Se nota que el eje de colimación depende completamente de la manera

cómo se ha montado el retículo, y como éste en la mayor parte de los instrumentos permite pequeños desplazamientos perpendiculares al eje del anteojo, por medio de tornillos (ver fig. 5), el operador puede modificar fácilmente en algo la posición del eje de colimación con el objeto de satisfacer ciertas exigencias que se hacen sentir en las mediciones.

(Nunca debe, como ocurre en algunos textos, confundirse el "eje de colimación" con el "eje óptico" del anteojo, dado que esta última denominación significa el eje del objetivo o sea la recta que une los centros de curvatura de sus superficies, eje que no depende en nada de la posición del retículo).

Para conseguir que en un anteojo astronómico la imagen de un punto P (lejano o cercano) se produzca en el plano focal del ocular, se mueve el ocular longitudinalmente. En este movimiento lo acompaña el retículo, que también está unido al tubo ocular por medio del anillo del diafragma de campo. Para que ojos de distintas condiciones puedan usar el anteojo cómodamente, el ocular (que es una lupa) debe todavía ser desplazable respecto al plano del retículo (ver figura esquemática 6).

**Modo de operar.** El observador procederá del siguiente modo: Moverá primero el ocular respecto al retículo hasta que vea a éste con toda claridad y

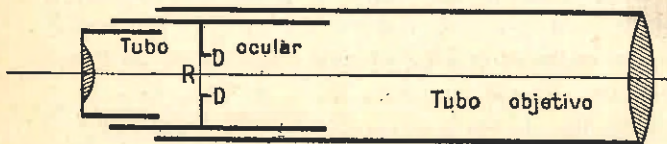


Fig. 6. — Esquema del anteojo astronómico simple perfeccionado para poder medir con el mismo. Se ilustra la variabilidad de las distancias entre el objetivo, el retículo y la lupa ocular. R, retículo; DD, diafragma de campo.

sin esfuerzo. Luego moverá el ocular conjuntamente con el retículo, con respecto al objetivo, hasta que la imagen del objeto apuntado se produzca con toda nitidez en el plano del retículo. El punto objeto estará entonces correctamente enfocado.

### 8. Antecedentes históricos sobre el retículo.

El anteojo astronómico simple, el que fué por primera vez descrito en la clásica obra "Dióptrica" por el astrónomo **Kepler** (año 1611) no era todavía apto para la medición, porque le faltaba el retículo. Este fué introducido recién 30 años más tarde por el inglés **Williams Gascoigne** (ver **Hammer**, *Zur Geschichte des Fadenkreuzes*, "Zeitschrift für Vermessungswesen, 1896". páginas 513 - 517).

### 9. Paralaje.

Cuando el operador haya ajustado correctamente el retículo (viendo entonces los hilos con toda claridad) y cuando, después de haber movido el ocular conjuntamente con el retículo hasta ver nítidamente también la imagen del punto P (producida por el objetivo), no hay que confiar todavía en que esa imagen se halle exactamente en el plano del retículo. El ojo puede tener la sensación de la nitidez aun cuando existe todavía una pequeña diferencia entre la situación del plano de la imagen del objeto y el plano del retículo. La pequeña distancia que puede existir aún entre esos dos planos se llama **para-**

laje. Así es posible que la imagen se haya formado un poco delante o un poco detrás del plano del retículo. Si uno de estos casos sucede y cuál de ellos sucede, se averigua fácilmente con mover un poco el ojo detrás del ocular: Si existe paralaje, se desplazará la imagen del punto **P** con respecto al retículo al mover el ojo, y según la manera cómo se desplaza se deducirá si esa imagen se encuentra más lejos o más cerca del ojo que el plano del retículo. Si, por ejemplo, la imagen de **P** al mover el ojo se desplaza en el mismo sentido, es un indicio de que esa imagen se encuentra más alejada del ojo que el retículo. En este caso se entrará un poco el tubo ocular conjuntamente con el retículo hasta que desaparezca la paralaje. Si, por el contrario, al mover el ojo la imagen de **P** se desplazara en sentido opuesto, sería indicio de que la imagen se halla más cerca del operador que el retículo. En este caso sería necesario extraer un poco el tubo ocular para hacer desaparecer la paralaje.

Antes de usar el anteojo, es imprescindible hacer desaparecer todo vestigio de paralaje, porque sería muy perjudicial para la precisión de las mediciones si las bisecciones dependieran de la posición del ojo detrás del ocular.

**10. Determinación práctica del aumento de un anteojo astronómico; distintos métodos.**

Para determinar el aumento de un anteojo astronómico disponemos de varios métodos.

**Primer método** (con las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$ ). Se podría determinar las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  del objetivo y del ocular, respectivamente, con las cuales se calcularía el aumento **A** del anteojo según la fórmula (6).

**Segundo método** (con el **circulito de Ramsden**). Después de enfocar el anteojo para un punto muy lejano (o en el infinito), se mide el diámetro **A**"**B**" (fig. 4) o **d** (fig. 7) del **circulito de Ramsden** (ver N° 2) y el diámetro **AB** (fig. 4) o **D** (fig. 7) del objetivo. Se obtiene el aumento **A** buscado con dividir el segundo por el primero de acuerdo con la fórmula (8).

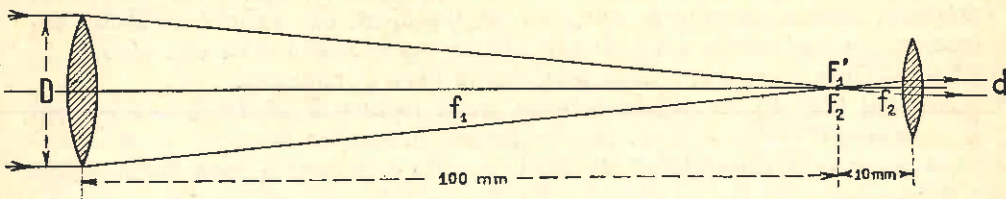


Fig. 7. — Se ilustra la determinación práctica del aumento con **circulito de Ramsden** aplicando la fórmula:  $A = D/d$ . En la figura se supone  $D = 20$  mm y  $d = 2$  mm, lo que da un aumento **A** de 10.

Este método es el más práctico de todos cuando no se requiere una precisión muy grande del aumento buscado.

Aún cuando se emplea uno de los otros métodos, conviene siempre controlar el resultado obtenido (para protegerse así contra algún posible error grosero) con la medición del **circulito de Ramsden**.

**Tercer método (con la mira).** Indicaremos todavía un tercer método, el que tiene la ventaja de prestarse también para la determinación del aumento de otros tipos de anteojos que no son astronómicos.

Se basa este método en la **observación simultánea de una imagen dentro del anteojo y del objeto correspondiente visto a ojo desnudo.** Para efectuar esto conviene colocar una mira dividida **M** (fig. 8) a una distancia algo grande, pero siempre tal que sea posible distinguir bien a ojo desnudo las divisiones de la mira. Observando con un ojo la imagen **M'** de la mira en el anteojo y con el otro ojo (desnudo) la mira misma, se podrá con alguna práctica conseguir la superposición de la imagen observada en el anteojo con la mira misma. Cuando se ha logrado realizar tal superposición, se podrá contar cuántas divisiones (por ejemplo decímetros) de la mira cubren la imagen de una división aumentada por el anteojo, dando el número así obtenido directamente el aumento buscado (en el ejemplo de la figura es 5).

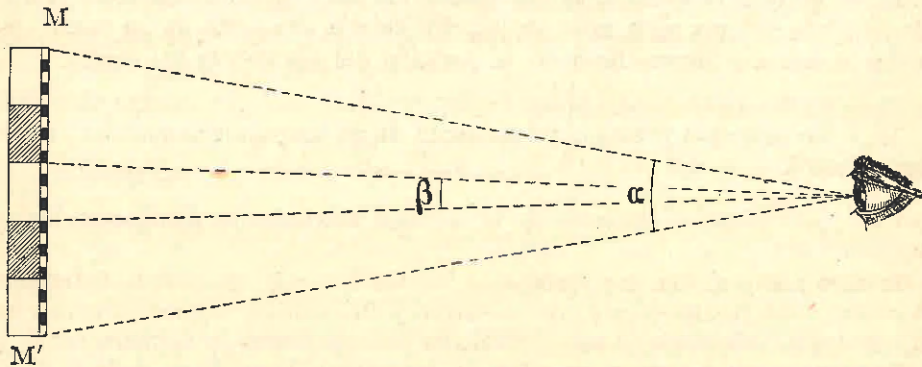


Fig. 8. — Se ilustra el procedimiento de la determinación del aumento con ayuda de una mira según la fórmula:  $A = \frac{\alpha}{\beta}$ . (En el ejemplo resulta 5.)

Cuando se ha colocado la mira a una distancia bastante corta, el procedimiento indicado daría solamente un **valor aproximado** para el aumento. No obstante, cuando se trate de anteojos astronómicos, con aplicar un **factor corrector**, que deduciremos a continuación, se puede también en este caso de la **mira próxima** obtener un valor más exacto para el aumento.

Sea **PQ** (fig. 9) un objeto cercano, cuya imagen **P'Q'** (el punto imagen **P''** está situado sobre el eje), producida por un anteojo astronómico es observada por un ojo colocado en **O** bajo el ángulo  $\alpha$ . A simple vista dicho objeto aparece al ojo en **O** bajo el ángulo  $\beta$ . El cociente  $A = \frac{\alpha}{\beta}$  representa un va-

lor aproximado del aumento **A** del anteojo.

Consideramos ahora el rayo  $QF_1$ , que pasa por el foco anterior del objetivo y que forma con el eje el ángulo  $B'$ . Suponemos que la imagen **P'Q'**, producida por el objetivo, se halla en el plano focal del ocular, lo que tiene por consecuencia que el rayo  $OQ''$  es paralelo a  $C_2Q'$  y que  $P'C_2Q'$  es también el ángulo  $\alpha$ .

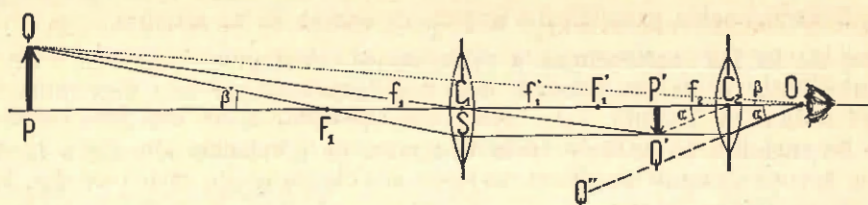


Fig. 9. — Se ilustra la determinación del aumento de un anteojo (con mira próxima) por medio de la fórmula  $A = A_o \times \frac{F_1P}{OP}$

Como el aumento **A** del anteojo es igual al cociente  $\frac{f_1}{f_2}$  según la fórmula (6), y como de los triángulos  $P'C_2Q'$  y  $C_1F_1S$  se deduce que:

$$\beta' = \frac{C_1S}{f_1} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{P'Q'}{f_2} \quad (\text{donde } C_1S = P'Q')$$

resulta:

$$(9) \quad \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{f_1}{f_2}$$

que es el aumento **A** buscado.

Como la observación arriba descrita nos ha dado solamente el valor aproximado  $A_o = \frac{\alpha}{\beta}$ , falta aún establecer la relación entre los ángulos  $\beta$  y  $\beta'$ . Pero siendo:

$$\beta = \frac{PQ}{OP} \quad \text{y} \quad \beta' = \frac{PQ}{F_1P}$$

resulta:

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{F_1P}{OP} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{F_1P}{OP}$$

y el aumento **A** buscado:

$$A = \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{F_1P}{OP}$$

o sea:

$$(10) \quad \boxed{A = A_o \cdot \frac{F_1P}{OP}}$$

**Ejemplo numérico.** Con un nivel de anteojo y una mira colocada a 8 metros del objetivo se encontró:  $A_o = 30,5$ . La distancia focal  $f_1$  del objetivo era  $f_1 = 32$  cm, y la distancia del ojo al objetivo se midió en 37 cm.

Entonces resultó:

$$A = 30 \cdot \frac{800 - 32}{800 + 37} = 28,0$$

Es decir, el anteojo en cuestión tiene el aumento 28.

11. Determinación práctica del ángulo de campo de un anteojo.

Después de las explicaciones y definiciones del ángulo de campo  $\gamma$  de un anteojo dadas en el N° 4 de § 7, sólo nos falta ejecutar una determinación práctica de dicho ángulo

Se ha dirigido un anteojo hacia una mira de nivelación situada a la distancia  $a$  (por ejemplo de 20 metros) contada desde el objetivo (ver fig. 10).

El trozo de la imagen de la mira  $l'$ , limitado por los bordes inferior  $B'$  y superior  $A'$  del diafragma de campo nos permite deducir la magnitud del segmento  $l$  que nos interesa.

Suponemos ahora que se haya encontrado para  $l = 0,49$  m.

La distancia focal  $f_1$  del objetivo se ha obtenido con suficiente precisión midiendo en el anteojo enfocado para infinito la distancia entre el objetivo y el retículo. Supongamos  $f_1 = 20$  cm.

Tenemos entonces la fórmula (2) de § 7 para el ángulo de campo  $\gamma$ :

$$\gamma \text{ (en radianes)} = \frac{l}{a - f_1} = \frac{0,49}{19,80}$$

o sea:

$$\gamma \text{ (en minutos)} = \frac{0,49}{19,80} \cdot 34,38' = 85' = 1^{\circ}25'$$

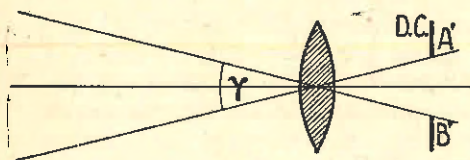


Fig. 11. — Se ilustra la determinación práctica del ángulo de campo  $\gamma$  según la

fórmula (3) de § 7:  $\gamma = \frac{l'}{f_1}$

$$(11) \quad \gamma \text{ (en minutos)} = \frac{1/3 f_2}{f_1} \cdot 3438' \sim \frac{1150'}{\frac{f_1}{f_2}} \sim \frac{1150'}{A}$$

y para  $l' = 1/4 f_2$  resultaría:

$$(12) \quad \gamma \text{ (en minutos)} = \frac{1/4 f_2}{f_1} \cdot 3438' \sim \frac{860'}{\frac{f_1}{f_2}} \sim \frac{860'}{A}$$

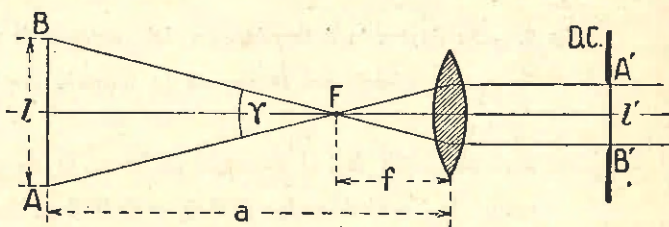


Fig. 10. — Se ilustra la determinación práctica del ángulo  $\gamma$  según la fórmula:

$$\gamma = \frac{l}{a - f_1}$$

En los instrumentos topográficos el ángulo de campo  $\gamma$  varía entre  $1/2^{\circ}$  y  $2^{\circ}$ .

Si se hace el diámetro del diafragma igual a  $1/3$  ó  $1/4$  de la distancia focal  $f_2$  del ocular (ver último inciso del N° 6), podemos deducir una fórmula que relaciona el ángulo de campo  $\gamma$  con el aumento  $A$  del anteojo.

Por ejemplo, para  $l' = 1/3 f_2$  resulta de la (3) de § 7:

De las (11) y (12) se desprende que, en esas condiciones fijadas para el diámetro del diafragma de campo, **el ángulo de campo de un anteojo es inversamente proporcional al aumento del mismo.**

## 12. Claridad o luminosidad de las imágenes de estrellas o claridad o luminosidad puntual.

Dadas las enormes distancias de las estrellas fijas, sus diámetros aparentes (ver pág. 127) tienen valores tan pequeños que tales fuentes de luz tienen prácticamente forma de puntos. Por ejemplo, las mediciones del diámetro aparente de la estrella de primera magnitud  $\alpha$  Tauri ha dado el valor de  $0,02'' = 1/10\ 000\ 000$ . La imagen que de esa estrella se produce sobre la retina, tendría un diámetro de:

$$\frac{1}{10\ 000\ 000} \cdot 15\ \text{mm} = 0,0015\ \mu$$

Esta magnitud está muy por debajo de la distancia que existe entre dos conos vecinos de la retina del ojo humano (que es de  $4\ \mu$  en término medio (ver página 117). Aun en el caso de que con ayuda de algún instrumento astronómico se produjera sobre la retina una imagen 100 veces aumentada, el tamaño de tal imagen todavía no alcanzaría a la distancia que separa dos conos vecinos de la retina, lo que significa que esa imagen aparecería al ojo siempre como punto luminoso. En este punto el ojo desnudo recibiría toda la luz que la estrella proyecta sobre la pupila del mismo.

En el caso de que la estrella fuera observada con ayuda de un anteojo, el punto de la retina donde se forma la imagen recibiría toda la luz que la estrella proyecta sobre el objetivo del anteojo, **siempre que la pupila de salida del mismo no tuviera un diámetro mayor que el diámetro de la pupila del ojo.**

Por tanto concluimos: **La luz que recibe el ojo por intermedio del anteojo es a la luz que recibe el ojo desnudo, como la superficie del objetivo es a la superficie de la pupila del ojo.** Pero estas dos superficies son entre sí como los cuadrados de sus respectivos diámetros.

Llamamos **claridad o luminosidad puntual  $C_p$  de un anteojo para un determinado estado del ojo observador** a la razón que existe entre la cantidad de luz emanada de una estrella que ese anteojo hace llegar al ojo, y la cantidad de luz que el ojo desnudo recibiría directamente.

Designando por  $2p_e$  al diámetro del objetivo y por  $2p_o$  al diámetro de la pupila del ojo, tendremos para la **claridad puntual del anteojo:**

$$(13) \quad C_p = \frac{(2p_e)^2}{(2p_o)^2} = A_n^2$$

donde  $A_n$  significa el **aumento normal del anteojo**, concepto que aclararemos en el N° 14.

Es decir, la **claridad o luminosidad puntual de un anteojo crece con el cuadrado del aumento normal**, siendo proporcional a la superficie del objetivo e independiente del aumento  $A$  del mismo, a condición de ser el diámetro de

la pupila de salida del anteojo menor que el diámetro de la pupila del ojo (que es generalmente el caso del anteojo astronómico).

Se comprende entonces que el ojo armado con anteojo podrá distinguir estrellas que a simple vista no alcanzaría a ver, y que el anteojo permite ver aún de día estrellas de cierta magnitud.

### 13. Pérdida de luz.

En las consideraciones que anteceden no hemos tenido en cuenta cierta pérdida de luz que siempre sufren los rayos luminosos debido a la absorción cuando atraviesan medios densos (como las lentes) y debido a la reflexión parcial que tiene lugar en las superficies que separan los diferentes medios. Tales pérdidas de luz naturalmente varían mucho según la cantidad de lentes que intervienen y la calidad de los vidrios empleados. Se puede estimar que en la generalidad de los casos tales pérdidas de luz oscilan alrededor del 20 %.

### 14. Concepto del aumento normal.

Como las cantidades de luz emitidas por un punto o un elemento superficial luminoso y que caigan sobre dos superficies circulares de diferente tamaño, son entre sí como las magnitudes de estas superficies, y, por consiguiente, como los cuadrados de sus diámetros, resulta, por ejemplo, que un ojo cuya pupila tuviera 8 mm de diámetro (**observación nocturna**) y que mira por un anteojo de 40 mm de diámetro del objetivo, recibiría de cada punto o elemento superficial luminoso  $\frac{40^2}{8^2} = 25$  veces más luz que recibiría por el ojo desnudo (siempre a condición de que el aumento de ese anteojo sea tal que la pupila de salida resulte con un diámetro menor de 8 mm).

Para que no se produzca pérdida de luz debido a un diámetro demasiado grande de la pupila de salida del anteojo, el aumento debe ser mayor o por lo menos igual a la razón  $\frac{2p_e}{2p_o}$  entre el diámetro  $2p_e$  del objetivo y el diámetro  $2p_o$  de la pupila del ojo. Esta razón la designamos por  $A_n$  y la llamamos el **aumento normal del anteojo para un determinado estado del ojo observador**.

Para **observaciones diurnas y muy buenas condiciones de luminosidad** del ambiente se puede suponer para el diámetro de la pupila del ojo  $2p_o = 2$  mm. Anteosos destinados a tales observaciones deben tener entonces un aumento mínimo de:

$$(14) \quad A_n = \frac{\text{Diámetro del objetivo (en mm)}}{2 \text{ mm}} = \frac{2p_e}{2}$$

o sea  $\frac{10}{2} = 5$  por cada centímetro del diámetro de la abertura del objetivo.

Para **observaciones en medianas condiciones de luminosidad** se puede suponer para el diámetro de la pupila del ojo  $2p_o = 4$  mm. Anteosos destinados a tales observaciones deben tener entonces un aumento mínimo de:

$$(15) \quad A_n = \frac{\text{Diámetro del objetivo (en mm)}}{4 \text{ mm}} = \frac{2p_e}{4}$$

o sea:  $\frac{10}{4} = 2,5$  por cada centímetro del diámetro de la abertura del objetivo.

Para **observaciones nocturnas** suponemos para el diámetro de la pupila del ojo  $2p_o = 8$  mm. Anteojos destinados a tales observaciones deben tener entonces un aumento mínimo de:

$$(16) \quad \bar{A}_n = \frac{\text{Diámetro del objetivo (en mm)}}{8 \text{ mm}} = \frac{2p_e}{8}$$

o sea:  $\frac{10}{8} = 1,25$  por cada centímetro del diámetro de la abertura del objetivo.

Cuando en un anteojo se tiene  $2p_s < 2p_o$ , (siendo  $2p_s$  el diámetro de la pupila de salida), el aumento es mayor que el normal, recibiendo entonces el ojo siempre toda la luz que cae sobre el objetivo.

Eligiendo, por ejemplo, 40 mm para el diámetro del objetivo, resultaría para el anteojo destinado a observaciones diurnas con muy buena luminosidad un aumento normal  $A_n$  de 20, y, en caso de destinárselo a observaciones nocturnas, un aumento normal de sólo 5.

**Ejemplo numérico:** Suponiendo un diámetro de la pupila del ojo igual a 2 mm, se pregunta: ¿Cuáles serían las magnitudes de los diámetros  $2p_e$  de anteojos destinados a observaciones diurnas, cuando se quiera obtener con ellos aumentos normales  $A_n$  de 10, 20, 30, respectivamente?

Dado que

$$A_n = \frac{2p_e}{2p_o}$$

resulta:

$$2p_e = A_n \cdot 2p_o$$

la que da para  $2p_e$  los valores 20, 40, 60 mm, respectivamente

### 15. Claridad o luminosidad superficial.

Cuando el objeto no es un punto objeto (estrella), sino un elemento superficial de alguna extensión, la relación (13) ya no sirve para dar una idea justa sobre la claridad de la imagen.

En tal caso conviene comparar las cantidades de luz que recibe una unidad superficial de la retina en el caso de usarse el anteojo con el otro de observarse a ojo desnudo. De acuerdo con tal idea, establecemos la siguiente definición de la **claridad o luminosidad superficial del anteojo**.

Llámase claridad o luminosidad superficial o simplemente **claridad o luminosidad de un anteojo C** a la razón que existe entre la cantidad de luz  $c_2$  recibida por una unidad superficial de la retina al observar el objeto por medio de un anteojo, y la cantidad de luz  $c_1$  recibida por la misma unidad de la retina al observar con ojo desnudo.

Según está definición tenemos para la claridad **C**:

$$(17) \quad C = \frac{c_2}{c_1}$$

Sean  $2p_o$  como antes el diámetro de la pupila del ojo,  $s$  la superficie de la imagen sobre la retina del objeto visto a ojo desnudo y  $\lambda$  un coeficiente que

depende de la luminosidad del objeto y de la unidad con que ésta se mide:

Tenemos entonces:

$$(18) \quad c_1 = \lambda \cdot \frac{(2p_o)^2}{s}$$

que es la cantidad de luz que recibe la unidad de superficie de la retina al observarse el objeto con ojo desnudo.

Al observar luego el objeto con ayuda del anteojo, suponemos que el diámetro del circulito de Ramsden es más pequeño que el diámetro de la pupila del ojo, pudiendo así llegar al ojo toda la luz que penetra por el objetivo del anteojo. Siendo  $2p_e$  el diámetro del objetivo (diámetro de la pupila de entrada) y  $S$  la superficie de la imagen en la retina, tendremos para  $c_2$ :

$$(19) \quad c_2 = \lambda \cdot \frac{(2p_e)^2}{S}$$

que es la cantidad de luz que recibe la unidad de superficie de la retina al observarse por el anteojo.

Luego tenemos la razón:

$$C = \frac{c_2}{c_1} = \frac{(2p_e)^2}{S} \cdot \frac{s}{(2p_o)^2}$$

o también:

$$(20) \quad C = \frac{2p_e^2}{2p_o^2} \cdot \frac{s}{S}$$

Siendo las superficies  $s$  y  $S$  entre sí como los cuadrados de correspondientes elementos lineales de estas superficies, que designaremos por  $l$  y  $L$  respectivamente, tenemos:

$$(21) \quad \frac{s}{S} = \frac{l^2}{L^2} = \frac{1}{L^2} = \frac{1}{A^2}$$

puesto que, de acuerdo con la figura 8, pág. 158, el aumento  $A$  de un anteojo no es otra cosa que la razón que existe entre la magnitud de la imagen  $L$  producida en la retina por un elemento lineal observado con anteojo, y la magnitud de la imagen  $l$  del mismo objeto visto con ojo desnudo.

En vista de la (21) la (20) nos da:

$$(22) \quad C = \frac{(2p_e)^2}{(2p_o)^2} \cdot \frac{1}{A^2}$$

o sea:

$$(23) \quad C = \frac{1}{(2p_o)^2} \cdot \frac{(2p_e)^2}{A^2}$$

Es decir: **La claridad de un anteojo** para una determinada abertura de la pupila del ojo y un determinado diámetro del objetivo es **inversamente proporcional al cuadrado del aumento**.

En vista de que  $A = 2p_e/2p_s$ , podemos poner en lugar de la (23):

$$(24) \quad C = \frac{1}{(2p_o)^2} \cdot \frac{(2p_e)^2}{\left(\frac{2p_e}{2p_s}\right)^2} = \frac{(2p_s)^2}{(2p_o)^2}$$

Se nota que:

$$(25) \quad C = 1$$

cuando el diámetro de la pupila de salida  $2p_s$  llega a ser igual al diámetro de la pupila del ojo:

$$(26) \quad 2p_s = 2p_o$$

Adoptando en la (24) para  $2p_o$  el valor de 2 mm (observaciones diurnas), obtendremos para la claridad  $C$  de un anteojo:

$$(27) \quad \boxed{C = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2p_e}{A}\right)^2}$$

Si el instrumento tiene un aumento igual al aumento normal [caso del nuevo teodolito "Kern" DK 3, ver planilla (28) y fig. 73], es decir que el haz saliente llena la pupila del ojo, la claridad es igual a uno, o sea, la claridad de la imagen formada sobre la retina es igual, indiferentemente si se observa con instrumento o a ojo desnudo (haciendo caso omiso de las pérdidas de luz por absorción en las lentes).

Si el aumento del anteojo es superior al normal, la claridad es menor que uno (caso de todos los demás instrumentos que figuran en la citada planilla).

Si a un anteojo de 20 aumentos le diéramos un objetivo de 40 mm ( $2p_s = 2$  mm) y no tomáramos en cuenta la pérdida de luz por absorción en los vidrios, tendríamos la claridad máxima al usarlo en observaciones diurnas, con  $2p_o = 2$  mm, mientras que en observaciones nocturnas, debido a un diámetro de la pupila que suponemos 4 veces mayor ( $2p_o = 8$  mm y  $2p_s = 2$  mm), la claridad con que veríamos un objeto superficial (por ejemplo la Luna) quedaría según (24) reducida a 1/16.

En los instrumentos topográficos se emplean generalmente objetivos cuyos diámetros varían entre 20 y 45 mm.

En base a la fórmula (27) hemos calculado la claridad de algunos anteojos de niveles y un teodolito para una abertura del ojo de 2 mm de diámetro:

(28)	}	Nivel Breithaupt "Naguk": $2p_e = 35$ mm, $A = 30$ , $C = 0,34$
		" Wild I: $= 25$ > $= 18$ , $= 0,48$
		" Zeiss D: $= 30$ > $= 25$ , $= 0,36$
		" Kern NK 3: $= 45$ > $= 30$ , $= 0,56$
		" Cooke S 300 $= 38$ > $= 25$ , $= 0,58$
		" Fennel B 36: $= 36$ > $= 32$ , $= 0,32$
		Teodolito Kern DK 3 $= 75$ > $= 37,5$ $= 1,0$

Como  $2p_s$  es siempre igual a  $\frac{2p_e}{A}$ , se nota que solamente para el último anteojo mencionado en la planilla (28) la magnitud  $2p_s$  ( $= \frac{75 \text{ mm}}{37,5}$ ) llega al valor de 2 mm, es decir, solamente para ese anteojo el haz saliente llena

completamente la pupila del ojo. Decimos entonces que en este antejo la claridad es máxima.

Se provee este antejo también con aumento 25, lo que da una pupila de salida de  $75:25 = 3$  mm de diámetro, pudiendo, por consiguiente, con el mismo efectuar observaciones de objetos terrestres aún después de la puesta del Sol, cuando con otro antejo del mismo aumento pero con objetivo de menor diámetro esto no sería más posible.

En los **talleres de óptica y mecánica de precisión** se suele emplear para comparación de la claridad de anteojos una fórmula simplificada, que se basa en la suposición de una pupila del ojo de sólo 1 mm de diámetro (tamaño tan pequeño que en realidad por lo general no se produce). Con tal diámetro ficticio de  $2p_0 = 1$  mm, la (27) nos da:

$$(29) \quad C = \left( \frac{2p_0}{A} \right)^2 = (2p_s)^2$$

y se nota que la claridad de un antejo así definida se obtiene con elevar al cuadrado el número de milímetros que mide el diámetro de la pupila de salida. Con tal definición convencional, los números que hemos indicado en el cuadro (28) para la claridad **C**, resultarían multiplicados por 4.

Por un lado sería deseable entonces construir anteojos con aumentos cada vez más fuertes para ver bien los detalles de las imágenes; pero como la fórmula (23) nos enseña que fuertes aumentos pueden obtenerse solamente a costa de considerables pérdidas de luminosidad, se comprende que los aumentos prácticamente útiles de anteojos astronómicos tienen su límite.

Otra causa por la cual no es posible construir anteojos y microscopios con aumentos cualesquiera reside en un fenómeno físico, llamado **difracción**, el que pone un cierto límite infranqueable a los aumentos que se pueden obtener con anteojos y microscopios contruidos con lentes.

#### 16. Difracción. Poder separador y aumento útil de un microscopio y de un antejo.

**Concepto del movimiento ondulatorio de la luz. Principio de Huygens.** La óptica geométrica se funda sobre ciertos principios y leyes (principio de la propagación rectilínea, pág. 3; principio de la independencia del rayo luminoso, pág. 3; ley de la reflexión, pág. 4 y ley de la refracción, pág. 11), los cuales, empero, no tienen en cuenta con absoluto rigor todos los fenómenos que se producen en la propagación de la luz. Existe, por ejemplo, un importante fenómeno físico, llamado **difracción**, que explicaremos más adelante y que contradice la propagación rectilínea de la luz. Un estudio detenido y profundo sobre la formación de las imágenes ópticas nos enseña que tales principios y leyes sólo expresan **consecuencias aproximadas** de las leyes que se deducen de la teoría de la luz. No tiene en ellos importancia alguna la hipótesis sobre la naturaleza de la luz (teoría ondulatoria de **Huygens**, o teoría de ondas electromagnéticas). Es suficiente para ellos admitir el hecho experimentalmente demostrado, que la luz se propaga en el espacio con un movimiento ondulatorio. Pero los rayos luminosos rectilíneos que suponíamos hasta ahora emitidos por un punto luminoso, no existen en realidad. Tales rayos sólo indican las **direcciones** en que se propaga el movimiento ondu-

torio que toma origen en dichos puntos de luz.

Según un importante principio establecido por el físico **Huygens (principio de Huygens)** todo punto del espacio situado sobre una de esas direcciones y que haya sido alcanzado por el movimiento ondulatorio, debe ser considerado como nuevo centro de ondas elementales.

En los diferentes nuevos centros de ondas elementales toman su origen movimientos ondulatorios que por diferentes caminos pueden llegar a encontrarse en algún punto del espacio.

**Interferencia. Superficies de onda.** Cuando movimientos ondulatorios de los excitados por un mismo centro, pero propagados por diferentes caminos, vuelven a encontrarse en un mismo punto, puede ocurrir que se suman sus amplitudes, resultando, por consiguiente, una intensidad de luz mayor, o que se anulen parcial o totalmente, resultando en este caso una intensidad luminosa disminuída o completamente apagada. Esta suma de dos o más ondas luminosas, que originan según el caso una onda de luz reforzada o disminuída, es llamada **interferencia**.

Medios ópticamente **isótropos** son cuerpos que en lo referente a la propagación de la luz en cualquier dirección se comportan de la misma manera. Si en un tal medio suponemos una fuente de luz puntual **P**, cualquier superficie esférica con centro en **P** contiene solamente puntos de igual fase del movimiento ondulatorio. En general se llama **superficie de onda** a una superficie unida tal que en todos sus puntos existe la misma fase de onda. En medios ópticamente isótropos **los rayos luminosos son siempre las normales a las superficies de onda**. Así por ejemplo, a rayos paralelos corresponden superficies de onda planas perpendiculares a esos rayos.

**Propagación de un movimiento ondulatorio en general y de la luz en particular. Período, frecuencia, longitud de onda, velocidad de la propagación.**

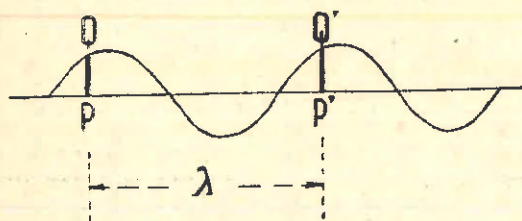


Fig. 12. — Se ilustra un corte por una onda de agua. Q y Q' designan puntos de igual fase y  $\lambda$  la longitud de onda.

Si en la figura 12, que es un corte por una onda de agua, **Q** representa la posición de una partícula de agua en un determinado momento; dicha partícula efectúa un movimiento ondulatorio completo en un tiempo **T**, llamado **período**, y en ese mismo tiempo **T** el movimiento ondulatorio se propaga en una distancia  $\lambda$  (llamada **longitud de onda**) hasta un punto **Q'**, en

el cual existe la misma fase (o estado de oscilación) que en el punto **Q**. Llamando **c** a la **velocidad de la propagación del movimiento ondulatorio**, resulta entonces la relación:

$$(30) \quad \lambda = c \cdot T$$

(Para la propagación de la luz en el vacío se ha demostrado experimentalmente que  $c = 299\,860$  km por segundo.) La misma consideración, que apun-

tamos para una onda de agua, se puede hacer para el movimiento ondulatorio de la luz, resultando así la ecuación (30) válida también para tal fenómeno.

Esa ecuación (30) puede escribirse todavía en otra forma, si se introduce el número  $n$  de oscilaciones, llamado también **frecuencia**, las que tienen lugar en un segundo de tiempo cuando se propaga una determinada clase de luz. Tenemos:

$$(31) \quad n = \frac{1}{T}$$

Resulta entonces de la (30):

$$(32) \quad \lambda = \frac{c}{n}$$

o también:

$$(33) \quad c = n \cdot \lambda$$

El número de oscilaciones  $n$  y, por lo tanto, también el período  $T$ , depende solamente de la clase de luz propagada y es **independiente del medio** (vacío, aire, vidrio) en que tiene lugar la propagación. En cambio, la velocidad  $c$  y, por consiguiente, también la **longitud de onda  $\lambda$**  dependen del medio en que se propaga la luz.

De lo expuesto anteriormente (ver pág. 28 y pie de pág. 3) recordamos que la luz blanca es una luz compuesta, la que en el conocido espectro solar queda descompuesta en una serie de colores simples, y que tales colores están caracterizados por sus números de oscilaciones  $n$  (frecuencias) o también por sus períodos  $T$ .

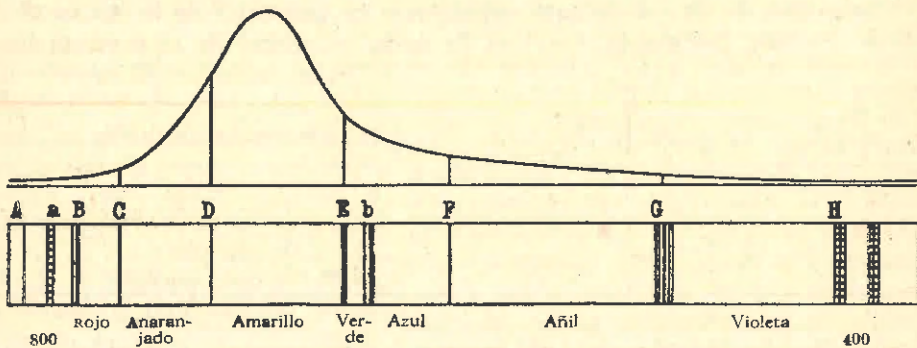


Fig. 13. — Se ilustra la posición de las rayas de Fraunhofer en el espectro solar. La curva representa la luminosidad del espectro en las diversas regiones. Los números indican en millonésimas de milímetro ( $\mu\mu$ ) la longitud de onda aproximada de los colores extremos visible (desde raya B en la zona del rojo hasta la raya H en la zona violeta).

Para la luz **violeta**, próxima del límite del espectro, se tiene  $n = 756\,000\,000\,000\,000$  y  $\lambda = 397\ \mu\mu$  (millonésimas de milímetro), y para luz **roja**, cerca del otro límite del espectro, se tiene:  $n = 390\,000\,000\,000\,000$  y  $\lambda = 762\ \mu\mu$ . (Estas indicaciones de  $\lambda$  se refieren al vacío.) A los demás colores (añil, azul claro, verde, amarillo, rojo amarillento) corresponden valores de  $n$  y  $\lambda$  intermedios entre los mencionados (ver fig. 13).

Existen todavía ondas de luz de longitudes mayores y menores que las indicadas, pero que son invisibles para el ojo humano (luz infrarroja y luz ultravioleta).

**Experimento demostrativo de la difracción de la luz.**

El fenómeno de la difracción, el cual, como antes dijimos, contradice la propagación rectilínea de la luz, se puede demostrar con el siguiente experimento:

Prodúzcase sobre una pantalla **TT** (fig. 14) por medio de una lente **L** una imagen real y nítida **S'** de una rendija iluminada **S**. Limitemos ahora el camino de luz por medio de un diafragma en forma de otra rendija **S<sub>0</sub>**, paralela a la primera y antepuesta a la lente. Si existiera solamente la

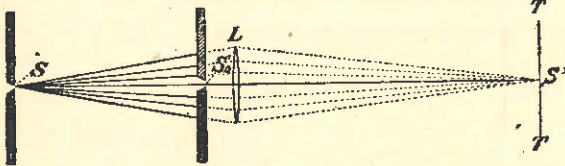


Fig. 14. — Se ilustra el fenómeno de difracción producido por una estrecha rendija **S<sub>0</sub>**. Designase por **S** una rendija iluminada y por **TT** una pantalla.

propagación rectilínea de la luz, el efecto del diafragma podría sólo consistir en una limitación de la luminosidad de la imagen **S'**. Esto es lo que efectivamente se observa mientras la rendija **S<sub>0</sub>** es bastante ancha. Pero si se achica la rendija **S<sub>0</sub>** más y más, la imagen **S'**, fuera de perder luminosidad, se hace más ancha y aparece con bordes confusos, presentándose, además, a ambos lados de la imagen poco nítida, franjas coloreadas separadas por intervalos oscuros (ver fig. 15).

El mismo fenómeno se produce cuando con ojo desnudo se observa a través de una rendija estrecha a otra rendija bien iluminada y paralela a la primera. Si se usa luz homogénea, se observarían entonces franjas claras y franjas oscuras a uno y otro lado de la imagen. Esas franjas aparecen mucho más separadas cuando se emplea luz roja que cuando se usa luz violeta.

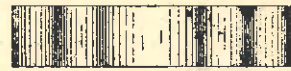


Fig. 15. — Imagen de la rendija **S** de figura 14, la cual con luz de un solo color se obtiene sobre la pantalla **TT** cuando la rendija **S<sub>0</sub>** es muy estrecha.

Este fenómeno, como todos los que no obedecen al principio de la propagación rectilínea de la luz, es un fenómeno de **difracción**. Fenómenos de difracción se producen en los límites de los conos de luz. Si estos límites son muy estrechos, la difracción es tan acentuada que ya no se nota nada de la propagación rectilínea de la luz.

**Modificación del experimento ideado por Fraunhofer y sus resultados prácticos.** Para estudiar cómodamente el fenómeno de la difracción conviene experimentar con rayos paralelos o sea rayos normales a superficies de onda planas, en la forma indicada por el físico **Fraunhofer**: Se hace llegar a una rendija **AB** (fig. 16) un haz de rayos paralelos (**RR**) perpendicular al plano la rendija. La luz de este haz, después de pasar por la rendija, solamente en parte continúa en dirección rectilínea para formar la imagen **O**. Otras partes de la luz del haz incidente sobre la rendija se propagan en nuevos haces paralelos en todas las direcciones posibles debido a que, según el **principio de Huygens**, todos los puntos **A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, ...** de la rendija funcionan como

nuevos puntos emisores de luz. Las cantidades de luz que, después de pasar por la rendija, no continúan en línea recta, las llamamos **luz difractada**, y el

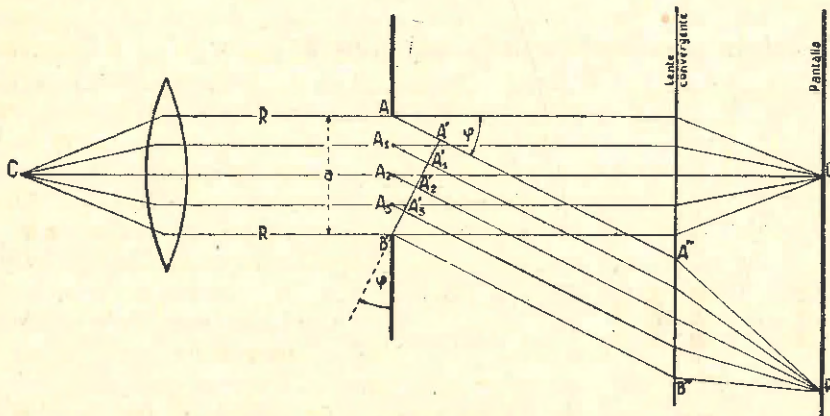


Fig. 16. — Se ilustra el recorrido de dos haces de rayos luminosos paralelos que salen de una rendija de ancho  $a$  y de los cuales uno (el oblicuo) es luz difractada.  $\varphi$ , ángulo de difracción;  $AA'$ , diferencia de fase de los rayos marginales  $AA''$  y  $BB''$ .

ángulo  $\varphi$  que forma un haz de luz difractada con el haz principal (normal al plano de la rendija), se llama **ángulo de difracción**. Llámense **rayos marginales** a los rayos que pasan por los extremos **A** y **B** de la rendija.

Consideremos, por ejemplo, un haz de luz difractado cuyos rayos se propagan en direcciones paralelas a  $AA'$  y  $BB'$  (fig. 16). Pero los rayos de este haz llegan con diferentes fases a los puntos  $A'$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$ ,... de un plano perpendicular a la dirección de los mismos, debido a que los caminos  $AA'$ ,  $A_1A'_1$ ,  $A_2A'_2$ ,  $A_3A'_3$ ,... recorridos desde la rendija son de diferentes longitudes. En virtud de tales diferencias de fase, algunos de los rayos del haz difractado se anulan completamente o en parte, y sólo algunos se suman; por lo cual el haz difractado produce en **P** un efecto luminoso mucho más débil que el producido por el haz principal recto en **O**, al cual todos los rayos del haz principal llegan con la misma fase. A este punto **O** corresponde el punto **0** (cero) de la imagen (ver fig. 17).

La diferencia de las fases en los rayos marginales  $AA''$  y  $BB''$  (fig. 16) depende del ángulo de difracción  $\varphi$ , que es igual al ángulo  $ABA'$ . Consideramos especialmente tres casos:

**Primer caso:** Sea un haz de luz difractada con un ángulo  $\varphi$  tan pequeño que  $AA'$  sea la mitad de una longitud de onda (ver fig. 18), es decir:

$$AA' = \frac{1}{2} \lambda$$

Siendo  $a$  el ancho de la rendija, resulta:

$$\text{sen } \varphi = \frac{\frac{1}{2} \lambda}{a}$$

Entonces los rayos marginales  $AA''$  y  $BB''$  se anulan completamente y no producen ningún efecto.

Pero los demás rayos  $A_1A_1'$ ,  $A_2A_2'$ ,  $A_3A_3'$ ,... del haz difractado tienen entre sí diferencias de fases menores que una media longitud de onda, y, por consiguiente, no se anulan completamente; pero se debilitan mutuamente, produciéndose así en  $P$  todavía un efecto de luz de cierta intensidad. A esta posición de  $P$  (ver fig. 16) corresponde el punto 1 de la figura 17, mientras que el punto  $O$  de fig. 16 corresponde al punto 0 de fig. 17.

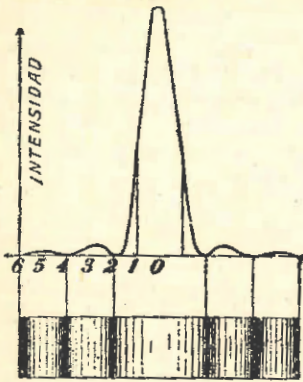


Fig. 17. — La parte inferior de la figura representa la imagen de la rendija, la cual con luz difractada se produce sobre una pantalla cuando la rendija es muy estrecha. La parte superior de la figura ilustra mediante una curva la intensidad de la luz en los distintos sitios de la imagen.

**Segundo caso:** Consideremos ahora un haz de luz difractada con ángulo  $\varphi$  tal que  $AA'$  sea igual a una longitud de onda  $\lambda$  (fig. 19), de modo que:

$$(34) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\lambda}{a}$$

Entonces podemos dividir el haz en dos mitades. Sea  $A_2A_2'$  (fig. 19) el rayo central. Este rayo y el rayo marginal  $AA'$  tienen una diferencia de fase de  $\frac{1}{2} \lambda$  y por lo tanto se anulan. Y para cualquier rayo (por ejemplo  $A_1A_1'$ ) de la mitad 1 se puede encontrar un rayo  $A_3A_3'$  de la mitad 2 tal que los dos rayos así coordinados tengan una diferencia de fase igual a  $\frac{1}{2} \lambda$ ,

anulándose, por tanto, todo efecto de luminosidad en este haz, el que corresponde al punto 2 de la fig. 17.

**Tercer caso:** Consideramos un haz de luz difractada con ángulo  $\varphi$  tal que  $AA$  sea igual a  $\frac{3}{2} \lambda$  (fig. 20), siendo entonces:

$$(35) \quad \text{sen } \varphi = \frac{3/2 \lambda}{a}$$

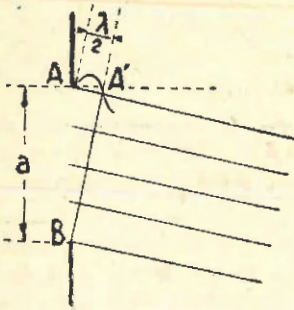


Fig. 18. — 1er. caso: Corte por un haz de luz difractada con ángulo  $\varphi$  tal que  $AA' = \frac{1}{2} \lambda$ .

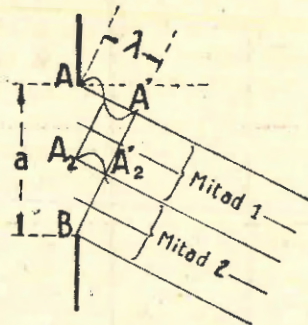


Fig. 19. — 2º caso: Corte por un haz de luz difractada con ángulo  $\varphi$  tal que  $AA' = \lambda$ .

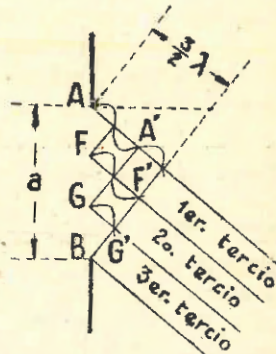


Fig. 20. — 3er. caso: Corte por un haz de luz difractada con ángulo  $\varphi$  tal que  $AA' = \frac{3}{2} \lambda$ .

En este caso podremos dividir el haz en tres tercios limitados entre sí por los rayos  $FF'$  y  $GG'$ . Los rayos límites  $AA'$  y  $GG'$  que encierran el pri-

mer y segundo tercio tienen entre sí una diferencia de fase igual a  $\lambda$ ; por consiguiente, estos dos tercios se comportan como el haz difractado entero del caso 2, es decir, se anulan por completo el primer y segundo tercio. El tercer tercio se comporta como el haz entero del primer caso y produce en la pantalla una luminosidad máxima, pero reducida (punto 3 de la fig. 17).

Continuando estas consideraciones para ángulos de difracción  $\varphi$  tales que  $\text{sen } \varphi$  se haga sucesivamente igual a  $\frac{2\lambda}{a}$ ,  $\frac{5/2\lambda}{a}$ ,  $\frac{3\lambda}{a}$ , etc., se llega a explicar toda la imagen de difracción representada en fig. 17.

A los ángulos  $\varphi$ , cuyos senos son  $\frac{2\lambda}{a}$ ,  $\frac{3\lambda}{a}$ ,  $\frac{4\lambda}{a}$ , .....  $\frac{m\lambda}{a}$ , corresponden **mínimos de luminosidad** en la pantalla, y a los ángulos  $\varphi$  cuyos senos son  $\frac{3/2\lambda}{a}$ ,  $\frac{5/2\lambda}{a}$ ,  $\frac{7/2\lambda}{a}$ , .....  $\frac{2m+1}{2}\lambda/a$ , corresponden **máximos de luminosidad** en la pantalla.

**Rejados de difracción. Su observación en el microscopio.** El fenómeno de difracción de mayor trascendencia práctica se observa cuando la rendija se reemplaza por un gran número de rendijas paralelas iguales y equidistantes, las que forman el llamado **rejado (réseau, en francés) de difracción**. Se lo obtiene generalmente trazando sobre el vidrio a punta de diamante un gran número de finas líneas. Esas líneas hacen el efecto de diafragmas, y los espacios intermedios representan las rendijas que dejan pasar la luz. Se fabrican rejados de muy diversas finuras; rejados muy finos tienen alrededor de 2 000 líneas por milímetro. La distancia  $d$  entre dos puntos correspondientes a dos rendijas vecinas (ancho de una rendija + ancho de una línea) se llama la **constante del rejado** (ver fig. 21).

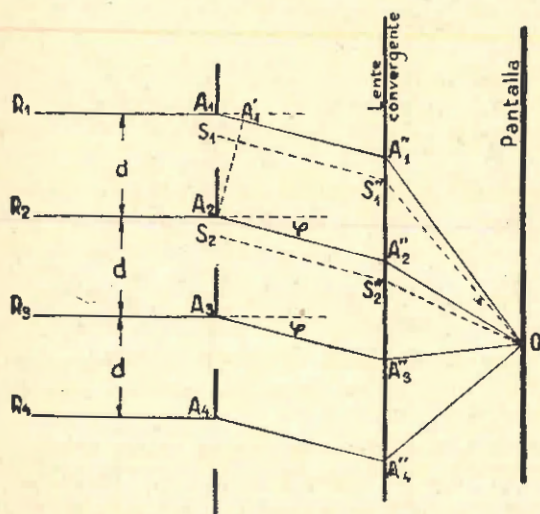


Fig. 21. — Se ilustra el fenómeno de la difracción producido por un rejado con la constante  $d$ .

Consideramos ahora un haz de luz (rayos  $A_1A_1''$ ,  $A_2A_2''$ ,  $A_3A_3''$ ,  $A_4A_4''$ ) con un ángulo de difracción  $\varphi$  tal que según figura 21 la distancia  $A_1A_1' = d \times \text{sen } \varphi$  es igual a una longitud de onda  $\lambda$ . En tal caso la oscilación en el punto  $A_1'$  se encuentra en la misma fase que en  $A_2$ ; por consiguiente, los rayos  $A_1A_1''$  y  $A_2A_2''$  se refuerzan. También los rayos  $A_3A_3''$  y  $A_4A_4''$  oscilan con la misma fase, sumándose, en consecuencia, la luminosidad de esos rayos.

Además, a todo rayo (por ejemplo a  $S_1S_1''$ ) paralelo a los nombrados, que pasa por la primera rendija, corresponden en las otras rendijas rayos que

oscilan con la misma fase (por ejemplo en la segunda rendija el rayo  $S_2S_2''$ , siendo  $S_1S_2 = d$ ), por lo cual se produce un **máximo de luminosidad** para el haz de ángulo  $\varphi$  tal que:

$$(36) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\lambda}{d}$$

También por razones análogas producen máximos de luminosidad los haces con ángulo  $\varphi$  tales que:

$$(37) \quad \text{sen } \varphi = \frac{2\lambda}{d}, \frac{3\lambda}{d}, \dots, \frac{m \cdot \lambda}{d} \text{ (donde } m \text{ es un número entero)}$$

En cambio, si en la fig 21  $A_1A_1'$  es igual a  $\frac{1}{2}\lambda$  o igual a un múltiplo impar  $(2m + 1)$  de  $\frac{1}{2}\lambda$ , los rayos  $A_1A_1''$  y  $A_2A_2''$  (y también dos cualesquiera correspondientes de rendijas vecinas) oscilan con fase contraria, y se anula su efecto luminoso. De lo cual se desprende que los **mínimos de luminosidad** corresponden a ángulos de difracción  $\varphi$  tales que:

$$(38) \quad \text{sen } \varphi = \frac{(2m + 1) \frac{\lambda}{2}}{d}$$

Cuando la luz, después de pasar el rejado, entra en un medio que no fuera el aire, por ejemplo en **aceite**, con índice de refracción  $n = 1,5$ , las franjas claras y oscuras sobre la pantalla se presentarían con distancias más pequeñas entre ellas, debido a que para una determinada clase de luz la longitud de onda es más pequeña en aceite que en aire.

Como existe la relación:

$$(39) \quad \lambda_{\text{aceite}} = \frac{\lambda_{\text{agua}}}{n}$$

la (36) nos da para el medio **aceite**:

$$(40) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\lambda_{\text{aceite}}}{d}$$

y en virtud de la (39) resulta para ese medio:

$$(41) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{n \cdot d}$$

Si en adelante entendemos por  $\lambda$  siempre la longitud de onda (de una determinada clase de luz) en el aire o vacío, podemos escribir la (41) en la siguiente forma sencilla:

$$(42) \quad \text{sen } \varphi = \frac{\lambda}{d \cdot n}$$

Ha sido uno de los grandes méritos de **E. Abbe** el haber explicado claramente las consecuencias que trae la teoría de la difracción para la formación de las imágenes en los microscopios.

Si se observa en el microscopio un rejado de extrema finura, puede ocurrir que no se logre ver la estructura del rejado, ni siquiera una de las líneas del mismo. **Abbe** ha demostrado que eso sucede cuando la constante  $d$  del rejado es tan pequeña que el ángulo de difracción  $\varphi$  [véase ecuaciones (36) y (42)] correspondiente al primer máximo de luminosidad resulta demasiado grande para que tal luz entre todavía en el objetivo.

Si en fig. 22 **L** es la lente objetiva y **R** un punto del rejado que se quiere observar, se nota que cualquier haz de luz difractada que sale de **R** solamente puede entrar en el objetivo cuando su ángulo de difracción  $\varphi$  es menor que el ángulo  $u$  que un rayo trazado de **R** al borde del objetivo forma con el eje del mismo. Tal ángulo  $u$  es llamado **ángulo de abertura** del objetivo.

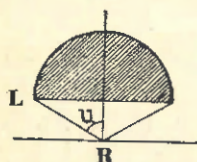


Fig. 22. — Se ilustra la definición del ángulo de abertura  $u$ . **L**, lente frontal del objetivo.

Si el ángulo de difracción  $\varphi$  correspondiente al primer máximo fuera mayor que  $u$ , se vería en el microscopio solamente una claridad central, pero no se distinguirían franjas claras y oscuras alternadas, es decir, no se alcanzaría a percibir la dirección de las líneas del rejado, y se podría girar este último sin que se notara una modificación en lo que se ve en el microscopio.

La ecuación (36) demuestra que el ángulo  $\varphi$  se hace mayor que un determinado ángulo  $u$  (fig. 22) cuando la pequeñez de la constante de rejado  $d$  es tal que se acerca ya a la pequeñez de  $\lambda$  es decir, cuando  $d$  y  $\lambda$  son ya del mismo orden de magnitud.

Cuando el ángulo de difracción  $\varphi$  llega a ser igual al ángulo  $u$  (el que depende del objetivo del microscopio y caracteriza su sistema óptico), entonces tenemos según (42):

$$(43) \quad \text{sen } u = \frac{\lambda}{nd}$$

de lo cual se deduce que el valor mínimo de la constante  $d$ , que corresponde al límite de la visibilidad de la estructura del rejado en el microscopio, es dado por la ecuación:

$$(44) \quad d = \frac{\lambda}{n \times \text{sen } u}$$

Este valor mínimo de la constante  $d$  del rejado lo llamamos **límite del poder separador del microscopio**.

Destacamos que hasta ahora hemos supuesto una iluminación del rejado por luz que incide **normalmente** sobre el mismo.

**Concepto de la abertura numérica.** Mientras que en el antejo astronómico la razón de la abertura del objetivo y su distancia focal es relativamente pequeña (generalmente entre  $1/30$  y  $1/15$ , excepcionalmente hasta  $1/3$  para algunos antejos holandeses), en el microscopio esa razón tiene un valor considerablemente más grande, sobrepasando la unidad en ciertas construcciones.

Tales medidas que implican distancias focales pequeñas y aberturas de objetivo grandes, resultan convenientes para microscopios, porque así sus ángulos de abertura resultan grandes, permitiendo la entrada de luz difractada con grandes ángulos de difracción  $\varphi$ .

Llámase, según E. Abbe, **abertura numérica**, que designaremos por  $a$ , al producto  $n \times \text{sen } u$  que figura en el denominador de la (44), es decir, al producto del seno del ángulo de abertura del objetivo por el índice de refracción del medio transparente antepuesto al objetivo. Si en los objetivos se emplean convenientes combinaciones de lentes (muchas de las cuales ya fue-

ron calculadas por Abbe) se puede conseguir que los ángulos de abertura  $u$  lleguen a ser muy próximos de  $90^\circ$  de modo que la abertura numérica  $a = n \times \text{sen } u$  tiene valor próximo al índice de refracción  $n$  del medio interpuesto entre el objeto a observar y el objetivo.

Si este medio es, por ejemplo, **aceite** con  $n = 1,5$  se puede obtener fácilmente una abertura numérica  $n \times \text{sen } u$  igual a **1,4** (fig. 23). La figura 23 muestra un corte por un objetivo de microscopio. La primera lente, que se halla frente al objeto a observar y que tiene forma de semiesfera, se llama **lente frontal**.

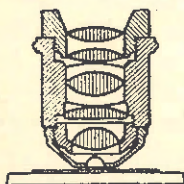


Fig. 23. — *Objetivo de microscopio para observar a través de aceite, dando una abertura numérica:  $a = 1,4$ .*

**Límite del poder separador de un microscopio con iluminación oblicua.** La iluminación normal, la que hemos supuesto en la (44), no es la mejor cuando se quiera obtener el poder separador máximo. Con iluminación muy oblicua se alcanza a **duplicar** todavía el poder separador correspondiente a la iluminación normal.

Tenemos entonces con **iluminación oblicua el límite del poder separador de un microscopio:**

$$(45) \quad d_{\min} = \frac{\lambda}{2a}$$

**Ejemplo numérico.** Si suponemos para  $a = n \times \text{sen } u$  el valor 1,6 (que es el máximo realizable en la práctica con sustancias ópticamente muy densas antepuestas al objetivo) y para  $\lambda = 0,000 55$  mm (luz verde), resultaría para  $d_{\min}$ :

$$(46) \quad d_{\min} = \frac{0,000 55}{3,2} = 0,000 17 \text{ mm}$$

Para esta magnitud colocada a la óptima distancia de visión clara (250 mm, ver pág. 129) resultaría el ángulo visual  $\alpha$ :

$$(47) \quad \alpha = \frac{0,000 17}{250} = 0,000 000 68 \text{ (en radián)}$$

Como el poder separador del ojo (ángulo mínimo bajo el cual deben aparecer al ojo dos puntos para poder verlos separados), según N° 25 de pág. 129, es igual a  $2'$ , podemos calcular el aumento necesario con averiguar cuántas veces ese angulito  $\alpha$  cabe en  $2'$  ( $2/3438 = 0,000 58$ ).

Obtenemos así el aumento  $A_u$  que se requiere para ver las líneas del rejado:

$$(48) \quad A_u = \frac{2'}{\alpha} = \frac{0,000 58}{0,000 000 68} = 850$$

Con tal aumento **850** (u otro algo mayor para obtener la visión más fácil) el ojo alcanza a ver las líneas del rejado con constante mínima. Líneas de rejados más finos, debido a la difracción, no serían más visibles con ningún aumento, por fuerte que fuera.

**Observación de preparados en el microscopio.** Si en un microscopio se observa un preparado al traluz, los detalles que se quieren ver consisten en una red de líneas opacas o semi-opacas, que forman mallas de diferentes tamaños. Entre las líneas de las mallas se encuentran superficies más transparentes, por las cuales pasa la luz de igual manera que por los espacios de un rejado fino, dando siempre lugar al fenómeno de la difracción. Debido a esta

circunstancia, las líneas de los detalles del preparado resultan invisibles cuando forman mallas con espacios demasiados pequeños, de la misma manera que no se pueden ver las líneas de un rejado de constante demasiado pequeña.

**Aumento útil del microscopio.** Volviendo al ejemplo numérico anteriormente expuesto, nos damos cuenta de que se puede ver con aumento 850 (y luz verde oblicua) hasta detalles de magnitudes del orden de 0,000 17 mm. Si se emplearan aumentos más fuertes, no se llegaría a revelar otros detalles del preparado; solamente se conseguiría agrandar la magnitud de la imagen de los que son visibles ya con el aumento 850. Por tal causa sería completamente **inútil** exagerar los aumentos hasta valores considerablemente superiores a 850.

Llámanse **aumentos inocuos** a los que no dan ganancia alguna en la revelación de detalles. En cambio, el aumento 850 en el ejemplo considerado, es llamado el **aumento útil**  $A_u$  del microscopio.

De las ecuaciones (46), (47) y (48) deducimos una **fórmula general** para el aumento útil  $A_u$ .

De acuerdo con la (46) tenemos:

$$(49) \quad d_{\text{mia}} = \frac{\lambda}{3,2}$$

Con introducir este valor de  $d_{\text{mia}}$ , la (47) nos da:

$$a = \frac{d_{\text{mia}}}{250} = \frac{\lambda}{3,2 \times 250}$$

Finalmente, con introducir este valor de  $a$  en la (48), obtenemos:

$$(50) \quad A_u = \frac{2'}{a} = \frac{2' \times 3,2 \times 250}{\lambda} = \frac{0,000 58 \times 3,2 \times 250}{\lambda} = \frac{0,000 58 \times 80}{\lambda}$$

En la figura 17, pág. 171, se representa la imagen que una lente forma de una angosta rendija fuertemente iluminada. Esta imagen, como hemos visto, está afectada por la difracción, que produce franjas claras y oscuras a ambos lados del eje central de la imagen. Las fórmulas (34) y (35) dan las relaciones entre el ancho  $a$  de la rendija, la longitud de onda  $\lambda$  y los ángulos de difracción  $\varphi$  correspondientes al primer mínimo y al primer máximo de luminosidad de las franjas.

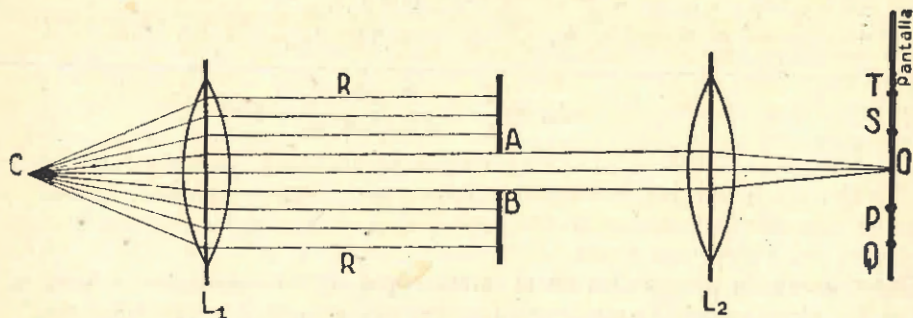


Fig. 24. — Corte por un dispositivo destinado a producir una figura de difracción al pasar luz por una abertura circular AB.

En forma análoga al estudio de la difracción que se produce cuando la luz penetra por rendijas, se puede investigar cómo se manifiesta la difracción

fracción cuando la luz pasa por pequeñas aberturas de diferentes formas, por ejemplo, triangular, cuadrangular o circular. El caso de la abertura circular es el que nos interesa especialmente por la trascendencia práctica que tiene para la construcción de anteojos y su rendimiento óptico.

**Fenómeno de difracción producido por la abertura circular de un diafragma. Resultados de la teoría pertinente.** Suponemos en fig. 24 que **C** es una fuente puntual de luz situada en el foco de la lente convergente **L<sub>1</sub>**. Se produce entonces un haz de rayos paralelos (**RR**), de los cuales una parte la dejamos pasar por un agujero redondo **AB** de un diafragma perpendicular a los rayos.

Por medio de una segunda lente convergente **L<sub>2</sub>** producimos del punto **C** una imagen **O** sobre una pantalla situada en el plano focal de **L<sub>2</sub>**. De no existir la difracción, toda la luz emitida por **C** y que pasa por el agujero **AB**, se reuniría en el único punto **O**, y los puntos vecinos de **O** como por ejemplo los **P, Q, S, T**, no recibirían luz alguna.

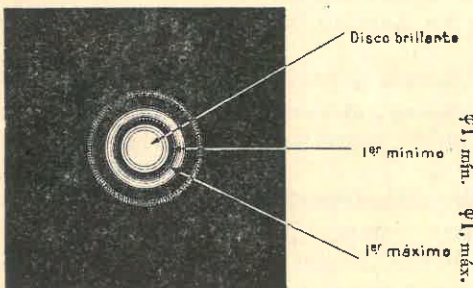


Fig. 25. — *Figura de difracción producida por una abertura circular. Se ve en ella el disco brillante central y los sucesivos anillos de luminosidad mínima y máxima.*

Pero el experimento demuestra que las cosas no pasan así: Se nota, al contrario, especialmente cuando el agujero **AB** es muy pequeño, que la imagen producida, aun en el caso de emplearse lentes completamente libres de errores de aberración esférica, no es un punto nítido **O**, sino un pequeño disco luminoso de alguna extensión, y que alrededor del mismo se alcanza a ver anillos concéntricos, alternativamente oscuros y claros, de un aspecto de conjunto parecido al de fig. 25.

La teoría matemática del fenómeno así producido por una abertura circular (más complicada que la relativa a rendijas) ha dado relaciones entre el radio **r** de la abertura, la longitud de onda **λ** y los ángulos de difracción **φ** correspondientes a los mínimos y máximos de luminosidad de los anillos. Dicha teoría da para los ángulos de difracción **φ<sub>1, mín.</sub>** y **φ<sub>1, máx.</sub>** correspondientes al primer mínimo y al primer máximo de luminosidad las siguientes fórmulas:

$$(51) \quad \text{sen } \varphi_{1, \text{mín.}} = 0,610 \frac{\lambda}{r}, \quad \text{sen } \varphi_{1, \text{máx.}} = 0,819 \frac{\lambda}{r}$$

Para los ángulos de difracción **φ<sub>2, mín.</sub>** y **φ<sub>2, máx.</sub>** correspondientes al segundo mínimo de luminosidad valen las fórmulas:

$$(52) \quad \text{sen } \varphi_{2, \text{mín.}} = 1,116 \frac{\lambda}{r}, \quad \text{sen } \varphi_{2, \text{máx.}} = 1,346 \frac{\lambda}{r}$$

(Omitimos la deducción matemática de los coeficientes numéricos 0,610, 0,819, 1,116, 1,346 que figuran en estas fórmulas por requerir un espacio que excedería la finalidad de este compendio.)

Si nos limitamos a aberturas circulares de radios  $r$  mucho mayores que la longitud de onda  $\lambda$ , los ángulos de difracción dados por las (51) y (52) resultan muy pequeños, de modo que podemos reemplazar los senos por los arcos y escribir:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{1, \text{mfn.}} = 0,610 \frac{\lambda}{r} & \varphi_{1, \text{máx.}} = 0,819 \frac{\lambda}{r} \\ \varphi_{2, \text{mfn.}} = 1,116 \frac{\lambda}{r} & \varphi_{2, \text{máx.}} = 1,346 \frac{\lambda}{r} \end{array} \right.$$

De estas fórmulas se desprende que los ángulos de difracción correspondientes a mínimos y máximos de luminosidad, y por consiguiente, los radios de los anillos de difracción de la figura de difracción (ver fig. 25) son tanto más pequeños cuanto mayor es el radio  $r$  de la abertura circular que es atravesada por la luz. Pero es de notar que hasta en los casos en que agrandáramos mucho el tamaño de la abertura circular llegando a radios de la misma de varios decímetros, nunca desaparecería por completo el fenómeno de la difracción, aun cuando entonces los ángulos de difracción resultarían muy pequeños.

En tales casos el ojo no alcanza a ver los anillos de difracción (aunque existentes) y percibe tan sólo el disco central, el cual podemos suponer limitado aproximadamente y en forma no nítida por el anillo del primer mínimo de luminosidad.

Así los bordes de las monturas de los objetivos de anteojos, aun cuando dichos objetivos son muy grandes, causan siempre difracción en alguna medida, la que tiene por consecuencia el hecho de que las imágenes de puntos luminosos muy distantes (estrellas) no son puntos nítidos sino discos de alguna extensión, los que en su esencia son la claridad central de la figura de difracción representada en fig. 25.

(Es claro que en caso de existir en el antejo un diafragma de rayos que limitara los haces de rayos incidentes en mayor grado que los bordes de la montura del objetivo, la difracción se produciría en los contornos de este diafragma.)

Aun cuando con objetivos grandes los ángulos de difracción resultan muy pequeños, los discos de difracción en los planos focales de los objetivos no dejan de ser relativamente grandes cuando dichos objetivos tienen distancias focales grandes, que no se pueden evitar cuando se quiere llegar a aumentos muy fuertes. Si observamos en un telescopio dos puntos muy próximos (por ejemplo una estrella doble), puede ocurrir que los dos discos imágenes ocasionados por la difracción, se superpongan en parte más o menos considerable (ver fig. 26), no lográndose en tal caso una percepción nítida de ambos puntos, es decir, el telescopio no los separa.

Si, en cambio, la distancia de los puntos observados no baja de cierto límite, los discos imágenes no se tocan (ver fig. 27), y el ojo percibe claramente los dos puntos. El antejo entonces separa los dos puntos.

#### **Podér separador del objetivo.**

Podemos decir que el ojo empieza a notar claramente que una imagen vista en el antejo corresponde a dos puntos objetos luminosos y no a uno solo cuando, sin estar completamente separados los dos discos imágenes, sus centros distan por lo menos en una cantidad igual al radio del anillo

correspondiente al primer mínimo de la figura de difracción (ver fig. 28), es decir, cuando los dos puntos objetos (estrellas) aparecen bajo un ángulo igual al ángulo de difracción del primer anillo oscuro. Este ángulo se llama **poder separador del objetivo**; se lo designa por  $\delta$ .

Según fórmula (51) resulta:

$$(54) \quad \delta = 0,610 \frac{\lambda}{r}$$



Fig. 26. — Discos imágenes en parte superpuestos.

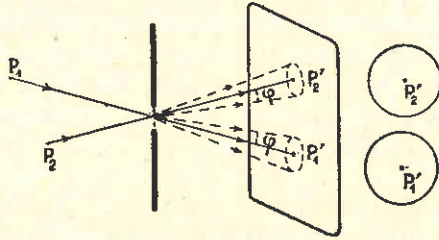


Fig. 27. — Discos imágenes separadas.



Fig. 28. — Discos imágenes en parte superpuestos, cuyos centros distan entre sí en un radio y que por tanto permiten reconocer que se trata de puntos luminosos diferentes.

Suponemos para  $\lambda$  un valor medio de  $0,58 \mu = 0,000\ 058$  cm (luz amarilla), y si en la (54), en lugar del radio  $r$  introducimos el diámetro  $D$  del objetivo, expresando tanto  $\lambda$  como  $D$  en centímetros, obtendremos:

$$\delta \text{ (segundos)} = 1,220 \frac{0,000\ 058}{D} 206\ 265''$$

o sea:

$$(55) \quad \delta \text{ (segundos)} = \frac{14,6''}{D}$$

Con redondear el numerador a segundos enteros, resulta de la (55) la relación:

$$(56) \quad \delta \cdot D = 15''$$

donde  $\delta$  expresa el ángulo mínimo bajo el cual deben aparecer dos puntos para verlos separados, y  $D$  el diámetro del objetivo (en centímetros).

Como se ve,  $\delta \cdot D$  es una **constante**, y si consideramos varios anteojos con diferentes diámetros de objetivos  $D$ , resultan diferentes valores del poder separador  $\delta$ , y podemos calcular el diámetro  $D$  del objetivo necesario para un poder separador deseado.

**Ejemplo:** Las estrellas de una pareja distan angularmente en un segundo de arco. Se pregunta: ¿Cuál es el diámetro de objetivo necesario para que este objetivo las separe?

**Respuesta:** La (56) nos da para  $\delta = 1''$  el valor de  $D = 15$  cm. Se requiere, por lo tanto, un objetivo de 15 cm de diámetro al menos.

**Poder separador de un anteojo. Aumento útil.** La fórmula (56) establece la condición que debe satisfacer el tamaño del objetivo de un anteojo con que se quiere ver separados dos puntos luminosos. Pero para que el ojo los vea realmente separados, el anteojo, además, debe tener un aumento tal que el ángulo bajo el cual aparecen los dos puntos resulte aumentado a unos

2' al menos (ver: poder separador del ojo, pág. 129). En el ejemplo anteriormente mencionado resulta que será necesario un anteojo con aumento mínimo  $\frac{2'}{1''} = 120$  para poder ver separadas dos estrellas que distan angularmente en 1".

**Resumiendo:** Para ver separadas tales estrellas, se requiere un telescopio con objetivo de 15 cm de diámetro y 120 aumentos. Con aumentos mayores solamente serían algo más grandes los discos imágenes (todavía parcialmente superpuestos), pero no más separados. Para verlos más separados, sería necesario aumentar el tamaño del objetivo con el fin de reducir la extensión de la figura de difracción o sea de los discos imágenes. Por el hecho de no obtenerse mejor separación con aumento mayor de 120, sin aumentar al mismo tiempo el tamaño del objetivo, el aumento 120 se llama el **aumento útil del anteojo**.

**Ejemplo numérico.** ¿Cuál es el poder separador  $\delta$  y el aumento útil  $A_u$  de un anteojo con diámetro del objetivo  $D = 3$  cm?

Según (56) tenemos:

$$(57) \quad \delta = \frac{15''}{D}$$

En nuestro caso:

$$\delta = \frac{15''}{3} = 5''$$

De acuerdo con el poder separador del ojo (ver pág. 129), se deberá elegir un ocular con aumento  $A_u$  tal que se verifique la relación:

$$(58) \quad A_u \cdot \delta = 120''$$

Con introducir el valor de  $\delta$  dado por la (57), obtenemos:

$$A_u \cdot \frac{15''}{D} = 120''$$

de donde:

$$(59) \quad \boxed{A_u = 8 \cdot D}$$

en la cual  $D$  es el número de centímetros que tiene el diámetro del objetivo.

En nuestro ejemplo numérico resulta:

$$A_u = 8 \cdot 3 = 24$$

En la misma forma se calcularon para los 7 ejemplos de anteojos del cuadro (28) los aumentos útiles  $A_u$ , los que a continuación se indican. Hacemos figurar en paréntesis los aumentos  $A$  adoptados por los respectivos constructores.

Nivel Breithaupt "Naguk":	$D = 3,5$ cm,	$A_u = 28$ ,	( $A = 30$ ),
„ Wild I:	$= 2,5$ „	$= 20$ ,	( $A = 18$ ),
„ Zeiss D:	$= 3,0$ „	$= 24$ ,	( $A = 25$ ),
„ Kern NK 3:	$= 4,5$ „	$= 36$ ,	( $A = 30$ ),
„ Cooke S 300	$= 3,8$ „	$= 30$ ,	( $A = 25$ ),
„ Fennel B 36:	$= 3,6$ „	$= 29$ ,	( $A = 32$ ),
Teodolito Kern DK 3:	$= 7,5$ „	$= 60$ ,	( $A = 37,5$ ).

Si comparamos este cuadro con el cuadro (28) de pág. 165, notamos que los anteojos de los niveles Kern NK 3, Cooke S 300 y del teodolito Kern DK 3, en los cuales el aumento  $A$  elegido queda bastante por debajo del aumento útil  $A_u$ , tienen, en cambio la ventaja de proporcionar imágenes de mayor claridad.

Para telescopios destinados a observaciones astronómicas muchas veces se eligen aumentos un poco más fuertes que los correspondientes a la ecuación (59), en lugar de la cual en tales casos se emplea esta otra:

(60)

$$A_u = 10 \cdot D$$

lo que significa que el aumento útil es dado por el número de milímetros que mide el diámetro del objetivo.

Si en los anteojos se emplearan aumentos considerablemente superiores a los que se deducen de las fórmulas (59) y (60), el resultado sería que en tales anteojos se verían solamente imágenes carentes de nitidez, debido a la excesiva magnitud de los discos imágenes que corresponden a cada punto objeto individual.

Dada la enorme dificultad de fabricar grandes trozos de vidrio homogéneo, las lentes objetivas más grandes que se han logrado construir tienen diámetros alrededor de un metro, (\*) de lo cual, de acuerdo con la fórmula (60) fluye que los aumentos más grandes de buenos telescopios astronómicos son del orden de 1000. Ver figura de pág. I del Apéndice.

Es posible que en el futuro se logre construir objetivos de 2 ó 3 metros de diámetro, con lo cual se llegaría a aumentos útiles de 2 a 3 mil. Más lejos no sería posible llegar en la construcción de anteojos.

Evidentemente sería deseable obtener telescopios con aumentos tales que permitieran distinguir en la Luna y en los planetas detalles de la magnitud de un hombre. Demostraremos con un ejemplo numérico que tal cosa, con los actuales recursos de la técnica y de la ciencia, es absolutamente imposible de realizar, por causa de la difracción.

Supongamos que en la superficie de la Luna hubiera dos puntos luminosos distantes entre sí en 2 metros (tamaño de un hombre). Siendo la distancia media de la Luna alrededor de 380 000 km, esos dos puntos luminosos aparecerían desde la Tierra bajo un ángulo de:

$$\frac{2}{380\,000\,000} = \frac{1}{190\,000\,000}$$

o sea aproximadamente 1/1000 de segundo de arco.

Para aumentar este ángulo a 2' (poder separador del ojo, pág. 129) se requeriría un telescopio con un aumento 100 000, aproximadamente. A primera vista se resolvería el problema con construir, por ejemplo, un telescopio dotado de un objetivo de distancia focal  $f_1 = 100$  metros y un ocular de distancia focal  $f_2 = 1$  milímetro.  $\left( A = \frac{f_1}{f_2} = \frac{100 \text{ m}}{1 \text{ mm}} = 100\,000. \right)$

Para reducir en lo posible la difracción, daríamos al objetivo el diámetro grande de 1 m.

(\*) El más grande actualmente es el del telescopio refractor del Yerkes-Observatory en Williamsbay, cerca de Chicago, U. S. A., que tiene un diámetro de 102 cm.

Pero el resultado de tal anteojo sería el siguiente: Cada uno de los dos puntos objetos luminosos supuestss daría en el plano focal del objetivo una figura de difracción. Según la primera de las fórmulas (53) el ángulo de difracción correspondiente al primer mínimo sería:

$$\varphi_{1 \text{ min}} = 0,610 \frac{0,000\ 058}{100}$$

(suponiendo una longitud de onda media  $\lambda = 0,000\ 058$  cm), de modo que el diámetro del disco imagen formado en el plano focal del objetivo y correspondiente a cada uno de los dos puntos luminosos sería aproximadamente:

$$(61) \quad 1,22 \frac{0,000\ 058}{100} \cdot 100 \text{ m} = 71 \mu$$

Los centros de los discos imágenes tendrían entre sí la distancia:

$$(62) \quad \frac{1}{190\ 000\ 000} \cdot 100 \text{ m} = 0,5 \mu$$

Los valores (61) y (62) demuestran que los dos puntos luminosos considerados darían discos imágenes casi completamente superpuestos, y que estaríamos muy lejos de poder distinguirlos como pertenecientes a dos puntos separados. Deducimos también que la imagen producida por el telescopio sólo empezaría a indicar la existencia de dos puntos objetos distintos cuando éstos tuvieran entre sí una distancia lineal 70 veces mayor, es decir, cuando en lugar de dos metros distasen unos 150 metros.

Mucho más vana todavía sería la esperanza de poder ver los habitantes del planeta Marte (si es que existieran). Este planeta, cuando se encuentra más cerca de la Tierra, tiene una distancia de 55 millones de kilómetros, lo que es 145 veces mayor que la distancia de la Luna, de modo que dos puntos de la superficie de Marte no podrían ser separados por el ojo con ayuda de un telescopio si no tuvieran entre sí una distancia de unos 25 km por lo menos.

De lo que antecede resumimos: La difracción levanta un obstáculo invencible que limita los rendimientos ópticos tanto de los microscopios como de los anteojos, existiendo la diferencia de que en los microscopios ese fenómeno perjudicial se opera en los detalles del objeto observado al trasluz, mientras que en los anteojos la difracción perjudicial se opera en los bordes de los objetivos.

### *Anteojos astronómico compuesto*

#### **17. Anteojos con objetivos y oculares compuestos.**

Los errores de la aberración esférica y cromática (estudiados en el § 5) que afectan a las imágenes producidas por el anteojo de Kepler o anteojo astronómico simple, hacen que éste hoy sólo se emplee con pequeños aumentos y pequeños ángulos de campo.

Con el fin de mejorar el rendimiento óptico de los anteojos se construyen **objetivos y oculares compuestos** (de dos lentes por lo menos). El anteojo astronómico en que se han empleado objetivo y ocular compuestos se llama **anteojo astronómico compuesto**.

El anteojo astronómico compuesto, igual que el anteojo astronómico simple, constituye un **sistema telescópico**, es decir, el foco posterior de la combinación del objetivo coincide con el foco anterior de la combinación del ocular

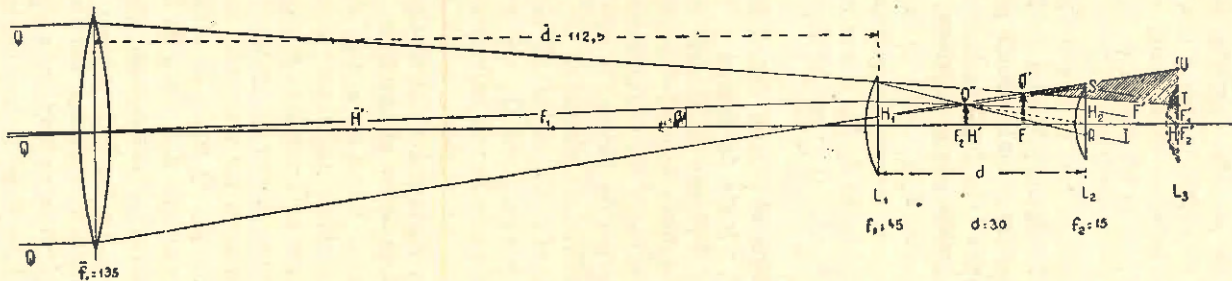
**Objetivo acromático.** El objetivo acromático más sencillo (ver fig. 5, pág. 109) consta de dos lentes, una lente convergente de vidrio crown y una lente divergente de vidrio flint unida a la primera con bálsamo de Canadá, o simplemente adosada a ella. Es éste el tipo comúnmente empleado en los instrumentos topográficos y geodésicos.

**Ocular compuesto; su doble función.** Como hemos visto anteriormente, (págs. 96 a 98), un ocular compuesto (ocular de **Huygens** y ocular de **Ramsden**) se compone de dos lentes llamadas **lente colectora** y **lente ocular propiamente dicha o lente de ojo**. En el ocular de **Huygens** (ver fig. 29) la lente de ojo  $L_2$  sirve de lupa para observar la imagen producida por el **objetivo + lente colectora**. La lente colectora  $L_1$  produce la imagen  $F_2Q''$ . Esta es más pequeña que la imagen  $FQ'$  la que se formaría en caso de que no existiría la colectora. Un punto imagen  $Q''$  puede ser visible a través de  $L_2$ , mientras que la correspondiente imagen  $Q'$  (más alejada del eje que  $Q''$ ) que se formaría sin la colectora, ya no sería visible con un ocular simple  $L_3$  de un tamaño igual al de  $L_2$ . Es así que la **lente colectora aumenta el campo visual del anteojo**, razón por la cual se la ha llamado también "**lente de campo**".

**Aumento del campo en el ocular Huygens.** Con el objeto de aclarar más la ventaja que en cuanto a campo visual tienen los oculares compuestos ante los simples, hemos considerado en la figura 29 un anteojo de 6 aumentos con un **ocular de Huygens**, con distancia focal del objetivo de 135 mm y distancia focal de la combinación del ocular de 22,5 mm. El punto objeto  $Q$  proyecta sobre la lente objetiva un haz de rayos prácticamente paralelos. El sistema "**objetivo — colectora**" produce del punto  $Q$  la imagen real  $Q''$ , de la cual sale el haz limitado por el cono  $RQ''S$ . Con el tamaño que hemos supuesto para la lente de ojo  $L_2$  se ve que la base  $RS$  del cono cae enteramente sobre la superficie de la lente de ojo. Por consiguiente, un **ojo observador** detrás del ocular **recibe toda la luz que el punto objeto  $Q$  proyecta sobre el objetivo**.

En cambio, si se quisiera obtener el mismo aumento 6 con un ocular simple  $L_3$  del mismo tamaño que el de  $L_2$ , tendríamos que ubicar tal ocular simple a 22,5 mm detrás de la imagen  $FQ'$ , la que en ese caso se formaría en el plano focal del objetivo. En la fig. 29 se ha ubicado la lente ocular  $L_3$  (sombreada) en la posición que correspondería. Pero se nota que en tal supuesto caso el cono de luz  $TQ'U$ , que provendría del haz emitido por  $Q$  sobre el objetivo, caería solamente en pequeña parte sobre el ocular simple  $L_3$ , y por lo tanto daría una imagen imperfecta (de poca luminosidad); sabiéndose que en la buena práctica de construcción de anteojos se suele excluir por eso tales imágenes imperfectas mediante **diafragmas de campo**. Nos damos cuenta entonces de que el ocular compuesto permite ver imágenes perfectas de puntos cuya dirección diferiría del eje en ángulos hasta el valor de  $\beta$ , que hemos supuesto en fig. 29, mientras que con el ocular simple la observación tendría que limitarse a puntos objetos menos distantes del eje.

**Aumento del campo en el ocular Ramsden.** Persiguiendo el mismo fin de aclarar la ventaja de los oculares compuestos en cuanto a campo visual,



ESCALA 1 : 1

Fig. 29.— Anteojo astronómico compuesto con aumento 6 y ocular Huygens y su comparación con un anteojo astronómico simple. La parte rayada indica el reducido campo visual que daría el anteojo con el correspondiente ocular simple.

Objetivo  $f_1$  + colectora  $f_1$   
con la distancia  $d$

$$\bar{f} = \frac{\bar{f}_1 \cdot f_1}{f_1 + f_1 - d} = \frac{135 \cdot 45}{135 + 45 - 112,5} = +90$$

$$\bar{H}_1 \bar{H} = -\bar{f} \cdot \frac{d}{f_1} = -90 \cdot \frac{112,5}{45} = -225$$

$$\bar{H}_2 \bar{H}' = -\bar{f} \cdot \frac{d}{f_1} = -90 \cdot \frac{112,5}{135} = -75$$

$$\bar{H}_1 \bar{F} = \bar{f}_1 - \bar{f} \cdot \frac{\bar{f}_1}{f_1} = 135 - 90 \cdot \frac{135}{45} = -135$$

$$\bar{H}_2 \bar{F}' = f_1 - \bar{f} \cdot \frac{f_1}{f_1} = 45 - 90 \cdot \frac{45}{135} = +15$$

Combinación con ocular  
Huygens  $f_2, f_3$  y distancia  $d$

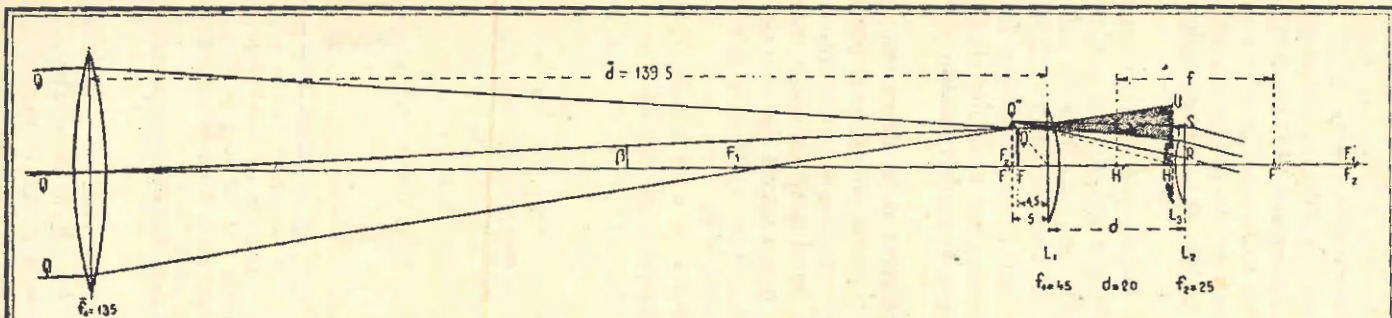
$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{45 \cdot 15}{45 + 15 - 30} = +22,5$$

$$H_1 H = -f \cdot \frac{d}{f_2} = -22,5 \cdot \frac{30}{15} = -45$$

$$H_2 H' = -f \cdot \frac{d}{f_1} = -22,5 \cdot \frac{30}{45} = -15$$

$$H_1 F = f_1 - f \cdot \frac{f_1}{f_2} = 45 - 22,5 \cdot \frac{45}{15} = -22,5$$

$$H_2 F' = f_2 - f \cdot \frac{f_2}{f_1} = 15 - 22,5 \cdot \frac{15}{45} = +7,5$$



ESCALA: 1 : 1

Fig. 30.— Anteojo compuesto con aumento 6 y ocular Ramsden y su comparación con un anteojo astronómico simple. La parte rayada indica el reducido campo visual que daría el anteojo con el correspondiente ocular simple.

Objetivo  $\bar{f}_1$  + colectora  $f_1$  con la distancia  $d$ .

$$\bar{f} = \frac{\bar{f}_1 \cdot f_1}{\bar{f}_1 + f_1 - d} = \frac{135 \cdot 45}{135 + 45 - 139,5} = +150$$

$$\bar{H}_1\bar{H} = -\bar{f} \cdot \frac{d}{\bar{f}_1} = -150 \cdot \frac{139,5}{45} = -465$$

$$\bar{H}_2\bar{H}' = -\bar{f} \cdot \frac{d}{\bar{f}_1} = -150 \cdot \frac{139,5}{135} = -155$$

$$\bar{H}_1\bar{F} = \bar{f}_1 - \bar{f} \cdot \frac{\bar{f}_1}{f_1} = 135 - 150 \cdot \frac{135}{45} = -315$$

$$\bar{H}_2\bar{F}' = f_1 - \bar{f} \cdot \frac{f_1}{\bar{f}_1} = 45 - 150 \cdot \frac{45}{135} = -5$$

Ocular de Ramsdén  $f_1, f_2$  y distancia  $d$ .

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{45 \cdot 25}{45 + 25 - 20} = +22,5$$

$$H_1H = -f \cdot \frac{d}{f_2} = -22,5 \cdot \frac{20}{25} = -18$$

$$H_2H' = -f \cdot \frac{d}{f_1} = -22,5 \cdot \frac{20}{45} = -10$$

$$H_1F = f_1 - f \cdot \frac{f_1}{f_2} = 45 - 22,5 \cdot \frac{45}{25} = +4,5$$

$$H_2F' = f_2 - f \cdot \frac{f_2}{f_1} = 25 - 22,5 \cdot \frac{25}{45} = +12,5$$

hemos considerado en fig. 30 un anteojo de 6 aumentos con un ocular de Ramsden, con distancia focal del objetivo de 135 mm y distancia focal de la combinación del ocular de 22,5 mm. El haz de rayos salientes de la imagen real  $Q'$  y correspondiente a la luz recibida por el objetivo, luego de refractarse en la lente colectora  $L_1$ , da un haz de divergencia tal como si procediera del punto imagen virtual  $Q''$ . Este haz se halla dentro de un cono, cuya base  $RS$  cae enteramente sobre la lente de ojo, de modo que un ojo observador recibiría toda la luz que el punto objeto  $Q$  proyecta sobre el objetivo.

En cambio, si se quisiera obtener el mismo aumento 6 con un ocular simple  $L_2$  de igual tamaño que la  $L_2$ , tendríamos que colocar tal ocular  $L_2$  a 22,5 mm detrás de la imagen  $FQ'$  (ver fig. 30). Se nota que en tal supuesto caso el cono de luz  $TQU$  que provendría del haz emitido por  $Q$  hacia el objetivo, caería solamente en pequeña parte sobre el ocular simple  $L_2$ , lo cual por las mismas razones anteriormente expuestas para el ocular de Huygens, implicaría un campo visual más pequeño que el proporcionado por el ocular compuesto.

**Ventajas de los oculares compuestos en lo relativo a la dispersión cromática.** Además de las ventajas que ofrecen los oculares compuestos para la magnitud del campo visual y la reducción de la aberración esférica (ver N° 6 de § 5, pág. 107), los oculares compuestos, aún en el caso de estar constituidos por lentes de la misma clase de vidrio, dan todavía la ventaja de producir una dispersión cromática menor que la que se originaría por una lente ocular simple, como demostraremos en lo que sigue.

Suponemos primeramente una lente simple, sobre la cual incide un haz de luz blanca paralelo al eje. La lente lo descompone en sus colores (ver fig. 31).

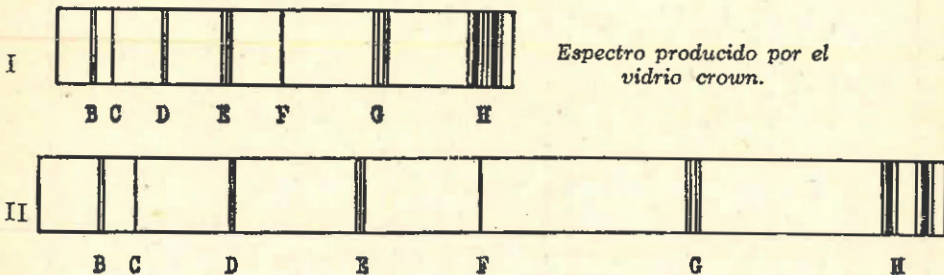


Fig. 31. — Se ilustran dos espectros solares obtenidos con prismas de igual ángulo refringente, pero el primero (I) de vidrio crown y el segundo (II) de flint. Se ve que en el vidrio crown el poder dispersivo es mucho más débil que en el flint (el segmento  $BH$  es sólo aproximadamente la mitad en el crown).

(Se ha hecho coincidir en ambos espectros la raya  $B$  para su mejor comparación.)

Como lo demuestra la fig. 7 (pág. 110), los rayos violetas (más fuertemente refractados que los rojos) se reúnen en el foco  $F_v$ , más próximo de la lente que el foco  $F_r$  de los rayos rojos. Calcularemos ahora la distancia entre los dos focos  $F_r$  y  $F_v$ , distancia que en adelante llamaremos **aberración cromática**.

Según (55) de pág. 86 tenemos:

$$(63) \quad D = \frac{1}{f} + (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Suponemos que en esta ecuación la  $n$  corresponda a la refracción de luz roja, por ejemplo de la raya **B** (ver fig. 31) en el vidrio de la lente. Para un tipo de luz vecino y más próximo al extremo violeta del espectro, el índice de refracción será  $n + dn$ ; y diferenciando la (63) obtendremos:

$$d \frac{1}{f} = dn \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

o también:

$$d \frac{1}{f} = \frac{dn}{n-1} (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Teniendo en cuenta la (63), podemos escribir:

$$d \frac{1}{f} = \frac{dn}{n-1} \cdot \frac{1}{f}$$

o también:

$$-d \frac{df}{f^2} = \frac{dn}{n-1} \cdot \frac{1}{f}$$

de lo cual resulta:

$$(64) \quad df = -f \cdot \frac{dn}{n-1}$$

Si en lugar de  $dn$  ponemos la diferencia  $\Delta n$  entre los índices de refracción para la luz roja y violeta (rayas **B** y **H**), la (64) se transforma en:

$$(65) \quad \Delta f = -f \frac{\Delta n}{n-1}$$

la que nos da muy aproximadamente el incremento (negativo) que sufre la distancia focal  $f$  cuando se pasa de la luz roja a la violeta, incremento que expresa la distancia  $F_r, F_v$  de la fig. 7 (pág. 110).

Pasando a valores numéricos, pondremos en la (65):

$$\Delta n = n_H - n_B$$

$$y \quad n = n_D \quad (\text{índice correspondiente a un color medio, amarillo de raya } \mathbf{D}, \text{ ver fig. 13}).$$

Para cierto vidrio crown se tiene:

$$n_B = 1,514$$

$$n_D = 1,518$$

$$n_H = 1,535$$

de modo que la (65) nos da:

$$\Delta f = -f \frac{1,535 - 1,514}{0,518}$$

o también:

$$\Delta f = -f \frac{0,021}{0,518}$$

o sea aproximadamente:

$$\Delta f = -f \cdot \frac{1}{25}$$

lo que nos dice que la distancia focal para la luz violeta es en  $\frac{1}{25}$  de su valor más corta que la distancia focal para la luz roja.

Consideremos ahora una combinación de dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  y separadas por la distancia  $d$ . Tal combinación reúne un haz de rayos rojos paralelos al eje en un foco  $F_r$  y un haz de rayos violetas paralelos al eje en un foco  $F_v$ , siendo la distancia  $F_r F_v$  dada por la variación que sufre la distancia  $H'_2 F'$  (fig. 12, pág. 81) cuando se pasa de la luz roja a la luz violeta. Esta distancia que media entre la segunda lente y el foco posterior de la combinación es dada por la fórmula:

$$H'_2 F' = H'_2 H' + H' F' = -f \frac{d}{f_1} + f \quad [\text{ver fórmula (42) en pág. 83}]$$

o también:

$$(66) \quad H'_2 F' = f \left( 1 - \frac{d}{f_1} \right)$$

Poniendo en lugar de  $f$  su valor expresado en función de  $f_1$ , y  $f_2$  y  $d$  según (36) de pág. 82, obtenemos:

$$(67) \quad H'_2 F' = \frac{f_1 f_2 - f_2 d}{f_1 + f_2 - d} = \frac{(f_1 - d) f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Si pasamos de la luz roja a la violeta, las magnitudes  $f_1$ ,  $f_2$  y  $H'_2 F'$  sufren respectivamente incrementos que llamaremos  $\delta f_1$ ,  $\delta f_2$  y  $\delta(H'_2 F')$ , y obtendremos de la (67) por diferenciación:

$$\delta(H'_2 F') = \frac{(f_1 + f_2 - d) f_2 - f_1 f_2 + f_2 d}{(f_1 + f_2 - d)^2} \delta f_1 = \frac{(f_1 + f_2 - d)(f_1 - d) - (f_1 - d) f_2}{(f_1 + f_2 - d)^2} \delta f_2$$

o también:

$$(68) \quad \delta(H'_2 F') = \frac{f_2^2}{(f_1 + f_2 - d)^2} \delta f_1 + \frac{(f_1 - d)^2}{(f_1 + f_2 - d)^2} \delta f_2$$

Si las dos lentes son convergentes, las diferencias  $\delta f_1$  y  $\delta f_2$  son cantidades del mismo signo, el que es negativo, como demuestran las fórmulas (64) y (65); y como en la (68) estas cantidades vienen multiplicadas por coeficientes cuadráticos, se desprende que la cantidad  $\delta(H'_2 F')$  no puede anularse nunca para una combinación de dos lentes convergentes, ni en los casos de lentes de diferentes clases de vidrio, resultando entonces: **Una combinación de dos lentes simples convergentes nunca es acromática.**

Si no es posible anular la dispersión cromática en una combinación de lentes convergentes, lógrase, sin embargo, realizar una reducción de esa dispersión, comparada con la que ocasionaría una lente simple de la misma distancia focal que la combinación.

Demostremos esto con dos ejemplos numéricos.

**1. Ocular de Huygens.** Si suponemos en un ocular de Huygens dos lentes de la misma clase de vidrio (crown) y con los datos:

$$f_1 = 45 \text{ mm}, \quad d = 30 \text{ mm}, \quad f_2 = 15 \text{ mm},$$

resulta:

$$f_1 + f_2 - d = 30 \text{ mm.} \quad f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = 22,5 \text{ mm}$$

y según (65):

$$\delta f_1 = -f_1 \frac{\Delta n}{n-1}$$

$$\delta f_2 = -f_2 \frac{\Delta n}{n-1}$$

de modo que la (68) nos da:

$$\delta (H'_2 F') = -\frac{15^2}{30^2} \cdot 45 \frac{\Delta n}{n-1} - \frac{15^2}{30^2} \cdot 15 \frac{\Delta n}{n-1}$$

o sea:

$$(69) \quad \delta (H'_2 F') = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta n}{n-1} (45 + 15) = -15 \frac{\Delta n}{n-1}$$

Una lente simple de distancia focal  $f = 22,5$  mm, en cambio, según (64) daría una aberración cromática de:

$$(70) \quad -22,5 \frac{\Delta n}{n-1}$$

La comparación de la (69) con la (70) nos enseña que el empleo de la combinación de Huygens de dos lentes ha dado una reducción de la aberración cromática en un tercio de su valor.

**Ejemplo 2. Ocular de Ramsden.** Para una combinación de Ramsden con dos lentes de una misma clase de vidrio (ver págs. 95 y 142) suponemos los siguientes datos:

$$f_1 = 45 \text{ mm,} \quad d = 20 \text{ mm,} \quad f_2 = 25 \text{ mm.}$$

Resulta entonces:

$$f_1 + f_2 - d = 50 \text{ mm y } f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = 22,5 \text{ mm}$$

y según (65) y (68):

$$\begin{aligned} \delta (H'_2 F') &= -\frac{25^2}{50^2} \cdot 45 \frac{\Delta n}{n-1} - \frac{25^2}{50^2} \cdot 25 \frac{\Delta n}{n-1} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 70 \frac{\Delta n}{n-1} \\ &= -17,5 \frac{\Delta n}{n-1} \end{aligned}$$

Como una lente simple de distancia focal  $f = 22,5$  mm daría la aberración cromática de:

$$-22,5 \frac{\Delta n}{n-1}$$

se nota que en la combinación Ramsden considerada se ha logrado reducir en un  $2/9$  la aberración cromática que ocasionaría una lente simple de la misma distancia focal que dicha combinación.

La fórmula (68) nos sirve también para establecer la **condición** que deben llenar dos lentes adosadas (una convergente de crown y otra divergente de flint) para dar una **lente acromática**. Para tal sistema ponemos

$$d = 0$$

Si entonces  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de crown y flint, respectivamente, la (68) da la condición:

$$\delta(H_2F') = \frac{f_2^2}{(f_1 + f_2)^2} \delta f_1 + \frac{f_1^2}{(f_1 + f_2)^2} \delta f_2 = 0$$

de lo cual fluye:

$$f_2^2 \delta f_1 + f_1^2 \delta f_2 = 0$$

Y si tenemos en cuenta la (65), obtendremos:

$$-f_2^2 f_1 \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} - f_1^2 f_2 \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1} = 0$$

o sea, dividiendo por  $f_1$  y  $f_2$ :

$$-f_2 \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} - f_1 \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1} = 0$$

Por consiguiente:

$$(71) \quad \boxed{\frac{f_1}{f_2} = -\frac{v_1}{v_2}}$$

donde

$$(72) \quad v_1 = \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}$$

son los dos **poderes dispersivos** de las dos clases de vidrio (ver pág. 33).

La ecuación (71) expresa la **condición de acromatismo de un sistema de lentes adosadas**. Es decir: **Las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  de las dos lentes de una combinación son proporcionales a los poderes dispersivos de las mismas**. Y como  $v_1$  y  $v_2$  tienen el mismo signo, deberán ser  $f_1$  y  $f_2$  de signos contrarios, convergente la una y divergente la otra.

Para vidrio crown ligero, de la primera lente, tenemos, por ejemplo, los índices de refracción correspondientes a las rayas **B**, **D** y **H**:

$$n_{1B} = 1,514, \quad n_{1D} = 1,518, \quad n_{1H} = 1,535$$

y para vidrio flint, número 13, de la segunda lente:

$$n_{2B} = 1,628, \quad n_{2D} = 1,635, \quad n_{2H} = 1,671$$

Ponemos:

$$\Delta n_1 = n_{1H} - n_{1B}$$

y

$$n_1 - 1 = n_{1D} - 1$$

y formaremos las diferencias análogas para el vidrio flint, de modo que obtenemos:

$$v_1 = \frac{0,021}{0,518}$$

$$v_2 = \frac{0,043}{0,635}$$

Con estos valores la (71) nos da la condición:

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{635 \cdot 21}{518 \cdot 43} = -0,599$$

la cual expresa: Con los vidrios elegidos se obtiene una lente acromática cuando la distancia focal de la lente convergente (de vidrio crown) es igual a 6/10 del valor absoluto de la distancia focal de la lente divergente (flint) adosada.

En la ecuación (71) figuran los poderes dispersivos  $v_1$  y  $v_2$ , cuyos valores según (72), se basan en las diferencias  $\Delta n_1$  y  $\Delta n_2$  de los índices de refracción correspondientes a las rayas **B** y **H**. Porque se supone con fundamento que un sistema óptico capaz de reunir en un solo rayo esas dos clases de luz (**B** y **H**) reúna también muy aproximadamente en un mismo rayo (blanco) todas las demás clases de luz existentes en el espectro.

En lugar de basar la condición de acromatismo (71) en las rayas **B** y **H**, se podría elegir otras dos rayas cualesquiera del espectro. En la técnica es muy usual caracterizar la refracción de dos vidrios por el índice  $n_D$  (de la raya **D** de la luz de sodio) o  $n_d$  (de la luz de helio, valor muy próximo a  $n_D$ ). Este índice  $n_D$  (o  $n_d$ ) suele llamarse **índice de refracción media**.

La dispersión generalmente se caracteriza por la diferencia  $n_F - n_C$  de los índices de refracción correspondientes a las luces **F** y **C**. Esta diferencia se suele llamar **dispersión media**. La elección ha recaído en las rayas **C** y **F** porque éstas encierran la parte más luminosa del espectro (ver fig. 13), es decir, la parte para la cual el ojo humano es más sensible y dentro de la cual se encuentra también la raya **D**. La dispersión causada por cada clase de vidrio, en lugar de caracterizarla por la diferencia  $n_F - n_C$ , la podemos también caracterizar con indicar el valor de la fracción:

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

(llamado **poder dispersivo**), o también con la indicación del valor:

$$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

de la **recíproca del poder dispersivo**. Esta recíproca (con  $n_D$  o  $n_d$  en el numerador) suele llamarse **número de Abbe** correspondiente a una cierta clase de vidrio, y la designamos por  $v$ . Evidentemente,  $v$  resulta relativamente grande para los vidrios de poca dispersión (crown) y pequeño para vidrios de gran dispersión (flint).

Con la introducción de los números de Abbe la condición de acromatismo (71) se transforma en:

$$(73) \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{v_2}{v_1}$$

En el catálogo de la fábrica de Schott & Genossen, (\*) Jena, encontramos por ejemplo, para los vidrios crown K 4 y flint pesado SF 6 los siguientes datos:

(74)	Clase de vidrio	Indice de refracción media $n_d$	Número de Abbe $v = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$
	K 4	1,5190	57,4
SF 6	1,8052	25,5	

Ejemplo práctico de cálculo de una lente objetiva acromática.

Se desea fabricar con los vidrios K 4 y SF 6 de la planilla (74) una lente objetiva acromática de distancia focal  $f = 25$  cm con la condición de que la superficie

posterior de la lente flint sea plana y que la superficie anterior de la misma coincida con la superficie posterior de la lente de crown (ver fig. 32). Se pregunta: 1) ¿Cuáles son las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  de las lentes de crown y flint, respectivamente? y 2) ¿Cuáles son los radios de curvatura de sus superficies?

Para hallar  $f_1$  y  $f_2$  tenemos dos condiciones:

Según (73) debe ser:

$$(75) \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{1}{f_1}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son respectivamente los números de Abbe correspondientes a los vidrios crown y flint elegidos.

Además, según (48) de pág. 84 debe ser:

$$(76) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Introduciendo en esta ecuación, el valor de  $1/f_2$  que da la (75), obtenemos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{1}{f_1}$$

o también:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} \left( 1 - \frac{v_2}{v_1} \right)$$

es decir:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1}$$



Fig. 32. — Se ilustra la forma de la lente objetiva acromática correspondiente a los valores numéricos del ejemplo.

(\*) Fundada en 1885 por el químico O. Schott en colaboración con el físico E. Abbe.

De donde:

$$(77) \quad f_1 = f \frac{v_1 - v_2}{v_1}$$

Teniendo en cuenta la (75), se obtiene:

$$(78) \quad f_2 = -f \frac{v_1 - v_2}{v_2}$$

Con los valores numéricos de la tabla (74) resulta:

$$f_1 = 25 \frac{57,4 - 25,5}{57,4} = +13,89 \text{ cm} \quad (D_1 = +7,20 \text{ dptr, ver pág. 85})$$

$$f_2 = -25 \frac{57,4 - 25,5}{25,5} = -31,27 \text{ cm} \quad (D_2 = -3,20 \text{ dptr})$$

[Se nota que se cumple la (48) de pág. 84:  $D = D_1 + D_2$ , donde  $D$  es  $\frac{1}{f}$ .

cuando  $f$  es expresado en metros, es decir  $D = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ dptr.}]$

Para calcular los radios de curvatura de las lentes tenemos la fórmula (55) de pág. 86. La escribimos en la siguiente forma:

$$(79) \quad \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

la que vale para cualquier lente simple de vidrio con índice de refracción  $n$  y en la cual  $r_1$  y  $r_2$  significan los radios de curvatura de las caras anterior y posterior.

Aplicándola a la lente planocóncava de flint de nuestro problema e introduciendo los valores correspondientes a distancia focal, índice de refracción y radio de curvatura de la cara posterior de la lente de flint, tenemos:

$$\frac{1}{-31,27} = (1,8052 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty} \right)$$

de donde resulta:

$$r_1 = -31,37 \cdot 0,8052 = -25,18 \text{ cm}$$

que es el radio de curvatura anterior de la lente de flint.

Aplicando ahora la (79) a la lente convexa de crown, teniendo en cuenta que para ella  $r_2$  debe ser igual a  $-25,18 \text{ cm}$ , obtenemos:

$$\frac{1}{13,89} = (1,5190 - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{25,18} \right)$$

de donde:

$$\frac{1}{13,89 \cdot 0,5190} - \frac{1}{25,18} = \frac{1}{r_1}$$

y

$$r_1 = \frac{1}{\frac{1}{13,89 \cdot 0,5190} - \frac{1}{25,18}} = \frac{25,18 \cdot 13,89 \cdot 0,5190}{25,18 - 13,89 \cdot 0,5190}$$

$$= \frac{25,18 \cdot 7,2089}{25,28 - 7,2089} = + 10,10 \text{ cm}$$

que es el radio de curvatura anterior de la lente de crown, la que es biconvexa.

**Ortoscopía.** La fórmula (18) de pág. 61 para el aumento lateral  $\beta$ :

$$(80) \quad \beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x}$$

es válida en forma sumamente aproximada para imágenes producidas por **rayos paraxiales**, es decir, para puntos objetos muy próximos al eje del sistema óptico. En cambio, los puntos objetos más alejados del eje en muchos casos dan imágenes para las cuales el aumento lateral difiere algo del valor dado por la (80), tanto más cuanto mayor es la distancia del punto objeto al eje, lo que trae como consecuencia que la imagen de una figura geométrica no es exactamente una figura geométrica semejante.

Siendo, por ejemplo, el objeto una red cuadrículada como la representada en la fig. 33, una lente o un sistema de lentes puede producir imágenes como las ilustradas en las figs. 34 **A** y 34 **B**, es decir, imágenes con distorsión.

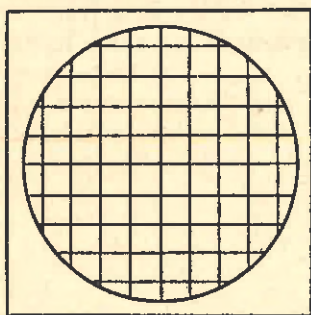


Fig. 33. — Red cuadrículada supuesta como objeto.

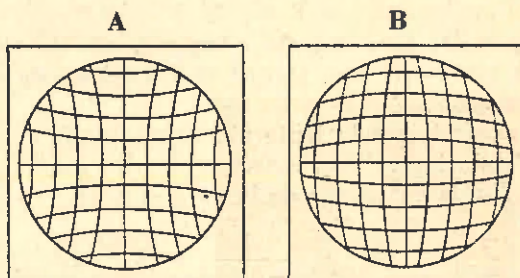


Fig. 34. — Imágenes con distorsión. Se reproducen como rectas sólo los ejes de la red cuadrículada. Si el aumento es mayor hacia los bordes del campo, se produce una distorsión en corselete (caso A), y si es menor en los bordes una distorsión en barrilete o tonel (caso B).

Como se ve, el fenómeno se presenta en las formas contrarias siguientes:

1) Cuando las líneas que representan imágenes de rectas son convexas hacia el centro, tenemos imágenes con **distorsión tipo corselete** (fig. 34, **A**); este caso se produce cuando el aumento lateral crece al disminuir la distancia de los puntos objetos al eje.

2) Cuando las líneas imágenes de rectas son cóncavas hacia el centro, tenemos imágenes con **distorsión tipo barrilete o tonel** (fig. 34, **B**); este caso tiene lugar cuando el aumento lateral disminuye al crecer la distancia de los puntos objetos al eje.

Con adecuadas combinaciones de lentes se logra reducir y hasta anular prácticamente la distorsión de las imágenes. Tales combinaciones que de líneas rectas objetos dan imágenes que también son líneas rectas, se llaman **sistemas ortoscópicos** (\*). Un ejemplo de tal sistema es el **ocular ortoscópico de Kellner** representado en fig. 6 de pág. 109.

El **ocular de Zeiss** (fig. 35) tiene, por el contrario, acromatizada la lente de campo.

Los oculares de Huygens y Ramsden en sus formas perfeccionadas son empleados en los microscopios y en los anteojos. Sabemos que esos oculares en realidad son lupas con que se observan las pequeñas imágenes producidas por los objetivos, de lo que se desprende que esas imágenes se ven invertidas tales cuales las han formado los objetivos. El hecho de que la imagen es invertida no constituye un inconveniente cuando se trata de observaciones astronómicas u observaciones de objetos microscópicos. Como ello tampoco es un serio inconveniente para el uso del anteojo en operaciones de medición, se generalizó el empleo del anteojo astronómico en astronomía, geodesia y topografía.

Pero cuando se quiere usar el anteojo para explorar una cierta extensión de la superficie terrestre (lo que se hace con gemelos, anteojos de reconocimiento para triangulaciones), el observador generalmente desea ver la región a explorar en la forma como la vería con ojo desnudo si se hallara más cerca de la misma, es decir, desea obtener **imágenes derechas**, lo que se consigue con el llamado **anteojo terrestre**. Este tipo de anteojo tiene un sistema de lentes tal que endereza la imagen invertida producida por el objetivo.

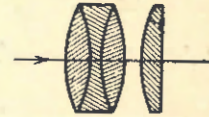


Fig. 35. — Ocular de Zeiss.



Fig. 36. — Juan Wiesel  
1583 - 1660

(sacada de A. Koenig, Die Fernrohre u. Entfernungsmesser).

### 18. Anteojo terrestre.

Era lógica la tendencia de enderezar la imagen producida por el objetivo del anteojo astronómico. Considérase como inventor del anteojo terrestre el capuchino Antonio María v. Schyrle (1597 - 1660), el que indujo al óptico Juan Wiesel de Augsburg (1583 - 1660) a fabricar anteojos de Kepler y anteojos terrestres. En el año 1647 este óptico ofreció los primeros ejemplares de anteojos terrestres.

Las figs. 37 y 38 representan la forma del anteojo terrestre perfeccionado por **Fraunhofer**.

El modo más sencillo de enderezar la imagen producida por el objetivo consiste en intercalar convenientemente una lente convergente entre el objetivo y el ocular. Si, por ejemplo, en fig. 37  $i_1$  es la imagen de un objeto lejano  $Q$  producida por el objetivo  $L_{ob}$ ,

(\*) Ortoscópico significa: dando imágenes semejantes, rectas imágenes y no curvas de rectas objetos.

y si colocamos una lente convergente  $L_1$  detrás de esa imagen de tal manera que la distancia entre la imagen  $i_1$  y la lente  $L_1$  sea la doble distancia focal de  $L_1$ , esta última lente formará la imagen invertida  $i_2$ , la que es enderezada respecto a la posición del objeto  $Q$  (compárase fig. 17 de pág. 88). Se puede observar esta imagen  $i_2$  a través del ocular  $L_{oc}$ .

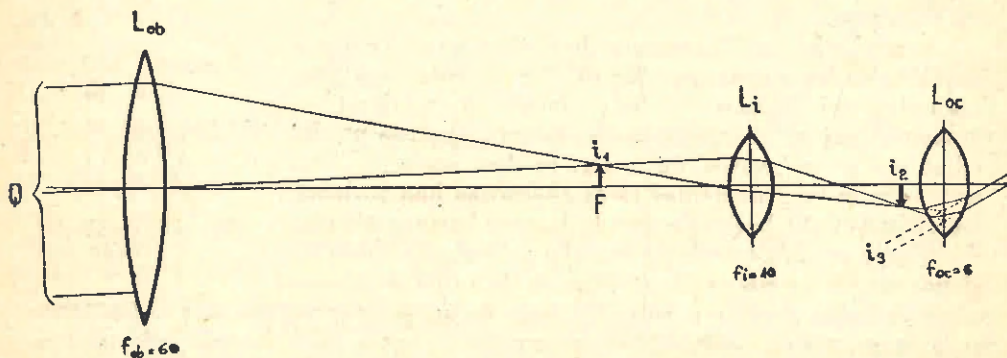


Fig. 37. — Se ilustra el principio del anteojo terrestre. La inversión de la imagen  $i_1$  producida por el objetivo se consigue con intercalar una conveniente lente convergente  $L_1$  entre el objetivo  $L_{ob}$  y el ocular  $L_{oc}$ .

Se nota que el enderezamiento descrito implica un alargamiento del tubo del anteojo por el cuádruplo de la distancia focal de la lente  $L_1$ .

Más perjudicial aún que este inconveniente del alargamiento es la pérdida de claridad de la imagen que se produce debido a la absorción de luz al traspasar los rayos la lente  $L_1$ . Esta pérdida de luz por causa de la lente intercalada hace que se prefieran los anteojos astronómicos (con imágenes invertidas), siempre que no existan razones de peso que hacen deseables imágenes derechas.

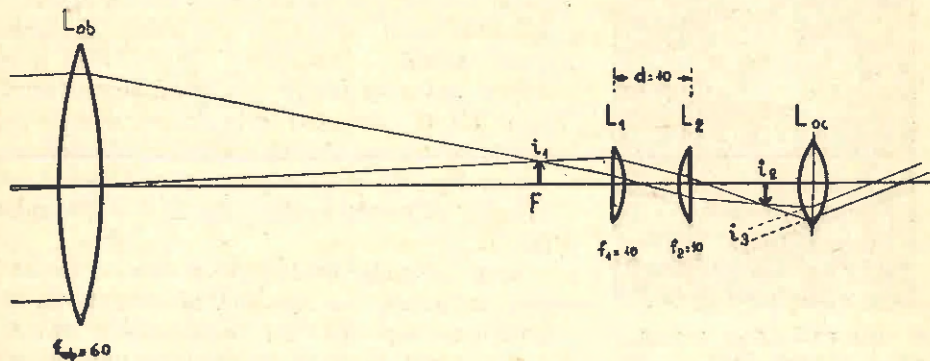


Fig. 38. — Se ilustra un anteojo terrestre, el cual realiza la inversión de la imagen por medio de una pareja de lentes planoconvexas iguales.

El dispositivo sencillo representando en fig. 37, con una sola lente enderezadora y una sola lente ocular, daría un pobre resultado respecto a la mag-

nitid del campo visual y la nitidez de las imágenes afectadas por la aberración esférica. Se logra una notable mejora si, en lugar de una lente enderezadora simple, se coloca una pareja de lentes  $L_1$  y  $L_2$  (fig. 38). Se puede por ejemplo, elegir dos lentes planoconvexas iguales cuya distancia sea igual a la distancia focal de cada una.

Para tal sistema, en vista de que  $f_1 = f_2 = d$ , resulta:

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = f_1 = f_2$$

$$H_1H = H'_2H' = -f \frac{d}{f_2} = -f_1 = -f_2$$

[ver (36), (42) y (46) de págs. 82 y 83],

y la pareja debe colocarse de tal manera que la distancia entre la imagen  $i_1$  y la primera lente sea igual a la distancia focal  $f_1$  de la misma, produciéndose así la imagen  $i_2$  (invertida respecto a  $i_1$ ) a la distancia focal  $f_2 (= f_1)$  de la segunda lente. La pareja enderezadora de lentes (fig. 38) tiene ante la lente enderezadora simple (fig. 37) la ventaja de acortar algo el anteojo y de anular en parte considerable la aberración esférica.

Pero mucho mejor resultado aún (especialmente en cuanto a la magnitud del campo visual) se obtiene si, además de la pareja enderezadora de lentes, se emplea también una pareja de lentes como ocular, por ejemplo un ocular Huygens. La figura 39 representa una disposición conveniente (según Fraunhofer) de 4 lentes del sistema ocular de un anteojo terrestre.

Indicamos en el siguiente cuadro las distancias focales de esas lentes como también las 3 distancias que median entre ellas (según Precht, *Praktische Dioptrik*, Viena, 1828, pág. 217):

Lentes	Distancias focales	Distancias entre lentes
$L_1$	31,4 mm	43,2 mm
$L_2$	39,8 „	73,2 „
$L_3$	45,8 „	50,5 „
$L_4$	31,4 „	

Llamaremos “pareja enderezadora” a la combinación de lentes  $L_1 + L_2$  (las que, a diferencia de las de fig. 38, no son iguales), “ocular Huygens” a la combinación  $L_3 + L_4$  y “sistema ocular” a la combinación  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$  de las 4 lentes. Suponemos, además, un objetivo (no representado en la figura) de distancia focal de 418,5 mm. Admitimos que este objetivo ha producido la imagen  $i_0$  (fig. 39) de algún objeto lejano.

Trátase ahora ante todo de calcular el lugar que debe asignarse al sistema ocular, cuyo foco anterior debe coincidir con el foco posterior del objetivo. Conviene entonces averiguar primeramente la situación del foco anterior del sistema ocular con respecto a la primera lente  $L_1$ . Para este fin hemos calculado tanto para la combinación “pareja enderezadora”,  $L_1 + L_2$ , como para la otra “ocular Huygens”,  $L_3 + L_4$ , las distancias focales equivalentes  $f$  y  $\bar{f}$ , como también la situación de los correspondientes puntos principales  $H, H', \bar{H}, \bar{H}'$ . Luego hemos averiguado para la combinación “pareja enderezadora + ocular Huygens” la distancia focal equivalente  $f$ , y la situación de los corres-

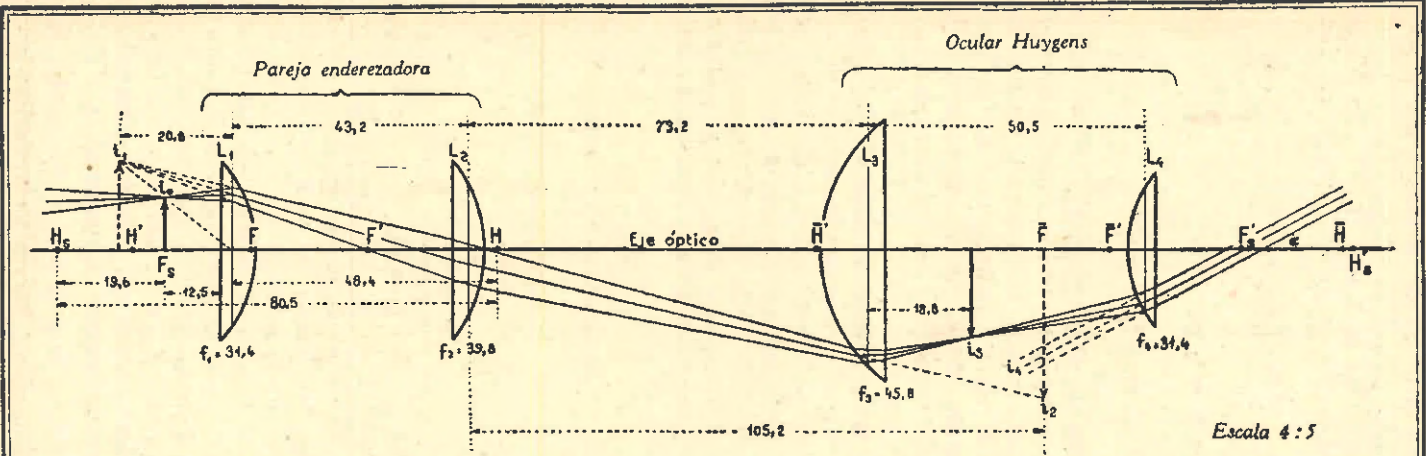


Fig. 39. — Se ilustra el sistema ocular de un anteojo terrestre, en el cual dicho sistema se compone de una pareja enderezadora de lentes y un ocular Huygens

**Combinación "pareja enderezadora",  $L_1 + L_2$ :**

$$f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{31,4 \cdot 39,8}{31,4 + 39,8 - 43,2} = +44,6 \text{ mm}$$

$$H_1 H = -f \frac{d}{f_2} = -44,6 \frac{43,2}{39,8} = -48,4$$

$$H_2' H' = -f \frac{d}{f_1} = -44,6 \frac{43,2}{31,4} = -61,4$$

**Combinación "ocular Huygens",  $L_3 + L_4$ :**

$$\bar{f} = \frac{f_3 \cdot f_4}{f_3 + f_4 - d} = \frac{45,8 \cdot 31,4}{45,8 + 31,4 - 50,5} = +53,9 \text{ mm}$$

$$\bar{H}_1 \bar{H} = -\bar{f} \frac{d}{f_4} = -53,9 \frac{50,5}{31,4} = -86,7$$

$$\bar{H}_2' \bar{H}' = -\bar{f} \frac{d}{f_3} = -53,9 \frac{50,5}{45,8} = -59,4$$

En base a estos elementos, obtendremos para las magnitudes que nos interesan, los valores <sup>a</sup>

que a continuación se calculan

Combinación "pareja enderezadora" + "ocular Huygens".

$$f_s = \frac{f \cdot \bar{f}}{f + \bar{f} - d_s} = \frac{44,6 \cdot 53,9}{44,6 + 53,9 - (61,4 + 73,2 + 86,7)} = \underline{-19,6 \text{ mm}}$$

$$HH_s = -f_s \frac{d_s}{f} = 19,6 \frac{221,3}{53,9} = \underline{+80,5}$$

$$\bar{H}'H'_s = -f_s \frac{d_s}{\bar{f}} = 19,6 \frac{221,3}{44,6} = \underline{+97,3}$$

Distancia de la imagen  $i_o$  a la lente  $L_1 = -48,4 + 80,5 - 19,6 = +12,5$

$$a' = \frac{af}{a-f} \quad \text{fórmula (58). pág. 87}$$

Para la lente  $L_1$  y un objeto a 12,5 mm delante de la lente resulta para la imagen  $i_1$ :

$$a' = \frac{12,5 \cdot 31,4}{12,5 - 31,4} = -20,8$$

Para la lente  $L_2$  y el objeto a 20,8 + 43,2 = 64,0 mm resulta para la imagen  $i_2$ :

$$a' = \frac{64 \cdot 39,8}{64 - 39,8} = +105,2$$

Para la lente  $L_3$  con el objeto a  $-105,2 + 73,2 = -32,0$  mm de distancia resulta para la imagen  $i_3$ :

$$a' = \frac{-32 \cdot 45,8}{-32 - 45,8} = +18,8 \text{ mm.}$$

pondientes puntos principales  $H_s$  y  $H'$  respecto a los puntos principales  $H$  y  $H'$  ya mencionados.

De estos cálculos resultó que el punto  $H$  se encuentra a 48,4 mm detrás de la lente  $L_1$ , que el punto  $H_s$  se halla a 80,5 mm delante de  $H$ , y que el foco  $F_s$  del sistema  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$  (sistema ocular) se encuentra 19,6 mm detrás del punto  $H_s$ . Por consiguiente, el punto  $F_s$  se halla a  $-48,4 + 80,5 - 19,6 = 12,5$  mm delante de la lente  $L_1$ .

En consecuencia, colocamos el sistema ocular de tal manera que su primera lente  $L_1$  quede a 12,5 mm detrás del plano focal del objetivo.

Estamos ahora en condiciones de averiguar los lugares de las imágenes  $i_1, i_2, i_3, i_4$ , que las 4 lentes del sistema ocular forman sucesivamente cuando el objeto para la primera lente  $L_1$  es la imagen  $i_0$  dada por el objetivo.

La fig. 39 ilustra el camino de 3 rayos procedentes de un objeto lejano, de los cuales el rayo del medio ha penetrado por el centro del objetivo y los otros dos por los extremos de un diámetro del mismo.

Del objeto  $i_0$  la lente  $L_1$  produce entonces la imagen virtual  $i_1$ . Considerando ésta como objeto para la lente  $L_2$ , ésta tiende a formar una imagen  $i_2$ , la que no se produce por interponerse la lente  $L_3$  en el camino de los rayos. La imagen  $i_2$  es **objeto virtual** (ver pág. 99) para la lente  $L_3$  la que produce la imagen real  $i_3$  situada en el plano focal de la cuarta lente (o por lo menos muy cerca de ese plano, según las condiciones del ojo que observa). En el plano de la imagen  $i_3$  se coloca el diafragma de campo **D.C.** (fig. 40). También se puede colocar allí un retículo cuando haya razones para ello. De la imagen  $i_3$  la lente  $L_4$  forma una imagen  $i_4$  en el infinito (o por lo menos a gran distancia).

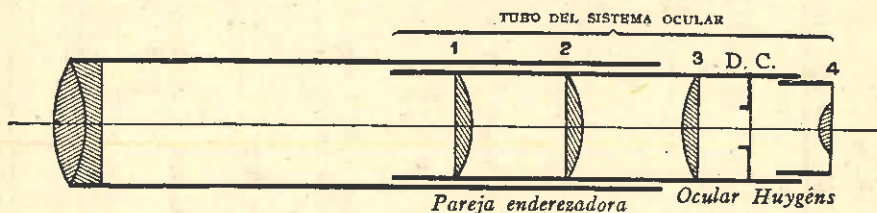


Fig. 40. — Esquema de un anteojo terrestre según Fraunhofer. D. C. diafragma de campo, eventualmente porta retículo. La visión clara de los hilos del retículo se obtiene con mover un poco la lente 4, mientras que la coincidencia de la imagen  $i_3$  con el plano del retículo se realiza con mover el tubo del sistema ocular.

**Aumento.** Con la distancia focal de 418,5 mm del objetivo y la distancia focal del sistema ocular  $f_s = -19,6$  mm resultante del cálculo, se deduce (ver ecuación, pág. 153) que el anteojo estudiado da el aumento 21,4 (prescindiendo del signo).

**Rendimiento óptico.** De lo anteriormente explicado se desprende que el anteojo terrestre es siempre más largo y menos luminoso que un anteojo astronómico de igual aumento.

### 19. Anteojo holandés o de Galilei.

Como ya dijimos en pág. 150, el anteojo holandés se compone de una lente objetiva convergente  $L_1$  y una lente ocular divergente  $L_2$  (ver fig. 41).

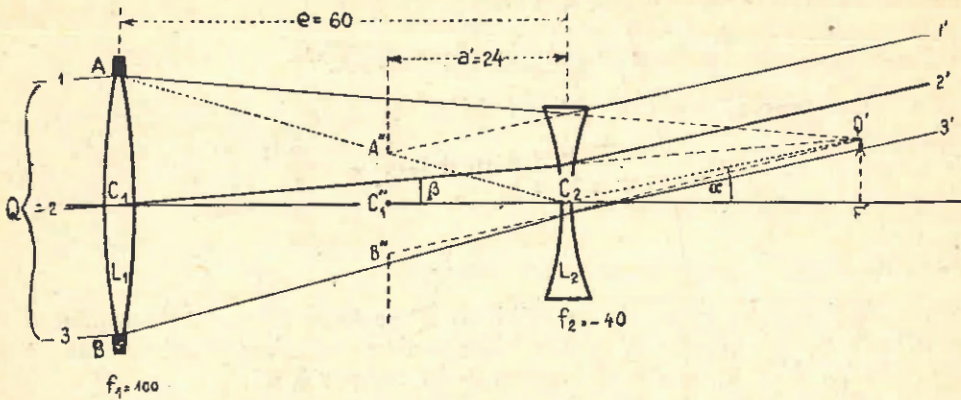


Fig. 41. — Anteojo holandés. Se ilustra el camino de los rayos 1, 2 y 3 procedentes de un punto objeto  $Q$  lejano. El borde  $AB$  de la lente objetiva limita la pupila de entrada del anteojo, y su imagen  $A''B''$ , formada por el ocular, da la pupila de salida.  $\beta$  es el ángulo que el rayo principal entrante 2 forma con el eje del sistema, siendo  $\alpha$  el ángulo que el rayo conjugado saliente  $2'$  forma con dicho eje. (Compare fig. 4 de pág. 152.)

Lo mismo que en el caso del anteojo astronómico, el anteojo holandés constituye un sistema telescópico. La lente ocular  $L_2$  se halla colocada entre la lente objetiva  $L_1$  y el foco posterior  $F'$  de la misma, de tal modo que ese foco coincide con el foco de la lente ocular  $L_2$ . Esto implica que el valor absoluto de la distancia focal  $f_2$  de la lente  $L_2$  tiene que ser siempre menor que la  $f_1$  de la  $L_1$ .

En la fig. 41 hemos supuesto un objetivo con  $f_1 = 100$  mm y un ocular con  $f_2 = -40$  mm, resultando entonces la distancia entre las dos lentes igual a:

$$f_1 + f_2 = 100 - 40 = 60 \text{ mm}$$

Sean 1, 2, 3 (fig. 41) tres rayos emitidos por un punto objeto lejano  $Q$ , de los cuales el 2 pasa por el centro del objetivo y los 1 y 3 por los extremos de un diámetro del mismo. De no existir la lente ocular, la lente  $L_1$  formaría del punto  $Q$  la imagen  $Q'$  situada en el plano focal del objetivo. Pero los rayos refractados por el objetivo, antes de llegar al punto imagen  $Q'$ , caen sobre la lente divergente  $L_2$ , que los desvía. Como la imagen  $Q'$  se halla en el plano focal común, que es también el del ocular, la imagen  $Q''$  que la  $L_2$  produce del objeto virtual  $Q'$ , se halla en el infinito, es decir, los tres rayos emergentes  $1'$ ,  $2'$ , y  $3'$ , son paralelos entre sí y paralelos al rayo  $Q'C_2$ , el que une el objeto virtual  $Q'$  al centro de  $L_2$ .

La pupila de entrada  $AB$  es el borde de la lente objetiva. Para hallar la pupila de salida hay que calcular la posición y el tamaño de la imagen  $A''B''$  que la lente  $L_2$  forma del diámetro  $AB$  de la lente objetiva (análogamente al caso de la fig. 4 de la pág. 152).

En la fig. 41 hemos supuesto un diámetro del objetivo igual a 34 mm, de modo que  $C_1A = 17$  mm. Aplicando la fórmula (58) de pág. 87:

$$a' = \frac{af}{a - f}$$

para la lente  $L_2$  y el objeto  $C_1A = 17$  mm, resulta:

$$(81) \quad a' = \frac{60(-40)}{60 - (-40)} = -24 \text{ mm}$$

En forma general tenemos en lugar de la (81):

$$a' = \frac{(f_1 + f_2)f_2}{f_1 + f_2 - f_2} = (f_1 + f_2) \frac{f_2}{f_2} = \frac{f_1 + f_2}{A}$$

o sea:

$$(82) \quad a' = \frac{e}{A}$$

lo que significa que la pupila de salida  $A''B''$  se halla 24 mm a la izquierda de la lente  $L_2$ ; y como  $C_2$ ,  $A''$  y  $A$  se hallan sobre una recta, lo mismo que los 3 puntos  $C_2$ ,  $B''$  y  $B$ , resulta el tamaño de la imagen  $A''B''$ :

$$(83) \quad A''B'' = 34 \cdot \frac{24}{60} = 13,6 \text{ mm}$$

de acuerdo con la fórmula (59) de pág. 88.

Para el tamaño  $A''B''$  tenemos la fórmula general:

$$\overline{A''B''} = \overline{AB} \frac{|a'|}{e}$$

y con tener en cuenta la (82):

$$(84) \quad \overline{A''B''} = \overline{AB} \frac{1}{A}$$

Sea  $\beta$  el ángulo que los rayos incidentes 1, 2 y 3 forman con el eje, y  $\alpha$  el ángulo conjugado que los rayos salientes 1', 2' y 3' forman con el mismo eje; se obtiene el aumento  $A$  del anteojo por la fórmula:

$$A = \frac{\alpha}{\beta}$$

(donde  $\alpha$  tiene un valor negativo si en el caso de la fig. 4 de pág. 152 se toma con signo positivo).

Pero como

$$\alpha = \frac{F'Q'}{f_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{F'Q'}{f_1}$$

resulta:

$$A = \frac{f_1}{f_2} \quad [\text{de acuerdo con la (6) de pág. 154}]$$

En el caso de la fig. 41 tenemos:

$$A = \frac{100}{-40} = -2,5$$

El signo negativo del aumento expresa solamente que la imagen  $Q''$  situada en el infinito es derecha y no invertida, como ocurre en el caso del anteojo astronómico. Lo que interesa es el **valor absoluto del aumento**:

$$|A| = 2,5$$

Prescindiendo del signo, decimos entonces que el anteojo considerado tiene 2,5 aumentos.

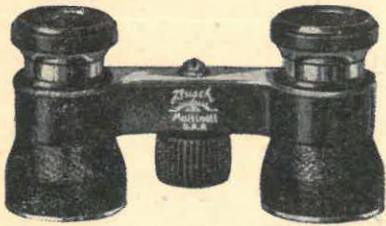


Fig. 42.— Gemelos de teatro de  $2\frac{1}{2}$  aumentos y un campo de  $305\%$  (305 milésimos).

Como en esta clase de anteojos no se forman imágenes reales sino solamente imágenes virtuales, las cuales no pueden ser observadas simultáneamente con un retículo o una escala, el anteojo holandés no sirve para la medición sino solamente para ver la imagen de un objeto de cierta extensión.

Suelen montarse dos de estos anteojos iguales, a la distancia interpupilar (de unos 65 mm), constituyendo los conocidos gemelos de teatro (fig. 42). Es esencial

en este instrumento que los ejes de ambos anteojos sean exactamente paralelos y que conserven esta propiedad en el enfoque para objetos a diferentes distancias.

*Preparación para el estudio del campo del anteojo holandés.*

**Campo visual verdadero y campo visual aparente.** Llamaremos **campo visual verdadero** o **ángulo de campo verdadero**  $2\beta$  de un anteojo al ángulo que entre sí forman dos rayos que desde el centro del objetivo se tracen a dos puntos lejanos, cuyas imágenes aparecen en el borde del campo visual en lugares opuestos respecto al centro de este campo.

Por **campo visual aparente** o **ángulo de campo aparente**  $2\alpha$  de un anteojo entendemos el ángulo que forman entre sí los dos rayos antes descritos cuando salen del ocular después de refractarse en todas las lentes del sistema.

En el **anteojo astronómico**, por ejemplo, el campo visual aparente se halla generalmente limitado por un **diafragma de campo D.C.**, colocado en el plano focal común del objetivo y del ocular (ver fig. 43). Así en la figura 43 sean  $Q_1$  y  $Q_2$  dos puntos lejanos cuyas imágenes  $Q'_1$  y  $Q'_2$  aparecen en el borde del campo o sea en dos puntos diametralmente opuestos de la periferia del círculo

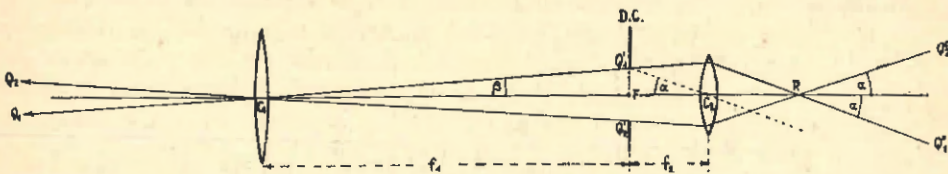


Fig. 43.— Se ilustran los conceptos de campo visual verdadero y campo visual aparente de un anteojo.

lo del diafragma. Los rayos  $C_1Q'_1$  y  $C_1Q'_2$ , al pasar por el ocular, son refractados tomando las direcciones  $RQ''_1$  y  $RQ''_2$ , respectivamente, siendo por ejemplo,

$$RQ''_1 \parallel Q'_1C_2$$

Entonces el ángulo  $Q_1C_1Q_2 = 2\beta$  de los rayos entrantes representa el **campo visual verdadero**, mientras que el **campo visual aparente** es dado por el ángulo  $Q''_1RQ''_2 = 2\alpha$  de los rayos salientes.

De los triángulos rectángulos  $C_1FQ'_1$  y  $C_2FQ'_1$  se deduce la ecuación de pág. 153, que nos dice:

$$(85) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{rg} \beta} = \frac{f_1}{f_2}$$

En vista de que los ángulos  $2\beta$  y  $2\alpha$  son generalmente pequeños (valor máximo de  $2\alpha$  alrededor de  $40^\circ$ ), la (85) se transforma en:

$$(86) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_1}{f_2}$$

Según (6) de pág. 154 la fracción  $\frac{f_1}{f_2}$  es el aumento  $A$  del anteojo, de modo que la (86) nos da:

$$\frac{\alpha}{\beta} = A$$

de lo cual se deduce:

$$(87) \quad \boxed{2\alpha = A \cdot 2\beta}$$

Es decir: **El campo visual aparente es igual al campo visual verdadero multiplicado por el aumento del anteojo.**

La definición del aumento  $A$  de un anteojo por el cociente  $\frac{\alpha}{\beta}$  (siendo  $2\beta$  el ángulo entre dos rayos centrales entrantes y  $2\alpha$  el ángulo entre los correspondientes rayos salientes) es válida no solamente para el anteojo astronómico sino para cualquier otro tipo de anteojo destinado a la observación de objetos lejanos.

**Estudio sobre rayos que puedan o no pasar por dos diafragmas sucesivos.** Imaginamos dos diafragmas circulares (ver fig. 44) cuyos planos son paralelos y tienen entre sí la distancia  $d$ . Suponemos, además, que el segundo diafragma se encuentra frente al primero, es decir, que la recta unión de los centros de los diafragmas sea perpendicular a los planos de los mismos. La figura 44 representa un corte por los dos diafragmas, de modo que  $PQ$  y  $ST$  son diámetros de los mismos. Llamamos  $R$  y  $r$  a los radios de los diafragmas; y en el estudio que sigue suponemos que el radio  $r$  del segundo diafragma sea menor que el radio  $R$  del primero. En el espacio situado a la izquierda de los diafragmas imaginamos un plano  $O$  paralelo a los planos de los diafragmas. Al espacio situado a la derecha de los diafragmas lo llamaremos espacio  $(E)$ . La recta unión de los centros de los diafragmas corta al plano  $O$  en el punto  $A$ . La recta que une el extremo inferior  $S$  del diámetro  $ST$  con el extremo inferior  $P$  del diámetro  $PQ$  corta al plano  $O$  en el punto  $B$  y forma con la recta unión de los centros el ángulo  $\omega_1$ . Finalmente, la recta que une el extremo superior  $T$  del diámetro  $ST$  con el extremo inferior  $P$  del diámetro  $PQ$  corta al plano  $O$  en el punto  $C$  y forma con la recta unión de los centros el ángulo  $\omega_2$ .

Consideremos ahora un punto  $X$  situado entre  $A$  y  $B$  (fig. 45). Notamos que este punto envía al espacio  $(E)$  un haz de luz tan grande como puede

pasar por otra abertura **ST** del segundo diafragma. El primer diafragma **PQ** no afecta a éste de manera alguna; solamente el segundo diafragma **ST** tiene

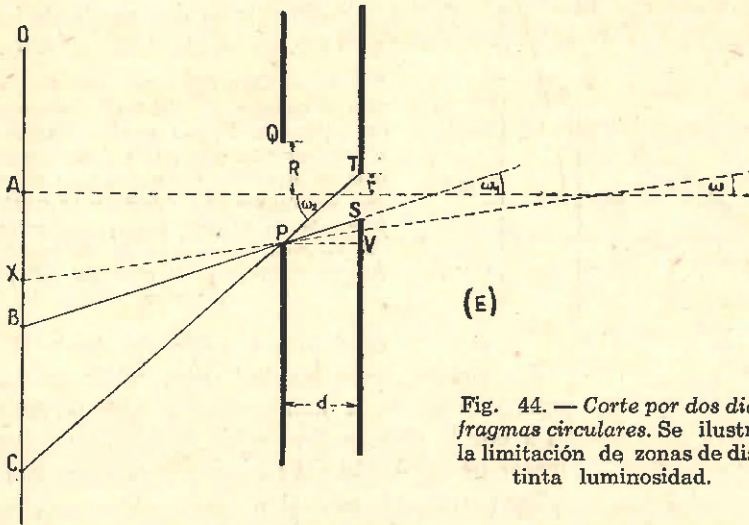


Fig. 44. — Corte por dos diafragmas circulares. Se ilustra la limitación de zonas de distinta luminosidad.

el rol de **diafragma de rayos**. Desde el espacio **(E)** el punto **X** puede ser visto con un máximo de luminosidad determinado por el tamaño del diafragma **ST**. Si nos figuramos luego un punto **Y** situado entre **B** y **C** (fig. 46), nos damos cuenta de que tal punto **Y** envía al espacio **(E)** solamente una parte de la luz que pasaría por **ST** de no existir el primer diafragma. Desde el espacio **(E)** el punto **Y** puede ser visto con una luminosidad que es menor que la del

punto **X**, y es tanto menor cuanto más se acerque **Y** al punto **C**.

Un punto **Z** situado más alejado de **A** que el punto **C**, no puede enviar luz alguna al espacio **(E)**, siendo por tanto invisible desde este espacio.

Volviendo a considerar la fig. 44, estableceremos ahora los límites de los puntos **X** de luminosidad máxima y de los puntos **Y** de luminosidad menor.

Notamos lo siguiente. Para que un punto **X** sea visto desde el espacio **(E)** con luminosidad máxima, es necesario que el ángulo de inclinación  $\omega$  que forma el rayo **PX** con la recta unión de los centros, no sobrepase el valor de un ángulo límite  $\omega_0$ , para cuya determinación tenemos la ecuación:

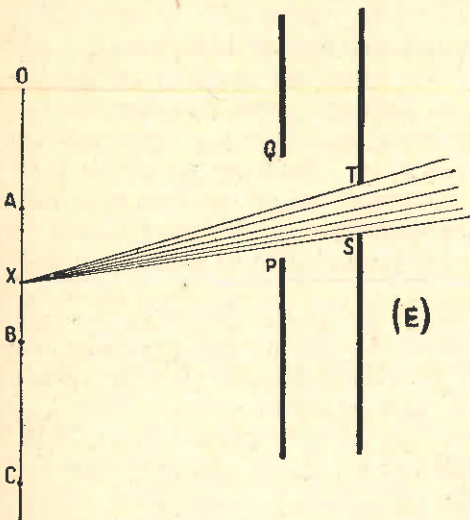
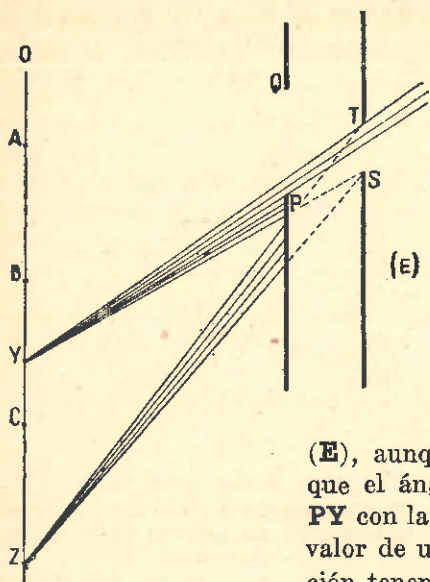


Fig. 45. — Corte por dos diafragmas circulares. Se ilustra la situación de un punto **X** que envía al espacio **(E)** toda la luz que puede pasar por el diafragma **ST**.



$$(88) \quad \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{VS}{PV} = \frac{R-r}{d}$$

Igualmente se desprende de las figuras 44 y 46 lo siguiente: para que

Fig. 46. — Otro corte por dos diafragmas circulares. Se ilustra la situación de un punto *Y* que envía al espacio (E) solamente una parte de la luz que pasaría por *ST* si no existiese el primer diafragma *PQ*. También se ilustra la situación de un punto *Z* que no envía ninguna luz al espacio (E) por impedirlo el uno y el otro de los diafragmas.

un punto *Y* sea visto desde el espacio (E), aunque con claridad disminuída, es necesario que el ángulo de inclinación  $\omega$  que forma el rayo *PY* con la recta unión de los centros, no sobrepase el valor de un ángulo límite  $\omega_2$ , para cuya determinación tenemos la ecuación:

$$(89) \quad \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{VT}{PV} = \frac{R+r}{d}$$

Como las figuras 44, 45 y 46 representan cortes por los diafragmas, resulta que los puntos *X* vistos con luminosidad máxima desde el espacio (E), llenan una circunferencia de radio *AB*, mientras que los puntos *Y* vistos con claridad reducida desde el espacio (E) se encuentran entre dos circunferencias concéntricas de radios *AB* y *AC*.

Cuando el plano *O* que contiene los puntos objetos se halla muy alejado de los diafragmas *PQ* y *ST*, los haces de rayos emitidos por los puntos objetos son prácticamente haces de rayos paralelos o sea haces cilíndricos.

Las ecuaciones (88) y 89) nos dan entonces las condiciones que para su paso por los diafragmas deben llenar tales haces cilíndricos en cuanto a su inclinación contra la recta unión de los centros de los diafragmas, expresando la (88) la condición para el paso de haces completos (limitados solamente por el diafragma *ST*), y la (89) la condición para el paso de alguna parte de la luz emitida.

Cuando en las (88) y (89) los ángulos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  resultan pequeños, sus tangentes pueden ser reemplazadas por los arcos. Si, además, queremos expresar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en grados, debemos introducir todavía el factor  $\rho^\circ = 57,3^\circ$ , con lo cual las condiciones (88) y (89) toman la siguiente forma:

$$(90) \quad \omega_1 = \frac{R-r}{d} \cdot 57,3^\circ$$

$$(91) \quad \omega_2 = \frac{R+r}{d} \cdot 57,3^\circ$$

Sentado esto, pasamos al estudio del campo del anteojo holandés.

En la figura 47 hemos supuesto un punto objeto lejano **Y** que envía un haz prácticamente cilíndrico de rayos (1, 2, 3,) hacia el objetivo, los cuales,

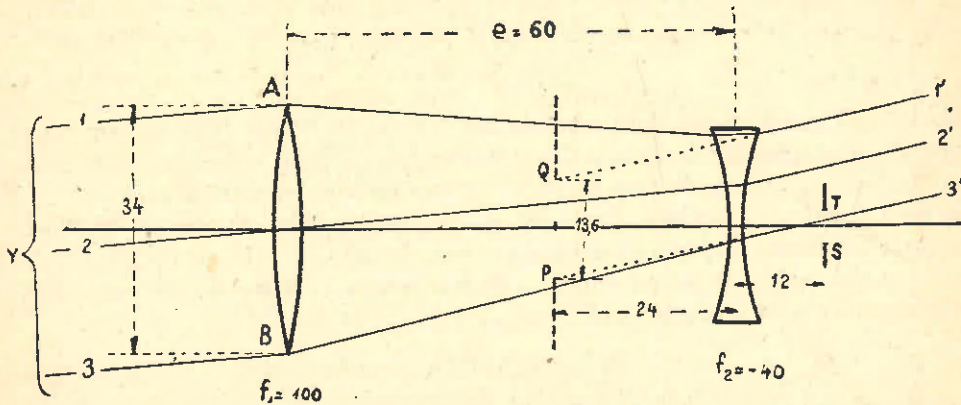


Fig. 47. — Se ilustra el camino de un haz de rayos paralelos que incide sobre el objetivo **AB** y del cual una parte llega a penetrar por la pupila **ST** del ojo, con el fin de establecer condiciones para la inclinación que pueden tener los haces capaces de llegar al ojo. Distancia  $a'$  entre el ocular y la imagen **PQ** del objetivo producida por el ocular:

$$a' = \frac{a - f}{af}$$

$$a' = \frac{60(-40)}{100} = -24 \text{ mm}$$

luego de refractarse en el objetivo y en el ocular, salen en forma de otro haz cilíndrico (1', 2', 3'), cuyo diámetro e inclinación contra el eje son diferentes del diámetro e inclinación del haz entrante. Cada rayo que al entrar pase por un punto del borde del objetivo (por ejemplo el rayo 1), una vez refractado en el objetivo, puede considerarse como un rayo emitido por un punto de dicho borde; por consiguiente, ese rayo, luego de refractarse en el ocular, debe tener una dirección tal que pase por la imagen del punto marginal considerado. Lo que implica que a la superficie cilíndrica que encierra todos los rayos entrantes y cuya directriz es el borde del objetivo, le corresponde un cilindro de rayos salientes, cuya directriz es la imagen (virtual) que el ocular produce del borde del objetivo. En la fig. 47, **PQ** representa un diámetro de esa imagen, cuya posición y tamaño hemos calculado en pág. 202 para los datos  $f_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $f_2 = -40 \text{ mm}$  y una distancia entre lentes de 60 mm.

Suponemos una pupila de ojo **ST** de un radio de 2 mm, ubicada a 12 mm detrás del centro óptico de la lente ocular. Como se desprende del cálculo efectuado en pág. 202, la imagen **PQ** tiene un radio de 6,8 mm y se encuentra a 24 mm delante del ocular. Podemos entonces aplicar a los diafragmas **PQ** y **ST** la fórmula (91) que nos da:

$$\omega_2 = \frac{R + r}{d} \cdot 57,3^\circ$$

Poniendo los valores  $R = 6,8$ ,  $r = 2$  y  $d = 24 + 12 = 36$ , resulta para el medio ángulo de campo aparente:

$$(92) \quad \omega_2 = \frac{6,8 + 2}{36} \cdot 57,3^\circ = 14^\circ$$

de lo cual concluimos: Para que alguna luz del objeto  $Y$  llegue a entrar al ojo, el haz de rayos paralelos saliente del ocular, no debe tener una inclinación contra el eje mayor de  $14^\circ$ , es decir, el campo aparente total es de  $28^\circ$ . El campo visual así calculado tiene una luminosidad máxima dentro de un cierto círculo alrededor del punto central. Fuera de este círculo, hasta los bordes mismos del campo, la luminosidad va disminuyendo (ver fig. 48). La magnitud del círculo de luminosidad máxima nos da la fórmula (90):

$$(93) \quad \omega_1 = \frac{6,8 - 2}{36} \cdot 57,3^\circ = 7,6^\circ$$

En base a los valores obtenidos en las ecuaciones (92) y (93) y aplicando la (87) para  $A = 2,5$ , podemos calcular el campo verdadero total del anteojo:

$$(94) \quad \frac{2 \cdot 14^\circ}{2,5} = 11,2^\circ$$

y el campo verdadero de luminosidad máxima:

$$(95) \quad \frac{2 \cdot 7,6^\circ}{2,5} = 6,1^\circ$$

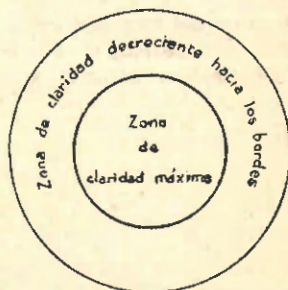


Fig. 48. — Se ilustra la zona de máxima claridad y la zona de claridad decreciente en el anteojo holandés.

Otra manera de calcular el campo del anteojo holandés. En lugar de establecer condiciones de inclinación (respecto al eje) para haces salientes del anteojo, podemos considerar los haces entrantes al sistema y establecer condiciones para que de tales haces llegue luz al ojo.

Para que un cilindro de rayos paralelos, salientes del anteojo, entre por la pupila  $ST$  del ojo, el correspondiente cilindro de rayos en el espacio objeto tiene que pasar por la imagen que el sistema del anteojo produce de la pupila  $ST$ . Calculemos entonces la posición y el tamaño de esa imagen.

El ocular produce de la pupila  $ST$  una imagen  $S'T'$ , cuya posición es dada por la fórmula (58) de pág. 87:

$$a' = \frac{af}{a-f}$$

en la cual tenemos para  $a = 12$  mm y  $f = -40$  mm, con lo que resulta:

$$(97) \quad a' = \frac{12 \cdot (-40)}{12 + 40} = -9,2 \text{ mm}$$

Para la magnitud de la imagen  $S'T'$  resulta según ecuación (59) de pág. 88:

$$S'T' = ST \cdot \frac{9,2}{12} = 4 \cdot \frac{9,2}{12} = 3,1 \text{ mm}$$

De la imagen  $S'T'$  el objetivo produce la imagen  $S''T''$  (fig. 49), cuya situación nos da la (58), pág. 87 con introducir para  $a = 69,2$  mm y  $f = 100$  mm.

Obtenemos:

$$(98) \quad a' = \frac{69,2 \cdot 100}{69,2 - 100} = -225 \text{ mm}$$

Para la magnitud de la imagen  $S''T''$  resulta:

$$(99) \quad S''T'' = S'T' \cdot \frac{225}{69,2} = 3,1 \cdot \frac{225}{69,2} = 10,1 \text{ mm}$$

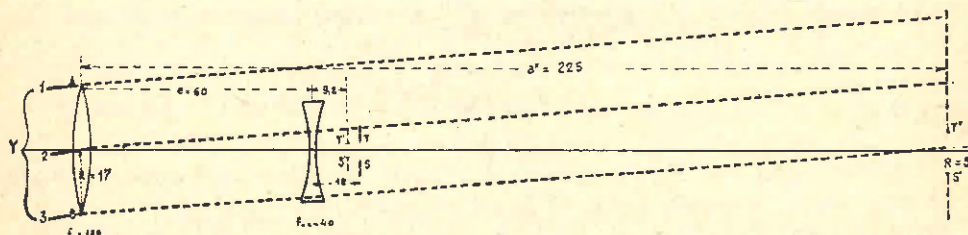


Fig. 49. — Otra manera de considerar un haz de rayos paralelos con el fin de establecer condiciones que debe satisfacer la inclinación de los mismos en el espacio objeto para hacer posible la llegada de luz al ojo.

Distancia  $a'$  entre el ocular y la imagen  $S''T''$  de la pupila (imagen producida por el ocular):

$$a' = \frac{12(-40)}{12 + 40} = -9,2 \text{ mm}$$

Distancia  $a'$  entre el objetivo y la imagen  $S''T''$  que el objetivo produce de  $S'T'$ :

$$a' = \frac{69,2 \cdot 100}{69,2 - 100} = -225 \text{ mm}$$

Tenemos entonces: Para que de un haz de rayos, procedente de un punto lejano Y llegue alguna luz al ojo, es necesario y suficiente que ese haz, antes de entrar al antejo, tenga una inclinación contra el eje tal que por lo menos algunos rayos del mismo, además de entrar al objetivo, tengan direcciones que pasen por la abertura  $S'T'$  (ver fig. 49). Podemos entonces aplicar a los diafragmas  $AB$  ( $= 2R$ ) y  $S'T'$  ( $= 2r$ ) la fórmula (91) que nos da el valor para el ángulo  $\omega_2$ :

$$(100) \quad \omega_2 = \frac{R + r}{d} \cdot 57,3^\circ$$

Poniendo en esta ecuación para  $R = 17$ ,  $r = 5$  y  $d = 225$  y multiplicando por 2, resulta para el ángulo de campo verdadero total:

$$(101) \quad 2\omega_2 = 2 \cdot \frac{17 + 5}{225} \cdot 57,3^\circ = 11,2^\circ$$

Y para el campo verdadero de luminosidad máxima la (90) nos da:

$$(102) \quad 2\omega_1 = 2 \cdot \frac{17 - 5}{225} \cdot 57,3^\circ = 6,1^\circ$$

Estos valores concuerdan con los obtenidos antes por las ecuaciones (94) y (95).

**Deducción de las fórmulas generales para el campo total y el campo de claridad máxima del anteojo holandés** (compuesto de lentes delgadas).

Suponemos el caso de que la pupila de salida  $PQ$  (fig. 47) del anteojo holandés es más grande que la pupila del ojo, que es el que generalmente se presenta en la práctica.

Las fórmulas (90) y (91) nos dan los medios ángulos del campo total y del campo de claridad máxima.

Llamando  $\omega'_2$  y  $\omega'_1$ , respectivamente, los medios ángulos de campo aparente total y de claridad máxima, la (91) nos da:

$$(103) \quad \omega'_2 = \frac{R + r}{d}$$

Sustituiremos por  $R$  el radio de la pupila de salida del anteojo,  $PQ/2$ , el que, según ecuación (84), es igual al radio de la pupila de entrada  $p$  (semidiámetro del objetivo) dividido por el aumento  $A$  (valor absoluto):

$$(104) \quad R = \frac{p}{|A|}$$

Para el radio  $r$  debe ponerse el radio  $p_o$  de la pupila  $ST$  del ojo.

La distancia  $d$  que separa  $PQ$  de  $ST$  se compone de dos segmentos,  $x$  y  $x_o$ , siendo:

$$(105) \quad d = x_s + x_o$$

donde  $x_s$  significa la distancia que media entre la pupila de salida  $PQ$  y el centro óptico del ocular, y  $x_o$  la distancia entre dicho centro y la pupila del ojo.

Expresando la cantidad  $x_s$  en función de  $e$  (fig. 47) y  $A$ , tenemos según (82):

$$(106) \quad x_s = \frac{e}{|A|}$$

con lo cual la (105) nos da:

$$(107) \quad d = \frac{e}{|A|} + x_o$$

Obtendremos entonces para el medio ángulo de campo aparente  $\omega'_2$ :

$$\omega'_2 = \frac{\frac{p_e}{|A|} + p_o}{\frac{e}{|A|} + x_o} \cdot \rho^\circ$$

$$(108) \quad \omega'_2 = \frac{p_e + p_o \cdot |A|}{e + x_o \cdot |A|} \cdot 57,3^\circ$$

y para el medio ángulo de campo aparente de claridad máxima  $\omega'_1$ :

$$\omega'_1 = \frac{\frac{p_e}{|A|} - p_o}{\frac{e}{|A|} + x_o} \cdot \rho^\circ$$

$$(109) \quad \omega'_1 = \frac{p_e - p_o \cdot |A|}{e + x_o \cdot |A|} \cdot 57,3^\circ$$

Para obtener los valores  $\omega_2$  y  $\omega_1$  correspondientes al campo verdadero, en vista de la razón:

$$|A| = \frac{\text{campo aparente}}{\text{campo verdadero}}$$

sólo falta dividir las (108) y (109) por  $|A|$ , con lo que resulta:

**Medio ángulo de campo verdadero  $\omega_2$ :**

$$(110) \quad \omega_2 = \frac{p_e + p_o \cdot |A|}{|A| (x_o \cdot |A| + e)} \cdot 57,3^\circ$$

**Medio ángulo de campo verdadero de claridad máxima  $\omega_1$ :**

$$(111) \quad \omega_1 = \frac{p_e - p_o \cdot |A|}{|A| (x_o \cdot |A| + e)} \cdot 57,3^\circ$$

(Muchas veces se prefiere expresar la magnitud del campo verdadero en milésimos, debiéndose a este efecto en las fórmulas (110) y (111) reemplazar el factor 57,3° por el número 1000.)

Con el fin de tener un gran campo, la (110) nos enseña que se debe acercar el ojo al ocular todo lo que se puede (reduciéndose así la cantidad  $x_o$ ) y efectuar la construcción del anteojo en tal forma que  $p_e$  resulte lo más grande posible y la cantidad  $e$  relativamente pequeña. La exigencia de un  $p_e$  grande implica un gran diámetro del objetivo y la exigencia de un  $e$  pequeño requiere un anteojo corto.

En los gemelos de caza es deseable, un campo grande, por lo cual se emplean objetivos de gran diámetro (fig. 50). Pero es claro que

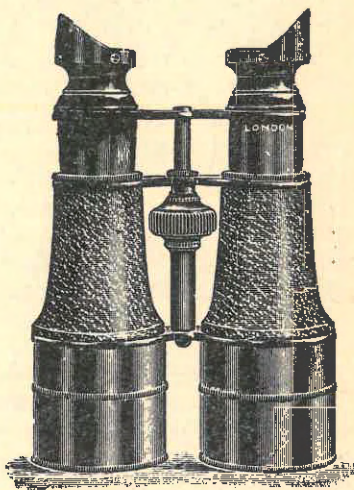


Fig. 50. — Gemelos holandeses de caja, con 50 mm de diámetro de objetivos y 4,5 aumentos y un campo de 3,8° o sea 60‰ (60 milésimos, 60 metros a 1000 metros).

en los gemelos los diámetros de objetivos tienen un cierto límite debido a la distancia entre los dos ojos humanos.

Mientras que en el anteojo astronómico el campo verdadero tiene como magnitudes determinantes sólo la distancia focal del objetivo y el diámetro del diafragma de campo, en cambio, como lo demuestran las fórmulas (110) y (111), el campo del anteojo holandés depende de un mayor número de elementos, encontrándose entre ellos algunos (posición y tamaño de la pupila del ojo) situados fuera del anteojo.

En las fórmulas (110) y (111) las cantidades que caracterizan al anteojo son  $A$ ,  $e$  y  $p_e$ . Prescribir para un anteojo holandés las cantidades  $A$  y  $e$  (el aumento y el largo), equivale a prescribir las distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  del objetivo y del ocular, porque éstas dependen de  $A$  y  $e$  por medio de las relaciones:

$$\frac{f_1}{f_2} = A$$

y

$$f_1 + f_2 = e$$

de las cuales resulta:

$$\frac{f_1}{A} = e - f_1, \quad \text{luego: } f_1 = \frac{A}{A+1} e$$

$$A \cdot f_2 = e - f_2, \quad \text{" } f_2 = \frac{1}{A+1} e$$

Otra diferencia entre el campo del anteojo astronómico y el campo del anteojo holandés reside en el hecho de que el campo del último no es un círculo de claridad uniforme, y que, por lo contrario, se compone de un círculo central de claridad máxima y un anillo de claridad decreciente hacia afuera (ver fig. 48).

Trataremos todavía de la claridad del anteojo holandés. Consideremos primeramente la claridad puntual  $C_p$ .

Suponemos que el objeto luminoso (estrella) se encuentre en la parte central del campo (zona de máxima luminosidad). Entonces la pupila  $ST$  (fig. 47) se encuentra completamente dentro del cilindro ( $1', 2', 3'$ ) de rayos salientes. Como la sección del cilindro ( $1', 2', 3'$ ) es  $A^2$  veces más pequeña que la sección del cilindro entrante ( $1, 2, 3$ ), el ojo armado con anteojo recibe  $A^2$  veces más luz de la estrella que la que recibiría a simple vista, es decir, la claridad puntual  $C_p$  es:

$$(112) \quad C_p = A^2$$

En cuanto a la claridad superficial  $C$ , siempre fijándonos en la figura 47, nos damos cuenta de que un elemento superficial objeto perteneciente a la zona central también envía  $A^2$  veces más luz al ojo armado con anteojo que al ojo desnudo. Pero como la extensión de la imagen producida sobre la retina es también  $A^2$  veces mayor cuando se observa con anteojo, en comparación con el tamaño de la imagen recibida con ojo desnudo, resulta que la claridad de la imagen en la retina es igual, indiferentemente si se observa con anteojo holandés o a simple vista, es decir, tiene claridad superficial:

$$(113) \quad C = 1$$

En estas consideraciones sobre la claridad hemos hecho caso omiso de las pérdidas de luz producidas por la absorción, que tiene siempre lugar en cierta medida (15 % a 18 %) cuando los rayos atraviesan lentes.

De las ecuaciones (112) y (113) se desprende que en un anteojo holandés como el considerado en las figuras 41, 47 y 49, con aumentar el diámetro del objetivo no se conseguiría mejorar en nada la claridad de la zona central del campo; sólo se aumentaría la magnitud del campo, como lo demuestra la fórmula (110). A este respecto también el anteojo holandés difiere **fundamentalmente** del anteojo astronómico.

## 20. Anteojo prismático.

El anteojo astronómico tiene el inconveniente de dar imágenes invertidas; el anteojo terrestre, fuera de la incomodidad causada por la mayor longitud, tiene el **inconveniente** de una pérdida mayor de luz debido a la absorción en las lentes intercaladas; finalmente, el anteojo holandés da solamente un campo muy pequeño cuando se le quiere construir con aumentos algo grandes como los comúnmente empleados en los anteojos astronómicos, careciendo, además, estos campos de luminosidad uniforme en toda su extensión.

Todos estos inconvenientes han sido evitados en el anteojo prismático introducido en la técnica por la casa **Zeiss**.

Después de nuestras explicaciones dadas en págs. 28 y 29 sobre la teoría del anteojo prismático, nos podemos limitar a aclarar algunos puntos de carácter práctico.

Según dijimos en la citada referencia, tal anteojo se utiliza principalmente en **gemelos**. Los **gemelos de teatro** (con aumento hasta 4) y los **gemelos de campo** (con aumento hasta 12) están en cada caso constituidos por dos anteojos con ejes paralelos entre sí, y cuyos oculares están separados por la distancia interpupilar. Y como tal distancia es variable de un observador a otro, la distancia de los oculares debe poder ajustarse a la distancia interpupilar del observador, lo que se consigue con girar los anteojos alrededor de un eje paralelo a los mismos.

Para adaptar cada anteojo a las condiciones de acomodación de los ojos, los oculares pueden ser desplazados en el sentido de los ejes de los anteojos, lo que permite un enfoque perfecto para cada ojo.

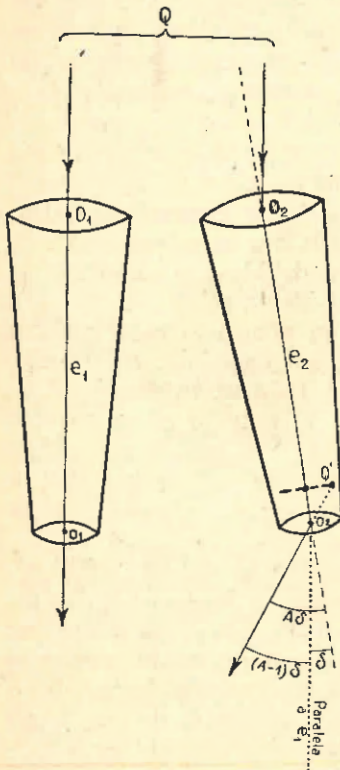
Los gemelos tienen ante los anteojos simples la **ventaja** de que con aquéllos se aprovecha la **visión binocular**, que permite percibir el **relieve** de los objetos y apreciar con notable seguridad distancias relativas que ellos tienen con respecto al observador (**efecto plástico**). Pero para que dos anteojos unidos en gemelos produzcan realmente el efecto plástico buscado, es necesario que se satisfagan ciertas **condiciones relativas a la dirección de sus ejes**. Esos ejes deben ser **paralelos** entre sí (por lo menos muy aproximadamente), para que objetos muy lejanos sean vistos con los ejes de ojos paralelos, igualmente como ocurre en la visión a ojo desnudo. Si la condición del paralelismo de los ejes de los gemelos no está perfectamente lograda, y si dichos ejes forman entre sí un pequeño ángulo  $\delta$  (fig. 51), el efecto plástico resulta dificultado y a veces anulado completamente. Si los ejes están situados en un plano formando el pequeño ángulo  $\delta$ , dos rayos principales procedentes de un punto objeto lejano **Q**, al salir de los oculares, forman un ángulo:

(114)

 $(A - 1) \delta$ 

donde  $A$  indica el aumento de los anteojos.

En efecto, si en la fig. 51 el anteojo de la izquierda, de eje  $e_1$ , se halla dirigido a un punto lejano  $Q$  y que el eje  $e_2$  del anteojo de la derecha



forma con  $e_1$  el angulito  $\delta$ , el rayo  $QO_2$  forma con el eje  $e_2$  también el ángulo  $\delta$ , y la imagen  $Q'_2$  de  $Q$  emite a través del centro del ocular  $O_2$  un rayo (correspondiente al  $QO_2$ ) que forma con el eje  $e_2$  el ángulo  $A\delta$ , y con una paralela al eje  $e_1$  el ángulo  $(A-1)\delta$ , es decir, los rayos  $QO_1$  y  $QO_2$ , después de pasar los anteojos, forman entre sí el ángulo  $(A-1)\delta$ .

Para este ángulo existen ciertas tolerancias determinadas por experiencias prácticas: Si los ejes de los anteojos están situados en un plano y **convergen** hacia adelante (como en fig. 51), se puede permitir para  $(A-1)\delta$  valores hasta  $3^\circ$ . Si en las mismas condiciones los ejes **divergen** hacia adelante, el valor de  $(A-1)\delta$  no debe exceder de  $1^\circ$ . Si los dos ejes no se hallan en un plano, y sí, en una posición aproximadamente horizontal de los gemelos, uno de los ejes tiene una inclinación que difiere en  $\delta$  de la inclinación del otro, se permite para  $(A-1)\delta$  un valor máximo de sólo  $0,5^\circ$ ; porque, de sobrepasarse este valor, los ojos ya no consiguen reunir en una sola las dos imágenes proporcionadas por los gemelos.

Otra condición que deben satisfacer los dos anteojos de gemelos es la de no dar imágenes torcidas la una respecto a la otra (o sea giradas alrededor de los ejes de salida). De existir tal defecto, las imágenes presentarían errores de altura en los bordes izquierdo y derecho y errores laterales en los bordes superior e inferior.

Todas las deficiencias mencionadas se logran eliminar (o por lo menos reducir) con modificar convenientemente la posición relativa de los objetivos y de los prismas, lo que, naturalmente, constituye una operación delicada que las casas de óptica generalmente efectúan con ayuda de aparatos especiales.

El tamaño de cada uno de los anteojos que componen un par de gemelos queda determinado por el diámetro del objetivo, el que determina también la magnitud de los prismas. Tal diámetro, es, como sabemos, igual al diámetro de la pupila de salida del anteojo multiplicado por el aumento del anteojo, es decir:

$$2p_e = 2p_s \cdot A$$

[ver ecuación (8), pág. 154 y fig. 7 de pág. 157]. La práctica enseña que para observaciones diurnas con muy buena luminosidad bastará generalmente una pupila de salida de un diámetro de  $2p_s = 2,5$  mm, mientras que para observaciones nocturnas u observaciones en el crepúsculo, con muy mala luminosidad del ambiente (circunstancias que a menudo se presentan en la caza dentro de bosques y en las operaciones militares), se prefieren pupilas de salida de unos 5 a 7 mm de diámetro.

Considerando los instrumentos de figs. 52, 53 y 54, daremos como elementos de orientación algunos datos constructivos.

Los gemelos de fig. 52 de 8 aumentos y 18 mm de diámetro de los objetivos, tienen una pupila de salida de 2,25 mm de diámetro, siendo por ello la claridad de los mismos suficiente sólo para observaciones diurnas con muy buena luminosidad.

Los gemelos prismáticos de fig. 53, construídos por la casa Zeiss, tienen también 8 aumentos, pero objetivos de 40 mm de diámetro, por consiguiente, una pupila de salida de 5 mm. El campo verdadero de estos gemelos es de

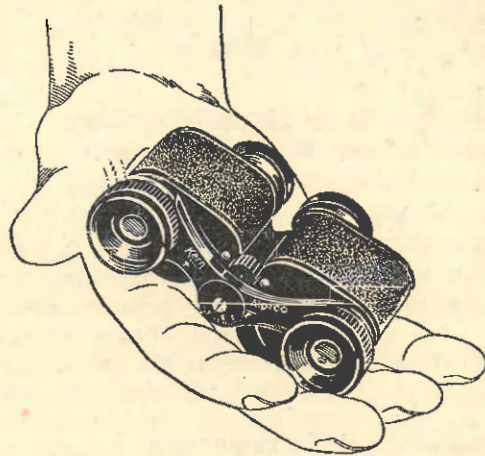


Fig. 52. — Gemelos prismáticos (construídos por la casa Kern) de 8 aumentos con 18 mm de diámetro de los objetivos. La distancia entre los centros de los objetivos es menor que la distancia entre los centros de los oculares. El enfoque se realiza por medio de un mecanismo central.

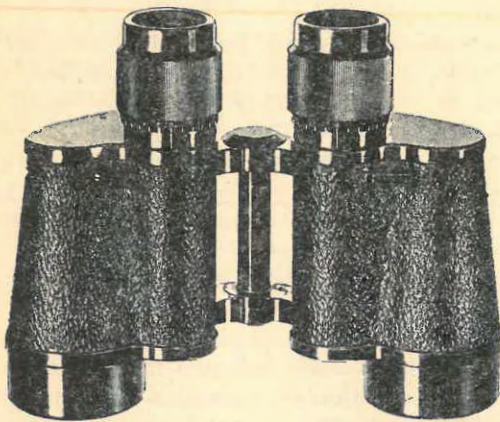


Fig. 53. — Gemelos prismáticos (construídos por la casa Zeiss) de 8 aumentos, con pupila de salida de 5 mm y un campo verdadero de  $8,75^\circ$  o sea 153 ‰. La distancia entre los centros de los objetivos es mayor que la distancia entre los oculares.

$8,75^\circ$  o sea 153 ‰ (153 milésimos).

Para el campo aparente  $2\alpha$  de este tipo de gemelos resulta entonces según (87):

$$2\alpha = 2\beta \cdot A = 8,75^\circ \cdot 8 = 70^\circ$$

que llama la atención por su magnitud.

Los gemelos de fig. 54 tienen 6 aumentos con un diámetro de los objetivos de 30 mm, luego una pupila de salida de 5 mm.

Los gemelos de este tipo tienen un campo verdadero de  $8,3^\circ$  o sea de 145 ‰. Es decir, a pesar de su mayor aumento, el campo de los gemelos representados en fig. 53 resulta ser algo mayor que el campo del tipo de fig. 54.

La circunstancia de que en los gemelos prismáticos la distancia entre los dos objetivos puede hacerse considerablemente mayor que la distancia interocular, obteniéndose un mayor efecto plástico, fué felizmente aprovechada por el físico **E. Abbe** en las construcciones de tales gemelos iniciadas por la casa **Zeiss** en el año 1892.

**Sensación de la distancia (profundidad o relieve de los objetos).** La sensación de la distancia (en profundidad) el hombre la obtiene principalmente gracias a la **visión binocular**, la que proporciona en los dos ojos imágenes algo diferentes entre sí. Mientras que un solo ojo recibe de los objetos del espacio una imagen que es la proyección de ellos sobre un plano, en la visión binocular, en cambio, el cerebro es capaz de reunir las dos imágenes algo diferentes en una sola de tal naturaleza que de la misma se obtiene directamente la sensación de las distancias (en profundidad) de los objetos.

#### Caso de la visión monocular.

Sin embargo no hay que creer que un tuerto sea completamente incapaz de apreciar distancias relativas de los objetos del espacio. Con aprovechar ciertas ayudas circunstanciales que se le presentan, puede en muchos casos apreciar con bastante seguridad distancias relativas de objetos vistos. Si, por ejemplo, dos objetos se hallan situados en el espacio en tal forma que el uno tapa parcialmente al otro, también el tuerto sabrá que el primero se halla más cerca que el segundo.

Cuando los dos objetos no tienen dimensiones tan grandes como para taparse parcialmente, en muchos casos con mover el ojo se consigue **variar la paralaje** (o sea el ángulo bajo el cual se ven los objetos) en suficiente medida como para darse cuenta de las distancias relativas (en profundidad) de los objetos. (Compárese el modo cómo se examina la paralaje de un anteojo, ver N° 9 de págs. 156 y 157.)

Otra ayuda importante para la apreciación de la distancia en la visión monocular reside en la observación de la dirección a objetos, de los cuales se sabe de antemano o por la experiencia que se hallan situados sobre una línea recta o un plano conocido. Cuando el ojo de un observador se encuentra en posición elevada sobre un tal plano horizontal (piso, planicie, etc.), este observador sabe que los puntos de dicho plano vistos con mayor depresión son los más cercanos. Las distancias de puntos alineados (hileras de árboles, postes de telégrafo o de alambrados, etc.) se perciben con buena seguridad por la dirección en que esos puntos aparecen a un ojo situado fuera de la alineación.

Otro recurso, aunque menos seguro, para la apreciación de distancias por un solo ojo reside en la comparación de magnitudes angulares, bajo las cuales nos aparecen objetos de dimensiones conocidas por la experiencia (ta-

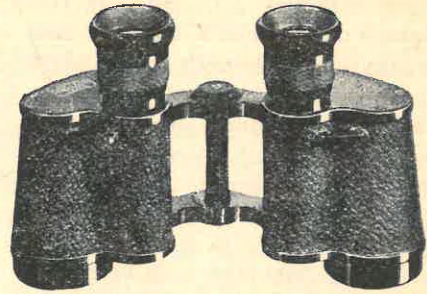


Fig. 54. — *Gemelos prismáticos (construidos por la casa Zeiss) de 6 aumentos, con una pupila de salida de 5 mm y un campo verdadero de 8,3° o sea 145%.*

maño de un hombre, de una casa, de un árbol); otro recurso lo constituye la mayor o menor claridad con que se distinguen detalles de los objetos vistos (inscripciones, esferas de relojes de torres de iglesias, etc.).

Sobre la apreciación de la distancia en el paisaje influye además la llamada **perspectiva aérea**; denominándose así el efecto de la bruma de la atmósfera, la que hace que se presenten con **colores distintos** las cadenas de montañas según su distancia; que las más lejanas aparezcan con un matiz azulado, con contornos confusos y sin nitidez en los contrastes de luz y sombra. Tal efecto es debido a la desigual absorción de los colores cuando los rayos de luz atraviesan las capas del aire más o menos cargadas de vapor de agua.

Por otra parte nos formaremos un juicio sobre la magnitud de los objetos de acuerdo a la distancia a la cual nos aparecen. Visto un objeto bajo un determinado ángulo, lo juzgamos de tanto mayor tamaño cuanto mayor nos aparece ser su distancia. Cuando con tiempo brumoso vemos sin detalles una montaña cercana, la creemos más lejos y por ende más alta que de costumbre. Inversamente, las montañas nos aparecen más cercanas con atmósfera bien transparente cuando excepcionalmente somos capaces de distinguir en ellas detalles que por lo común no podemos percibir.

No obstante se presentan fácilmente situaciones en que los recursos mencionados no son suficientes para apreciar distancias con la visión monocular. Recuérdese la gran dificultad con que se enhebra una aguja mirando con un solo ojo, o la inseguridad con que un tuerto vierte un líquido dentro de un vaso desde alguna altura. En tales casos es eficaz solamente la **visión binocular**.

En la visión binocular los dos ojos ven simultáneamente un cierto cono del espacio, y debido a las **pequeñas diferencias** que acusan las imágenes producidas en los ojos, el hombre es capaz de apreciar directamente distancias relativas de los objetos observados.

**Perspectiva principal (visión directa) y perspectiva complementaria (visión indirecta).** Suponemos que el observador mira con un ojo (visión monocular). La parte del espacio que tiene delante, le aparecerá entonces proyectada sobre un plano. Pero el ojo verá en tales condiciones con claridad sólo aquella parte del objeto (no muy extendida) a la cual dirige la mirada, es decir, a la cual dirige el eje visual (ver pág. 117), y cuya imagen se forma en la mancha amarilla. Esta parte central de la imagen recibida por la retina, la llamamos **perspectiva principal**. También decimos que esa parte central de la imagen es la parte recibida por **visión directa**. Alrededor de las perspectivas principales (y siempre con ojo sin mover) vemos todavía una amplia zona cuya imagen no nos aparece con entera claridad. La imagen de esa zona la llamamos **perspectiva complementaria**. Decimos que la imagen de los objetos de esta zona es recibida por **visión indirecta**. El campo total así abarcado es bastante amplio (ver pág. 118); la magnitud de la perspectiva complementaria tiene utilidad, especialmente cuando se necesita percibir a buen tiempo la presencia de objetos cercanos en movimiento, lo que tiene importancia en varias clases de deportes (tenis, fútbol), en combates a corta distancia y en situaciones (calles) de mucho tráfico, que una persona quiere atravesar. En todos estos casos la aparición de un objeto movido en la perspectiva complementaria, es una señal que nos

hace tomar una medida adecuada para nuestra ventaja o nuestra seguridad, induciéndonos muchas veces también a dirigir nuestra mirada en determinada dirección a fin de distinguir mejor el objeto en cuestión.

**Visión monocular con anteojo.** Sabemos que cuando observamos a través de un anteojo de  $A$  aumentos, éste produce de un objeto lejano una imagen virtual situada también a bastante distancia. Pero tal imagen nos aparece bajo un ángulo  $A$  veces más grande que el ángulo bajo el cual aparece el objeto visto a ojo desnudo. Este aumento del ángulo visual nos da la sensación del **acercamiento del objeto**, sensación que se intensifica por la mayor cantidad de detalles que la imagen agrandada nos permite distinguir.

Por el contrario, si miramos desde el objetivo a través de un anteojo de  $A$  aumentos, observando un conjunto de objetos, se nos presenta una imagen achicada y alejada de esos objetos. Los ángulos entre visuales a diferentes puntos objetos resultan entonces  $A$  veces más pequeños que los ángulos correspondientes bajo los cuales esos puntos objetos aparecen al ojo desnudo.

Trataremos ahora la visión binocular sin anteojo.

**Visión binocular sin anteojo. Visión estereoscópica.** La visión binocular de objetos no muy lejanos nos permite la apreciación de las distancias relativas de los diversos puntos que los componen.

(Cuando miramos con los dos ojos hacia dos puntos  $P$  y  $Q$  (fig. 55) del espacio (no demasiado lejanos y que se suponen que se presentan en un plano horizontal con igual elevación), se forman en la retina del ojo izquierdo las imágenes  $P_1$  y  $Q_1$  y en la retina del ojo derecho las imágenes  $P_2$  y  $Q_2$ .

Llamamos  $O_1$  y  $O_2$  a los centros ópticos de los cristalinicos de los dos ojos; entonces los dos ángulos  $PO_1Q = p_1$  y  $PO_2Q = p_2$  son por lo general algo diferentes. Por consiguiente, serán también algo diferentes entre sí los segmentos imágenes  $P_1Q_1$  y  $P_2Q_2$ .

(En la figura 55, por ejemplo, es algo más grande el segmento  $P_1Q_1$  que el segmento  $P_2Q_2$ .)

El conjunto de los nervios ópticos de los dos ojos es muy sensible para la diferencia que hay entre ambos segmentos imágenes, y el cerebro deduce de ella inconscientemente la sensación de una diferencia de las distancias de los puntos  $P$  y  $Q$  (es decir, se ve al punto  $P$  más distante que  $Q$ ). Se produce el llamado "efecto estereoscópico" o sea la "visión estereoscópica", que consiste en hacernos ver directamente el espacio y la distribución de los objetos en el mismo.

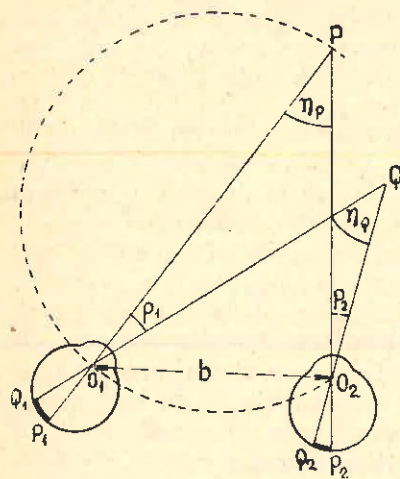


Fig. 55. — Se ilustran las imágenes (algo diferentes) que de un segmento  $PQ$  se forman en las retinas de los dos ojos.

$$p_1 + \eta_P = p_2 + \eta_Q$$

$$p_1 - p_2 = \eta_Q - \eta_P$$

Que el efecto estereoscópico es causado por la diferencia de las dos imágenes producidas en las retinas de los dos ojos, se comprueba fácilmente con el siguiente experimento:

Mírese a un conjunto de hilos telegráficos paralelos, colocándose de tal manera que la línea unión de los ojos sea paralela a los hilos. Luego colóquese de tal manera que la línea unión de los ojos sea perpendicular a los hilos mirando a éstos nuevamente. Con la primera posición de los ojos le va a ser imposible al observador ver en qué relación de distancias se hallan los diferentes hilos; en cambio, en la segunda posición se da cuenta en seguida con perfecta seguridad de las diferencias de profundidad de los diversos hilos. Es que en el primer caso se producen en las dos retinas dos imágenes completamente iguales de líneas paralelas, que no pueden producir ningún efecto estereoscópico, mientras que con la segunda posición de los ojos las dos imágenes en las retinas son algo diferentes y, por lo tanto, son aptas para producir el efecto estereoscópico.

Llamamos al ángulo  $O_1PO_2 = \eta_P$  la **paralaje binocular** del punto **P** y  $\eta_Q$  la paralaje del punto **Q**. La experiencia demuestra que la capacidad del hombre para percibir una diferencia de distancias de los puntos **P** y **Q** depende esencialmente de la diferencia de las dos paralajes binoculares  $\eta_P$  y  $\eta_Q$ . Cuando esa diferencia, que podemos designar por  $\Delta\eta$ , haya bajado de un **valor límite**  $\delta = 10''$  (\*) (en valor absoluto), los ojos dejan de percibir una diferencia de distancia entre **P** y **Q**, es decir, cesa la visión estereoscópica.

Es de advertir que la diferencia:

$$\Delta\eta = \eta_Q - \eta_P$$

es igual a la diferencia:

$$= p_1 - p_2$$

como se desprende de la fig. 55, de modo que si  $\Delta\eta$  baja de cierto límite, también es inferior a este límite la diferencia  $p_1 - p_2$ , y las imágenes  $P_1Q_1$  y  $P_2Q_2$  sobre las retinas ya no se presentan con una diferencia en medida necesaria para que aquélla sea apreciada.

Suponemos que los puntos  $O_1$ ,  $O_2$ , **P** y **Q** pertenecen a un plano; de la Geometría Elemental se sabe entonces que todos los puntos con la misma paralaje que el punto **P** se hallan sobre una circunferencia que pasa por los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y **P**.

Llamamos **b** a la distancia interpupilar  $O_1O_2$ , para la cual aceptamos el **valor medio** de 65 mm.

Un punto **P** de paralaje  $\eta_P = 10''$  y situado frente a los ojos (por ejemplo sobre la perpendicular en el medio de  $O_1O_2$ ) tiene de  $O_1O_2$  la distancia:

$$(115) \quad R = \frac{b \cdot 260 \cdot 265}{10}$$

la que para  $b = 0,065$  metros es igual a **1300 metros** aproximadamente. Como un punto en el infinito da la paralaje binocular igual a cero, a un punto situado a 1300 metros apenas lo notamos como más próximo que un punto situado en el plano infinito. A la magnitud  $R = 1300$  metros se le llama **radio del campo estereoscópico**. Un hombre que mira a su alrededor,

(\*) Ver: *Hering: Límites de la agudeza visual*, en *Verhandlungen der saechsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1889.

por el efecto estereoscópico puede apreciar diferencias entre distancias de objetos solamente cuando éstos o algunos de ellos se hallan dentro de ese radio; los objetos situados fuera del mismo se ven proyectados sin relieve sobre un plano.

Si consideramos un punto **P** situado frente a los ojos a la distancia **D** de los mismos, su paralaje binocular es:

$$(116) \quad \eta = \frac{b}{D}$$

Diferenciando esta fórmula, se obtiene:

$$(117) \quad d\eta = -b \frac{dD}{D^2}$$

Si en lugar de las diferenciales  $d\eta$  y  $dD$  introducimos **diferencias finitas** aunque relativamente pequeñas ( $\Delta D$  pequeña en comparación con **D**), tenemos siempre muy aproximadamente:

$$(118) \quad \Delta\eta = -b \frac{\Delta D}{D^2}$$

Si por  $\Delta\eta$  entendemos el valor mínimo  $\delta = 10''$  que debe tener la diferencia de paralajes de dos puntos para ser vistos en profundidad, la magnitud  $\Delta D$  representa la distancia mínima que deben tener entre sí los dos puntos para que produzcan el efecto estereoscópico. Si en la (118) suponemos  $\Delta\eta$  constante =  $10''$ , y la distancia **D** variable, se desprende de la (118) que la  $\Delta D$  **varía proporcionalmente al cuadrado de D**.

Resolviendo la (118) respecto a  $\Delta D$ , tenemos:

$$(119) \quad \Delta D = -\frac{\Delta\eta \cdot D^2}{b}$$

Por ejemplo, para  $\Delta\eta = 10''$ , **D** = 20 m y **b** = 0,065 m, se obtiene:

$$(120) \quad \Delta D = -0,30 \text{ m}$$

Para que la visión binocular a ojo desnudo pueda notar una diferencia en profundidad entre objetos situados a unos 20 metros de distancia, es necesario que disten entre sí por lo menos en 30 cm.

Si los dos puntos estuvieran situados 5 veces más lejos, es decir, a unos 100 metros de distancia, sería necesario que distaran entre sí 25 veces más, es decir, unos 7 a 8 metros para que el observador notara la diferencia en profundidad.

La ecuación (118) nos permite hacer todavía la siguiente consideración:

Si mantenemos invariable la diferencia  $\Delta D$  de las distancias a dos puntos **P** y **Q**, pero acercando a los ojos a los dos puntos conjuntamente, la diferencia de paralajes  $\Delta\eta$  **crece en medida inversamente proporcional al cuadrado de la distancia media D**. Si suponemos dos puntos **P** y **Q** a 105 y 95 metros de distancia, respectivamente (es decir, a una distancia media de 100 m), y otros dos puntos **P'** y **Q'** a 55 y 45 metros de distancia, respectivamente (o a una distancia media de 50 m), el segundo par de puntos nos dará una diferencia de paralajes binoculares 4 veces más grande que el primer par de puntos.

En efecto, para la distancia interpupilar de 65 mm, resulta:

$$\eta_P = \frac{0,065 \cdot 206\,265''}{105} = 127,7''$$

$$\eta_{P'} = \frac{0,065 \cdot 206\,265''}{55} = 243,8''$$

$$\eta_Q = \frac{0,065 \cdot 206\,265''}{95} = 141,1''$$

$$\eta_{Q'} = \frac{0,065 \cdot 206\,265''}{45} = 297,9''$$

$$\eta_Q - \eta_P = 13,4''$$

$$\eta_{Q'} - \eta_{P'} = 54,1''$$

Se ve que la diferencia de paralajes binoculares  $\eta_{Q'} - \eta_{P'}$  es muy aproximadamente 4 veces mayor que la  $\eta_Q - \eta_P$ , lo que significa que la diferencia de profundidad de los puntos  $P'$  y  $Q'$  se percibe con una precisión 4 veces mayor que la de los puntos  $P$  y  $Q$ .

Para aumentar el efecto estereoscópico de un espacio que contiene objetos presentados a la vista, o sea para mejorar la capacidad del hombre de reconocer diferencias de profundidad de los objetos, existen dos medios:

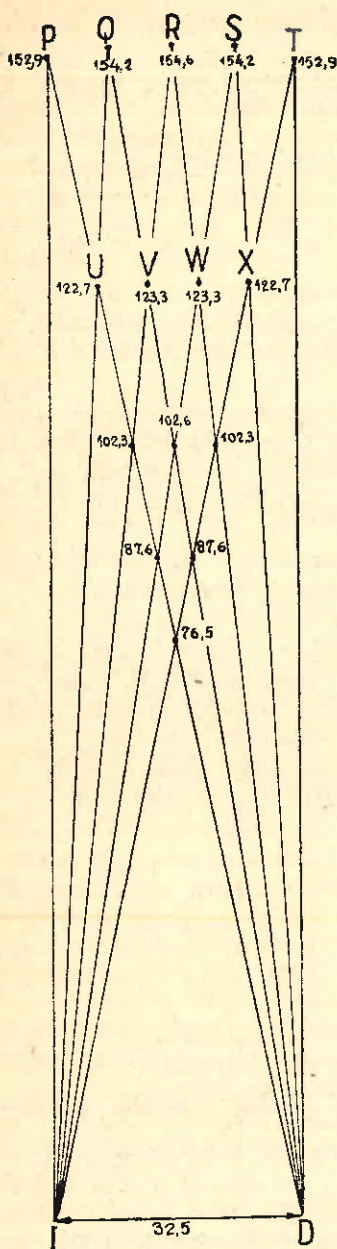
- 1) Se arman ambos ojos con anteojos de ejes paralelos y de cierto aumento  $A$ .
- 2) Por medio de reflexiones convenientes se producen imágenes de objetos como las verían dos ojos con mayor distancia interpupilar.

Consideremos ahora el primero de esos medios.

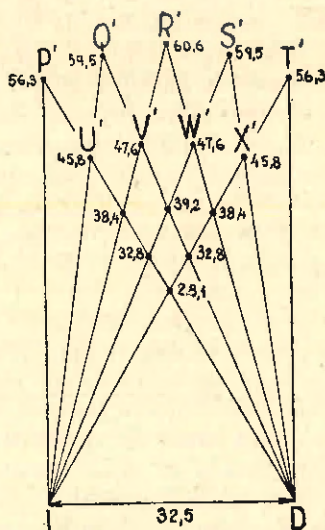
En la fig. 56A consideramos un cierto número de puntos lejanos  $P, Q, R, S, T, U, V$ , etc. situados en el espacio frente a los ojos  $I$  y  $D$ . Para mayor sencillez suponemos los puntos  $P$  y  $T$  situados, respectivamente, sobre las perpendiculares trazadas por  $I$  y  $D$  a la línea unión de los ojos.

Además hemos supuesto que los puntos objetos están repartidos en el espacio de tal manera que los ángulos  $PIQ = PIU, QIR = VIU, RIS, \dots, PDQ = UDV, QDR, \dots$  sean todos iguales. En fig. 56A esos ángulos tienen todos el valor de  $3^\circ$ . En realidad deberían hacerse mucho más pequeños, lo que no hicimos para agrandar demasiado la figura. La diferencia en profundidad de la hilera de puntos  $P, Q, R, S, T$ , y de la hilera  $U, V, W, X$  es percibida por los ojos desnudos debido a las diferencias de paralajes binoculares, por ejemplo la  $\eta_U - \eta_P$  (ángulo  $IUD$  menos ángulo  $IPD$ ), que en la fig. 56A es igual a  $3^\circ$ .

Armemos ahora los dos ojos con anteojos de  $A$  aumentos, cuyos ejes sean paralelos y coincidan respectivamente con las direcciones  $IP$  y  $DT$ . Con el ojo izquierdo se verá entonces al punto  $P$  en algún punto  $P'$  situado sobre la dirección  $IP$ . Igualmente, con el ojo derecho se verá con el anteojo al punto  $T$  en algún punto  $T'$  de la recta  $DT$ . Pero el punto  $P$  se presenta al ojo derecho armado en una dirección tal que el ángulo  $PDT'$  (fig. 56B) es  $A$  veces más grande que el ángulo  $PDT$ , bajo el cual el ojo desnudo ve los puntos  $P$  y  $T$ . La mayor magnitud del ángulo  $PDT'$  en comparación con  $PDT$  trae como consecuencia el hecho de que con el anteojo se ve el punto  $P$  aproximadamente  $A$  veces más cerca que a simple vista. Cosa análoga sucede con todos los puntos  $Q, R, \dots, U, V, \dots$  del campo visual. La visión con anteojo acerca así las hileras de puntos considerados ( $P, Q, R, S, T$ , y  $U, V, W, X$ , etc.), no solamente a los ojos sino también entre sí a manera de bastidores de teatro, pero sin modificar prácticamente las distancias transversales (por ejemplo  $P'T' = PT$ ).



Escala 1 : 2  
Fig. 56A



Escala 1 : 2  
Fig. 56B

Se ilustra la visión binocular con ojos desnudos (fig. 56A) y con anteojo de aumento  $A = 2,5$  (fig. 56B) de un cierto espacio que contiene diversos puntos objetos.

Los números agregados a los puntos expresan las distancias que éstos tienen en el dibujo a la línea unión  $ID$  de los ojos.

Pasamos ahora a considerar la influencia del anteojo sobre la facultad de percibir diferencias en profundidad de los diversos puntos del campo visual. Fijándonos en las figs. 56A y 56B, notamos sin dificultad que la diferencia de paralajes binoculares de dos puntos de fig. 56B (por ejemplo  $P'$  y  $U'$ ) es  $A$  veces mayor que la diferencia de paralajes de los puntos correspondientes ( $P$  y  $U$ ) de la fig. 56A.

(En la fig. 56A la diferencia de paralajes,  $IUD - IPD$ , es de  $3^\circ$ , mientras que en fig. 56B la correspondiente diferencia de paralajes es de  $7,5^\circ$ .)

Por consiguiente, con el anteojo vemos las diferencias en profundidad con una precisión  $A$  veces más grande que a simple vista.

Esto mismo se desprende también fácilmente de la siguiente consideración: Si en la fig. 56A se acercara a los ojos el segmento  $PU$  (sin variarlo), reduciendo su distancia a los ojos a la  $A$ -ésima parte, la diferencia de profundidad de los puntos  $P$  y  $U$  se percibiría con una precisión  $A^2$  veces mayor (según lo demostrado en págs. 220 y 221). Pero como el anteojo, además de acercar al segmento  $PU$  (fig. 56A), haciéndolo ver en  $P'U'$  (fig. 56B), lo achica  $A$  veces, resulta que con el anteojo el efecto estereoscópico no es  $A^2$  veces sino solamente  $A$  veces más fuerte que a simple vista.

Pasamos ahora a considerar el segundo de los medios que existen para aumentar el efecto estereoscópico. Este medio consiste en emplear

reflexiones convenientes para producir imágenes como las verían dos ojos a mayor distancia interpupilar.

**Consideraciones preparatorias.** Sean  $P, Q, R$  (fig. 57) puntos objetos, de los cuales la retina de un ojo  $I$  recibe una imagen cuando no existe algún objeto opaco interpuesto entre el ojo y dichos puntos. Intercalaremos ahora un espejo  $EE$  de tal modo que forme un ángulo de  $45^\circ$  con la recta  $IP$ , y sea  $X$  la intersección de esta recta con el espejo. Entonces el rayo  $PX$  es reflejado hacia un punto  $I'$ , siendo recto el ángulo  $PXI'$ . Hagamos  $XI' = XI$ . Entonces la retina de un ojo colocado en  $I'$  recibirá una imagen de  $P, Q, R$ , que difiere de la primeramente recibida por el ojo  $I$  solamente en que se halla invertido derecho e izquierdo. El ojo  $I'$  ve los puntos objetos en los lugares  $P', Q', R'$ , que son simétricos de  $P, Q, R$  con respecto al plano del espejo  $EE$ .

Coloquemos ahora entre  $X$  e  $I'$  un segundo espejo  $E'E'$  que sea paralelo al espejo  $EE$ . Sea  $Y$  el punto en que el rayo  $XI'$  incide sobre el espejo  $E'E'$ . Entonces este rayo es otra vez desviado en  $90^\circ$  y se dirige hacia el punto  $I''$ . Hagamos  $YI'' = YI'$ . Entonces la retina de un ojo situado en  $I''$  recibe una imagen de los puntos  $P, Q, R$ , que es exactamente igual a la recibida primeramente por el ojo  $I$ . El ojo  $I''$  ve ahora los puntos  $P, Q, R$  en los lugares  $P'', Q'', R''$ , que son simétricos de  $P', Q', R'$  con respecto al espejo  $E'E'$ . El triángulo  $P''Q''R''$  es igual al triángulo  $PQR$ ; los lados  $P''Q'', Q''R''$ , etc. son, respectivamente paralelos a los lados  $PQ, QR$ , etc., y las distancias  $I''P'', I''Q''$ , etc. son, respectivamente, iguales a las distancias  $IP, IQ$ , etc.

Nos damos cuenta entonces que la imagen de un conjunto de puntos objetos recibida por

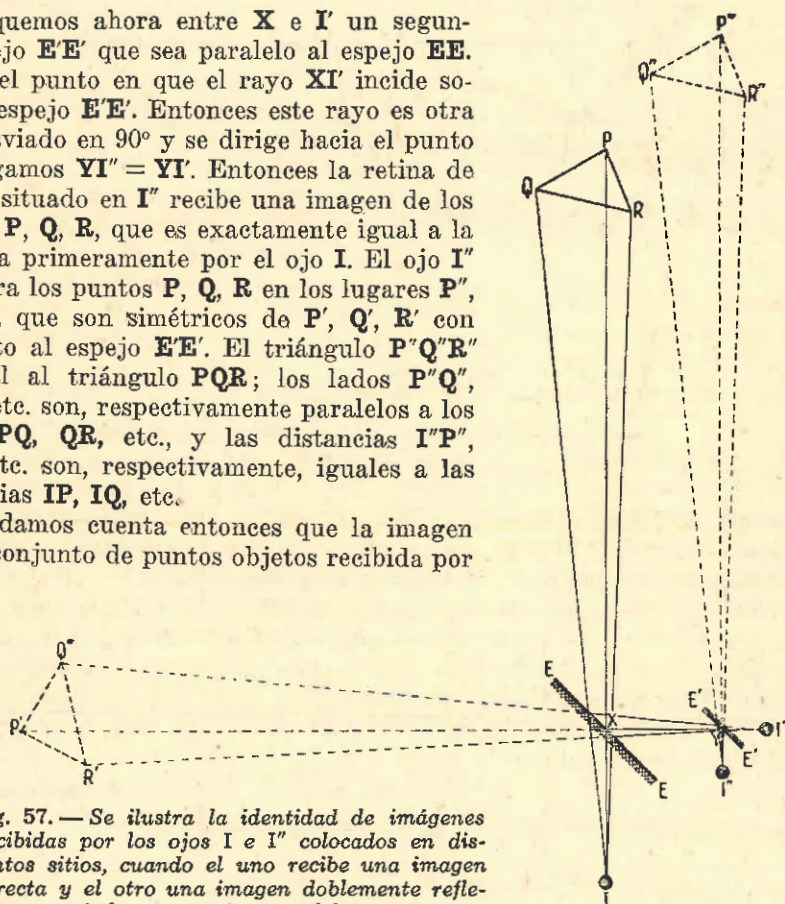
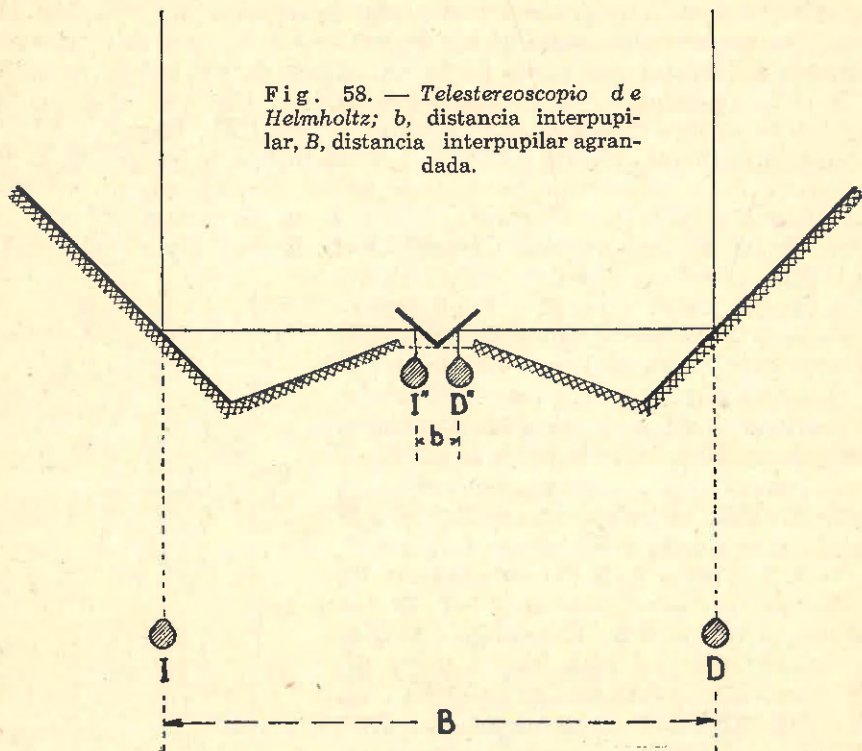


Fig. 57. — Se ilustra la identidad de imágenes recibidas por los ojos  $I$  e  $I''$  colocados en distintos sitios, cuando el uno recibe una imagen directa y el otro una imagen doblemente reflejada en espejos paralelos.

un ojo en  $I''$  mediante una **doble reflexión** es exactamente igual a la que recibiría directamente un ojo colocado en  $I$ .

Si en fig. 57 suponemos que  $I'$  es el ojo izquierdo de un hombre, y si agregamos para el ojo derecho otro dispositivo de dos espejos paralelos, en for-

ma conveniente, obtenemos un aparato llamado **telestereoscopio**, que fué ideado en el año 1857 por el físico **H. Helmholtz** y que se halla esquemáticamente representado en fig. 58.



**Telestereoscopio de Helmholtz.** Con este aparato dos ojos humanos  $I'$  y  $D'$ , con distancia interpupilar  $b$ , ven entonces los objetos del espacio que tienen por delante, exactamente en la misma forma como los verían otros dos ojos  $I$  y  $D$  con una distancia interpupilar agrandada  $B$ . La distancia interpupilar agrandada  $B$  trae como consecuencia una mayor diferenciación de las imágenes recibidas por las dos retinas y, por ende, una mayor plasticidad de la imagen del espacio percibida. Las diferencias de profundidad se notan con mayor facilidad usando este aparato, y el **radio del campo estereoscópico** (pág. 219) es agrandado en la razón  $B|b$ .

Ponemos:

(121)

$$n = \frac{B}{b}$$

y llamamos a esta razón **plasticidad específica**. Con el telestereoscopio todas las **paralajes binoculares** (ver pág. 219) y, por consiguiente, las diferencias de paralajes correspondientes a diversos puntos, se hallan  $n$  veces aumentadas, lo que implica un equivalente aumento de la capacidad del ojo para reconocer diferencias en profundidad.

Cuando se mira con el telestereoscopio un espacio lleno de objetos, por ejemplo un paisaje, se producirán en las retinas de los ojos imágenes iguales, como un **modelo de los objetos**  $n$  veces disminuído las daría a dos ojos sin armar, es decir, con distancia interpupilar normal.

Se deduciría entonces que el telestereoscopio nos haría ver siempre un modelo disminuído del espacio observado, por ejemplo de un paisaje. Esto generalmente no ocurre debido a que la experiencia que tenemos sobre la magnitud de los objetos que nos son conocidos, se opone a que nuestro cerebro se forme la idea del modelo reducido.

Si hiciéramos un experimento con puntos objetos, sobre los cuales no tenemos experiencia adquirida, por ejemplo con puntos luminosos a diferentes distancias y diseminados en la obscuridad, el telestereoscopio nos podría bien dar la sensación de que viéramos un modelo reducido de los objetos luminosos observados.

**Telestereoscopio con anteojos.** El efecto telestereoscópico se aumenta todavía si se combina el telestereoscopio, de plasticidad específica  $n$ , con dos anteojos de **A** aumentos. Esta idea se halla realizada en los gemelos prismáticos cuyos objetivos tienen entre sí mayor distancia que los oculares. Se produce el llamado **efecto plástico total** o la **plasticidad total**, cuya medida es el producto **An**.

Por ejemplo, un par de gemelos prismáticos con **A** = 8 aumentos y plasticidad específica  $n = 1\%$  (con distancia de 65 mm entre pupilas, por ejemplo, y 122 mm entre centros de objetivos), daría un efecto plástico total de 15. El **radio del campo estereoscópico** (ver pág. 219) para la visión con tales gemelos resulta de unos  $15 \times 1300 = 19,5$  km.

También se construyen, especialmente para **uso en el teatro**, gemelos prismáticos en los cuales los centros de objetivos distan entre sí menos que las pupilas de los ojos, es decir, con una **plasticidad específica menor de 1** (ver fig. 52). Tales gemelos tienen la ventaja de un volumen y peso reducidos, mientras el pequeño inconveniente de la plasticidad algo disminuída no se hace sentir por las distancias relativamente cortas para las cuales se usan estos instrumentos.

Hasta se emplean tales gemelos también en **viajes** y en el **deporte** cuando la ventaja del reducido peso y volumen se aprecia más que el efecto plástico muy pronunciado.

#### *Anteojos de construcción moderna para mesticiones.*

Ya en el año 1611 **Kepler** había construído un teleobjetivo como el representado en la fig. 31, pág. 101, el que consistió en una combinación de una lente convergente con otra divergente. En el año 1857 el físico italiano **Porro** describió un antejo, en el cual existía intercalada entre el objetivo y el ocular una lente divergente desplazable.

Basándose en el mismo principio, en el año 1908, el ingeniero suizo **H. Wild**, entonces empleado de la casa **Zeiss**, Jena, construyó un nuevo ante-

ojo para mediciones, en el cual el enfoque se realiza por medio de una lente divergente interior desplazable. Las **ventajas de ese nuevo anteojo (\*)** han conducido a su empleo en la mayor parte de los instrumentos topográficos y geodésicos modernos que actualmente se construyen.

El tubo del nuevo anteojo se halla muy bien protegido contra la entrada de polvo y de la humedad por permitir un cierre casi hermético, el que no es posible realizar con los mecanismos de enchufe de las construcciones antiguas (ver fig. 3, pág. 151). Además, en las nuevas construcciones una determinada distancia focal exigida puede realizarse con tubos más cortos que en las construcciones antiguas.

### 21. Anteojo con lente de enfoque interior.

Las figuras 59 y 60 ilustran la construcción del anteojo con lente de enfoque interior.

El retículo **R** (fig. 60) se halla grabado en una placa de vidrio, la que ha sido fijada en el tubo principal y que puede ser desplazada lateralmente un poco para el ajuste del eje de colimación.

La lente de enfoque **L<sub>2</sub>** es desplazable en la dirección longitudinal del anteojo por medio de un mecanismo. También es algo desplazable el ocular **Oc**, a fin de poder hacer bien visible el retículo para los ojos de diferentes condiciones.

**Teoría del anteojo de enfoque interior.** En las figuras 60 y 61 hemos supuesto un anteojo con la distancia fija  $l = 176,5$  mm entre el centro del objetivo y el retículo. Suponemos que la distancia focal  $f_1$  de la lente convergente objetiva es siempre menor de  $l$ . En las figuras mencionadas hemos adoptado el valor  $f_1 = 160$  mm para la distancia focal de la lente convergente **L<sub>1</sub>** y  $f_2 = -160$  mm para la distancia focal de la lente divergente movable **L<sub>2</sub>**. Llámase  $d$  a la **distancia variable** entre las lentes.



Fig. 59. — Corte vertical por el anteojo con lente interior movable para enfoque.

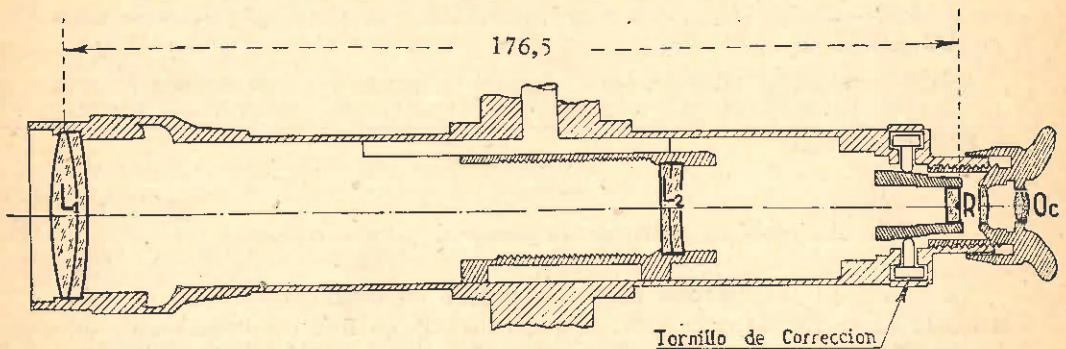


Fig. 60. — Sección horizontal por un anteojo de enfoque interior;  $f_1 = 160$  mm,  $f_2 = -160$  mm,  $l = 176,5$  mm.  
Escala 2 : 3

(\*) Atkinson, R. L.: *Internal versus External Focussing*, Revista "The Military Engineer", N° 133, enero - febrero 1932.

Suponemos que el antejo sea dirigido hacia un punto  $P$  (fig. 61), que se halla a la distancia  $a$  delante de la lente objetiva  $L_1$ . Trátase entonces de

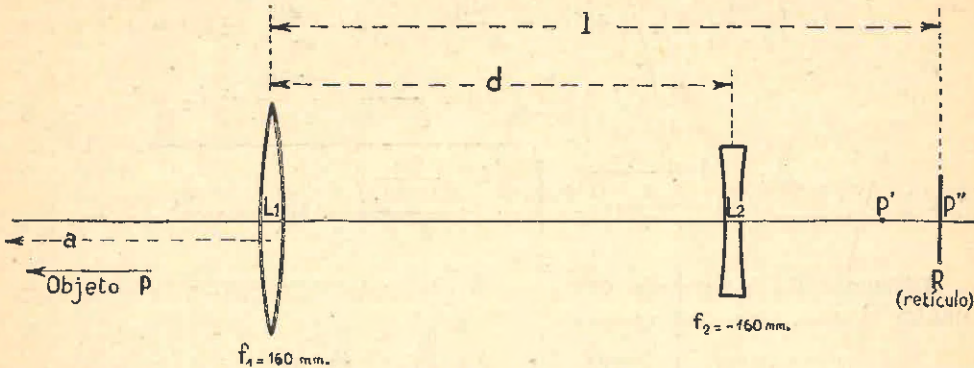


Fig. 61. — Se ilustra la disposición relativa de las lentes convergente y divergente y del retículo de un antejo de enfoque interior.

determinar la distancia que debe separar las lentes  $L_1$  y  $L_2$  para que la imagen real de  $P$  se produzca sobre el plano del retículo  $R$ .

En el caso de no existir la lente  $L_2$ , la  $L_1$  produciría de  $P$  una imagen  $P'$  con distancia:

$$L_1 P' = \frac{af_1}{a - f_1}$$

Suponemos ahora que se coloque entre  $L_1$  y  $P'$  la lente divergente  $L_2$ , a una distancia  $d$  de  $L_1$ ; la magnitud (negativa):

$$d - \frac{af_1}{a - f_1}$$

es entonces la **distancia de objeto** (objeto virtual, véase pág. 99) para la lente  $L_2$ , de modo que esta lente produce una imagen  $P''$  de **distancia imagen** igual a:

$$\frac{\left(d - \frac{af_1}{a - f_1}\right) f_2}{d - \frac{af_1}{a - f_1} - f_2}$$

que es el segmento  $L_2 P''$ .

Como queremos que la imagen  $P''$  se forme en el plano del retículo  $R$ , el segmento  $L_2 P''$  aumentado en  $d$  debe dar la longitud fija  $l$ , con lo cual resulta la siguiente **condición**:

$$(122) \quad d + \frac{\left(d - \frac{af_1}{a - f_1}\right) f_2}{d - \frac{af_1}{a - f_1} - f_2} = l$$

Resolviendo esta ecuación con respecto a  $d$ , obtenemos la expresión de la distancia que debe mediar entre las dos lentes para el enfocamiento de cualquier punto  $P$  de distancia  $a$ .

De la (122) se deduce sucesivamente:

$$\begin{aligned}
 d^2 - \left( \frac{af_1}{a-f_1} + f_2 \right) d + f_2 d - \frac{af_1 f_2}{a-f_1} - l \left( d - \frac{af_1}{a-f_1} - f_2 \right) &= 0 \\
 d^2 - \left( l + \frac{af_1}{a-f_1} \right) d - \frac{af_1 f_2}{a-f_1} + \frac{af_1}{a-f_1} + lf_2 &= 0 \\
 (123) \quad d = \frac{l + \frac{af_1}{a-f_1}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)^2}{4} - f_2 \left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)}
 \end{aligned}$$

**Discusión de la fórmula (123).** Si la distancia de objeto  $a$  es suficientemente grande, las cantidades:

$$l - \frac{af_1}{a-f_1} \quad \text{y} \quad -f_2 \left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)$$

son positivas, por consiguiente el radical:

$$\sqrt{\frac{\left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)^2}{4} - f_2 \left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)} \quad \text{es mayor que} \quad \frac{l - \frac{af_1}{a-f_1}}{2}$$

Si entonces en la (123) se tomara el radical con el signo  $+$ , resultaría para  $d$  un valor mayor de  $l$ , lo que no corresponde al problema concreto propuesto, dado que hemos supuesto que la lente  $L_2$  sea intercalada entre  $L_1$  y  $P'$ . Por consiguiente, en la fórmula (123) el radical debe tomarse con signo **negativo**. Escribimos entonces:

$$(124) \quad d = \frac{l + \frac{af_1}{a-f_1}}{2} - \sqrt{\frac{\left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)^2}{4} - f_2 \left( l - \frac{af_1}{a-f_1} \right)}$$

**Ejemplos numéricos.** Hemos calculado la magnitud  $d$  para diferentes distancias de objeto  $a$  y los valores  $f_1 = +160$  mm,  $f_2 = -160$  mm y  $l = 176,5$  mm que corresponden a las figuras 60 y 61.

Las diferentes etapas del cálculo y los resultados finales se han consignado en la planilla (125). En la planilla (126) se dan los correspondientes resultados de un **segundo ejemplo**.

## 22. Telescopios reflectores.

En los anteojos hasta ahora estudiados los caminos que toman los rayos luminosos hasta formar las imágenes, son determinados por la refracción que sufren esos rayos al incidir sobre superficies esféricas separadoras de diferentes medios. En los llamados **telescopios reflectores**, en cambio, los rayos luminosos toman caminos determinados principalmente por la reflexión, que sufren esos rayos sobre espejos generalmente curvos. Así, en tales telescopios las lentes objetivas han sido substituídas por espejos esféricos cóncavos, los cuales, fuera de sus ventajas principales, tienen todavía la de dar imágenes libres de aberración cromática.

Cálculo según (124) de la distancia  $d$  necesaria para el enfoque de objetos a diferentes distancias.

**Ejemplo 1.** Para un anteojo de Kern (fig. 60), con  $f_1 = +160$  mm,  $f_2 = -160$  mm,  $l = 176,5$  mm, se tiene:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Distancia objeto $a$	$L_1 P = \frac{af_1}{a-f_1}$	$l + \frac{af_1}{a-f_1}$	$l - \frac{af_1}{a-f_1}$	$\left(\frac{l - \frac{af_1}{a-f_1}}{2}\right)^2$	$-f_2 \left(l - \frac{af_1}{a-f_1}\right)$	$(5) + (6)$	$\sqrt{(5) + (6)}$	$d = (3) - (8)$	Distancia focal $f$ de la comb. $L_1 + L_2$ $f = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$
m	mm	mm	mm	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>	mm	mm	mm
$\infty$	160,00	168,25	8,25	68,06	2640	2708,1	52,04	116,21	220,29
100	160,26	168,38	8,12	65,93	2598	2663,9	51,61	116,77	219,24
10	162,60	169,55	6,95	48,30	2224	2272,3	47,67	121,88	210,04
5	165,29	170,89	5,61	31,47	1795,2	1826,7	42,74	128,15	199,77
3	169,01	172,75	3,74	13,99	1196,8	1210,8	34,80	137,95	185,57

De esta planilla (125) se desprende que para pasar del enfoque para  $a = \infty$  al enfoque para  $a = 3$  m, se debe desplazar la lente divergente en unos 22 mm.

**Ejemplo 2.** Para un anteojo descrito por Wild en "Zeitschrift für Instrumentenkunde", año 1909, págs. 334-340, se tiene:

$$f_1 = 149 \text{ mm}, f_2 = -500 \text{ mm}, l = 165 \text{ mm}$$

lo que da para  $d$  y  $f$  los valores calculados en la siguiente planilla (126):

$\infty$	149,00	157,00	8,00	64,00	8000	8064,0	89,80	67,20	178,14
100	149,22	157,11	7,89	62,25	7890	7952,2	89,17	67,94	177,83
10	151,25	158,12	6,88	47,33	6880	6927,3	83,23	74,89	174,93
5	153,58	159,29	5,71	32,60	5710	5742,6	75,78	83,51	171,46
3	156,79	160,90	4,10	16,81	4100	4116,8	64,16	96,74	166,39

De esta planilla (126) se desprende que para pasar del enfoque para  $a = \infty$  al enfoque para  $a = 3$  m, se debe desplazar la lente divergente en unos 30 mm.

## Reflexión de rayos paraxiales en espejos esféricos

**Definiciones.** Denomínase **espejo esférico** a toda calota esférica pulimentada. Si la superficie reflectora es la interior, el espejo se llama **espejo cóncavo** (figs. 62-64), y si es la exterior, se llama **espejo convexo** (figs. 65 y 66). El centro **C** (fig. 62) de la esfera (de la cual el espejo es una pequeña parte) y su radio **r** se llaman, respectivamente, **centro de curvatura** y **radio de curvatura** del espejo. Consideramos un punto **V** situado, al menos aproximadamente, en el medio del espejo, punto que llamamos **vértice** del mismo. La línea de unión **CV** la denominamos **eje del espejo**. Un punto situado sobre este eje se llama **punto axial**. Finalmente, si se trata de un espejo con contorno circular y con el punto **V** en su centro, llamamos **ángulo de abertura** al ángulo de vértice **C** formado por dos radios situados en un mismo plano y trazados hacia el contorno del espejo.

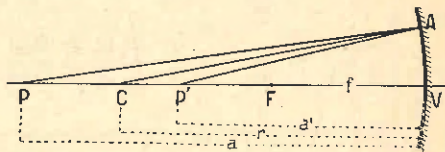


Fig. 62. — Se ilustra el camino  $PAP'$  de un rayo reflejado en un espejo cóncavo y la construcción de la imagen  $P'$  del punto axial  $P$ .

**Espejo cóncavo. Descripción del camino del rayo reflejado.** Sea **P** (fig. 62) un punto axial que emite un rayo **PA** sobre el espejo. Como el radio **CA** es la perpendicular al espejo en el punto **A**, la reflexión del rayo **PA** se produce en tal forma que el ángulo **PAC** es igual al ángulo **CAP'**. El rayo **PV** cae perpendicularmente sobre el espejo, y, por consiguiente, se refleja sobre sí mismo. Los dos rayos reflejados **VP** y **AP'** se cortan en **P'**, punto imagen de **P**.

Como **AC** es bisectriz del ángulo **PAP'**, tenemos según un teorema geométrico conocido:

$$(127) \quad \frac{PC}{P'C} = \frac{PA}{P'A}$$

Resulta entonces que la posición del punto imagen **P'** depende algo del punto de incidencia **A**, dado que la razón  $\frac{PA}{P'A}$ , que tiene figura en la (127), varía algo cuando **A** se acerca al vértice **V** o cuando se aleja del mismo. Lo que significa que no todos los rayos emanados del punto objeto **P**, luego de reflejarse en el espejo, van a reunirse en un único punto imagen **P'** sino en puntos algo distintos, dando así una imagen imperfecta.

Pero cuando se limita al espejo a un pequeño trozo alrededor del vértice **V**, se puede prácticamente reemplazar **PA** por **PV** y **P'A** por **P'V**, de modo que la (127) se transforma en:

$$(128) \quad PC : P'C = PV : P'V$$

que es la que corresponde prácticamente a **rayos paraxiales** (ver pág. 35).

Sean **PV** = **a** (fig. 62) la **distancia de objeto** y **P'V** = **a'** la **distancia de imagen** (distancias contadas entre los respectivos puntos y el espejo); la (128) nos da:

$$(129) \quad (a - r) : (r - a') = a : a'$$

de lo cual resulta sucesivamente:

$$(130) \quad \begin{aligned} ar - aa' &= aa' - a'r \\ a'r + ar &= 2aa' \end{aligned}$$

Dividiendo esta ecuación por el producto  $aa'r$ , resulta la llamada **fórmula del espejo**:

$$(131) \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r}}$$

Si la distancia de objeto  $a$  es infinita, resulta de la (131):

$$a' = \frac{r}{2}$$

lo que enseña que rayos paralelos al eje se reúnen en un punto imagen **F** (ver fig. 62) situado en el medio entre el centro **C** del espejo y su vértice **V**, por lo cual **F** es llamado **foco del espejo**, siendo  $r/2$  la **distancia focal**  $f$  del mismo. Si se la introduce en la (131), la fórmula del espejo toma la forma:

$$(132) \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}}$$

la que concuerda exactamente con la **fórmula de la lente** (ver pág. 78).

**Construcción de la imagen de un punto situado fuera del eje, pero próximo al mismo. Aumento lateral  $\beta$ .** Sea **PQ** (fig. 63) un pequeño objeto lineal perpendicular al

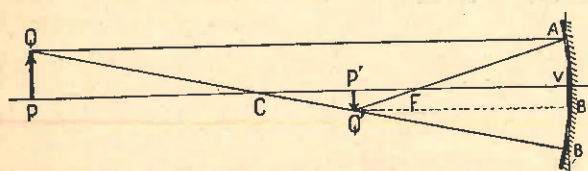


Fig. 63. — Construcción de la imagen  $P'Q' = \Delta y'$  de un objeto  $PQ = \Delta y$ .

eje.

Es ante todo necesario darse cuenta de que la imagen  $P'Q'$  de un pequeño segmento lineal **PQ** perpendicular al eje, es también un segmento perpendicular al eje.

En efecto, si **P'** es la imagen de **P**, vale según (131) la ecuación:

$$\frac{1}{PV} + \frac{1}{P'V} = \frac{2}{r}$$

la que da:

$$(133) \quad P'V = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{PV}}$$

Si, además, **Q'** es la imagen de **Q**, podemos para estos dos puntos considerar como eje a la recta **QQ'**, que corta al espejo en un punto **B**, de modo que, también según (131), se verifica la ecuación:

$$\frac{1}{QB} = \frac{1}{Q'B} = \frac{2}{r}$$

la que nos da:

$$(134) \quad Q'B = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{QB}}$$

Los segmentos  $PV$  y  $QB$ , que figuran respectivamente en las (133) y (134), pueden considerarse iguales cuando el segmento  $PQ$  es suficientemente pequeño, de modo que también resultan prácticamente iguales entre sí los segmentos  $P'V$  y  $Q'B$ . Este último segmento, siempre que  $PQ$  sea suficientemente pequeño, puede considerarse prácticamente igual a una perpendicular  $Q'B'$ , bajada al plano tangencial del espejo en  $V$ , perpendicular que expresa la distancia de la imagen  $Q'$  a dicho plano, de modo que resulta prácticamente:

$$Q'B' = P'V$$

lo que significa que el segmento imagen  $P'Q'$  es paralelo al mencionado plano tangencial y, por lo tanto, perpendicular al eje  $PV$ .

Para construir la imagen  $Q'$  de  $Q$ , podemos proceder del siguiente modo: Tracemos el rayo  $QA$  (fig. 63) paralelo al eje  $PV$ . Este rayo se refleja hacia el foco  $F$ . El rayo  $QC$  se refleja en  $B$  sobre sí mismo, y su intersección con la prolongación de  $AF$  nos da el lugar de la imagen  $Q'$ .

El segmento  $P'Q' = \Delta y'$  es la imagen (real e invertida) del segmento  $PQ = \Delta y$ .

**Aumento lateral  $\beta$ .** De la semejanza de los triángulos  $CPQ$  y  $CP'Q'$  se deduce:

$$\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'C}{PC}$$

o sea, con tener en cuenta la (128):

$$(135) \quad \beta = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{P'V}{PV} = \frac{a'}{a}$$

**Discusión de la "fórmula del espejo" (132).** Una discusión análoga a la expuesta en las págs. 88 y 89 referente a imágenes producidas por lentes, nos sugiere ahora la fórmula (132) para las imágenes producidas por espejos.

Cuando el objeto  $PQ = h$  (fig. 63) se mueve desde el infinito hasta el centro  $C$  del espejo, recorriendo la magnitud  $a$  los valores desde  $\infty$  hasta  $r = 2f$ , la imagen  $P'Q'$ , real e invertida, se mueve desde el foco  $F$  hasta el centro  $C$ . Durante este movimiento el tamaño de la imagen aumenta desde 0 hasta  $h$ .

Caracterizamos este caso con los términos: "**Objetos grandes lejanos** ( $a > r$ ), **imágenes pequeñas cercanas**". Función de los grandes espejos en los telescopios reflectores.

Cuando el objeto  $PQ = h$  sigue su movimiento desde  $C$  hasta el foco  $F$ , la imagen  $P'Q'$ , real e invertida, alejándose del espejo, se mueve desde  $C$  hasta el infinito. Durante este movimiento el tamaño de la imagen aumenta desde  $h$  hasta  $\infty$ .

Caracterizamos este caso con los términos: "**Objetos pequeños cercanos** ( $r > a > r/2$ ), **imágenes grandes lejanas**".

Cuando el objeto  $PQ = h$  sigue su movimiento desde el foco  $F$  hasta el espejo (ver fig. 64), se produce una imagen virtual y derecha  $P'Q'$ , que se mueve de derecha a izquierda desde el infinito hasta el espejo. Durante

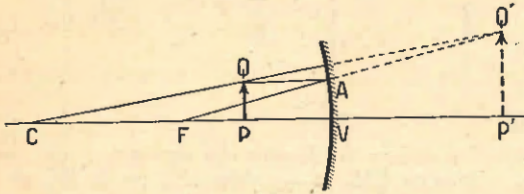


Fig. 64. — Se ilustra la formación de la imagen  $P'Q' = \Delta y'$  del objeto  $PQ = \Delta y$ , situado dentro de la distancia focal del espejo cóncavo. La imagen es virtual, derecha y aumentada.

Sea  $VAE$  (fig. 65) una superficie esférica reflectante,  $CV$  el eje,  $A$  un punto próximo al mismo y  $CAR$  el radio correspondiente al punto  $A$ . Si suponemos un momento que la superficie reflectante es la interior, sabemos por lo expuesto en pág. 231, que un rayo  $MA$  paralelo al eje, es reflejado hacia un punto  $F$  situado en el medio entre  $C$  y  $V$ . Para este rayo el radio  $CA$  es la perpendicular en el punto de incidencia, siendo, por tanto, iguales los ángulos  $MAC$  y  $CAF$ .

Si luego suponemos reflectante la superficie exterior de la esfera, y si consideramos el rayo  $NA$  también paralelo al eje, tenemos que para este rayo la prolongación  $AR$  del rayo  $CA$  es la perpendicular en el punto de incidencia, de modo que el ángulo  $RAS$ , que el rayo reflejado  $AS$  forma con la perpendicular, es igual al ángulo  $NAR$ , el que, por otra parte, es igual al ángulo  $MAC$  (opuesto por el vértice), y también igual al ángulo  $CAF$ . Como  $CAR$  es una recta, se deduce de la igualdad de los ángulos  $RAS$  y  $CAF$  el hecho de que la línea  $SAF$  es una recta. Esto quiere decir que un rayo paralelo al eje incidente sobre un espejo convexo, es reflejado de tal manera que la prolongación hacia atrás del rayo reflejado pasa por un punto  $F$  situado en el punto medio entre el centro y el vértice del espejo. Este punto  $F$  se llama **foco virtual del espejo convexo**.

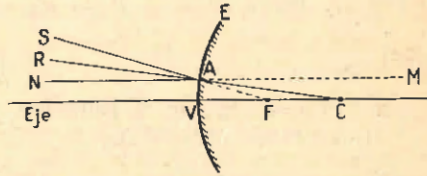


Fig. 65. — Se ilustra el camino de los rayos reflejados en el espejo convexo.

**Construcción de la imagen  $\Delta y'$ .** Sea  $PQ = \Delta y$  un pequeño objeto lineal perpendicular al eje (ver fig. 66).

El rayo  $QA$  incide paralelamente al eje. La prolongación hacia atrás de su rayo reflejado pasa por el foco virtual  $F$ . El rayo  $QC$  hacia el centro de curvatura del espejo se refleja sobre sí mismo. Las rectas  $AF$  y  $QC$  se cortan en  $Q'$ , punto imagen de  $Q$ .

La figura muestra que el espejo convexo produce de todo objeto real situado a cualquier distancia del espejo una **imagen virtual, derecha y disminuida**, la que se halla entre el vértice  $V$  del espejo y el foco virtual  $F$  del mismo.

**Aumento lateral  $\beta$ .** De la semejanza de los triángulos **CPQ** y **CP'Q'** (fig. 66) se deduce el valor absoluto  $|\beta|$  del aumento lateral:

$$(136) \quad |\beta| = \frac{|\Delta y'|}{|\Delta y|} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'C}{PC}$$

Pero si se tiene en cuenta que **AC** es la bisectriz de un ángulo exterior del triángulo **PAP'**, entonces de un conocido teorema de la geometría resulta que:

$$(137) \quad P'C:PC = P'A:PA$$

y si **A** es un punto muy próximo a **V**, podemos reemplazar en la (137) **P'A** por **P'V** y **PA** por **PV**, de modo que obtenemos:

$$(138) \quad \frac{P'C}{PC} = \frac{P'V}{PV}$$

con lo cual la (136) se transforma en:

$$(139) \quad |\beta| = \frac{|\Delta y'|}{|\Delta y|} = \frac{P'V}{PV} = \frac{|a'|}{|a|}$$

Por ser tanto  $a'$  como  $\beta$  de signo negativo, vale también la ecuación:

$$(140) \quad \beta = \frac{a'}{a}$$

la cual concuerda con la ecuación (135).

De la (138) obtenemos:

$$(141) \quad \frac{r - |a'|}{r + a} = \frac{|a'|}{a}$$

o con tener en cuenta el signo (negativo) de  $a'$ , podemos escribir:

$$\frac{r + a'}{r + a} = \frac{-a'}{a}$$

de la cual se deduce sucesivamente:

$$ar + aa' = -aa' - a'r$$

o sea:

$$a'r + ar = -2aa'$$

y con dividir esta ecuación por el producto  $aa'r$ , se obtiene:

$$(142) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{2}{r}$$

la que difiere de la (131) solamente en el signo del segundo miembro.

Si en la (131) atribuímos al radio  $r$  unas veces valores positivos y otras veces valores negativos (positivos para los espejos cóncavos y negativos para los convexos), esta ecuación:

$$(143) \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r}}$$

es general y válida para cualquier espejo esférico.

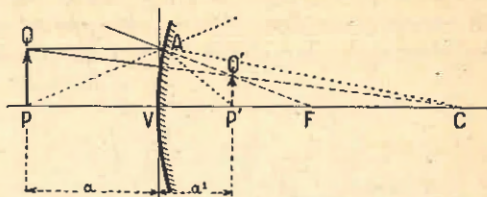


Fig. 66. — Se ilustra la formación de la imagen  $P'Q'$  de un objeto  $PQ$  producida por el espejo convexo.

**Espejos planos.** Se pasa de los espejos cóncavos a espejos convexos con hacer crecer  $r$  para valores positivos hasta  $+\infty$ , y luego para valores negativos desde  $-\infty$  hasta un valor negativo finito  $r$ .

Al valor  $r = \infty$  corresponde el **espejo plano**, cuya ecuación es:

$$(144) \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 0}$$

De esta ecuación deducimos que la distancia de objeto y la distancia de imagen son iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios, lo que significa que la imagen de un punto objeto se produce en el punto simétrico de dicho punto objeto respecto al plano del espejo.

El aumento lateral  $\beta$  resulta en este caso igual a  $-1$ :

$$(145) \quad \beta = \frac{a'}{a} = -1$$

Para el empleo de espejos en **telescopios reflectores**, los astrónomos **Newton**, **Gregory**, **Cassegrain** y **Herschel** han ideado diversos dispositivos.

1) En el **telescopio reflector** ideado por **Newton** en 1668 (ver fig. 67)



Fig. 67. — Esquema del telescopio reflector de Newton.

los rayos reflejados por el espejo cóncavo, antes de reunirse para una imagen real, inciden sobre un pequeño espejo plano **E** inclinado en  $45^\circ$  respecto al eje del tubo. Este espejo desvía los rayos hacia un costado. La imagen real se produce entonces en un foco **F**, en el borde del tubo, y puede ser observada a través de un ocular **Oc**.

2) El matemático y astrónomo **James Gregory** (1638 - 1675), ideó en 1661 un telescopio reflector (fig. 68), cuyo espejo principal **Ob** tiene en el cen-

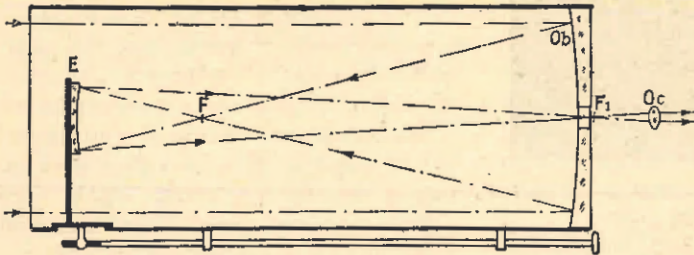


Fig. 68. — Esquema del telescopio reflector según Gregory.

tro una perforación, a través de la cual el ojo puede observar la imagen real producida. Los rayos reflejados por el espejo **Ob**, luego de pasar por el plano focal **F**, continúan su camino hasta incidir sobre un pequeño espejo colector cóncavo **E**, el que los refleja de tal manera que se forma en **F<sub>1</sub>** (situado en la perforación o cerca de la misma) la imagen real, que se observa por medio de un ocular **Oc**.

3) El francés **G. Cassegrain** propuso en 1672 una modificación para el telescopio reflector de Gregory, la que consistió en emplear un espejo colector convexo **E** (fig. 69), en lugar del cóncavo de Gregory.

En la disposición de Cassegrain los rayos reflejados por el espejo grande **Ob**, antes de reunirse, inciden sobre el espejo colector de tal modo que llegan a formar una imagen real e invertida en la perforación del espejo principal o cerca de la misma. Este dispositivo de Cassegrain ofrece la ventaja de requerir tubos más cortos y de permitir la corrección de la aberración esférica en mayor grado comparada con la realizada en otros modelos.

4) El gran astrónomo **W. Herschel** (ver fig. 70) ideó en 1789 un telescopio reflector, en el cual el espejo principal **Ob** (fig. 71) es algo inclinado respecto al eje del tubo, de modo que la imagen real se produce en un punto **F** cerca del borde del tubo, la que puede ser observada a través de un ocular **Oc** por un observador que mira hacia el lado opuesto a la dirección en que se hallan las estrellas objetos.

Como se trata en este caso de tubos de grandes dimensiones, la cabeza del observador no estorba sensiblemente la entrada de los rayos al espejo principal.

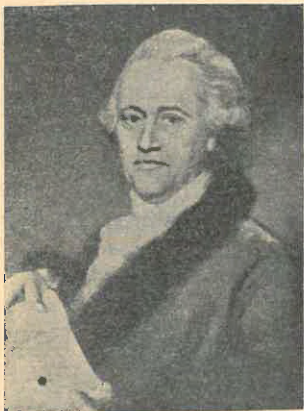


Fig. 70. — *William Herschel* 1738 - 1822

(sacada de A. Koenig, *Die Fernrohre und Entfernungsmesser*).

res que han podido construirse hasta ahora. (El diámetro del espejo del gran reflector del observatorio de **Mount Wilson**, California, es de 2,58 metros, mientras que el diámetro de la lente objetiva del gran refractor del observatorio de **Yerkes**, Williamsbay, es tan sólo de 1,02 metros.) Ver pág. I del Apéndice.

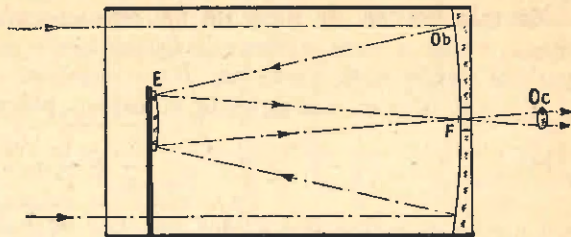


Fig. 69. — *Esquema del telescopio reflector de Cassegrain.*

En los siglos XVII y XVIII se construyeron telescopios reflectores de muy diversos tamaños, pequeños y grandes, los cuales ofrecían la ventaja de dar imágenes libres de la aberración cromática. Más tarde, cuando se había logrado la fabricación de lentes acromáticas (ver N° 9, pág. 108), se empezó a dar preferencia al antejo refractor para instrumentos de pequeños tamaños. Pero en la construcción de instrumentos astronómicos de grandes dimensiones existe hasta hoy día una cierta rivalidad entre telescopios reflectores y refractores, por sobrepasar alternativamente los unos a los otros en cuanto a rendimiento óptico.

Los espejos de los reflectores son metálicos, o de vidrio plateado en la cara anterior.

Los mayores espejos de telescopios reflectores tienen dimensiones bastante más grandes que las mayores lentes objetivas de refracto-

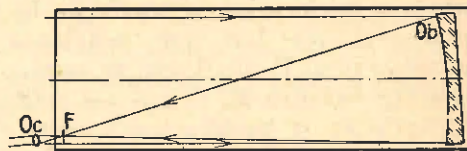


Fig. 71. — *Esquema del telescopio reflector de Herschel.*

### 23. Nuevo anteojo de Wild con sistema óptico compuesto de lentes y espejos.

En tiempos modernos se ha llegado a construir anteojos con objetivos y oculares de lentes en combinación con espejos esféricos, que sirven para conducir los rayos a los lugares convenientes para la formación de imágenes. Una creación reciente de esta clase es un tipo de anteojo de teodolito ideado por el ingeniero **H. Wild** y construido por la casa Kern. La respectiva patente suiza número 1904 describe el anteojo en cuestión en la siguiente forma: "Un anteojo compuesto de sistemas refringentes y sistemas reflectantes, en el cual se halla montado sobre el eje de un sistema de lentes convergentes un espejo cóncavo. Este espejo produce en la proximidad del sistema de lentes una primera imagen real, de la cual un segundo espejo cóncavo forma una segunda imagen real y agrandada. Esta última puede ser observada a través de un ocular".

En la figura 72 damos una representación esquemática del anteojo en cuestión.

Las lentes  $L_1$  y  $L_2$ , (que constituyen el objetivo **Ob**) conjuntamente con

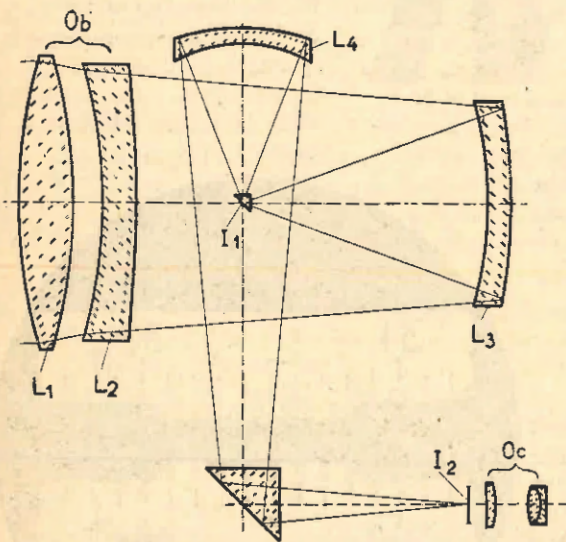


Fig. 72. — Esquema del nuevo anteojo de Wild construido con lentes y espejos.

el espejo cóncavo  $L_3$ , producen de un objeto lejano una primera imagen real  $I_1$ , de la cual un segundo espejo cóncavo  $L_4$  produce en  $I_2$  una segunda imagen real, la que es aumentada y derecha, y la que puede ser observada a través del ocular **Oc**.

Las superficies reflectantes de los espejos  $L_3$  y  $L_4$  son las superficies posteriores de lentes, cuya introducción permite realizar una corrección cromática en muy alto grado. Otras ventajas del nuevo anteojo son: la reducida longitud del tubo y gran abertura del objetivo, de lo cual resulta una máxima claridad;

de modo que este instrumento permite trabajar hasta en muy malas condiciones de luminosidad (ver página 181). También es estimable la circunstancia de que el observador ve imágenes derechas de los objetos.

La fig. 73 representa un nuevo modelo de teodolito concebido por **Wild** y ejecutado por **Kern**. Su principal característica es un nuevo tipo del anteojo, un

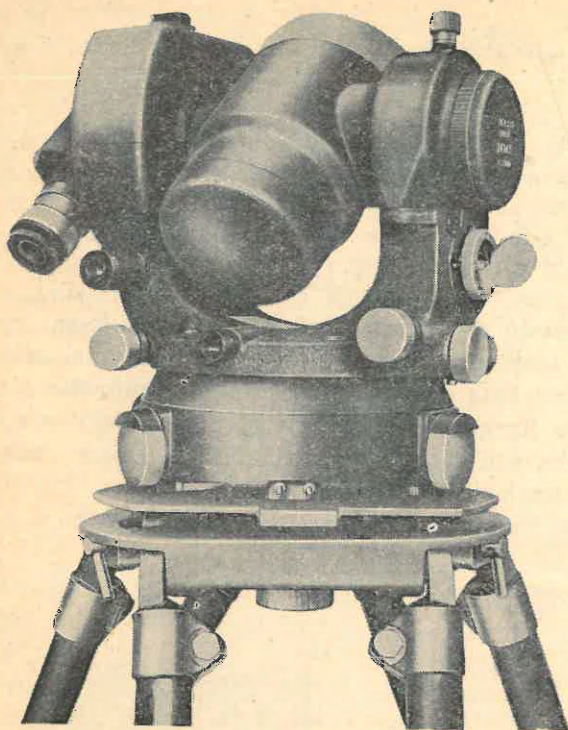


Fig. 73. — Teodolito de triangulación D K M 3 de Wild Kern.

una lectura de limbo horizontal con división centesimal. En el modelo con división sexagesimal, la lectura de limbo se efectúa de un modo análogo.

Ejemplo de lectura :

$$\begin{array}{r} 391^{\circ}15 \\ \quad 0^{\circ}03637 \\ \hline 391^{\circ}18673 \end{array}$$

Finalizamos nuestra exposición con el DKM 3, como más alta expresión de instrumento cumbre óptico mecánico, en la rama de teodolitos, en el que Wild supo reunir sus tres principales inventos (el eje vertical a bolillas, el principio de lectura con doble graduación de limbo y el nuevo tipo de anteojo) en un hermoso conjunto de nuevo modelo de teodolito, cuya eficiencia y grandes ventajas prácticas sólo la generación venidera estará en condiciones de valorar y apreciar en toda su amplitud.

anteojo catadióptrico: combinación de lentes y espejos (ver cubretapa del presente volumen), que da una imagen derecha y completamente libre de aberración cromática. Su aumento es de 26 ó 45 según se desee. Debido al gran diámetro de su objetivo (de 72 mm) y su construcción antireflectora, la imagen es de una luminosidad extraordinaria.

Este anteojo resulta ser muy corto, de construcción muy compacta y, por consiguiente, muy estable.

La lectura de círculo que se efectúa según el principio de doble graduación de limbo principio "DK", nos da automáticamente la media de lecturas de lugares le limbo diametralmente opuestos con una precisión de un décimo de segundo.

En la figura 74 se ilustra

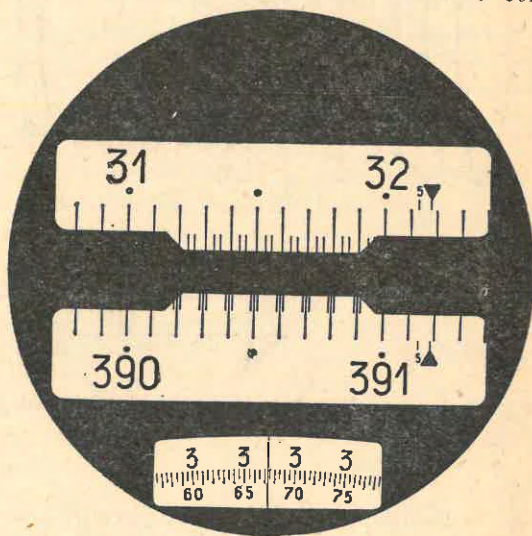


Fig. 74. — Campo visual aparente en tamaño natural. Se ilustra una lectura de limbo horizontal con división centesimal.

Indice alfabético de notaciones

usadas en el presente volumen

*Notaciones con letras griegas.*

	Págs.
$\alpha$ : aumento axial, longitudinal o de profundidad, definición . . . . .	47
$\alpha$ : semi-ángulo de campo aparente de un anteojo . . . . . 203,	204
$\alpha$ : magnitud angular de un objeto . . . . .	127
$\alpha_0$ : ángulo de la agudeza natural de la vista . . . . .	127
$\beta$ : aumento lateral o transversal . . . . .	48
$\beta$ : semi-ángulo de campo verdadero . . . . . 203,	204
$\gamma$ : aumento angular . . . . .	48
$\gamma$ : ángulo de campo de un anteojo . . . . . 136,	160
$\gamma$ : ángulo de un prisma . . . . . 18,	31
$\delta$ : poder separador de un objetivo de anteojo . . . . .	179
$\delta D$ : constante de un objetivo de anteojo . . . . .	179
$\delta$ : valor mínimo de la diferencia de paralajes binoculares	220
$\delta$ : desviación total producida por un prisma . . . . . 18,	31
$\delta$ (A-1): tolerancia angular para el no-paralelismo de los ejes de los anteojos gemelos prismáticos . . . . .	214
$\Delta$ : intervalo óptico, definición . . . . .	56
$\Delta\eta$ : diferencia de paralajes binoculares . . . . .	219
$\lambda$ : longitud de onda de luz . . . . . 3,	167
$\mu$ : 0,001 mm, micrón.	
$\mu\mu$ : 0,000 001 mm micromicrón, unidad de medida lineal usada para la longitud de ondas luminosas . . . . . 3,	168
$\mu, \mu'$ : ángulos que un rayo paraxial forma con el eje en el espa- cio objeto e imagen, respectivamente . . . . .	37
$\nu$ : número de ABBE, su definición; es la recíproca 1/v del po- der dispersivo $\nu$ . . . . .	191
$\sigma, \sigma'$ : distancias interfocales en un sistema de lentes . . 81, 82,	83
$\varphi$ : ángulo de difracción . . . . .	170
$\omega$ : magnitud angular del objeto, definición . . . . .	51
$\omega'$ : magnitud angular de la imagen . . . . .	51
$2\omega_1$ : ángulo de campo verdadero de luminosidad máxima en el anteojo holandés, ecuación (102) . . . . .	210
$2\omega_2$ : ángulo de campo verdadero total en el anteojo holandés, ecuación (101) . . . . .	210
$\omega'_1$ : medio ángulo de campo aparente de claridad máxima en el anteojo holandés, ecuación (109) . . . . .	211
$\omega'_2$ : medio ángulo de campo aparente total en el anteojo ho- landés, ecuación (108) . . . . .	211

*Notaciones con letras latinas.*

$a$ : abertura numérica . . . . .	174
$a, a'$ : longitudes principales del objeto y de la imagen, respecti- vamente, definición . . . . . 62,	230
$A$ : poder de acomodación del ojo . . . . .	123

	Págs.
<b>A</b> : aumento de un anteojo .....	153
<b>A<sub>n</sub></b> : aumento normal de un anteojo .....	161
<b>A<sub>u</sub></b> : aumento útil de un microscopio .....	176
(A-1)δ: tolerancia angular para el no - paralelismo de los ejes de los anteojos de gemelos prismáticos .....	214
<b>b</b> : distancia interpupilar del ojo normal .....	218, 224
<b>B</b> : base interpupilar agrandada .....	224
<b>C</b> : claridad o luminosidad de un anteojo, definición ....	163, 212
<b>C<sub>p</sub></b> : claridad o luminosidad puntual de un anteojo ....	161, 212
<b>d = V<sub>1</sub>V<sub>2</sub></b> : su definición para un sistema centrado .....	55
<b>d</b> : distancia variable entre <b>L<sub>1</sub></b> y <b>L<sub>2</sub></b> del anteojo con enfoque interior .....	227
<b>D</b> : poder convergente o potencia de una superficie refringente, definición .....	42
<b>d</b> : constante de un rejado de difracción .....	172
<b>dpr</b> : abreviatura internacional para <b>dioptría</b> .....	85
<b>f, f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, f<sub>2</sub>'</b> : distancias focales de un sistema de 2 superficies refringentes .....	55
<b>f, f</b> : distancias focales de un sistema centrado .....	66, 67
<b>F, F</b> : focos de un sistema, su definición como puntos imágenes de puntos infinitamente lejanos .....	39
<b>h, h'</b> : altura del objeto y altura de la imagen, respectivamente .	88
<b>H, H'</b> : puntos principales de un sistema óptico centrado, definición .....	58
<b>i, i'</b> : ángulo de incidencia y ángulo de refracción, respectivamente .....	11
<b>n</b> : índice de refracción, su definición .....	11
<b>Δn</b> : diferencia de índices de refracción .....	31
<b>n<sub>d</sub>, n<sub>D</sub></b> : índices de refracción media .....	32, 191
<b>n<sub>F</sub> - n<sub>C</sub></b> : dispersión media .....	191
<b>n</b> : número de oscilaciones del movimiento vibratorio de la luz	168
<b>n = B/b</b> : plasticidad específica .....	224
<b>n<sub>A</sub></b> : plasticidad total .....	225
<b>N, N'</b> : puntos nodales de una lente, su definición .....	64
<b>P</b> : distancia del punto próximo del ojo .....	123
<b>p<sub>o</sub></b> : radio de la pupila del ojo .....	133
<b>P</b> : punto próximo del ojo .....	120
<b>P.E., P.S.</b> : pupilas de entrada y salida de un sistema óptico .....	133
<b>r</b> : radio de curvatura de una superficie refringente .....	37
<b>r</b> : radio de curvatura de un espejo .....	230
<b>r</b> : distancia al punto remoto del ojo .....	120
<b>R</b> : punto remoto del ojo .....	120
<b>R</b> : radio del campo estereoscópico .....	219
<b>u</b> : ángulo de abertura de un objetivo de microscopio .....	174
<b>v</b> : poder dispersivo .....	33, 191
<b>v, v'</b> : distancias de objeto e imagen, respectivamente .....	37, 41
<b>w</b> : óptica distancia de visión clara .....	129
<b>x, x'</b> : abscisas focales, su definición .....	42

## Indice alfabético.

(Los números significan páginas; las rayitas (—) sustituyen los términos técnicos impresos en negrita que figuran en este índice.)

- A**BBE, E. (1840-1905), su retrato 30, su explicación de las consecuencias de la teoría de la difracción para la formación de las imágenes en el microscopio 173, abertura numérica 174, números de — 191, colaboración con el químico O. Schott 192, anteojo prismático 28, 216.
- Aberración cromática** 30, definición 108, 186.
- Aberración esférica** para rayos paralelos al eje 104, para rayos axiales 105, — mínima 106.
- Aberración focal** 105.
- Abertura numérica**, introducción del concepto por Abbe 174.
- Abcisas focales** 38.
- Absorción de la luz** 162, 213.
- Acomodación del ojo normal** 119, su declinación con la edad 123.
- Acromático**, explicación del término 108.
- Acromatismo**, definición 108.
- Acromatismo** de una combinación de lentes adosadas de diferentes clases de vidrio 190.
- Acromatismo visual** 30.
- Afocal**, explicación del término 85.
- Agudeza natural de la vista** 127.
- Amplitud acomodativa del ojo** 123.
- Ángulos conjugados  $\mu$  y  $\mu'$**  su definición 46, su signo 46.
- Ángulo de abertura** del objetivo, su definición 174.
- Ángulo de campo** de un anteojo astronómico, su determinación práctica 136, 160.
- Ángulo de campo verdadero**, su definición 203, 204.
- Ángulo de campo aparente**, su definición 203, 204.
- Ángulo de campo verdadero** del anteojo holandés 208.
- Ángulo de campo aparente** del anteojo holandés 208.
- Ángulo de espejo** 7, 8.
- Ángulo de difracción**, definición 170.
- Ángulo de prisma delgado** 18.
- Ángulo límite**, ángulo de la agudeza natural de la vista 127, poder separador de un objetivo de anteojo 179, valor límite de la diferencia de paralajes binoculares 220.
- Anteojos** o sea lentes correctoras del ojo humano 125.
- Anteojo**, su necesidad 130.
- Anteojo astronómico simple** o anteojo de Kepler, su aumento 153, su diafragma de campo 154, su inconveniente 213.
- Anteojo astronómico compuesto**, su definición 182, su ventaja 212.
- Anteojo terrestre**, su introducción 195, su principio 196, inventor 195, primer constructor 195, — de Fraunhofer 197, 200, sus ventajas 195, sus inconvenientes 213, 200, rendimiento óptico 200.
- Anteojo holandés** o anteojo de Galilei, principio 201, claridad puntual 212, claridad superficial 212, inconvenientes 213.
- Anteojos prismático**, su teoría 25, sus características y ventajas 213.
- Anteojos prismáticos** con plasticidad aumentada 215, 216, 225, — con plasticidad disminuida 215, 225.
- Anteojo moderno con lente de enfoque interior** 226.
- Anteojo moderno compuesto de lentes y espejos** 237, 238.
- Aplanático, sistema** — 107.
- Aumento**, definición 47, tres clases de aumentos 47.
- Aumento**, su relación con el campo verdadero y el campo aparente 204.
- Aumento axial, longitudinal o de profundidad**, 47, su signo 48, — de una lente 78.
- Aumento lateral o transversal** 48, su signo 48, — de un sistema óptico centrado 61, — de un sistema telescópico 84, — de una lente 79, su variación con la distancia del objeto 80.

- Aumento angular o razón de convergencia* de una lente 80, — de un sistema óptico 48, 63, — del sistema telescópico 84.
- Aumento lateral* del espejo cóncavo 232, — del espejo convexo 234, — del espejo plano 235.
- Aumento normal*, definición 161, 162.
- Aumento útil* de un microscopio, definición 176, — de un anteojo 180, varias fórmulas que lo expresan 180, 181.
- Aumento* de una lupa 138, 139, 140, — de un microscopio compuesto 143, aumento total del mismo 144.
- Aumento* del anteojo astronómico simple 153, su determinación práctica 157.
- Ayudas* para la apreciación de distancias en la visión monocular 216.
- B**ACON, R. (1214 - 1294), cámara obscura de — 114.
- Bauernfeind* descubrió en 1851 el rayo fijo en el prisma triangular 26.
- Binocular*, visión — 218, paralaje — 219.
- C**AMARA OSCURA de agujero 114, — con lente 114.
- Cámara del ojo* 116.
- Camino del rayo luminoso* 15.
- Campo visual* del ojo 118.
- Campo visual verdadero*, definición 203.
- Campo visual aparente*, definición 203, — su relación con el aumento 204.
- Campo verdadero* de un anteojo astronómico, su determinación práctica 136, 160.
- Campo visual verdadero* de un anteojo holandés 208, 210.
- Campo visual aparente* de un anteojo holandés 208, 210.
- Campos verdaderos y aparentes* de gemelos prismáticos 215, 216.
- Cassegrain G.*, telescopio reflector de — 236.
- Centro de rotación del ojo* 118.
- Centro óptico* de la lente delgada 86, — del objetivo de un anteojo 155.
- Circulito de Ramsden* 152, — su posición 153.
- Círculo de dispersión* 106, — en el ojo humano 122.
- Círculos de dispersión cromática* 110.
- Círculo de difracción* de Fraunhofer 177.
- Claridad puntual*, definición 161, — del anteojo holandés 212.
- Claridad superficial*, definición 163, — del anteojo astronómico 165, 166, — del anteojo holandés 212.
- Claridad máxima* de un anteojo 165, 166.
- Coincidencia*, principio de — 23.
- Colector*, espejo — de un telescopio reflector 236, — de un anteojo geodésico 237.
- Colectora, lente* — 110, — del ocular de Ramsden 96, 185, lente — del ocular de Huygens 98, 183.
- Colores visibles* 168, longitud de ondas 168.
- Combinación acromática*, dos clases de típicas 108.
- Combinaciones de lentes* 93, de Ramsden 96, de Huygens 97.
- Combinaciones de prismas* 31.
- Concepto del aumento normal* 162, — del aumento útil 176.
- Concepto del objeto real* 99, — del objeto virtual 99, — de la imagen real 4, 99, — de la imagen virtual 4, 99.
- Concepto del teleobjetivo* 100.
- Condiciones de acromatismo* de un prisma 32, — de una combinación de lentes adosadas de diferentes clases de vidrio 190.
- Condiciones de luminosidad máxima* 206.
- Condiciones de luminosidad mínima* 206.
- Conjugados*, puntos — 41, rayos — 41, planos — 43.
- Conos y bastoncillos del ojo* 116, 117.
- Constante* de un objetivo de anteojo 179, — de un rejado de difracción 172.
- Convergencia* de una superficie refringente 42.
- Córnea del ojo* 115.
- Coroides*, membrana del ojo 115.
- Corrección del ojo* 125.
- Cristalino del ojo* 115, 116.
- Cromatismo*, definición 108, su reducción 188, 189.
- Crown*, explicación del término 29, su dispersión cromática 107, 186.
- Cruz de espejos* 8.
- Cruz de prismas*, teoría 26.
- Cuña de vidrio*, su definición 31, — acromática 32.
- D**ECLINACION de la acomodación del ojo normal con la edad 123.
- Defectos de la imagen* 104.
- Definición de la línea visual* 117, — de la línea de mirada 117, — de la línea de fijación 117, — del eje óptico del ojo 118.
- Definición de las cantidades  $v$  y  $v'$*  37, — de las distancias focales  $f$  y  $f'$  39, — de los planos conjugados 43, — de los planos focales 44, — del signo de las magnitudes  $\Delta y$  y  $\Delta y'$  45, — de la divergencia óptica 49, — de las distancias focales según Gauss 51, — del eje óptico 53.
- Definición del sistema de lentes centradas* 53, — de los focos de un sistema de lentes centradas 54.
- Definición de las longitudes principales* 63, — de los puntos nodales de Listing 64.
- Definición de un sistema aplanático* 107, del sistema acromático 108, — del acromatismo visual 108.

- Definición de la lente delgada 86.  
 Definición del aumento angular o razón de convergencia 48, — del aumento normal 161, 162.  
 Definición de los focos como puntos imágenes de puntos objetos infinitamente lejanos 39.  
 Definición de un sistema telescópico 84, — del microscopio compuesto 146, — del anteojo astronómico compuesto 182.  
 Definición del aumento útil de un microscopio 176.  
 Definición del campo de un anteojo astronómico 152.  
 Definición de claridad superficial 163, 164, — de claridad puntual 161.  
 Definición de interferencia 167, — de superficie de onda 167, — de velocidad de un movimiento oscilatorio 167, — de período de un movimiento oscilatorio 167, de longitud de onda 167 — de ángulo de difracción 170, — de número de Abbe 191.  
 Definición del espejo esférico 230, — del espejo cóncavo 230, — del espejo convexo 230, — del espejo plano 235.  
 Descartes, R. (1596 - 1650) publicó por vez primera la ley de refracción de Snellius 12.  
 Descomposición de la luz blanca 28.  
 Determinación práctica de la agudeza natural de la vista 128, — del aumento de un anteojo astronómico 157, — del ángulo de campo verdadero de un anteojo 160.  
 Diafragma, explicación del término 3.  
 Diafragma, su necesidad 131, 135, su posición 131.  
 Diafragma de rayos 131.  
 Diafragma de campo 131.  
 Diafragma de campo de un anteojo astronómico simple 154.  
 Diámetro aparente 127.  
 Diferencia cromática 107, 108.  
 Difracción producida por la abertura circular de un diafragma 177.  
 Dioptría, *dp*, definición 85.  
 Dióptrico, sistema — 36.  
 Discos imágenes 179.  
 Discusión de la fórmula dióptrica fundamental 40, — de la fórmula de la lente 88, — de la fórmula del espejo 232.  
 Dispersión cromática, definición 107, su medida 107, — en los oculares compuestos 186.  
 Distancia de objeto 37.  
 Distancia de imagen 37.  
 Distancia interpupilar del ojo, su valor medio 219.  
 Distancia focal 39, — de un sistema de lentes 81, 82.  
 Distancia focal del espejo esférico 231.  
 Distancias focales del ojo 117.  
 Distancia focal equivalente 82.  
 Distorsión de la imagen 194.  
 Divergencia óptica, definición 49.  
 Doble reflexión 9.  
 Dollond, J. (1706 - 1761) su retrato 108, Fórmula dióptrica fundamental (segunda) construyó las primeras lentes acromáticas 108.  
**E**CUACION dióptrica fundamental (primera) 38, 39, 63, su discusión 40.  
 Ecuación dióptrica fundamental (segunda) 68.  
 Ecuación de Lagrange - Helmholtz 49.  
 Ecuación de Newton 42, — para el sistema óptico centrado 61.  
 Ecuación del espejo esférico 231, 235.  
 Ecuación del espejo plano 235.  
 Efecto plástico 213, — específico 224, — total 225.  
 Efecto estereoscópico 218.  
 Efecto de la lente de ojo en lo relativo a la reducción del cromatismo en el ocular compuesto de Ramsden 110.  
 Eje de la lente 71.  
 Eje del espejo esférico 230.  
 Eje óptico del sistema 53.  
 Eje óptico del ojo, definición 118.  
 Eje óptico del anteojo 156.  
 Eje visual del ojo 117, 217.  
 Eje de colimación de un anteojo astronómico 155.  
 Ejemplo de lectura de círculo 23, 24.  
 Enfocamiento interno o enfoque interior 227.  
 Error accidental de bisección de delgada faja horizontal o vertical 130.  
 Esclerótica, membrana del ojo 115.  
 Escuadra de espejos 8.  
 Escuadras de prismas de Bauernfeind 25, 26.  
 Espectro solar 28.  
 Espectro secundario 30.  
 Espejo reflector 9, — iluminador 6.  
 Espejo cóncavo 230.  
 Espejo convexo 230, 233.  
 Espejo esférico, definición 230.  
**F**ALTA de claridad y nitidez de la imagen 106.  
 Fennel, O., lumbrera de iluminación (espejo) de — 6.  
 Flint, explicación del término 29, — su dispersión cromática 107.  
 Focos de una superficie refringente, definición 39.  
 Focos de un sistema centrado, su introducción 54, — de dos superficies 56.  
 Foco del espejo esférico (cóncavo) 231.  
 Foco virtual del espejo esférico (convexo) 233.

- Fórmula de Newton* para una sola superficie refringente 42, — para un sistema centrado 61.
- Fórmula de la lente* 78.
- Fórmula del espejo* 231.
- Fórmula dióptrica fundamental* (primera) 39, 63, su discusión 40.
- Fórmula dióptrica fundamental* (segunda) 68.
- Fóvea centralis* del ojo 117.
- Fraunhofer, J.* (1787-1826), su retrato 29, rayas de — 29, anteojo terrestre de — 197, fenómeno de difracción de — 169, lupa de — 144.
- Frecuencia* de las oscilaciones de las ondas de luz 168.
- G**ALILEI, G. (1564-1642), su retrato 150, anteojo de — 150.
- Gascoigne, W.* introdujo el retículo en el anteojo 156.
- Gauss, C. F.* (1777-1855), su retrato 43 de tomo I de este Compendio homografía de — 35, teoría de — 35, heliótropo de — 9.
- Gemelos de caza* 211, — de teatro 203.
- Gemelos prismáticos* de Abbe-Zeiss 28, su teoría 27, — con plasticidad aumentada 215, 216, 225, — con plasticidad disminuída 215, 225.
- Gemelos prismáticos*, sus características 213, sus ventajas 213.
- Gregory, J.* (1638-1675), telescopio reflector de — 235.
- H**ACES divergentes correspondientes al punto próximo 122, — correspondientes al punto remoto 122.
- Haces de rayos levemente inclinados* 55.
- Hall, Ch. Moor* (1703-1771), teoría de la lente acromática 30, 108.
- Haz de luz*, definición 3.
- Heliótropo*, explicación del término 11, — de Gauss, su descripción 9.
- Helmholtz, G.* (1821-1894), su retrato 116, telestereoscopio de — 224.
- Herschel, W.* (1738-1822), su retrato 236, telescopio reflector de — 236, 237.
- Hípermetrope*, ojo — 124.
- Homografía* de Gauss 35.
- Humor acuoso* del ojo 116.
- Huygens, C.* (1629-1695), su retrato 98, ocular de — 98, principio de — 169.
- I**MAGEN fija formada por reflexión doble (descubierta por Bauernfeind) 26.
- Imagen final* de un sistema telescópico 93.
- Imagen móvil* formada por reflexión simple 8, 26.
- Imagen real*, definición y característica 4, 5, concepto fundamental 99.
- Imagen virtual*, definición y característica 4, 5, concepto fundamental 99.
- Inconveniente* del anteojo astronómico 213, — del anteojo terrestre 213, — del anteojo holandés 213.
- Índice de refracción* 11, — absoluto 14, — relativo 14, — de los colores, su variación en los vidrios crown y flint 29.
- Índice de refracción media* (para las rayas d y D) 32, 191.
- Infrarrojos*, rayos — 3, 169.
- Instrumento óptico*, definición 34, finalidad de su construcción 34.
- Interferencia*, definición 167.
- Intervalo óptico* 55.
- Invariante óptica* 14.
- Inversión* del camino del rayo óptico 15.
- Iris del ojo* como diafragma de rayos 133.
- K**ELLNER, C. (1826-1885), ocular ortoscópico de — 109, 195.
- Kepler, J.* (1571-1630), su retrato 12, anteojo de — 150, teleobjetivo construído por — 225.
- Kern*, gemelos prismáticos 215, 225, construye el nuevo anteojo de teodolito según Wild compuesto de lentes y espejos 238.
- Koenig, A.* de su obra "Die Fernrohre und Entfernungsmesser" se tomaron los retratos de figuras 35, 4, 25, 1, 36 y 70, en páginas 27, 108, 130, 150, 195 y 236, respectivamente.
- L**AMINA de caras planas y paralelas 16.
- Lectura de círculo* de teodolito 23,
- Lectura de nonio* 129.
- Lente acromática* 108, 109, 192.
- Lente biconcava* 90, — simétrica 90.
- Lente biconvexa* 90, — simétrica 90.
- Lente colector*, su función 183, — del ocular de Huygens 98, — del ocular de Ramsden 96.
- Lente correctora de ojo* ("anteojos") 125.
- Lente delgada*, definición 86, — biconvexa 70, — planoconvexa 70, — cóncavoconvexa 70, — Biconcava 71, — planoconcava 71, convexocóncava 71.
- Lente de campo* 183.
- Lente de mejor forma* 106.
- Lente de ojo* o *lente ocular propiamente dicha* del ocular de Huygens 98, 183, — de ocular de Ramsden 96, 183.
- Lente frontal* del microscopio 174, 175.
- Lente gruesa*, definición 86.
- Lente equivalente* 82.
- Lente ideal* 86.
- Lente planoconvexa* 91, su poder convergente 92, su importancia 106.
- Ley óptica* sobre la constancia del ángulo

*Leyes de refracción* 11, 12, 13, — forma general 14.  
*Límite del poder separador del ojo* 129, — del poder separador del microscopio 174, 175, — del poder separador del anteojo 179, 180, 181, 182.  
*Línea visual* 117, — de mirada 117, — de desviación de un prisma 25. fijación 117.  
*Lipperhey, J.* († 1609), su retrato 150, inventor del anteojo holandés 150.  
*Listing, J. B.* (1808-1882), ojo reducido de — 118.  
*Longitud de onda* 167.  
*Longitudes principales* 63.  
*Lumbrera de entrada* de un espejo 6.  
*Luminosidad puntual*, definición 161, — del anteojo holandés 212.  
*Luminosidad superficial*, definición 163, — del anteojo holandés 212.  
*Luminosidad máxima de un anteojo* 165.  
*Lummer, O.* (1860-1925) 33.  
*Lupa simple* 137, 144, aumento 138, 139, 140, — acromática 144, — compuesta 141, su aumento 143, — de Fraunhofer 144, — de Wilson 144, — de lectura de Zeiss 145.

**M**AGNITUD angular o magnitud aparente de un objeto 51, 127.  
*Mancha amarilla del ojo* 116.  
*Menisco convergente o positivo* 70, 92, — divergente o negativo 71, 92.  
*Micrómetro óptico* 23.  
*Microscopio*, su necesidad 130, — simple 137, — compuesto, definición 146, aumento 147.  
*Miope, ojo* — 124.

**N**EWTON, I. (1643-1727), su retrato 57 de tomo I de este Compendio, fórmula de — 42, 61, telescopio reflector de — 235.  
*Nivel de coincidencia de Wild* 21, su característica 21.  
*Nodales, puntos* — 64.  
*Números de Abbe*, definición 191.

**O**BJETIVO acromático 109, 183, 192.  
*Objeto real*, concepto 99, — virtual, concepto 99, dos casos típicos 100.  
*Ocular de Ramsden*, sus condiciones 94, su cálculo 95, aumento 183.  
*Ocular de Huygens*, sus condiciones 96, su cálculo 97, aumento de campo 183.  
*Oculares compuestos*, su doble función 183, su ventaja relativa a la reducción del cro-

matismo 186.  
*Ocular Ortoscópico de Kellner* 109, 195, — de Zeiss 195.  
*Ojo* 113, su pupila de entrada 134, — miope 124, su corrección 125, — hipermetrope 124, su corrección 125, 126, — reducido de Listing 118.  
*Onda de luz* 3, — electromagnética o — hertziana 3.  
*Óptima distancia de visión clara* 129.  
*Ortoscópico*, explicación del término 195, sistema — 195, ocular — 109.

**P**ARALAJE binocular 219, valor límite 219.  
*Paralaje del anteojo* 156, su eliminación 157.  
*Paralaje del ojo*, su variación 216.  
*Paraxial*, explicación del término 35, rayo — o rayo central 35.  
*Pérdida de luz*, su valor medio 162.  
*Periodo de un movimiento oscilatorio* 167.  
*Perspectiva principal* 217, — complementaria 217, — aérea 217.  
*Placa planoparalela* 16.  
*Planos conjugados* 35, su definición 43.  
*Planos principales de un sistema centrado* 59, 60.  
*Planos focales*, su definición 44, — de un sistema centrado 54.  
*Plasticidad específica* 224.  
*Plasticidad total* 225.  
*Poder dispersivo y su recíproca* 33, 191.  
*Poder convergente o potencia de una superficie refringente* 42, — de una lente 73.  
*Poder separador del ojo* 129, — de un microscopio 174, — de un objetivo 178, — de un anteojo 179.  
*Poder de acomodación o poder acomodativo del ojo* 123.  
*Porro, P. I.* (1801-1875), su retrato 27, teleobjetivo 225, prisma de inversión de — 27.  
*Precisión de la bisección de delgadas fajas horizontales o verticales* 130, — del nivel de coincidencia 22.  
*Presbíope, ojo* — 124.  
*Présbita, ojo* — 124.  
*Principio de la doble reflexión* 8, — de la inversión del camino del rayo luminoso 15, 40, — del nivel de coincidencia 21, — de la coincidencia aplicada a la lectura de círculo 23, 24, — del heliótopo 9, — de Huygens 166, 169, — óptico aplicado al sextante 10.  
*Principios de la óptica geométrica* 3, 4, 11.  
*Prisma de inversión de Porro* 27, — de re-

flexión total 20, definición 21, — acromático, sus condiciones 32.  
*Propagación* rectilínea de la luz 3, — del movimiento oscilatorio 167.  
*Punto* próximo del ojo 120, — remoto del ojo 120.  
*Puntos* conjugados 41, — cardinales del ojo 117, — cardinales de un sistema centrado 64, 65 — cardinales de una lente, su cálculo 74, — nodales de Listing, definición 64, — principales de un sistema óptico centrado 58.  
*Pupila del ojo* 133.  
*Pupila de entrada* 152, 201.  
*Pupila de salida* 152, 201.

**RADIACIONES** 3, J visibles 3.  
*Radio de curvatura* de una superficie refringente, su signo 41, — de una lente 71, su signo 71, — de un espejo cóncavo 230, — de un espejo convexo 234.  
*Radio de la pupila del ojo* 133, 162, 165, 166, su variación 133, — del campo estereoscópico 219, su agrandamiento artificial 222, 224.  
*Ramsden, J.* (1735-1800), ocular de — 94, 95, 96, 183, circuitito de — 152, 153.  
*Rayas de Fraunhofer* 29, 168.  
*Rayo de luz*, su definición 4, su independencia 4, — refractado 11.  
*Rayos paraxiales o rayos centrales* 16, 35, — infrarrojos, su definición 29, — ultravioletas 29, 169, — conjugados 34, 42, — principales 152.  
*Recursos para la apreciación de las distancias en la visión monocular* 216, — para aumentar el poder plástico 221, 222, 224, — para aumentar la distancia focal 27, 100.  
*Reflexión de un rayo de luz* 3, — doble 7, — total 19, 20, 21.  
*Refracción de un rayo de luz* 11, — de un prisma delgado (cuña) 18, — media 32, — en placas planoparalelas 16.  
*Rejado de difracción* 172.  
*Relación entre el campo y el aumento de un anteojo* 160, — entre el aumento y la claridad de un anteojo 164.  
*Rendimiento óptico del anteojo terrestre* 200.  
*Representación colineal* 34.  
*Retículo de un anteojo* 155, su inventor 156.  
*Retina del ojo* 116, corte por la — 117.

**SCHNEIDER, C.** (1579-1650), su retrato 130, astrónomo e investigador de importantes cuestiones de óptica 130.  
*Schott, O.* químico, su colaboración desde 1885 con el físico E. Abbe en la reducción

del cromatismo en las lentes por medio de la fabricación de nuevos vidrios ópticos 30, 192.

*Schyrle, A. M.* (1597-1660), inventor del anteojo terrestre 195.

*Sextante*, característica óptica 8.

*Signo del radio de curvatura* de una superficie refringente 41, — de una superficie reflectante 234.

*Signos de las distancias focales* de una superficie refringente 41, de la lente 73, — de superficies refringentes 234.

*Signo del aumento lateral* de un sistema de dos superficies refringentes 61, — angular 64.

*Signos de las magnitudes  $v$  y  $v'$*  41, — de las magnitudes  $\Delta y$  y  $\Delta y'$  45, — de las distancias interfocales y ' 57.

*Sistema de superficie refringente centrado*, definición 53, — convergentes 68, — positivo 68, — divergente 68, — negativo 68.

*Sistema telescópico o sistema afocal* 84, 85, 183, 201.

*Sistema óptico del ojo* 134.

*Snellius, W.* (1591-1626), descubrió la ley de refracción 12.

*Superficie refringente centrada*, definición 53.

*Superficie de onda*, definición 167.

**TELEOBJETIVO** fotográfico, concepto general 100, — variable 100.

*Teleobjetivo geodésico* con lente divergente variable, su aplicación práctica 102, 226.

*Telescópico*, explicación del término 85, sistema — 84, 85.

*Telescopios reflectores*, su característica general 228.

*Telescopio reflector* de Newton 235, — de Gregory 235, — de Cassegrain 236, — de Herschel 236, 237.

*Telestereoscopio* de Helmholtz 224.

*Teoría del anteojo de enfoque interior* 226, — del anteojo prismático 27.

*Tolerancias sobre el no-paralelismo de los ejes de los anteojos de gemelos* 214.

**ULTRAVIOLETA**, luz — 29, 169.

**VALOR** límite de la paralaje binocular 219.

*Ventajas de los oculares compuestos en lo relativo a la dispersión cromática* 186,

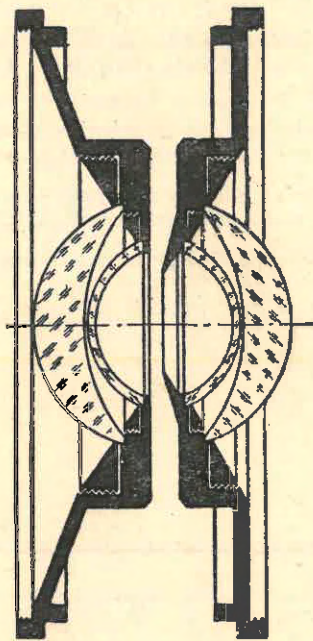
— de los mismos en lo relativo a campo 183.

*Ventajas del microscopio compuesto compa-*

- rado con la lupa 148.
- Ventaja* que resulta de los defectos del ojo humano 106.
- Ventajas* de los anteojos modernos 226.
- Ventajas* del antejo con enfoque interior 226, — del nuevo antejo Wild-Kern 237.
- Vidrios ópticos* antiguos 29, 33, — modernos 192.
- Visión binocular* sin antejo 217, 218, — con antejo 221, — con agrandamiento de la distancia interocular 222.
- Visión directa* 217.
- Visión estereoscópica* 218.
- Visión indirecta* 217.
- Visión monocular sin antejo* 217, — con antejo 218, — apreciación de las distancias 216, recursos varios que facilitan esa facultad 216, 217.
- W**IESEL, J. (1583-1660), su retrato 195, primer constructor del antejo terrestre 195.
- Wild, H. Dr. h. c.*, su retrato 22, nivel de coincidencia 21, nuevo sistema óptico de lectura de círculo 23, antejo de enfoque interior 226, nuevo antejo de teodolito compuesto de lentes y espejos 237-238.
- Wilson*, lupa de — 144.
- Z**EISS, C. Gemelos prismáticos de Abbe-Zeiss 28, 215, 216, ocular de — 195, antejo Wild-Zeiss 226.

# Apéndice

*Últimas novedades ópticas de mayor aplicación en los trabajos de levantamientos fotogramétricos, terrestres y aéreos.*



TOPOGON DE ZEISS  
Fundamento óptico de la moderna Fotogrametría granangular.

# Sumario

## CAPITULO I. — *Nociones fundamentales de óptica instrumental.*

§ 1. Generalidades .....	3
§ 2. Errores de las lentes o de las imágenes que producen .....	5
§ 3. Corrección de los errores de las imágenes .....	8
§ 4. Leyes de Lambert .....	13

## CAPITULO II. — *Tipos de modernos objetivos fotogramétricos. Novedades ópticas de mayor aplicación en los modernos trabajos de levantamiento fotogramétricos, terrestres y aéreos.*

§ 1. Clasificación general de los principales tipos de objetivos fotogramétricos. Síntesis de célebres objetivos fotogramétricos .....	17
§ 2. Modernos objetivos granangulares extraluminosos empleados en Fotogrametría; destacando sus características, su rendimiento y precisión .....	19
§ 3. Modernas cámaras de Fotogrametría aérea .....	22

---

## Capítulo Primero

### NOCIONES FUNDAMENTALES DE OPTICA INSTRUMENTAL

#### § 1. — GENERALIDADES

##### 1. Definición de instrumento óptico.

Llámase *instrumento óptico* a todo instrumento o sistema compuesto de medios ópticamente diferentes y limitados por superficies reflectantes y refringentes que sirven para ayudar o reemplazar al ojo en sus funciones.

##### 2. División de los instrumentos ópticos.

Divídense los instrumentos ópticos en los dos siguientes grupos:

Instrumentos ópticos subjetivos

Instrumentos ópticos objetivos

##### 3. Instrumentos ópticos subjetivos.

Estos instrumentos sirven para prestar ayuda a un ojo o a un par de ojos. Sus principales representantes son:

- a) Los anteojos;
- b) El catalejo (anteojo de Kepler o astronómico, anteojo prismático, etc.);
- c) Los gemelos de teatro;
- d) La lupa;
- e) El microscopio, etc.

En el uso de estos instrumentos la óptica del ojo forma con la de cada uno de ellos un sistema de combinación, el que produce sobre la retina del ojo la imagen del objeto observado. Esta imagen es sólo visible por la persona que observa.

De los instrumentos ennumerados en este grupo, nos ocuparemos solamente con algún detalle de los anteojos.

##### 4. Los anteojos.

A fines del siglo XIII fueron construidos industrialmente en Venecia los primeros anteojos, concebidos en su origen por los religiosos de la Edad Media. Ello es lógico porque fueron los sacerdotes de aquella época las únicas personas que sabían leer las escrituras sagradas.

Se componen de dos cristales colocados en un armazón delante de los ojos y a una distancia de 12 mm del vértice de la córnea, para ayuda en la visión de los ojos míopes y presbítes.

Los anteojos que corrigen la presbicia son de curvatura convergente o positiva y los de los ojos míopes de curvatura de dispersión o negativa, puesto que en los ojos presbítes la imagen del punto remoto en lugar de formarse sobre la retina se forma detrás de ella y en los ojos míopes delante de la misma.

Esta curvatura, positiva o negativa, se suele indicar por el término técnico de dioptría (dptr) que es el valor recíproco de la respectiva distancia focal  $f$  de la lente:

$$\pm 1 \text{ dptr} = \pm \frac{1}{f}$$

La dioptría cero es la que corresponde a un plano ( $f = \infty$ ) y la de la unidad corresponde a la curvatura de una lente, positiva o negativa, con distancia focal de un

metro. Una lente de distancia focal  $f = 0,10$  m tendrá  $+ 10$  dptr si es convergente y  $- 10$  dptr si es divergente. Los valores usuales de las dioptrías oscilan entre 0 y  $\pm 15$ .

Un ojo de visión normal operado de catarata (sin cristalino) tiene que llevar una lente de  $+ 11$  dptr para ver objetos lejanos y de  $+ 14$  dptr para objetos cercanos o para leer.

A partir de la edad de 45 años el ojo humano pierde su facilidad de acomodación o enfoque (ver pág. 119 de la "Optica") por lo que será necesario entonces aumentar las dioptrías positivas en el presbite e ir disminuyéndolas en el ojo miope.

#### 5. Instrumentos ópticos objetivos.

Pertenecen a este grupo:

- a) La cámara oscura de agujero, de Bacon o sin lente;
- b) La cámara oscura con lente;
- c) La cámara fotográfica;
- d) El aparato de proyección;
- e) El microscopio de proyección.

Estos instrumentos ópticos substituyen al ojo en sus funciones, proyectando la imagen de tamaño reducido, visible por muchas personas, sobre el vidrio esmerilado de una cámara fotográfica; o de tamaño aumentado, sobre la pantalla de un aparato de proyección.

En estos instrumentos la óptica instrumental no entra en ninguna combinación con la del ojo observador.

La mayor parte de los aparatos mencionados se hallan detalladamente descritos en sus respectivos lugares de esta obra, de modo que nos podemos limitar a unas pocas recapitulaciones de conceptos fundamentales como iniciación e introducción para la exposición de nuestro tema principal: *El objetivo, sus errores, su corrección y su importante papel en los aparatos de toma y de restitución.*

De los aparatos de este segundo grupo nos ocuparemos muy brevemente de la cámara oscura, sin lente y con lente, como antecedente para el estudio del objetivo de la cámara fotográfica y fotogramétrica.

#### 6. Cámara oscura de agujero, de Bacon o sin lente.

Según hemos visto en pág. 114 del presente tomo, esta cámara con abertura bien elegida produce sobre un vidrio esmerilado una imagen de nitidez y claridad aceptable.

Sabemos también que una reducción de la abertura más allá de ese estado óptimo no conducirá a una mayor nitidez sino que sólo aumentará los efectos de la difracción de los rayos luminosos en los bordes de la abertura empeorando la imagen.

Un aumento de la abertura tampoco mejorará la claridad de la imagen sino que la hará más borrosa hasta llegar a desaparecer porque los delgados haces luminosos que formaban la imagen con abertura óptima son ahora anchos haces de luz incapaces de formarla.

#### 7. Cámara oscura con lente.

La imagen producida por la cámara oscura de Bacon puede ser mejorada notablemente colocando una lente convergente en la abertura, ver pág. 114 de la "Optica".

#### 8. Diafragma de abertura y otros dos conceptos ópticos fundamentales.

La imagen formada por la cámara de Bacon (sin lente), es una *proyección simple*; figurando en ella el punto medio de la pequeña abertura circular como *centro de perspectiva*.

Si en lugar de la abertura circular de la cámara de Bacon colocamos una lente convergente, será la montura de esta lente la que hará el papel de *diafragma de abertura*; a los rayos que pasan por el punto medio de la cámara de Bacon, corresponderán aquí los rayos que pasan por el centro de la lente convergente. Son los llamados *rayos principales* de la proyección óptica. Sus puntos de intersección sobre el plano del vidrio esmerilado o de una placa fotográfica nos dan la imagen del contorno del objeto del espacio.

Si la lente objetivo, en lugar de estar constituida por una sola lente, estaría compuesta de dos o más (como ocurre en los modernos objetivos de cámaras fotográficas) con su diafragma colocado en el centro (ver fig. de pág. 12) la lente delantera (izquierda) formará la imagen de ese diafragma  $D$  en el espacio objeto, imagen que lleva la

denominación de *pupila de entrada* del sistema óptico. La imagen del diafragma de abertura, formada en el espacio imagen (hacia la derecha), es la llamada *pupila de salida* del sistema.

La pupila de entrada  $P$  de un sistema óptico determina la cantidad de rayos luminosos que un punto axial  $O$  puede enviar al sistema; determinándose por la pupila de salida  $P'$  la cantidad de rayos salientes eficaces en la formación de la correspondiente imagen  $O'$  del punto considerado.

Estos dos conceptos ópticos, la pupila de entrada  $P$  y la pupila de salida  $P'$ , introducidos por *Abbe*, tienen mucha importancia en Fotografía y Fotogrametría, como veremos más adelante.

Cuando el diafragma de abertura está constituido por la misma montura del objetivo como en el caso del anteojo telescópico, entonces será esa misma montura del objetivo la pupila de entrada del sistema, resultando entonces la pupila de salida del anteojo  $A$  veces más reducida, dónde  $A$  expresa el aumento del anteojo (ver pág. 154, del tomo II, volumen 1).

## § 2.—ERRORES DE LAS LENTES O DE LAS IMAGENES QUE PRODUCEN

### 1. Aberración esférica de la lente convergente.

Según hemos visto en pág. 104 del presente volumen, los rayos luminosos paralelos que salen de un punto objeto muy lejano y que inciden en distintas zonas de una lente convergente, no se reúnen después de su refracción en un único punto imagen: Los rayos centrales o próximos al eje forman su imagen en un determinado foco; en otro lugar del eje se formará la imagen correspondiente a los rayos marginales. Este error o defecto se denomina *aberración esférica de la lente convergente* y se manifiesta como una falta de nitidez de la imagen. Si llevamos la imagen de los rayos centrales correctamente a su foco quedará fuera de foco o con falta de nitidez la imagen de los rayos marginales y viceversa si se enfocan los rayos marginales. En la práctica se coloca en general el plano de imagen a media distancia de ambos focos obteniendo en consecuencia una falta de nitidez general.

### 2. Aberración esférica de la lente divergente.

Una cosa análoga se produce en la lente divergente: Los rayos paralelos emanados

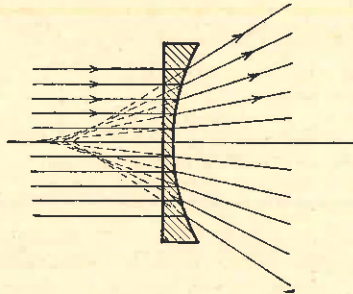


Fig. 1.—Se ilustra la refracción producida por la lente divergente.

de un punto lejano, incidentes sobre diversas zonas de la lente, son divergentes en distinto grado, quedando desviados los rayos marginales como si procedieran de un punto más cercano a la lente que el correspondiente a los rayos centrales (ver fig. 1).

### 3. Aberración cromática.

También sabemos por lo visto en pág. 107 del presente libro que en la refracción de la lente simple se produce una descomposición de la luz solar en los conocidos colores del arco iris; que estos colores tienen distintas distancias focales o sea distintos índices de refracción, siendo máxima la distancia focal (mínimo el índice de refracción) del

color rojo y mínima la distancia focal (máximo el índice de refracción) del color azul.

Resulta entonces que la imagen de un punto luminoso del objeto en lugar de ser un punto será una corta línea axial, con extremo azul más próximo a la lente y extremo rojo más alejado de la misma.

Si hacemos incidir sobre una lente la luz del Sol, podemos recoger sobre una pantalla, en el foco de la misma, como imagen del Sol una mancha clara. Desplazando la pantalla hacia la lente se llegará a un sitio en que la mancha estará rodeada de una franja roja. Es el lugar en el cual se forma la imagen azul por la intersección sobre el eje de los rayos azules y violeta de la luz solar. El interior de la mancha queda blanca debido a la superposición de las imágenes de los demás colores.

Moviendo en cambio la pantalla en sentido contrario, alejándola más y más, se llegará al lugar de la imagen de la luz roja, en el que aparecerá la mancha blanca rodeada por una franja azul.

Si enfocamos con la lente convergente un objeto muy lejano, se obtendrá en el plano focal de la misma la imagen del objeto. Pero, como en este enfoque se emplea el ojo, sensible principalmente para la parte más clara del espectro solar o sea el color amarillo, resultará una falta de nitidez de la imagen formada por los rayos azules y violeta. Si el objeto observado es de cierto tamaño, se notarán sus bordes con un velo de color azul.

Este fenómeno tiene mucha importancia en la fotografía: El ojo enfoca sobre el vidrio esmerilado la imagen de color amarillo, quedando entonces fuera de foco la imagen de color azul formada por la parte de luz de distancia focal corta, azul y violeta, que es químicamente la más eficaz para producir la correspondiente imagen en la placa sensible.

Una lente en la que se ha corregido este grave defecto del cromatismo (1) se denomina *acromática* (2).

(1) Cromatismo: derivado de la palabra *chroma*, que significa color.

(2) Importancia de la corrección del cromatismo de la imagen producida por una lente convergente simple.

La importancia de la utilización clásica de la lente acromática en la construcción de instrumentos ópticos de observación y medición es tan grande que cabe ser destacada mediante el ejemplo del antejo.

En los primeros tiempos después de la invención del antejo ya se sabía que la principal causa de la falta de nitidez de la imagen producida por el objetivo de lente convergente simple, residía en la aberración cromática. También se sabía que la mayor parte de este defecto podía ser eliminado aumentando la distancia focal  $f$  del objetivo del antejo.

Consideraciones geométricas pertinentes habían permitido deducir la siguiente ley cuadrática entre la distancia focal  $f$  y el diámetro  $D$  de la lente:

$$(1) \quad f = k \times D^2$$

donde  $f$  y  $D$  son medidos en milímetros.

A fin de no hacer muy largos los tubos de los antejos se admitió en esos tiempos para  $k$  el valor de 1, 2, siendo entonces la distancia focal  $f$ :

$$(2) \quad f = 1,2 \times D^2$$

En los tiempos actuales, con exigencias respecto a la calidad de la imagen muy superiores, se tiene para la (2):

$$(3) \quad f = 3,8 \times D^2$$

Con la introducción de la lente objetivo acromática en la construcción de los instrumentos ópticos la (3) quedó reducida a la siguiente exigencia:

$$(4) \quad f = 0,1 \times D^2$$

Quiere decir, con aplicar como objetivo, una lente acromática en lugar de la lente simple, la longitud del antejo pudo elegirse 38 veces más corta de lo que exige el uso de una lente convergente simple, de transcendencia fundamental para la construcción del antejo.

Comprenderá ahora el lector la enorme ventaja de que se disponía en el momento de la invención de la Fotografía (año 1839): Hallábanse entonces listos los primeros objetivos acromáticos, fabricados industrialmente primero en Inglaterra y luego en Alemania. Sólo por esa feliz circunstancia fué posible el extraordinario desarrollo del nuevo arte de tan gran esplendor; de cuyas más recientes creaciones fotogramétricas hablaremos en el próximo capítulo.

#### 4. Astigmatismo.

Hemos considerado hasta ahora principalmente puntos objetos axiales, que son aquellos que emiten sobre la lente haces de rayos luminosos simétricos con respecto al eje óptico.

Nos ocuparemos, en lo que sigue, de puntos objetos situados sobre un plano perpendicular al eje y más o menos alejados del eje óptico. Consideramos además que los haces de luz que emiten esos puntos penetran a la lente a través de una pequeña abertura central del diafragma de la lente. Estas condiciones ópticas pueden ser cómodamente realizadas con un giro de la lente alrededor de su eje central lo cual corresponde a un gradual alejamiento del punto objeto de su posición axial inicial sobre el plano perpendicular.

A un giro de  $45^\circ$  de la lente correspondería un ángulo de incidencia de  $45^\circ$  del rayo central del haz.

Con realizar este giro observaríamos que el punto imagen anteriormente obtenido sobre una pantalla y producido por el punto axial ha desaparecido. Si desplazamos la pantalla en el sentido del eje de la lente en busca de la nueva imagen, nos sorprenderá encontrar más próxima a la lente, como primera imagen, una corta línea vertical nítida; si alejamos la pantalla más allá del punto en que antes se hallaba la imagen puntual, encontramos como segunda imagen del punto una corta raya horizontal. Es como si la imagen puntual del punto objeto al desaparecer se hubiera descompuesto en dos imágenes lineales, una vertical y otra horizontal. Este fenómeno ha recibido la denominación de *astigmatismo* (1).

Mediante un reticulado de líneas horizontales y verticales transparentes y fuertemente iluminadas desde atrás, podemos cómoda y eficazmente ilustrar el efecto del astigmatismo: A una cierta distancia detrás de la lente se verán nítidas las líneas verticales y sin nitidez o desaparecidas las líneas horizontales. A otra distancia más alejada que la anterior se verán sobre la pantalla nítidas las líneas horizontales y sin nitidez o desaparecidas las verticales.

#### 5. Error de curvatura astigmática.

A cada giro distinto de la lente o sea a cada nueva posición del punto objeto sobre el plano perpendicular al eje, corresponderá otro par de cortas líneas imagen perpendiculares entre sí. La representación gráfica de estos distintos pares de líneas nos revela enseguida que las mismas no se hallan sobre planos de imagen sino sobre superficies curvas, las que se tocan sobre el eje óptico en un punto que correspondería a un giro cero de la lente. Este defecto se denomina *error de curvatura astigmática*.

Podemos decir entonces que el astigmatismo de una lente se manifiesta en dos sentidos: Produce en primer lugar como imagen dos líneas perpendiculares entre sí y en segundo lugar, forma una imagen nítida del objeto sobre una superficie curva en vez de plana. Se necesitaría entonces una placa curva para obtener la imagen nítida de un objeto extenso.

#### 6. Coma.

Si producimos la inclinación de la lente como para obtener el defecto de astigmatismo anteriormente descrito, observaremos, cuando los haces incidentes sean rayos marginales únicamente, que producen imágenes de raras figuras muy semejantes a colas de cometa por lo cual este defecto ha sido denominado coma (2). Puede decirse entonces que el coma es el astigmatismo de los rayos marginales de una lente convergente.

Finalmente cabe ser destacado el error de *distorsión de la imagen*. Lo colocamos en último término no por su reducida importancia sino por su distinta característica

---

(1) Astigmatismo: derivado del prefijo griego *a*, que significa no y de la palabra griega *stigma*, que significa punto.

(2) Coma: de la palabra griega *coma* que significa cola de cometa.

comparado con los errores de aberración esférica y cromática, astigmatismo y coma; mientras que estos errores afectan únicamente a la bondad de la imagen, el error de distorsión afecta a la propia esencia de la imagen, mereciendo por tal causa una consideración especial.

### 7. Error de distorsión de la imagen.

A fin de ilustrar la manera como se engendra tan importante error para la Fotogrametría, terrestre y aérea, elegimos como objeto un retículo cuadrado. Lo confeccionamos con una placa gelatinada sobre la cual dibujamos una cuadrícula mediante una fina punta. Detrás de ella colocamos una placa de vidrio esmerilado a la cual iluminamos por medio de una potente fuente de luz.

Con esta disposición e iluminación del objeto se podrá obtener mediante una lente convergente la imagen de la red de cuadrados (ver figs. 33 y 34 de pág. 194 del presente volumen). Si colocamos, inmediatamente delante de la lente, entre esta y el objeto, un diafragma central, practicando dentro de un cartón una abertura circular de 4 mm de diámetro, obtendremos la imagen con menor claridad pero con mayor nitidez. Esta imagen es una proyección perspectiva o proyección central en toda su extensión, siendo el cuadrículado semejante al original. Si movemos el diafragma sobre el eje en dirección hacia el objeto, vemos que la imagen se deforma como si fuera de materia plástica. Fuera del eje central, las líneas de los cuadrados se curvan. Originase así una figura que da la impresión de un cuadrículado aplicado sobre la superficie exterior de una esfera. Las líneas que representan imágenes de rectas son convexas hacia afuera, defecto que se llama *error de distorsión de barrilete o de tonel*. Los cuadrados de la imagen han dejado de ser semejantes a los cuadrados del objeto.

Si operamos en forma análoga con el diafragma colocado inmediatamente detrás de la lente, obtendremos una deformación inversa con curvatura de las líneas imágenes de forma cóncava hacia el centro, defecto que se llama *error de distorsión de corselete o cojín*.

Es decir: en ambos casos se ha perdido la uniformidad de la escala de la imagen o sea la propiedad más característica de toda proyección perspectiva.

Sólo por medio de una adecuada combinación de lentes puede ser reducido o eliminado este temible error de distorsión de la imagen. Es un procedimiento óptico, basado en la exacta inversión de los haces de rayos, que permite eliminar, con toda elegancia, cualquier error de distorsión de la imagen fotográfica.

## § 3. — CORRECCION DE LOS ERRORES DE IMAGENES DE LAS LENTES

### 1. Observación previa.

No es nuestro propósito entrar en detalles sobre la técnica de la corrección de lentes objetivos que constituye toda una extensa rama de la óptica práctica y experimental. Nos tenemos que limitar a exponer brevemente los conceptos y principios fundamentales en que se basan esas correcciones para facilitar al lector la comprensión y debida ponderación de los esfuerzos y de los exitosos resultados realizados.

### 2. Generalidades.

La reducción o eliminación simultánea de todos los errores que afectan una lente objetivo es teórica y prácticamente imposible.

El recurso principal de corrección consiste en la combinación de varias lentes (2 hasta 6 y más aún), muchas veces de diferentes clases de vidrio. Según cada caso particular del problema en la práctica, el calculista determinará mediante engorrosos cálculos trigonométricos todos los elementos constructivos que cada uno exige, como ser los radios de curvatura de las lentes aisladas, su grosor y las distancias que las separan, etc. Son por ello muy distintos los cálculos de objetivos para catalejos, microscopios, aparatos fotográficos o cámaras fotogramétricas terrestres o aéreas.

Empero, la teoría de la lente por un lado y la técnica del cálculo por el otro se han perfeccionado a tal grado que es posible para cada caso particular satisfacer el problema con gran precisión.

### 3. Pérdida de luminosidad y brillo de la imagen.

Es de notar que en cada superficie de lente en contacto con el aire, el rayo sufre una pérdida de luminosidad, disminuyendo además el brillo de la imagen por las reflexiones interiores de los rayos luminosos en las superficies de la lente.

### 4. Combinación de sistemas de lentes.

Las lentes de una combinación pueden tener posición libre, es decir hallarse con ambos lados de ellas en contacto con el aire, o pueden encontrarse pegadas entre sí con bálsamo de Canadá (por las cualidades especiales de este bálsamo al tener el mismo coeficiente de refracción que el del vidrio por lo que los rayos no son desviados en su pasaje a través de la unión de las lentes).

Para anular ciertos errores de la imagen, principalmente el de distorsión, suele disponerse simétricamente la parte anterior y posterior de una combinación de sistemas de lentes; pueden destornillarse separando la parte anterior para utilizar solamente la parte posterior con lo que se varía la distancia focal del sistema. Se aplica principalmente en aparatos de toma de vistas fotográficas.

### 5. Magnitud de imágenes producidas por una lente objetivo.

Antes de tratar el primer método de corrección de la aberración esférica, ampliaremos nuestra exposición de pág. 15, del tomo IV de este Compendio.

Para un objeto situado a gran distancia de la lente, la relación entre su tamaño  $\Delta y$  y la correspondiente magnitud de la imagen  $\Delta y'$  formada por una cámara fotográfica de distancia focal  $f$  sobre el plano focal (vidrio esmerilado) puede ser expresada por la fórmula:

$$3) \quad A = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{D}$$

*Ejemplo:* Un objetivo con distancia focal  $f = 30$  cm daría entonces de un objeto lejano una imagen de doble magnitud comparada con la de un objetivo de distancia focal  $f = 15$  cm.

Para objetos próximos a la lente no puede naturalmente utilizarse esta fórmula, en cuyo caso, recordando la fig. 9 de pág. 77 tendremos la siguiente relación considerando que  $f = f'$

$$(2) \quad A = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \frac{f}{x} = \frac{f}{x'}$$

o sea:

$$(3) \quad x \cdot x' = f^2$$

que es la conocida fórmula de la lente, referida a las coordenadas focales  $x$  y  $x'$ , la que juntamente con la (2) nos permite calcular, para cualquier objeto del espacio, lugar y magnitud de la correspondiente imagen, conociendo su distancia  $x$  (distancia del objeto a la lente menos su distancia focal), tamaño  $\Delta y$  del mismo y la distancia focal  $f$  de la lente.

### 6. Primer método de corrección de la aberración esférica.

Sabemos que las aberraciones dependen ante todo de la curvatura de las lentes: entre dos lentes de vidrio común tendrá mayor aberración la de mayor curvatura.

Una lente de menor curvatura o mayor distancia focal tendrá entonces menor refracción esférica, ante todo menor aberración cromática. Este último hecho ha constituido un eficazísimo recurso en la corrección del anteojo astronómico en la infancia de su evolución.

Para la corrección del error de aberración esférica se emplea una combinación de una lente convergente con una lente divergente. Si estas dos lentes tienen la misma curvatura, el mismo diámetro y si son confeccionadas de la misma clase de vidrio, ambas

tendrán la misma distancia focal, positiva la de la primera y negativa la de la segunda, convergente la primera y divergente o de dispersión la de la segunda.

Sabemos también que los rayos marginales incidentes sobre la lente convergente serán más fuertemente refractados contra el eje de los rayos centrales; análogamente, los rayos marginales formarán haces de dispersión de mayor inclinación hacia el eje que los haces centrales.

¿Qué es lo que ocurre si lentes de estas características son estrechamente unidas? Por ser las desviaciones producidas por las dos lentes inversamente iguales, las de convergencia producidas por la primera lente serán iguales a las de dispersión producidas por la segunda resultando una eliminación completa de la aberración esférica, pero al mismo tiempo una anulación de la potencia de refracción. La distancia focal del sistema es infinita o sea cero su dioptría.

El conjunto representa un menisco con superficies curvas paralelas que actúa ópticamente como una placa de vidrio de caras planas y paralelas.

Si la segunda lente (de dispersión) de la combinación de lentes positiva y negativa se separa un poco de la primera (convergente), ver figura 1, queda restablecido el poder de convergencia. El foco anterior de la lente de dispersión  $L_2$  queda trasladado al lugar  $F'_2$  y el posterior a  $F_2$ . Los focos  $F_1$  y  $F'_1$  de la lente convergente  $L_1$  no han variado. Debido a esta disposición de lentes, un rayo paralelo al eje incidente sobre  $L_1$ , en lugar de cortar al eje en el foco  $F'_1$ , será desviado cortándolo por consiguiente en  $F'$ , el nuevo foco de la combinación de lentes.

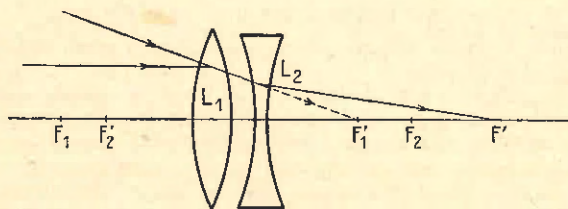


Fig. 1. — Se muestra la eficiencia de la lente divergente en la corrección de la aberración esférica.

Hállase así aumentada la distancia focal del sistema, la que se mide, según hemos visto en la ya citada figura de pág. 77, desde el plano principal posterior del objetivo.

Con un adecuado tanteo se logrará dar a la lente de dispersión la posición más favorable para una suficiente eliminación del error de aberración esférica del objetivo.

Se logró también un aumento de la distancia focal  $f_1$  de la lente convergente  $L_1$  con el consiguiente aumento de la imagen según fórmula 2 (1).

#### 7. Los anteojos del período de infancia de su desarrollo. Anteojo de Kepler.

En el período de infancia del anteojo empleáronse anteojos con objetivos hasta de 32 metros de distancia focal para reducir no sólo los errores de las aberraciones de las imágenes de los objetos celestes y obtenerlas así con suficiente claridad y nitidez, sino también para eliminar la influencia tan perniciosa del cromatismo de las lentes.

Cabe mencionarse como importante etapa en este desarrollo el anteojo astronómico indicado por Kepler en 1611 (ver pág. 150 del presente tomo).

(1) La aplicación de este principio, que al aumentar la distancia focal en una lente convergente (objetivo) se obtiene un aumento del tamaño de la imagen dió origen a que en 1851 el insigne ingeniero italiano P. I. Porro inventara el teleobjetivo de aplicación universal en las cámaras fotográficas. El teleobjetivo fotográfico se compone de una lente convergente de gran distancia focal comparada con la de la lente divergente, aumentándose con ello considerablemente la distancia focal del sistema, lo que da lugar a un conjunto óptico de menor longitud total que si pretendemos obtener el mismo aumento de la imagen utilizando solamente la lente convergente. En la Primera Guerra Mundial (1914 - 1918) logróse construir teleobjetivos fotográficos, para fines militares, con distancia focal de hasta 1,20 metros.

### 8. Segundo método de corrección de la aberración esférica.

Como hemos comentado anteriormente en el número 6 se elimina el error de aberración esférica adosando dos lentes, una convergente y otra divergente. Sin embargo utilizando este procedimiento anulamos el poder refractante del sistema es decir, ambas lentes se comportan como una placa de vidrio plana paralela.

Este inconveniente puede ser eliminado cómodamente utilizando lentes de vidrio de distinto índice de refracción.

En efecto, si construimos un sistema de dos lentes, la primera convergente, de vidrio más refractante (flint) y la segunda divergente, de vidrio menos refractante (crown) cuya curvatura sea igual de modo de poder adosar una a la otra, obtendremos que la distancia focal del sistema quedará modificado de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \left(-\frac{1}{f_2}\right)$$

donde  $f_1$  representa la distancia focal de la lente convergente y  $f_2$  la de la lente divergente. En consecuencia se ha corregido el defecto de la aberración esférica al adosar ambas lentes obteniendo un nuevo sistema óptico cuya distancia focal se calcula de la fórmula mencionada. Ambas lentes serán unidas por medio de bálsamo de Canadá cuya propiedad de poseer igual índice de refracción que el vidrio ya nos es conocida.

Como veremos a continuación, este método de corrección es el más apropiado puesto que corrigiendo el defecto de aberración esférica eliminamos al mismo tiempo el del acromatismo.

### 9. Corrección de la aberración cromática. Chester Moor Hall, John Dollond y José von Fraunhofer.

Como hemos indicado en pág. 108 del presente tomo es en el año 1728 que el físico inglés Chester Moor Hall indicó que la parte principal de la aberración cromática desaparece cuando se hace coincidir la imagen formada por los rayos rojos con la formada por los rayos azules combinando lentes de distinta clase de vidrio, obteniendo así por superposición una imagen de color blanco (para el ojo humano) es decir descubrió el principio de corrección del cromatismo visual de un sistema óptico.

En el año 1758 otro inglés el óptico John Dollond industrializó este principio construyendo los primeros sistemas de lentes acromáticas, patentados por él y publicando extensamente sus experiencias por lo que se lo considera como el inventor del sistema de lentes acromáticas.

Con el procedimiento mencionado se corrige únicamente el efecto del espectro primario sin anular la acción del espectro secundario producido por los colores remanentes y que puede llegar a ser muy molesto en los telescopios con grandes distancias focales. Como único recurso para eliminar el efecto del espectro secundario, en aquella época, se conocía el de aumentar el diámetro de las lentes del sistema diafragmando su abertura útil.

Rivalizaban entonces los más famosos talleres de la época, el de J. Dollond en Inglaterra y el de José von Fraunhofer en Munich, en superarse en la fabricación de grandes objetivos. Las medidas máximas de los de Dollond alcanzaron a 12,7 cm, los de Fraunhofer alcanzaron 24 cm.

La importancia científica en el campo de la óptica de José von Fraunhofer es de tal trascendencia que justifica una breve nota biográfica (ver su retrato en pág. 29 del presente tomo).

Entró como oficial en un famoso taller de óptica-mecánica de Munich, en el cual se distinguió en seguida por su extraordinario talento práctico que se revelaba por sus fructíferas iniciativas. Es a él que se debe la introducción del vidrio de prueba para comprobar la exactitud de la curvatura esférica de las lentes, método de contralor universalmente en uso hasta el día de hoy.

Diseñó y construyó una máquina especial para esmerilar y pulir lentes de gran diámetro, ocupóse con buen éxito de la fundición de nuevos cristales para objetivos acromáticos. En las operaciones de clasificación de estos nuevos cristales, Fraunhofer descubrió las famosas líneas del espectro de la luz solar, que hoy llevan su nombre, y que constituyeron el fundamento de un nuevo método de investigación llamado método espectral.

Inició el método de cálculo previo de las dimensiones de un sistema de lentes evitando su construcción por tanteo tan difundido en esa época siendo su prestigio en el campo de la óptica práctica de principios del siglo XIX tal que sólo puede ser comparado con el del Profesor Ernesto Abbe en la segunda mitad del mismo.

#### 10. Ernesto Abbe y Otto Schott; los famosos cristales de Jena.

Recién en 1885 a iniciativa del Profesor Ernesto Abbe se comenzó a ejecutar el cálculo previo de todos los datos constructivos y ópticos de un sistema de lentes. El mencionado E. Abbe fomentó la necesidad de contar con nuevos tipos de vidrio que cumplieran las exigencias de los calculistas de lentes ópticas. En colaboración con Otto Schott, propulsor de la industria del vidrio, se elaboraron nuevos tipos de cristales de crown, flint y otros con los que fué posible eliminar también el efecto del espectro secundario en la aberración cromática e iniciar la construcción de los conocidos microscopios de la casa C. Zeiss de Jena y los afamados cristales ópticos de Jena.

#### 11. Corrección de los errores de distorsión.

Si combinamos sobre un mismo eje óptico dos sistemas de lentes acromáticas (dos lentes cada uno) ver fig. 2 podemos corregir con mucha facilidad el error de distorsión. Conociendo exactamente la distancia entre ambos sistemas y demás datos de las lentes nos será fácil calcular la distancia focal del nuevo sistema.

Exactamente en el centro del mismo colocamos el diafragma *D*. Dicho diafragma será para el primer sistema de lentes un diafragma posterior y para el segundo un diafragma anterior. Los haces de rayos que atraviesan el primer sistema darán una imagen con *error de distorsión de corselete o cojín* por encontrarse el diafragma en un plano posterior. Como ambos sistemas de lentes son simétricos con respecto al diafragma, el mismo haz antes mencionado atravesará el segundo sistema de lentes con igual ángulo de incidencia pero con *error de distorsión de barrilete* por encontrarse el diafragma en un plano anterior al sistema de lentes. Por consiguiente ambos errores de igual magnitud relativa, quedarán automáticamente eliminados dando lugar a una imagen del objeto, sin error de distorsión, en el foco resultante del sistema de ambas lentes acromáticas. Un sistema de este tipo lleva la denominación de *aplanático*.

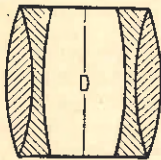


Fig. 2. — Se ilustra un sistema óptico acromático en el cual se reducen los efectos de los errores de distorsión.

#### 12. Otro método de corrección del error de distorsión. Principio Porro - Koppe.

La placa fotográfica, obtenida en un levantamiento fotogramétrico o simplemente en un aparato fotográfico común, afectada de error de distorsión, se colocará para eliminar ese error dentro de la misma cámara u otro instrumento ópticamente idéntico utilizado como aparato de proyección de la imagen. Los puntos imágenes se encuentran entonces en el plano focal de la placa (hemos supuesto, como sucede en Fotogrametría, que los puntos objetos levantados se encuentran a gran distancia). Los haces de rayos que emiten al ser proyectados y que atraviesan el objetivo de la cámara, lo abandonan en forma idéntica a su entrada en la cámara durante la toma, en forma de haces paralelos en los cuales pueden medirse cómodamente los respectivos ángulos que se quieran determinar. Esta medición se efectúa con un anteojo goniómetro especial, que lleva la denominación de *fotogoniómetro*.

Este ingenioso método metrofotográfico fué ideado por Porro y completado prácticamente por Koppe, razón por la cual lleva la denominación de *principio de Porro-Koppe*. Este principio es de descollante aplicación en los grandes aparatos de restitución óptica de Fotogrametría, cuyo principal representante es el *Estereoplanógrafo de Bauersfeld-Zeiss* (ver pág. 161 del tomo IV de este Compendio).

Se puede medir así por la reciprocidad de los haces emanados de los puntos objetos en el momento de la exposición y de los emanados de los correspondientes puntos imagen en el momento de la medición fotogramétrica, los verdaderos valores de los ángulos libres de error de distorsión.

## 13. Corrección del error de astigmatismo y coma.

La eliminación de los errores astigmáticos (astigmatismo, error de curvatura astigmática y coma) no puede obtenerse por medio de un simple cálculo al no existir para este fenómeno óptico fórmulas exactas que lo controlen. Deben eliminarse con cálculos engorrosos y solamente con resultados aproximados, combinados con estudios prácticos del taller, válidos únicamente para cada caso particular en estudio. No podrá eliminarse completamente la curvatura astigmática de la imagen, por ello se acostumbra a disminuirla hasta límites tales que no resulten visibles a los fines a que está destinado el objetivo o sistema de lentes. Utilizarlos para reproducir imágenes de mayor tamaño que el estipulado resultará inadecuado debido a la falta de nitidez que se observará en los bordes de la imagen.

## § 4. — LEYES DE LAMBERT; SU GRAN IMPORTANCIA FOTOGRAFICA Y FOTOGRAFOMETRICA

## 1. Intensidad de iluminación del fotograma; indicación de los factores determinantes.

En la obtención de vistas fotográficas la intensidad de iluminación del fotograma depende de la claridad del objeto fotografiado, de la razón de apertura del objetivo de la cámara, del ángulo de imagen, así como de las pérdidas de luz sufrida por los rayos debido a la reflexión y absorción en su pasaje por la lente.

## 2. Primera ley de Lambert, sobre la cantidad de rayos entrantes.

Siendo  $O$  (ver fig. 1), un punto axial de un elemento perpendicular al eje en  $O$ ,  $\varphi$  el semi-ángulo bajo el cual aparece en  $O$  la pupila de entrada  $P$  del objetivo, la primera ley de Lambert nos dice que: La cantidad de rayos entrantes  $I$  se mide por el cuadrado del seno del semi-ángulo  $\varphi$ :

1)

$$I = \text{sen}^2 \varphi$$

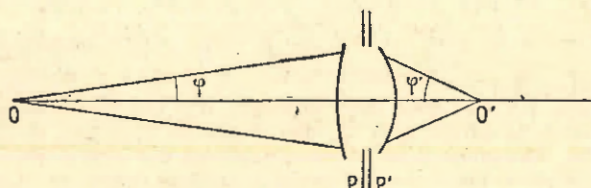


Fig. 1. — Se ilustra la primera ley de Lambert: siendo  $O$  el punto objeto,  $P$  la pupila de entrada,  $\varphi$  el semiángulo de apertura del haz resulta:  
 $I = \text{sen}^2 \varphi$

La misma ley vale para el espacio imagen con el cambio de nomenclatura correspondiente,  $\varphi'$  y  $P'$ .

La cantidad de rayos luminosos  $I'$  salientes por la pupila  $P'$  está dada por:

(2)

$$I' = \text{sen}^2 \varphi'$$

3. Importante caso particular: objeto  $O$  lejano.

Para el caso particular de un objeto  $O$  lejano (ver fig. 2), al cual corresponden rayos incidentes paralelos al eje óptico, la cantidad de rayos incidentes será medida por el cuadrado del siguiente quebrado:

$$\frac{\text{diámetro } d \text{ de la pupila de entrada}}{\text{distancia focal } f}$$

o sea:

(3)

$$\left(\frac{d}{f}\right)^2$$

Este quebrado  $\frac{d}{f'}$  representa la medida de la intensidad de iluminación para este caso, de gran importancia en Fotogrametría.

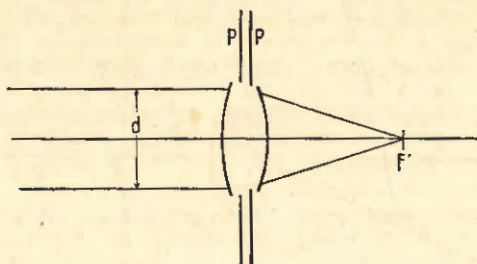


Fig. 2. — Se ilustra la primera ley de Lambert para el caso particular de un punto objeto lejano: siendo  $d$  el diámetro de la pupila de entrada,  $f'$  la distancia focal del sistema (no indicado)

$$\text{resulta } I = \left(\frac{d}{f'}\right)^2$$

Según ya dijimos en pág. 11 del tomo IV de este Compendio se suele expresar el quebrado  $\frac{d}{f'}$  por una fracción con numerador 1; por ejemplo: 1: 4,5 donde 4,5 expresa el número de veces que el diámetro  $d$  de la lente entra en la distancia focal  $f$  de la misma.

#### 4. Máxima abertura útil o intensidad de iluminación relativa e intensidad de iluminación absoluta.

El concepto  $\frac{d}{f}$  es de gran importancia práctica y sirve generalmente para calificar la luminosidad de un objetivo.

Empero, sabemos por lo visto anteriormente, que esa luminosidad no es la real, la verdadera, debido a las pérdidas de luz que los rayos luminosos sufren en su pasaje por el objetivo: Con cada entrada de un rayo luminoso del aire al vidrio, una pequeña parte de su luminosidad se pierde por reflexión. Lo mismo ocurre en su salida, pudiendo estimarse en un 5 % a "grosso modo" la pérdida de luz sufrida por el rayo luminoso en su pasaje del aire al vidrio y viceversa. Con más aproximación podemos decir:

- 9 % de pérdida para 2 superficies de vidrio en contacto con aire.
- 17 % de pérdida para 4 superficies de vidrio en contacto con aire.
- 25 % de pérdida para 6 superficies de vidrio en contacto con aire.
- 32 % de pérdida para 8 superficies de vidrio en contacto con aire.

A esta pérdida por reflexión debe agregarse la de absorción, obteniéndose así una reducida intensidad de iluminación total remanente en el sistema óptico de un objetivo fotográfico, en el supuesto de tratarse siempre de iluminación de la parte central del fotograma o sea de objetos en la proximidad del eje óptico.

#### 5. Segunda ley de Lambert relativa a la iluminación o claridad superficial.

Mientras que en la observación con antejo interesa principalmente la claridad y nitidez de las imágenes de los objetos situados en la proximidad del eje óptico, en la Fotografía y Fotogrametría, es de mucha importancia la claridad superficial, es decir, la distribución de la intensidad de iluminación sobre toda la extensión de la imagen.

Para esta distribución de iluminación desde la parte central hacia los bordes de la placa, Lambert encontró la siguiente ley (ver su ilustración en fig. 3):

Intensidad de iluminación para la inclinación  $\varphi'$  = claridad de la parte central multiplicado por  $\cos^4 \varphi'$  resultando por ejemplo una reducción al 3/4 para un valor del semi-ángulo de imagen de  $21^\circ$  y una reducción a la mitad para  $\varphi' = 33^\circ$ .

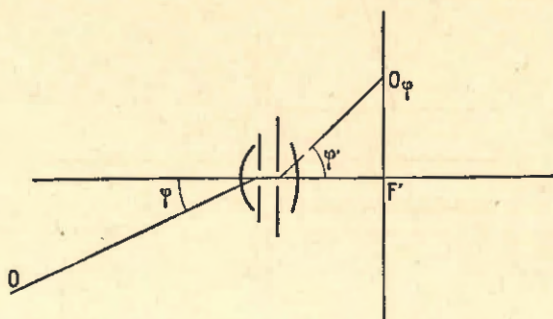


Fig. 3.— Se ilustra la 2ª ley de Lambert siendo O el punto objeto de un rayo muy inclinado (muy alejado del punto óptico) de ángulo de incidencia  $\varphi$ .  $\varphi'$  el correspondiente ángulo de salida en el espacio imagen,  $I_c$  la intensidad de iluminación del punto objeto considerado como perteneciente a la zona central, resulta la intensidad de iluminación  $I = I_c \cdot \cos^4 \varphi$ .

#### 6. Ejemplo de aplicación numérica de la segunda ley de Lambert.

Para un objetivo de cámara normal de  $18 \times 18$  cm de dimensión del fotograma, distancia focal  $f = 20$  cm resultaría:

$$\begin{aligned} \text{tg del ángulo de imagen } \varphi' &= \frac{18:2}{20} = 0,45 \\ \varphi' &= 24^\circ 13' 40'' \\ \cos^4 \varphi' &= 0,6916 = \sim \frac{2}{3} \end{aligned}$$

es decir en el borde de la placa la claridad de la imagen quedaría reducida en un 2/3 de la de la parte central.

Para el objetivo de cámara granangular con  $18 \times 18$  cm y  $f = 10$  cm, tendríamos:

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi' &= \frac{18:2}{10} = 0,9 \\ \varphi' &= 41^\circ 59' 14'' \\ \cos^4 \varphi' &= 0,3052 = \sim \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Es decir, la claridad de la parte periférica de la placa quedaría reducida a la tercera parte.

#### 7. Conclusión.

Las pérdidas de luz, resultantes de la reflexión y disminución de intensidad de iluminación en los bordes de las placas podrían hacernos creer que solamente los haces de moderada inclinación (rayos centrales) pueden ser aprovechados en la fotografía y visión ocular normal.

Sin embargo no debemos olvidar que tanto la emulsión de la placa fotográfica como el ojo humano poseen gran insensibilidad a las variaciones de intensidad de iluminación. Es por ello que en un objetivo compuesto por 4 lentes en contacto libre con aire no se aprecia mayor diferencia entre la iluminación de la parte central y la de los bordes (rayos incidentes bajo un ángulo de  $17\frac{1}{2}^\circ$ ) a pesar que esta diferencia de iluminación llega a un 17 %.

Tratándose de objetivos con gran inclinación del rayo incidente (granangulares) es obvio que la pérdida de luminosidad será apreciable por lo que se los construye de modo especial para contrarrestar ese defecto.

## Capítulo Segundo

### TIPOS MODERNOS DE OBJETIVOS FOTOGRAMETRICOS Y NOVEDADES OPTICAS DE MAYOR APLICACION EN LOS LEVANTAMIENTOS TERRESTRES Y AEREOS

#### § 1. — CLASIFICACION GENERAL DE LOS PRINCIPALES TIPOS DE OBJETIVOS ACTUALMENTE EN USO

##### 1. Síntesis de célebres objetivos fotogramétricos.

Los principales tipos de objetivos hoy en uso pueden clasificarse, teniendo en consideración la razón de abertura (máxima),  $\frac{d}{f}$  en las siguientes 4 clases:

*Primera clase* (en dos distintas ejecuciones) con gran abertura, 1: 3 hasta 1: 1,5.

En su primera ejecución, con distancia focal normal, para cámara de taller para toma de retratos.

En su segunda ejecución, con distancia focal intermedia y pequeña, gran ángulo de imagen, para cámara aerofotogramétrica común, cámara fotográfica de tamaño reducido y proyectores.

En estos tipos de objetivos deben estar muy bien corregidos los errores de aberración.

##### *Segunda clase.*

Pertenece a esta clase el llamado *objetivo universal*, llamado así por sus múltiples aplicaciones.

Los más luminosos entre ellos, con aberturas de:

1: 4,5

presentan a fin de responder a las exigencias de la alta calidad de la imagen, al igual que los objetivos de la primera clase, combinaciones de 6 y hasta 8 lentes.

Los menos luminosos con

1: 7

tienen generalmente sólo 4 lentes en contacto con el aire.

En ambos tipos se exige un ángulo de imagen de 50° y para todo este campo una corrección del error de curvatura astigmática y corrección del error de distorsión.

Un tercer tipo de esta clase de objetivos con:

1: 9

lo asemeja a la tercera clase, granangulares.

También pertenecen a esta segunda clase los llamados *objetivos dobles* o *simétricos*, universales por excelencia porque pueden ser empleados con 2 y hasta 3 distancias focales distintas, según se emplee todo el conjunto del sistema o sólo el primer grupo o sólo el segundo grupo de la combinación.

Esas dos partes, la anterior y la posterior, simétricas con respecto al diafragma central, constituyen aisladamente consideradas, el tipo de objetivos agrupados en la 4ª clase.

##### *Tercera clase, granangulares.*

La razón de abertura es relativamente pequeña:

1: 18 y menores

debiendo cuidarse en este tipo de objetivo no tanto la nitidez de la parte central de la imagen sino principalmente la corrección de la aberración de curvatura astigmática y la corrección del error de distorsión en toda la extensión del fotograma.

Es sobre este tipo de lente y sus notables perfeccionamientos realizados en los últimos 15 años que nos ocuparemos en el segundo párrafo.

#### Cuarta clase.

Mientras que en las tres clases de lentes objetivos descritos el diafragma se halla ubicado dentro del sistema, en esta 4ª agrupación se encuentra colocado delante del mismo, acusando por ello todos los objetivos de este tipo distorsión de barrilete o tonel en moderado grado.

Para que sea posible la corrección de las aberraciones esférica y astigmática, deben elegirse aberturas de:

1: 12 y menores

Con esta breve exposición de conceptos fundamentales (que abarca también todo el primer capítulo), consideramos haber dado al lector los suficientes elementos de juicio para poder apreciar debidamente los progresos ópticos realizados en la construcción de nuevos objetivos granangulares y su aplicación en las cámaras aéreas de gran formato para Triangulación aérea, tema del segundo párrafo.

#### 2. Síntesis de célebres objetivos fotogramétricos.

De acuerdo a la finalidad del presente apéndice, de completar la exposición del Tomo IV de nuestro Compendio, con las últimas novedades en materia de objetivos, daremos a continuación las características de los principales tipos, figurando entre las creaciones más modernas el objetivo *Topogón* y el *Pleón*, con los cuales quedó iniciada una evolución en la que nos encontramos en el momento actual.

En general, podemos clasificar los objetivos fotogramétricos en los siguientes grupos:

##### a) Objetivos de fototeodolitos.

###### 1) El *Colinear* de Voigtländer,

1: 6,3 con  $f = 16$  cm

empleado por C. Koppe en su fototeodolito (ver págs. 35-36 del tomo IV).

###### 2) El *Ortoprotar* de Zeiss,

1: 25 con  $f = 19$  cm

empleado por Zeiss en su renombrado fototeodolito de precisión del año 1926.

###### 3) El *Topogón* de Zeiss,

1: 6,3 con  $f = 10$  cm

empleado por la firma *Zeiss-Aerotopograph* (Munich) en el modernísimo pequeño modelo de fototeodolito, formato  $6 \times 9$  cm para exploraciones geográficas.

##### b) Objetivos de cámaras de restitución.

###### El *Tessar métrico* de Zeiss,

1: 5

especialmente destinado para los grandes aparatos de restitución.

Hállase en él empleado por primera vez la placa de cristal colocada delante del plano focal del sistema para reducir los efectos del error de distorsión.

##### c) Objetivos de cámaras aerofotográficas.

###### 1) El *Ortometar* de Zeiss,

1:4,5 = 21 cm

###### 2) El *Aviotar* de Wild (Heerbrugg),

1:4,2 = 21 cm

Uno de los objetivos más luminosos que actualmente existe para cámaras aéreas de precisión.

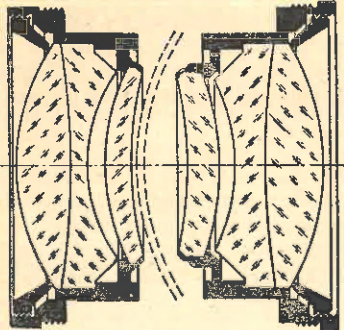


Fig. 1. — Ortometar de Zeiss, 1:4,5,  $f = 21$  cm ( $\frac{2}{3}$  tamaño natural). Para tomas aérea comunes; gran corrección de errores.

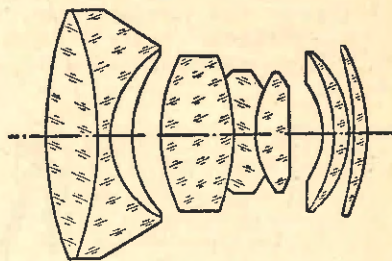


Fig. 2. — Aviotar de Wild (Heerbrug), 1:4,  $2-f = 21$  cm (tamaño natural). Uno de los objetivos más luminosos y mejor corregidos que existen para cámara de toma aérea.

#### d) Objetivos granangulares.

- 1) El *Hipergón* de Goerz (ver fig. 1, pág. 19)  
1:20 con  $f = 4$  cm
- 2) El *Topogón* de Zeiss (ver fig. 2, pág. 20)  
1:6,3 con  $f = 10$  cm.
- 3) El *Pleón* de Zeiss (ver fig. 3, pág. 22)  
1:8 con  $f = 7,5$  cm

En el próximo párrafo nos ocuparemos con más detalle de estos 3 objetivos granangulares que constituyen la última palabra en objetivos fotogramétricos.

### § 2. — MODERNOS OBJETIVOS GRANANGULARES EXTRALUMINOSOS USADOS EN FOTOGRAMETRIA; DESTACANDO SUS CARACTERISTICAS CUALIDADES, RENDIMIENTOS Y PRECISION

#### 1. Objetivo *Hipergón* de Goerz, punto de partida para un nuevo desarrollo constructivo de objetivos.

En el año 1900 la casa C. P. Goerz construyó el objetivo granangular *Hipergón* (ver fig. 1), para ángulos de imagen hasta  $135^\circ$  con buena corrección de la aberración astigmática de curvatura y del error de distorsión.

#### 2. Inconvenientes del *Hipergón* de Goerz.

Por haberse dejado sin la suficiente corrección de los errores de aberración esférica y cromática, el *Hipergón* sólo puede ser utilizado para la razón de apertura

$$1:20 \text{ hasta } 1:30$$

lo cual lo clasifica entre los objetivos granangulares (3ª clase de objetivos).

Para la fotografía de objetos sin movimiento, en la cual puede aumentarse a voluntad el tiempo de exposición, el mencionado inconveniente no tuvo carácter serio.

Empero, cuando después de 1930 se empezó a divisar la posibilidad de la "conquista del aire" por medio de la triangulación aérea se planteó como condición imprescindible la construcción de objetivos granangulares muy luminosos y su instalación en las correspondientes cámaras de gran formato.

Sólo así la triangulación aérea podía resultar eficiente y racionalmente un progreso en los nuevos métodos de levantamiento de cartas.

Comenzó entonces una acérrima lucha, principalmente en Alemania y Rusia para obtener objetivos granangulares con una luminosidad de 1:6,3 y mayores aún.



Fig. 1. — *Hipergón* de Goerz, 1:20,  $f = 4$  cm (tamaño natural). Objetivo de dos lentes, diseñado especialmente para aparatos de restitución.

### 3. El Topogón de Zeiss (Metrogón de Bausch y Lomb).

El objetivo granangular Topogón ideado por E. Richter (ver figura 2) y construido por Zeiss en 1935 permite tomar vistas con buena corrección de errores hasta  $95^\circ$  de ángulo de imagen.

Puede considerarse a este objetivo como básico para toda la Fotogrametría granangular.

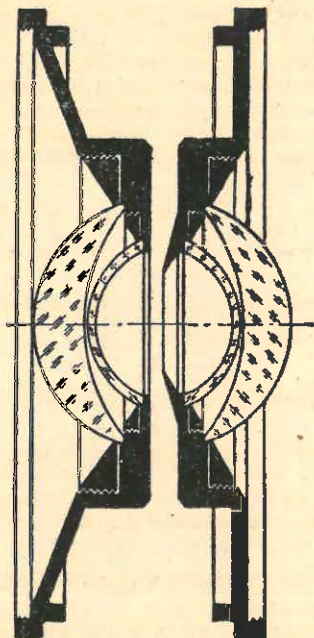


Fig. 2.—Topogón de Zeiss.  
1: 6,3 -  $f=10$  cm (tamaño natural). Objetivo granangular de  $95^\circ$  de ángulo de imagen con buena corrección de errores, para fotogramas de  $18 \times 18$  cm.

En los Estados Unidos de Norte América lo construye la firma *Bausch y Lomb* (Rochester) bajo la denominación de *Metrogón*.

### 4. Aplicación práctica del Topogón en la Fotogrametría terrestre.

La experiencia ha demostrado que las ventajas de las emulsiones de grano fino que se utilizan en la Fotogrametría terrestre, permiten reducir la distancia focal de la lente de toma y con ello todas las dimensiones de la cámara, sin perjuicio de la bondad de la imagen en la restitución de los detalles de la misma.

Basándose en este hecho la firma Zeiss-Aerotopograph construyó un nuevo modelo de Fototeodolito pequeño, de reducidas dimensiones y peso con objetivo Topogón 1: 6,3,  $f=5,5$  cm y formato de fotograma  $6 \times 9$  cm. Inicialmente fué empleado en planos de escala mediana y pequeña, demostrando su uso que es perfectamente aplicable para la obtención de cartas de gran escala como las utilizadas en los trabajos de ingeniería.

### 5. Valores angulares límites del campo de imagen para dos distintas finalidades de la práctica.

Primer caso: Cuando se deba obtener la máxima precisión, considerando los errores

propios de la toma de vistas y de la medición de las mismas, la práctica aconseja admitir como máximo el valor de 100°.

*Segundo caso:* Empero cuando no se trata de obtener la máxima precisión sino por ejemplo en el caso del procedimiento de triangulación radial o de levantamientos de conjunto, es más provechoso emplear ángulos de imagen más grandes, hasta de 150° o mayores aún.

Sin embargo, no se tratará solamente de producir o realizar ese aumento de la magnitud del ángulo del campo de la imagen sin cuidar, como condición imprescindible, que esas imágenes así obtenidas sean fotogramétricamente aprovechables.

En la lucha por las dificultades ópticas que se oponían a la realización de este objeto, se han utilizado dos recursos, el de la cámara múltiple (doble, cuádruple), ver pág. 134 del tomo IV y el del *objetivo único*, basado en la idea de *R. Hill* con la que se inició una fase de evolución en la construcción de objetivos, actualmente en pleno desarrollo.

#### 6. Dos recursos para obtener grandes campos de las imágenes de fotogramas aéreos.

El primer recurso consistió en la construcción de las cámaras múltiples descritas en pág. 134 antes citada.

#### *Inconvenientes de este primer recurso.*

Fuera de las grandes dificultades mecánico-ópticas que existen para conseguir un perfecto movimiento automático y simultáneo del conjunto, existe la otra que obliga emplear un aparato adicional en el cual las diversas vistas son proyectadas o deben ser proyectadas sobre un plano de proyección único.

#### *Segundo recurso ideado por R. Hill, patentado en 1923.*

Según Hill será colocado delante del objetivo granangular propiamente dicho un menisco de dispersión de gran tamaño que desvía los rayos incidentes en forma tal que caigan con la buscada inclinación sobre el objetivo colocado detrás del mismo.

Es lógico que este menisco ha de ocasionar en la imagen producida por el objetivo granangular distorsiones muy grandes, a las que se tratará de eliminar por medio de un sistema óptico auxiliar especial.

#### 7. El Pleón de Zeiss construido por R. Richter.

Partiendo de la idea de Hill, *R. Richter* construyó, en 1941 en la casa Zeiss, un nuevo tipo de objetivo granangular que produce una imagen que ya no es una proyección perspectiva de un objeto del espacio.

Llamóse al nuevo objetivo *Pleón* (ver figura 3); sus características son: abertura 1: 8 distancia focal  $f = 7,5$  cm, tamaño del fotograma  $18 \times 18$  cm sobre el cual se forma una imagen circular de 190 cm con claridad uniforme.

Sus rasgos constructivos son: Por un gran menisco de dispersión Hill modificado por Richter, los rayos incidentes de un punto objeto caen sobre un Topogón modificado colocado detrás, produciendo una imagen de 148° de amplitud con iluminación uniforme pero con extraordinaria distorsión de corselete o cojín.

#### 8. Transformador "Pleón", eliminador de la distorsión producida por el objetivo Pleón.

A fin de eliminar la extraordinaria distorsión producida en la imagen del Pleón, *R. Richter* construyó un aparato adicional especial que llamaremos "transformador Pleón", que en base a los originales de formato  $18 \times 18$  cm dibuja directamente la imagen corregida de distorsión sobre una placa o papel en el formato  $30 \times 30$  cm.

### 9. Aplicación del equipo Pleón.

Cuando se trata de triangulación radial y en particular el procedimiento mecánico o "slotted template method", se pueden aplicar directamente los originales del Pleón.

Para *fotocartas*, en cambio, los originales deben ser lógicamente transformados previamente en imágenes libres de distorsión.

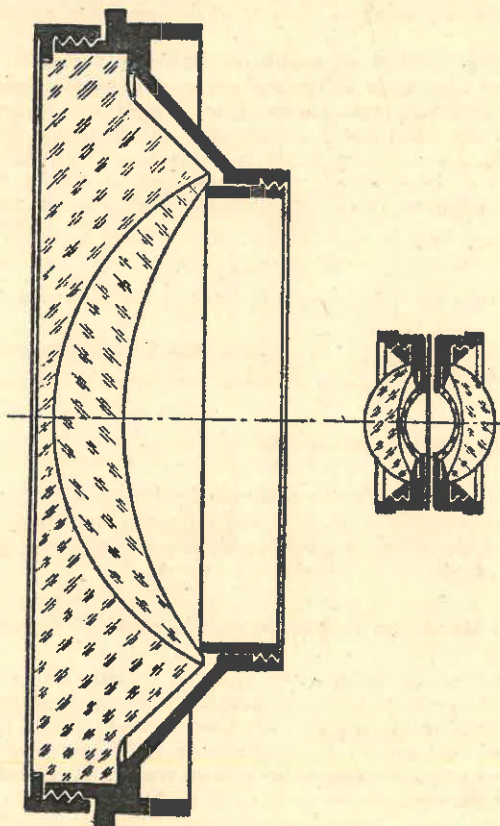


Fig. 3.—Pleón de Zeiss, 1:8,  $f = 7,5$  cm (1/3 tamaño natural). Objetivo granangular,  $148^\circ$  de campo. Presenta una extraordinaria iluminación uniforme de la imagen a expensas de gran distorsión de corselete.

### 10. Calidad del trabajo realizado con Pleón.

La comparación de un trabajo obtenido con un equipo Pleón con el de una cámara múltiple de la misma magnitud de ángulo de imagen, revela una completa equivalencia de precisión tanto en las partes centrales como en las regiones marginales del fotograma.

## § 3. — MODERNAS CAMARAS DE FOTOGRAMETRIA AEREA

### 1. Observación previa.

Acabamos de señalar de que el trabajo realizado con el moderno equipo aerofotogramétrico Pleón de objetivo único y manejo simple, es equivalente a la vista obtenida

con cámara cuádruple (4 objetivos) de complicada construcción y funcionamiento. Que estas dos vistas sean equivalentes lo revela palpablemente el gran progreso realizado en los últimos años, el que se traduce en la simplificación de la construcción, la universalidad de su aplicación y automatismo de su funcionamiento.

He aquí las características de uno de estos tipos de cámaras aerofotogramétricas modernas.

### 2. Características de una moderna cámara aerofotogramétrica.

El último modelo de cámara aérea alemana produce sobre un formato de  $18 \times 24$  cm primero una vista del terreno en un tamaño de  $18 \times 18$  cm y sobre el resto del fotograma simultáneamente con la exposición de la vista del terreno, mediante 2 cámaras auxiliares ubicadas dentro de la caja principal,

2 vistas adicionales

una en la dirección del vuelo y la otra perpendicular a ella, a fin de obtener así los elementos (parámetros) angulares para la orientación externa de la vista.

La cámara se provee con dos elementos portaobjetivos (para la cámara principal), una con objetivo

*Ortometar* con  $f = 21$  cm

y otro con

*Topogón* con distancia focal  $f = 10$  cm

pudiéndose así utilizar indistintamente el equipo para vistas normales y vistas granangulares.

### 3. Dos tendencias diametralmente opuestas en la construcción de cámaras aerofotogramétricas.

R. Hugershoff propuso una reducción de las medidas del formato de las cámaras a  $6 \times 6$  cm a fin de realizar con ello una reducción de las medidas de los grandes aparatos de restitución.

Las experiencias de la última segunda Guerra Mundial hicieron triunfar la tendencia opuesta propiciada por los Norteamericanos, de aumentar el formato del fotograma al tamaño grande de  $30 \times 30$  cm.

### 4. Características de un segundo tipo de cámara granangular, con formato de $30 \times 30$ cm ó $24 \times 24$ cm (9 pulgadas).

El deseo de sacar pleno provecho de las óptimas cualidades del Topogón condujo a completar el primer tipo de moderna cámara que acabamos de caracterizar por un segundo modelo, más especialmente destinado a levantamientos aéreos a gran escala, con un objetivo Topogón de 20 cm. y un formato de:

$30 \times 30$  cm, ó

$24 \times 24$  cm (9 pulgadas)

No obstante estas incómodas dimensiones, tanto para el aparato de toma como del aparato de restitución, este moderno tipo de cámara ha venido conquistando un honroso puesto de preferencia en muchos países del mundo.

### Observación final.

Esta breve exposición sobre errores de las imágenes y su corrección, así como sobre las principales características de los modernos objetivos y su aplicación a las modernas cámaras aéreas, revela al lector la imperiosa necesidad de un completo dominio de la materia para así poder apreciar en seguida cualquier novedad que la técnica produzca y poder juzgar su ventajosa aplicación en la práctica de campo y gabinete.

*Acabóse de imprimir este libro en las  
Escuelas Gráficas del Colegio León XIII,  
Obra de Don Bosco,  
Dorrego 2106 - Buenos Aires  
el día 31 de Mayo de 1952.*