TRATADO GENERAL DE TOPOGRAFÍA

Biblioteca CPA
9-595 • La Plata

Editorial Gustavo Gili, S. A.

Barcelona-29 Rosellón, 87-89. Tel. 259 14 00
Madrid-6 Alcántara, 21. Tel. 401 17 02
Vigo Marqués de Valladares, 47, 1.º. Tel. 21 21 36
Bilbao-1 Colón de Larreátegui, 14, 2.º izq. Tel. 423 24 11
Sevilla-11 Madre Ráfols, 17. Tel. 45 10 30
1064 Buenos Aires Cochabamba, 154-158. Tel. 33 41 85
México 12 D.F. Yácatas, 218. Tels. 687 18 67 y 687 15 49
Bogotá Diagonal 45 N.º 16 B-11. Tel. 45 67 60
Santiago de Chile Santa Beatriz, 120. Tel. 23 79 27
Sao Paulo Rua Augusta, 974. Tel. 256 17 11

Doctor W. JORDAN

PROFESOR DE LA ESCUELA SUPERIOR TÉCNICA DE HANNOVER

TRATADO GENERAL DE TOPOGRAFÍA

REVISADO Y AMPLIADO POR LOS DOCTORES

C. REINHERTZ
Profesor de la Escuela Superior técnica de Hannover

O. EGGERT
Profesor de la Escuela Superior técnica de Berlín

Versión de la 9.ª edición alemana
por
JOSÉ MARÍA MANTERO
Ingeniero Geógrafo

5.ª tirada

GG

EDITORIAL GUSTAVO GILI, S. A.
BARCELONA
1978

§ 1. Introducción

La *Geodesia* estudia la medición de grandes extensiones de la Tierra, y como fin mediato, la medición de toda la superficie del elipsoide terrestre.

La Topografía y la Agrimensura estudian la medición de terrenos de menor extensión que la Geodesia.

Se llama *medir* a la acción de comparar entre sí dos magnitudes de la misma clase. De la medición directa de longitudes y ángulos, se deduce la determinación de todas las demás magnitudes geométricas.

Como unidad de medida para las longitudes se toma el *metro* (elegido arbitrariamente) con los múltiplos y submúltiplos correspondientes, a saber:

1000 metros = 1 kilómetro (1000 m = 1 Km)
la centésima parte de un metro = 1 centímetro (0,01 m = 1 cm)
la milésima parte de un metro = 1 milímetro (0,001 m = 1 mm).

Las unidades intermedias, hectómetro (100 m), decámetro (10 m) y decímetro (0,1 m), se usan poco de ordinario, pero en cambio se emplea mucho el submúltiplo siguiente:

una milésima de milímetro = 1 micrón (0,001 mm = 1 μ).

Las unidades métricas de superficie empleadas en Topografía y Agrimensura son:

1 área = 100 metros cuadrados [1 a = 100 m^2 = $(10\ m)^2$]
1 hectárea = 100 áreas = 10000 metros cuadrados [1 Ha = $(100\ m)^2$]
1 kilómetro cuadrado = 100 hectáreas [1 Km^2 = $(1000\ m)^2$]

El metro es la longitud de una barra de cierta aleación de platino e iridio (metro-tipo o patrón), que se conserva en el Observatorio de Breteuil, en París. Los diversos Estados tienen copia del metro-tipo (*).

La unidad fundamental para la medición de los ángulos es el *grado,* cuyo valor se define del modo siguiente: si se supone una recta que tenga un extremo fijo y que dé una vuelta entera alrededor de éste, hasta volver a su posición primitiva, y se divide el ángulo total descrito por la misma (un círculo) en 360 partes, se tiene el *grado sexagesimal,* y si la división se hace en 400 partes iguales, cada una de estas partes es un *grado centesimal.*

La superficie de la Tierra, prescindiendo de montañas, valles y demás accidentes o irregularidades locales, tiene la forma de un elipsoide de revolución, que es la figura que engendra una elipse de poca excentricidad girando alrededor de su eje menor. El cuadrante (cuarta parte) de esta elipse tiene de longitud unos diez millones de metros, y su achatamiento es igual a $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, siendo a y b, respectivamente, el mayor y el menor de sus semiejes.

(*) Los prototipos que correspondieron, por sorteo, a España, fueron los marcados con los números 17 y 24, cuyas longitudes son, indicando con μ la millonésima de metro (micrón) y con T la temperatura:

N.° 17 = $1^m + 0^\mu,9 + 8^\mu,653\ T + 0^\mu,00100\ T^2$
N.° 24 = $1^m + 1^\mu,8 + 8^\mu,670\ T + 0^\mu,00100\ T^2$. N. del T.

La superficie terrestre teórica o ideal, es la del mar en reposo, es decir, como si no hubiera mareas, ni olas, ni movimiento alguno. A esta superficie se llama *Geoide*. Como la superficie libre y en reposo de todo líquido es en cada punto normal a la dirección de la gravedad, resulta que la superficie del Geoide corta perpendicularmente en todos sus puntos a la vertical, o sea, a la dirección de la gravedad.

La forma y extensión de la superficie ideal o teórica de la Tierra están expresadas por las siguientes cifras, calculadas por Bessel en el año 1842 y todavía en uso actualmente.

$$\text{Cuadrante:} \quad Q = 10000856 \text{ m} \pm 498 \text{ m}$$

$$\text{Achatamiento:} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299 \pm 5},$$

donde las cantidades afectadas del doble signo $\pm$, son los valores medios de los errores probables.

El semieje mayor de la elipse es $a = 6377397$ m y el menor es $b = 6356079$ m, deduciéndose de estos valores el del achatamiento antes consignado. La media geométrica de los tres ejes principales del elipsoide de rotación es $\sqrt[3]{a\,a\,b} = 6370283$ m; este valor es igual al del radio de una esfera de igual volumen que el elipsoide. La media aritmética de dichos tres ejes es $\frac{a+a+b}{3} = 6370291$ m, y este valor es, con 1 m de error, el del radio de una esfera de igual superficie que el elipsoide.

Para extensiones pequeñas de la Tierra se considera la parte correspondiente del elipsoide como si perteneciera a una esfera.

Para cálculos que no sean de gran precisión, sin tener en cuenta el achatamiento de la Tierra, se toma en números redondos el radio de ésta, igual a 6370000 m.

En las mediciones topográficas, por la pequeñez de la parte medida, no influye para nada la curvatura de la superficie terrestre; es decir, que dentro de cada región o zona de terreno, puede considerarse la superficie como un plano horizontal. Ahora bien, el topógrafo se encuentra, no con un plano horizontal, sino con la superficie verdadera del terreno, y ha de representar éste en proyección sobre un plano (prolongación de la superficie del mar), o hallar las diferencias de nivel entre sus distintos puntos, por ejemplo, refiriendo su altura al nivel del mar. A la primera operación se llama *Planimetría,* y a la segunda *Nivelación,* y corresponden respectivamente a mediciones horizontales y verticales.

En los trabajos de Planimetría se pueden considerar tres clases de superficie matemática o teórica para el terreno, a saber:

1. Como plano, en extensiones que no pasen de 55 kilómetros cuadrados.
2. Como esfera, cuyo radio sea el correspondiente a la curvatura de la Tierra en el punto de que se trate. Esta hipótesis es válida en extensiones de hasta varios centenares de kilómetros cuadrados.
3. Como elipsoide, de las dimensiones antes dichas, para los levantamientos de una Nación entera.

Esta clasificación es válida solamente para Planimetría. En Nivelación se hace mucho más apreciable y tiene verdadera importancia la curvatura de la Tierra, pues, por ejemplo, un plano tangente a la superficie del mar tiene sobre éste una altura de 8 cm a una distancia de 1 Km del punto de tangencia. Por esta razón no pueden clasificarse los métodos de Nivelación según la extensión de terreno que se ha de nivelar, sino teniendo en cuenta otros factores que se expondrán más adelante.

Todas las mediciones llevan consigo errores inevitables, y uno de los problemas más importantes que se presentan en Topografía es el de investigar la influencia que estos errores pueden tener en la operación de que se trate, compensarlos en lo posible y calcular los que aun así subsistan.

El primer Capítulo de este libro está dedicado al estudio de los errores, y los que le siguen a cuestiones ya puramente técnicas.

CAPÍTULO I

La media aritmética y el error medio

§ 2. Consideraciones generales

Cuando se hace una medición, de cualquier clase que ésta sea, puede asegurarse que siempre se comete un error, de más o menos consideración.

Se dispone de dos procedimientos esenciales para comprobar la exactitud y precisión de una medida: bien sea repitiendo varias veces la medición para ver si siempre se obtiene el mismo resultado que la primera vez, o bien midiendo varias magnitudes que guarden entre sí una relación conocida, como si se tratara de buscar esta relación; por ejemplo, se miden los tres ángulos de un triángulo plano y se compara su suma con 180°. Si para cada medición se hace una prueba o comprobación semejante, llevada a cabo con todo rigor, se llega al resultado de que no hay medición que esté absolutamente exenta de error.

A pesar de estos defectos inevitables en toda observación, el error no pasa de ciertos límites, siempre que el observador proceda con todo el cuidado necesario. Claro está que en estos errores no entran los llamados *groseros,* que son debidos a equivocaciones o distracciones (por ejemplo, si no se anota bien el número verdadero de veces que se pone la regla al medir una longitud, etc.). Estos «errores groseros» quedan fuera de las consideraciones y estudios siguientes, relativos a los errores inherentes a toda medida.

Ciertos errores de medición u observación se cometen siempre en el mismo sentido: por ejemplo la inclinación de la regla al medir la longitud de una recta horizontal da siempre un resultado excesivo para la longitud medida. Aunque la teoría de errores estudia también estos errores constantes o sistemáticos, en todo lo que sigue, y siempre que no se advierta lo contrario, supondremos que no hay errores de observación de sentido constante, sino solamente los inevitables y variables llamados accidentales o fortuitos, con igual probabilidad de ser positivos o negativos.

Desde el momento en que se admite la imposibilidad de determinar el valor verdadero de una magnitud con exactitud matemática, las aspiraciones del operador y del calculista quedan limitadas a hallar el valor más aproximado posible, procediendo para ello con ciertas precauciones y en determinadas circunstancias favorables.

Del modo de hacer la observación y del número de comprobaciones que se hagan, depende la aproximación del valor obtenido, y al llegar a un valor que tenga el grado de precisión necesario, queda todavía la pregunta de cuál sea este grado de precisión.

§ 3. Media de los errores

La investigación y determinación de los errores lleva siempre consigo, como primer paso, el cálculo del valor promedio de los mismos.

Cuando se conoce el error que se comete en cada una de varias observaciones de la misma clase, se puede deducir de estos errores (llamados absolutos, es decir, sin tener en cuenta su signo) su media aritmética, que se llama «media de los errores».

Conociendo los errores reales de varias observaciones (para lo cual es preciso saber el valor verdadero de las magnitudes observadas), es bien fácil interpretar numéricamente el concepto de media de los errores. Por ejemplo, si llamamos ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 a los errores reales de n observaciones de la misma clase, la media será:

$$t = \frac{[\pm \varepsilon]}{n}, \qquad (1)$$

donde el símbolo $[\pm \varepsilon]$ representa la suma de los valores absolutos de los errores ε (es decir, la suma no algebraica, sino prescindiendo de los signos parciales). En general, el paréntesis en forma de corchete indica suma.

A continuación puede verse un ejemplo de cálculo de la media de los errores partiendo de varios errores de observación.

En la medición del «grado de meridiano» en Prusia, se midieron los tres ángulos α, β, γ de cada uno de los 22 triángulos que formaban la red, y se comparó la suma de los ángulos con la suma teórica de 180°, más el exceso esférico, que llamaremos E, obteniéndose las siguientes diferencias, que son los errores reales en cada triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma - (180° + E) = \varepsilon$$

Triángulo	Error ε	Triángulo	Error ε	Triángulo	Error ε
1.	+ 0,36″	9.	+ 0,56″	17.	+ 1,62″
2.	+ 0,93	10.	0,00	18.	+ 1,62
3.	− 0,51	11.	− 0,59	19.	+ 1,67
4.	− 1,46	12.	0,00	20.	− 0,72
5.	− 0,95	13.	− 1,36	21.	− 1,35
6.	− 1,40	14.	+ 1,86	22.	− 0,98
7.	+ 1,76	15.	− 0,42		7,96″
8.	+ 0,92	16.	+ 1,68		6,47
	8,29″		6,47″		8,29

Suma absoluta $22{,}72'' = [\pm \varepsilon]$

$$\text{Promedio} = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} = \frac{22.72''}{22} = \pm 1{,}03''.$$

Tomando como magnitud medida la suma $\alpha + \beta + \gamma$ de cada triángulo, se tiene la misma media de los errores $\pm 1{,}03''$.

Al igual que este error triangular de cierre, las diferencias o errores ε que se determinan por mediciones repetidas pueden considerarse como errores reales o verdaderos de observación.

En contra de este error real o verdadero de observación, se tiene la «aproximación» llamada también error aparente o residual, que se determina comparando la media aritmética de varias observaciones con cada una de éstas. Por ejemplo, sean $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ los valores hallados para otras tantas observaciones: su media aritmética será

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 \ldots l_n}{n} \qquad (2)$$

o bien

$$x = \frac{[l]}{n} \qquad (3)$$

tomando el paréntesis de corchete como símbolo de suma algebraica.

Los errores aparentes, o aproximaciones, $v_1, v_2, \ldots v_n$, estarán dados por las siguientes diferencias:

$$v_1 = x - l_1, \quad v_2 = x - l_2, \quad v_3 = x - l_3, \ldots \quad v_n = x - l_n.$$

La suma algebraica de estas diferencias es cero, como se prueba sumando ordenadamente las anteriores igualdades:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = nx - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n)$$

o sea,

$$[v] = nx - [l]$$

y como según (3), $[l] = nx$, resulta que

$$[v] = 0. \tag{4}$$

Esta última igualdad (4) sirve de comprobación del cálculo.

Estos errores aparentes v, o aproximaciones, que hay que agregar a los valores observados, para obtener la media aritmética, se toman, aproximadamente, como errores reales ε, es decir, que la media de los errores se hace igual a

$$t = \frac{[\pm v]}{n}.$$

Ejemplo: Se mide cinco veces distintas un mismo ángulo, con los resultados siguientes:

Valor observado l	Diferencia v (o aproximación)	Comprobación
35° 26′ 16″	+ 2,8″	
20	− 1,2	
18	+ 0,8	
25	− 6,2	$[+v] = +7,4$
15	+ 3,8	$[-v] = -7,4$
Suma 94″	14,8″	$[v] = 0$

Promedio de l, $x = 35° 26′ 18,8″$ $\qquad t = \frac{14,8}{5} = 2,96″$ = media de los errores.

De este modo se tiene una medida para la precisión o exactitud probable de una observación aislada. Convendría ahora saber la relación existente entre la precisión de una observación aislada y la de la media aritmética, pero estos y otros muchos problemas, basados en el concepto de error medio, no pueden resolverse con las nociones elementales que hasta ahora hemos expuesto.

§ 4. Error medio

Si se tiene un número n de errores verdaderos de observación $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$, se llama error medio m al dado por la siguiente igualdad:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}. \tag{1}$$

Este error medio tiene sobre la media de los errores la ventaja de que en la suma $[\varepsilon^2]$, como todos los cuadrados son positivos, no hay que tener en cuenta para nada los diferentes signos, llevando la raíz el doble signo $\pm$ en cuantas operaciones intervenga. Además de esta ventaja, el error medio mide mejor la precisión de las observaciones que aquella media, influyendo más los errores grandes por estar elevados al cuadrado.

El error medio es generalmente mayor que la media de los errores, y solamente en el caso de ser iguales todos los errores verdaderos ε, resultan aquéllos también iguales.

Se comprende esto fácilmente, tomando como ejemplo el caso de dos observaciones, y llamando ε_1 y ε_2 a los respectivos errores verdaderos de observación.

La media de los errores será

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

y el error medio

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}};$$

elevando ambas expresiones al cuadrado resulta

$$t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \qquad m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} = \frac{2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2}{4}.$$

Para ver cuál de estos dos valores es el mayor no hay más que hallar la diferencia entre ambos, es decir:

$$m^2 - t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} \tag{2}$$

Siendo el numerador positivo, como todos los cuadrados, tenemos que la diferencia de m^2 sobre t^2 es positiva, es decir, que m es mayor que t. Haciendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, la diferencia entre m^2 y t^2 es cero, es decir, que m es igual también a t.

La anterior demostración es extensiva al caso de un número cualquiera de elementos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$.

Para hacer una comparación más acabada entre la media de los errores y el error medio, tomemos las dos series siguientes:

											Suma lineal	Suma de cuadrados
I.	5	6	2	7	3	8	10	9	3	5	58	402
II.	14	3	0	0	6	20	2	2	1	10	58	750

La media de los errores es la misma en los dos casos, a saber, 5,8; en cambio el error medio tiene los dos valores siguientes:

$$m_I = \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6,34 \qquad m_{II} = \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8,66.$$

El error medio pone de manifiesto la bondad de la primera serie sobre la segunda, y en efecto, se ve que la primera es más regular, llegando al valor límite 10 una sola vez, mientras que en la segunda se llega dos veces a valores excesivos como 14 y 20, compensados parcialmente en la suma por los dos valores 0 que figuran en la serie.

Aunque de este modo o de otro cualquiera se pongan de manifiesto las ventajas del error medio, debe insistirse en su significación para definir la precisión de las observaciones. Pero el mejor elogio del error medio consiste en decir que es el fundamento de toda la teoría de errores.

Apliquemos la definición de error medio, tal como se ve en la igualdad (1), al ejemplo de los ángulos (§ 3, pág. 6), que responde a la hipótesis de tomar las aproximaciones v como errores verdaderos de observación ε, y tendremos:

Observaciones	v	v^2
35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84″
20	− 1,2	1,44
18	+ 0,8	0,64
25	− 6,2	38,44
15	+ 3,8	14,44
Suma 94″	$[v] = 0{,}0''$	$[v^2] = 62{,}80''$

Media aritmética: 35° 26′ 18,8″

$$\text{error medio} \qquad m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5}} = \pm 3{,}54'' \quad (?) \tag{3}$$

Hemos puesto un signo de interrogación a este resultado, porque cabe preguntar si efectivamente es admisible la hipótesis de tomar las aproximaciones v como errores verdaderos de observación. En el § 7 daremos contestación a esta pregunta; pero antes debemos ocuparnos de las operaciones con cantidades afectadas de errores.

§ 5. Propagación de los errores

Es de la mayor importancia, en la teoría de errores, saber la relación que hay entre los errores medios de varias cantidades medidas y el del resultado de combinar éstas entre sí, para poder abordar después otras cuestiones más complicadas. Empezaremos por dos casos particulares de operaciones entre cantidades observadas o medidas, a saber, multiplicación y adición.

I. *Multiplicación.* Supongamos que una cantidad variable x cuyo error medio sea $\pm m$, se multiplica por un número constante (sin error) a; se trata de averiguar cuál es el error medio M del producto

$$X = ax. \tag{1}$$

Al multiplicar por a la cantidad x, arrastra ésta consigo su error, luego se deduce inmediatamente que este error queda también multiplicado por a, es decir, que

$$M = am. \tag{2}$$

Supongamos, como ejemplo, que se mida una cierta longitud con una regla defectuosa, es decir, afectada de un error constante m, por exceso o por defecto; si se supone que no se comete error alguno manual ni de observación, y hay que colocar a veces la regla sobre la longitud que se ha de medir, es evidente que el error total cometido será $M = am$, afectado del doble signo $\pm$, cuando m también sea de signo indeterminado.

II. *Adición.* Se trata de sumar dos magnitudes medidas x' y x'', independientes entre sí, cuyos errores medios sean respectivamente m' y m'', y se quiere saber cuál será el error medio de la suma

$$X = x' + x''. \tag{3}$$

A primera vista parece que este error ha de ser:

$$M = m' + m'' \quad (?),$$

pero deteniéndose un poco se comprende que esto sólo podría ser cierto en el caso de errores del mismo signo, pero que por estar afectados los errores medios del doble signo $\pm$, habrá que tener en cuenta también el caso $m' - m''$.

Sin perder de vista el concepto de error medio, se comprende que la suma $x' + x'' = X$ no debe considerarse una sola vez, sino varias (n veces), y tener en cuenta todos los pares de

errores ε', ε'', correspondientes a cada vez que se efectúe la suma anterior. No cabe duda que al sumar una vez cualquiera las dos cantidades x' y x'', afectadas respectivamente de los errores verdaderos ε' y ε'', el error de la suma X será igual a la suma $\varepsilon' + \varepsilon''$ de los errores. Para simplificar designaremos esta suma con la letra δ, afectada del subíndice correspondiente al orden de la medición u observación (es decir, de la *vez* que se considera la suma $x' + x''$), teniéndose así:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' \\ \delta_2 &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' \\ \delta_3 &= \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \delta_n &= \varepsilon_n' + \varepsilon_n''. \end{aligned}$$

Para hallar el error medio, elevemos estas igualdades al cuadrado:

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 + 2\varepsilon_1'\varepsilon_1'' \\ \delta_2^2 &= \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_2''^2 + 2\varepsilon_2'\varepsilon_2'' \\ \delta_3^2 &= \varepsilon_3'^2 + \varepsilon_3''^2 + 2\varepsilon_3'\varepsilon_3'' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_n^2 &= \varepsilon_n'^2 + \varepsilon_n''^2 + 2\varepsilon_n'\varepsilon_n'' \end{aligned}$$

$$\text{Suma} \qquad [\delta^2] = [\varepsilon'^2] + [\varepsilon''^2] + 2[\varepsilon'\varepsilon'']$$

$$\text{Media aritmética} \qquad \frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + \frac{[\varepsilon''^2]}{n} + 2\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n} \tag{4}$$

Según la definición de error medio, se tiene:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2, \qquad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2, \qquad \frac{[\varepsilon''^2]}{n} = m''^2 \tag{5}$$

quedando por hallar el significado y valor del término $\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}$.

Este término representa el promedio de los productos $\varepsilon_1'\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2'\varepsilon_2''$, etc. Ahora bien, como los errores de x' y x'' tienen un origen puramente fortuito, hay la misma probabilidad de que sean positivos como negativos, de modo que en el producto $\varepsilon'\varepsilon''$ no debe predominar el signo positivo ni el negativo. Por esta razón se debe admitir la hipótesis de ser este promedio igual a cero, es decir $\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n} = 0$, y esta hipótesis tiene tanta más probabilidad de ser cierta cuanto mayor sea el número n, o sea, dicho con más propiedad, que el valor límite a que tiende el término $\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}$ cuando aumenta n, es cero. Teniendo esto en cuenta en la igualdad (4), sustituyendo en ella los valores dados por la (5), resulta:

$$M^2 = m'^2 + m''^2 \qquad \text{o sea} \qquad M = \sqrt{m'^2 + m''^2}. \tag{6}$$

Como se ve, esta ley tiene idéntica forma que el teorema de Pitágoras, correspondiendo M a la hipotenusa y m' y m'' a los catetos de un triángulo rectángulo, y se expresa del modo siguiente: Cuando se suman dos cantidades cuyos errores medios respectivos son $\pm m'$ y $\pm m''$, el error medio $\pm M$ de la cantidad resultante es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dichos errores parciales, o dicho de otro modo: el error medio de la suma es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los errores medios de los dos sumandos.

La misma ley se aplica al caso de la diferencia o sustraccion, es decir, que si se tienen dos cantidades afectadas de error medio, tales como $x' \pm m'$ y $x'' \pm m''$, su diferencia $D = (x' \pm m') - (x'' \pm m'')$ tiene como error medio M el mismo que su suma, es decir,

$M = \sqrt{m'^2 + m''^2}$, lo cual se comprende fácilmente con sólo recordar las operaciones y el razonamiento hechos anteriormente para la suma, cambiando el signo de x'', es decir, considerando la cantidad $x' - x''$, en vez de la $x' + x''$, y por lo tanto las sumas parciales $\varepsilon' + \varepsilon''$ se convertirán en diferencias $\varepsilon' - \varepsilon''$; pero al elevar al cuadrado, los términos en ε''^2 y ε'^2 serán positivos, como en la igualdad (4), y sólo será negativo el último término, cuya suma ya hemos dicho que es cero, quedando por consiguiente el valor de M idéntico al hallado para la suma de las cantidades observadas.

Ejemplo: Si el ángulo α es la suma de otros dos β y γ, es decir, si $\alpha = \beta + \gamma$, y designamos los errores medios de β y γ respectivamente por $\pm m_\beta$ y $\pm m_\gamma$, tendremos el error medio M_α del ángulo α expresado del siguiente modo: $_\alpha = \pm \sqrt{m_\beta^2 + m_\gamma^2}$. Este error medio no varía si el ángulo α en vez de ser suma de los otros dos es su diferencia, es decir, si $\alpha = \beta - \gamma$.

La ley (6) es extensiva al caso de más de dos elementos, como fácilmente puede demostrarse. En efecto, consideremos tres elementos o cantidades x', x'' y x''', y tendremos:

$$X = (x' \pm m') + (x'' \pm m'') + (x''' \pm m''').$$

Sumando primero las dos cantidades x' y x'', hallando el error medio de la suma, y agregando después a ésta la tercera cantidad, se tiene para error medio de la suma total:

$$M^2 = (m'^2 + m''^2) + m'''^2 = m'^2 + m''^2 + m'''^2,$$

y generalizando a un número cualquiera de sumandos resulta:

$$M^2 = m'^2 + m''^2 + m'''^2 + m''''^2 + \ldots \tag{7}$$

Si todos los errores parciales m', m'', m'''... son iguales entre sí, como sucede con frecuencia en ciertos casos particulares, y si se trata de n cantidades, se tiene:

$$M^2 = m^2 + m^2 + m^2 + \ldots = n\,m^2$$

de donde

$$M = m\sqrt{n}. \tag{8}$$

Para aclarar bien este punto supongamos que se hace una medición de longitud con una regla, y que, al contrario de lo que supone la ecuación (2), no tenga la regla error alguno, pero que éste se cometa en cada posición de aquélla; y llamemos $\pm m$ al error medio de cada medición. El doble signo indica que lo mismo puede presentarse el error positivo que el negativo. Aun cuando no es esto lo que realmente sucede, lo supondremos para aclarar lo expuesto anteriormente.

En estas condiciones, puede aplicarse la igualdad (8), siendo n las posiciones de la regla, y $\pm m$ el error medio de cada una de ellas, resultando que el error medio de la medición total es proporcional a la raíz cuadrada del número n de veces que se pone la regla, es decir, proporcional a la raíz cuadrada de la longitud L que se trata de medir, por ser L proporcional a n.

III. *Función lineal.* De la ley I para la multiplicación y la II para la adición o sustracción, se deduce la ley general que da el error medio de una funcion lineal cualquiera de varias cantidades variables.

Sean estas cantidades x', x'', x'''..., y m', m'', m'''... sus errores medios respectivos, y X una función lineal de aquéllas:

$$X = a'x' + a''x'' + a'''x''' + \ldots \tag{9}$$

El error medio M de X será, según lo expuesto:

$$M = \sqrt{(a'm')^2 + (a''m'')^2 + (a'''m''')^2 + \ldots} \tag{10}$$

Acumulación de errores accidentales y constantes. Hasta ahora hemos supuesto que no se cometían errores constantes o sistemáticos, es decir, errores que siempre obran en el mismo sentido y de igual modo.

También subsisten las leyes anteriores cuando se combinan errores constantes con accidentales, y el valor $\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}$, tal como resulta en la igualdad (4), tiende también hacia cero cuando ε' o ε'' tienen igual probabilidad de ser positivos o negativos.

Tomemos otra vez como ejemplo la medición de una longitud con una regla: esta operación no sólo lleva consigo errores fortuitos de observación, sino también errores sistemáticos, como, por ejemplo, los resultantes de torcer la regla a derecha o izquierda de la recta, o inclinarla arriba o abajo sobre ésta. Estas variaciones no pueden nunca neutralizar sus efectos, sino que dan siempre lugar a errores positivos, es decir, que hacen que la longitud medida resulte mayor de lo que realmente es.

Representado por c el valor promedio de los errores sistemáticos debidos a la mala posición de la regla, y por $\pm m$ el error fortuito de observación de cada una de dichas posiciones, siendo n el total de éstas, el error medio total M de la medición viene dado por:

$$M = \sqrt{(nc)^2 + (m\sqrt{n})^2} = \sqrt{n^2c^2 + m^2n}. \tag{11}$$

El error medio puede servir también para calcular la medida de precisión de una observación en que haya errores sistemáticos, que obren siempre en el mismo sentido; pero claro está que, en general, un error medio que contenga parte sistemática no podrá tratarse en todos los cálculos como un error medio puro, es decir, sin esta parte constante.

§ 6. Media aritmética

Cuando se mide o se observa una cierta cantidad varias veces siguiendo métodos análogos, y se obtienen resultados tales como l_1, l_2, l_3, ... l_n, se toma como valor más aproximado (valor más probable) el de su media aritmética, es decir,

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}. \tag{1}$$

Las diferencias entre cada medida y la media x, es decir, las aproximaciones de las observaciones individuales son:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ v_3 &= x - l_3 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

cuya suma, según (1), es igual a cero, esto es:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Elevando al cuadrado las aproximaciones v y sumando, se obtiene, como primera aproximación para el error medio m de cada observación, la fórmula siguiente:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}\ (?). \tag{4}$$

Vamos ahora a hallar el error medio M de la media aritmética x, para lo cual aplicaremos la ley dada por la fórmula (10) del § 5, ya que x es una función lineal de las cantidades observadas o medidas l, a las cuales corresponde, en dicha fórmula, el error medio m, como se ve escribiendo la fórmula (1) en la forma siguiente:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \ldots + \frac{1}{n} l_n. \tag{5}$$

En esta fórmula, las letras l_1, l_2, ... l_3 ocupan el lugar de las x', x'', x'''... de la fórmula (9), y en lugar de las constantes a', a'', a''' ..., tenemos ahora el coeficiente $\frac{1}{n}$; en este caso, los errores medios m', m'', m'''... son todos iguales entre sí, (m), luego la fórmula (10) se convierte en esta otra:

$$M = m \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots}$$

y como en nuestro caso,

$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n},$$

resulta finalmente,

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Es decir, que el error medio M de la media aritmética x es igual al error medio m de una observación, dividido por la raíz cuadrada $\sqrt{n}$ del número n de observaciones. Esta ley, de gran importancia en la teoría de errores, tiene su representación gráfica (fig. 1), pero antes de llegar a esto, hemos de volver a la fórmula (4) para contestar a una cuestión que entraña, y que consiste en saber hasta qué punto es lícito sustituir por los errores aparentes o aproximaciones v, los errores verdaderos de observación ε.

Estos errores verdaderos ε son desconocidos, pero puede hallarse la diferencia que hay entre ellos y las aproximaciones v, del modo siguiente:

Llamemos X al valor verdadero de la cantidad desconocida que se mide u observa, x a la media aritmética, v a la aproximación y ε al error verdadero o real de observación. Según lo que antecede, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon = X - l, \qquad v = x - l, \qquad \text{y de aquí} \qquad \varepsilon = v + (X - x). \tag{7}$$

Si se supone que se hacen n observaciones, y se eleva al cuadrado cada valor de ε, tendremos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= v_1^2 + (X-x)^2 + 2v_1(X-x)\\
\varepsilon_2^2 &= v_2^2 + (X-x)^2 + 2v_2(X-x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_n^2 &= v_n^2 + (X-x)^2 + 2v_n(X-x)\\
\text{Suma } [\varepsilon^2] &= [v^2] + n(X-x)^2 + 2(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)(X-x).
\end{aligned}$$

Pero según (3), la suma algebraica $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = [v]$, es igual a cero, luego queda la fórmula anterior reducida a la siguiente:

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n(X - x)^2. \tag{8}$$

En esta ecuación se desconoce el primer miembro y el último término del segundo, pero se conocen sus respectivos promedios, ya que $\frac{[\varepsilon^2]}{n}$ es el cuadrado del error medio m, y por lo tanto ε^2 será igual a $n\,m^2$; y del mismo modo se sabe que $(X - x)^2$ es igual a M^2,

es decir, al cuadrado del error medio de la media aritmética. Sustituyendo estos valores en (8) se tiene:

$$n\,m^2 = [v^2] + n\,M^2 \tag{9}$$

o bien, según (6),

$$n\,m^2 = [v^2] + m^2,$$

de donde,

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \qquad \text{o sea} \qquad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{10}$$

Esta es la fórmula exacta que debe emplearse en vez de la (4), y que da, al sustituir el valor de m dado por la misma en (6), el siguiente valor para M,

$$M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \tag{11}$$

La primera de las fórmulas (10) nos dice que para determinar el valor de m^2, hay que dividir la suma de los cuadrados de las aproximaciones, por el número de observaciones *sobrantes* $(n-1)$, ya que realmente de las n observaciones una sola sería la indispensable.

La nueva fórmula (10) parece mejor a simple vista, sin consideraciones matemáticas, que la anterior (4), sobre todo en el caso particular de ser $n = 1$. Para este caso, la fórmula (4) daría $[v^2] = 0$, y $m = 0$; en cambio la fórmula (10) da también $[v^2] = 0$, pero también su denominador $n - 1$ es igual a cero, resultando para m el valor $\sqrt{\frac{0}{0}}$, que como se sabe es indeterminado, y efectivamente así debe ser, pues si sólo hay una observación, la precisión es completamente indeterminada. Como caso extremo puede tomarse el de $n = 0$, es decir, tratarse de hallar la precisión de una observación que no se hace; también en este caso la fórmula (10) da la solución verdad y en un todo conforme con la realidad, pues al ser $n - 1 = 0 - 1$, es decir, igual a -1, se tiene para valor del error medio m una cantidad imaginaria.

Para aclarar todo lo expuesto referente a las medias aritméticas, volvamos al sencillo ejemplo del § 3, página 6, con cinco observaciones:

	Observaciones l	v	v^2
1.	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
2.	20	− 1,2	1,44
3.	18	+ 0,8	0,64
4.	25	− 6,2	38,44
5.	15	+ 3,8	14,44
Sumas	= 94″	0,0″	62,80 = $[v^2]$

Media aritmética = 35° 26′ 18,8″.

El error medio de una sola observación será:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62{,}80}{4}} = \pm 3{,}96''.$$

El error medio de la media aritmética es:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \frac{3{,}96}{\sqrt{5}} = \pm 1{,}77''.$$

Y finalmente, en números redondos, puede escribirse:

$$x = 35° 26′ 18{,}8″ \pm 1{,}8″ \text{ (*)}.$$

(*) En las ciencias de observación, es costumbre indicar en esta forma, en vez del error medio el *error probable* $\rho = 0{,}6745\,m$. — N. del T.

Representación gráfica de la ecuación (6). La fórmula (6) a que nos estamos refiriendo tiene más importancia de la que a primera vista podría presumirse; en ella vemos que el error medio está en razón inversa de la raíz cuadrada del número de observaciones. Para estudiar bien esta ley, vamos a representarla gráficamente, y para ello tomemos M como ordenada y n como abscisa; resulta una curva hiperbólica, como se ve en la figura 1. Los valores de las coordenadas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lccccccccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 20 & 50 & 100 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} = & 1{,}00 & 0{,}71 & 0{,}58 & 0{,}50 & 0{,}45 & 0{,}41 & 0{,}35 & 0{,}32 & 0{,}22 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{array}\right\} \quad (12)$$

La curva tiene una dirección asintótica, es decir, que el error medio M se aproxima cada vez más a cero, sin llegar a serlo nunca. En los primeros 10 valores, y sobre todo en los 5 primeros, disminuye rápidamente M, o lo que es igual, aumenta la precisión de la media; pero con las repeticiones siguientes no baja M con tanta rapidez, de modo que para que el error medio de una observación se reduzca a su décima parte en la media aritmética, hay que repetir esta observación cien veces.

Pero de ordinario no se hacen tantas repeticiones, no acostumbrándose a pasar de 5 a 10 veces, ya que a partir de este número disminuye muy poco el valor de M. Ahora bien,

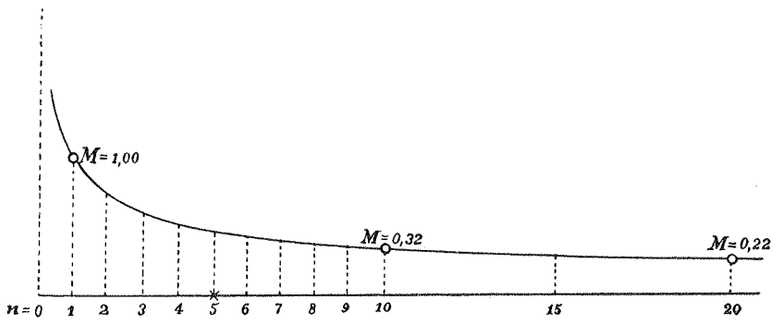


Fig. 1.— Representación gráfica de la ecuación (6): $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$

tanto la ecuación (6), como los valores numéricos (12) y la curva correspondiente (fig. 1), suponen que las mediciones u observaciones se han hecho *solamente* con errores fortuitos o accidentales, con la misma probabilidad de ser positivos o negativos, y en realidad rara vez se da este caso.

Si la expresión del error medio de una observación, tiene la forma (11) (§ 5, pág. 11), deja ya de ser aplicable la ecuación (o). Al repetir las observaciones, solamente disminuye el error medio en la parte correspondiente a los errores fortuitos, por lo cual, el valor total del error medio no tiende a cero al aumentar el número de observaciones, sino que se acerca al valor del error constante. Estos errores constantes se cometen en todas las mediciones, y sólo pueden disminuirse con la repetición de las observaciones si se tienen en cuenta todas las circunstancias que puedan dar lugar a errores constantes: por ejemplo, al medir ángulos, deben tomarse sucesivamente distintas partes del círculo graduado, en vez de partir siempre de la misma división del limbo.

Peso de una observación. En el párrafo siguiente (§ 7) volveremos a tratar de la ecuación (6) en otro aspecto, dándole la forma siguiente:

$$M^2 = \frac{m^2}{n}. \quad (13)$$

Es fácil ver que la media aritmética puede considerarse como el resultado de una sola observación cuyo error medio fuera igual a M; también se ve que la relación entre la precisión de esta observación ficticia y de una real, estará dada por la de los valores M y m.

La relación entre m^2 y M^2 está dada por el número n, que indica el de observaciones de igual precisión necesarias para que su media aritmética tenga una precisión dada; a este número n se le llama *peso* de esta media aritmética, o de una observación de igual precisión que ella. De aquí resulta que el peso de una de las n observaciones cuya media aritmética se ha hallado, es igual a la unidad.

§ 7. Media aritmética general

Cuando para determinar el valor de una cantidad desconocida se hacen varias observaciones de distinta precisión, como ya se ha visto en el § 6, la media aritmética simple no da el valor más probable de la incógnita. En este caso se procede del modo que indica el sencillo ejemplo siguiente:

Supongamos que se hayan hecho cinco observaciones análogas l_1', l_2', l_3', l_4' y l_5', cuya media aritmética total es:

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5}. \quad (1)$$

Consideremos ahora dos medias parciales, l_1 y l_2, correspondientes respectivamente a dos y tres observaciones, es decir:

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2'}{2}, \qquad l_2 = \frac{l_3' + l_4' + l_5'}{3}. \quad (2)$$

Fácilmente se comprende que de las medias parciales l_1 y l_2, se deduce la total x, sin volver a operar con las observaciones l', pues sale directamente de las ecuaciones (1) y (2), con sólo sustituir en la primera los valores del numerador dados por la segunda, y poniendo el denominador 5 en la forma $2 + 3$:

$$x = \frac{2\,l_1 + 3\,l_2}{2 + 3}. \quad (3)$$

Este caso sencillo de $2 + 3 = 5$ observaciones, nos da el método operatorio para el caso general; designando con l_1, l_2, l_3 . . . las medias parciales, correspondientes respectivamente a p_1, p_2, p_3 . . . observaciones de igual precisión, por analogía con la ecuación (3) podremos escribir para la media general:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{[p\,l]}{[p]}. \quad (4)$$

El número p tiene aquí el significado de *peso,* según la definición dada anteriormente (§ 6), es decir, que p es aquí lo que allí era n, a saber, número de observaciones repetidas, cuyas medias parciales son l_1, l_2, l_3 . . .

Supongamos ahora que estas cantidades l_1, l_2, l_3 . . . no sean medias parciales sino observaciones de distinta precisión; también en este caso debe aplicarse la fórmula (4), siendo p el valor que en el conjunto ha de atribuirse a cada observación, o sea, el *peso* de éstas, tal como se ha definido anteriormente.

El valor de x dado por la ecuación (4) no se altera multiplicando todos los pesos p por un número cualquiera, de donde se deduce que para resolver el problema planteado, basta

con que estos pesos p sean proporcionales a los números definidos anteriormente como pesos, y por esta razón debemos considerar siempre el peso sólo como una relación.

Ya se ha dicho que el peso p varía en razón inversa del cuadrado del error medio, y según la ecuación (6) del § 6 (pág. 12), el error medio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones repetidas, que es el número p que expresa el *peso*. Para aclarar este concepto tomemos la citada ecuación (6):

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

en la que n tiene la significación de *peso*, y apliquémosla a los dos casos de ser $n = p$ y $n = p'$; con lo cual se tendrá:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \qquad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}}.$$

De aquí se deduce directamente:

$$\frac{p}{p'} = \frac{M'^2}{M^2}, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \tag{5}$$

que traducida al lenguaje vulgar nos dice, que los pesos p, p' de dos observaciones son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores medios, o bien, que los errores medios varían en razón inversa de las raíces cuadradas de los pesos.

Concepto análogo al de peso es el de precisión: al decrecer el error medio, aumentan el peso y la precisión, aunque en distinta cantidad, pues mientras el peso es inversamente proporcional al cuadrado del error medio, la precisión lo es al error medio simplemente. Pero en nuestros cálculos no será necesario operar con los números que expresan la precisión, sino con los pesos.

El modo de hallar el peso no puede establecerse en términos generales. La determinación más fácil del peso se tiene cuando no se parte de observaciones directas, sino, según se dijo al principio de este párrafo, de medias parciales de grupos de observaciones distintas, como ocurre casi siempre.

Según el concepto de peso ya expuesto, se ve que puede operarse con éste como si se tratase de simples medias aritméticas. Hasta aquí tenemos lo siguiente:

Observaciones: $l_1,\ l_2,\ l_3 \ldots l_n$
Pesos: $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$.

El valor más probable de la cantidad que se trata de conocer es la media aritmética que sigue:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]}. \tag{6}$$

Los errores aparentes o aproximaciones de las diferentes observaciones serán, como ya se ha visto anteriormente:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \text{ con el peso } p_1 \\ v_2 &= x - l_2 \quad » \quad » \ p_2 \\ v_3 &= x - l_3 \quad » \quad » \ p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= x - l_n \quad » \quad » \ p_n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si se multiplican los valores de v por sus correspondientes de p, y se suman todos los productos resultantes, se tiene

$$[p\,v] = 0 \tag{8}$$

como fácilmente se ve teniendo en cuenta que, según (6), $[p\,l] = x\,[p]$, y que al sumar dichos productos quedaría $[p\,v] = x\,[p] - [p\,l] = 0$.

Tomemos ahora un error medio m tal, que le corresponda para el peso un valor $p = 1$; si entre la serie $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, hay realmente un valor $p = 1$, no importa para nuestro razonamiento, pues en éste se parte ya del supuesto de existir tal valor $p = 1$, y se halla el error medio m correspondiente, que se llama *error de la unidad de peso*. De esto y de las relaciones (5) se deducen los siguientes valores para los errores medios de $l_1, l_2, l_3, \ldots$, correspondientes a los pesos $p_1, p_2, p_3 \ldots$:

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_n}}. \tag{9}$$

Para aplicar ahora la ley de propagación de los errores, pongamos la fórmula (6) en la forma siguiente:

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \ldots \frac{p_n}{[p]} l_n. \tag{10}$$

Esta fórmula corresponde a la ecuación general (9) del párrafo 5 (pág. 10), y los valores dados en la última (9) corresponden a los m', m'', m''' ... de la ecuación (10) de dicho párrafo 5; por lo tanto, sustituyendo valores en esta última ecuación, se tendrá:

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2 + \ldots$$

o sea,

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left[(\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \ldots\right]$$

de donde

$$M^2 = \frac{m^2}{[p]^2}\left(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\right) = m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}$$

y finalmente

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{11}$$

que nos dice que el peso de la media aritmética es igual a $[p]$.

Error medio de la unidad de peso. Vamos a determinar el error medio m de una observación que tenga por peso la unidad. Siendo todos los pesos p iguales a la unidad, se halla el error medio en función de las aproximaciones v, como se hizo en el párrafo 6. Pero si se han de tener en cuenta diferentes pesos p, hay que partir de los errores verdaderos ε, para lo cual, llamando X al valor verdadero de la incógnita, se escribirán las fórmulas siguientes, análogas a la primera de las (7) (pág 12).

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= X - l_1 \text{ con el peso } p_1 \\ \varepsilon_2 &= X - l_2 \quad » \quad » \ p_2 \\ \varepsilon_3 &= X - l_3 \quad » \quad » \ p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= X - l_n \quad » \quad » \ p_n \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

y sustituyendo en estas ecuaciones los valores de $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$, deducidos de la última (7), resulta:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_1 + (X - x) \\ \varepsilon_2 &= v_2 + (X - x) \\ \varepsilon_3 &= v_3 + (X - x) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= v_n + (X - x) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

y elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= v_1^2 + 2v_1(X-x) + (X-x)^2\\
\varepsilon_2^2 &= v_2^2 + 2v_2(X-x) + (X-x)^2\\
\varepsilon_3^2 &= v_3^2 + 2v_3(X-x) + (X-x)^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_n^2 &= v_n^2 + 2v_n(X-x) + (X-x)^2
\end{aligned}$$

Multiplicando estas igualdades por $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, respectivamente, y sumando ordenadamente se tiene:

$$[\varepsilon^2 p] = [v^2 p] + 2(X-x)[pv] + (X-x)^2[p]. \tag{14}$$

El segundo término del segundo miembro es cero, según (8), y el primer miembro puede escribirse del modo siguiente:

$$[\varepsilon^2 p] = \varepsilon_1^2 p_1 + \varepsilon_2^2 p_2 + \varepsilon_3^2 p_3 + \ldots + \varepsilon_n^2 p_n. \tag{15}$$

Como no conocemos el valor de cada uno de estos términos, hemos de limitarnos a tomar sus valores promedios, y como los correspondientes a $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots \varepsilon_n^2$ son los cuadrados de los errores medios, $m_1^2, m_2^2, \ldots m_n^2$, se tendrá, sustituyendo en (15),

$$[\varepsilon^2 p] = m_1^2 p_1 + m_2^2 p_2 + m_3^2 p_3 + \ldots + m_n^2 p_n, \tag{16}$$

pero según (9), todos los términos del segundo miembro son iguales a m^2; luego resulta:

$$[\varepsilon^2 p] = n m^2. \tag{17}$$

Para $(X-x)^2$ tomemos el valor medio M^2, como se hizo en el párrafo 6, y como según (11),

$$M^2 = \frac{m^2}{[p]},$$

sustituyendo $(X-x)^2$ por este valor en (14), y $[\varepsilon^2 p]$ por el suyo, según (17), se tiene:

$$n m^2 = [v^2 p] + m^2,$$

de donde

$$m^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}$$

o bien

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \tag{18}$$

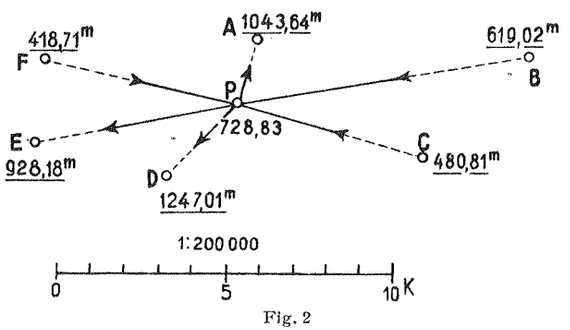


Fig. 2

Las ecuaciones (11) y (18) resumen toda la teoría de errores de las medias aritméticas. Sustituyendo en la primera el valor de m dado por la última, se tiene, como resumen general:

$$M = \sqrt{\frac{[pv^2]}{(n-1)[p]}}. \tag{19}$$

A continuación damos un ejemplo numérico, representado gráficamente en la figura 2, en el que veremos que los pesos no vienen dados por mediciones distintas reiteradas, sino que resultan de la naturaleza misma del problema.

Sean *A, B, C, D, E* y *F* seis puntos elevados del terreno, cuyas alturas sobre el nivel cero sean constantes, por ejemplo, el *A* que tenga una altura invariable de 1043,64 m, etc., y que sus determinaciones topográficas no tengan error alguno o que si lo tienen sean

despreciables comparados con los que se cometen en las seis observaciones hechas desde un punto *P*, para determinar su altura, conociendo las distancias *PA, PB,* etc., y midiendo los ángulos de pendiente respectivos (fig. 2). En este supuesto, se tiene:

Distancia conocida s	Alturas dadas sobre el nivel cero	Diferencias de nivel medidas	Altura resultante para P sobre el nivel cero
$AP = 2010$ m	A 1043,64 m	$h_1 = -314{,}73$ m	728,91 m
$BP = 8903$	B 619,02	$h_2 = +109{,}20$	728,22
$CP = 5820$	C 480,81	$h_3 = +248{,}24$	729,05
$DP = 3002$	D 1247,01	$h_4 = -518{,}43$	728,58
$EP = 6197$	E 928,18	$h_5 = -199{,}16$	729,02
$FP = 5800$	F 418,71	$h_6 = +310{,}13$	728,84
		Media aritmética =	728,77 m

(20)

Esta media aritmética sencilla no debe considerarse como resultado definitivo, pues siendo distintas las distancias s, no tienen igual precisión las seis determinaciones u observaciones anteriores. Se sabe, por la teoría de la nivelación trigonométrica, que el error de una diferencia de alturas h es aproximadamente proporcional a la distancia s, y por lo tanto, el peso p debe ser inversamente proporcional al cuadrado de dicha distancia s, es decir, $p = \frac{1}{s^2}$.

La unidad de medida es indiferente. Expresando s en kilómetros, tendremos, en números aproximados, según (20):

$$s = 2{,}0 \quad 8{,}9 \quad 5{,}8 \quad 3{,}0 \quad 6{,}2 \quad 5{,}8 \text{ Km}$$

y los pesos respectivos serán:

$$p = \frac{1}{s^2} = 0{,}25 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}11 \quad 0{,}03 \quad 0{,}03. \tag{21}$$

Hemos tomado para s valores tan poco aproximados porque no tiene interés práctico alguno operar, en casos como el presente, con cuatro cifras decimales.

Con los valores de h (20) y los de p (21), se prepara el cuadro siguiente, donde l corresponde a h, para aplicar después sin la menor dificultad las fórmulas anteriores necesarias. En este cuadro, el valor de v se deduce, según la fórmula (7), restando l de x, deducido a su vez de la fórmula (6).

l	p	pl	$v = x - l = 0{,}83 - l$	pv	pv^2
728 + 0,91	0,25	0,2275	− 0,08	− 0,0200	0,0016
+ 0,22	0,01	0,0022	+ 0,61	+ 0,0061	0,0037
+ 1,05	0,03	0,0315	− 0,22	− 0,0066	0,0015
+ 0,58	0,11	0,0638	+ 0,25	+ 0,0275	0,0070
+ 1,02	0,03	0,0306	− 0,19	− 0,0057	0,0011
+ 0,84	0,03	0,0252	− 0,01	− 0,0003	0,0000
Sumas	0,46	0,3808		+ 0,0010	0,0149

Comprobación: $[pv] = 0{,}001$, o sea, aproximadamente: $[pv] = 0$.

El valor de x se calcula como sigue:

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{0.3808}{0{,}46} = 0{,}83.$$

El error medio m de cada observación se deduce de la fórmula (18):

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0149}{5}} = \pm 0{,}055 \text{ m} \qquad (22)$$

y el error medio de la media aritmética será:

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}46}} = \pm 0{,}080 \text{ m}.$$

Es decir, que la altura H del punto P será:

$$H = 728 \text{ m} + x = 728{,}83 \text{ m, con un error medio de } \pm 0{,}08 \text{ m}.$$

Interpretación mecánica de algunas fórmulas anteriores. Supongamos que se tengan varios pesos materiales p_1, p_2, p_3 . . . actuando sobre un eje giratorio que pase por el punto A (fig. 3), con brazos de palanca respectivamente iguales a l_1, l_2, l_3, . . . l_n; los momentos de estos pesos serán $p_1 l_1$, $p_2 l_2$, $p_3 l_3$ . . . , y en la igualdad

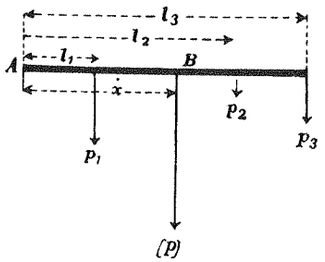


Fig. 3

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

x representa el brazo de palanca con que tendría que actuar un peso $[p]$ igual a la suma de todos los pesos, para que su momento fuera igual a la suma de todos los momentos.

Si ahora suponemos que el eje de giro se traslada de A a B, recorriendo una distancia x, los pesos p_1, p_2 y p_3 actuarán con brazos de palanca (respecto a B) iguales a v_1, v_2, v_3, que serán evidentemente, según la figura,

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

y se tendrá:

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = [pv] = 0.$$

lo cual nos dice que B es el centro de gravedad de las masas cuyos pesos son p_1, p_2, p_3, o sea el punto de aplicación de la resultante de estos pesos.

También la suma $[pv^2]$ tiene su interpretación mecánica; es igual al momento de inercia del sistema de masas respecto al eje B, y la condición de que $[pv^2]$ sea un mínimo, que en la teoría de errores define la media x, en el terreno mecánico indica que B es un eje de momento de inercia mínimo (*)

§ 8. Compensación de un error de cierre

Es muy frecuente fijar como única condición para algunas mediciones, la de que su suma sea igual a un cierto valor, como sucede, por ejemplo, en la suma de los ángulos de un triángulo o de un polígono, o con la suma de las diferencias de nivel en un itinerario cerrado o entre dos puntos permanentes, etc.

Cuando en un triángulo plano se miden los tres ángulos con igual precisión, y a causa de los errores de observación la suma de los mismos difiere de 180°, se reparte por igual

(*) Como así tenía que suceder, ya que se ha visto que el eje B pasa por el centro de gravedad del sistema. — N. del T.

la diferencia entre los tres ángulos observados. Vamos a razonar este procedimiento tan usual, basándonos en lo dicho anteriormente sobre la media aritmética.

Sean α, β y γ los tres valores observados correspondientes a los tres ángulos de un triángulo.

Para el ángulo α tenemos en primer lugar el valor:

$$x_1 = \alpha, \quad \text{con el peso } p_1 = 1. \qquad (1)$$

Pero también tenemos otro valor x_2 para α, en relación con los otros dos, a saber:

$$x_2 = 180° - (\beta + \gamma), \quad \text{con el peso } p_2 = \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Este peso p_2 es igual a $\frac{1}{2}$, porque en el valor de x_2 están incluídos los errores de β y γ; y si se llama m al error medio de la unidad de peso, se tiene:

$$m_1 = \pm m$$

y según (2) y la fórmula (6) del párrafo 5 (pág. 9)

$$m_2 = m\sqrt{2},$$

luego

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = 2.$$

Con los pesos p_1 y p_2 podemos hallar el valor medio de x_1 y x_2, según la fórmula (4) del párrafo 7 (pág. 15):

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180° - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Designando con w la diferencia entre la suma de los tres ángulos y 180°, es decir, siendo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° - w \qquad (4)$$

y sustituyendo en (3) $180° - (\beta + \gamma)$ por su igual $\alpha + w$ deducido de esta última (4) resulta

$$x = \frac{\alpha + \frac{1}{2}(\alpha + w)}{3/2} = \alpha + \frac{w}{3}. \qquad (5)$$

Lo mismo sucede con los otros dos ángulos, a cuyos valores probables llamaremos y, z, teniendo en definitiva:

$$x = \alpha + \frac{w}{3}$$

$$y = \beta + \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma + \frac{w}{3}$$

$$\text{Suma} \quad x + y + z = \alpha + \beta + \gamma + w = 180°$$

lo cual nos dice que el error total w se reparte efectivamente por igual entre los tres ángulos del triángulo, con lo cual quedan éstos compensados.

Para calcular los errores medios, consideremos en primer lugar el ángulo α, cuyos dos valores (1) y (2) tomaremos como valores observados del mismo. Las diferencias entre estos valores y la media x son, según (5),

$$v_1 = \alpha + \frac{w}{3} - \alpha$$

$$v_2 = \alpha + \frac{w}{3} - [180° - (\beta + \gamma)]$$

y sustituyendo en esta última el valor del paréntesis deducido de (4), resulta

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= +\frac{w}{3} \\ v_2 &= -\frac{2}{3}w \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El error medio de una observación de peso 1, es, según la fórmula (18) del párrafo (7) (página 18):

$$m = \pm\sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2-1}} = \pm\sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{3}\right)^2} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}} \qquad (7)$$

Como al ángulo observado α se le asignó el peso 1 (lo mismo que a los β, γ), se tiene que este valor m es igual al error medio de un ángulo observado, todavía *sin compensar*.

Podemos ahora hallar el error medio M del ángulo x, *ya compensado*. Según la fórmula (11) del párrafo 7 (pág. 17) se tiene para M el valor:

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \pm\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

y según (7),

$$M = \pm\frac{w}{3}\sqrt{2}. \qquad (8)$$

Pero, como ya hemos visto anteriormente, el peso de la media aritmética es igual a la suma de los pesos parciales; luego el peso de x será:

$$P = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \qquad (9)$$

Los valores de m y M dados en (7) y (8) ponen también de manifiesto la precisión que se consigue con la compensación; basta para ello dividir M por m:

$$M : m = \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = 0{,}816 : 1, \qquad (10)$$

lo cual nos dice que, en virtud de la compensación, el error medio disminuye en la misma proporción que 0,8 : 1 (en números redondos), o sea, que la precisión aumenta en la relación inversa 1 : 0,8. O también, que con la compensación de los tres ángulos de un triángulo se consigue un aumento del 20 °/₀ en la precisión de cada ángulo observado.

§ 9. Determinación del error medio en función de las diferencias entre las observaciones

Cuando se hace dos veces una observación o medida, como, por ejemplo, cuando se mide una recta primero en un sentido y después en el contrario, o se hace una nivelación en los dos sentidos (doble), etc., se pueden aplicar a tales mediciones las leyes de la media aritmética estudiadas en el párrafo 6. Sean, en efecto, l_1 y l_2 los resultados de ambas mediciones, y d su diferencia, es decir, $d = l_1 - l_2$. La media aritmética será:

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

y las aproximaciones,

$$v_1 = x - l_1 = -\frac{d}{2} \qquad \text{y} \qquad v_2 = x - l_2 = +\frac{d}{2}.$$

El error medio de una observación es, según (10) (§ 6, pág. 13), para $n = 2$:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

y el error medio de la media aritmética es, según (6) (párrafo 6):

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{d}{2}. \qquad (2)$$

Avancemos un poco más y consideremos ahora varias medidas dobles de esta clase; por ejemplo, supongamos que se miden varios segmentos de alineación en ambos sentidos, o se hacen varios tramos de nivelación dobles, y que en cada uno de estos casos se encuentra una diferencia d. En primer lugar hemos de suponer que las diferentes alineaciones medidas o niveladas tienen la misma longitud, o en términos generales, que las diferencias d corresponden a observaciones de igual peso.

Designemos cada par de observaciones con las letras l y l', y sus errores verdaderos respectivos con ε y ε': sumando estos errores con los resultados de las observaciones correspondientes, se tendrá el mismo valor para las dos, que será el valor verdadero de la magnitud observada, es decir:

$$\left.\begin{aligned} l_1 + \varepsilon_1 &= l_1' + \varepsilon_1' \quad \text{o bien} \quad l_1 - l_1' = d_1 = \varepsilon_1' - \varepsilon_1 \\ l_2 + \varepsilon_2 &= l_2' + \varepsilon_2' \qquad\qquad l_2 - l_2' = d_2 = \varepsilon_2' - \varepsilon_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n + \varepsilon_n &= l_n' + \varepsilon_n' \qquad\qquad l_n - l_n' = d_n = \varepsilon_n' - \varepsilon_n \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

de donde, elevando al cuadrado las diferencias d y sumando ordenadamente, resulta:

$$[d^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] - 2[\varepsilon\varepsilon']$$

y dividiendo por n,

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} - \frac{2[\varepsilon\varepsilon']}{n}. \qquad (4)$$

Ahora bien, según la definición de error medio, se tendrá:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \quad \text{y} \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m^2.$$

Anteriormente hemos visto (pág. 9), que el valor medio de $\frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n}$ es cero, luego la ecuación (4) queda reducida a esta otra:

$$\frac{[d^2]}{n} = m^2 + m^2 = 2m^2,$$

de donde se deduce que el error medio m de una observación será:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \qquad (5)$$

y el error medio de una observación doble será:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \qquad (6)$$

Si suponemos ahora que las observaciones dobles no tengan igual peso, como, por ejemplo, tratándose de nivelaciones dobles, si las alineaciones son de distinta longitud,

habremos de tener en cuenta estos diversos pesos de las diferencias d en las fórmulas (3), y hallar el error medio para una observación de peso igual a la unidad.

Los cuadrados de las diferencias d dadas en (3), son:

$$\left.\begin{aligned} d_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1' \\ d_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\,\varepsilon_n\,\varepsilon_n' \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

En estas ecuaciones no conocemos los segundos miembros, por lo cual, nuevamente hemos de recurrir, para ε^2 y ε'^2, al valor medio m^2, no teniéndonos que preocupar de los productos $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2'$, etc., por ser cero su suma, según se ha dicho repetidas veces. Multiplicando las ecuaciones (7) por los pesos correspondientes, resultará, teniendo en cuenta las fórmulas (9) (§ 7, pág. 17), para los valores m_1, m_2, etc.:

$$\begin{aligned} p_1\,d_1^2 &= 2\,p_1\,m_1^2 = 2\,m^2 \\ p_2\,d_2^2 &= 2\,p_2\,m_2^2 = 2\,m^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n\,d_n^2 &= 2\,p_n\,m_n^2 = 2\,m^2 \end{aligned}$$

donde m es el error medio por unidad de peso.

De aquí resulta, sumando ordenadamente, un valor medio para m^2, a saber:

$$m^2 = \frac{[p\,d^2]}{2\,n}$$

o bien

$$m = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{2\,n}} \qquad (8)$$

y el error medio M de una media de dos observaciones de peso 1, o sea, el error medio de una observación doble será:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[p\,d^2]}{2\,n}}. \qquad (9)$$

Una de las aplicaciones más importantes de estas dos últimas fórmulas, es la referente a las observaciones reiteradas de distancias, o a las dobles nivelaciones. Todas estas mediciones tienen un error medio que aumenta con la raíz cuadrada de la distancia s, siendo por consiguiente los pesos inversamente proporcionales a $(\sqrt{s})^2$, es decir, a s, de donde se deducen, partiendo de las fórmulas (8) y (9), los siguientes valores para el error medio:

error medio de una observación para $s = 1$, $\qquad m = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$ (10)

error medio de la doble observación para $s = 1$, $\qquad M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$ (11)

Vamos a aplicar estas fórmulas, que son válidas tanto para distancias como para nivelaciones, a un ejemplo clásico, cual es la medición del grado de meridiano hecha por Bessel en Prusia oriental, en cuya operación midió dos veces una base dividida en dos partes:

	Parte I	Parte II	
1.ª medición:	441,1852 m	1381,1571 m	Media aritmética total
2.ª medición:	441,1839 m	1381,1632 m	1822,3447 m.
Diferencias:	$d_1 = +1{,}3$ mm	$d_2 = -6{,}1$ mm	

(12)

Expresando las diferencias d en milímetros y las distancias s en kilómetros, es decir,

siendo $s_1 = 0{,}441$ y $s_2 = 1{,}381$, y puesto que en este ejemplo $n = 2$, se tiene, según (10):

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}3^2}{0{,}441} + \frac{6{,}1^2}{1{,}381}\right) = 7{,}70 \qquad \text{o sea} \qquad m = \pm 2{,}78 \text{ mm por Km.} \qquad (13)$$

Este es el error medio de una medición de la unidad de longitud (el kilómetro). El error medio de una media de dos observaciones (a izquierda y derecha) de una distancia igual a 1 Km será, según (11):

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}78}{\sqrt{2}} = \pm 1{,}96 \text{ mm por kilómetro.} \qquad (14)$$

Por último, el error medio de la media total 1822,3447 m será:

$$M' = M\sqrt{s_1 + s_2} = 1{,}96\sqrt{1{,}822} = \pm 2{,}65 \text{ mm} \qquad (15)$$

y de (12) y (15) se deduce el resultado final, que es el siguiente:

$$\text{Longitud de la base} = 1822{,}3447 \text{ m} \pm 0{,}0027 \text{ m.} \qquad (16)$$

Hasta aquí hemos expuesto las principales fórmulas de la teoría de errores y de la teoría de las medias aritméticas, con lo cual estamos en condiciones de apreciar y evaluar la precisión de las observaciones o mediciones y de los resultados numéricos de los cálculos, en los casos sencillos que en la práctica pueden presentarse. En los dos párrafos siguientes estudiaremos otras leyes referentes a la compensación de errores, que más tarde hemos de necesitar.

§ 10. Compensación de observaciones mediatas o indirectas

En lo que antecede hemos estudiado solamente los casos en que las cantidades desconocidas podían medirse u observarse directamente. Supongamos ahora que se trata de varias incógnitas $x, y, z \ldots$ que no sean medibles directamente, pero que estén relacionadas de tal modo que puedan medirse las sumas de sus productos por cantidades conocidas, o mejor dicho, que se puedan conocer ciertas funciones lineales de las mismas. Supongamos, para concretar, que hay que hallar el valor de tres incógnitas x, y, z, que no pueden medirse directamente, pero que afectadas de coeficientes dados a, b, c y sumadas dan n sumas $l_1, l_2, l_3 \ldots$ que se pueden medir, a saber:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ l_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_n &= a_n x + b_n y + c_n z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde n es mayor que el número de incógnitas (= 3, en nuestro caso).

De todas estas sumas podemos elegir tres, y escribir las siguientes ecuaciones de condición

$$\begin{aligned} l_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ l_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ l_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

de donde pueden deducirse los valores de x, y, z. Si en vez de operar con estas tres ecuaciones, se tomaran otras tres de las n que hay en total, se obtendrían valores distintos para las incógnitas, a causa de los errores de observación inevitables (accidentales).

La cuestión queda, pues, planteada en la forma siguiente: hallar para x, y, z valores tales que convengan, mejor que otros cualesquiera, a todas las mediciones $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$.

Se demuestra, en el cálculo de probabilidades, que los valores más probables

de x, y, z, en el caso que nos ocupa son los deducidos de las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z &= [a\,l] \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z &= [b\,l] \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z &= [c\,l] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde los coeficientes $[a\,a]$, $[a\,b]$, etc., tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned} [a\,a] &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \\ [a\,b] &= a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots + a_n\,b_n \\ [a\,c] &= a_1\,c_1 + a_2\,c_2 + \ldots + a_n\,c_n, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Una vez hallados los valores de x, y, z, y sustituídos en las sumas (1), tendremos los *residuos* o diferencias v entre éstas y los valores observados $l_1, l_2, \ldots l_n$, todos los cuales tienen el mismo peso:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z - l_1 \\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z - l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z - l_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones de los errores,* mientras que las (2) se conocen con el nombre de *ecuaciones normales*. Multiplicando las ecuaciones (3), respectivamente, por $a_1, a_2, \ldots a_n$, y sumándolas ordenadamente; y repitiendo las mismas operaciones, pero multiplicando sucesivamente por $b_1, b_2 \ldots$, y por $c_1, c_2 \ldots$, se tienen, para valores de las tres sumas restantes, según (2):

$$[a\,v] = 0 \qquad [b\,v] = 0 \quad \text{y} \quad [c\,v] = 0. \tag{4}$$

El error medio de una observación viene dado por la fórmula:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-3}} \tag{5}$$

donde el denominador $n - 3$ representa el número de observaciones sobrantes, ya que n es el total de observaciones y 3 el de incógnitas; si el número de éstas fuera u, el denominador anterior sería $n - u$.

Si las observaciones l no tienen todas igual peso, sino que éste es, respectivamente, $p_1, p_2, \ldots p_n$, las ecuaciones normales toman esta forma:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a\,p]\,x + [a\,b\,p]\,y + [a\,c\,p]\,z &= [a\,l\,p] \\ [a\,b\,p]\,x + [b\,b\,p]\,y + [b\,c\,p]\,z &= [b\,l\,p] \\ [a\,c\,p]\,x + [b\,c\,p]\,y + [c\,c\,p]\,z &= [c\,l\,p] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

y de aquí se deducen los valores de las incógnitas x, y y z.

De modo análogo al seguido para deducir las igualdades (4), se obtienen las siguientes, partiendo de las ecuaciones de los errores (3) y de las ecuaciones normales (6):

$$[a\,p\,v] = 0 \qquad [b\,p\,v] = 0 \qquad [c\,p\,v] = 0. \tag{7}$$

Finalmente, la fórmula que da el error medio de la unidad de peso, para n observaciones y u incógnitas, será, según lo que antecede:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v\,v]}{n-u}}. \tag{8}$$

§ 11. Compensación de observaciones condicionadas

En el párrafo 8 (pág. 21) hemos visto el caso de observaciones ligadas por una ecuación de condición. Consideremos ahora el caso general de tener varias ecuaciones

lineales a las cuales deban satisfacer las observaciones, pero de modo que el número de ecuaciones de condición sea menor que el número de observaciones. Por efecto de los errores inevitables, siempre sucederá que las observaciones no satisfarán exactamente a dichas ecuaciones, teniéndose por consiguiente pequeñas diferencias v; es decir, que sumadas estas diferencias v a los valores de las observaciones l, tendremos estos valores ya corregidos de modo que satisfagan a las ecuaciones de condición, que supondremos en número de tres:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,(l_1 + v_1) + a_2\,(l_2 + v_2) + a_3\,(l_3 + v_3) + \ldots + a_n\,(l_n + v_n) &= 0 \\ b_1\,(l_1 + v_1) + b_2\,(l_2 + v_2) + b_3\,(l_3 + v_3) + \ldots + b_n\,(l_n + v_n) &= 0 \\ c_1\,(l_1 + v_1) + c_2\,(l_2 + v_2) + c_3\,(l_3 + v_3) + \ldots + c_n\,(l_n + v_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Para hallar los valores de los residuos v, se sigue el método de los *coeficientes correlativos,* es decir, se toman tres valores indeterminados de k_1, k_2, k_3 que satisfagan a las ecuaciones normales, o sea:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

y las diferencias v se deducen de estas ecuaciones, en función de k:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ v_2 &= a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n\,k_1 + b_n\,k_2 + c_n\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Para calcular el error medio de una observación, se aplica directamente la fórmula (5) (página 26), teniendo en cuenta que en el caso actual el número de observaciones sobrantes es igual al número r de ecuaciones de condición y así se obtiene:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}. \tag{4}$$

Si las observaciones tienen distinto peso ($p_1, p_2, \ldots p_n$), se sigue un procedimiento análogo, teniéndose en vez de las ecuaciones (2) las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{p}\right]k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right]k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right]k_3 + \left[\frac{a\,l}{p}\right] &= 0 \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right]k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right]k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right]k_3 + \left[\frac{b\,l}{p}\right] &= 0 \\ \left[\frac{a\,c}{p}\right]k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right]k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right]k_3 + \left[\frac{c\,l}{p}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

y en vez de las ecuaciones (3), tendremos estas otras:

$$\left.\begin{aligned} v_1\,p_1 &= a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ v_2\,p_2 &= a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n\,p_n &= a_n\,k_1 + b_n\,k_2 + c_n\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La fórmula que da el error medio correspondiente a la unidad de peso será:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v\,p]}{r}}. \tag{7}$$

Con esto damos por terminado el estudio de la teoría de errores necesario para las aplicaciones que del mismo podemos hacer en este tratado.

CAPÍTULO II

Primeras operaciones de Agrimensura y su aplicación a levantamientos de poca importancia

§ 12. Fijación de puntos

Para trabajos planimétricos se fijan los puntos por intersección, con el suelo, de líneas verticales materializadas por banderolas, jalones, piquetes, o bien por la punta de una torre, etc.

Hay que distinguir dos clases de fijación de puntos: la artificial y la natural. A la primera pertenecen las señales que se hacen de modo especial para los trabajos topográficos, sin otra aplicación que ésta, y se conocen en general con el nombre de jalones; las segundas son las que se construyen sin fines topográficos, pero que después son aprovechadas para los levantamientos como puntos permanentes, como, por ejemplo, la torre de una iglesia. También pueden clasificarse los puntos en accesibles e inaccesibles, correspondiendo muchas torres a estos últimos.

Los jalones ordinarios (fig. 4) son pértigas de 1,8 a 3 m de longitud y de 3 a 4 cm de diámetro, con un extremo provisto de azuche de hierro para clavarlo en el suelo; este azuche debe tener dos prolongaciones hacia arriba, diametralmente opuestas, entre las cuales se fija la madera del jalón. Los jalones se pintan de rojo y blanco, o blanco y negro, en fajas alternadas de medio metro, o de diez centímetros, pudiendo servir, en caso necesario, de regla para medir pequeñas distancias. En la parte alta del jalón se dispone, cuando es preciso, una banderola, en general de dos paños, uno rojo y otro blanco.

También se emplean jalones tubulares, como el representado a la derecha de la figura 4, con dispositivo para subir más o menos la tablilla superior. En la figura 5 se ve un trípode especial de hierro para mantener verticales los jalones sobre la señal del terreno cuando éste sea muy duro (adoquinado, cementado, etc.).

El mismo objeto se logra con dos o tres jalones unidos mediante anillas o aros articulados, fáciles de encontrar en el comercio.

La verticalidad de un jalón se comprueba dirigiéndole dos visuales desde dos puntos que formen aproximadamente, por su unión con el primero, un ángulo recto; estas visuales deben dirigirse a lo largo del hilo de una plomada colocada en los puntos desde donde se mira el jalón.

En lugar de la plomada, es preferible emplear, sobre todo en días en que el viento hace moverse el hilo de aquélla, el rectificador representado en la figura 6, que lleva adosado en su parte superior un pequeño nivel esférico.

Los jalones sirven para señalar puntos que hayan de utilizarse en trabajos de poca duración; para fijar puntos que hayan de emplearse en trabajos más largos, se hace uso de

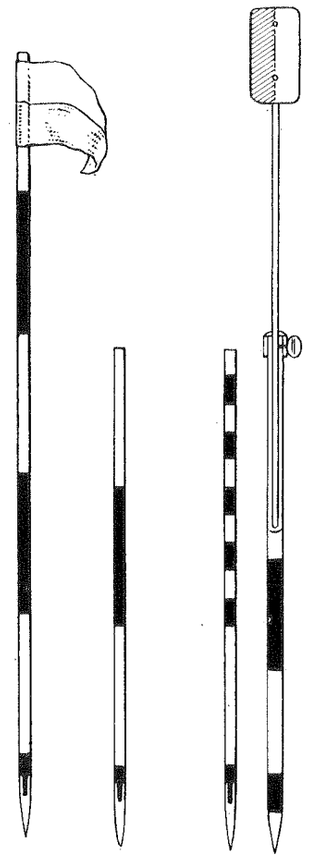


Fig. 4. — Jalones, a la escala de 1 : 25; los menores tienen 1,8 m de longitud; el de la derecha es un jalón tubular

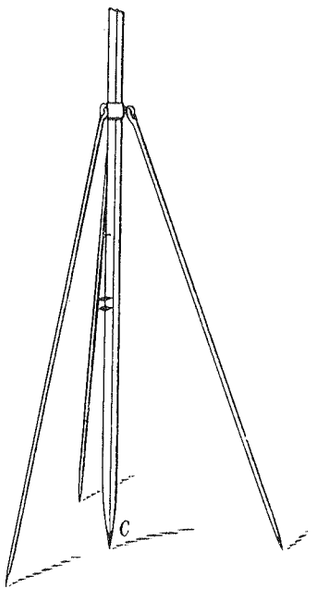


Fig. 5
Trípode para sostener los jalones

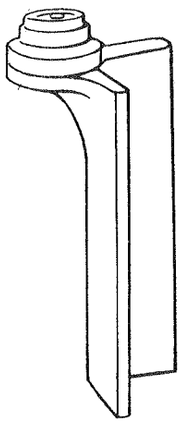


Fig. 6
Nivelador de jalones

estacas, tubos de barro cocido, tubos de hierro, clavos, mojones, hitos, etc. Estos últimos, especialmente los hitos, constituyen la señal más duradera para fijar puntos sobre el terreno.

Alineaciones rectas. Una *alineación recta* es, en Topografía, la intersección con el terreno de un plano vertical que pasa por una serie de puntos dados; para determinar bien la alineación, habrá que fijar en el terreno varios jalones verticales, que si aquél es llano se pondrán de 50 a 100 m de distancia unos de otros, y si es accidentado, esta distancia se reducirá a 20-50 m.

Ahora bien, una recta queda determinada por dos puntos; luego al jalonar una alineación pueden presentarse dos casos: tener que prolongar la recta dada por los dos puntos, o tener que situar entre estos dos, otros puntos que pertenezcan a la misma recta.

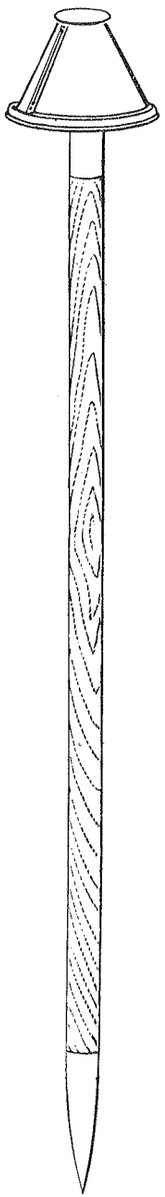
El primer problema se llama *prolongación* de una alineación recta, y el segundo, *relleno* de la misma.

Prolongación de una alineación recta. Sean A y B (fig. 7) los dos puntos dados: se pone el jalón C de modo que mirando por detrás del mismo hacia B, queden tapados este jalón y el A, y se repite la operación con el D, etc.



Fig. 7. — Alineación según una recta $ABCD$

Relleno de una alineación recta. Sean ahora A y D los puntos dados (fig. 7) y veamos el modo de situar entre estos puntos otros que estén sobre la recta determinada por aquéllos. Para esta operación se necesita un ayudante o peón, al que se hace caminar de A hacia D, mirando el topógrafo por detrás de A, hasta que aquél llegue a una posición cercana al sitio donde quiera ponerse el jalón, y se hacen señas al peón para que se mueva a derecha o izquierda hasta que el jalón B coincida con A y D. Después se divide la distancia entre B y D aproximadamente en dos partes iguales y se repite la operación hasta que el jalón C quede tapado por el B, al mirar desde A a D.


Fig. 8
Escuadra cónica

Si no se dispone de ningún ayudante ni de ningún instrumento de los descritos en los párrafos siguientes (alidadas, escuadras, etc.), puede un solo operador rellenar una alineación dada por dos puntos extremos A y D, colocando los dos jalones B y C aproximadamente en la recta que une A con D, y después, por medio de visuales alternadas, una vez desde C a BA, y otra desde B a CD, va corrigiendo las posiciones de B y C hasta que los cuatro puntos A, B, C, D, queden en línea recta.

Por ser grande la precisión que puede obtenerse a simple vista en la alineación de jalones, se puede prescindir del uso de aparatos para alineaciones bastante largas, hasta de más de 1 Km, obtenidas por prolongaciones sucesivas, sin que la recta resultante deje nada que desear. Claro está que para ello hay que tener buena vista y bastante práctica. Cuando es necesario, se recurre al uso de gemelos de campaña.

§ 13. Escuadras de agrimensor

Se llaman así los instrumentos que tienen ciertos dispositivos mediante los cuales pueden dirigirse desde un punto dos visuales perpendiculares entre sí.

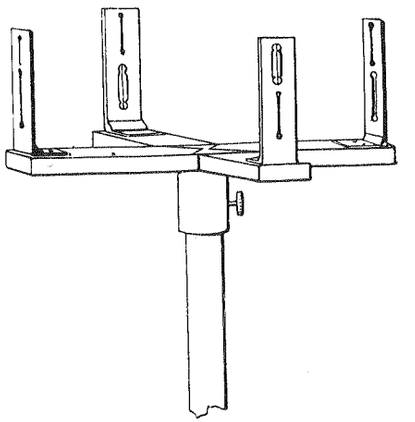
Ya los antiguos agrimensores romanos empleaban la escuadra, llamada por ellos *groma*, y todos los pueblos, en todos los tiempos, han empleado semejantes instrumentos en cualquiera de las múltiples formas que han llegado hasta nuestros días.

La llamada escuadra de disco era, en su forma primitiva más sencilla, una especie de tambor con dos rendijas o miras dispuestas en diámetros perpendiculares entre sí; actualmente las escuadras de disco han sido sustituídas por las representadas en las figuras 8 a 10.

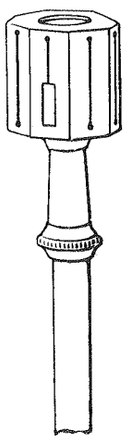
En algunas partes (en Wurtemberg, desde los comienzos de la Agrimensura) se emplea la escuadra de agrimensor de forma cónica (figura 8), que presenta varias ventajas sobre la forma cilíndrica ordinaria; por ejemplo, para una altura igual del instrumento, pueden dirigirse con la escuadra cónica visuales más inclinadas que con la cilíndrica

o prismática; además, gracias a la base de hierro del cono, que sobresale bastante del mismo, es más difícil que pueda estropearse la escuadra cónica al caer accidentalmente al suelo; finalmente, con la escuadra cónica resultan más fáciles y cómodas las visuales dirigidas hacia arriba o hacia abajo.

Las visuales quedan determinadas, en las escuadras, o por dos estrechas rendijas diametralmente opuestas (como en la figura 8) o por una rendija y un hilo enfrente, como en la figura 9, que representa una escuadra de pínulas, compuesta de dos *alidadas* perpendiculares entre sí y por las cuales puede mirarse lo mismo en una dirección que en la contraria, pues, como se ve en la figura, a cada rendija corresponde en la parte opuesta, y a su misma altura, un hilo vertical. Lo esencial es que haya dos alidadas, más o menos perfeccionadas, que formen entre sí un ángulo de 90°; algunas veces se necesita disponer de una tercera alidada, para tomar ángulos de 45°, como se ve en la figura 10, en la cual la mitad de las rendijas carecen de hilos opuestos, y en este caso pueden tomarse con la escuadra ángulos rectos y medios ángulos rectos.


Fig. 9. — Escuadra de pínulas en cruz

Para comparar las distintas clases de escuadras hay que tener en cuenta lo siguiente: una rendija con un hilo diametralmente opuesto, tiene la ventaja de poderse dirigir las visuales de modo seguro y fácil; en cambio, dos rendijas tienen la ventaja de poderse utilizar indistintamente para dirigir visuales en sentidos contrarios, pues lo mismo se mira por una como por otra, y además tienen una invariabilidad y solidez incompatibles con los hilos.


Fig. 10. — Escuadra de tambor

El diámetro de las escuadras, para que no resulten pesadas, no debe pasar de 20 cm, no excediendo en la mayoría de los instrumentos de esta clase, de 8 a 12 cm.

Las rendijas deben ser estrechas, para que también lo sea el haz de rayos luminosos que lleguen al ojo y para que sea bien limpia la imagen del hilo opuesto que se forma en la retina. En el capítulo VI, al tratar de la visión, volveremos a tratar de este punto.

La anchura mejor para las rendijas varía de $^1/_2$ a $^3/_4$ mm, con lo cual el campo visual es suficiente sin perjuicio de la precisión. En terreno llano resulta menos práctica la escuadra sencilla, sustituyéndose en este caso por la escuadra de reflexión (con espejos), o la de refracción (de prismas), tales como se describen en los párrafos siguientes. Pero también en terreno llano hay a veces necesidad de dirigir visuales muy inclinadas, como sucede en los terraplenes de las vías férreas, por lo cual no puede prescindirse de la escuadra sencilla de agrimensor, que es de uso continuo en los trazados de alineaciones perpendiculares entre sí en terrenos montañosos, ondulados o accidentados.

La escuadra de agrimensor tiene las siguientes aplicaciones: para levantar por un punto de una alineación otra alineación perpendicular a la primera; para trazar una alineación normal a otra, desde un punto fuera de ésta; para determinar un punto de una alineación recta comprendido entre dos puntos dados de la misma. El primer problema se

resuelve poniendo la escuadra en el punto por donde quiere trazarse la alineación perpendicular; el segundo, por tanteos, corriendo la escuadra sobre la alineación, hasta que la visual normal a ésta pase por el punto exterior dado; y el tercer problema se resuelve también por tanteos, mirando atrás y adelante hasta que se encuentre una posición de la escuadra tal, que los dos puntos dados se vean por el mismo par de rendijas opuestas.

Para comprobar la exactitud y buena construcción de la escuadra de agrimensor, se traza con ella un ángulo recto ACD (fig. 11), y sobre el lado CD se levanta una alineación perpendicular CB, pero girando la escuadra de modo que el diámetro que antes coincidía con AC, lo haga ahora con CD. Si la escuadra está bien construída y en buen uso, la recta CB debe caer en la prolongación exacta de la AC. También puede procederse tomando el ángulo recto ACD y después el BCD, es decir, levantando en segundo lugar una perpendicular a BC por el punto C: es evidente que si la escuadra está en buenas condiciones, deben obtenerse en los dos casos visuales que pasen por el mismo punto D.

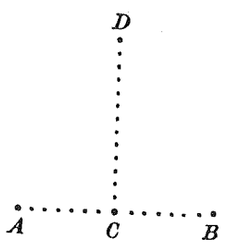


Fig. 11

Estas comprobaciones no son sino deducciones distintas de la conocida ley de la suma de los ángulos adyacentes, que ha de valer siempre 180°.

No siempre es posible rectificar o corregir una escuadra que presente defectos de construcción.

En cuanto a la precisión que puede obtenerse con la escuadra de agrimensor, el autor de este libro ha encontrado, tras diversos ensayos, que el error medio que se puede cometer en las visuales es de 2′ (§ 17, pág. 47); luego a 50 m de distancia se comete un error medio (desviación del punto obtenido) de

$$\frac{2'}{3438'} \times 50 = 0{,}03 \text{ m}, \quad \text{o sea, de 3 cm.}$$

Por esta razón, las instrucciones del Catastro prusiano proscriben la determinación, con escuadra de agrimensor, de ordenadas superiores a 30 ó 40 m, no pudiendo pasar en ningún modo de los 50 m.

Teniendo buena vista y mucha práctica, puede llegarse a la precisión de ± 1′; pero si la escuadra se pone en estación sin plomada, es decir, con la verticalidad del bastón apreciada a ojo, y si las condiciones de visibilidad no son buenas, puede llegarse a un error medio de ± 5′.

§ 14. Escuadras de reflexión, o de espejos

Además de las escuadras simples, llamadas de agrimensor, que hemos descrito en el párrafo anterior, existen otras escuadras ópticas, de pequeño tamaño, más fáciles y cómodas de manejar y emplear, ya que mediante espejos convenientemente dispuestos se ven a la vez las dos alineaciones normales entre sí; en cambio, tienen la desventaja de no poderse usar más que en terreno llano o muy poco ondulado.

Estos instrumentos están fundados en la ley de reflexión de la luz que dice que el ángulo que forma el rayo incidente con la superficie del espejo, es igual al que forma con la misma el rayo reflejado.

En las figuras 12 y 13 tenemos dos espejos (CA y BA), que forman entre sí un ángulo $CAB = \alpha$. Supongamos que, en un plano normal a la arista A del ángulo diedro

formado por los espejos, incide un rayo luminoso PB sobre uno de ellos: en B se reflejará este rayo, tomando la dirección BC, y al llegar a C, en el otro espejo, volverá a reflejarse. saliendo del aparato en la dirección CQ.

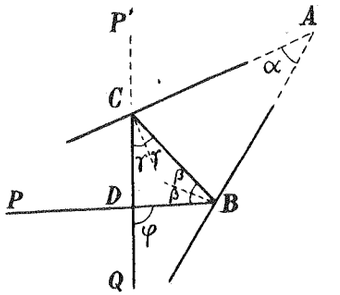


Fig. 12

En ambos casos (figs. 12 y 13), el rayo que sale, CQ, cuya dirección depende del ángulo de incidencia del rayo PB sobre el primer espejo, forma un ángulo φ con el rayo incidente PB, que vamos a demostrar que es igual al doble del ángulo α formado por los espejos entre sí.

Consideremos para ello los triángulos ABC y BCD; en el primero se tiene, en la figura 12:

$$\alpha = 180° - (90° - \beta) - (90° - \gamma)$$

o sea,

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{1}$$

y en el triángulo BCD, por ser φ ángulo externo, se tiene:

$$\varphi = 2\beta + 2\gamma \tag{2}$$

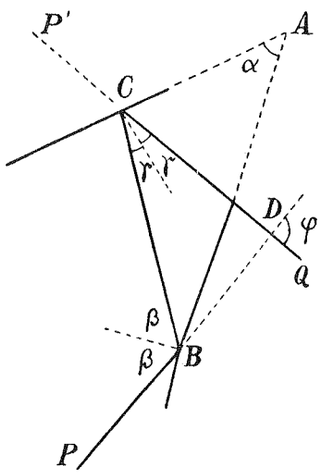


Fig. 13

de donde, sustituyendo valores,

$$\varphi = 2\alpha. \tag{3}$$

En la figura 13 se tiene análogamente, en el triángulo ABC,

$$\alpha = 180° - (90° - \beta) - (90° + \gamma)$$

o sea,

$$\alpha = \beta - \gamma \tag{4}$$

y en el triángulo BCD, el ángulo φ, por ser igual a su opuesto por el vértice, se podrá expresar del siguiente modo:

$$\varphi = 180° - (180° - 2\beta) - 2\gamma$$

o bien,

$$\varphi = 2\beta - 2\gamma \tag{5}$$

y según (4),

$$\varphi = 2\alpha. \tag{6}$$

Si el ángulo α que forman entre sí los espejos es de 45°, en ambos casos se tiene que el ángulo φ formado por el primer rayo incidente con el segundo reflejado es de 90°.

Es decir, que el rayo PB que penetra en el instrumento, sale desviado 90° de su dirección primitiva, y si se pone el ojo en Q se ve el punto P en P'.

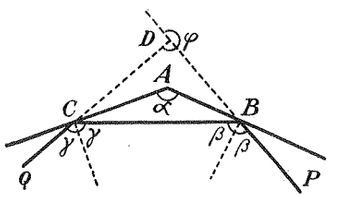


Fig. 14

Consideremos un tercer caso (fig. 14), en el cual los espejos formen entre sí un ángulo α muy grande, de tal modo que el rayo incidente PB y el saliente CQ se corten en D, en sus prolongaciones. El ángulo φ mide la desviación sufrida por el rayo primero, y vamos a probar que también en este caso es doble que el α. En efecto, en los triángulos ABC y DBC tenemos respectivamente:

$$\alpha + (90° - \beta) + (90° - \gamma) = 180°$$
$$(\varphi - 180°) + (180° - 2\beta) + (180° - 2\gamma) = 180°$$

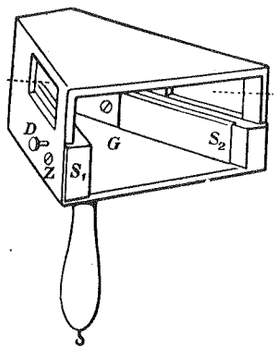


Fig. 15. – Escuadra de reflexión de 45°, con empuñadura

o bien,

$$\alpha = \beta + \gamma$$

y

$$\varphi = 2\beta + 2\gamma$$

de donde

$$\varphi = 2\alpha. \qquad (7)$$

Es decir, que si $\alpha = 135°$, resulta para φ el valor 270°, o sea, que el rayo saliente forma un ángulo recto con el entrante.

El ángulo que forman los dos espejos es, en la práctica, de 45° ó de 90°, llamándose en ambos casos al instrumento, aunque impropiamente para el primero, *escuadra* de reflexión o de espejos.

Escuadra de reflexión de 45°. En la figura 12 se funda la teoría de la escuadra de reflexión, construída por primera vez en Londres por Adams, hacia el año 1800. En las figuras 15 y 16 se ven dos modelos de este aparato, el primero para operar teniéndolo en la mano, y el segundo sujeto en el extremo de un bastón o chuzo clavado en el suelo.

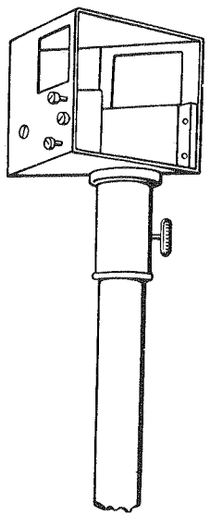


Fig. 16.– Escuadra de reflexión de 45°, sostenida por un bastón

En la figura 17 se ve la aplicación o uso de la escuadra de reflexión. Supongamos que desde el punto P se trate de trazar una perpendicular PQ a la recta MN: para ello, mirando por O hacia NM, se anda en esta dirección hasta que la imagen de P, reflejada por el segundo espejo AB, coincida con el jalón N, que se ve a lo lejos por encima del espejo. El punto Q ocupado por la escuadra será el pie de la perpendicular buscada.

También puede tomarse PQ como alineación dada, y levantarle en Q la normal QN.

Además, en ambos casos, se puede mirar a izquierda y derecha, resultando por consiguiente cuatro casos, que con alguna práctica se pueden elegir y resolver perfectamente.

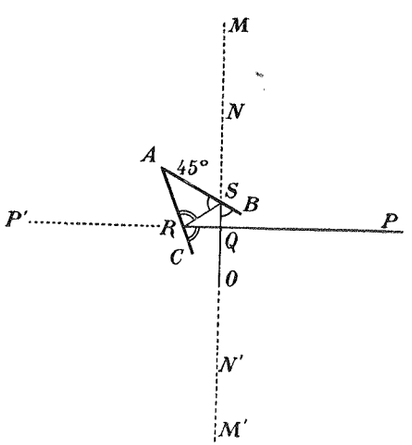


Fig. 17.–Teoría de la escuadra de reflexión de 45°

Si se determina un ángulo recto, tal como representa la figura 17, y se cambia P por P', poniendo la escuadra a la derecha, se tiene un modo de comprobar la escuadra, lo cual puede hacerse por los tres procedimientos siguientes:

1. Una vez hechas las dos operaciones anteriores, si resulta $P'QP$ una recta, se puede tener la seguridad de que las visuales han sido bien dirigidas y el aparato bien manejado.

2. Si $P'QP$ es una recta y dirigiendo bien las visuales, al volver la escuadra a la derecha, se nota un cambio en la dirección de la recta o en la posición de los puntos, es señal de que el aparato no funciona bien, siendo preciso corregir el ángulo α que forman entre sí los dos espejos. Este

ángulo debe ser exactamente de 45°, y se puede afinar mediante tornillos de corrección, que se ven en D y Z de la figura 15, haciendo un corto número de ensayos o tanteos.

3. Si el instrumento está bien construído ($\alpha = 45°$) y se maneja correctamente, resulta, al mirar a P o a P' que el punto Q se encuentra siempre en la recta PP'. Con esta escuadra de 45° son necesarias dos estaciones para hacer esta comprobación, mientras que con la de 90° (fig. 21), basta con una.

El punto de intersección D de los dos rayos (fig. 12), es variable, como fácilmente se comprende viendo la figura, por lo cual no puede fijarse de una vez para siempre y con exactitud la posición del aparato para la cual la vertical que pasa por D encuentra al terreno en el punto fijado; el vértice del ángulo recto formado por las visuales, no está en la vertical que pasa por el centro de gravedad del instrumento, como sucede en la figura 15, sino por delante del mismo, cerca de la abertura principal de la escuadra. En la figura 16, el manguito donde se introduce el bastón-soporte, está unido a la base de la escuadra en un punto encima del cual se encuentra aproximadamente el vértice del ángulo recto.

Para poner bien en estación la escuadra de espejos, da Oltay el sencillo procedimiento siguiente: en la plataforma que sirve de base al instrumento hay una especie de punzón en el punto correspondiente a la intersección de los rayos y en uno de los espejos hay marcada una raya vertical, que al recibir la imagen del punzón la refleja sobre el otro espejo de modo que el rayo vuelve a pasar por dicho punzón.

La escuadra que puede fijarse mediante un bastón sobre el suelo (fig. 16), es preferible a la de mano (fig. 15), si se quiere asegurar la proyección vertical con un error menor de 1 a 2 cm.

La precisión de las escuadras de reflexión para los trabajos de Agrimensura es casi igual a la de la escuadra simple, es decir, de unos 2′ (véase página 32).

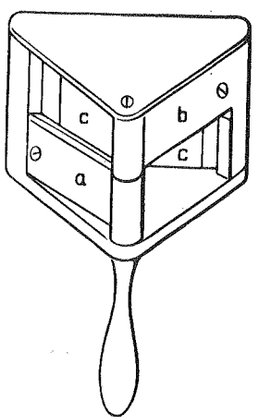


Fig. 18. – Escuadra de tres espejos, de Wendelstein

Escuadra de tres espejos, de Wendelstein. Este instrumento, fabricado por Sartorius, sirve de alineador y de escuadra, es decir, para trazar alineaciones rectas y alineaciones normales entre sí. En las figuras 18 y 19 se ven los tres espejos a, b, c de que se compone esta escuadra: los dos primeros forman entre sí un ángulo recto, y el tercero c forma, con los dos anteriores, ángulos de 45°.

El funcionamiento y empleo de esta escuadra se comprenden con sólo ver la figura 20. Colocando la escuadra entre los puntos A y B de una cierta alineación, y moviéndose convenientemente a uno u otro lado, se llega a una posición C para la cual se ven coincidiendo las imágenes de los puntos A y B, reflejados por los espejos a, b. Cuando con las imágenes de estos puntos coincide también la de otro D, exterior a la alineación, se tiene una alineación CD perpendicular a la primera ACB.

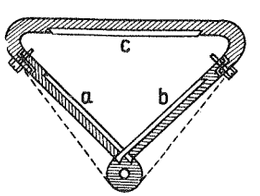


Fig. 19

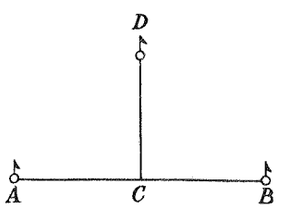


Fig. 20

Hay que mirar por los lados de la arista de articulación de los dos espejos a y b: por la izquierda, por encima del espejo a, y por la derecha por debajo del b. El punto D se encontrará, como en las

escuadras simples, por encima o por bajo del instrumento al coincidir su imagen con las de A y B.

Escuadras de 90° (alineadores). En estas escuadras (fig. 21), los espejos forman entre sí un ángulo recto, y se emplean para situar puntos sobre una alineación, entre dos puntos dados de la misma.

Según el profesor Schols, la escuadra de 90° fué inventada por Lüpkens, de Luxemburgo.

En la figura 22 se puede comprender el fundamento de la escuadra de 90°, que es el siguiente: cuando el punto C está sobre la recta AB, mirando por D se verán coincidiendo las imágenes de A y B reflejadas por los espejos. La dirección CD es casi perpendicular a AB, habiéndose dibujado en la figura 23 tan oblicua para dar a entender que no es necesario que CD sea normal a AB.

El instrumento se verifica o comprueba colocándolo en un punto C de la recta AB y viendo si desde D, o desde otro punto, se ven confundidas las imágenes de A y B. Si procediendo de este modo se ven las dos imágenes separadas, se rectifica el instrumento corrigiendo el ángulo formado por los espejos.

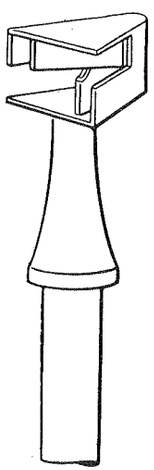


Fig. 21
Alineador

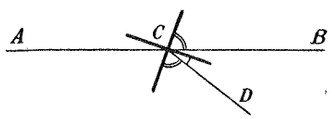


Fig. 22. — Teoría del alineador

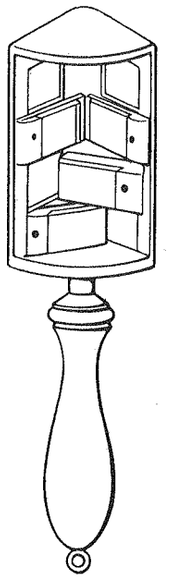


Fig. 23
Escuadra-alineador, de Raschke

En la figura 23 se ve una escuadra que sirve también de alineador, de uso muy práctico, construída por Raschke, de Glogau. Los dos espejos de arriba forman entre sí un ángulo de 45°, como la escuadra de la figura 15, y los dos de abajo son perpendiculares entre sí, como en el alineador de la figura 21; es decir, que con este tipo de escuadra-alineador pueden trazarse alineaciones que formen entre sí ángulos de 90° ó de 180°.

§ 15. Escuadras de refracción, o de prismas

Además de las escuadras de espejos pueden emplearse para la determinación de ángulos las escuadras de prismas, fundadas en las leyes de refracción y reflexión de la luz en los prismas ópticos. Son muchas y muy variadas las formas de prismas empleadas en las escuadras de refracción, como vamos a ver seguidamente.

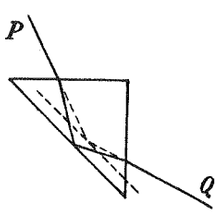


Fig. 24

I. **Prisma triangular de sección rectangular isósceles.** Consideremos en primer lugar un prisma cuya sección recta sea un triángulo rectángulo isósceles (fig. 24): un rayo luminoso que llegue al prisma incidiendo sobre un cateto en la dirección P, se refleja en la cara hipotenusa y sale por el otro cateto en la dirección Q. Ahora bien, por ser iguales los dos ángulos agudos del

prisma y los que forman con la hipotenusa el rayo incidente y el reflejado, resultan también iguales los que forman estos rayos, dentro del prisma, con los dos catetos, y por consiguiente también lo son los ángulos que con estos catetos forman el primer rayo incidente (entrante) y el último refractado (saliente). Es decir, que la desviación que experimenta el rayo al atravesar de este modo el prisma, es la misma que sufriría por una simple reflexión sobre un espejo paralelo a la hipotenusa.

Cuando el rayo llega a la cara hipotenusa con poca inclinación, se verifica sobre ésta la *reflexión total,* pero si la inclinación aumenta, para evitar que se pierda intensidad luminosa por la parte de luz que pudiera refractarse en esta cara saliendo al exterior, se azoga dicha cara hipotenusa, que así obrará siempre como un espejo perfecto.

Desviación constante. El caso más frecuente es el de reflejarse dos veces el rayo en el interior del prisma, como se ve en la figura 25. Prescindamos primero de la refracción y observemos la marcha del rayo dos veces reflejado $P_1 E B C A Q_1$, tal como se vió en la figura 13: también en este caso el rayo $A Q_1$ forma con el $P_1 E$ un ángulo de 90°, como en la escuadra de reflexión.

Pero hay que tener en cuenta, además, la refracción del rayo en las dos caras laterales o catetos del prisma. Como que en el interior del prisma, según acabamos de ver, $E B$ es perpendicular a CA, y los dos catetos son por definición perpendiculares entre sí, se deduce que los ángulos δ y ε son también iguales, luego en el punto de incidencia o entrada E y en el de emergencia o salida A se tienen las mismas condiciones de refracción; es decir, que la desviación del rayo (hacia fuera) es igual en ambos puntos, lo cual significa que también el rayo incidente PE forma un ángulo de 90° con el emergente AQ.

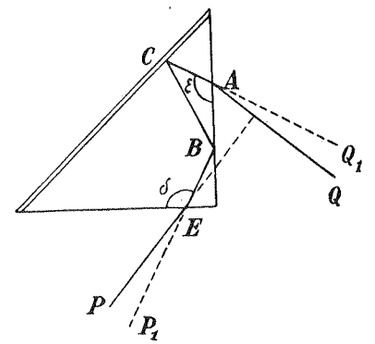


Fig. 25

De aquí podemos deducir la siguiente consecuencia general: si al atravesar un rayo de luz un prisma, sufre en el interior de éste dos reflexiones sucesivas, y si la desviación total o ángulo del rayo entrante con el saliente es de 90°, puede asegurarse que las dos caras reflectoras forman entre sí un ángulo de 45°, y las de entrada y salida del rayo, uno de 90°.

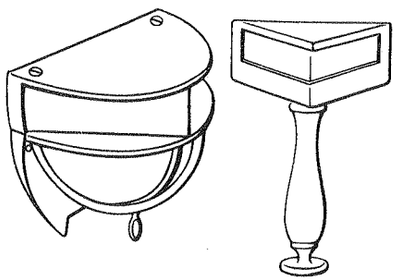
El rayo considerado en la figura 25, que incide sobre un cateto, penetra en el prisma, se refleja sobre el otro cateto y después sobre la hipotenusa, emergiendo por el segundo cateto, se llama rayo *fijo,* en oposición al rayo considerado en la figura 24, que sólo se refleja sobre la hipotenusa, el cual se llama *variable,* por no conservar la misma dirección de emergencia al girar el prisma.

Además de esta diferencia, se distinguen muy bien ambas clases de rayos en que uno se ha de mirar casi paralelamente a la hipotenusa del prisma (el variable) y el otro casi normal a ésta (el fijo); en el primer caso cerca de la arista de 90°, y en el segundo cerca de una de las aristas de 45°.

La marcha del rayo en un prisma, representada en la figura 24, era conocida de antiguo, pero la que se ve en la figura 25, con desviación constante de 90° entre los ángulos incidente y emergente, fué descubierta en 1851 por Bauernfeind, de Munich, por lo cual se conoce la escuadra de prisma triangular de esta clase con el nombre de escuadra de Bauernfeind.

Escuadra de Bauernfeind. En las figuras 26 y 27 se ven dos formas distintas de este instrumento, construído por Ertel & Sohn, de Munich. Puede emplearse teniéndolo en la mano o fijo en un chuzo que se clava en el suelo.

El funcionamiento de esta escuadra está basado en la marcha del rayo luminoso que representa la figura 25: mirando por delante de uno de los catetos de la escuadra se confunde la visual directa a uno de los puntos (por encima de la escuadra) con el rayo dos veces reflejado, procedente del otro punto.



Figs. 26 y 27 — Escuadra de Bauernfeind

La comprobación de esta escuadra de prisma se hace como para la escuadra de espejos, es decir, levantando a una alineación recta otras dos perpendiculares, una a la izquierda y-otra a la derecha, y viendo que no hay la menor desviación. Además, al hacer girar un poco la escuadra con la mano, no debe notarse giro alguno en el rayo. Comprobando una vez la escuadra no hay que volver a comprobarla más, por no ser el prisma susceptible de desarreglo.

El vértice del ángulo recto que forman entre sí los rayos, cae delante de uno de los catetos del prisma, como se ve en la figura 25; como punto de apoyo que se ha de proyectar verticalmente en el suelo, se toma uno cerca de la arista de su ángulo recto (fig. 27).

Visuales inclinadas. Hasta ahora hemos supuesto que todos los rayos entraban en el prisma, y se refractaban y reflejaban, en un plano perpendicular a las aristas del prisma, es decir, en un plano horizontal, suponiendo el prisma en posición vertical. Vamos a ver ahora que si el rayo incide oblicuamente sobre el prisma, subsiste la teoría expuesta para el caso de incidencia normal antes estudiado.

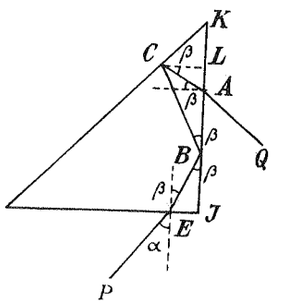


Fig. 28

En la figura 28 se ve la marcha $PEBCAQ$ de un rayo luminoso horizontal que atraviesa el prisma supuesto en posición vertical sobre el papel. Este camino es el mismo, en proyección, dada la posición del prisma, para todos los rayos que incidan en éste sin salirse del plano vertical que pasa por PE: en E se refractará dentro del plano vertical que pasa por EB, y se reflejará en B y C, y se refractará en A, saliendo por AQ, dentro de los planos verticales que pasan por BC, CA y AQ respectivamente.

Supongamos que incide en E un rayo luminoso no horizontal, que entra en el prisma con un ángulo de inclinación igual a v: este rayo se reflejará en B y en C sin perder esta misma inclinación v. Para hallar la diferencia de altura entre el punto de incidencia E y el de emergencia A, calculemos la longitud del camino $EBCA$ recorrido por el rayo. De los triángulos rectángulos EBJ, BCL, ACL y CLK (fig. 28), se deduce directamente:

$$EB = \frac{JB}{\cos\beta} \qquad BC = \frac{BL}{\cos\beta} \qquad CA = \frac{CL}{\cos\beta} = \frac{LK}{\cos\beta}$$

y sumando ordenadamente:

$$EB + BC + CA = \frac{JK}{\cos\beta}.$$

Si llamamos h a la altura del prisma, y k a la longitud JK del cateto de su sección recta, la inclinación máxima $v_{máx}$ del rayo luminoso dentro del prisma vendrá dada por la fórmula siguiente:

$$\operatorname{tg} v_{máx} = \frac{h}{k}\cos\beta.$$

De ordinario, el ángulo de incidencia α del rayo luminoso se toma igual a 45°, y para el valor corriente del índice de refracción $n = 1{,}5$, resultará, por la ley de la refracción de la luz ($\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha$), para el ángulo β un valor de 28° en números redondos. La relación $\frac{h}{k}$ es, en la práctica y para la mayoría de los prismas en uso, igual a $\frac{1}{3}$, luego sustituyendo valores en la fórmula de la tangente de la inclinación máxima, resulta para el ángulo v el valor:

$$v_{máx} = 16{,}5°.$$

Para inclinaciones mayores, según Schellens, director de Agrimensura de Düsseldorf, puede utilizarse este prisma azogando sus bases superior e inferior, que han de ser perpendiculares a las aristas. Si la inclinación es bastante pronunciada, los rayos luminosos inciden y se reflejan en las dos bases del prisma, pero siempre dentro del mismo plano vertical, de suerte que las dos reflexiones sobre las caras laterales del prisma no sufren alteración por este motivo. Las imágenes obtenidas por reflexión sobre la base superior o la inferior son invertidas respecto al objeto de que proceden.

Para inclinaciones aun mayores, se mueve el prisma de modo que el rayo luminoso se refleje sucesivamente en la base superior y en la inferior o al contrario, hasta obtener de nuevo una imagen directa (no invertida) del objeto.

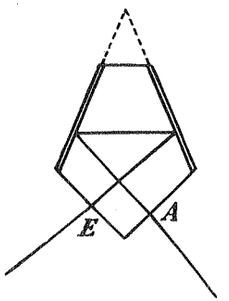


Fig. 29

II. **Escuadra de prisma pentagonal.** El prisma cuya sección recta se ve en la figura 29, tiene cinco caras, y sus cinco ángulos son: uno de 45°, el opuesto a éste, de 90°, y los otros dos son iguales pero no desempeñan papel alguno en el funcionamiento teórico del prisma. Las dos caras del prisma que forman entre sí el ángulo de 45° están azogadas.

Según la ley general hallada anteriormente (pág. 37), el rayo luminoso que incide en E sobre este prisma formará un ángulo recto con el emergente por A, pues también aquí las caras de incidencia y emergencia son perpendiculares entre sí, y las dos especulares forman una con otra un ángulo de 45°.

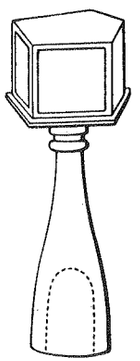


Fig. 30
Escuadra de prisma pentagonal, de Zeiss

Las dos caras especulares no llegan hasta su intersección (arista), como se ve en la figura 29, sino que el prisma está tallado antes de llegar a la misma, resultando así el prisma de cinco caras, llamado ordinariamente pentagonal, aunque propiamente debiera llamarse *de base pentagonal.*

En la figura 30 se ve una escuadra de prisma pentagonal, tal como la construye la casa Zeiss, de Jena. Este prisma tiene la ventaja sobre el triangular de Bauernfeind, de que perturban mucho menos las *falsas imágenes* o imágenes variables, que son las producidas por rayos que sólo se reflejan una vez.

También el prisma pentagonal se construye con las bases azogadas, según la teoría de Schellens, en la casa Reiss, de Liebenwerda.

Dando por supuesta la invariabilidad de los ángulos de 45° y 90° del prisma (fig. 29), los otros dos han de sumar forzosamente 225°, luego si uno de ellos se hiciera de 180°, quedaría para su opuesto, 45°; es decir, se tendría otra vez el prisma triangular de la figura 25.

Según Doergens, el prisma pentagonal se encuentra descrito en los Estudios sobre los

procedimientos rápidos de medida, del capitán de artillería Gautier (París, 1865). Su aplicación a la práctica de la Topografía se encuentra descrita en una Memoria de Prandtl (1890).

Prisma doble para tomar ángulos de 45° y 90°. Si se supone cortado el prisma de la figura 29 por el plano diagonal correspondiente a los ángulos de 45° y 90°, y separadas las dos partes resultantes (fig. 31), quedan dos prismas triangulares que pueden utilizarse para tomar ángulos de 45°.

El rayo incidente, que entra por E en uno de estos prismas (fig. 32), sigue en el interior de éste la marcha que se ve en la figura 13; es decir, que el rayo CA forma con el EB un ángulo $2\alpha = 45°$. Pero las caras de incidencia y emergencia forman entre sí un ángulo constante $\varphi = 2\alpha = 45°$ y el ángulo ε resulta igual al δ; es decir, que debe ser igual la desviación experimentada por el rayo al refractarse, tanto en la incidencia como en la emergencia; por consiguiente el rayo emergente AQ formará con el incidente PE un ángulo de 45°.

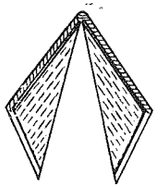


Fig. 31

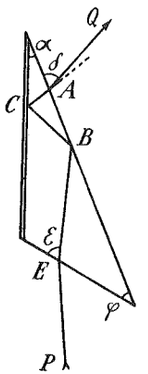


Fig. 32

Si se hacen girar hacia adentro ambos prismas triangulares, hasta llegar a tocarse, se tiene un prisma cuadrangular que sirve para tomar ángulos rectos; tallando la arista de giro se vuelve a tener el pentagonal.

Este prisma doble se encuentra descrito en una Memoria de Doergens del año 1897.

III. **Prisma de Wollaston.** En la reflexión de un rayo luminoso sobre dos espejos inclinados entre sí 135° (fig. 14), se funda el empleo de una escuadra de prisma para el trazado de ángulos rectos. En la figura 33 se ve este prisma, conocido con el nombre de prisma de Wollaston, que tiene dos ángulos opuestos respectivamente de 135° y de 90°, siendo los otros dos iguales, y por lo tanto, de 67° 30′ cada uno.

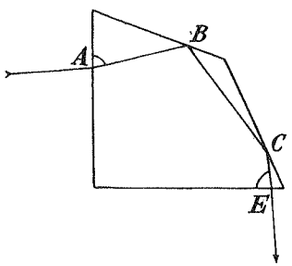


Fig. 33.—Prisma de Wollaston

Según se vió en la figura 13, los rayos AB y CE han de ser perpendiculares entre sí, y lo mismo que en la figura 25, en el prisma de Wollaston la desviación por refracción será la misma en la incidencia que en la emergencia; es decir, que el rayo incidente será perpendicular al emergente.

Una ventaja del prisma de Wollaston sobre todos los hasta ahora descritos, consiste en que no hay necesidad de azogar ninguna de sus caras, por verificarse siempre la reflexión total.

El empleo de este prisma para trazar ángulos rectos, así como el de muchos otros prismas de diferentes formas y aplicaciones, se encuentra descrito por Bauernfeind en su obra «Elementos de Topografía» publicada en 1890.

§ 16. Cruz de prismas (alineador)

La cruz de prismas de Bauernfeind consiste en la unión de dos prismas de sección triangular rectangular y se utiliza como alineador.

Se emplea la cruz de prismas en dos formas, pero ambas sirven para situar un punto entre otros dos, de modo que quede sobre la recta determinada por éstos.

La primera forma de cruz de prismas, que es la más antigua, consiste simplemente en

dos prismas de reflexión total cruzados y dispuestos uno sobre otro de modo que funcionan exactamente del mismo modo que el alineador de espejos representado en la figura 21, estando sustituídos los dos espejos por las caras hipotenusas de los prismas.

Esta cruz de prismas es un caso particular de la inventada por Steinheil, de Munich, en 1834, que era en realidad un sector de prismas equivalente a un prisma de ángulo variable, y más especialmente puede considerarse como una modalidad del prisma de Bauernfeind, empleado por éste en 1851 para trabajos de Agrimensura.

La segunda forma, ya moderna, de la cruz de prismas, es una doble aplicación del prisma de Bauernfeind de desviación constante (figura 25).

Sabido esto, se comprende muy bien el funcionamiento de las cruces de prismas representadas en las figuras 34 y 35, que corresponden respectivamente a los tipos antiguo y moderno, y cuyos esquemas explicativos se ven en las figuras 36 y 37.

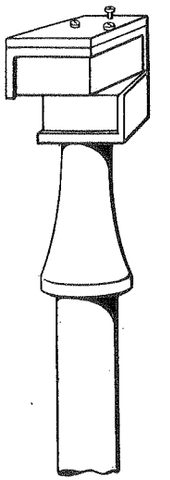


Fig. 34.—Cruz de prismas (modelo antiguo)

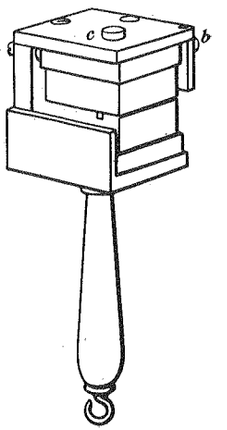


Fig. 35.—Cruz de prismas (modelo moderno)

Como la cara hipotenusa de los prismas obra como espejo, se colocan éstos de modo que sus hipotenusas sean perpendiculares entre sí, como en el alineador de la figura 21.

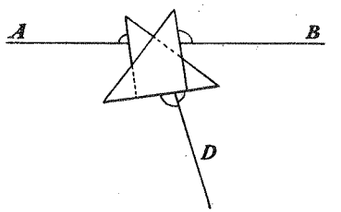


Fig. 36.—Esquema de la cruz de prismas, según la figura 34

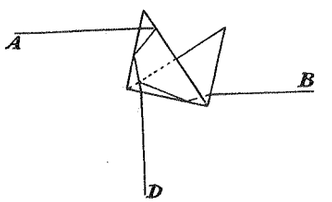


Fig. 37.—Esquema de la cruz de prismas, según la figura 35

En el segundo tipo (fig. 35) se disponen los prismas como se ve en la figura 37, dando cada uno la misma desviación para el rayo luminoso, como se vió en la figura 25.

En este segundo tipo no es preciso, como en el primero, que las caras hipotenusas estén rígida y exactamente montadas en ángulo recto.

En los dos tipos, mirando por D, se ven confundidas las dos imágenes de A y B, cuando el aparato está en la recta AB que los une.

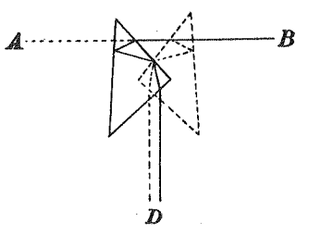


Fig. 38

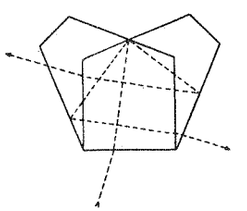


Fig. 39

En el año 1888, describió Lorber una cruz de prismas de Starke y Kammerer, de Viena, que, como se ve en la figura 38, consiste en dos prismas triangulares que van montados dentro de una caja cilíndrica

con mirillas practicadas en los puntos convenientes. Este alineador es de uso muy práctico en el campo.

También el prisma pentagonal se emplea como alineador (fig. 39), montando dos prismas de Bauernfeind como prisma doble, según vimos anteriormente al tratar de estos prismas. Tampoco en este caso es necesario que los dos prismas estén rígidamente montados en ángulo recto. En la figura 40 se ve un doble prisma pentagonal construído por Zeiss; la caja puede cerrarse del todo girando convenientemente el mango del aparato.

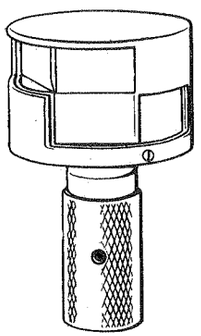


Fig. 40

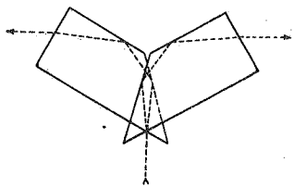


Fig. 41

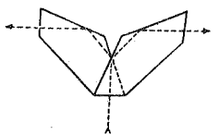


Fig. 42

Alineador Hensoldt. En el año 1921 construyó la casa Hensoldt, de Wetzlar, un nuevo alineador, del tipo *cruz de prismas,* compuesto de dos prismas tetragonales (fig. 41) sin cara alguna azogada, por verificarse sólo reflexiones totales. Estos prismas tienen dos ángulos rectos, uno de 135° y el cuarto de 45°. Como en el prisma de Wollaston (figura 33), el rayo emergente forma un ángulo recto con el incidente. Esta combinación de prismas funciona del mismo modo que la de prismas de Bauernfeind y la de pentagonales.

Otro modelo de alineador de la misma casa Hensoldt, aparecido en 1924, es el representado esquemáticamente en la figura 42, compuesto de dos prismas de Wollaston a los cuales se ha tallado el ángulo recto para reducir el tamaño del aparato, que se ve en perspectiva en la figura 43. La ventaja de este nuevo modelo estriba en que los rayos incidentes y emergentes (figura 42) son normales a las respectivas superficies de incidencia y emergencia, por lo cual no hay la pérdida de intensidad luminosa que tenía lugar en el modelo anterior (fig. 41), dada la inclinación de los rayos sobre dichas superficies.

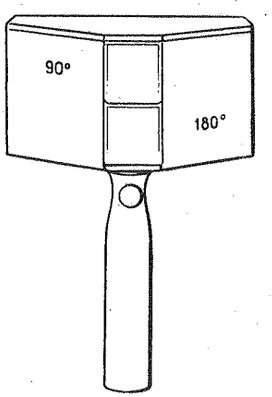


Fig. 43

Para comprobar una cruz de prismas, se sitúa el aparato sobre una alineación recta repetidas veces. Si en estas reiteraciones se nota alguna desviación en el mismo sentido, es señal de que en los prismas hay un defecto de talla o pulimento. Pero generalmente, caso de haber este defecto, es tan pequeño que pasa inadvertido en la práctica.

§ 17. Estudio de los errores en los prismas

1. *Escuadra de Bauernfeind.* En la figura 44, que representa un prisma de Bauernfeind con el valor verdadero de sus ángulos, se supone que ni es rectángulo, ni isósceles, sino que tiene los tres ángulos siguientes:

$$A = 90° - x \qquad B = 45° + \frac{x}{2} - \tau \qquad C = 45° + \frac{x}{2} + \tau$$

donde x es el error del ángulo recto y τ el valor o medida de la asimetría.

Para seguir el camino del rayo luminoso a través del prisma, empecemos por escribir las fórmulas correspondientes a la refracción en el punto de incidencia D y en el de emergencia G:

$$\operatorname{sen}\alpha = n \operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\varepsilon = n \operatorname{sen}\delta \tag{1}$$

siendo n el índice de refracción del cristal de que está hecho el prisma.

En el triángulo $C\,E\,F$ (fig. 44) se tiene:

$$\left(45° + \frac{x}{2} + \tau\right) + (90° + \gamma) + \beta' = 180°$$

y en el $C\,E\,G$,

$$\left(45° + \frac{x}{2} + \tau\right) + (90° - \gamma) + (90° - \delta) = 180°$$

de donde, sumando ordenadamente y reduciendo:

$$x + 2\tau = \delta - \beta'. \tag{2}$$

En el triángulo $A\,D\,F$ se tiene, para comparar β con β',

$$(90° - x) + (90° - \beta) + \beta' = 180°, \qquad \text{o sea,} \qquad \beta' - \beta = x$$

y sustituyendo el valor de β' deducido de aquí, en (2),

$$2x + 2\tau = \delta - \beta, \qquad \text{o bien,} \qquad \delta = \beta + 2(x + \tau). \tag{3}$$

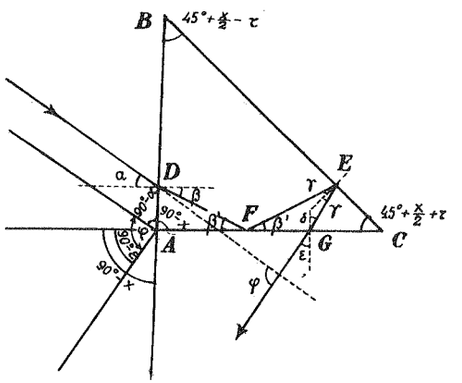


Fig. 44

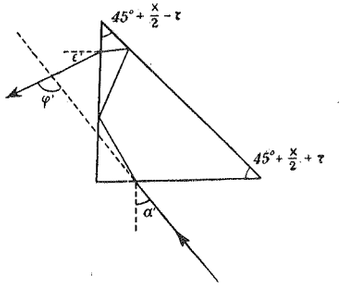


Fig. 45

Pongamos el valor de δ en la segunda fórmula (1), aplicada a la refracción del rayo emergente en G, y tendremos:

$$\operatorname{sen}\varepsilon = n \operatorname{sen}[\beta + 2(x + \tau)];$$

pero por ser muy pequeñas x y τ, se puede escribir:

$$\operatorname{sen}[\beta + 2(x + \tau)] = \operatorname{sen}\beta + 2(x + \tau)\cos\beta \quad *)$$

es decir, que

$$\operatorname{sen}\varepsilon = n \operatorname{sen}\beta + 2n(x + \tau)\cos\beta$$

y como según la primera de las fórmulas (1), $n \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$, resulta:

$$\operatorname{sen}\varepsilon - \operatorname{sen}\alpha = 2n(x + \tau)\cos\beta. \tag{4}$$

(*) Por ser el primer miembro el seno de una suma, se tendrá: $\operatorname{sen}[\beta + 2(x+\tau)] = \operatorname{sen}\beta\cos 2(x+\tau) + \cos\beta \operatorname{sen} 2(x+\tau)$, y por ser tan pequeños x y τ, el coseno de su suma, que sigue siendo muy pequeña, se puede tomar igual a la unidad, y el $\operatorname{sen} 2(x+\tau)$, por la misma razón, se puede tomar por el arco, quedando así la fórmula en la forma escrita.

Para un prisma sin error alguno, $\alpha = \varepsilon$, luego siempre la diferencia $\alpha - \varepsilon$ será muy pequeña, por lo cual, al desarrollar la diferencia de senos sen ε — sen α, se podrá escribir:

$$\operatorname{sen}\varepsilon - \operatorname{sen}\alpha = (\varepsilon - \alpha)\cos\alpha \text{ (*)}$$

y sustituyendo en (4) resultará, después de dividir por cos α:

$$\varepsilon - \alpha = 2n(x+\tau)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

Para eliminar β, partamos de la fórmula (1), en la cual

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha$$

de donde (**)

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{n^2}}$$

y dividiendo ambos miembros de esta igualdad por cos α (***),

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2-1)\sec^2\alpha + 1}.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (5),

$$\varepsilon - \alpha = 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}. \tag{6}$$

Trazando ahora por A (fig. 44) paralelas a los rayos incidente y emergente, se tiene (por ser un ángulo llano el formado en A por AB y su prolongación)

$$(90^\circ - \alpha) + \varphi + (90^\circ - x) - (90^\circ - \varepsilon) = 180^\circ$$

de donde

$$\varphi = 90^\circ + x + \alpha - \varepsilon, \tag{7}$$

y sustituyendo aquí el valor de $\alpha - \varepsilon$ dado por la fórmula (6),

$$\varphi = 90^\circ + x - 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha} \tag{8}$$

Supongamos ahora que el rayo incidente entre en el prisma por el otro cateto, como se ve en la figura 45: siguiendo los mismos razonamientos, se tienen las dos fórmulas siguientes, que corresponden a las (2) y (3) anteriores:

$$x - 2\tau = \delta - \beta' \tag{2'}$$
$$\delta = \beta + 2(x-\tau). \tag{3'}$$

(*) El desarrollo de esta diferencia sería: sen ε − sen $\alpha = 2$ sen $\frac{\varepsilon-\alpha}{2}$ cos $\frac{\varepsilon+\alpha}{2}$, pero por ser tan pequeña la diferencia $\varepsilon - \alpha$, se puede tomar el arco por el seno, quedando sen ε − sen $\alpha = (\varepsilon-\alpha)\cos\frac{\varepsilon+\alpha}{2}$; pero al mismo tiempo, si $\varepsilon - \alpha$ es muy pequeña, puede considerarse $\varepsilon = \alpha$, luego $\cos\frac{\varepsilon+\alpha}{2} = \cos\frac{2\alpha}{2} = \cos\alpha$, y sustituído este valor en la anterior igualdad, se tiene la fórmula objeto de esta aclaración. — N del T.

(**) Por ser $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, resulta $\cos^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$ o sea, $\cos^2\beta = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{n^2}$. — N. del T.

(***) El segundo miembro puede escribirse así: $\sqrt{\frac{n^2-\operatorname{sen}^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2\alpha}$, y sumando y restando la unidad en la cantidad subradical, queda: $\frac{1}{n}\sqrt{n^2+1-\operatorname{sen}^2\alpha-1} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2+\cos^2\alpha-1}$, y al dividir por cos α (es decir, por $\cos^2\alpha$ bajo el radical), resulta $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2\alpha}+1} = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2-1)\sec^2\alpha+1}$, por ser $\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$. — N. del T.

También en las demás fórmulas se sustituyen $x + \tau$ por $x - \tau$, resultando para la final:

$$\varphi' = 90^\circ + x - 2(x-\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha'}. \tag{9}$$

De las fórmulas (8) y (9) se deduce que el ángulo φ que mide la desviación del rayo, depende de los errores constantes x y τ del prisma, y del ángulo variable α, que es el de incidencia, o sea el que forma el rayo incidente con la normal a la cara del prisma en el punto de incidencia.

Pero en la realidad sucede que los prismas son verdaderamente de sección rectangular, pero no isósceles; es decir, que en las fórmulas anteriores podemos hacer $x = 0$, quedando para las (8) y (9):

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= 90^\circ - 2\tau\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}\\ \varphi' &= 90^\circ + 2\tau\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha'}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Si fueran iguales los ángulos α y α', se ve que la suma de los dos ángulos φ y φ' valdría 180°, lo cual significa que la imagen del objeto visto a través del prisma coincidiría con la visada directamente. Pero girando el prisma, sostenido por el mango del aparato en que esté montado, siempre se llegará a este caso ($\alpha = \alpha'$); luego la coincidencia de la imagen invertida con el objeto, no depende únicamente de la perfección con que esté obtenida la perpendicularidad de las caras iguales del prisma. Por esta razón, el mejor modo de comprobar si el prisma es perfecto, es ver si, mediante observaciones y visuales esmeradamente hechas al girar el prisma, se nota que hay un rayo fijo independiente del ángulo α.

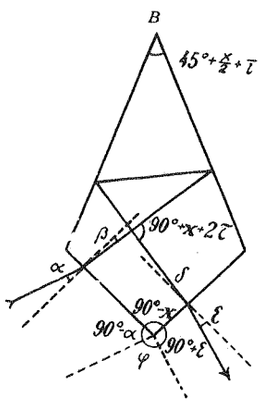


Fig. 46

2. *Prisma de sección pentagonal.* En la figura 46, suponemos que el ángulo recto del prisma no es tal, sino igual a $90^\circ - x$, y que el ángulo que forman entre sí las dos caras reflectoras (prolongadas en la figura hasta su intersección B), no es de 45°, sino igual a $45^\circ + \frac{x}{2} + \tau$. En el punto en que se cortan el rayo refractado una sola vez y el reflejado, el ángulo formado por los dos es doble del ángulo B, o sea igual a $90^\circ + x + 2\tau$, y en el cuadrilátero inferior de la figura, por valer la suma de sus ángulos cuatro rectos, se tendrá:

$$(90^\circ - x) + (90^\circ - x - 2\tau) + (90^\circ - \beta) + (90^\circ + \delta) = 360^\circ$$

de donde

$$\delta = \beta + 2(x+\tau). \tag{11}$$

Como se ve, esta igualdad es la misma (3) del prisma triangular, y como que la (1) subsiste también ahora, mediante transformaciones análogas se llega a la fórmula siguiente, correspondiente a la (6) anterior:

$$\varepsilon - \alpha = 2\ x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}. \tag{12}$$

Trazando por el vértice del ángulo recto paralelas a los rayos incidente y emergente, se tiene, por ser la suma de todos los ángulos formados alrededor de dicho vértice igual a cuatro rectos,

$$\varphi + (90^\circ - x) + (90^\circ - \alpha) + (90^\circ + \varepsilon) = 360^\circ,$$

de donde

$$\varphi = 90^\circ + x + \alpha - \varepsilon,$$

y sustituyendo aquí $\alpha - \varepsilon$ por su valor $-(\varepsilon - \alpha)$, dado en (12), resulta:

$$\varphi = 90^\circ + x - 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}. \qquad (13)$$

Como se ve, las mismas fórmulas del prisma de Bauernfeind sirven para el pentagonal. Consideremos ahora (fig. 47) un rayo que incida inclinado al lado contrario que el de la figura 46, es decir, que si aquél era de derecha a izquierda, éste incida sobre el prisma de izquierda a derecha. La fórmula (11) se convertirá, en este caso, en esta otra:

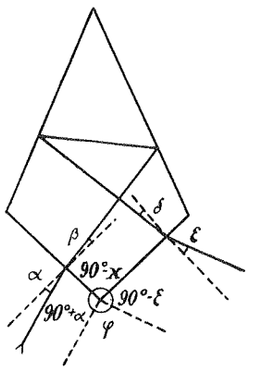


Fig. 47

$$\delta = \beta - 2(x+\tau) \qquad (11')$$

y la (12) en la siguiente:

$$\varepsilon - \alpha = -2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha} \qquad (12')$$

y del mismo modo llegaremos al valor de φ:

$$\varphi = 90^\circ + x - 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}$$

que es igual al valor dado en la fórmula (13). Es decir, que esta fórmula (13) nos indica, para el prisma pentagonal, la influencia que ejercen los errores de construcción del prisma en cada caso.

La comprobación ordinaria de las escuadras (fig. 11) se aplica perfectamente al prisma pentagonal, mientras que no es suficiente para la del triangular de Bauernfeind, como hemos visto anteriormente.

3. *Prisma de Wollaston.* Siendo, como en los casos anteriores, x y τ los errores de construcción del prisma, los ángulos A y C (fig. 48) serán respectivamente $90^\circ - x$ y $135^\circ - \frac{x}{2} - \tau$, y la suma de los seis ángulos del hexágono $AEFCGH$, será:

$$(90^\circ - x) + (90^\circ - \beta) + (90^\circ + \gamma) + \left(135^\circ - \frac{x}{2} - \tau\right) + (90^\circ + \gamma') + (90^\circ + \delta) = 720^\circ$$

y la suma de los ángulos del triángulo FCG, por ser igual a dos rectos, dará:

$$(90^\circ - \gamma) + \left(135^\circ - \frac{x}{2} - \tau\right) + (90^\circ - \gamma') = 180^\circ.$$

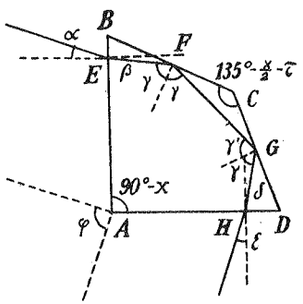


Fig. 48

Haciendo simplificaciones en estas dos fórmulas, se convierten respectivamente en estas dos:

$$-x - \beta + \gamma - \frac{x}{2} - \tau + \gamma' + \delta = 135^\circ$$

$$-\gamma' - \frac{x}{2} - \tau - \gamma' = -135^\circ$$

y despejando δ entre estas dos ecuaciones se tiene:

$$\delta = \beta + 2(x+\tau).$$

Este valor es el mismo hallado en (3) para el prisma de Bauernfeind, y siguiendo marcha análoga a la empleada en los casos anteriores se llega a la misma ecuación (6) hallada para el prisma pentagonal, a saber:

$$\varepsilon - \alpha = 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}.$$

Trazando por A dos paralelas a los rayos incidente y emergente, se tiene para valor del ángulo φ (*):

$$\varphi = 90^\circ + x + (\alpha - \varepsilon)$$

y sustituyendo aquí $(\alpha - \varepsilon)$ por su valor, cambiando el signo a la fórmula anterior que da $\varepsilon - \alpha$, resulta:

$$\varphi = 90^\circ + x - 2(x+\tau)\sqrt{1+(n^2-1)\sec^2\alpha}$$

conforme exactamente con las fórmulas (8) y (12) halladas anteriormente.

El resultado de todo lo expuesto es que la influencia del error de construcción en la desviación total del rayo, es la misma para todos los prismas.

Como ejemplo numérico, tomemos en números redondos $n = 1{,}5$, y por consiguiente $n^2 - 1 = 1{,}25$, y sea $x + \tau = 1'$ el error total de construcción. Para diferentes valores del ángulo de incidencia α resultan las siguientes correcciones:

$\alpha = 0^\circ$	$2(x+\tau)\sqrt{1+1{,}25\sec^2\alpha} = 3{,}0'$
10	3,0
20	3,1
40	3,5
60	4,9
80	13,0

Aun cuando en el prisma de Bauernfeind el ángulo de incidencia α es bastante grande, cercano a los 45°, se ve que la corrección es casi la misma que para los otros dos prismas, en los cuales el ángulo de incidencia es casi nulo: es decir, que la influencia del error de construcción es igual para los tres prismas.

Sobre la precisión de las escuadras para trazar ángulos rectos, se tienen los siguientes valores para el error medio del ángulo trazado u observado, dados por Lorber y confirmados después por varios autores:

En la escuadra cónica	$\pm 1{,}6'$
» » » cilíndrica	$\pm 2{,}6$
» » » de espejos	$\pm 1{,}3$
» » » de prismas	$\pm 1{,}1$

§ 18. Medición de distancias con reglas

Las reglas más empleadas para mediciones directas de distancias en el campo, son de cinco metros de longitud y de uno de los tipos representados en la figura 49. Consisten en piezas de abeto bien curado,

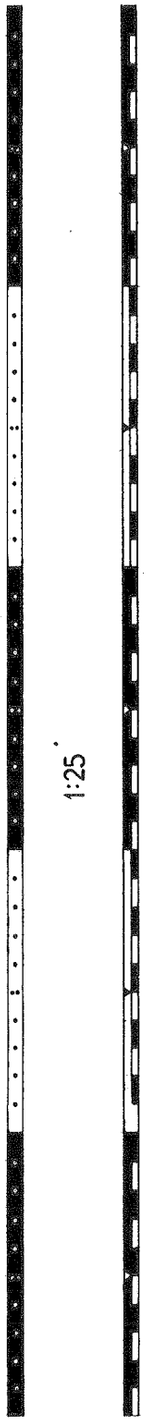


Fig. 49.— Reglas de 5 m de longitud (escala 1:25)

(*) Los cuatro ángulos formados alrededor del punto A suman cuatro rectos, y basta observar la figura para saber el valor de cada uno de estos ángulos, por lo cual puede escribirse directamente

$\varphi + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - x + 90^\circ + \varepsilon = 360^\circ$, o sea, $\varphi - \alpha - x + \varepsilon = 90^\circ$, de donde, $\varphi = 90^\circ + x + \alpha - \varepsilon$.

sin nudos, de la longitud indicada, con los extremos protegidos por conteras metálicas, terminadas en caras planas o de forma piramidal truncada.

La sección trasversal más conveniente es la de forma rectangular, con los ángulos matados, es decir, casi elíptica, para que la regla no presente aristas vivas. La regla se coloca sobre el suelo por su cara más ancha, sin arrastrarla ni darle vueltas, *ni forzarla nunca en ningún sentido*. La sección trasversal tiene 3×5 cm en el medio de la regla y 3×4 cm en los extremos de la misma, guarnecidos de metal.

Para proteger las reglas contra la humedad y evitar que se puedan deshilachar sus fibras, se impregnan y cubren bien con pintura de aceite, variando el color de metro en metro: blanco y rojo, o blanco y negro. Para marcar los decímetros (y si se quiere, también los medios decímetros), se pintan trazos de colores o se clavan tachuelas de cabeza redonda. Los centímetros se aprecian directamente a ojo.

En vez de las reglas de 5 m pueden emplearse también de 4, 3 ó 2 m, ya sea para facilitar su transporte, o por requerirlo así las circunstancias de las mediciones.

Para mediciones exactas, por ejemplo, en planos de población, se hace uso de reglas de precisión, las cuales, en vez de terminar en casquetes metálicos planos o romos, lo hacen en cuñas de la forma representada en la figura 50. De este modo se logra mayor precisión al poner en contacto una regla con la siguiente, pues con los extremos ordinarios es difícil lograr una buena coincidencia. En la figura 50 se ve que también puede cometerse este error en las reglas de precisión si no coinciden exactamente los puntos medios de las aristas de las dos cuñas puestas a continuación una de otra.

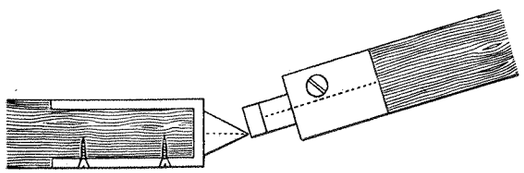


Fig. 50.– Reglas con conteras de cuña

En terreno llano puede medir una alineación un solo operador, con dos reglas. Para ello va colocándolas directamente sobre el suelo de modo que el extremo posterior de una coincida con el delantero de la otra, sujetando con la mano la anterior para evitar que al acercarle la otra pueda sufrir algún movimiento. Una vez colocadas las dos, se levanta con cuidado la primera y se pone a continuación de la otra, siguiendo siempre la alineación, que deberá estar bien jalonada. Es de la mayor importancia que el operador se acostumbre a proceder con todo esmero en esta clase de mediciones.

Aunque, como ya se ha dicho, un solo operador puede hacer estas mediciones con dos reglas, es mejor y más rápido disponer de dos operadores, uno de los cuales será el encargado de las posiciones *pares* de una de las reglas (segunda, cuarta, etc.) y el otro de las *impares* de la suya (primera, tercera, etc.).

Cada vez que se levante una regla del suelo se *cantará*, es decir, se pronunciará en alta voz el número de orden que corresponde a su posición; una regla que esté tendida en el suelo no se contará como puesta, para los efectos de la medición, hasta el momento de levantarla. Además, para evitar posibles confusiones, conviene tener pintada la primera regla de blanco y la segunda de rojo, o la primera de blanco y negro, y la segunda de blanco y rojo; de este modo se sabe que en toda la alineación los números impares corresponden al blanco y los impares al rojo, o los impares al blanco y negro, y los pares al blanco y rojo. Cuando la alineación es corta y tiene puntos permanentes intermedios se puede ir cantando el total de metros, es decir, 5, 10, 15, 20,... etc.; pero si la alineación es larga y sin puntos permanentes intermedios, se va cantando el número

de posiciones de las reglas, o sea, 1, 2, 3, 4 . . . . , y el último se multiplica por cinco.

En terrenos inclinados, el mejor sistema para medir distancias con regla es el de escalonamiento, es decir, el consistente en colocar la primera regla horizontal con su origen en el suelo, y mediante una plomada puesta en su extremo determinar en el suelo el punto en que debe ponerse el origen de la segunda regla, que a su vez se coloca horizontal, y así sucesivamente. Se necesitan para esta medición dos operadores. La plomada que se emplea es una varilla prismática o de sección oval, con una cara plana bien cortada, que es la que se apoya contra el extremo de la regla para determinar su proyección sobre el suelo. Esta plomada se emplea para pequeños desniveles o medidas de poca precisión, ya que realmente la nivelación se hace a ojo; cuando el terreno es más accidentado, se hace uso de la plomada ordinaria de hilo o también de la plomada de varilla con nivel esférico.

En la figura 6 se vió un nivel esférico atornillado a una plomada de varilla, empleada como rectificador para jalones y que sirve perfectamente para la medición con reglas en terrenos pendientes.

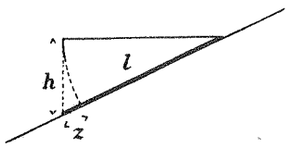


Fig. 51.– Regla inclinada, e intervalo z

Para hacer estas mediciones escalonadas empleando la plomada corriente, conviene que las conteras de las reglas lleven una muesca de profundidad igual a la mitad del grosor del hilo de la plomada, para eliminar el error que podría producirse al aplicar el hilo sobre una contera lisa.

La horizontalidad de las reglas en los escalones sucesivos se establece a ojo, o bien girando la regla arriba y abajo alrededor de su extremo fijo en el suelo, teniendo apoyado sobre el otro extremo el rectificador o plomada de varilla; la posición horizontal de la regla corresponde a la máxima distancia entre el rectificador y el punto fijo. Mejor aún puede operarse poniendo la varilla o el hilo de la plomada en el medio de la regla y junto a ella, y comprobando la igualdad de los cuatro ángulos rectos que deben así formarse.

La colocación de un nivel sobre la regla sólo es necesaria cuando además de la distancia horizontal entre dos puntos se quiere hallar su diferencia de altura o desnivel, es decir, cuando se quiere trazar un perfil.

Cuando el terreno tiene poca inclinación y ésta es aproximadamente uniforme o constante, no es preciso colocar horizontal la regla más que la primera vez, determinando (figura 51) con la plomada la distancia z entre el pie de ésta, colocada en el extremo de la regla, horizontal, y el extremo de la misma regla tendida en el suelo, sin variar el punto origen de la misma; a esta distancia z habrá que colocar siempre el origen de una regla, del extremo de la anterior, tendidas ambas en el suelo. Esta distancia constante z se puede determinar analíticamente con los datos de la primera posición horizontal de la regla. Sea h la altura del escalón, es decir, del extremo de la regla sobre el suelo, dada por la longitud de la plomada, y l la longitud de la regla; la distancia z vendrá dada por la fórmula siguiente:

$$z = \sqrt{l^2 + h^2} - l, \tag{1}$$

y como h es muy pequeña en relación con l, se puede escribir (*):

$$z = l\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}} - l = l\left(1 + \frac{h^2}{2\,l^2}\right) - l = \frac{h^2}{2\,l}. \tag{2}$$

(*) Multiplicando el radical por l y dividiendo la cantidad subradical por l^2 para que su valor no se altere, queda $z = l\sqrt{1+\frac{h^2}{l^2}} - l$; pero la cantidad subradical puede considerarse igual al cuadrado

Si se expresa h en decímetros y z en milímetros, se tiene, para reglas de 5 m de longitud

$$z\ \text{mm} = (h\ \text{dm})^2.$$

Por ejemplo, si $h = 3$ dm, la distancia z será igual a 9 mm.

También puede emplearse la plomada de varilla (rectificador) graduada y numerada de manera que sobre ella se leen los valores de z. Para calcular los valores de h, supondremos que z aumenta de modo uniforme, y sustituiremos sus valores en la siguiente fórmula, deducida del mismo triángulo rectángulo considerado en la figura 51; $h = \sqrt{(z + l)^2 - l^2}$, y desarrollando el cuadrado indicado y simplificando resulta:

$$h = \sqrt{z\,(z + 2\,l)}.$$

Dando valores numéricos a z, tenemos para reglas de longitud $l = 5$ m los siguientes para h:

z =	0,00 m	0,05 m	0,10 m	0,15 m	0,20 m	0,25 m	0,30 m
h =	0,000 m	0,709 m	1,005 m	1,234 m	1,428 m	1,601 m	1,758 m

Con este procedimiento hay que poner cada vez la regla horizontalmente, como en el caso general, y el rectificador o plomada de varilla en posición bien vertical.

Clisímetro de perpendículo para medir la inclinación de las reglas. Además de la medición escalonada, cuando se trata de terrenos inclinados, puede seguirse otro procedimiento, que consiste en medir la distancia de que se trate con las reglas sobre el suelo, pero midiendo la inclinación de éstas para después hacer la reducción al horizonte.

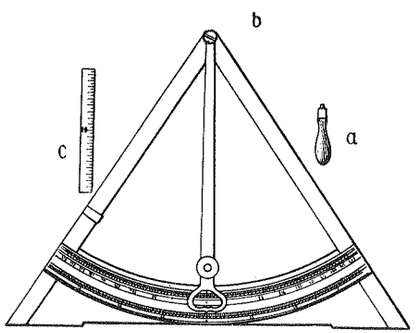


Fig. 52.– Clisímetro de perpendículo

En la figura 52 se ve un clisímetro de uso bien sencillo; tiene 44 cm de radio y lleva un mango a que se atornilla en b; c es un doble decímetro. Se coloca el clisímetro en el medio de la regla, descansando sobre ella, y se suelta el péndulo (que tiene un tornillo para inmovilizarlo o soltarlo) hasta que se quede parado: se fija entonces y se lee el ángulo α que forma con el radio cero. Este ángulo es igual a la inclinación de la regla, con 10′ de aproximación. También se puede leer en el clisímetro la diferencia $l - l\cos\alpha$ entre la longitud medida y su reducida al horizonte, que se va anotando en el cuaderno de campo para todas las posiciones sucesivas de la regla. De no tomar directamente esta diferencia, hay que anotar siempre el valor del ángulo α, y con una tabla calcular la distancia reducida al horizonte (véase la tabla II en el Apéndice).

Hay muchas clases de clisímetros de este género (los de Krayl, Wimmer, etc.) en los que en vez del péndulo sencillo se emplea en el indicador un pequeño nivel tubular de burbuja.

A continuación damos algunos de los resultados obtenidos por Schlebach en 1896, en los muchos ensayos llevados a cabo para demostrar que con el empleo del clisímetro de

de $1 + \frac{h^2}{2\,l^2}$, pues al elevar este binomio al cuadrado resulta $1 + \frac{h^4}{4\,l^4} + \frac{h^2}{l^2}$, y el segundo término puede despreciarse, por ser el valor de h muy pequeño con relación al de l, quedando así $z = l\left(1 + \frac{h^2}{2\,l^2}\right) - l$, y efectuando la multiplicación indicada y reduciendo resulta $z = \frac{h^2}{2\,l}$. — N. del T.

perpendículo se puede conseguir mucha mayor precisión que con el uso de la plomada o del rectificador. Los errores medios del clisímetro y de la plomada estaban en la relación de 7 a 12; el campo de pruebas era bastante accidentado; en un minuto se medía, con el clisímetro, un trecho de 17,4 m, y con la plomada uno de 16,9 m. El número de ayudantes era el mismo en las dos mediciones.

Se hicieron muchas mediciones en dos tramos de 130 m y 270 m respectivamente, resultando:

	con clisímetro	con plomada
en el tramo de 130 m, el error medio de cada medición fué	± 5,7 cm	± 10,4 cm
» » de 270 m, » » » » »	± 11,4 cm	± 18,1 cm

En vez de hacer la reducción al horizonte después de medida toda la longitud, se puede ir reduciendo a cada posición de la regla, y deducir el espacio que debe quedar entre los extremos de las dos reglas, supuestas éstas horizontales, es decir, la distancia z considerada anteriormente, que será igual a $\frac{l}{\cos\alpha} - l$ (*). Para simplificar las operaciones de medida, se prepara una cuña en forma de triángulo rectángulo, con el ángulo más agudo de 22,5°, por ejemplo; en el cateto mayor hay marcada y numerada una graduación, de tal modo que la anchura del triángulo, medida perpendicularmente a este cateto en el punto correspondiente a la inclinación observada (que se lee sobre su graduación) resulta igual a la reducción $5 - 5\cos\alpha$ aplicable a una regla de 5 metros. Para tomar en el suelo la distancia z, se coloca la cuña indicada entre los extremos de las reglas, hasta la división correspondiente a la inclinación.

El empleo de clisímetros con reducción ulterior de las longitudes medidas se reserva para mediciones de itinerarios, como, por ejemplo, para medir los lados de una poligonal, mientras que para medir pequeños trechos, sobre todo cuando hay muchos puntos intermedios, resulta ventajoso ir haciendo directamente la reducción, tomando la distancia z en cada posición de las reglas.

Falsa escuadra. En la figura 53 se ve un dispositivo, de Kassel, con el cual se puede determinar el espacio o distancia z mecánicamente, sin hacer lectura alguna. Esta falsa escuadra consiste en dos listones de 25 cm de longitud y unos 5 cm de lado, unidos con una charnela por uno de sus extremos. Por dentro del brazo inferior B, puede moverse una corredera S, que va unida a una placa de latón M de forma especial. Esta placa atraviesa el brazo superior A por una hendidura, resbalando sobre un rodillo R por su borde superior. El brazo A lleva en L un pequeño nivel tubular de burbuja.

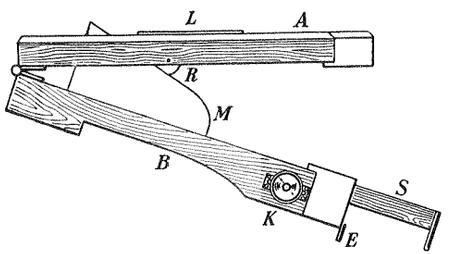


Fig. 53.– Falsa escuadra

El funcionamiento de esta escuadra es como sigue: siguiendo la medición hacia abajo, se pone la escuadra sobre la regla, de modo que el saliente metálico E quede adaptado al extremo de aquélla; se da vueltas entonces al tornillo K, con lo cual saldrá la corredera S y al mismo tiempo se irá levantando el brazo A hasta que el nivel L quede

(*) En el triángulo rectángulo de la figura 51, si α es el ángulo opuesto a h se tiene que el cateto l será $l = (l + z)\cos\alpha$, de donde $z = \frac{l}{\cos\alpha} - l$.

horizontal. La placa M tiene una forma tal, que estando horizontal el nivel, la parte saliente de la corredera S es igual al espacio o distancia s que hay que dejar entre las dos reglas, por lo cual bastará poner el origen de la regla siguiente en contacto con el extremo de dicha corredera.

BIBLIOGRAFÍA Véase un artículo muy documentado de STEIFF (Zeitsch. f. Verm., 1893, páginas 242-249).

Clisímetros: Zeitschr f Verm., 1872, págs. 66, 158, 214, 240, 243; 1873, págs. 113, 114; 1877, pág. 676; 1885, págs 88, 277, 305; 1887, págs. 6-13; 1889, pág. 647, y 1890, pág. 87.

Reglas topográficas: Zeitschr. f. Verm., 1872, págs. 17-36, 120-129, 154-162, 221-225; 1873, págs. 185-211, 344-362; 1874. págs. 288-291; 1877, págs. 264, 415-417. F. G. GAUSS, Die trig. und polyg. Rechnungen in der Feldmesskunst, 1876, pág. 170. BRÖNNIMANN, Katastervermessung, pág. 101. PROSS, Lehrbuch der praktischen Geometrie. Stuttgart, 1838, § 35, Tafel der Abzüge *(sin. vers.)* für die Streckeneinheit 10 von 0° bis 48° in Stufen von 10′ bis 10′.

§ 19. Medición de longitudes con cinta y cadena

La cinta de acero (fig. 54) es de aplicación frecuente y muy práctica en muchos casos: es de acero templado, de 10 a 20 m de longitud, 15 a 20 mm de anchura y unos 0,3 a 0,4 mm de espesor, y está dividida en metros y decímetros (a veces en medios decímetros y en centímetros). Los metros, medios metros y cuartos de metro están marcados con chapitas redondas o de otra forma cualquiera para que salten bien a la vista. En los extremos de la cinta van articuladas dos anillas metálicas R de 3 a 4 cm de diámetro, por las que pasan las puntas de unos piquetes o bastones (fig. 55) provistos de resaltes para que no se salgan las anillas. Con estos piquetes se hacen las mediciones con cinta con dos operadores. Para transportar y guardar la cinta se enrolla ésta sobre un aro A, provisto de caballetes o estribos B.

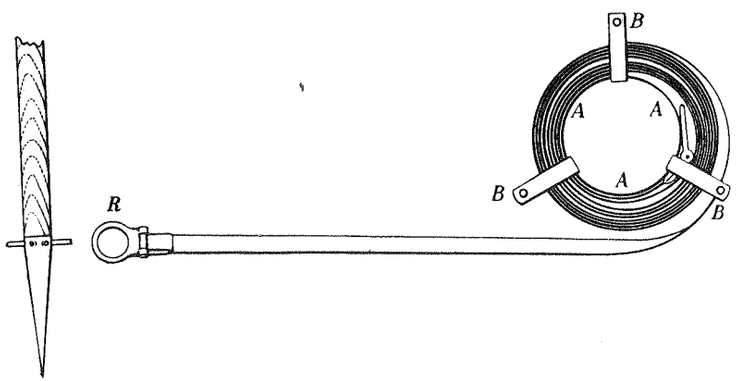


Fig. 54.— Cinta de acero con anillas terminales



Fig. 55.—Bastones para la medición con cinta

Para medir con cinta, dos operadores extienden ésta sobre el suelo, en la dirección de la longitud que se trata de conocer, con el origen en el arranque de ésta, y una vez marcado el extremo con una estaquilla o con una aguja de hierro, se avanza con la cinta hasta poner su origen en esta señal, y así sucesivamente. El operador que va detrás, va recogiendo las agujas o las estaquillas, y el número de éstas recogidas será igual al de veces que se ha puesto la cinta, es decir, que la longitud medida será igual a tantas veces la

propia de la cinta como agujas haya recogido el segundo operador. Las agujas se van poniendo en una anilla como la representada en la figura 56.

La *cadena de agrimensor* (figs. 57 y 58) se compone de varillas de hierro o latón de 0,5 m de longitud cada una por 3 mm de grosor, unidas entre sí por anillas. Los extremos llevan anillas más grandes para pasar por ellas los piquetes o bastones. El manejo de la cadena es análogo al de la cinta. La cadena tiene el inconveniente de enredarse con frecuencia, además de que las varillas y los anillos y ojales en que terminan aquéllas, experimentan dilataciones que falsean los resultados, por lo que hoy se usa muy poco. En algunos casos resulta muy cómodo el empleo de una cadena con las varillas muy cortas (de 1 dm).

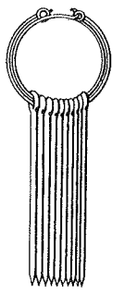


Fig. 56
Jalones contadores



Fig. 57.— Cadena de agrimensor, extendida



Fig. 58.— Cadena de agrimensor, plegada

Reducción al horizonte de las mediciones con cinta o cadena. Como que en el campo, tratándose de terrenos inclinados, resulta más difícil poner horizontales las cintas ordinarias de 20 m que las reglas, que son mucho más cortas, lo que se hace es medir con la cinta inclinada y después de determinado el ángulo α para cada posición, calcular la longitud reducida $l \cos \alpha$ o la reducción $l - l \cos \alpha$.

La inclinación de la cinta puede conocerse también, midiendo el ángulo que con la horizontal forma la línea que une los extremos superiores de los dos bastones (de igual longitud y verticales ambos) clavados en los extremos de la cinta. Para mejor precisar el punto de mira, se pone en el extremo de los bastones una tablilla pintada de rojo y blanco. En caso necesario se puede determinar la inclinación con un simple transportador, fijado sobre una tablilla forrada de papel y con una plomada pendiente de su centro, obteniéndose el ángulo de inclinación con 1° de aproximación.

Clisímetro de Zugmaier y Sickler. Este instrumento consiste en una caja cilíndrica de latón AA (figura 59), dentro de la cual puede girar alrededor de su centro C un arco de círculo graduado BB, mediante un peso D; el centro de gravedad de toda la parte móvil alrededor de C tiene una posición tal que el diámetro correspondiente al cero de la graduación está siempre horizontal. En la pared lateral de la caja hay practicada una rendija

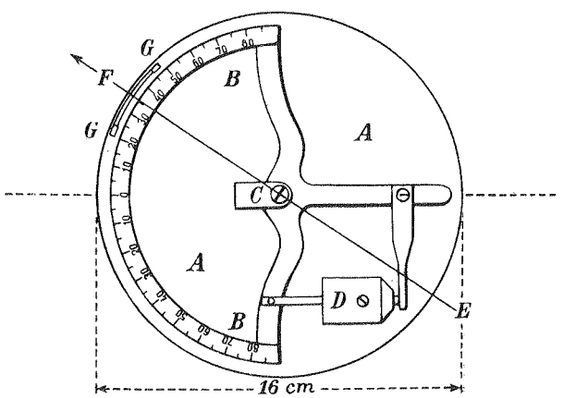


Fig. 59.— Clisímetro de Zugmaier y Sickler, para cintas inclinadas

diametralmente opuesta a una placa de cristal GG con una línea de mira F en el medio: la corona o limbo graduado BB no es plana sino de forma cónica, es decir, que todas las divisiones forman un ángulo de 45° con el plano del dibujo, de tal modo que desde E se ve perfectamente cuál es la división que coincide con la señal F, quedando así determinado el ángulo de inclinación de la visual EF.

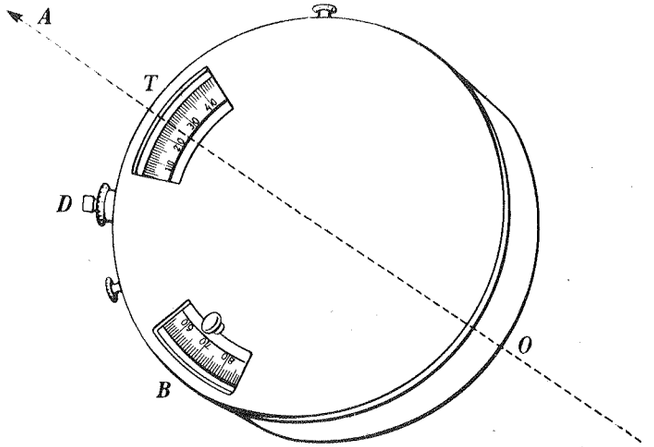


Fig. 60
Clisímetro de Zugmaier y Sickler. Vista exterior (diámetro del círculo, 16 cm)

En la figura 60 se ve este instrumento con su tapa, en la cual hay practicada otra abertura B, cuya aplicación veremos ahora.

Las divisiones del limbo quedan iluminadas por la luz que llega al mismo a través de una lámina de cristal T, permitiendo así verlas claramente al mirar por O. Si el cuadrante giratorio oscila, hay que esperar a que quede inmóvil para hacer la lectura; para detener estas oscilaciones se dispone de un botón situado en lo alto del instrumento, como se ve en la figura 60, pero si se quiere sólo amortiguar las oscilaciones sin que el aparato deje de estar libre, se procede del modo siguiente: mientras se sujeta el clisímetro con la mano derecha a la altura de los ojos, se pasa un dedo de la izquierda por la abertura B y se apoya suavemente sobre el limbo, haciendo así que las observaciones sean más rápidas y más precisas.

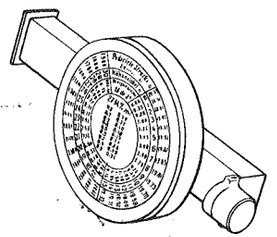


Fig. 61.—Clisímetro de Wolz (diámetro del círculo, 7 cm)

Otros muchos clisímetros análogos están también provistos de tales aberturas B, para facilitar el cómodo manejo y la precisión de las observaciones.

Clisímetro de Wolz. En la figura 61 se ve este instrumento en perspectiva, y en la 62 una sección del mismo. Consiste en una caja cilíndrica de 7 cm de diámetro, en cuyo interior gira un tambor graduado en su llanta: para ver estas divisiones tiene la caja practicada en su pared cilíndrica una abertura, tapada con una lámina de vidrio. Formando cuerpo con la caja va una alidada tubular, que lleva en el extremo ocular una rendija y en el extremo objetivo un hilo, para poder visar con precisión; junto al extremo ocular hay una pequeña lente para ver mejor las divisiones del tambor interior. Para hacer uso de este clisímetro se mira alternativamente por la alidada y por la lente, y se observa la división que se ve al lado del hilo horizontal de la alidada. La caja lleva en su caja anterior una tabla de reducidas.

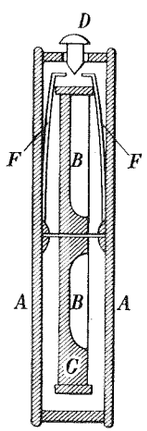


Fig. 62

En la figura 62 se ve el tambor BB dentro de la caja AA: el sobrepeso C hace que el tambor se mantenga siempre en la misma posición vertical, cualquiera que sea la inclinación de la caja. Dentro de la caja van dos

láminas F que hacen de muelles y que están apoyadas contra el tambor, de modo que éste no puede girar; para usar el clisímetro se aprieta el botón D, con lo cual se separan las láminas F y queda el tambor libre. En la parte exterior de la caja va un pequeño muelle que mantiene el botón D hacia fuera cuando no se está empleando el instrumento. El tambor está dividido en grados enteros, tomándose a ojo las décimas. La mitad opuesta del tambor va dividida en inclinaciones en tanto por ciento o pendientes: si se quiere hacer las lecturas en pendientes, una vez dirigida la visual se suelta el botón D, y se vuelve el clisímetro para hacer la lectura. Más adelante, al tratar de la nivelación, veremos la aplicación y el significado de estas escalas de pendientes en tanto por ciento.

Este modo de medir inclinaciones se encuentra detallado en los escritos de Doll (Zeitschr. f. Verm., 1889), Koll (1890) y Brandis (1892); según estos autores, la invención de estos clisímetros se debe a la casa Paetz & Flohr, de Berlín (1855), o al Director de Montes Burckhardt, de Hannóver (1866).

El clisímetro de Wolz, a pesar de su escaso tamaño, resulta más fijo que el de Zugmaier-Sickler, y desde luego mucho más manejable.

Clisímetro de espejo. En el ingenioso dispositivo del conocido nivel de Abney, están fundados los actuales clisímetros de espejo o de reflexión, de los cuales merecen especial mención los construídos por Randhagen y Tesdorpf (ahora Sartorius).

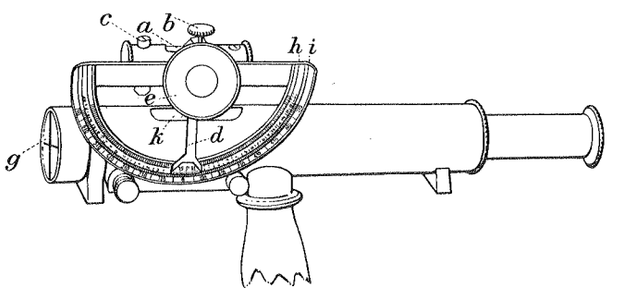


Fig. 63. – Clisímetro de espejo

En la figura 63 se ve en perspectiva este último clisímetro, de 16 cm de longitud, y la figura 64 representa una sección esquemática del mismo para darse cuenta de su funcionamiento. OA es la visual dirigida por un tubo que tiene en E un espejo semicircular inclinado, que ocupa la mitad del tubo, quedando libre la otra mitad, como se ve a la derecha de la figura. El espejo E refleja la imagen de la burbuja B de un nivel NN colocado por encima del tubo y que debe estar calado al hacer una observación.

Al mirar por O se ve en el espejo, a la izquierda, la imagen de la burbuja B, y a la derecha el objeto A.

El modo de operar consiste en lo siguiente: se tiene el instrumento por la empuñadura f en la mano derecha y se visa de modo que se vea el punto de mira en coincidencia con la cruz filar g; con la mano izquierda se hace girar el botón e hasta que la imagen de la burbuja se vea a la izquierda del punto visado. Como es natural, nunca se verá la burbuja completamente tranquila; pero si el nivel está hecho para que tenga la sensibilidad conveniente, se llega bien pronto a saber cuál es la posición en que hay que dejar de mover el tornillo e.

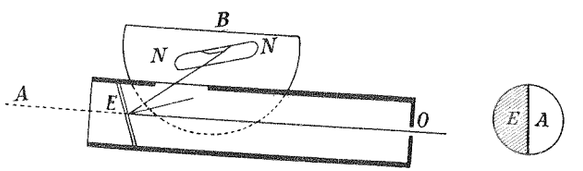


Fig. 64
Esquema del clisímetro de la figura 63. A la derecha, su campo visual

Conseguida la horizontalidad del nivel, se puede apretar el tornillo de presión b y ya

puede ponerse el instrumento en una posición más cómoda para leer las divisiones con el índice o nonio d. Lo mejor es no utilizar este tornillo, pues el botón e produce rozamiento suficiente para que no varíe la posición del índice d en el corto tiempo que media entre la visual y la lectura. También puede prescindirse del nonio en el indicador d, y leer directamente los grados enteros con el índice y apreciar las décimas a ojo.

Todos estos clisímetros no llegan en precisión al medio grado, lo cual es suficiente si sólo se trata de hallar la reducida $l \cos \alpha$.

Más adelante veremos también la aplicación de estos pequeños aparatos a la determinación de alturas por la fórmula $l \operatorname{sen} \alpha$, siendo necesaria mayor aproximación en el valor del ángulo α, por lo cual, con las instrumentos actuales y un manejo bien cuidadoso de los mismos, debe llegarse a una precisión igual a $\pm 0{,}2°$ ó hasta $\pm 0{,}1°$.

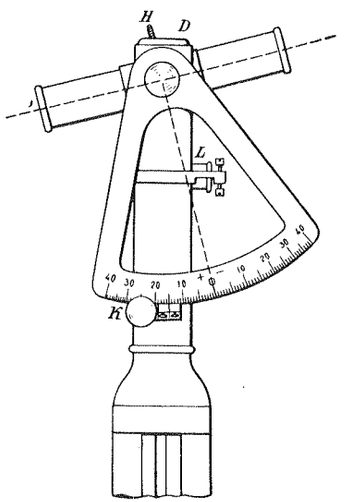


Fig. 65

Reductómetro. En las Instrucciones Topográficas de Prusia de 25 de octubre de 1881 se encuentra descrito este instrumento (fig. 65), que va fijado sobre un bastón de los empleados para medir con cinta, y cuyo limbo en vez de estar dividido en grados, lo está de tal modo que da directamente el valor de la reducción $20 - 20 \cos \alpha$ que hay que aplicar a una cinta de 20 m para un ángulo de inclinación α.

Comprobación de los clisímetros. Para ver si los instrumentos anteriores dan el verdadero valor de los ángulos verticales, tanto de elevación como de depresión, basta clavar dos piquetes o bastones bien fijos en el suelo y medir el ángulo de inclinación del alto al bajo, y después el de elevación del bajo al alto, y ver si ambos son iguales. Si se descubre algún error puede corregirse, en el clisímetro de la figura 59, moviendo el contrapeso D en el sentido conveniente, y en el de la figura 63 tocando al tornillo de corrección c del nivel. Por ejemplo, si el ángulo de elevación resulta de $+3°$ y el de depresión de $-5°$, es evidente que el verdadero valor de ambos será respectivamente $+4°$ y $-4°$, y con arreglo a éste ha de hacerse la corrección.

Reducción al horizonte. Para hacer la reducción al horizonte de las longitudes medidas con cinta y clisímetro, hay que distinguir dos casos: que se trate de un itinerario o de trozos sueltos independientes. En el primer caso se van anotando los ángulos correspondientes a las distintas posiciones de la cinta y se calculan las reducciones con la tabla auxiliar, como se ve en el ejemplo siguiente:

Longitud medida L		Ángulo de inclinación α	Reducción $l - l \cos \alpha$
1 cinta entera	20 m	5°	0,08 m
1 » »	20	6	0,11
1 » »	20	8	0,19
1 » »	20	10	0,30
1 » »	20	13	0,51
1 » »	20	15	0,68
1 » »	20	17	0,87
Último trozo	17,30 m	20	1.04
Longitud inclinada	157,30 m		3,78 m

Longitud horizontal = 157,30 m − 3,78 m = 153 52 m.

Si, por el contrario, se trata de medir trozos sueltos, lo mejor es dejar entre cada dos posiciones sucesivas de la cinta un hueco o espacio igual a $\frac{l}{\cos \alpha} - l$, con lo cual no hay que tener en cuenta la reducción en la suma total.

Otro método para hallar la reducción es el de Wilski (1895), consistente en dirigir una visual horizontal, por medio de un clisímetro o de un nivel cualquiera de visual libre, desde el extremo superior de un bastón o piquete, al otro bastón, dividido de tal modo que pueda leerse la reducción directamente (fig. 66). Por ejemplo, si para una longitud de 20 m medida sobre el terreno hay una diferencia de altura de 0,63 m, la reducción será:

$$r = 20{,}000 - \sqrt{20^2 - 0{,}63^2} = 0{,}01 \text{ m},$$

como se ve en la figura 66, y como claramente se comprende después de lo dicho en la página 49, teniendo en cuenta que l (20 m) representa ahora la longitud total de la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura 51.

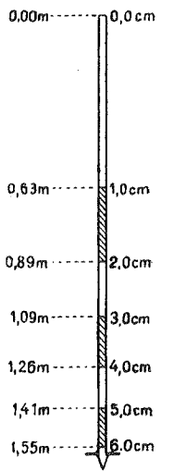


Fig. 66

Mediciones de precisión con cinta. Para hacer mediciones de mayor precisión con la cinta, como, por ejemplo, para medir los lados de una poligonal en el plano de una población, no da resultado la cinta ordinaria representada en la figura 54, cuyo principal inconveniente consiste en la poca precisión con que se determinan los puntos con los piquetes o bastones, sobre todo en terrenos sueltos, aunque en una memoria de Raschke (1894) se encuentran descritos unos bastones, con el zuncho en forma de pala, que tienen la ventaja de que al tender la cinta se clavan con más firmeza en el suelo. Otra causa de error se tiene en la inclinación de los bastones, que da lugar a un mal ajuste de los extremos de la cinta.

Para obviar estos inconvenientes, cuando se trata de mediciones de relativa precisión, se emplean cintas que tienen de longitud unos cuantos decímetros más de los 20 m, y con sus extremos perfectamente definidos por señales apropiadas, como se ve en E_0 (fig. 67):

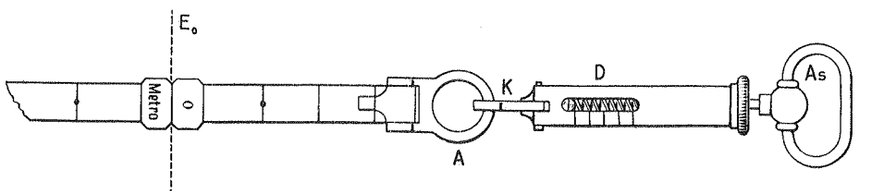


Fig. 67.— Cinta de acero con marcas terminales y dinamómetro

en estas cintas se clavan las agujas en el sitio correspondiente a las muescas E_0, y los bastones sólo sirven para tender la cinta. Mejor aún resulta no emplear bastones, y atirantar la cinta directamente con la mano, valiéndose de un dinamómetro D que se engancha por una parte al anillo A y por la otra termina en un asa As. De este modo, teniendo en cuenta las indicaciones del dinamómetro se da siempre a la cinta la misma tensión.

En suelos asfaltados, donde no pueden clavarse las agujas, se marca el extremo E_0 de la cinta con una señal hecha con una aguja de acero fuerte. Para esto conviene disponer en los extremos E_0 de la cinta una guía como la representada en la figura 68, que se sujeta a la cinta con dos tornillos pequeños SS de modo que el borde ll' pase exactamente

por el punto E_0; para marcar en el suelo basta pasar por este borde un punzón de acero o una aguja bien dura que raye el suelo.

También puede marcarse el extremo de la cinta con un dispositivo como el de Löschner, representado en la figura 69, y que consiste en una plancha de hierro de unos 3 Kg de peso, con un asa para su transporte y un tornillo t con el que se mueve a un lado o a otro un pequeño índice i. La cinta más conveniente es la de acero, de 13 mm de anchura y 0,2 mm de grosor, con divisiones grabadas y anillos en los dos terminales, de los cuales se tira con una fuerza de 3 a 5 Kg. Para señalar el extremo o extremos de la cinta cuando se va midiendo, se pone la plancha de hierro junto a la cinta y se coloca el índice i sobre la división cero o 20. De este modo se disminuye mucho el error de alineación de las sucesivas posiciones de la cinta, y se determinan perfectamente los extremos de la misma.

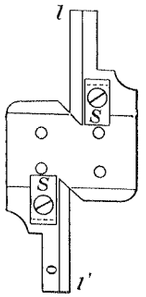


Fig. 68

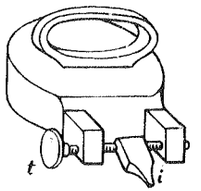


Fig. 69.—Dispositivo terminal de Löschner

En estas mediciones de precisión desempeña la temperatura un papel importante, ya que una variación térmica de 1° lleva consigo una variación de 1 : 100000 de la longitud medida. Por esta razón es necesario conocer siquiera la temperatura media durante la medición. Mejor es emplear cintas de metal *invar,* que es una aleación de níquel y acero, prácticamente insensible a los cambios de temperatura.

BIBLIOGRAFÍA:

FUCHS, Neues Messband (Zeitschr. f. Verm , 1894, págs. 348-350).

KREMER, Neues Stahlmessband (Zeitschr. f. Verm., 1894, págs. 401-402).

KONEGEN, Das Stahlmessband des Hamburger Vermessungsamtes (Zeitschr. f. Verm., 1894, páginas 542-543).

LÖSCHNER, Genauigkeitsuntersuchungen für Längenmessungen mit besonderer Berücksichtigung einer neuen Vorrichtung für Präzisionsstahlbandmessung. Hannóver, 1902.

LÖSCHNER, Über Präzisionsstahlbandmessungen (Österr. Wochenschrift für den öffentl. Baudienst, 1903, fasc. 48).

LÖSCHNER, Eine neue Vorrichtung für Präzisionsstahlbandmessung und Messungsergebnisse (Zeitschr. f. Verm., 1903, págs. 165-176).

REINHERTZ, Zur Stahlbandmessung (Zeitschr f. Verm , 1903, págs. 176-183)

LÖSCHNER, Längenmessung mit Präzisionsstahlmessbändern (Zeitschr. f. Verm., 1912, páginas 639-645).

KÖPPE, Genaue Messungen mit dem Stahlband (Zeitschr. f. Verm., 1918, págs. 98-102).

LÖSCHNER, Längenmessungen mit Invarband auf ebenem Boden (Österr. Zeitschr f. Verm , 1920, pág 25).

DEUBEL, Die Mechanisierung der Bandmessung (Zeitschr. f. Verm., 1924, págs. 411-418).

§ 20. Verificación de reglas y cintas

Como es sabido, el metro se define diciendo que es la distancia entre las dos divisiones extremas del metro-tipo (o prototipo) que se conserva en París, a la temperatura del hielo fundente. Las distintas naciones disponen de copias o reproducciones del metro-tipo, hechas de una aleación de platino e iridio.

Según los acuerdos de las Comisiones de Pesas y Medidas, los errores máximos admisibles en las reglas y cintas son los siguientes:

1. Para reglas de metal de
   - 10 a 7 m ambos inclusive . . . 3 mm
   - 6 a 4 m » » . . . 2 »
   - 3 y 2 m . . . 1 »
   - 1 m . . . 0,5 »
   - 0,5, 0.2 y 0.1 m . . . 0.25 »
2. Para reglas de otros materiales, de
   - 10 a 7 m ambos inclusive . . . 6 mm
   - 6 a 4 m » » . . . 4 »
   - 3 y 2 m . . . 2 »
   - 1 m . . . 1 »
   - 0,5 m . . . 0,75 »
   - Para reglas de boj, marfil, hueso, etc., de 0,5, 0.2 y 0,1 m. . . 0,25 »
3. Para cintas de
   - 50 y 40 m . . . 8 mm
   - 30 a 20 m ambos inclusive . . . 6 »
   - 15 m . . . 4 »
   - 10 a 7 m ambos inclusive . . . 3 »
   - 6 a 4 m » » . . . 2 »
   - 3 y 2 m . . . 1 »
   - 1 m . . . 0,75 »
   - 0,5 m . . . 0,5 »
4. Para reglas de precisión de
   - 5 y 4 m . . . 0,4 mm
   - 3 y 2 m . . . 0,2 »
   - 1 m . . . 0,1 »
   - 0,5, 0,2 y 0,1 m . . . 0.05 »

Para las divisiones, se señalan los siguientes errores tolerables máximos:

1. Para medidas de más de 3 m de longitud, el máximo error de la distancia de una división cualquiera al extremo más próximo de la regla o cinta, es igual a la mitad del error admisible para la longitud total de la misma.

2. Para reglas o cintas de 3 m y menos, el máximo error tolerable en la distancia de una cualquiera de las divisiones a uno u otro extremo de la regla o cinta, es igual al error total admisible en la regla o cinta.

3. Para reglas de cualquier tamaño, la diferencia entre las longitudes de los centímetros y medios centímetros no debe pasar de 0,5 mm, y en las de precisión se reduce este límite a 0,2 mm. La diferencia entre unos milímetros y otros y entre los medios milímetros no debe pasar de 0,1 mm.

Los Servicios de Pesas y Medidas cuentan con patrones o tipos normales y con medios de comprobar y contrastar estos mismos patrones, para tener garantía absoluta al hacer una verificación de una regla o cinta.

Una medida normal puede diferir de su prototipo o de su longitud teórica a lo sumo cuatro décimas del error máximo tolerable antes dicho, y un prototipo puede diferir de su longitud teórica una décima parte, a lo sumo, de dicho error.

Como tipos normales se emplean reglas de latón, bronce, madera o acero: una de madera de 2 m de largo, una de acero de 0,5 m, y una cinta de acero de 20 ó 10 m dividida en decímetros.

Como prototipos para el contraste se emplean:

1. Una regla de latón o de bronce de 1 m de longitud, dividida en centímetros, con los 10 primeros o los 10 últimos centímetros divididos en milímetros.

2. Una regla de acero de 2 m de longitud, dividida en centímetros.

Se consideran inadmisibles las reglas, cintas, etc., que pasen del error *comercial,* entendiendo por tal el doble del máximo error tolerable.

La precisión que se exige en Prusia en los levantamientos topográficos y catastrales, para las reglas y cintas, está regulada por las siguientes normas:

La precisión de las cintas y reglas debe contrastarse con los tipos normales, y éstos a su vez con los prototipos, teniendo en cuenta la temperatura.

Al contrastar las reglas con los tipos normales, teniendo en cuenta las variaciones que pueden provenir de cambios de temperatura, se admiten las siguientes diferencias:

$$\left.\begin{array}{lll} a) & \text{tipo para cintas de acero de 20 m . . .} & 3{,}5 \text{ mm a lo sumo} \\ b) & \text{» » » » » 10 » . . .} & 2{,}4 \text{ » » » } \\ c) & \text{» » » reglas » 5 » . . .} & 1{,}6 \text{ » » » } \\ d) & \text{» » » » 4 » . . .} & 1{,}5 \text{ » » » } \\ e) & \text{» » » » 3 » . . .} & 1{,}3 \text{ » » » } \\ f) & \text{» » » » 2 » . . .} & 1{,}1 \text{ » » » } \end{array}\right\} \quad (1)$$

Para el más fácil manejo y transporte se emplean como tipos normales dos barras de acero de 1 m de longitud, con los extremos en forma de cuña y biselados, pero en ángulo recto uno respecto a otro.

t	a	b
	mm	mm
10°	− 0,11	− 0,10
11	− 0,10	− 0,09
12	− 0,09	− 0,08
13	− 0,08	− 0,07
14	− 0,06	− 0,05
15	− 0,05	− 0,04
16	− 0,04	− 0,03
17	− 0,03	− 0,02
18	− 0,02	− 0,01
19	− 0,01	0
20	0	+ 0,01
21	+ 0,01	+ 0,02
22	+ 0,02	+ 0,03
23	+ 0,04	+ 0,05
24	+ 0,05	+ 0,06
25	+ 0,06	+ 0,07

Para los trabajos geodésicos de Danzig, construyó Bamberg dos reglas tipos n.° 9329 *a* y 9329 *b*, cuya longitud se determinaba por las fórmulas siguientes de la Comisión Imperial:

$$\begin{array}{rl} \text{Regla } 9329\,a = & 1\text{ m} - 0{,}02\text{ mm} + 0{,}011\,(t-18)\text{ mm} \\ \text{» } \quad 9329\,b = & 1\text{ m} - 0{,}01\text{ mm} + 0{,}011\,(t-18)\text{ mm} \end{array} \quad (2)$$

Estas dos reglas, a una temperatura de 18°, difieren de la longitud normal solamente en una o dos centésimas de milímetro.

Estas reglas tenían la ventaja de que en muchos casos podía prescindirse de tomar la temperatura, pues una variación de ± 10° (entre 8° y 28°) producía una variación de longitud de ± 0,1 mm, despreciable en la mayoría de los casos.

Para cada regla conviene disponer una tabla como la adjunta, calculada para las dos reglas anteriores, según las fórmulas (2), para valores de la temperatura comprendidos entre 10° y 25°.

Comprobación directa de reglas y cintas. El comprobador o comparador de reglas consiste esencialmente en un tablón fuerte TT' (fig. 70) sobre el cual hay fijados sólidamente a una distancia algo mayor de 5 m, dos estribos de acero EE'

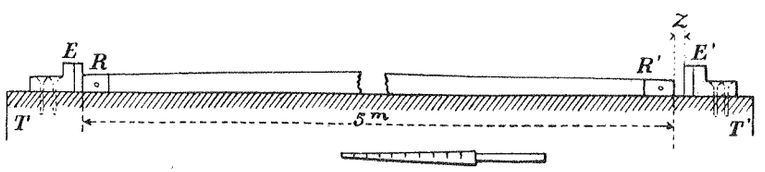


Fig. 70.—Comparador de reglas

terminados en arista cortante. Se coloca la regla RR' sobre el tablón, apoyada por un extremo en uno de los estribos, y el espacio z que queda entre el otro extremo y el segundo estribo se determina fácilmente, hasta con 0,1 mm de aproximación, con una cuña de acero

graduada, que se ve en la parte inferior de la figura. En esta figura hay marcada la dimensión 5 m, que no significa el valor exacto de esta longitud, sino que sólo se indica que la regla es de 5 m, con el error mayor o menor que pueda tener. La cuña se introduce por entre el extremo y el estribo E' hasta que no pueda penetrar más, y se tiene así determinado el espacio z, apreciándose directamente la décima de milímetro, lo cual significa que puede aproximarse hasta la centésima. En vez del estribo fijo E' y la cuña, se puede disponer una corredera con un índice, cuya posición sobre una escala de milímetros fija en el tablón puede determinarse con toda precisión mediante un nonio.

Para medir la distancia entre los estribos fijos EE' se emplea un metro-tipo con conteras de acero cortantes, calculándose su longitud con la fórmula (2) anterior; y con todo cuidado se coloca sobre el tablón, midiendo lo que quede hasta el segundo estribo, en la última posición del metro-tipo, con la cuña graduada. Repitiendo estas operaciones, se comprende que puede llegarse a medir la distancia entre los estribos con una aproximación de 0,05 mm.

A continuación damos un ejemplo del uso del sencillo comparador representado en la figura 70, empleando las dos reglas 9329 *a* y *b* con la tabla anterior. Para hacer estas comparaciones conviene disponer de impresos *ad hoc*, con los cuales se ahorra tiempo y se evitan equivocaciones.

Comprobación de reglas

Temperatura $t = 17{,}2°$ — Tabla anterior I − 0,03 mm
$16{,}5°$ — II − 0,02 »
Temp. media $t = 17°$ — I − 0,03 »
II − 0,02 »
I − 0,03 »
Suma − 0,13 mm

Suma = 5 m − 0,13 mm
Cuña = + 14,20 »

$C = 5\text{ m} + 14{,}07\text{ mm}$ = Distancia entre los estribos del comparador
= Regla + Cuña z.

Regla núm.	Espacio z Medida 1	Medida 2	Media	C	Longitud de la regla $C - z$
5	12,24 mm	12,22 mm	12,23 mm	5 m + 14,07 mm	5 m + 1,84 mm
6	12,44	12,57	12,51	»	» + 1,56
7	12,72	12,96	12,84	»	» + 1,23
8	12,29	12,41	12,35	»	» + 1,72
9	12,96	12,89	12,93	»	» + 1,14
10	11,86	11,89	11,88	»	» + 2,19

El resultado es que todas estas cinco reglas son demasiado largas, con un exceso promedio de 1,5 mm por 5 m, pero según los errores máximos tolerables dados en (1) son admisibles, por no llegar al valor 1,6 señalado como máximo para las reglas de 5 m.

Para la comprobación de reglas de 4 y 3 m sirve la misma distancia entre los estribos, poniendo a continuación de la regla uno o dos metros-tipo, para completar la distancia C entre estribos.



Fig. 71
Cuña

Un dispositivo semejante al de la figura 70, se emplea en la Escuela Tecnica Superior de Danzig, pero con la diferencia de que la distancia entre los estribos EE' es algo mayor, de modo que en cada extremo de la regla quede un pequeño espacio sobrante z. Se miden los dos espacios z, y corriendo un poco la regla se repite la medición y se tiene una comprobación excelente.

En vez de una sola cuña se emplean dos en este comparador, representadas

en la figura 71: una de ellas lleva las divisiones y la otra un índice para hacer las lecturas. Para medir el espacio s se pasan las cuñas, apretada una contra otra, por los espacios s y se lee la indicación correspondiente. En este comparador pueden sustituirse los estribos EE' por pernos cilíndricos.

Las pruebas hechas con reglas de madera han dado como resultado una variacion, en un año, sólo de 1 mm por 5 m.

La distancia misma entre estribos, es decir, la constante C, ha sido contrastada en la Escuela Superior de Hannóver en doce años distintos, dando los siguientes resultados:

15 septiembre	1887	$C = 5$ m + 15,69 mm	4 julio	1894	$C = 5$ m + 15,29 mm
19 agosto	1888	15,72	27 septiembre	1894	16,08
26 octubre	1888	16,04	27 octubre	1894	16,39
21 octubre	1889	15,85	16 noviembre	1895	16,04
6 marzo	1890	15,83	23 octubre	1896	15,81
29 octubre	1890	15,63	23 octubre	1897	15,84
28 agosto	1891	15,82	7 noviembre	1898	15,80
10 septiembre	1892	15,54	11 noviembre	1899	15,45
30 octubre	1893	15,89			

La mayor variación, en estos doce años, fué de 15,29 a 16,39 = 1,10 mm, equivalente a 0,22 mm por 1 m, de julio a octubre de 1894, pero no puede deducirse de estos resultados ninguna marcha o ley de variación, pues la mayor parte de las comprobaciones fueron hechas en la misma estación del año (en otoño). De todos modos se comprende lo innecesario que es el medir y comprobar la distancia entre estribos para las comparaciones corrientes. Pero en los cambios de temperatura y humedad debidos a perturbaciones meteorológicas, no hay que confiar demasiado en la inalterabilidad de la madera.

En la medición de bases y en trabajos de nivelación de precisión, hay que tener en cuenta la influencia de la temperatura y la humedad sobre la longitud de las reglas de madera.

BIBLIOGRAFÍA:

Wied Ann d. Physik und Chemie, 1888, tomo XXXIV, pág 361. HILDEBRAND, Untersuchungen über den Einfluss der Feuchtigkeit auf den Längenzustand von Hölzern und Elfenbein.

Wied. Ann. d. Physik und Chemie, 1897, tomo LXI, pág 208. STADTHAGEN, Untersuchungen über die Abhängigkeit der Längenänderungen von Holzstäben von Feuchtigkeit und Temperatur.

Verhandlungen der vom 3.-12. Okt. 1898, in Stuttgart abgehaltenen 12. allgemeinen Konferenz der internat. Erdmessung. Berlín, 1899 (G. REIMER), Beilage C I, págs 525-568. LALLEMAND, Bericht über die Goulierschen Untersuchungen über die Längenänderung von Holzmassstäben. (Véase también en Zeitschr. f. Verm., 1902, págs. 192-201, una comunicación de Petzold.)

Lo esencial que resulta de todos los estudios hechos sobre esta materia, es que la impregnación con aceite, parafina, etc., no anula el efecto de la humedad, sino que solamente lo amortigua; lo mejor es emplear madera escogida y bien curada, y pintarla con pintura de aceite buena y espesa. La dilatación térmica depende también del grado de humedad, y a su vez la variación de longitud debida a la humedad depende también de la temperatura. Reglas iguales en identidad de condiciones de humedad y temperatura, pueden presentar diferencias de longitud, a causa de las variaciones naturales de estos elementos, que pueden llegar a 0,2 mm y hasta a 0,5 mm por metro, por lo cual conviene tomar como variación o alteración media el valor ± 0,3 mm por metro.

Véase, sobre comparación de reglas, BLASS (Zeitschr. f. Verm., 1912, págs. 11-14) y HOHENNER (ebend , págs. 601-604). BREITHAUPT (Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1913, páginas 226-227).

Comparador para cintas de acero y cadenas. Para comprobar y corregir las cintas metálicas se emplea una cinta normal de contraste. Como estas cintas de contraste son caras y las reglas de contraste se emplean para otros muchos usos, para no hacer nuevo gasto se suelen comprobar las cintas métricas con reglas contrastadas.

La figura 72 representa, en proyección horizontal y en sección vertical, el dispositivo instalado en una de las terrazas de la Escuela Técnica Superior de Hannóver: P es un grueso perno cilíndrico de unos 2 cm de diámetro, de hierro, empotrado en la balaustrada de la terraza, que sirve para enganchar la anilla correspondiente al origen de la cinta que se trata de contrastar; a la derecha hay dispuesto un rodillo o polea horizontal, con un peso suspendido, para dar a la cinta la tensión que se quiera.

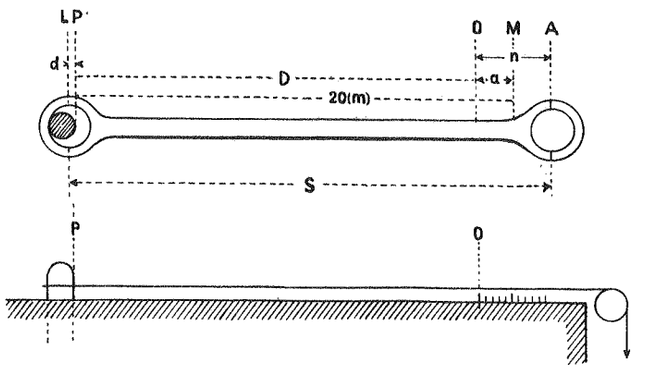


Fig. 72.– Comparador para cintas métricas

En la pared hay empotrada una regla de latón dividida en milímetros, cuyo cero u origen O está a cierta distancia constante D del plano tangente al perno P, perpendicular a la dirección de la regla. Para medir la distancia D se emplean los dos metros normales en la forma ya citada [pág. 60, (2)], empezando por el perno P, y poniéndolos veinte veces (diez cada uno) sobre la balaustrada, con lo cual se tiene la distancia $PM = 20$ metros nominales, indicada en la figura con 20 (m): este punto M resultará situado sobre una división a de la escala de latón, mientras que el extremo de la cinta llegará a A, es decir, sobre otra división n de esta escala.

Llamemos I y II a las longitudes respectivas de los dos metros normales empleados, habida cuenta de la temperatura, y se tendrá:

$$D = 10\,(I + II) - a. \tag{3}$$

Como el perno P no tendrá exactamente su diámetro igual al radio interior de la anilla (asa) de la cinta, hay que tener en cuenta la diferencia d entre ambos, como se ve en la figura, resultando para la longitud S de la cinta, contada entre los centros de sus asas:

$$S = D + n + d \tag{4}$$

o sea, sustituyendo D por su valor (3),

$$S = 10\,(I + II) - a + n + d. \tag{5}$$

Ejemplo. Se trata de contrastar una cinta de acero de 20 m en el dispositivo anterior, a una temperatura ambiente de 11° y con una tensión de 5 Kg.

En primer lugar se ponen los metros normales veinte veces (diez cada uno), y se anota el exceso a,

$$a = 4{,}4 \text{ mm}.$$

Los dos metros juntos tienen para dicha temperatura la longitud:

$$I + II = 2\text{ m} - 0{,}19\text{ mm}, \qquad \text{de donde se deduce} \qquad 10\,(I + II) = 20\text{ m} - 1{,}9\text{ mm}.$$

La pequeña corrección d de la anilla de la izquierda y la lectura n que da la de la derecha, son respectivamente:

$$d = 3{,}0\text{ mm} \qquad \text{y} \qquad n = 1{,}5\text{ mm};$$

luego sustituyendo estos valores en la fórmula (5) tendremos:

$$S = 20\text{ m} - 1{,}9\text{ mm} - 4{,}4\text{ mm} + 1{,}5\text{ mm} + 3{,}0\text{ mm}$$

o sea, que la longitud de la cinta en cuestión es:

$$S = 20\text{ m} - 1{,}8\text{ mm}$$

lo cual significa que la cinta es 1,8 mm más corta de los 20 metros, es decir, que su error cae dentro de lo tolerable.

La temperatura de la cinta misma no interviene para nada en el cálculo, sino sólo la temperatura ambiente, para corregir las longitudes de las reglas empleadas. Puesto que en las mediciones en el campo no se tiene en cuenta la temperatura de la cinta, lo mejor es hacer la comparación o contraste para una temperatura media (15° por ejemplo) y prescindir de la temperatura propia de la cinta. Si se quiere, en caso de gran precisión se puede tener en cuenta la dilatación térmica de la cinta, que viene a ser de unos 2 mm en 20 m para una elevación de 10° en la temperatura. (Véase la tabla I del Apéndice.)

Cuando se trata de contrastar varias cintas seguidas, se calcula la distancia D de una vez para todas. Si son muchas las comparaciones que hay que hacer, se imprimen unos esquemas de cálculo, con las constantes ya puestas, con objeto de ahorrar tiempo, simplificar las operaciones y evitar errores de signo y de procedimiento.

Comparador para reglas y cintas. En 1927 se instaló en la Escuela Técnica Superior de Berlín un comparador para contrastar reglas de cinco metros y cintas de hasta veinticinco metros de longitud, cuya descripción somera damos a continuación.

Como banco se emplea una plancha de madera curada, de 13 × 7 cm de sección transversal y unos 26 m de larga, apoyada en sólidos soportes, a lo largo de un corredor.

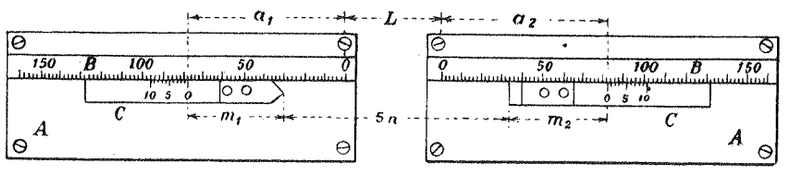


Fig. 73.—Comparador para reglas y cintas

Esta plancha de madera lleva incrustadas en su cara superior cuatro placas de latón de 19 cm de longitud y 6 cm de anchura, en los sitios correspondientes a las distintas longitudes de las reglas o cintas que hayan de contrastarse; sobre dos de estas placas de latón, las que correspondan a la longitud de la regla o cinta que se contraste, se atornillan los dos dispositivos representados en la figura 73, que consisten en unas placas de latón A, de igual tamaño que las que van incrustadas en la madera, sobre las cuales van sujetas con remaches unas regletas B de 1 cm de anchura e igual altura, divididas en milímetros: al lado de estas regletas pueden correr otras C, provistas de tornillos de presión y terminadas en conteras de acero con arista cortante; estas aristas son perpendiculares entre sí, mejor dicho, están cruzadas en ángulo recto; los cursores C llevan grabada una división que constituye un nonio de 0,05 mm de apreciación.

Para contrastar una regla de cinco metros, se atornillan las dos placas A sobre dos de las fijas que estén entre sí a una distancia de unos 5 m, y con dos metros patrones se mide la distancia L que hay entre los ceros de las dos regletas B divididas en milímetros. Se pone entonces el cursor C de la izquierda en la mitad de su carrera, se aprieta el tornillo de presión y se lee el nonio. A partir de la arista cortante de este cursor se pone cinco veces el metro-patrón, y en la quinta posición se le acerca, hasta tocar su extremo, la arista cortante del cursor C de la derecha, y se lee el nonio de este último.

Llamemos a las lecturas respectivas de los nonios a_1 y a_2, y $5\,n$ a la longitud total de los cinco metros-patrones; la distancia L vendrá dada por la siguiente igualdad:

$$L = 5\,n - (a_1 - m_1) - (a_2 - m_2)$$

de donde

$$L = 5\,n + (m_1 + m_2) - (a_1 + a_2).$$

La constante $m_1 + m_2$ se halló poniendo en la misma corredera los dos cursores C tocándose por sus aristas y leyendo directamente la longitud que comprendían, que por término medio fué la siguiente:

$$m_1 + m_2 = 101{,}62\text{ mm}.$$

La regla que se quiere contrastar se pone sobre el banco de madera, de modo que caigan sus extremos sobre las dos correderas, y se acercan los cursores C a los mismos hasta tocar con sus respectivas aristas en las conteras de la regla. Supongamos que las lecturas de los nonios sean a_1 y a_2; la longitud l de la regla será:

$$l = L + (a_1 + a_2) - (m_1 + m_2).$$

La operación puede repetirse varias veces, tomando como valor definitivo la media de las distintas sumas $a_1 + a_2$.

Para comprobar las cintas métricas, se atornillan las placas A sobre dos placas fijas que comprendan la longitud de la cinta y ésta se tiende sobre el banco, de modo que las anillas terminales caigan sobre las regletas B, y mediante pesos pendientes de poleas, se mantiene la cinta extendida y tirante, con la tensión que se quiera. La posición de las anillas puede leerse directamente en las regletas B, y llamando a las lecturas respectivas a_1 y a_2, tendremos la longitud b de la cinta expresada del modo siguiente:

$$b = L + (a_1 + a_2).$$

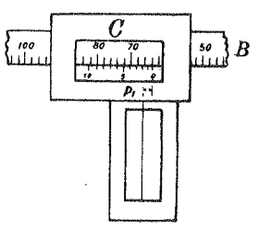


Fig. 74

Para cintas de precisión, cuyos extremos no están dados por las anillas terminales, sino por dos rayas o líneas transversales, se emplea un dispositivo especial que se diferencia del anterior sólo en los cursores C, que en vez de ser tales, son de la forma que se ve en la figura 74, que representa el cursor de la izquierda; este cursor tiene practicada una abertura rectangular para ver la escala B, y en el borde biselado inferior de esta abertura hay un nonio. El cursor forma cuerpo con un marco o bastidor que lleva una plaquita de vidrio en cuya cara inferior hay marcada una línea de referencia. Entre la placa de vidrio y la de latón A (fig. 73) sólo queda un pequeño espacio, correspondiente al grosor de la cinta.

Para comprobar una cinta se corren los cursores hasta que las líneas de referencia de los vidrios caigan sobre las divisiones extremas de la cinta tensa, y entonces se leen los nonios. Llamando p_1 y p_2 a las pequeñas distancias que hay entre los ceros de los nonios y las respectivas líneas de referencia de los vidrios, tendremos para la longitud b de la cinta:

$$b = L + (a_1 + a_2) + (p_1 + p_2)$$

La constante $p_1 + p_2$ puede determinarse colocando los dos cursores en la misma regleta B y llevando a coincidir sucesivamente las líneas de referencia del vidrio con un punto marcado en la placa A (fig. 73), leyendo cada vez los correspondientes nonios. Así se obtuvo el valor $p_1 + p_2 = 4{,}52$ mm.

En muchos casos se prescinde del empleo de los cursores y se extiende la cinta sobre soportes a propósito para que quede a la misma altura que la cara superior de la regleta B, y con las divisiones extremas de la cinta se leen directamente en las escalas B los valores a_1 y a_2.

Para mediciones de alguna precisión es indispensable hacer el contraste con todo esmero.

Respecto a la tensión de la cinta, hemos supuesto que ésta era de 5 Kg, variable a voluntad por los pesos que se quieran suspender de la polea especialmente adaptada a este uso (fig. 72). Según datos experimentales, un aumento de peso de 10 Kg produce un alargamiento de 2 mm por término medio. Si la cinta tiene 20 mm de anchura y aproximadamente 0,5 mm de espesor, su sección recta será de 10 mm², o sea, igual a 0,1 cm², con un módulo de elasticidad de 1000000 Kg por centímetro cuadrado. Para la cinta representada en la figura 67, resulta este módulo igual a 2380000 Kg.

(Véanse, más adelante, las Instrucciones del Instituto Geográfico de España.)

§ 21. Precisión de las mediciones directas de distancias

I. **Acumulación de errores.** Los errores que principalmente se cometen en la medición directa de distancias, se deben a la falta de alineación (desviación de la regla, cinta o cadena, de la recta determinada por los jalones), a la errónea reducción al horizonte (a causa del error que se cometa en la medida del ángulo de inclinación, o en la nivelación de la regla), y a la imprecisión con que pueden ponerse unas a continuación de otras las reglas, cintas o cadenas. En segundo lugar hay que considerar el error debido a la flexión de la regla o cinta, el procedente de la falta de exactitud en la longitud de éstas, y finalmente, los errores de lectura en el origen y extremo de la alineación medida.

Estos errores obran, en parte, como constantes y en parte como accidentales, por lo cual la acumulación de los mismos está dada por la fórmula (11) de la página 11; siguiendo la misma notación designaremos con c el conjunto de errores constantes que se cometen en cada posición de la regla o de la cinta, y con $\pm m$ el conjunto de errores accidentales correspondientes: si n es el número de posiciones de la regla o cinta, el error medio total será:

$$\pm\sqrt{n^2 c^2 + n m^2}. \qquad (1)$$

Si la longitud medida es s y la de la regla o cinta es l, se tendrá:

$$s = n l \qquad \text{de donde} \qquad n = \frac{s}{l}$$

y sustituído este valor de n en la fórmula (1) queda

$$\pm\sqrt{\frac{s^2 c^2}{l^2} + \frac{s m^2}{l}}.$$

Llamando ahora α y β, respectivamente, a las fracciones $\frac{m}{\sqrt{l}}$ y $\frac{c}{l}$, y sustituído el valor correspondiente en esta última fórmula, tenemos la (1) convertida en la siguiente expresión:

$$\pm\sqrt{\alpha^2 s + \beta^2 s^2}. \qquad (2)$$

Si representamos por $\pm a$ el error resultante de los de lectura en los puntos terminales, el error medio M de la medición será:

$$M = \pm\sqrt{a^2 + \alpha^2 s + \beta^2 s^2}. \qquad (3)$$

Ordinariamente el valor $\pm a$ es muy pequeño comparado con los otros dos términos de la cantidad subradical (3). Si por efecto de las circunstancias en que se opere, predomina de manera bien marcada el término $\beta^2 s^2$ o el $\alpha^2 s$, se tendrá que en el primer caso el error M aumentará proporcionalmente con la longitud s medida, pudiéndose expresar en tanto por ciento de dicha longitud, y en el segundo caso, cuando prepondere el término $\alpha^2 s$, que es función de los errores accidentales, el error medio M será proporcional a la raíz cuadrada de la longitud medida s, es decir,

$$M = \pm\alpha\sqrt{s}. \qquad (4)$$

II. **Resultado experimental de un estudio sobre propagación de errores.** Al medir la base de Bonn, en 1892, se hicieron mediciones de la misma, para estudiar la propagación de errores, con reglas y cintas métricas.

La base de Bonn fué medida por vez primera en el año 1847, bajo la dirección del general Baeyer, con una longitud de 2134 m, empleando el aparato de Bessel y haciendo dos veces la medición. En el año 1892 se midió otra base, cerca de la anterior, de 2513 m, resultado de seis mediciones, cuatro hechas por la División Topográfica con el aparato de Bessel, y dos por el Instituto Geodésico con el aparato de Brunner. Los valores medios resultantes fueron:

Instituto Geodésico:	Media de dos mediciones con el aparato de Brunner,	2512,995 m
División Topográfica:	» » cuatro » » » » » Bessel,	2512,984 m
	Diferencia	11 mm

La división de la base en quince trozos se hizo con el aparato de Bessel, cuyas cuatro barras (cada una de dos toesas, o sea de 3,898 m) sumaban en números aproximados 15,6 m, es decir, que con diez posiciones se cubría una distancia de 156 m, que era la longitud normal de uno de los quince trozos, de los cuales los nueve últimos, o sea, los comprendidos entre los puntos (7) y (16), se midieron con reglas y cintas corrientes. El método o procedimiento de medida seguido fué el mismo que en las operaciones ordinarias topográficas. Se marcó la alineación poniendo jalones a cada 40 ó 50 m, y el suelo presentaba el aspecto ordinario del resto del campo, con una inclinación o pendiente sólo de 0,7 m en 1 Km.

Las reglas, unas de cinco metros y otras de cuatro, tenían sus extremos pulimentados, eran de sección oval y estaban divididas en decímetros; las cintas tenían asas giratorias,

bastones de madera para extenderlas, y estaban divididas también en decímetros, como la representada en la figura 54.

La lectura correspondiente a los puntos permanentes, cuyas señales estaban a 0,2 m bajo el suelo, se hacía mediante una plomada de hilo, poniendo sobre la regla o cinta una reglilla dividida en milímetros.

Las mediciones se hicieron en tres días del mes de agosto del año 1892, por tres operadores, cada uno de los cuales midió doce veces los 1405 m (cuatro veces con la cinta y con cada una de las dos reglas), es decir, que en total se midieron 50,58 Km.

Las reglas y la cinta se contrastaron con los tipos normales antes, durante la operación y después de la misma, con comparadores como los descritos en el párrafo anterior.

Los valores obtenidos en el comparador, que coincidieron, dentro los límites de 0,1 mm, antes, en la operación y después de la misma, se tuvieron en cuenta en todos los cálculos siguientes a las medidas.

De los 324 valores parciales obtenidos con las reglas y la cinta, se tienen en la tabla siguiente sólo los 54 valores medios correspondientes a cada seis medidas parciales, y los 18 resultados parciales obtenidos con las reglas de Brunner y Bessel, pero en éstas no se toman las mediciones hechas atrás y adelante, sino sólo en un sentido, o sea, sin repetición, pues la medida atrás y adelante con cada aparato (Brunner y Bessel) se mantuvo siempre, para todas las mediciones parciales, dentro de una diferencia inferior a 1 mm, mientras que de uno a otro aparato resultaron diferencias considerables.

Base de Bonn, 1892 (5)

Trozos entre los puntos	Regla y cinta topográficas: Regla de 5 m adelante	Regla de 5 m atrás	Regla de 4 m adelante	Regla de 4 m atrás	Cinta de 20 m adelante	Cinta de 20 m atrás	Reglas geodésicas: Brunner	Bessel
	m	m	m	m	m	m	m	m
(16) - (15)	156,463	461	156,459	457	156,479	469	156,459	156,457
(16) - (14)	312,530	524	312,520	518	312,554	565	312,530	312,525
(16) - (13)	468,498	493	468,485	479	468,515	551	468,500	468,492
(16) - (12)	624,621	615	624,600	595	624,650	704	624,621	624,610
(16) - (11)	780,752	740	780,722	718	780,806	863	780,757	780,743
(16) - (10)	936,784	766	936,749	743	936,870	927	936,791	936,774
(16) - (9)	1092,953	935	1092,908	903	1093,058	099	1092,958	1092,938
(16) - (8)	1248,930	909	1248,880	875	1248,059	109	1248,931	1248,909
(16) - (7)	1405,015	992	1404,960	949	1405,175	213	1405,018	1404,993
	1405,004 m		1404,954 m		1405,194 m		1405,006 m	
	1404,979 m						Diferencia obtenida = 0,025 m	
	$\frac{0,023}{1405} = 0,0016\ ^0/_0$		$\frac{0,011}{1405} = 0,0008\ ^0/_0$		$\frac{0,038}{1405} = 0,0027\ ^0/_0$			

A primera vista se observa, en esta tabla, la gran precisión de las mediciones topográficas, que en 1,4 Km difieren unas de otras en centímetros. En cambio, entre los resultados obtenidos con las dos reglas geodésicas, con las cuales se aprecia la milésima de milímetro, hay una gran diferencia, igual a 25 mm en 1,4 Km. La media de todas las mediciones con regla, es decir, 1404,979 m, se diferencia de la media obtenida con los aparatos de Brunner y Bessel, sólo en 27 mm, o sea, muy poco más de la diferencia que resulta entre las medidas hechas con estos dos aparatos.

Errores de la medición con las reglas y la cinta

Longitud de los trozos	Regla de 5 m: Media aritm.	Brunner	Bessel	Regla de 4 m: Media aritm.	Cinta de 20 m: Media aritm.	Regla de 4 m: Media aritm. de observ.	Regla de 5 m: Cuadrados de los errores parciales en mm: a^2	$+\alpha^2 s$	$+\beta^2 s^2$	Error total $\sqrt{a^2+\alpha^2 s+\beta^2 s^2}$
1	2	3	4	5	6	7	8			9
	mm	mm	mm	mm	cm	mm				mm
156	±4,0	±5,4	±6,1	±10,2	±1,6	±8,7	10	+3,2	+13,6	±5,2
312	8,4	8,4	8,6	13,6	7,6	6,4	10	6,4	54,5	8,4
468	12,7	11,8	13,2	20,1	11,0	9,2	10	10,0	122	11,9
624	15,8	15,7	16,4	24,2	12,7	8,4	10	13	217	15,5
780	20,1	23,2	19,8	28,6	13,2	9,0	10	16	340	19,1
936	23,7	26,2	22,8	36,7	14,3	10,0	10	19	490	22,8
1092	24,9	27,1	25,0	42,4	15,4	10,3	10	22	668	26,5
1248	31,0	34,4	32,1	49,1	17,8	13,7	10	25	870	30,1
1405	32,9	35,2	33,7	58,3	20,8	16,3	10	29	1100	33,8

(6)

Esta tabla da los errores medios, obtenidos por suma de los cuadrados de las diferencias entre las lecturas y sus medias aritméticas correspondientes, y para la regla de 5 m da también los errores medios por suma de cuadrados de las diferencias entre las lecturas y los resultados de las dos reglas de Brunner y Bessel. Es fácil deducir de estos valores que, en general, la precisión obtenida con la regla de 5 m es de ± 2,6 cm por 1 Km, aproximadamente, con la de 4 m es de unos ± 5 cm, y con la cinta de 20 m es de unos ± 18 cm.

En estas dos tablas se observa, a primera vista, que los errores aumentan casi proporcionalmente con las distancias, como se ve mediante la representación gráfica correspondiente, que da casi una recta para las diferencias entre los resultados de la medición topográfica y los de las reglas geodésicas. Para las desviaciones medias de la recta se encuentran los siguientes valores: para la regla de cinco metros, ± 5,1 mm; para la de cuatro metros, ± 5,4 mm, y para la cinta de veinte metros, ± 4,1 cm.

Si se halla el error de observación para la regla de cinco metros, segun la fórmula (3) de la página 67, se obtienen los coeficientes:

$$a^2 = 10 \qquad \alpha^2 = 0{,}02040 \qquad \beta^2 = 0{,}000560.$$

En la columna 8 de la tabla anterior se ven los cuadrados de los errores parciales, y en la columna 9, el error total, que está de acuerdo con los errores de observación.

También se ve en la columna 8, que el término $\beta^2 s^2$ prepondera de modo indiscutible sobre los otros dos, por lo cual el error medio puede expresarse con aproximación suficiente con esta fórmula

$$M = \pm 0{,}025\, s$$

donde M viene expresado en milímetros. En números redondos, el error medio en estas mediciones resulta igual a $\frac{1}{40000}$ de la longitud medida.

III. **Error medio en las dobles mediciones.** Para apreciar la precisión o exactitud de una medición, sobre todo tratándose del *rodeo* o perímetro de un polígono, nada mejor que el método de la doble medición, tan acreditado por sus resultados prácticos; pero

hay que tener en cuenta el distinto modo de influir en el resultado los errores accidentales y los sistemáticos, y el valor tan considerable que a veces pueden tomar los errores constantes parciales a (fórmula (3), pág. 67). El mejor modo de ver el efecto de los errores, consiste en tomar como abscisas las longitudes medidas y como ordenadas las diferencias observadas; en esta representación, las diferencias correspondientes a los puntos representativos tienen el carácter de errores parciales accidentales, los cuales aumentan con la distancia, por lo cual pueden expresarse, como caso límite, por $\alpha\sqrt{s}$. Estas desviaciones deben, pues, considerarse como diferencias de observación y aplicarles las fórmulas (9) y (10) del párrafo 9 (pág. 24).

Para el caso de n mediciones dobles, siendo las diferencias $d_1, d_2, \ldots d_n$, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{error medio de una medición} & m = \sqrt{\dfrac{1}{2n}\left[\dfrac{d^2}{s}\right]} \\ \text{error medio de una doble medición} & m' = \dfrac{m}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{d^2}{s}\right]} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Estas fórmulas, que dan los valores m y m', son válidas también para la unidad de peso, o para la correspondiente unidad de longitud, que puede tomarse arbitrariamente, por ejemplo, $l = 1$ m o $l = 100$ m, etc.

El siguiente ejemplo numérico referente a siete mediciones dobles, indica el modo de aplicar las fórmulas anteriores:

Número de orden	Primera medición l_1	Segunda medición l_2	$d = l_1 - {}_2$	d^2	$\frac{d^2}{l}$	$100\,\frac{d^2}{l}$
1	153,135 m	153,120 m	+ 15 mm	225	14,70	1470
2	102.180	102.180	0	0	0,00	0
3	158,055	158,068	− 13	169	1,07	107
4	95,498	95,490	+ 8	64	0,67	67
5	154,862	154.870	− 8	64	0 41	41
6	94,400	94 408	− 8	64	0,68	68
7	81,764	81.763	+ 1	1	0,01	1
	839,894 m	839 899 m	− 5		17,54	1754

(8)

La penúltima columna corresponde a la unidad $l = 1$ m y la última a $l = 100$ m, pudiéndose tomar una u otra, según se quiera. De esta tabla y de las fórmulas (7) se deduce:

error medio de una medición $m = 1.12$ mm por 1 m, ó 11,2 mm por 100 m
error medio de una medición doble $m' = 0{,}79$ mm » » » 7,9 mm » »

La diferencia media para la medición doble es $D = m\sqrt{2}$, o sea:

$$D = 1{,}58 \text{ mm por 1 m} \quad \text{y} \quad 15\,8 \text{ mm por 100 m.}$$

Esta tabla da idea suficiente de cómo se procede en la práctica, donde la mayoría de las veces se trata de muchas, hasta de centenares, de mediciones, en vez de las siete que se dan en la tabla. Este ejemplo se refiere al plano de la población de Linden (1887), que comprendía 152 lados de poligonales, cuyas mediciones dobles, todas hechas del mismo modo, dieron la suma $\left[\frac{d^2}{l}\right] = 119{,}6$, y por lo tanto, una diferencia media

$$D = \sqrt{\frac{119{,}6}{152}} = 0{,}887 \text{ mm por 1 m, o sea, 8,87 mm por 100 m.} \quad (9)$$

En una poligonal del término de Hannóver (1894) había 99 lados, de una longitud total de 17577 m. es decir, con una longitud media de 178 m cada trozo o lado, que se midieron cuatro veces cada uno, por dos operadores, que designaremos por P y R, con reglas ordinarias y de precisión, o sea, con reglas de conteras corrientes y con reglas de conteras cortantes, de modo que el operador P medía primero una parte de la poligonal con regla de precisión (en doble medición) y el resto con regla ordinaria (también en doble medición), mientras que el operador R medía la primera parte con regla ordinaria y el resto con regla de precisión, siempre por doble medición. En cada doble medición con la misma regla y por el mismo operador, se obtenía una diferencia d, es decir, que resultaban dos veces 99 diferencias d, con las cuales había que calcular el valor $100\,\frac{d^2}{s}$, como se ve en la tabla siguiente; también se ve en esta tabla que los trozos medidos por los dos operadores no fueron precisamente los mismos, sino que el primero midió 99 y el segundo 98. La longitud parcial l de cada trozo está dada en metros y las diferencias d en milímetros, de modo que $d^2 : \frac{l}{100}$, o sea, $\frac{100\,d^2}{l}$, es el cuadrado de la diferencia reducida a la unidad de longitud, tomando ésta igual a 100 m.

Número n	Observador	Regla	$100\left[\frac{d^2}{l}\right]$	$\sqrt{\frac{100}{n}\left[\frac{d^2}{l}\right]}$
40	P	De precisión	4063	10,1 mm por 100 m
29	P	De precisión	3850	11,5 » »
30	P	Ordinaria	3588	10,9 » »
29	R	De precisión	2625	9,5 » »
40	R	Ordinaria	10180	16,0 » »
29	R	Ordinaria	2825	9,0 » »
197			27131	11,7 mm por 100 m
Agrupando los resultados por observadores se tiene:				
99	P		11501	10,8 mm por 100 m
98	R		15630	12,6 » »
Y agrupando por reglas resulta:				
98		De precisión	10538	10,4 mm por 100 m
99		Ordinaria	16593	12,9 » »

(10)

En esta última comparación se ve la ventaja de la regla de precisión sobre la ordinaria; sin embargo, esta ventaja no es decisiva, como parece, pues la pequeña diferencia de 10,4 a 12,9, obedece a las observaciones francamente defectuosas del quinto grupo, del observador R, como se ve también en la comparación entre los observadores, en la cual resulta P con una ventaja sobre R (10,8 a 12,6), del mismo orden que la ventaja anterior de una regla sobre otra (10,4 a 12,9).

Si reunimos todas las mediciones de Linden y Hannóver, tendremos la diferencia media D por 100 m:

$$D = \sqrt{\frac{11960 + 27131}{152 + 197}} = \sqrt{\frac{39091}{349}} = 10{,}6 \text{ mm por 100 m.} \quad (11)$$

Este valor medio nos indica que las mediciones de poligonales con medios sencillos pueden resultar muy buenas. Partiendo del valor anterior, pero en números redondos, es decir, 10,0 en vez de 10,6, tenemos el siguiente resumen de las operaciones numéricas efectuadas para la determinación de los errores:

Longitud medida	$l = 50$ m	100 m	150 m	200 m	300 m	500 m
Diferencia media (a izq. y derecha)	$D = 7{,}1$ mm	10,0 mm	12,2 mm	14.1 mm	17,3 mm	22,4 mm
Error medio de una medición	$m = 5{,}0$	7,1	8,7	10,0	12 3	15 8
» » de la doble medición	$m' = 3.5$	5,0	6,1	7,1	8,7	11,2
» » de una medición, en %	0,010%	0.007%	0,006%	0,005%	0,004%	0,003%

El error aumenta con $\sqrt{l}$, por lo cual, el tanto por ciento debe disminuir al aumentar l.

La exactitud obtenida con los instrumentos ordinarios de medida (reglas) nos indica el esmero con que se hicieron las mediciones. Mayor precisión se hubiera obtenido con dispositivos especiales, como, por ejemplo, con las cintas descritas en las páginas 57 y 58. En la medición de un polígono de 67 lados, hecha con uno de estos dispositivos, se obtuvo, según Löschner, el error medio

$$m = \pm 0\ 00022\sqrt{l}.$$

De diversos estudios y experimentos hechos hace tiempo sobre esta materia, resultan los siguientes valores medios, para la longitud l en metros:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Para mediciones con regla} & m = 0{,}003\sqrt{l} & \text{o bien} & 0{,}03 \text{ m por } 100 \text{ m} \\ \text{» » » cinta de acero} & m = 0{,}005\sqrt{l} & \text{»} & 0{,}05 \text{ » » } \\ \text{» » » cadena} & m = 0{,}008\sqrt{l} & \text{»} & 0{,}08 \text{ » » } \end{array}\right\} \quad (12)$$

En la tabla siguiente se ven los errores medios, calculados para distintas longitudes, con la adición de un término de comparación, de 0,03 %, que puede considerarse como error constante:

Longitud medida	Error accidental $\alpha\sqrt{l}$						Error constante βl	
	Regla		Cinta de acero		Cadena			
10 m	±0,01 m = 0,10 %		±0,02 m = 0.20 %		±0,03 m = 0,30 %		0,003 m = 0,03 %	
50	0,02	0,04	0,04	0,08	0,06	0,12	0,015	0.03
100	0,03	0,03	0,05	0,05	0,08	0,08	0,03	0,03
200	0,04	0,02	0,07	0,035	0,11	0,055	0,06	0,03
300	0,05	0,017	0,09	0,030	0,14	0,047	0,09	0,03
400	0,06	0,015	0,10	0,025	0.16	0,040	0 12	0,03
500	0,07	0,014	0,11	0,022	0,18	0,036	0,15	0,03
1000	0,09	0,009	0,16	0,016	0,25	0,025	0,30	0,03

(13)

El error medio consignado en las fórmulas (12) ha sido confirmado, para la medición con regla, por Pfitzer, en un estudio sobre precisión de las mediciones.

Hasta aquí hemos calculado, para las dobles mediciones, el error medio según la ley de proporcionalidad a la raíz cuadrada de la longitud; pero según Reinhertz, en mediciones esmeradas sobre terreno favorable, predomina con mucho el efecto de la propagación de los errores constantes. Sin embargo, hay que tener en cuenta que si se sigue la ley correspondiente ($m = \pm \beta l$) apenas se altera el resultado final, pues siendo las longitudes ordinarias de 100 a 200 m, la diferencia entre $\alpha\sqrt{l}$ y βl, para coeficientes α y β convenientemente elegidos, es en la práctica insignificante.

IV. **Límite de los errores tolerables.** Para determinar la precisión exigida en los diversos trabajos, la cual varía muy poco de unos países a otros, hay que tener en cuenta, no sólo el error medio, sino también el máximo o tolerable, que supondremos igual a tres veces el error medio.

Es decir, que siendo el error máximo $M = 3\,m$, la mayor diferencia admisible o tolerable entre dos mediciones será:

$$a = M\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,m = 4{,}24\,m, \text{ o en números redondos } a = 4\,m.$$

En Alemania, los errores máximos tolerables para las medidas de longitudes, son:

a) Para mediciones de longitudes ordinarias:

I. En condiciones favorables: $a = 0{,}008\sqrt{l} + 0{,}0003\,l + 0{,}05$ m
II. En condiciones medianas: $a = 0{,}010\sqrt{l} + 0{,}0004\,l + 0{,}05$ m
III. En condiciones desfavorables: $a = 0{,}012\sqrt{l} + 0{,}0005\,l + 0{,}05$ m

La siguiente tabla está calculada con estas fórmulas y en ella puede verse el máximo error tolerable correspondiente a longitudes de 10 m a 3000 m.

Longitud medida l	Diferencia admisible entre dos mediciones: I. favorables	II. medianas	III. desfavorables
10 m	0,08 m	0,09 m	0,09 m
50	0,12	0,14	0,16
100	0,16	0,19	0,22
200	0,22	0,27	0,32
300	0,28	0,34	0,41
400	0,33	0,41	0,49
500	0,38	0,47	0,57
1000	0 60	0,77	0,93
2000	1,01	1,30	1,59
3000	1,39	1,80	2,21

b) Para mediciones de poligonales:

I. En condiciones favorables: $a = 0{,}004\sqrt{l} + 0{,}00030\,l + 0{,}02$ m
II. En condiciones medianas: $a = 0{,}006\sqrt{l} + 0{,}00035\,l + 0{,}02$ m
III. En condiciones desfavorables: $a = 0{,}008\sqrt{l} + 0{,}00040\,l + 0{,}02$ m

Con estas fórmulas se ha calculado la tabla siguiente:

Longitud medida l	Diferencia admisible entre dos mediciones: I. favorables	II. medianas	III. desfavorables
10 m	0,04 m	0,04 m	0,05 m
50	0,06	0,10	0,10
100	0,09	0,12	0,14
200	0,14	0,20	0,21
300	0,18	0,23	0,28
400	0,22	0,28	0,34
500	0,26	0,33	0,40
1000	0,35	0,56	0,67
2000	0,80	0,99	1,18
3000	1,14	1,40	1,66

V. **Observación final.** Todas las instrucciones sobre trabajos de catastro y planos de población, sobre mediciones de bases topográficas con instrumentos ordinarios, etc., dejan bastante amplitud en las mediciones de las diversas clases, en cuanto al error tole-

rable se refiere; en general, el error medio en función lineal se mantiene entre los límites $\frac{1}{100000}$ y $\frac{1}{3000}$. Claro está que la precisión depende, con mucho, de las dificultades del terreno y de los medios de que se disponga, y sobre todo del tiempo y del costo a que ha de sujetarse la operación. En carreteras asfaltadas y en calles bien urbanizadas, se puede aceptar, sin gran esfuerzo, un error medio en función lineal de $\frac{1}{30000}$ de la longitud; las mediciones hechas en Bonn con reglas de cinco metros dan un error, en un camino secundario de 1,4 Km, con jalones a distancia de 40 a 50 m, de $\frac{1}{40000}$; para mediciones de poligonales, puede considerarse como normal el valor $\frac{1}{10000}$. En ciertos casos, la precisión de la medida debe extremarse todo lo posible, como, por ejemplo, al medir bases para pequeñas triangulaciones, que deben prepararse lo mejor posible, como ocurre en los trazados de vías férreas, caminos, etc. Conviene tener en cuenta que la cinta metálica de precisión (pág. 57), con dispositivos para alinear bien, sirve mejor que la regla para salvar los pequeños obstáculos que puedan presentarse, aunque 1° de variación en la temperatura da lugar a una variación de longitud de $\frac{1}{100000}$. En los demás casos, debe operarse con dos reglas iguales, de cinco o de cuatro metros, con extremos cortantes, y para ir apreciando la marcha de la operación y de sus errores se hacen lecturas en puntos fijos intermedios.

Para los trabajos topográficos son mejores las reglas de cinco metros que las de cuatro y de tres, y que la cinta ordinaria (fig. 54). La medición con la cinta metálica y con la cadena de agrimensor resulta más rápida y menos penosa para el operador.

§ 22. Compensación de las mediciones de longitud

En los levantamientos topográficos apenas se hacen otras compensaciones para las mediciones de distancias que las de reiteración (media de las medidas atrás y adelante, o de varias repeticiones), o las consistentes en intercalar puntos en la alineación que se mide. El método más empleado es el de dividir el error final proporcionalmente a las longitudes. Para una diferencia regular, que aumente con la distancia, este repartimiento en partes proporcionales se impone de modo evidente. Es decir, que si w es la diferencia final para la longitud total L, el factor o coeficiente de proporcionalidad será:

$$f = \frac{w}{L} \tag{1}$$

y las correcciones parciales para los puntos intermedios, correspondientes a las distancias $l_1, l_2, \ldots l_n$ serán:

$$v_1 = f \cdot l_1, \qquad v_2 = f \cdot l_2, \ldots \qquad v_n = f \cdot l_n \tag{2}$$

Para errores accidentales o irregulares, que aumentan según $\sqrt{l}$, se tiene que la inversa de su peso es proporcional a l, por lo cual puede aplicarse el mismo sistema de repartimientos proporcionales.

Vamos a suponer el caso de una alineación recta, definida por sus dos extremos que sean puntos permanentes, y con varios puntos intermedios cuyas distancias a estos dos

extremos se trate de medir, y admitamos también la hipótesis de que el error medio accidental o irregular sea proporcional a la raíz cuadrada de la longitud medida, o, lo que es lo mismo, que el peso sea inversamente proporcional a la longitud.

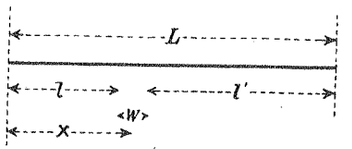


Fig. 75

Sea L la distancia fija, invariable y conocida entre los dos puntos permanentes (fig. 75); al hacer la medición se obtendrá un valor que diferirá de L en una cierta cantidad w, teniéndose por consiguiente como medida de dicha distancia $L - w$. Un punto intermedio quedará determinado por su distancia l al primer punto fijo y su distancia l' al segundo punto fijo, teniéndose:

$$L = l + l' + w. \tag{3}$$

Llamemos x a la distancia, ya compensada, del punto intermedio al primer punto permanente: esta distancia x puede determinarse de dos modos:

$$1.^{\circ}: \; x_1 = l, \quad \text{con el peso } p_1 = \frac{1}{l}, \tag{4}$$

$$2.^{\circ}: \; x_2 = L - l', \quad \text{o sea, según (3)}, \quad x_2 = l + w, \quad \text{con el peso } p_2 = \frac{1}{l'}; \tag{5}$$

pero según la fórmula (4) de la página 15, se tendrá:

$$x = l + \frac{l}{l + l'} w = l + \frac{l}{L} w. \tag{6}$$

Las aproximaciones correspondientes a las dos determinaciones l y $L - l'$, son, por lo tanto:

$$v_1 = + \frac{l}{L} w \quad \text{y} \quad v_2 = - \frac{l'}{L} w, \tag{7}$$

es decir, que la diferencia o aproximación en cada trozo medido es proporcional a la longitud del mismo.

El error medio de la medición, para la unidad de longitud, es, según la fórmula (18) de la página 18,

$$m = \frac{w}{\sqrt{L}}. \tag{8}$$

Esta fórmula puede deducirse también directamente, pues w puede considerarse como el error medio de una medición de la longitud L. El error medio de x, ya compensado, es, según la fórmula (11) de la página 17,

$$M = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{w}{L} \sqrt{l l'} \tag{9}$$

lo cual nos dice que el error medio de la determinación de un punto, por simple medición entre dos puntos permanentes, es proporcional a la ordenada correspondiente $\sqrt{l l'}$ de una circunferencia descrita sobre la recta L como diámetro; si el punto es el medio de L, se tiene $l = l' = \frac{L}{2}$, y $M = \frac{w}{2}$.

Los errores accidentales de los puntos permanentes mismos deben también repartirse proporcionalmente a la longitud, lo mismo que los errores que siempre obran en el mismo sentido. El repartimiento proporcional siempre da buenos resultados en todos los casos.

Si se mide una alineación de una sola vez, L, y después en dos trozos $l + l'$, se aplica el mismo principio. Se toma para ello, para la longitud total, la media x de L y $l + l'$ (si no hay causa que haga temer errores excepcionales), y se divide la diferencia $L - (l + l')$ en partes proporcionales a las tres longitudes L, l y l', o lo que es igual, se divide la diferencia $x - (l + l')$ en partes proporcionales a los dos trozos l y l'.

Cuando se mide una alineación de una vez, sin interrupciones, los errores en cada punto intermedio (error constante a, pág. 67) son independientes de la medida y quedan afectos a cada punto.

En la medición de la base de Bonn hemos visto que los errores medios parciales para las reglas de cinco metros y de cuatro, y para la cinta, eran respectivamente de $\pm$ 5,9 mm, $\pm$ 6,4 mm y $\pm$ 5,3 cm, conociendo de antemano la longitud total de la base.

En el capítulo IV estudiaremos la intercalación de puntos secundarios en una red de alineaciones.

§ 23. Rueda, podómetro, velocidad de marcha

I. **Rueda.** Se llama rueda de agrimensor y también *hodómetro* a una rueda provista de un contador de revoluciones, que al rodar por una alineación da la longitud de la misma. El eje de la rueda pone en movimiento al contador, leyéndose el número de vueltas en la esfera de este último.

De diversos estudios y ensayos llevados a cabo por Tinter y Schlebach, con ruedas de 2 m de circunferencia, se deducen los siguientes resultados, bien satisfactorios por cierto, ya que el error medio m es igual a $0{,}02\sqrt{l}$:

$l =$ 10 m	50 m	100 m	200 m	500 m	1000 m
$m = \pm$ 0,06	0,14	0,20	0,28	0,45	0,63

Pero estos resultados corresponden a ensayos hechos en caminos o carreteras con buen pavimento, caso el menos frecuente en los trabajos generales de Topografía o Agrimensura. En unas pruebas hechas en Hannóver, en suelo arenoso suelto, se vió que el error que resultaba en las mediciones con rueda era de un 8 %.

Para grandes distancias, como, por ejemplo, para fijar o comprobar la situación de hitos kilométricos en carreteras o vías férreas, es recomendable el empleo de la rueda con un contador que haga sonar un timbre a cada 100 ó 500 m.

II. **Medición de distancias a pasos.** La determinación de distancias a pasos es un procedimiento tan cómodo y sencillo, que a pesar de la evidente inseguridad que ofrece en muchos casos, tiene gran aplicación práctica. El autor de este libro ha llevado a cabo muchos experimentos sobre el particular.

La primera cuestión que se presenta es la diferencia de paso para las distintas personas. Para responder a ella, reunimos 535 valores de pasos, que desde 1873 a 1896 fueron obtenidos por los alumnos de las Escuelas Superiores Técnicas de Karlsruhe y Hannóver, sobre alineaciones de 150 a 250 m en terreno llano, al medir éstas con reglas y cintas, y después a pasos. En el cuadro siguiente se ven los valores de los 535 pasos, por orden creciente de longitudes, figurando frente a cada uno el número de veces que se obtuvo.

Paso	Número	Paso	Número	Paso	Número	Paso	Número
68 cm	1 vez	77 cm	40 veces	85 cm	21 veces	93 cm	3 veces
70	1 »	78	58 »	86	23 »	94	2 »
71	3 veces	79	50 »	87	25 »	95	1 vez
72	7 »	80	59 »	88	12 »	96	1 »
73	8 »	81	49 »	89	7 »		7 veces
74	12 »	82	41 »	90	5 »		102 »
75	18 »	83	30 »	91	6 »		356 »
76	20 »	84	29 »	92	3 »		70 »
	70 veces		356 veces		102 veces		535 veces

El valor máximo de un paso, de los observados por nosotros desde 1873, fué $p = 96$ cm, en el año 1891, de un estudiante que medía 1,90 m de estatura.

El promedio de todos esos pasos es $[np] : [n] = 43274 : 535 = 80{,}9$ cm; si se consideran los valores aislados de los pasos como determinaciones independientes de una variable, se halla el error medio de las mismas, que resulta ser igual al 5 % de su valor, partiendo de las diferencias entre dichas determinaciones y su valor medio. Es decir, que tratándose de terreno llano, y sin tener en cuenta las condiciones personales del individuo ni otras circunstancias particulares, puede considerarse el paso igual, en números redondos, a 80 cm, y las longitudes medidas a pasos resultarán con un error medio igual aproximadamente al 5 %.

Para ver la frecuencia de los pasos, es decir, la relación que pueda haber entre la longitud de un paso y el número de veces que éste se repite, se traza una curva cuyas ordenadas sean estos números n, y las abscisas los correspondientes valores p de los pasos; esta curva tiene forma irregular, y no es simétrica respecto al valor medio de p. Presenta su máximo en el punto de abscisa $p = 80$ cm y ordenada $n = 59$, como se ve claramente en la tabla anterior; a partir de este punto, baja rápidamente la curva a ambos lados, correspondiendo al valor medio $p = 81$ cm, una ordenada $n = 49$.

Además de medir los pasos, como ya hemos indicado, medíamos también la altura de los distintos operadores, resultando la siguiente tabla:

Altura del operador	$h = 1{,}60$ m	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90 m
Longitud del paso	$p = 78$ cm	79	80	81	82	83	84 cm

A la altura media 1,75 m corresponde la longitud de paso $p = 81$ cm. La edad de los operadores era, por término medio, de 20 años; al aumentar la edad, disminuye el paso en algunos centímetros.

Puede admitirse que el paso de un hombre, determinado y medido de vez en cuando, da la longitud de una distancia con un 2 % de aproximación, si no intervienen circunstancias desfavorables en la medida, como son el cansancio producido por una marcha prolongada, o la pendiente del terreno. Para hacer unos ensayos de medición a pasos en las nivelaciones, determinó el autor de este libro la longitud de su paso en distintas condiciones, obteniendo los siguientes resultados:

en camino horizontal	$p = 78{,}0$ cm
en camino con pendiente hacia arriba, de un 7,4 %	$p = 76{,}3$ »
(descanso entre este ensayo y el siguiente)	
en camino con pendiente hacia abajo de un 7,4 %	$p = 76{,}8$ »
en camino horizontal, después de una marcha de 7 horas . . .	$p = 75{,}0$ »

A pesar de las circunstancias tan distintas, la desviación respecto al valor medio fué sólo del 4 %.

Más considerables son las variaciones de paso en los caminos de montaña y en los francamente impracticables. Para determinar el valor del paso en tales circunstancias hizo el autor numerosos experimentos sobre distancias medidas con taquímetro y con cinta, resultando los siguientes valores, deducidos de 136 mediciones por medio de la representación gráfica de los datos experimentales:

Camino ascendente		Camino descendente	
Pendiente	Longitud del paso	Pendiente	Longitud del paso
0°	77 cm	0°	77 cm
5	70	5	74
10	62	10	72
15	56	15	70
20	50	20	67
25	45	25	60
30	38	30	50

Para un ángulo de pendiente de 30° en subida, la proyección horizontal de un paso es sólo la mitad del valor de éste en terreno llano, mientras que a una bajada en pendiente de 30° corresponde un paso que es aproximadamente igual a los dos tercios del paso en terreno llano, medido en su proyección horizontal. La siguiente fórmula, debida a Kahle, da el valor del paso p_α en una pendiente α, en función del paso p_0 en terreno horizontal:

$$p_\alpha = p_0 (1 - \text{sen } \alpha).$$

También Rziha da las fórmulas siguientes para calcular el paso x en caminos pendientes, en función del valor del paso p en terreno horizontal:

Camino ascendente: $x_1 = p (1 - \text{sen } \alpha)$. Íd. descendente: $x_2 = p \left(1 - \text{sen } \frac{\alpha}{2}\right)$.

Medición a pasos en terrenos inclinados, determinando el desnivel con aneroide. Al medir a pasos sobre terreno inclinado, se puede hacer la reducción al horizonte midiendo con un barómetro aneroide la diferencia de altura entre el origen y el extremo del camino recorrido. Al tratar de la nivelación, volveremos a tratar extensamente de este asunto.

Cuentapasos automático (podómetro). Para no tener que llevar mentalmente la cuenta de los pasos, se construyen aparatos cuentapasos automáticos, llamados podómetros. El más antiguo que conocemos data de 1833; se conserva en Hannóver, y consiste en una cadenilla que se sujeta a una pierna del operador y que a cada paso acciona un mecanismo numerador sencillo.

En el Salón Matemático de Dresden hay podómetros en forma de bastones de paseo, que se apoyan en el suelo a cada paso, registrándose el número de pasos en un mecanismo numerador que va por dentro del bastón. Actualmente los podómetros tienen forma de reloj de bolsillo, funcionando por la sacudida que experimentan a cada paso; estas sacudidas, mediante un sencillo mecanismo, se transmiten a una aguja de reloj que va marcando en la esfera del podómetro el número de pasos dados. En la figura 76 se ve exteriormente uno de estos podómetros, y en la figura 77, que representa el interior del mismo, se ve el péndulo oscilante que transmite las sacudidas al mecanismo indicador.

El podómetro representado en la figura 76 cuenta hasta 25000 pasos; la aguja más larga o central registra los pasos sueltos, o sea uno a uno; la aguja pequeña de la derecha da las centenas y la de la izquierda los millares, de modo que tal como están en dicha figura 76 estas manecillas, el número de pasos contados será:

$$19000 + 600 + 44 = 19644.$$

Claro está, que no debe hacerse uso de ningún podómetro sin antes haber comprobado su buen funcionamiento.

Al empezar a contar y al terminar, se leen las indicaciones de las manecillas del podómetro, y su diferencia da el número de pasos andados. Muchos podómetros tienen un

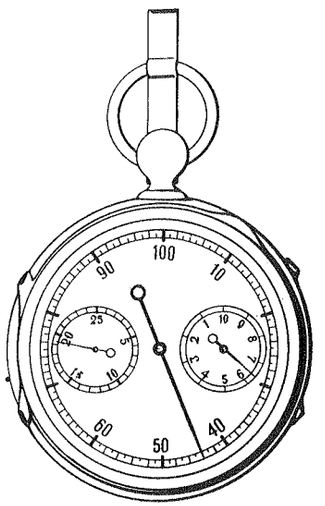


Fig. 76.—Podómetro

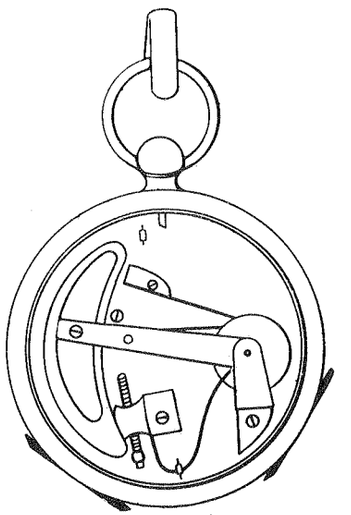


Fig. 77.—Mecanismo del podómetro

dispositivo de *vuelta a cero,* mediante el cual, con sólo apretar un botoncito, vuelven todas las agujas a cero, dando así directamente la lectura final el número de pasos, sin tener que hallar diferencia alguna.

III. **Velocidad de marcha.** El tiempo que se tarda en recorrer una distancia, puede servir para dar una medida aproximada de la longitud o valor de la misma.

Antes de la adopción del sistema métrico se expresaban las distancias en leguas, cuya longitud, que variaba de unos países a otros, se tomaba como unidad para las marchas y viajes en diligencias y coches de tiro animal.

La velocidad media de un hombre, sin carga, es de 5 a 6 Km por hora. El autor ha hallado para su velocidad media de marcha, en excursión, 5,7 Km por hora, variando entre 5,3 Km y 6,1 Km. La mayor velocidad de marcha, ya en terreno deportivo, conocida por nosotros, es la de 18 Km en dos horas y cinco minutos, o sea, 8,65 Km por hora.

Para trabajos geográficos se emplean más las velocidades de marcha de animales, tales como caballos de silla, animales de tiro, camellos, etc. En una expedición por la Libia, en camello, en el invierno de 1873 a 1874, halló el autor de esta obra las velocidades indicadas en la tabla de la página siguiente.

De aquí resulta que el explorador o geógrafo que viaje por el Nordeste de África en caravana de camellos, puede calcular la distancia a razón de 4 Km por hora, no habiendo temor de cometer un error superior al 5 % ni para trayectos más largos que los antes reseñados.

En cada caso particular de exploración por África debe hacerse un cálculo previo aproximado del tiempo, según se viaje en carreta de bueyes como en el Sudoeste, en com-

Más consig... francamente ... el autor ne... resultan... tación ... comprobado ... cillas del ... 79 ... nen un

...ayecto	Duración de la marcha		En Km
	Días	Horas	por hora
...arafrah . .	12,5	91,0	3,85 Km
...achel. . .	5	44,1	4,14
...enfeld . .	7,5	51,6	3,61
...uah. . .	14	126,5	4,02
...eh . . .	10	92,0	4,07
...arafrah .	4	38,3	4,52
...arafrah-Dachel. . .	3,5	42,6	4,29
Dachel-Chargeh. . .	6	53,0	4,03
Chargeh-Esneh . . .	6	58,8	3,79
Totales. .	68,5	597,9	
	Velocidad media:		4,005 Km por hora.

pañía de cargadores como en el Este, etc., siendo lo mejor medir astronómicamente la latitud, cuando la marcha es de dirección aproximada a la de un meridiano.

La velocidad del hombre disminuye principalmente al andar sobre arena suelta, como en los desiertos, playas, etc., y de cara al viento; pero todas estas circunstancias y hasta el mismo cansancio producido por largos recorridos, no hacen bajar la velocidad horaria del hombre a menos de 4 Km.

§ 24. Mediciones por abscisas y ordenadas. Croquis

Consiste este método en tomar una recta bien jalonada en el terreno y determinar los diferentes puntos del mismo trazando desde ellos perpendiculares a la recta y midiendo las distancias entre el origen de la recta y los pies de estas perpendiculares (abscisas) y la longitud de las perpendiculares (ordenadas). Abscisas y ordenadas llevan el nombre común de coordenadas.

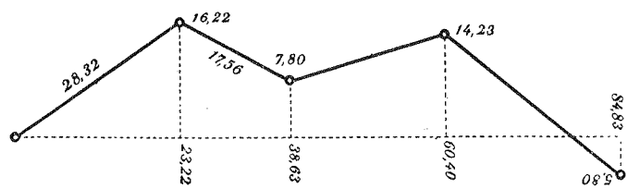


Fig. 78.— Acotación usada en Baden y Wurtemberg

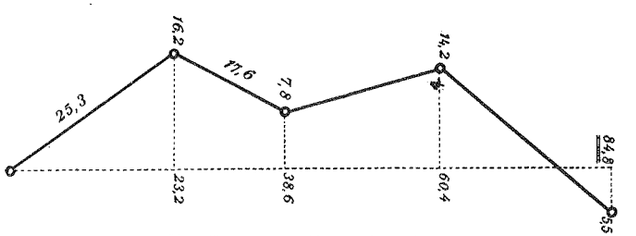


Fig. 79. – Acotación usada en Prusia

Los valores numéricos de estas distancias se consignan en un *croquis,* que es un dibujo representativo del terreno, hecho sobre éste a escala aproximada y a ojo, al tiempo de hacer la medición de las coordenadas o preparado de antemano. Lo más importante del croquis es su acotación numérica.

La acotación del croquis puede hacerse de distintos modos, como se ve en las figuras 78 y 79. En la primera están anotados los valores numéricos de las coordenadas perpendicularmente a la línea a que se refieren. Las abscisas 23,22, 38,63, etc., se miden directamente. Además de las coordenadas, se anotan también en el

croquis las distancias entre cada dos puntos sucesivos, paralelamente a cada una de éstas, como se ve en esta figura en las líneas inclinadas 28,32 y 17,56.

La figura 79 se diferencia de la anterior en que las ordenadas (16,2; 7,8, etc.) se escriben en el mismo sentido que las abscisas (23,2; 38,6, etc.); además, en esta figura están consignados los valores numéricos con 0,1 m de aproximación, lo cual depende de las circunstancias en que se opere, y según se trate de puntos permanentes (hitos, mojones, cruce de lindes, etc.) o de puntos del terreno poco fijos (caminos, veredas, hoyos, etc.).

En las figuras 78 y 79 se ve también que el trabajo queda comprobado, pues no solamente se miden las coordenadas de cada punto (abscisa y ordenada), sino la distancia entre cada dos puntos. Estas mediciones de líneas oblicuas se comparan con las deducidas, mediante el cálculo, de las coordenadas de sus extremos; por ejemplo, entre los dos primeros puntos se tiene $\sqrt{23{,}22^2 + 16{,}22^2} = 28{,}32$, que es precisamente el valor medido, y entre el segundo y tercer punto, cuya distancia medida es 17,56, resulta, por el cálculo, $\sqrt{15{,}41^2 + 8{,}42^2} = 17{,}56$, no habiendo necesidad de tener en cuenta los errores tolerables, por coincidir los valores calculado y medido El cálculo de las distancias entre puntos se hace con una tabla de cuadrados, de todos bien conocida, aunque también hay tablas especiales, como la de hipotenusas de Schiller, y reglas a propósito, como la regla de cálculo de Seifert.

En la figura 80 se ve el croquis de un levantamiento completo de un trozo de campo, hecho según las instrucciones del Catastro prusiano, por el sistema de abscisas y ordenadas. El eje principal del levantamiento es la recta de la derecha, por cuyo extremo pasa, hacia la izquierda, el otro eje de coordenadas. Mediante dos líneas oblicuas (119,75 y 110,25) queda comprobada la posición de este punto. La medida total de cada eje se señala con un doble subrayado. La red de ejes o líneas de referencia debe ser tan espesa, que para determinar los puntos permanentes sólo haya necesidad de trazar perpendiculares de corta longitud, comprobándose, además, su posición con líneas oblicuas. Siempre que sea posible, deben prolongarse las fachadas, lindes, etc., hasta encontrar un eje, como se indica, con flechas, en la figura 80. De este modo queda muy reducida la imprecisión debida a la falta de perpendicularidad; este procedimiento supone también un ahorro en las mediciones de las longitudes. En esta figura 80 están consignados todos los datos numéricos, estando subrayados con una sola raya los correspondientes a alineaciones de referencia, es decir, a prolongaciones de líneas permanentes. En esta figura se ve también que las comprobaciones deben distribuirse de modo que pueda descubrirse y localizarse perfectamente cualquier error de medición, para poderlo corregir midiendo nuevamente las alineaciones afectadas por el mismo.

Otro levantamiento hecho por coordenadas por el Dr. Doll, de Karlsruhe, es el representado en el croquis de la figura 81, en el que el valor de las ordenadas está escrito normalmente a éstas. El eje principal es AB, y hacia la izquierda parte otro, determinado por las coordenadas de sus extremos, y a estos dos ejes se refieren todos los puntos del plano.

El trazado de coordenadas, en población, no siempre se hace con la escuadra de reflexión, sino con una ordinaria de madera, colocada directamente sobre el suelo. En Alemania este sistema se empleó por primera vez en Berlín (fig. 82).

Para trazar el eje de las abscisas se emplea un cordel de cáñamo de 20 a 25 m de largo por 2 a 3 mm de grueso, que se enyesa antes de emplearlo y se coloca bien tenso sobre la recta determinada por dos puntos fijos; en esta posición se levanta un poco por el medio y se deja caer, quedando marcada en el suelo la recta propuesta. Si se quiere, se repasa con un trozo de yeso o tiza la línea así marcada, teniéndose de este modo trazado el eje de

las abscisas para un pequeño levantamiento. En vez de la escuadra de reflexión puede emplearse, como ya hemos indicado, una escuadra de madera, con catetos de 1,5 y 1 m de

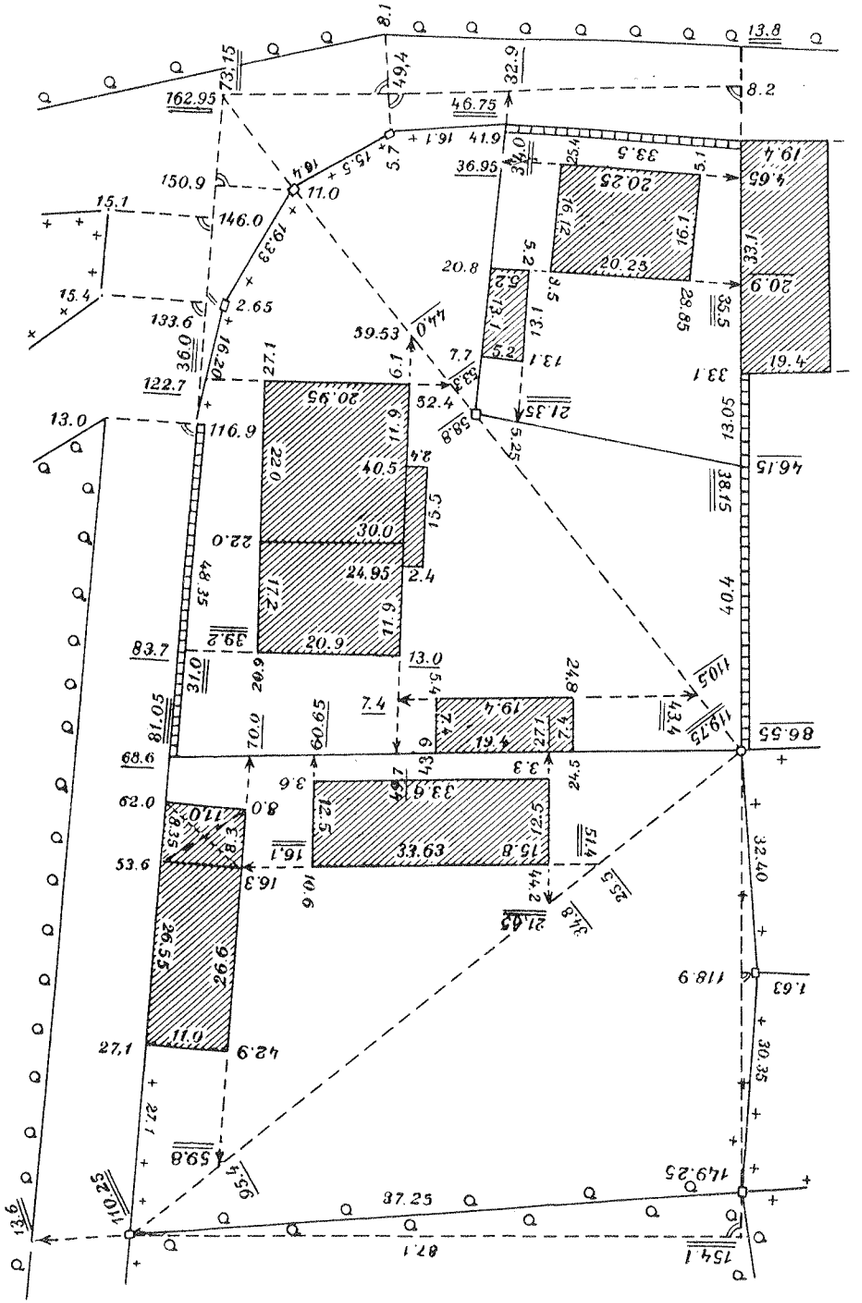


Fig. 80. — Croquis de un levantamiento

longitud; uno de ellos se hace coincidir con la línea señalada con el yeso, sobre la cual se corre hasta que el otro cateto pase por el punto o dirección convenientes. Para prolongar

los catetos se emplea, en caso necesario, un cordel. El pie de las ordenadas se marca sobre el eje de las abscisas con una tiza roja.

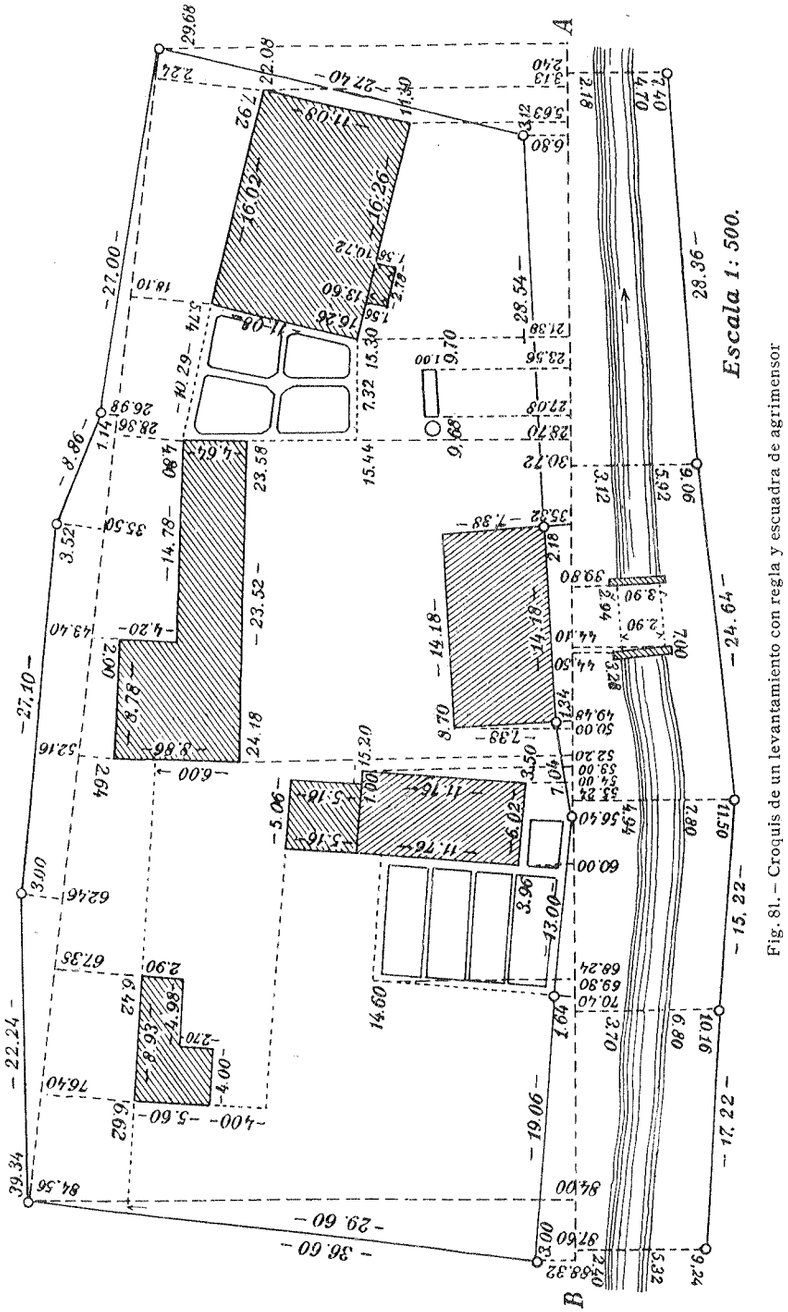


Fig. 81. — Croquis de un levantamiento con regla y escuadra de agrimensor

En la figura 82 se ve un ejemplo de aplicación de este sistema; P y Q son dos señales fijas, grabadas en el suelo, y BB' y CC' dos ordenadas determinadas con la escuadra.

Para croquis pequeños se emplea una carpeta sobre la cual se sujeta el papel de dibujo, con un bastidor de madera, sobre una placa de aluminio. Si el croquis ha de ser más grande, como, por ejemplo, de 40 × 60 cm, se emplea un soporte como el indicado en la figura 83, sencillo y fuerte.

Muchas veces hay que hacer en el campo gran número de croquis, y entonces resulta ventajoso y casi indispensable el empleo de estos materiales accesorios, que tanto facilitan y abrevian las operaciones de croquizar, acotar, etc.

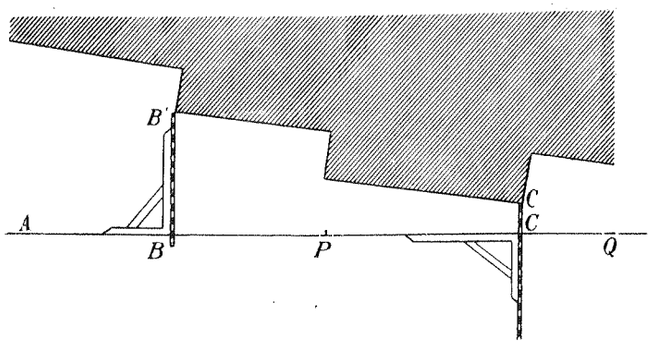


Fig. 82.—Levantamiento en una calle de Berlín

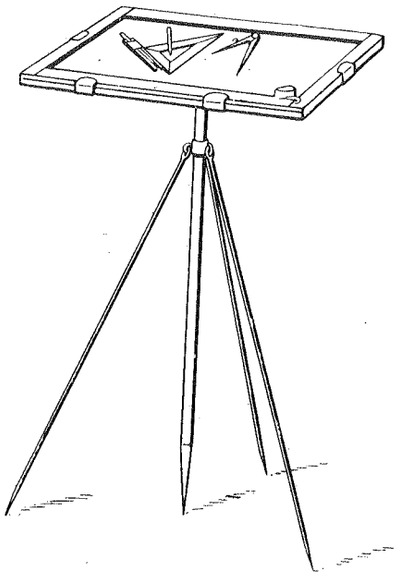


Fig. 83.—Tablero para croquis en el campo

§ 25. Levantamientos topográficos

El sistema de levantamiento representado en las figuras 80 y 81 no tiene aplicación tratándose de extensiones de terreno más grandes, pues la determinación de los pies de las perpendiculares con la escuadra de agrimensor o la de reflexión, no tiene la precisión suficiente. Sin embargo, para las ordenadas de mucha longitud se puede proceder del modo siguiente: se determina desde P (fig. 84), aproximadamente, el punto A, con la escuadra de reflexión; después se toma sobre el eje un punto conveniente B, se miden PA y PB y se deduce el valor de BA por la fórmula

$$BA = \sqrt{PB^2 - PA^2}.$$

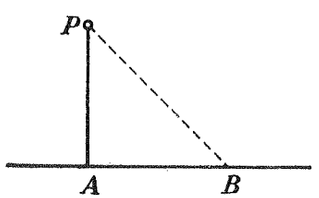


Fig. 84

Es necesario que BA sea, por lo menos, tan grande como AP (*). Como que la medición de longitudes, aunque sea de grandes distancias, se hace con suficiente exactitud, resulta que por el procedimiento de la figura 80 pueden levantarse extensiones de terreno más grandes.

Cuando por dificultades del terreno no es practicable el trazado de perpendiculares, se puede descomponer aquél en triángulos, cuyos lados se miden directamente, y puesto que cada triángulo queda perfectamente conocido al conocer sus lados, resulta que sus vértices

(*) Entre los prácticos del nordeste de España es usual la llamada «regla del 3, 4 y 5», que consiste en tomar longitudes 3 y 4 para los catetos, y 5 para la hipotenusa. Para esta operación basta la cinta. En el presente caso se toma como unidad el tercio (o el cuarto) de la distancia AP. — N. del T.

quedan también perfectamente determinados. En la figura 85 se ve una red de triángulos que sirve para hacer el levantamiento topográfico de una gran extensión de terreno. Los puntos principales 1 a 6 determinan cuatro grandes triángulos cuyos lados se miden por

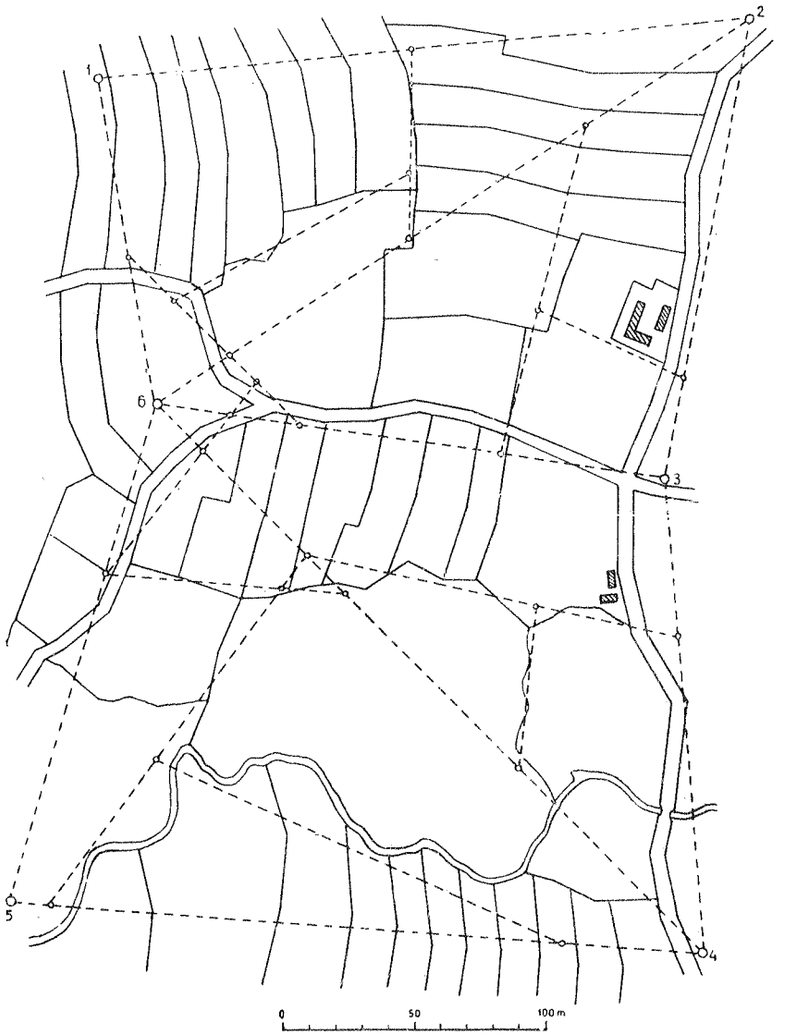


Fig. 85.—Red de triángulos

doble medición hecha con todo esmero. En dicha figura se ven solamente las líneas principales, que quedan entre sí comprobadas y que, además, quedan nuevamente comprobadas al trazar las demás líneas de referencia secundarias.

En el párrafo 38 trataremos de la determinación de puntos por coordenadas en una red de triángulos así formada.

Red de líneas paralelas. Este sistema especial de levantamiento estuvo en uso entre los agrimensores de Wurtemberg (1820-1840) antes del empleo de las poligonales. Partiendo de una pequeña triangulación hecha con la plancheta, se traza sobre el terreno

una red de paralelas, que además de dar gran número de comprobaciones, sirven de ejes de referencia para el levantamiento de los puntos secundarios, como se ve en la figura 86 a escala 1 : 2500.

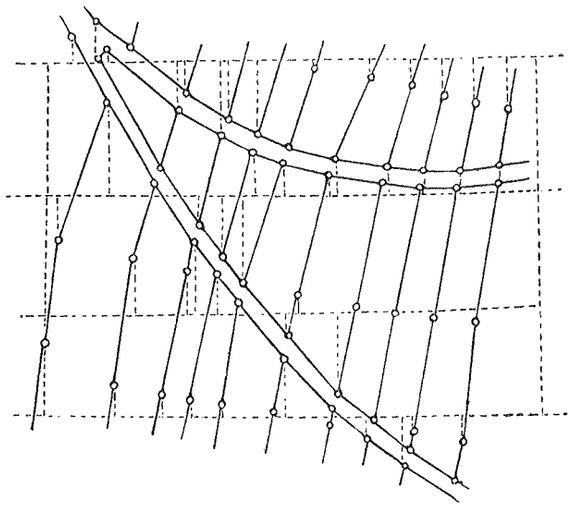


Fig. 86. – Método wurtemburgués de líneas paralelas. Escala 1: 2500

Actualmente han perdido interés los anteriores sistemas de levantamiento, a causa del empleo del teodolito. Lo más corriente es rodear el terreno que se quiere representar, por una poligonal cerrada, y después hacer el *relleno* con otras poligonales o con una red de líneas secundarias. En la figura 87 se ve un levantamiento de esta clase, donde las líneas llenas representan los lados del polígono, que queda dividido por las líneas principales 1-2 y 3-4 en pequeñas secciones, en las cuales se trazan las alineaciones necesarias para la medición o levantamiento. También en este caso se comprueba la posición de cada línea con las transversales y prolongaciones, dibujadas de puntos en la figura.

En la figura 88 se ve un trozo de un croquis a escala 1 : 250 del plano de Berlín, en el

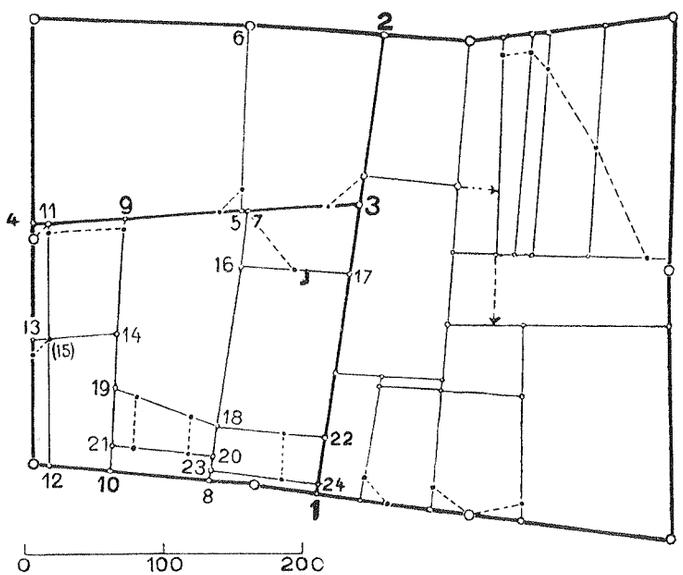
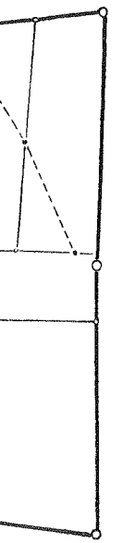


Fig. 87 – Red de líneas dentro de un polígono

cual pueden apreciarse las dificultades encontradas para la disposición de la red de ejes, por entre las calles y los edificios.

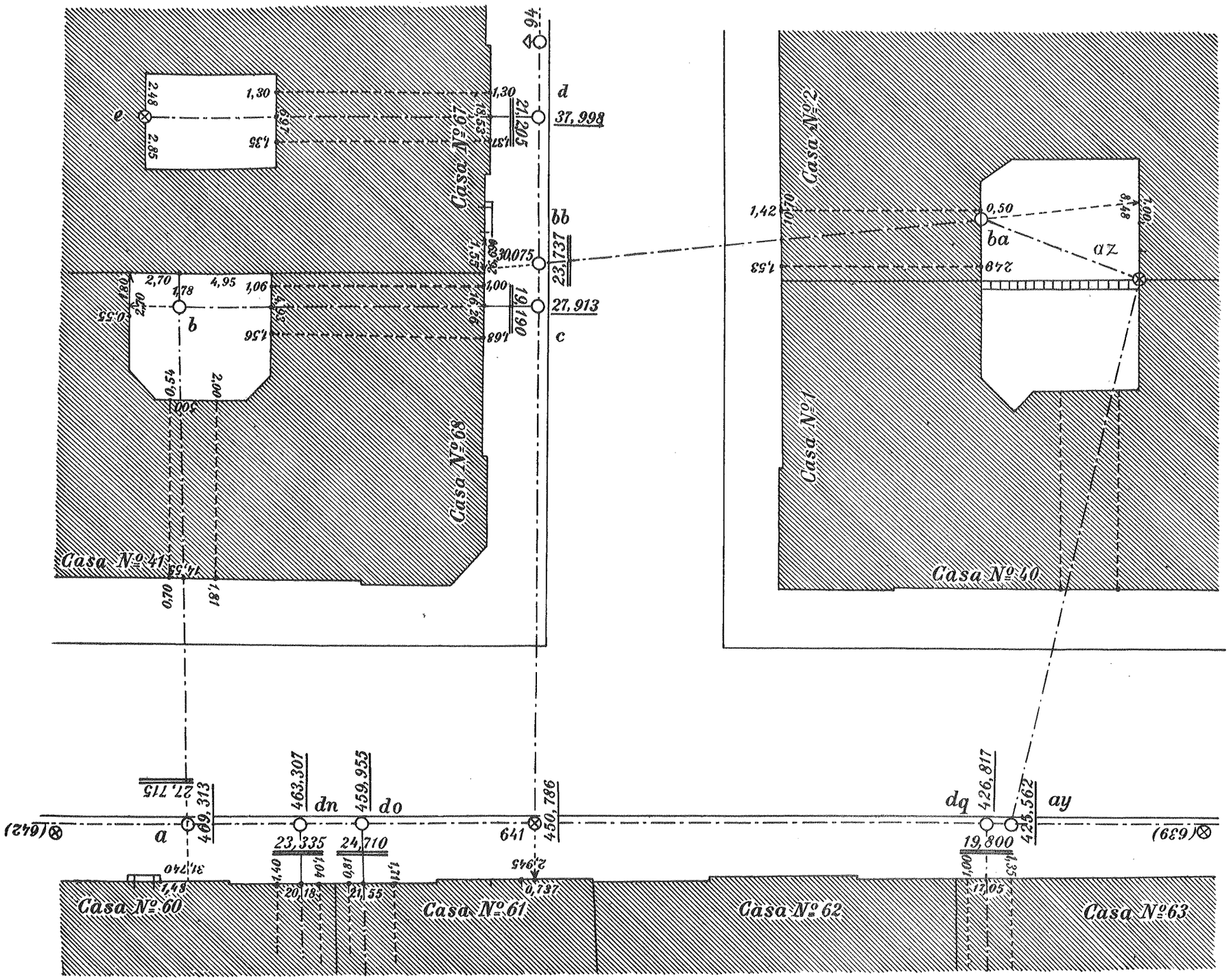
Del cálculo de coordenadas en una red de líneas o ejes, trataremos en el párrafo 38.

obaciones, sirven de ejes
omo se ve en la figura 86
: 2500.
lmente han perdido inte-
teriores sistemas de le-
to, a causa del empleo
to. Lo más corriente es
erreno que se quiere re-
por una poligonal cerra-
ués hacer el *relleno* con
onales o con una red de
ndarias. En la figura 87
evantamiento de esta cla-
las líneas llenas repre-
lados del polígono, que
idido por las líneas prin-
y 3-4 en pequeñas sec-
las cuales se trazan las
es necesarias para la me-
evantamiento. También
so se comprueba la posi-
as de puntos en la figura.
el plano de Berlín, en el



ición de la red de ejes,

mos en el párrafo 38.



una r
de re



Fig. 8

ción
I

cual
por e
I

Prolongación y medición de alineaciones a través de obstáculos. Para prolongar y medir una alineación salvando un obstáculo no demasiado grande, se sustituye la parte comprendida entre dos puntos de la misma, uno delante y otro detrás del obstáculo, por otra igual paralela, valiéndose de la escuadra de agrimensor, como se ve en la figura 89.

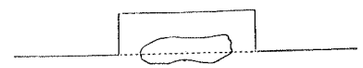


Fig. 89
Prolongación de un eje mediante una paralela

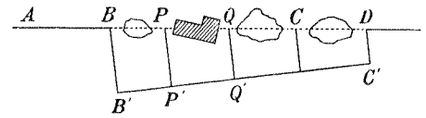


Fig. 90
Prolongación de un eje mediante una línea oblicua

También pueden salvarse los obstáculos situados en las alineaciones del modo representado en la figura 90, que consiste en trazar una alineación auxiliar $B'C'$ a uno de los lados de la principal $ABCD$. Midiendo BB', $B'C'$ y $C'D$ se pueden calcular, mediante una simple proporción, las coordenadas de los puntos P, Q, C respecto a BB' y $B'C'$ como ejes, con sólo medir sobre $B'C'$ las distancias $B'P'$, $B'Q'$, etc., quedando así determinados los puntos P, Q, C, etc., y deducidas sus distancias a B.

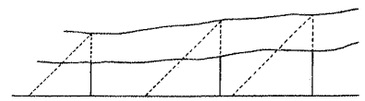


Fig. 91.— Levantamiento de un río con visuales a 90° y 45°

Con una escuadra de agrimensor que pueda dar alineaciones a 45°, o con una de espejos o de prismas que dé este mismo ángulo, se puede levantar la orilla opuesta de un río, del modo representado en la figura 91. También en otros muchos casos puede servir uno de estos instrumentos para medir ordenadas inaccesibles.

Lo mejor, en general, es elegir los ejes y las alineaciones de modo que se eviten los obstáculos, para no perder tiempo en estudiar el modo de salvarlos.

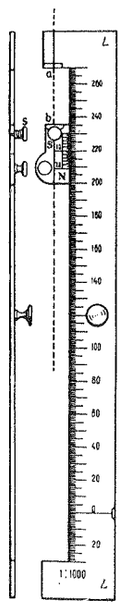


Fig. 92.— Regla con cursor, de Sickler

§ 26. Dispositivos empleados en los trabajos de gabinete (desarrollos)

Para el desarrollo en gabinete del trabajo de campo, o sea, para la formación del plano correspondiente, se dispone de medios sencillos y de instrumentos simples para el trazado de líneas rectas, de ángulos rectos o de otra clase cualquiera (transportadores) y para la medición de longitudes. Para líneas rectas de alguna longitud, lo mejor es emplear reglas de acero de la calidad llamada de hoja de sierra, de unos $^3/_4$ mm de espesor. Para el trazado de los ángulos rectos se emplean pequeñas escuadras de acero o celuloide. Las distancias sobre el plano se tomaban antes casi únicamente con la escala y el compás; actualmente se toman con reglas biseladas graduadas, de madera o metal.

La figura 92 representa un dispositivo ideado por Sickler para tomar distancias en los planos; se compone, en esencia, de una regla L, dividida a escala 1 : 1000, con dos salientes en sus extremos, para limitar el movimiento de una corredera S que se mueve a lo largo del borde graduado de la regla; en a y b están rebajados los bordes y con una raya marcada a manera de índice en cada uno de ellos, con objeto de determinar bien la recta que se trata de medir (señalada de puntos en la figura). Para emplear esta

regla se lleva abajo la corredera, quedando en coincidencia el borde *b* con el cero de la escala: la distancia que se quiera fijar se toma moviendo hacia arriba la corredera y leyendo con el nonio *N*, y una vez bien determinada se marca el punto correspondiente apretando un botón que lleva unido un pequeño punzón o aguja.

Levantamiento por coordenadas. Para grandes levantamientos se calculan las coordenadas rectilíneas de los puntos principales de la red (véase § 38), como se hace para los vértices de las poligonales y de los triángulos. Para este cálculo no se tiene ningún dispositivo especial, construyéndose cada cual, sobre el papel de dibujo, una cuadrícula de 10 cm de lado, con las líneas paralelas a los ejes de coordenadas. Basta para ello una regla de hoja de acero de 1,3 m de larga, dividida en decímetros, siendo conveniente disponer también de un compás de varas. Como se ve en la figura 93, para hacer esta cuadrícula se trazan las dos diagonales, y desde su punto de intersección como centro, se toman, con el compás, cuatro distancias iguales, todo lo largas que lo permita el papel. Uniendo los cuatro puntos resultantes se tiene un rectángulo, cuyos lados se dividen en decímetros, formándose así la cuadrícula deseada.

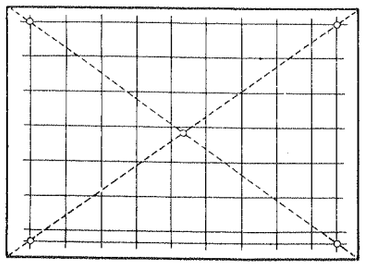


Fig. 93.—Construcción de una cuadrícula

Ordinariamente y a causa de los límites tan irregulares de casi todos los terrenos que se trata de levantar, no es posible trazar la cuadrícula con sus lados paralelos a los bordes del papel, pues casi siempre queda una parte fuera de éste: lo mejor es, a la vista de un croquis de conjunto, sobre el cual se traza a ojo la cuadrícula, recortar un papel del tamaño

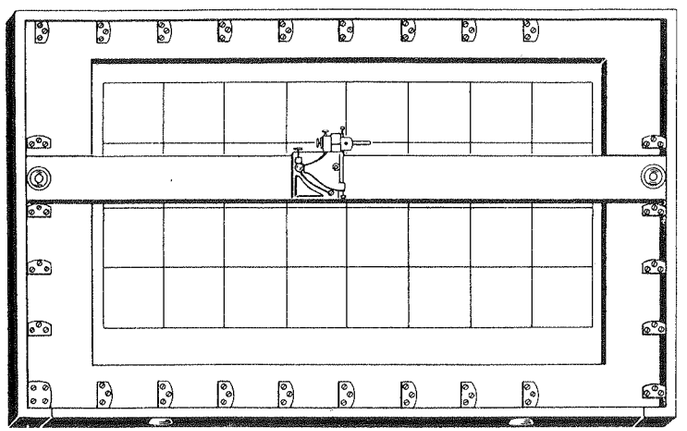


Fig. 94.—Cuadriculador de Dennert y Pape

que haya de darse al plano, y ponerlo sobre el papel de dibujo de modo que todo quepa bien en el mismo, y una vez hecho esto se ve la dirección en que han de trazarse las diagonales auxiliares antes indicadas para la formación de la cuadrícula.

Además de este procedimiento, tan conocido desde antiguo, existen actualmente numerosos dispositivos para el trazado mecánico de las cuadrículas.

Cuadriculador. Se llama así un sencillo dispositivo debido al ingeniero Stiefelhagen, consistente en una lámina de cobre de 0,2 mm de espesor, con agujeros finos en los puntos correspondientes a los vértices de la cuadrícula.

También merece ser mencionado el cuadriculador de Roedder, que consiste en una placa de latón con agujas finas en los vértices de la cuadrícula, de tal modo que se marcan de una vez todos los puntos en el papel.

La figura 94 representa un cuadriculador para trazar directamente la cuadrícula en el papel, debido a Dennert y Pape, y consistente en un bastidor fuerte de acero, en cuyos lados, de 10 en 10 cm, van fijos unos topes también de acero; contra éstos se apoya una regla, sobre la cual puede moverse, a lo largo de la misma, una corredera que lleva un tiralíneas. El bastidor debe ser de tamaño tal, que el papel de dibujo pueda ponerse en cualquier posición dentro del mismo.

Coordinatógrafo de Coradi (fig. 95). Consiste este aparato, en esencia, en una regla *A* (eje de abscisas) que se sujeta fuertemente en el tablero de dibujo y sobre la cual corre un carrillo solidario con una regla, perpendicular a la primera, que es el eje de ordenadas. La regla *A* tiene practicado un canal, sobre el cual pasan las dos ruedecillas *r* del carrillo *Y*; la regla de ordenadas se apoya, con el rodillo *R*, sobre la reglilla *B*, que va sujeta a la mesa *T*.

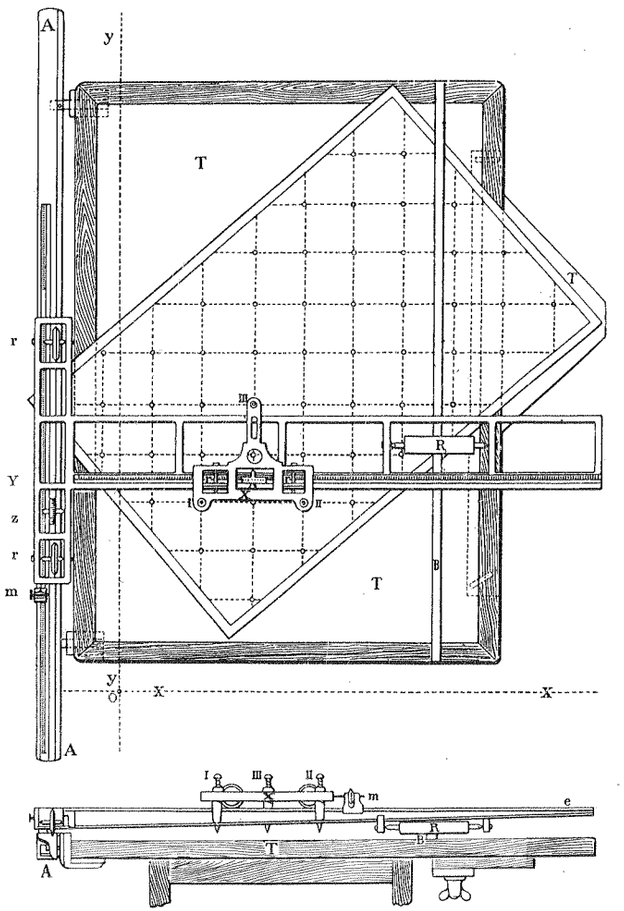


Fig. 95.—Coordinatógrafo de Coradi

Sobre la regla de ordenadas corre, de modo análogo al *Y*, otro carrillo *X*. Ambos carrillos están provistos de tornillos de presión y coincidencia *m*, *m'*. Las dos reglas están divididas o graduadas del mismo modo, poniéndose los carrillos aproximadamente en los puntos correspondientes a las coordenadas dadas; para fijar aquéllos con exactitud, se emplean las ruedecillas micrométricas dentadas *z* y *z'*, que engranan con una cremallera dispuesta sobre las reglas. Con este dispositivo se puede medir el movimiento de los carrillos con una aproximación de una centésima de milímetro.

El carrillo *X* lleva el dispositivo marcador, que consiste en tres punzones *I*, *II* y *III*, alojados en sus correspondientes vainas cilíndricas y mantenidos en alto por medio de unos muelles adecuados. Cada punzón puede llevar un lápiz o tiralíneas, para marcar en el papel tanto

las ordenadas como las abscisas: es decir, que pueden marcarse todos los puntos de la cuadrícula, o dibujarse completas, en lápiz o tinta, las líneas de la misma. En el primer caso se gana mucho tiempo utilizando los tres punzones en cada posición del carrillo.

En la figura 102 pueden apreciarse detalles de construcción de este instrumento y su modo de funcionar.

Una vez trazada la cuadrícula, es fácil determinar los puntos interiores en cada cuadrado, conocidas que sean sus coordenadas. Es conveniente determinar los puntos por intersección de dos trazos de lápiz, pues si es preciso hacer alguna corrección se borran éstos con facilidad, mientras que si se pinchan, no hay modo de hacer enmiendas de ningún género.

El coordinatógrafo de Coradi sirve también para desarrollar levantamientos, por la exactitud con que pueden medirse las abscisas y ordenadas con las ruedas micrométricas.

La figura 96 representa un aparato más sencillo que el de Coradi, pero que tiene las mismas aplicaciones que éste, ideado por Courbière y construído por Bamberg. Consiste en una regla X dividida a escalas 1 : 1000 y 1 : 2000, una en cada borde, y en una corredera de forma especial Y, con dos nonios correspondientes a las dos escalas; esta corredera lleva en medio una abertura longitudinal por la que puede deslizarse otra pequeña corredera F, cuya posición puede leerse con toda exactitud mediante dos nonios, sobre las escalas que hay en ambos lados de la abertura. Los cuatro orificios circulares A, B, C, D van tapados con láminas de vidrio, en las que hay grabadas sendas cruces; las de B y D tienen sus brazos paralelos a las dos direcciones principales de la corredera Y, mientras que los de las cruces de A y C están algo desviados de esta posición y van provistos de una escala o graduación. Para emplear este aparato se coloca de modo que el centro de la cruz de C coincida con un punto de la cuadrícula, y que el brazo horizontal de la cruz de D, así como el vertical de la de B, caigan sobre los lados del cuadrado de la cuadrícula, que se cortan en C. Por A se puede ver si los lados de la cuadrícula se cortan precisamente en el centro de su cruz, y en caso contrario, se lee la diferencia, para ser tenida en cuenta en el desarrollo. Se empieza por poner el cero del nonio de la corredera sobre el punto 50 de la regla, como se ve en la figura 96, y corriendo aquélla a lo largo de ésta, y la segunda corredera, dentro de la abertura O, arriba o abajo, se pueden tomar las abscisas y ordenadas que se quiera, marcando el punto correspondiente con el punzón N.

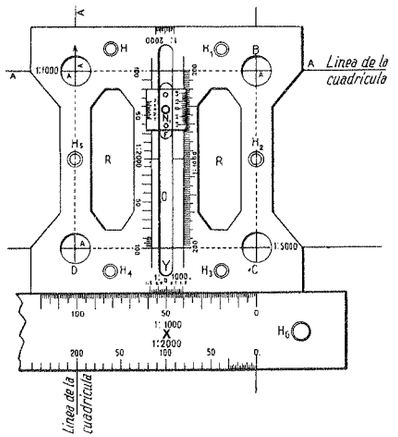


Fig. 96.—Aparato de Courbière, para el trazado por coordenadas

Con el coordinatógrafo de Coradi y la cuadrícula no sólo pueden fijarse los puntos conociendo sus coordenadas, sino, al contrario, hallar las coordenadas de los puntos ya representados en el plano.

Antes de empezar el desarrollo gráfico o numérico de un levantamiento por coordenadas, conviene repetir la medición de unos cuantos lados de la cuadrícula, para ver la corrección que hay que aplicar a los datos de campo al pasarlos al plano. Una de las causas más importantes de errores en los desarrollos consiste en las dilataciones y contracciones que experimentan los papeles de dibujo.

Ortógrafo. Se llama así el instrumento representado en la figura 97, que es parecido al dispositivo de la figura 96 y consiste en una regla de abscisas A y en una corredera B para las ordenadas, divididas del modo que se ve en la figura. En la corredera B hay practicadas dos ventanillas con sus bases biseladas y en medio de éstas llevan marcadas dos señales Z_1 y Z_2, que sirven de índices. Para emplear el ortógrafo, se coloca la regla con la corredera, de modo que las bases de las ventanillas caigan sobre la línea que se toma como eje de abscisas, con el índice Z_1 en el cero de éste, y con el cero de la escala A en coincidencia con el cero del nonio N_1. Se pone el cero del nonio N_1 en el punto correspondiente a una abscisa cualquiera, y se marca con un alfiler o punzón

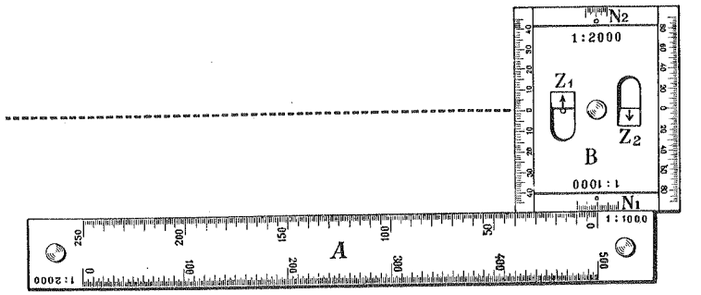


Fig. 97.— Ortógrafo

el punto del eje de abscisas sobre el que cae el índice Z_1; después, moviendo entre sus guías la corredera, se toma, a partir del punto pinchado, la ordenada que corresponda. Para facilitar la buena posición de la regla de abscisas, se emplea además una regla auxiliar de anchura igual a la mitad de la altura de la corredera, que se pone, por su borde biselado, en coincidencia con el eje de abscisas, de modo que su cero caiga sobre el cero de este eje; para colocar en su sitio la regla de abscisas, lleva la regla auxiliar, en su borde inferior, una señal-índice. Esta regla auxiliar sirve también para tomar distancias en los trabajos ordinarios de gabinete.

Los ortógrafos de tamaño grande están provistos de una aguja para pinchar los puntos, como la de la corredera representada en la figura 96, simplificándose así mucho el manejo del aparato.

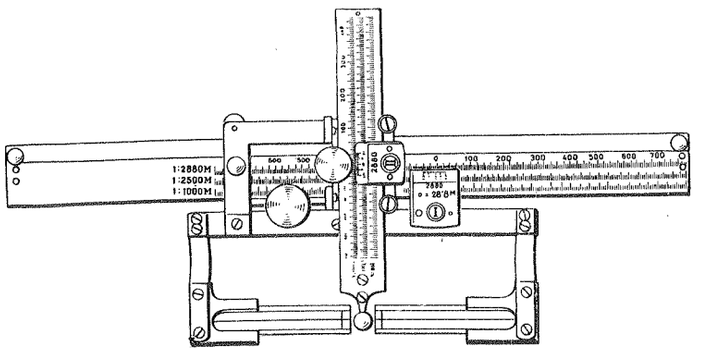


Fig. 98.— Aparato de Cemus

Aparato de Cemus. En el mismo principio está fundado el aparato de Cemus, construído por Neuhöfer, de Viena, y representado en la figura 98. Sobre la regla de abscisas,

que es muy pesada, se mueve suavemente un bastidor, en el cual, también con movimiento suave, se desliza la regla de ordenadas; cada una de estas reglas lleva su nonio, I y II, para hacer con toda precisión la lectura en las escalas correspondientes. En el bastidor van fijadas, mediante dos brazos, un par de láminas de vidrio, con una larga señal grabada, exactamente una frente a otra, es decir, en la misma línea recta, como se ve en la parte inferior de la figura; estas láminas desempeñan aquí el mismo papel que la regla auxiliar en el ortógrafo, sirviendo para poner el aparato sobre el eje de abscisas. La división de la regla de ordenadas está hecha de modo que cuando la aguja marcadora está sobre el eje, o sea sobre la línea de los índices de las placas de vidrio, cae su cero en el cero del nonio correspondiente. Las dos reglas llevan tres divisiones, para tres escalas diferentes; la de abscisas lleva además una tira de celuloide para tapar las escalas que no hayan de utilizarse.

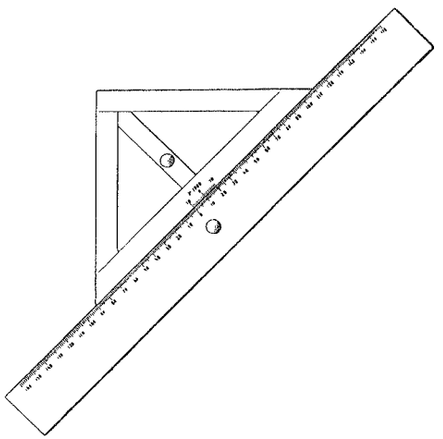


Fig. 99.—Escala corredera de Homeyer

Escala corredera de Homeyer. Consiste este aparato, llamado también longímetro de Nagel, en una regla de 50 cm de longitud, que para la escala 1:1000 no va dividida en milímetros sino en partes cuyo valor es $\sqrt{2} = 1{,}42$ mm, con el cero de la escala en el punto medio de la regla. Como se ve en la figura 99, sobre el borde graduado de esta regla puede correr una escuadra isósceles, apoyada por su hipotenusa, en la cual lleva grabado un nonio. La escuadra se coloca de modo que el cateto de la izquierda (vertical) caiga sobre la línea que se toma como eje de abscisas, sin dejar de apoyarse la hipotenusa sobre el canto graduado de la regla; se corre entonces la escuadra hasta que el cateto superior (horizontal) pase por el cero del eje de abscisas, y por último se corre la regla hasta poner su cero frente al cero del nonio de la escuadra. Se comprende fácilmente que en esta posición pueden tomarse todas las abscisas que se quiera con el nonio, moviendo la escuadra a un lado o al otro, y marcando el cateto de arriba la dirección de las ordenadas, que se dibuja con un lápiz. Para tomar la longitud de las ordenadas, se corre la escuadra con el cateto superior siempre sobre esta línea de lápiz, hasta que el cateto de la izquierda coincida nuevamente con el eje de abscisas, y se pone el cero de la regla en coincidencia con el del nonio de la escuadra; hecho esto se toma este último el valor de la ordenada sobre la regla, y con un trazo de lápiz, a lo largo del cateto de la izquierda, se determina el punto buscado por intersección con la línea horizontal antes trazada. Una ventaja de este procedimiento consiste en que los puntos vienen determinados por la intersección de dos trazos de lápiz, y después de hechas las comprobaciones necesarias se pueden ya pinchar definitivamente.

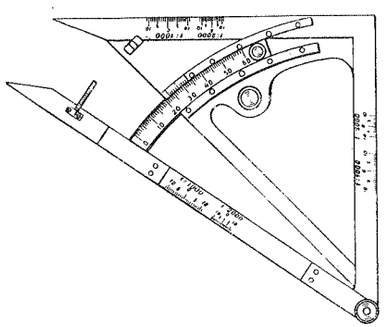


Fig. 100.- Escuadra universal de Waue

Escuadra universal de Waue. Esta escuadra (fig. 100) tiene el mismo fundamento teórico que la anterior, de la cual se diferencia en que uno de sus ángulos agudos es variable, con lo cual puede hacerse la reducción a cualquier escala. Por ejemplo, si la regla está dividida a escala 1:1000, y el plano debe hacerse a escala 1:1500, se resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{\sqrt{2}}{1000}\cos\alpha = \frac{1}{1500}$$

donde α es el valor del ángulo variable que hay que tomar. Este ángulo se determina sobre un arco graduado, quedando inmovilizada la hipotenusa en la posición deseada, con sólo apretar un tornillo de fijación que hay en el arco. Cuando sólo se trata de una ligera variación de escala, se mueve la hipotenusa con un tornillo micrométrico que se ve en la figura. La reducción de distancias del campo al plano se hace, pues, automáticamente con la escuadra universal.

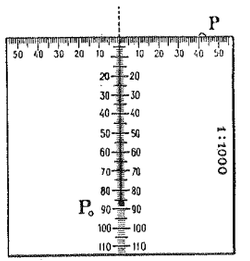


Fig. 101
Reductor de Schleicher

Reductor de Schleicher. La figura 101 representa un sencillo dispositivo, que puede hacerse de varias formas, para tomar abscisas y ordenadas o fijar un punto por coordenadas. Consiste en una placa de celuloide o de cristal de unos 3 mm de espesor, con las divisiones que se ven en la figura; cada placa sirve para una escala solamente. Para emplear este reductor, se coloca sobre el papel de modo que la escala central caiga sobre el eje de abscisas, con el cero de éste, P_0, en la división que marque la longitud de la abscisa de que se trate, y basta pinchar con una aguja el punto P correspondiente a la ordenada, leída sobre la escala que hay en el borde superior de la placa. En la figura 101, el punto P se ha determinado con las coordenadas $x = 87{,}4$ e $y = +43{,}6$.

Coordinatógrafo de Coradi, para relleno. Además del coordinatógrafo de gran tamaño antes descrito, construye Coradi otro basado en el mismo principio, destinado

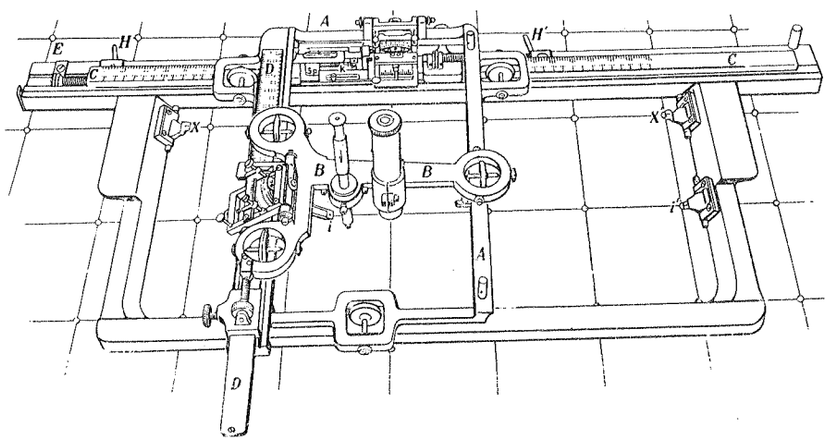


Fig. 102.—Coordinatógrafo de Coradi, para relleno

especialmente al relleno de puntos, o sea, al detalle de los levantamientos. Este coordinatógrafo, considerado generalmente como el mejor y más rápido transportador para coordenadas rectangulares, consiste en un pesado bastidor de hierro de unos 60 cm de largo por 35 cm de ancho (fig. 102), que se coloca sobre el papel de modo que los índices $i\ i'$ caigan sobre un mismo eje de abscisas, con el i' próximo al cero, pero de modo que éste se vea bien, lo cual se consigue con dos tornillos de llamada de poco paso; se mueve el carrillo A

hasta que la señal M coincida con el cero de la regla C, y se pone en cero el tambor de la rueda micrométrica de este carrillo; por último se mueve la regla C y con ella el carrillo A, mediante el tornillo de poco paso E, hasta que la cruz filar del microscopio caiga exactamente sobre el cero del eje de abscisas, para lo cual habrá que correr lo necesario el carrillo B, cuyo tambor micrométrico se pone entonces en cero, y ya se tiene el instrumento en condiciones de medir las coordenadas de cualquier punto. Para ello se corren los carrillos hasta que el punto caiga bajo la cruz filar del microscopio, leyéndose las coordenadas correspondientes sobre las reglas C y D y sus respectivos micrómetros. Para levantar o tomar puntos dados por sus coordenadas, se tapa con un pequeño cursor k el índice M, quedando visible otro índice S_p, que corresponde al punzón que se ve junto al microscopio. Basta tomar con el índice S_p y con los dos tambores micrométricos las coordenadas de cada punto y bajar el punzón para que aquél quede pinchado en el papel.

Además de los índices i, i' hay otros dos x, x', que sirven para poder tomar ordenadas mayores, aunque sólo hacia un lado del eje de las abscisas. A estos índices, o sea a este nuevo eje de abscisas, corresponde en la regla D otra escala, cuyo cero está en uno de sus extremos.

La casa Streit, de Berna, construye un coordinatógrafo fundado en este mismo principio, pero con nonios en vez de ruedas o tambores micrométricos.

§ 27. Coordinatógrafo polar

Actualmente son cada vez más numerosos los levantamientos hechos en coordenadas polares, por lo cual ha habido necesidad de proyectar y construir transportadores adecuados, de los cuales describimos dos a continuación.

Coordinatógrafo polar de Coradi. En la figura 103 se ve este instrumento, que consiste en un soporte anular U formado a su vez de una placa inferior y un anillo giratorio superior, pudiéndose dar pequeños movimientos a todo el soporte con los tornillos S y S_1, que producen traslaciones perpendiculares entre sí. Sobre el soporte U va el limbo giratorio K y además un bastidor W que puede girar alrededor del centro de K, apoyado sobre rodillos-guías. El brazo más corto del bastidor lleva una rueda o tambor micrométrico r para la medida de los ángulos, que engrana con una corona dentada del soporte, no visible en la figura; este brazo lleva también un tornillo de presión A, unido a otro de llamada, para afinar el movimiento. El intervalo entre cada dos divisiones sucesivas del tambor micrométrico corresponde a un ángulo de 5^c (minutos centesimales, igual a 2'42'' sexagesimales), es decir, que se puede apreciar un ángulo hasta de 50^{cc} (16''), calculando, a estima, el valor del intervalo entre el índice y la división del tambor más cercana. Los grados se leen directamente, con un índice apropiado, sobre el círculo graduado K.

Para tomar o medir distancias, lleva el bastidor W un carrillo D, con dos ruedas-guías que pasan por una ranura o canal recto practicado en el brazo más largo del bastidor; la tercera rueda de este carrillo, que corre sobre un brazo paralelo a aquél, no tiene más misión que facilitar el movimiento de traslación del mismo. El brazo del carrillo que lleva esta tercera rueda, tiene hacia el medio un punzón P y un microscopio M, que en vez de cruz filar lleva un pequeño circulito, para fijar bien los puntos. También el carrillo D lleva un tornillo de presión con otro de coincidencia o corrección; la lectura de las distancias, es decir, del radio vector de cada punto, se hace en un tambor micrométrico r_1, con el cual puede apreciarse hasta 0,01 mm. La regla L sobre la cual corre este tambor micrométrico está dividida en milímetros; para leer los milímetros enteros hay dos índices, uno de los cuales da la lectura cero, según que estén respectivamente en el centro del círculo el punzón o el microscopio. Para evitar un error de lectura, hay un cursor d que tapa el índice que no debe usarse.

Para manejar este coordinatógrafo se procede del modo siguiente: se empieza por llevar el microscopio al centro del círculo, poniendo el índice correspondiente en el cero de la regla, y se corre todo el instrumento sobre el papel, valiéndose de los tornillos S y S_1 hasta que el circulito del microscopio caiga exactamente sobre el punto-estación; se corre

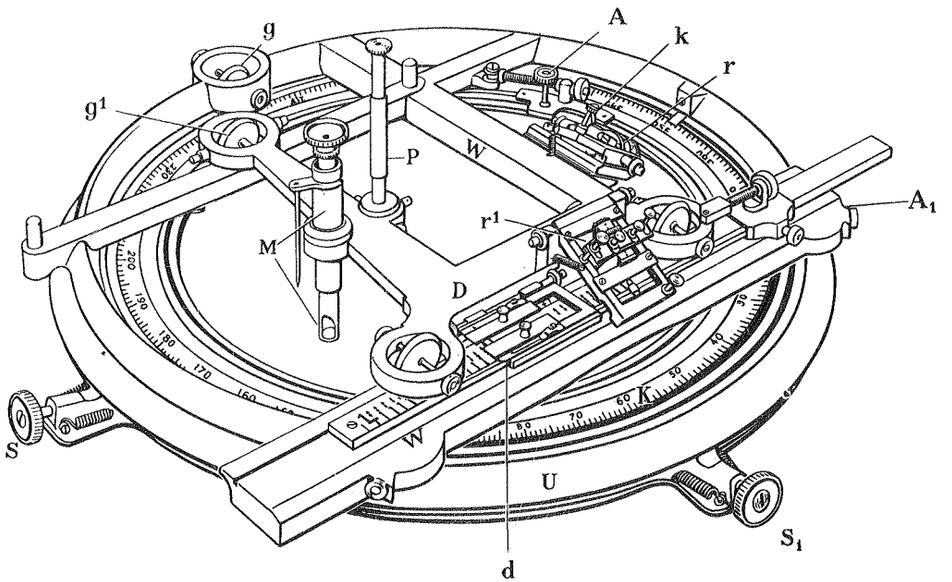


Fig. 103. – Coordinatógrafo polar de Coradi

entonces el carrillo D hasta el extremo y se gira el bastidor W, de modo que el microscopio caiga sobre la línea que en el papel representa la dirección cero o de origen, sirviendo para ello el dispositivo A; finalmente, se hace girar el limbo K hasta que su índice quede sobre el cero, con lo cual el tambor micrométrico debe marcar también cero; en el caso de que así no suceda, se hace la oportuna corrección con el tornillo de ajuste k.

Una vez así centrado y orientado el instrumento, pueden hallarse las coordenadas polares, visando cada punto con el microscopio, y si se quieren tomar puntos partiendo de sus coordenadas, se corre el cursor d hasta dejar a la vista el índice correspondiente al punzón (que es el caso representado en la figura), y basta ir tomando distancias y rumbos o ángulos para ir marcando los diferentes puntos del levantamiento.

Según los trabajos de Stärkle sobre la precisión de este coordinatógrafo, el error medio que puede cometerse en las mediciones de ángulos sobre el papel es de $\pm 0{,}47^c$ (15''). De los ensayos y estudios hechos sobre la precisión que puede conseguirse con este coordinatógrafo en el levantamiento de puntos, resulta que el máximo error que se puede cometer en las distancias es de 0,05 mm, con una desviación lateral de 0,03 mm.

Coordinatógrafo polar de Ott. La figura 104 representa el coordinatógrafo polar construído por la casa Ott, fundado en el principio del tambor micrométrico. Consiste en dos brazos que forman entre sí un ángulo invariable, uno de los cuales lleva dos escalas y

el otro el tambor micrométrico, dispuesto del mismo modo que el de los planímetros, con el círculo dividido en 360° y el nonio dividido de tal manera que pueden leerse 2′. El eje de giro del instrumento consiste en un punzón, que se mantiene clavado en el tablero mediante un peso colocado encima.

Por el brazo graduado se desliza un cursor con nonio, cuyo movimiento lento se consigue con una pequeña rueda dentada; este cursor lleva unido un soporte en el que hay, directamente sobre el papel de dibujo, un circulito pequeño, y arriba una lente; la distancia del centro del circulito al borde del brazo graduado es igual a la del centro de rotación

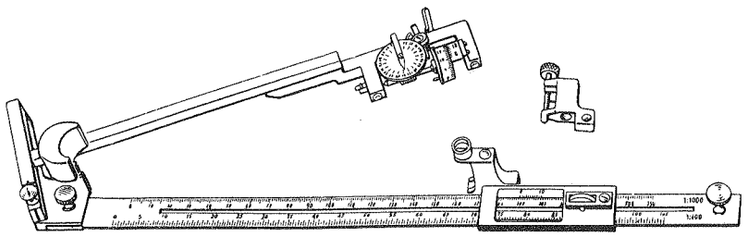


Fig. 104.— Coordinatógrafo polar de Ott

a este mismo borde. De este modo, para hallar la distancia de un punto al centro, basta hacer coincidir con el mismo el circulito y leer con el nonio sobre la escala del brazo graduado, dando por supuesto que para la lectura cero coincide dicho circulito con el centro de rotación. Para comprobar la posición correcta del punto cero, se levanta un poco el brazo del micrómetro con el peso y la aguja que hace de eje de giro, sujetando firmemente el brazo graduado, y se corre el cursor de este último hasta que el circulito del soporte coincida con el centro antes marcado por la aguja, y en esta posición debe estar el cero del nonio sobre el cero de la escala.

Para reducir o transportar datos de campo al plano, se sustituye el soporte del microscopio y del circulito por otro parecido, que se ve suelto en la figura, que lleva un punzón.

Según los trabajos de Werkmeister, pueden medirse los ángulos con este instrumento con un error medio de 1′ a 2′.

§ 28. Pantógrafo

Para ampliar o reducir dibujos o planos, es decir, para reproducirlos a escala distinta, se emplea el pantógrafo, inventado por el P. jesuíta Scheiner, que según la descripción que hace su autor en su «Pantographia, seu ars delineandi res quaslibet» (1631), consiste en cuatro varillas, como se ve en la figura 105, articuladas formando un paralelogramo con dos lados alargados. El punto o polo F, que es el centro de rotación del aparato, va fijo a la mesa o tablero de dibujo, mientras que en las puntas E y G van dispuestos un punzón y un lápiz respectivamente, estando ambos puntos en línea recta con el polo F.

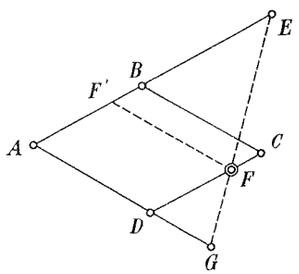


Fig. 105.— Pantógrafo de Scheiner

Al moverse el punzón, se mueve también el lápiz, viéndose fácilmente que los tres puntos E, F y G permanecen siempre en línea recta, pues si trazamos, en la figura 105, por F una paralela FF' a AG, se forman dos triángulos semejantes AGE y $F'FE$, que

siguen siendo semejantes para cualquier movimiento de E, ya que los lados AG y AE y los $F'E$ y $F'F$ son constantes, y los ángulos en A y F' son siempre iguales, de donde se deduce que el ángulo E tiene que ser igual en ambos triángulos, es decir, que los tres puntos E, F y G han de estar sobre la misma recta.

También se deduce de la semejanza de dichos triángulos, que $EF : FG = EF' : F'A$, y como esta segunda relación es constante, también lo será la primera para todas las posiciones del punto E.

En estos dos resultados se funda el pantógrafo, pues nos dicen que los puntos E y G describen figuras semejantes, cuya relación de semejanza es igual a la que hay entre las longitudes EF' y $F'A$.

En la figura 106 se ve un pantógrafo fundado en esta teoría y construído en el siglo pasado por Ertel, de Munich. Las dos varillas principales AB y AD se apoyan por sus extremos en el papel mediante unas ruedecillas, estando el eje polar F unido a un bloque

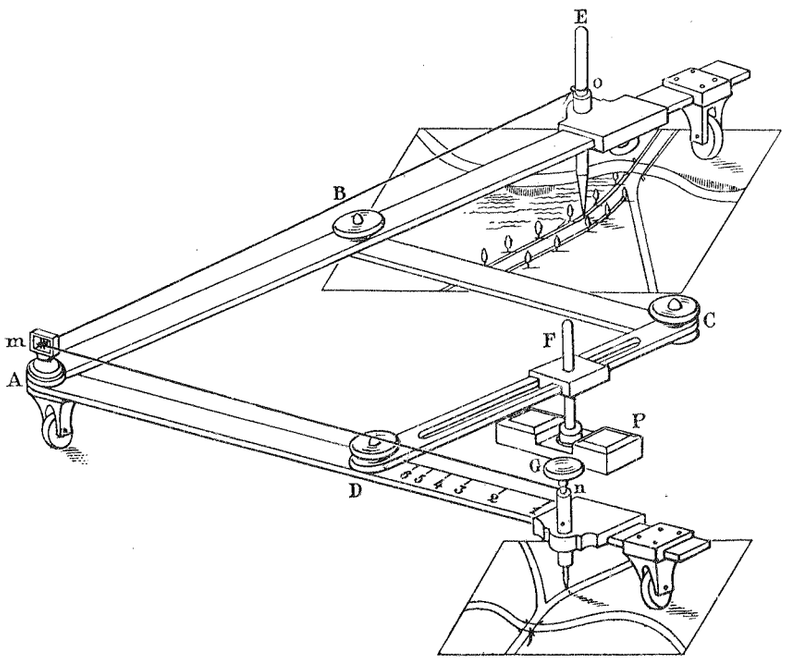


Fig. 106.- Pantógrafo de Scheiner construído por Ertel

de plomo P muy pesado; el lápiz G y el polo F pueden moverse a lo largo de sus respectivos brazos, sujetándose firmemente en el punto que se quiera con tornillos de presión. Por medio del hilo $o\ m\ n$ que se ve en la figura se puede levantar un poco el lápiz G, con lo cual, al ir moviendo el punzón E, se puede, en cualquier momento, empezar a marcar con el lápiz o interrumpir el trazado.

Si el dibujo o plano original está hecho a escala $\frac{1}{m_1}$ y se quiere reproducir a escala $\frac{1}{m_2}$, la posición del lápiz G y la del polo F deben cumplir la condición siguiente:

$$EF : FG = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = AD : DG,$$

de donde

$$DG = \frac{m_1}{m_2} AD.$$

Y además esta otra:

$$EG : FG = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) : \frac{1}{m_2} = EA : FD,$$

de donde

$$FD = \frac{m_1}{m_1 + m_2} EA. \qquad (2)$$

Estas fórmulas (1) y (2) dan FD y DG, que pueden medirse sobre el aparato. Para los distintos valores de la relación $\frac{m_1}{m_2}$ se han marcado señales en las dos varillas, en las cuales pueden ponerse las correderas o cursores de F y G. Muchos modelos llevan graduadas ambas varillas en milímetros, a partir del punto D.

Otra forma de pantógrafo es la representada en esquema teórico en las figuras 107 y 108. También en éste se tienen cuatro varillas articuladas formando paralelogramo, pero el polo F, el punzón E y el lápiz G están dispuestos de modo distinto que en los pantógrafos antiguos.

En los dos casos que representan estas figuras, el punzón E va en el extremo libre de una de las varillas; en la figura 107, el lápiz G va donde en la figura 108 está el polo, es decir, que G en el primer caso y F en el segundo están en el vértice del ángulo opuesto a AE, pero estando siempre los tres puntos E, F y G en línea recta.

Lo mismo que en la figura 105, se ve que para todas las posiciones del punzón E permanecen en línea recta los tres puntos F, G, E, y que la relación $FE : FG$ es constante,

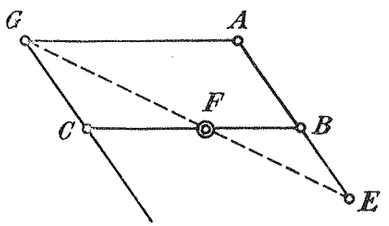


Fig. 107
Pantógrafo de Mailänder, con polo variable

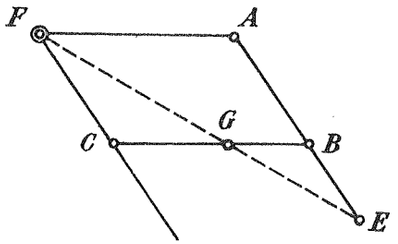


Fig. 108
Pantógrafo de Mailänder, con polo fijo

es decir, que el punzón y el lápiz describen figuras semejantes, cuya relación de semejanza es $FE : FG$. Para otro valor cualquiera de esta relación, se varían convenientemente las articulaciones B y C y el punto F (fig. 107) o el G (fig. 108).

Para determinar las posiciones de estos puntos, con objeto de hacer una reducción o ampliación a determinada escala, basta tener en cuenta las siguientes igualdades (fig. 107):

$$CF = CB \frac{FG}{FG + FE} \qquad AB = AE \frac{FG}{FG + FE}.$$

Si $\frac{1}{m_1}$ y $\frac{1}{m_2}$ son las escalas del original y su reproducción (ampliada o reducida), se tiene:

$$\frac{FG}{FG + FE} = \frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

y sustituyendo en las igualdades anteriores:

$$CF = CB \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad AB = AE \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Para la segunda forma de este pantógrafo (fig. 108), se deducen igualmente las siguientes fórmulas:

$$CG = CB \frac{m_1}{m_2} \qquad AB = AE \frac{m_1}{m_2}. \qquad (4)$$

Pantógrafo de suspensión Los pantógrafos apoyados sobre ruedas, como el representado en la figura 106, no pueden dar mucha precisión, por la clase de soporte y apoyos y por otros defectos de construcción, por lo cual no pueden emplearse para reproducciones que requieran gran exactitud.

En el año 1864 construyó el mecánico Goldschmid, de Zurich, un nuevo pantógrafo, en el que las varillas estaban suspendidas, por medio de alambres finos, de un punto situado a plomo sobre el polo, es decir, en la vertical de este último. Aunque al principio no tuvo éxito este ensayo, y el mismo inventor renunció a repetirlo, el principio volvió a aplicarse en modelos construídos por Ott y Coradi, llegándose al pantógrafo de suspensión, hoy en uso, que es un instrumento de alta precisión.

En la figura 109 se ve un pantógrafo construído por la casa Coradi, de Zurich, en el cual la disposición de los puntos en el paralelogramo corresponde a la representada esquemáticamente en la figura 108; las varillas son metálicas y tubulares, de sección rectangular, y están articuladas entre puntas, con lo cual se consigue un movimiento suave y ligero. Las

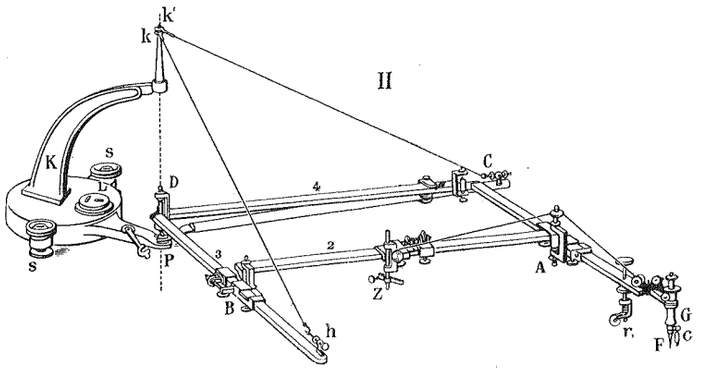


Fig. 109.— Pantógrafo de Coradi, con polo fijo

articulaciones de A y B están montadas sobre correderas que pueden deslizarse sobre las respectivas varillas y ponerse en los puntos convenientes por medio de tornillos de presión y coincidencia. También el lápiz está montado en una corredera de esta clase. Las tres varillas sobre que van estas correderas están divididas en milímetros, numerados de tal modo que las lecturas de los correspondientes nonios dan las distancias respectivas de los puntos A, B y Z a las articulaciones C, D y B.

El soporte del pantógrafo está constituído por una pieza de hierro muy pesada K, que en el extremo que va sobre la mesa lleva una pequeña cavidad P y en el extremo superior una rosca cilíndrica; por medio de un nivel L se consigue que el punto medio de la cavidad P y el eje de la rosca superior estén sobre la misma vertical. En la cavidad P entra el extremo inferior, de forma esférica, de la articulación D, y por medio de dos alambres

de acero kh y $k'c$ se suspenden los extremos de las varillas articuladas en D, del extremo superior del gorrón que entra a tornillo en la rosca vertical del soporte K. Para evitar que el esfuerzo de la esfera sobre P sea excesivo, no se suspende directamente la varilla DC, sino por medio de una varilla de apoyo, que por un extremo termina en forma de horquilla, descansando sobre la cavidad P del polo, y por el otro va suspendido del gorrón directamente. Para descargar las articulaciones B y C, hay una rueda loca de soporte r, cerca del punzón F.

Lo mismo que el pantógrafo de Ertel (fig. 106) lleva también el de Coradi un hilo de mando, que sirve para levantar o bajar el lápiz desde el punzón; este hilo va de tal modo, que al bajar el manguito del punzón para seguir una línea del dibujo, baja también a la vez el lápiz que reproduce aquélla.

La posición de los tres nonios ha de ser la que den las fórmulas (4). Para simplificar las operaciones, se construyen iguales las varillas CF y AB, de modo que si $\frac{1}{m_1}$ es la escala del plano o dibujo original y $\frac{1}{m_2}$ la de su reproducción, se tiene, llamando l a la longitud de las dos varillas, que los tres nonios habrán de ponerse según (4) en la división igual al número resultante de multiplicar l por la relación $\frac{m_1}{m_2}$, o sea, en el punto vl, siendo v la reducción o ampliación que se quiera conseguir.

El pantógrafo representado en la figura 109 no sirve para valores de v próximos a la unidad, pues en estos casos tienen que ir tan cerca el punzón y el lápiz, que se estorban al marchar sobre los dos papeles, el original y el de la reproducción. Para estos valores

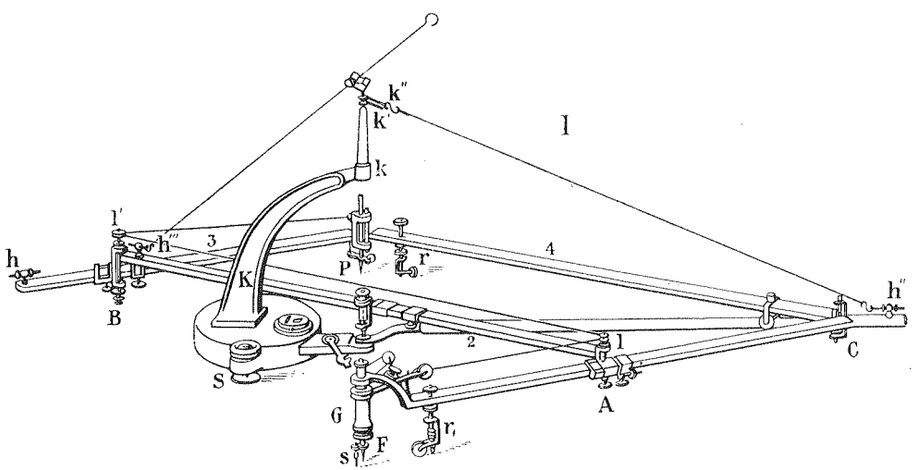


Fig. 110.—Pantógrafo de Coradi, con polo móvil

de v sirve el pantógrafo representado en la figura 110, que corresponde al esquema teórico de la figura 107, pero en el cual pueden cambiarse de sitio entre sí el polo y el lápiz, quedando en las mismas condiciones de uso que el pantógrafo que acabamos de describir. El paralelogramo queda suspendido por dos alambres, uno que va a la articulación B, enganchado en h''', y el otro a la varilla auxiliar, enganchado en h''. La varilla PC lleva en su extremo C un rodillo con el que se mueve sobre la varilla auxiliar; en el otro

extremo, cerca del lápiz, lleva dicha varilla PC una rueda loca r, igual a la r_1 que va junto al punzón G.

La posición de los tres nonios se determina con arreglo a la fórmula (3), es decir, que si m_1 y m_2 representan los mismos valores antes considerados, y l es la longitud de ambas varillas AB y FC, hay que poner los tres nonios en la división $\frac{m_1}{m_1 + m_2}\, l$.

Para el caso en que, con el pantógrafo de la figura 109, caiga muy cerca el lápiz del polo, hay también un dispositivo especial, y para que el soporte de hierro no tenga que estar sobre el papel del dibujo, se construye un soporte de suspensión libre, que se sujeta en el borde de la mesa o tablero por medio de un tornillo de presión.

CAPÍTULO III

Reglas de cálculo y máquinas de calcular

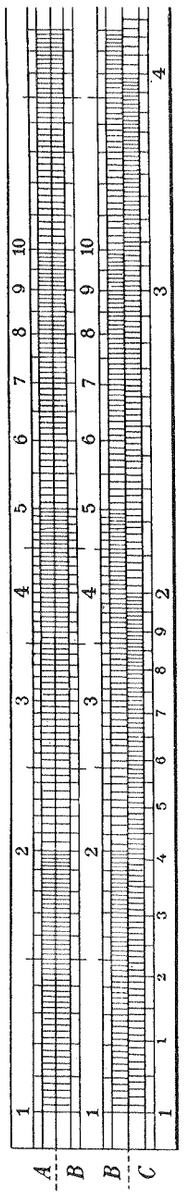


Fig. 111. – Regla de cálculo sin cursor, en tamaño natural

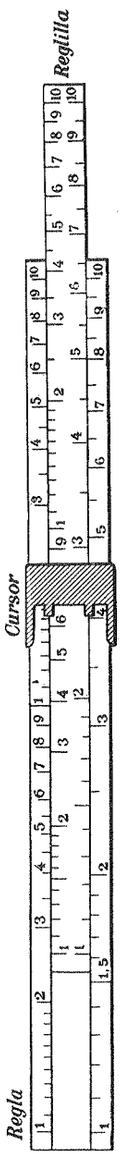


Fig. 112. – Regla de cálculo con sólo las divisiones principales (1/2 del tamaño natural)

§ 29. Reglas de cálculo logarítmicas

Se llaman así unas reglas especialmente construídas, que sirven para hacer rápidamente pequeñas multiplicaciones, divisiones, etc., con una aproximación de un $^1/_3$ %. Para tales operaciones constituye la regla de cálculo un auxiliar de valor extraordinario, pero es preciso tener bastante práctica en su manejo para que éste resulte en cierto modo mecánico, sin tener que pensar en el *por qué* de cada movimiento.

Las reglas de cálculo constan de tres partes principales, la regla propiamente dicha, la reglilla y el cursor.

La regla y la reglilla miden, en los modelos más corrientes, 25 cm de longitud, y son de madera recubierta de celuloide blanco. Tanto la regla propiamente dicha como la reglilla llevan divisiones, en su anverso, para la multiplicación, división y obtención de cuadrados; ordinariamente va dividida también la reglilla por el reverso, para el cálculo de senos, cosenos, tangentes, etc., de uso menos frecuente que las divisiones del anverso.

El cursor sirve para fijar exactamente la división de la escala que se ha de leer, ya sea por índices marcados en sus bordes biselados, o por una línea grabada en una lámina de vidrio.

En la figura 111 se ve la división más corriente de las reglas de cálculo, en tamaño natural, y en la figura 112 una regla con su reglilla un poco sacada y con las principales divisiones, a escala 1/2.

La división y el empleo de las reglas de cálculo están fundados en las propiedades de los logaritmos, especialmente en la referente a la multiplicación, que como se sabe es la que sigue:

$$\log (a\,b) = \log a + \log b. \qquad (1)$$

Para explicarnos el funcionamiento de las reglas de cálculo, supongamos que se quiera construir una para multiplicar: se empieza por tomar de una tabla cualquiera de logaritmos los siguientes valores:

$\log 1 = 0{,}000$, $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 4 = 0{,}6021, \ldots$ $\log 1{,}1 = 0{,}0414$.

En una recta (fig. 113) se toman partes iguales que por debajo se marcan con 0,1 : 0,2, etc., y por encima de esta recta se toman los números correspondientes a los de

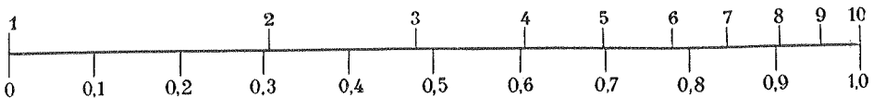


Fig. 113. – División logarítmica, a la escala de las figuras 111 y 112

abajo, es decir, que en el punto 0,301 se hace una señal y arriba se escribe 2, en el 0,477 se hace otra y se pone 3, y así sucesivamente, o, lo que es igual, se escriben arriba los números cuyos logaritmos están escritos debajo.

Ya así se tiene esta escala dispuesta para hacer multiplicaciones, valiéndonos de la ayuda de un compás. Por ejemplo, si se quiere multiplicar 2×3, se toma con el compás el intervalo 1-2, sobre la escala de arriba, y después el 1-3, viéndose que al poner una distancia a continuación de otra sobre dicha escala, se llega precisamente al punto 6, conforme a la ley (1) que dice:

$$\log 2 + \log 3 = \log 6. \qquad (2)$$

En vez de utilizar una sola escala y un compás, se puede prescindir de este último y emplear dos escalas iguales, poniendo una frente a otra con las divisiones en la posición conveniente, llegándose así a la regla de cálculo. La multiplicación con dos reglas se hace

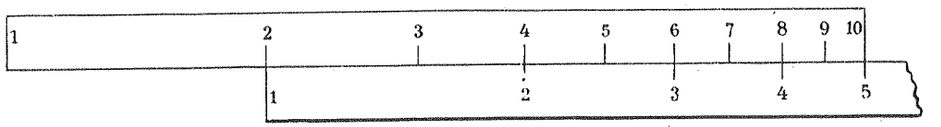


Fig. 114. – Suma de dos logaritmos, por yuxtaposición de dos reglas

del modo siguiente (fig. 114): sean 2 y 3 los factores; se pone el 1 de la escala inferior frente al 2 de la superior, y la división de ésta que cae frente al 3 de la inferior es el producto 6 de ambos factores. Para la misma posición de la reglilla pueden hallarse directamente los productos $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 5 = 10$, etc.

De este modo se procede con la regla de madera (fig. 111), en la cual se mueve la reglilla a derecha e izquierda por en medio de la regla propiamente dicha, con sus divisiones BB frente a las AC de la regla.

Cuando se quiere hallar un producto mayor de 10, se opera con las divisiones de arriba, en la reglilla y en la regla (fig. 111), para lo cual todas las reglas repiten las divisiones a partir del 10 hacia la derecha.

Si se trata de multiplicar por un número decimal, por ejemplo $0{,}2 \times 3$, se procede como si se fuera a multiplicar 2×3, y se escribe el producto 0,6, en vez de 6. La regla de cálculo no da la colocación o posición de la coma: ésta se pone haciendo un ligero cálculo mental para cada caso.

La división se hace teniendo en cuenta que es la operación contraria de la multiplicación. El modo más sencillo de recordar cómo se hace la división con la regla de cálculo,

consiste en considerar la línea superior de separación entre la regla y la reglilla como raya de quebrado entre sus respectivas indicaciones, es decir, que la notación $\frac{A}{B}$ que se ve en la parte de la izquierda de la regla (fig. 111) significa A partido por B, luego para dividir A por B se pone, empleando el cursor, A sobre B y se lee el cociente a la izquierda, en la división de la escala que hay sobre el 1 de la reglilla. En el caso representado en la figura 112, el cociente de la división que se haya hecho es 2,6.

El producto $\frac{A}{B}\,B' = A'$ se hace también del sencillo modo siguiente: se coloca A sobre B, se busca B' en la reglilla B, y se lee el resultado A' en la regla A, sobre la división B'.

La escala C (fig. 112), que es doble que la A y la B, sirve, juntamente con la B, para hallar cuadrados y raíces cuadradas, siendo ésta la aplicación menos valiosa de la regla de cálculo, por resultar más cómodo y exacto el empleo de una tabla de cuadrados; en cambio resulta muy práctico el uso de la regla de cálculo para expresiones como $\frac{B^2}{C}$, $\frac{B}{\sqrt{C}}$, etc., así como para operaciones con senos y tangentes, para lo cual se vuelve la reglilla, que por el reverso lleva las divisiones correspondientes a estos elementos. No insistimos sobre estas operaciones ni sobre todos los usos particulares de la regla de cálculo, porque sólo la práctica continuada da la seguridad y rapidez necesaria en todas las operaciones, siendo suficiente lo dicho para comprender el fundamento y el manejo de las reglas de cálculo en general.

En cuanto a la precisión que puede obtenerse con las reglas de cálculo, es fácil determinarla mediante ensayos y ejemplos, como se ve en los siguientes, en que llamamos a al valor verdadero o teórico de los productos, que se escriben en las mismas líneas que los productos r obtenidos con la regla:

Productos con la regla r	Productos verdaderos a	Error ε	$\left(\frac{100\,\varepsilon}{a}\right)$	$\left(\frac{100\,\varepsilon}{a}\right)^2$
$2{,}34 \times 7{,}69 = 18{,}0$	17,99	+ 0,01	0,06 %	0,0036
$9{,}61 \times 1{,}42 = 13{,}68$	13,65	+ 0,03	0,22	0,0484
$7{,}22 \times 6{,}13 = 44{,}4$	44,26	+ 0,14	0,32	0,1024
$3{,}45 \times 7{,}78 = 26{,}8$	26,84	− 0,04	0,15	0,0225
			Suma	0,1769

$$\text{error medio} = \sqrt{\frac{0.1769}{4}} = 0{,}21\ \%.$$

Este resultado corresponde a la siguiente ley logarítmica (diferencial del logaritmo):

$$\mathrm{d}\log x = 0{,}4343\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = 0{,}4343 \times 0{,}0021. \qquad (3)$$

Podemos ahora, inversamente, deducir qué precisión corresponde a una regla de 125 mm de longitud con un error medio del 0,21 %. Puesto que log 10 representa una longitud de 125 mm, y el valor real de log 10 es la unidad, hay que multiplicar d log x por 125 mm, es decir, calcular el producto $0{,}21\ \% \times 125\ \text{mm} \times 0{,}4343 = 0{,}114$ mm, para tener el error lineal de la regla. Este error 0,114 mm comprende el error de tres coincidencias, como son las lecturas necesarias para hallar un producto; el error medio de una sola coincidencia o lectura será $0{,}114 : \sqrt{3} = 0{,}066$ mm.

De los diferentes estudios y experimentos hechos sobre la precisión de las reglas de cálculo se deduce que ésta puede tomarse igual al 0,1 % del resultado operando con gran cuidado, e igual al 0,2 % cuando se opera con mayor rapidez. En general, se puede considerar como de un 0,3 %.

Para obtener mayor precisión en las lecturas puede emplearse una lente unida al cursor, como se ve en la figura 115, que representa una regla de cálculo de A. W. Faber con el cursor provisto de lente desmontable; cuando se quiere operar con rapidez se quita la lente, cuyo empleo lleva consigo un retraso natural en el manejo de la regla.

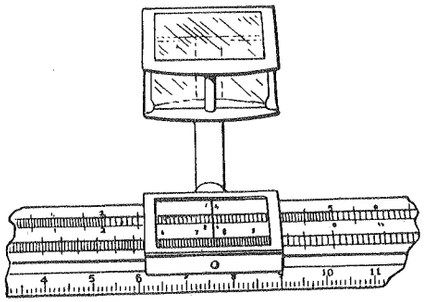


Fig. 115. – Cursor con lente

La precisión de una regla de 50 cm de longitud es del 0,06 %, empleando las escalas de arriba.

Vamos ahora a describir otros dispositivos, impropiamente llamados también reglas de cálculo, provistos de escalas logarítmicas, con los cuales se obtiene una mayor precisión pero cuyo manejo es menos fácil y sencillo que el de las reglas propiamente dichas.

Círculos de cálculo. Los círculos de cálculo consisten esencialmente en dos escalas circulares iguales entre sí, una frente a otra; en cada escala el extremo final coincide con el principio. El círculo de Landsberg tiene 15 cm de diámetro, es decir, que la longitud de cada escala será $15\,\pi = 47$ cm, casi cuatro veces la de una regla ordinaria de 12,5 cm. La precisión que se obtiene con este círculo es también mucho mayor que la correspondiente a las reglas lineales, pero el manejo es menos rápido y cómodo que el de éstas. El error medio de este círculo de cálculo es, según nuestros estudios, de un 0,12 %.

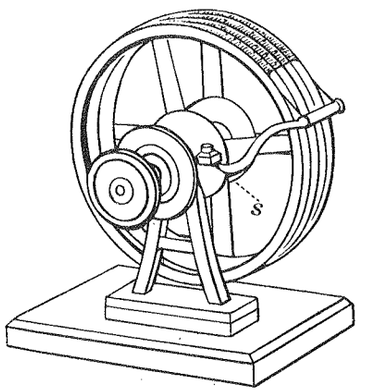


Fig. 116. – Rueda de cálculo de Beyerlen, de 12 cm de diámetro

El círculo de cálculo de Röther, de 20 cm de diámetro, tiene una sola escala, un índice fijo y otro giratorio; a causa de esta construcción hay que girar dos veces la escala para cada operación. Este círculo de cálculo tiene también una precisión de 0,1 %.

A esta clase de reglas de cálculo pertenecen los relojes de cálculo, que tienen la forma de un reloj de bolsillo, siendo muy prácticos, cómodos y bastante precisos.

Ruedas de cálculo. La figura 116 representa el tambor o rueda de cálculo de Beyerlen, de 12 cm de diámetro, que consiste en esencia en dos escalas logarítmicas ordinarias, una frente a otra, montadas sobre dos cilindros giratorios inmediatos. La rueda de cálculo de Tesdorpf tiene varios defectos (poca claridad en las divisiones, índice para la lectura poco preciso, etc.) que hacen su empleo muy reducido.

Regla de cálculo con escalas subdivididas. La figura 117 representa la regla del Director de Nivelación y Catastro de Francia, Lallemand, para el cálculo de poligonales;

esta regla presenta la particularidad de tener las escalas divididas en dos partes, una, la de arriba, del 10 al 31,62 y la otra, abajo, del 31,62 al 100. El aspecto de la regla es parecido a la corriente de 50 cm, y su escala llega a los 100 cm. La figura está hecha a escala $^1/_3$. La reglilla tiene también dos escalas análogas, pero dispuestas en orden inverso, como se ve en dicha figura. Esta disposición responde al modo de operar para multiplicar y dividir con esta regla. Para hacer una multiplicación se procede del modo siguiente (fig. 117):

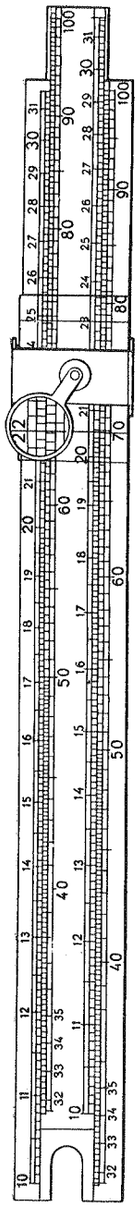


Fig. 117. - Regla de cálculo de Lallemand, en dos secciones ($^1/_3$ del tamaño natural)

10,82 (en la escala superior, en coincidencia con el extremo de la reglilla) $\times$ 50 (escala superior de la reglilla) = 541 (en la escala inferior de la regla),

si el multiplicador no llega a 31,62, se procede así:

10,82 (en la escala superior) $\times$ 20,5 (en la escala inferior de la reglilla) = 221,8 (en la escala superior de la regla).

Para dividir se procede al contrario.

El cursor lleva una lente para hacer las lecturas con mayor precisión.

En el reverso de la reglilla va una escala logarítmica de senos, correspondiente a grados centesimales.

El error propio de la regla de Lallemand es aproximadamente $^1/_8$ del de la regla ordinaria de 25 cm, y es tan pequeño que para los cálculos de poligonales del Catastro francés ha sustituído su empleo al de las tablas de logaritmos de cuatro cifras decimales.

La regla de Lallemand es suministrada por la casa Tavernier-Gravet, de París.

Fundada en el mismo principio, construyó el Dr. Frank, de Sttutgart, una regla más pequeña que la anterior. La escala tiene una longitud total de 50 cm, que por su descomposición en dos partes, queda reducida al tamaño corriente de una regla ordinaria de 25 cm. La precisión de esta regla es, según su autor, del 0,05 %, confirmada por nosotros en repetidas pruebas y ensayos. El reverso de la reglilla lleva una escala para logaritmos de cuatro cifras, pero no las escalas usuales para funciones trigonométricas. Esta regla de cálculo es construída por Dennert y Pape, de Altona.

También la regla de cálculo de Seifert tiene una escala fraccionada, de 62,5 cm de longitud total; esta regla tiene además una escala para el cálculo de la hipotenusa en función de los catetos.

Tablillas de cálculo y reglas tubulares. La subdivisión de las escalas puede aumentarse bastante, aunque se pierda la forma tan cómoda de las reglas ordinarias de cálculo. En primer lugar citaremos la tablilla de cálculo de Scherer, en la cual se tiene una escala de 1,50 m dividida en diez secciones; para poder hacer las lecturas en todas las posiciones de la reglilla, va a continuación de cada trozo el siguiente, de modo que la escala total se encuentra repetida cuatro veces. La reglilla consiste en una hoja de mica que lleva marcada la escala. La precisión es de un 0,02 %.

Análoga disposición presenta la tabla de cálculo de Billeter.

Una aplicación más elevada del mismo principio se tiene en el aparato de escalas

logarítmicas debido a Hannyngton y construído por Aston y Mann corresponde a reglas de cálculo de hasta 10 m de longitud. La fig de estas tablillas de cálculo, a escala reducida de $^1/_6$, siendo el ta longitud por 20 cm de anchura. En la parte superior se ve la tab

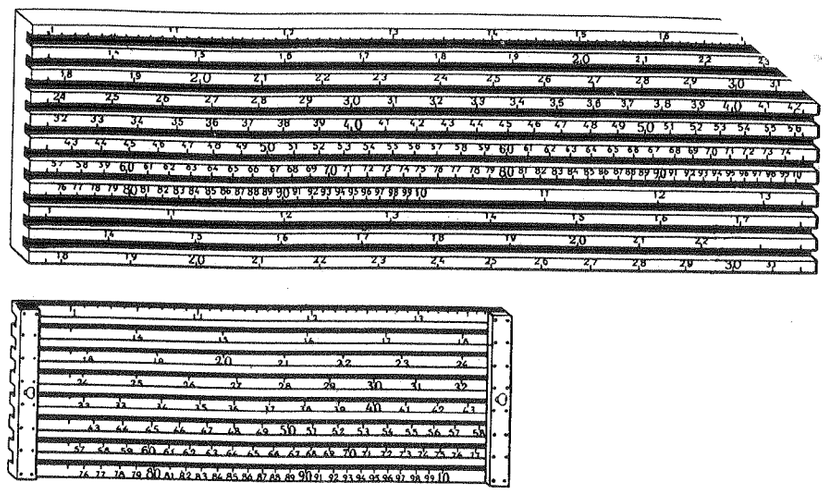


Fig. 118. — Tablilla de cálculo de Hannyngton (68 cm de largo por 20 cm de ancho)

en forma de enrejado o parrilla, con once escalas de 61 cm de longitud cada una: en la parte inferior del dibujo está representado el cursor, compuesto de ocho reglillas, que puede ponerse en distintas posiciones en los correspondientes huecos de la parte superior, para hacer las diversas operaciones de cálculo con las escalas de esta parte. El aparato puede considerarse como una regla de cálculo de 3 m de longitud dividida en trozos dispuestos paralelamente entre sí. De todos los grandes dispositivos logarítmicos de cálculo empleados en la actualidad, creemos que estos de Hannyngton son los más sencillos y cómodos de manejar.

En el mismo principio de la subdivisión de escalas está fundada la regla de cálculo tubular o cilíndrica de Thacher representada en la figura 119 a escala $^1/_8$, siendo, en tamaño natural, de 50 cm de longitud; esta regla tubular equivale a una regla de cálculo

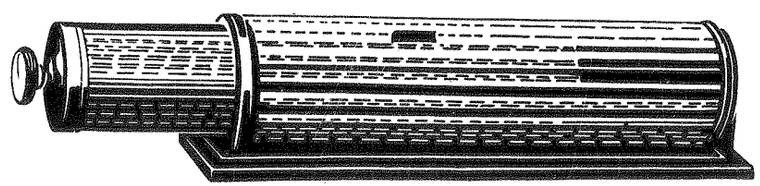


Fig. 119. - Regla tubular de cálculo, de Thacher ($^1/_8$ del tamaño natural)

ordinaria de 18 m de largo, dividida en 40 trozos, que están sobre el cilindro de fuera, el cual contiene las perforaciones necesarias para ver las 40 escalas correspondientes del cilindro interior, que se mueve a frotamiento suave dentro del primero. La precisión que se obtiene con esta regla cilíndrica de cálculo es aproximadamente la misma que dan las

tablas de logaritmos de cinco cifras, pero la búsqueda y lectura de sus muchas divisiones resulta laboriosa y cansada cuando hay que hacer muchas operaciones seguidas.

La fábrica de máquinas y reglas de cálculo Dämen-Schmid, de Oerlikon, ha construído una nueva regla de cálculo cilíndrica, con la cual, según Hammer, se obtiene una precisión del 0,003 al 0,004 por ciento.

§ 30. Máquina de calcular de Burkhardt

La figura 120 representa una máquina de calcular, que en realidad fué ideada por Leibniz, y construída, en la forma que actualmente tiene, por Thomas, de Kolmar. Desde 1879 fabrica esta máquina en Alemania la casa Arturo Burkhardt, de Glashütte. En esta figura se ve la máquina exteriormente, con la tapa de la caja levantada, a escala $^1/_5$ del tamaño natural.

La teoría y funcionamiento de esta máquina se comprende fácilmente a la vista de la figura 121, a escala $^1/_3$ del tamaño natural; la parte principal la constituyen los rodillos W, de los cuales se ven 6 en la figura: en planta WW, y en alzado $W'W'$. Cada rodillo tiene los $\frac{16}{25}$ de su desarrollo liso y cilíndrico, y en los restantes $\frac{9}{25}$ lleva 9 dientes de distinta longitud. Si se supone la longitud del rodillo dividida en 10 partes, el diente más largo tiene nueve de estas partes, el siguiente ocho, y así sucesivamente hasta el más corto que tiene la longitud de una décima parte solamente; si se imagina cortado un rodillo normalmente a su longitud, por el cero, se tiene como sección un círculo, pero si se corta por el 9, resulta un círculo con nueve dientes salientes. Estos rodillos engranan con unas ruedas dentadas (aa en planta y $a'a'$ en alzado), colocadas con su eje horizontalmente y paralelo al de los rodillos: las ruedas pueden correrse a voluntad de modo que engranen con más o menos dientes de los rodillos respectivos. Las ruedas se varían de posición mediante los botones A, de tal modo que cuando, por ejemplo, se pone un botón en el número 6, su rueda correspondiente a ocupa tal posición respecto al rodillo respectivo, que al dar a éste una vuelta completa, engrana con 6 dientes de la rueda.

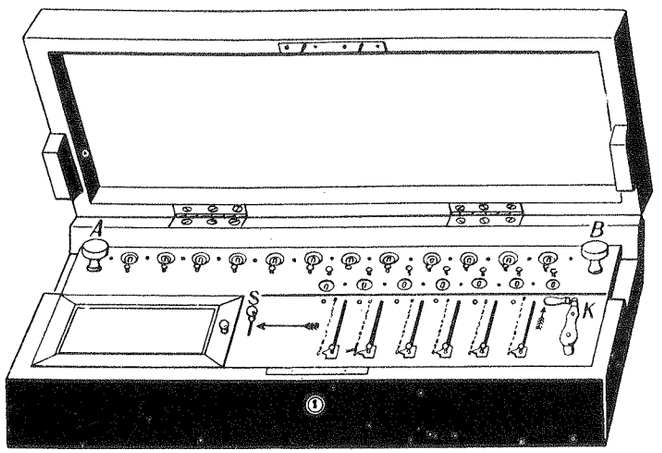


Fig. 120.— Máquina de calcular de Burkhardt

Todos los rodillos engranan, a su vez, con una transmisión, de tal modo que al dar una vuelta a la manivela K, dan una vuelta completa todos los rodillos alrededor de sus ejes correspondientes.

Las ruedecillas a van unidas, mediante piñones cónicos, a discos C que llevan marcadas las diez cifras (de 0 a 9) y cuyos ejes son los señalados en la figura con la letra c. En la

parte superior de la figura hemos representado uno solo de estos discos, y de trazos, para indicar que no se ven, ya que están por debajo de la tapa superior. Cada vuelta completa de una ruedecilla a hace dar también una vuelta entera a su disco correspondiente C, de modo que por la mira o ventanilla B pasan todas las cifras 1, 2, 3... 9, 0. Si se tiene un disco de modo que se vea el 0, y poniendo la ruedecilla a, mediante el botón A, en el 6, se da una

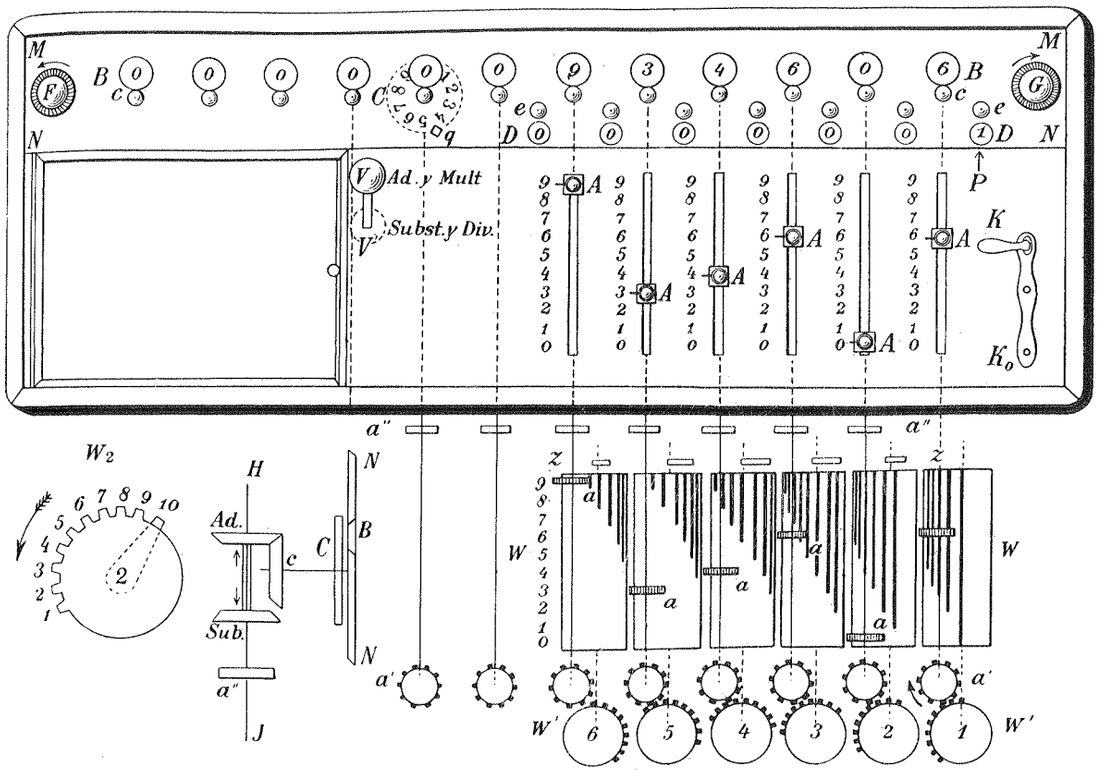


Fig. 121.— Meçanismo de la máquina de Burkhardt ($^1/_3$ del tamaño natural)

vuelta a la manivela K, engranan seis dientes del rodillo con otros seis de la rueda a, por lo cual ésta gira también, arrastrando al disco C, y al acabar de girar la manivela, se ve que en la ventanilla correspondiente aparece el número 6, en vez del 0 que había antes. Es decir, que si estando todos los discos en 0 se corren los seis últimos botones A de modo que marquen respectivamente 9, 3, 4, 6, 0 y 6, y se da una vuelta a la manivela, se ve aparecer en las seis ventanillas B correspondientes las mismas cifras, que componen el total de 9 3 4 6 0 6, como se ve en la figura.

Si al empezar se tienen los discos marcando una cifra distinta del cero, al dar una vuelta a la manivela, girarán precisamente en tantas divisiones o cifras como marquen los respectivos botones A: por ejemplo, si estando el primer disco (el de la derecha) en 6 y los demás en 0, sigue su botón en el 6 y se da una vuelta a la manivela, se verán pasar por la ventanilla B correspondiente las siguientes cifras por este orden: 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, y como resultado de la operación hecha se tiene 2; todos los demás discos permanecen invariables. Ahora bien, éste no es el resultado que se quiere obtener, pues en vez de 2 se debiera haber obtenido 12, y para conseguir este objeto, el eje de las ruedas a no sólo arras-

tra a estas ruedas, sino a otras $a''a''$, que no engranan con los dientes longitudinales de los rodillos. Para ello, en la prolongación del eje de cada rodillo va un diente s que ordinariamente no está en el plano de la rueda a'', por lo cual no engrana con ellas, pero en determinados casos puede colocarse en dicho plano $a''a''$.

Cada disco C lleva por debajo una piececita excéntrica q, que en el instante de pasar el disco del 9 al 0, y por medio de unas palancas de transmisión, lleva el diente especial s del rodillo *siguiente* al plano de las ruedas $a''a''$.

Los dientes s se ven, en planta, en la figura 121, representados por trazos de distinta longitud, ya que por formar diversos ángulos con el plano horizontal, sus proyecciones son de diferente longitud.

Si se proyecta un rodillo, con su diente s, sobre el plano de una sección recta, se tiene, como se ve en la parte ampliada W_2 de la figura, para el segundo rodillo, un círculo con diez dientes, de los cuales, los nueve primeros (del 1 al 9) corresponden a los dientes longitudinales del rodillo, y el décimo al especial s situado en la prolongación de su eje.

Volvamos ahora a suponer que el primer disco de la derecha marque 0, y que ponemos el botón correspondiente A en el 6: si se da una vuelta a la manivela K, aparecerá en B el 6, y si se da entonces otra vuelta, se verá el 2, pero al pasar el disco del 9 a 0, la pieza q por medio de las palancas transmisoras pone al *segundo* rodillo en movimiento, y el *segundo* disco marcará 1, a pesar de estar su botón A en 0.

Si este segundo botón no estaba antes en 0, al dar la vuelta a la manivela, el disco segundo girará arrastrado por su rodillo correspondiente, según el número que marque el botón A, y además por el disco primero, al pasar éste del 9 al 0; es decir, que el décimo diente obra como uno de tantos, ya que va unido al mismo eje que el rodillo que lleva los nueve restantes.

El décimo diente s_n (para el rodillo enésimo cualquiera) está en el plano de las ruedas $a''a''$, en el momento de pasar por la ventanilla B_{n-1} el disco correspondiente, de la cifra 9 al 0, es decir, cuando está funcionando el rodillo W_{n-1}. Claro está que dicho diente s_n debe encontrarse en el plano $a''a''$ antes de engranar con la rueda a_n''

El momento de actuar el diente s_n debe satisfacer a dos condiciones:

1.ª no entrar en acción sino *después* de haber actuado su propio rodillo W_n;

2.ª debe actuar después que todos los dientes de W_{n-1}, incluyendo el décimo s_{n-1}, hayan engranado, pues puede suceder que el paso de 9 a 0 por la ventanilla B_{n-1} no sea producido por un diente longitudinal de rodillo, sino por el décimo diente s_{n-1}; este paso de 9 a 0 por B_{n-1}, que, como ya antes se ha dicho, hace trasladarse al diente s_n al plano $a''a''$, debe preceder al engrane de este último diente s_n.

De la unión de estas dos condiciones resulta la necesidad del retraso escalonado en el funcionamiento de los rodillos, y así queda explicada la diferente posición de engrane de los rodillos $W'W'$, como se ve en la parte inferior derecha de la figura.

Todos los rodillos tienen una parte de su superficie lisa, es decir, sin dientes, para que los efectos de las diferentes vueltas a la manivela sean bien distintos y precisos. Esta superficie lisa comprende los 16 : 25 de la total del rodillo en la máquina de Burkhardt, con los 9 : 25 restantes para los dientes, y en la de Thomas ocupan ambas, respectivamente, los 13 : 22 y 9 : 22 de la total.

Para sumar con esta máquina, basta con lo dicho, pues se comprende fácilmente que poniendo sucesivamente los sumandos y dando vueltas a la manivela, se van obteniendo las sumas correspondientes. Basta también con el ejemplo siguiente para comprender cómo se maneja esta máquina para multiplicar. Supongamos que se trata de multiplicar 934606×62142. Con los botones A se pone el factor 934606 como multiplicando, como se ve en la figura 121. Se pone la palanquita V en «Ad. y Mult.». La flecha P señala el primer orificio pequeño de la derecha, D; en todas las ventanillas B debe leerse 0. Las operaciones que deben hacerse son las siguientes:

Se dan dos vueltas a la manivela, y se tiene	1869212
Se levanta el tablero MN (por los botones F, G) y se corre un lugar a la derecha, y dando cuatro vueltas a la manivela se lee.	39253452
Se vuelve a levantar y a correr un lugar a la derecha el tablero, y se da una vuelta a la manivela, resultando.	132714052
Se dan dos vueltas a la manivela, después de haber corrido el tablero, y resulta .	2001926052
Se corre el tablero y se dan seis vueltas, obteniéndose el producto buscado . . .	58078286052

El factor más pequeño es el que se toma como multiplicador para facilitar la operación.

Si se trata de sumar varios productos, como $ab + cd + \ldots$, se forma primero el ab, y sin correr el tablero, se forma el cd, y así sucesivamente, quedando automáticamente sumados todos los productos obtenidos.

Cuenta-revoluciones. El eje de la manivela va unido a un dispositivo para contar el número de vueltas que da la manivela. Este número se lee en las ventanillas DD (fig. 121), bajo las cuales van unos discos que engranan con ruedas dentadas; por otra parte, la manivela lleva un diente que a cada vuelta engrana con la rueda de la primera ventanilla, apareciendo la cifra correspondiente, señalada por la flecha P. En la figura, se supone que se ha dado una sola vuelta a la manivela y por eso aparece el 1 en el último agujero D de la derecha. Al correr el tablero a la derecha para hacer una multiplicación, aparecerá el número de vueltas que en la nueva posición se dé a la manivela en la ventanilla D siguiente, frente a la flecha P. Es decir, que en el ejemplo que hemos considerado anteriormente, al terminar la multiplicación se tendrá en las ventanillas D el número 62142, constituyendo esto una buena comprobación de la operación hecha, o sea, del número de vueltas que se han dado a la manivela.

Para restar o dividir, basta que todos los discos de cifras giren en sentido contrario que al sumar o multiplicar, como se ve en el detalle HJ de la figura 121, pues en vez de engranar con c el piñón Ad. (adición) lo hace el Subst. (substracción), mediante la palanquita V que puede ponerse a voluntad en V o en V'. Sin tener una máquina delante no pueden explicarse todos los detalles de funcionamiento de la misma, que se encuentran descritos en las instrucciones que para su manejo facilitan las casas constructoras con cada máquina.

Máquinas de rodillos modernas. Después de descrita la máquina de Burkhardt, tal como antes se construía, vamos a describir ahora dos tipos modernos de máquinas de calcular fundadas en el mismo principio, pero mucho más perfeccionadas.

La máquina de calcular «Archimedes», construída por primera vez, en 1906, por la fábrica Reinhold Pöthig, de Glashütte, tenía una transmisión por piñón y ruedas dentadas para el cuenta-revoluciones de la manivela. Empleando el sistema de multiplicaciones abreviadas se disminuye considerablemente el número de vueltas que hay que dar a la manivela; por ejemplo, para multiplicar 3176 por 998, se multiplica primero por 1000 y después se le resta el producto del mismo número 3176 por 2; de este modo, en vez de dar veintiséis vueltas a la manivela (9 + 9 + 8), se dan solamente tres.

La máquina tiene el mismo aspecto que la de Burkhardt, y el primer modelo llevaba una serie de ventanillas por las cuales podía verse el multiplicando. Los modelos posteriores no tienen ya la antigua forma de cajón, sino la más cómoda de pupitre.

En la figura 122 se ve el modelo D, de 1915, que en vez de llevar correderas y botones móviles tiene un teclado para poner el multiplicando (y todos los sumandos), perfeccionamiento que se encuentra actualmente en casi todas las máquinas calculadoras.

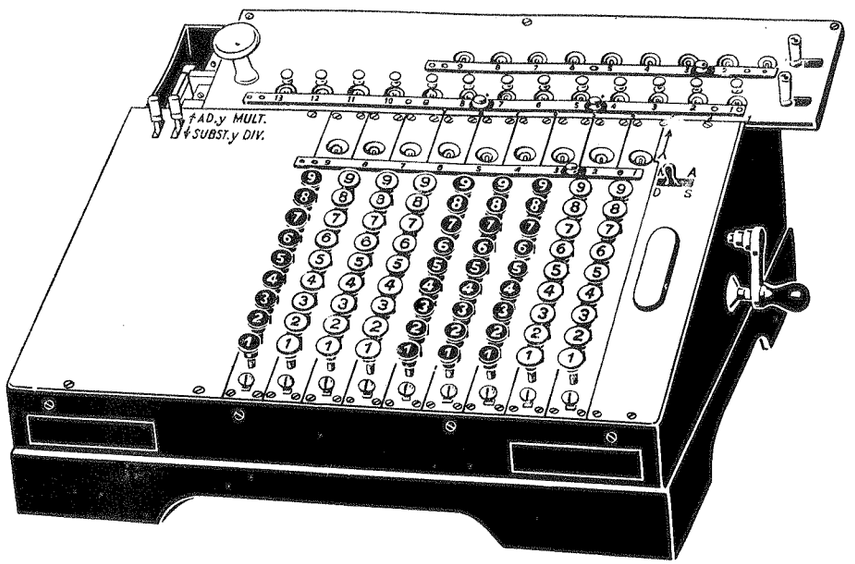


Fig. 122.– Máquina de calcular «Archimedes»

En esta máquina no hay que llevar mentalmente la cuenta de las cifras decimales: éstas resultan automáticamente al dar vueltas a la manivela, por la presión ejercida sobre uno u otro de los dos botones para ello dispuestos, según el movimiento sea a derecha o a izquierda.

Otra novedad de la máquina «Archimedes», extendida universalmente, es el estar equipada con un motorcito eléctrico que puede acoplarse a la red del alumbrado y que pone en movimiento al eje de la manivela. De este modo el operador sólo tiene que ir viendo las cifras del multiplicador en el dispositivo cuenta-revoluciones y correr la parte superior apretando uno u otro de los botones antes mencionados.

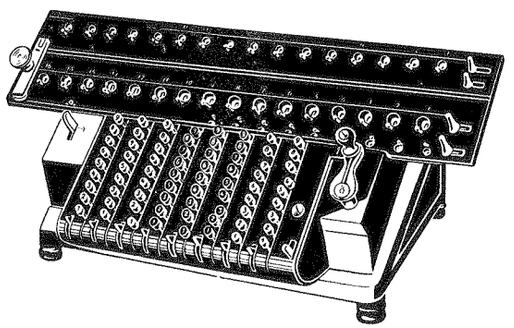


Fig. 123.– Máquina de calcular «Unitas»

La concesión para la venta de esta máquina la tiene la fábrica de máquinas de calcular Hans Sobielny, de Dresden.

Máquinas de calcular «Tim» y «Unitas». Estas máquinas, construídas desde 1907 por la fábrica Ludwig Spitz y C.ª, de Berlín, pertenecen también al grupo de las máquinas de rodillos. La máquina «Unitas», representada en la figura 123, tiene dos mecanismos numeradores o registradores, uno de los cuales da los productos parciales, y el otro la suma o diferencia de los mismos. Estas máquinas tienen también

corredera o teclado, y actualmente llevan un motorcito eléctrico, el cual, como en la «Archimedes», hace girar la manivela y moverse la corredera.

§ 31. Máquinas de calcular Odhner

En el año 1874 construyó W. T. Odhner, en San Petersburgo, una máquina de calcular que se diferenciaba de la de Burkhardt principalmente en el nuevo sistema numerador, es decir, en el juego de piezas que sustituía a los rodillos y ruedas dentadas de aquélla. Después de múltiples reformas y perfeccionamientos, traspasó Odhner la patente, en 1892, a la casa Grimme, Natalis y C.ª, de Brunswick, que con el nombre de «Brunswiga» presentó la primera máquina construída por la misma, en 29 de agosto de 1892, a la Asociación de Ingenieros de Hannóver. Desde entonces ha venido sufriendo esta máquina mejoras continuadas y perfeccionamientos considerables. La figura 124 representa un modelo de 1913.

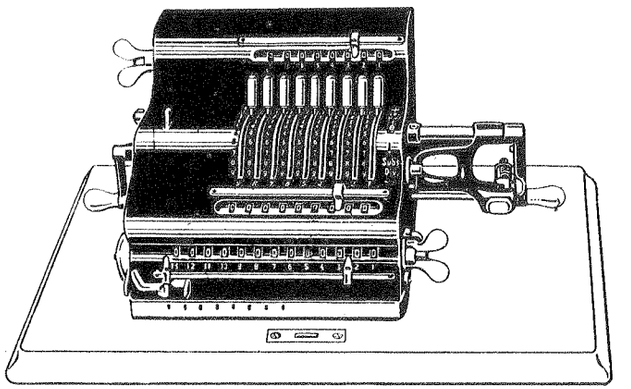


Fig 124.– Máquina de calcular «Brunswiga»

En el mecanismo de la «Brunswiga» existe una diferencia esencial entre las ruedas numeradoras y los rodillos de la máquina de Thomas y Burkhardt. Estas ruedas (fig. 125) consisten en un disco A, sobre el cual va una corona giratoria B de igual diámetro exterior que el A; el disco A tiene nueve ranuras radialmente dispuestas, en las cuales van unas varillas que pueden correrse más o menos, y que sobresalen del borde de aquél en forma de dientes, como se ve en las cinco primeras varillas de la izquierda. La corona B lleva una especie de ranura acodada, por la que pasan unos apéndices laterales de las varillas. Al girar esta corona se corren las varillas para dentro o para fuera, y en este último caso sobresalen del borde del disco, quedando éste convertido en rueda dentada. En el borde interior de la corona B se ven unos dientes, que al engranar con un pasador radial evitan que aquélla pueda girar de manera imprevista.

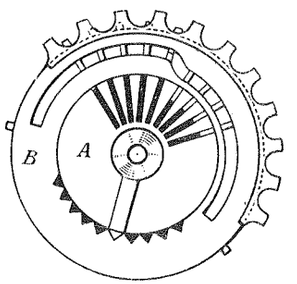


Fig. 125.– Rueda de Odhner

La corona B lleva unido, además, en su periferia un segmento dentado que sirve para ponerla en movimiento.

Además de las nueve varillas indicadas, sobresalen de la rueda dos pasadores que se corren un poco, pero no radialmente, sino paralelos al eje de la rueda, y que de su posición normal pasan a presión al plano de las nueve varillas, obrando entonces como un diente más, y volviendo a su posición normal por efecto de un muelle de llamada.

Por detrás de la rueda van, una a cada lado, dos piezas adicionales, inclinadas sobre el plano de aquélla, que en unión de los dos pasadores anteriores sirven para el arrastre de las decenas.

Las demás partes principales de la máquina y su funcionamiento se ven claramente en el esquema de la figura 126. Las ruedas numeradoras $A_1, A_2 \ldots$ van montadas sobre un mismo eje, que gira al dar vueltas a la manivela K; cerca de cada rueda A va otra B, montada en el mismo eje, pero giratoria alrededor de éste por medio de la palanca E. Alrededor de un eje paralelo al primero giran los piñones D, que pueden engranar con las ruedas B o con los segmentos dentados que van unidos a las coronas (B de la fig. 125)

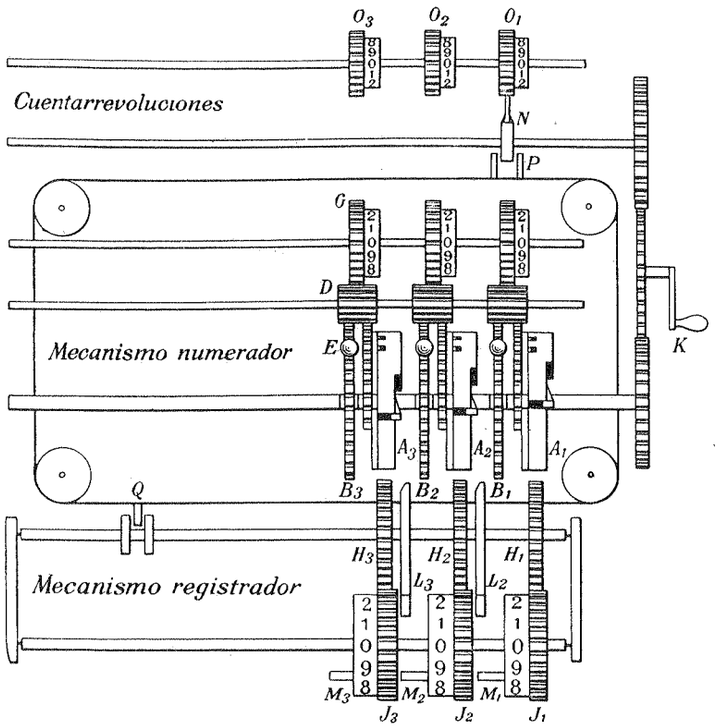


Fig. 126.—Mecanismo de la «Brunswiga»

de las ruedas A. Si con una de las palancas E se gira una de las ruedas B, gira al mismo tiempo la corona de la rueda A correspondiente y sobresalen de ésta un número de varillas igual al de dientes que haya girado B.

De este modo se ponen las cifras del multiplicando en las ruedas numeradoras A_1, A_2, $A_3 \ldots$ Al mismo tiempo se mueven las ruedas G, apareciendo en sus tambores numerados respectivos las cifras correspondientes a los números puestos con las palancas E.

En la figura 126 aparecen las ruedas G, para claridad del dibujo, por encima de las ruedas A, pero en realidad (fig. 124) se ven las cifras de sus tambores por las ventanillas o agujeros que hay por debajo de las ranuras por donde corren las palancas E.

La colocación de las palancas E en sus números correspondientes se hace estando la manivela calada, es decir, en su posición de reposo, en la cual se mantiene mediante un dispositivo de muelle adecuado. Tirando de la manivela en la dirección de su eje, se suelta y queda en disposición de girar cuanto se quiera: al mismo tiempo se corren también un poco, a la izquierda, los piñones D, de modo que dejan de engranar con las ruedas numeradoras A.

Al girar la manivela K, engranan las varillas que sobresalen de las ruedas A con las ruedas dentadas H, las cuales, para cada vuelta de la manivela, giran en tantos dientes como varillas sobresalen de las ruedas A. Lo mismo sucede con las ruedas J del mecanismo registrador, de modo que al dar una vuelta a la manivela aparece en éste un número igual al de varillas salientes, es decir, que se vera el mismo número puesto como multiplicando con las palancas E.

Para más vueltas de la manivela, hay en el mecanismo registrador un dispositivo para las decenas, mediante el cual, a cada vuelta completa de una de las ruedas M, avanza un lugar la rueda siguiente; para ello sirven las correderas L, que a cada vuelta de la rueda inmediata anterior, y por medio de la espiga M, son empujadas hacia arriba, apoyándose en la superficie lateral de la rueda A y empujando, con su cabeza biselada, al pasador lateral más próximo, que al llegar al plano de las otras nueve varillas actúa como un diente más, y al dar una vuelta más la rueda A engrana con la rueda dentada H y hace correr un lugar a la rueda registradora J; la pieza que antes hemos dicho iba dispuesta por detrás de la rueda A, hace volver la corredera L a su posición normal primitiva.

Hasta ahora hemos supuesto que la manivela giraba hacia la derecha; si diera vueltas a la izquierda, todas las ruedas y tambores de cifras girarían en sentido contrario a como antes lo hacían. También la transmisión de decenas se efectúa al girar al contrario la manivela, pero el pasador de la rueda A que entra en acción no es el mismo de antes, sino el otro de que dispone dicha rueda.

En la parte superior de la máquina va el mecanismo cuenta-revoluciones, que consiste en lo siguiente: una ruedecilla N, que gira al dar vueltas a la manivela K, tiene un largo diente que engrana con la rueda dentada O colocada encima, con lo cual, a cada vuelta que da la manivela, avanza un lugar la rueda O, con el tambor de cifras a ella unido. Para que al correr el carrillo del mecanismo numerador corra también, pero en sentido opuesto, la ruedecilla N, pasa una cinta de acero sin fin alrededor de cuatro rodillos, la cual lleva unidos unos topes de arrastre P y Q, que transmiten el movimiento de dicho carrillo a la rueda N.

La descripción que hemos hecho corresponde a un modelo antiguo de la máquina «Brunswiga», de 1913; en los nuevos modelos, por ejemplo en el «Trinks-Triplex» de 1921, se han introducido importantes perfeccionamientos en el mecanismo. Uno de los principales consiste en haber provisto al cuenta-revoluciones de una transmisión directa de decenas, como ya vimos al describir la «Archimedes».

Supongamos que se trata de multiplicar el número 5438 por 9. Una vez puesto el multiplicando, se da una vuelta *a la izquierda* a la manivela, con lo cual aparece en el cuadro registrador el número 99994562 y en el cuenta-revoluciones el 9999; se corre entonces el carrillo registrador un lugar a la derecha, y se da una vuelta a la manivela a la derecha, resultando en el cuadro registrador el número 00048942 y en el contador de revoluciones el 0009, quedando así efectuada la multiplicación. Con la primera vuelta atrás de la manivela se ahorran siete vueltas. Para todo valor del multiplicador se puede dar vueltas a la manivela hacia atrás o hacia adelante, hasta que se obtenga en el cuenta-revoluciones dicho valor.

Para dividir o restar, llevan los tambores de las ruedas del cuenta-revoluciones, una segunda serie de cifras en rojo, dispuestas en sentido contrario al de las blancas. La tapa donde van las ventanillas por las cuales se ven las cifras, puede correrse un poco de modo que se vean las cifras blancas o las rojas sobre fondo negro. El cambio se hace al dar la

primera vuelta a la manivela, la cual será a la derecha si han de emplearse las cifras blancas, y a la izquierda si las rojas. Las demás vueltas pueden darse ya en uno o en otro sentido, sin volver a cambiar dicha tapa.

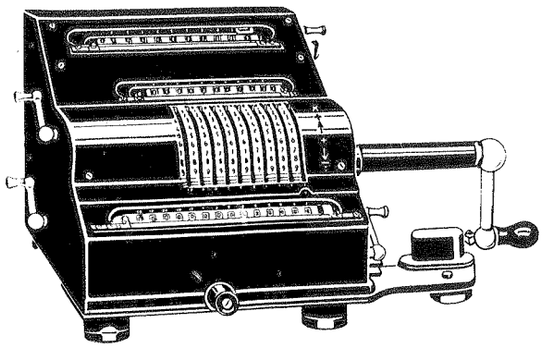


Fig. 127.—Máquina «Nova-Brunswiga»

En la figura 127 se ve la forma más nueva de esta máquina, llamada «Nova-Brunswiga» modelo II, en la cual, la manivela pequeña que hay en la parte inferior de la izquierda sirve para pasar el resultado que haya en el tablero registrador, al mecanismo numerador, cosa de gran importancia cuando se trata de multiplicaciones sucesivas. La manivela de arriba, de la izquierda, sirve para poner a cero el tablero numerador, y las dos manivelas pequeñas de la derecha sirven respectivamente para poner a cero los tableros registrador y contador de revoluciones.

Este principio de las ruedas numeradoras ha sido utilizado en otras máquinas, de las cuales sólo citaremos la antigua de Küttner (1894), la «Berolina» (1901) y la «Triumphator» (1904).

§ 32. Máquinas de calcular de Steiger-Egli y de Hamann

Máquina de calcular «Millionär». Las máquinas de calcular descritas hasta ahora requieren, al multiplicar, que se den varias vueltas a la manivela para cada cifra del multiplicador, siendo igual en cada posición el número de vueltas a la correspondiente cifra del multiplicador, y, por lo tanto, el número total de vueltas resulta igual a la suma de los valores absolutos de todas las cifras de que aquél se compone. En cambio, en la máquina «Millionär», construída en 1892, en Zurich, por Otto Steiger y Hans W. Egli, sólo hay que dar una vuelta a la manivela para cada cifra o posición del multiplicador, y al mismo tiempo corre automáticamente el mecanismo registrador.

La máquina presenta un aspecto parecido a la de Burkhardt, siendo algo mayores las dimensiones de la caja, a saber: 66 cm de longitud, por 31 cm de anchura y 18 cm de altura; el peso de la máquina es de unos 36 Kg.

La figura 128 representa una de estas máquinas, a escala 1 : 7 del tamaño natural.

En la mitad de arriba de la tapa van las correderas que sirven para poner los números, que en el caso de la figura son 3, 7, 6 y 8, que aparecen en las ventanillas que hay por debajo de aquéllas. En *U*, a la derecha de las correderas, se ve el botón que sirve para poner el mecanismo en condiciones de efectuar las cuatro operaciones de suma (adición), multiplicación, división y resta (sustracción), con sólo ponerlo en los puntos indicados con las iniciales *A*, *M*, *D*, *S*. A la izquierda se ve, en *H*, la palanca de factores, que se mueve sobre una serie de números, del 0 al 9, y que sirve para poner el número correspondiente a cada cifra del multiplicador. A la derecha, en *K*, se ve la manivela, que siempre se gira en el mismo sentido. En las ventanillas *g* se ve el producto (o la suma, o la diferencia, o el dividendo), y en las *f* el multiplicador, en consonancia con las sucesivas posiciones de la palanca *H*, tratándose de multiplicaciones, y si se trata de una división aparece en estas

ventanillas el cociente. El botón *W* sirve para correr el carrillo, con lo cual pueden colocarse las ventanillas *g* y *f* en la posición conveniente. Los botones *R* y *C* sirven, respectivamente, para poner a cero los indicadores *g* del resultado y los *f* del comprobador.

Para dar una idea del funcionamiento de esta máquina, vamos a ver cómo se efectúa una multiplicación, por ejemplo, de $6 \times 3768 = 22608$, que es la indicada en la figura 128. En esta figura, por falta de espacio, sólo se han puesto junto a las correderas los números

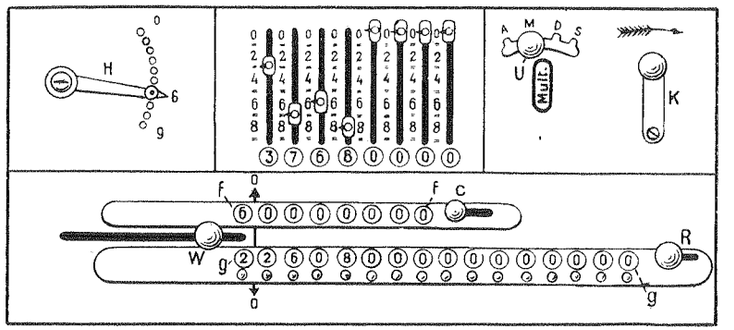


Fig. 128.—Máquina de calcular de Steiger-Egli (1/7 del tamaño natural)

pares. Se empieza por poner el multiplicando en las correderas, y después de poner la palanca *H* en el número 6, se da una vuelta a la manivela *K*, apareciendo abajo el producto 22608. El funcionamiento de la máquina durante esta vuelta de la manivela, puede descomponerse en cuatro partes, a cada una de las cuales corresponde un cuarto de vuelta de la misma. A cada cuarto de vuelta cambian las cifras del registrador *g*...*g*, apareciendo las siguientes:

al terminar el primer cuarto de vuelta	1	4	3	4	0	0	0	0
» el segundo » »	1	4	3	4	0	0	0	0
» el tercer » »	1	2	5	0	8	0	0	0
» el cuarto » »	2	2	6	0	8	0	0	0

Si el multiplicador tiene más de una cifra, después de hecha la multiplicación por la primera, se pone la palanca *H* en la segunda y se da otra vuelta a la manivela *K*, funcionando automáticamente el mecanismo registrador, que se va corriendo a la izquierda por sí solo.

La figura 129 representa esquemáticamente la máquina de Steiger y Egli, en sus partes principales, para mejor comprender su funcionamiento. Por dentro de la caja, y correspondiendo a las cifras del 1 al 9, que van al lado de cada corredera, van nueve barras dentadas (horizontales en la figura) que pueden moverse en la dirección de su longitud. Por de-

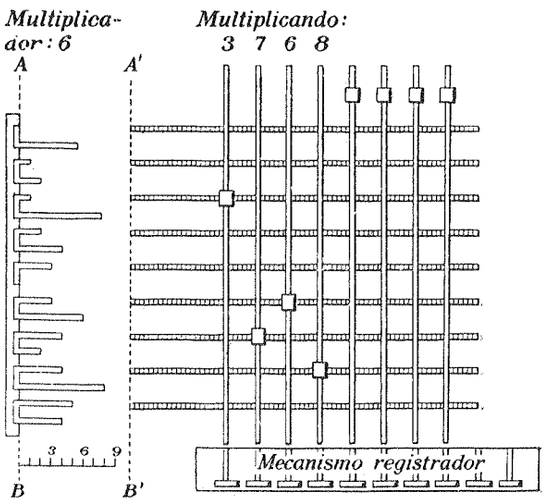


Fig. 129.—Mecanismo de la máquina de Steiger-Egli

bajo de las ocho correderas, y paralelamente a éstas, van otras tantas varillas de sección cuadrada, sobre las cuales pueden deslizarse otros tantos piñones cilíndricos, que se corren a voluntad mediante los botones que se ven en la figura 128 para poner el multiplicando, de modo que según el número en que se ponga cada botón, así quedarán los correspondientes piñones sobre las barras dentadas respectivas; en el caso de la figura 129, como en la 128, el número puesto es el 3768, viéndose en aquélla los piñones sobre las barras que ocupan el lugar de cada cifra, y los restantes en cero. Los piñones giran en esta máquina análogamente a como lo hacían los rodillos de la de Thomas-Burkhardt y las ruedas de la de Odhner, transmitiendo su movimiento, por medio de las varillas cuadradas, a los tambores numerados del mecanismo registrador, como se ve en la figura 129.

La parte más interesante de esta máquina es el dispositivo para el movimiento de las barras dentadas. En la figura 129 se supone también que se va a multiplicar el número 3768 por 6; para ello, hay a la izquierda de las barras dentadas un bastidor con dientes de distintas clases, la mitad de los cuales están dirigidos hacia las barras dentadas, y la otra mitad hacia los huecos que quedan entre estas últimas. En la misma figura se ven agrupados estos dientes de dos en dos, para facilitar la explicación del funcionamiento de este dispositivo.

La longitud de los dientes se expresa en unidades de la escala que se ve entre B y B'; el último par de dientes, o sea el más bajo, vemos que tiene las longitudes 5 y 4, correspondientes al producto de $6 \times 9 = 54$; el par anterior tiene sus dientes de longitud 4 y 8, correspondientes al producto $6 \times 8 = 48$, y así sucesivamente; el bastidor entero contiene todos los productos 0×6, 1×6, etc., hasta 9×6, y en cada par de dientes, el de abajo da las unidades y el de arriba las decenas del producto.

Al girar la manivela K, se mueve el bastidor hacia la derecha, llegando la línea AB a la $A'B'$ al terminar el primer cuarto de vuelta. De este modo empujan los dientes de las decenas a las barras dentadas, en su propia dirección, girando por lo tanto los piñones en sus sitios correspondientes. En el tablero registrador aparece, en el ejemplo propuesto, al terminar el primer cuarto de vuelta, el número 1434000. Durante el segundo cuarto de vuelta vuelven atrás las barras dentadas y el bastidor también, pero no giran los piñones: al mismo tiempo se corre un poco hacia arriba el bastidor de modo que los dientes de las unidades quedan frente a las barras dentadas. También al mismo tiempo se corre automáticamente un lugar hacia la izquierda el tablero registrador.

En el tercer cuarto de vuelta de la manivela vuelve a moverse el bastidor hacia la derecha, empujando los dientes de las unidades a las barras dentadas y girando nuevamente los piñones (en nuestro ejemplo giran 8, 2, 6, 8 0, 0, 0, 0... lugares respectivamente), con lo cual aparece en el registrador el número 12508000. Pero este número no es el producto buscado, ya que en el mecanismo registrador no ha habido aumento de unidades de orden superior por agregación de decenas de las de orden inferior inmediato. El mecanismo encargado de esta función no está representado en la figura y entra en acción durante el último cuarto de vuelta de la manivela, obteniéndose como resultado o producto final el número 226080000.

Si en vez de multiplicar por 6 solamente, se tratara de multiplicar por 64, después de haber dado la primera vuelta a la manivela se pondría la palanca H en el 4 (fig. 128), con lo cual, en vez del bastidor de la figura 129, entraría en acción otro, que daría los productos 0×4, $1 \times 4 \ldots$, hasta 9×4; con una vuelta de la manivela K se obtiene el producto 4×3768, que, al sumarse con el anteriormente hallado, da el resultado $64 \times 3768 = 241152$.

En total hay nueve bastidores, que unidos entre sí forman un solo cuerpo, que se mueve verticalmente al girar la palanca H, de modo que a cada número sobre que ésta pasa, corresponde un bastidor distinto frente a las barras dentadas.

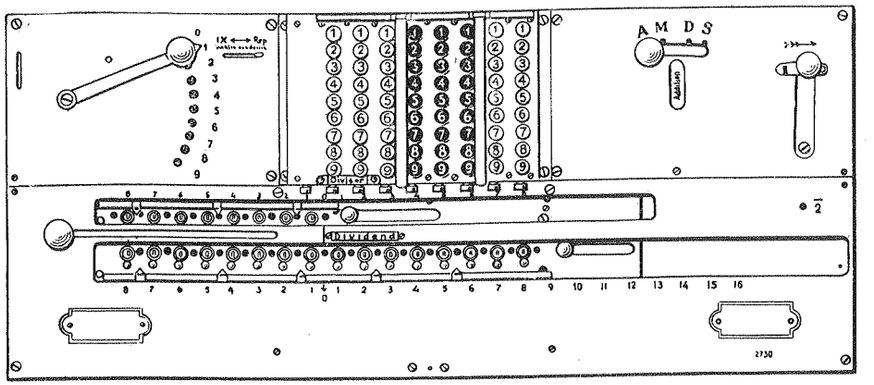


Fig. 130.—Máquina de calcular «Millionär», con teclado

En la actualidad la máquina «Millionär» va provista de teclado, en vez de botones y corredera, como se ve en la figura 130; además, lleva también un motorcito eléctrico, que pone en movimiento a la manivela al apretar un botón dispuesto en la palanca H, al tiempo de correr ésta sobre el número que se quiera.

Máquina de calcular «Mercedes-Euklid», de Hamann. En 1909 construyó Hamann esta máquina, que presenta bastantes novedades, además de la variación introducida en la forma del mecanismo numerador. En la figura 131 se ve en perspectiva esta máquina; el multiplicando (o el divisor) se pone con los botones F en las correderas correspondientes, apareciendo en las ventanillas M; en P sale el producto y en Q se ve el multiplicador (o el cociente). La manivela K desempeña el mismo papel que en la máquina de Thomas-Burkhardt, y los pasadores G y G_1 sirven para poner a cero los indicadores. El movimiento del mecanismo registrador, para la multiplicación y división, se produce, según la clase de operación, por medio de la palanca U, de la tecla T o del botón Kn. Además de la palanca U hay otra U_1 que también sirve para cambiar de operación.

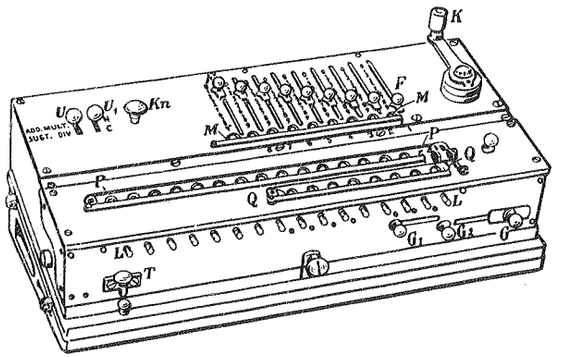


Fig. 131.—Máquina de calcular «Mercedes-Euklid»

En la figura 132 se ve, en esquema, el mecanismo numerador de esta máquina; análogamente a la máquina de Steiger-Egli, se ven en ésta las varillas o ejes de sección cuadrada, sobre las cuales se deslizan los piñones cilíndricos, y las barras dentadas, que pueden moverse en su propia dirección. En esta figura se supone que el multiplicando tiene sólo cuatro cifras; los ejes correspondientes a los cuatro piñones movidos están encerrados

en esta figura en un rectángulo de líneas de trazos, para facilitar la explicación; los demás ejes permanecen inmóviles, con sus piñones sobre la primera barra dentada. Todas estas barras van unidas a una palanca *SS*, articulada por su punto medio a una biela *P*, accionada a su vez por la manivela. El movimiento resultante para las barras dentadas está calculado de tal modo, que la primera o la última de éstas se articula por medio de una varilla *R*, a un bastidor fijado a la caja de la máquina. Al girar la manivela, se mueven más o menos las barras dentadas, según su distancia a la barra que esté unida a *R*. En la figura 132 la barra articulada con *R* es la primera; la última barra, al dar media vuelta la manivela, avanza un espacio igual a nueve unidades de longitud, la penúltima recorre ocho unidades y así sucesivamente. Si los piñones están, como representa la figura, en las cifras 4973, al dar media vuelta a la manivela girarán tantos dientes o lugares como indiquen sus cifras respectivas, y en el tablero registrador aparecerá el número 4973, pues el mecanismo numerador va unido al registrador. Al dar la otra media vuelta a la manivela, giran los piñones en sentido contrario al anterior, pero este movimiento no se transmite al registrador, ya que en esta segunda media vuelta de la manivela queda cortada la unión de ambos mecanismos. Al dar otra vuelta a la manivela, aparece en el registrador el número 9946, habiendo entrado en acción el mecanismo de decenas aumentando en una unidad cada cifra de orden superior por cada diez del inmediato inferior.

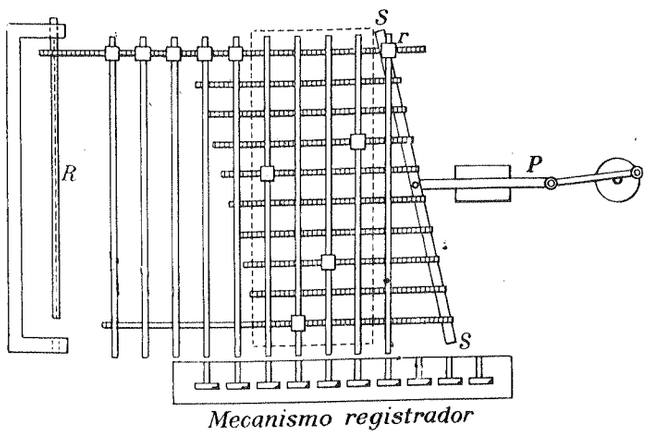


Fig. 132.—Mecanismo de la «Mercedes-Euklid»

La sustracción se hace por suma del complemento aritmético. Por ejemplo, supongamos que se pone en el registrador el número 000004973 y que se quiere restar de este número su mismo valor: con la varilla *R* se articula la *última* barra dentada, y al dar una vuelta a la manivela aparecen los números 9, 9, 9, 9, 9, 5, 0, 2, 6, cuya suma con los anteriores da:

$$\begin{array}{r} 000004973 \\ +999995026 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

resultando la última cifra con una unidad de menos. Esta falta se soslaya del modo siguiente. En la prolongación de la primera barra dentada hay otro piñón *r* que da una vuelta entera al correrse la barra. De este modo, al actuar el mecanismo de decenas, aumenta una unidad la cifra correspondiente en el registrador, y al mismo tiempo dicho mecanismo hace subir en una unidad todas las demás cifras, convirtiéndose todos los 9 en 0.

Una característica peculiar de la «Mercedes-Euklid» consiste en el modo automático de hacerse las divisiones. Después de puestos el dividendo y el divisor se gira la manivela hasta que quede detenida automáticamente por un dispositivo de retención; se vuelve a soltar la manivela accionando las palancas *U* y U_1 (fig. 131), y al mismo tiempo se corre un lugar el carrillo registrador; se hace girar de nuevo la manivela hasta que vuelva a quedar

detenida, y así sucesivamente hasta terminar la división. El papel del operador se reduce de este modo a una función puramente mecánica, ya que no tiene que hacer otra cosa que maniobrar para que la máquina haga *por sí sola* la operación.

Un perfeccionamiento muy importante fué el introducido en esta máquina en 1924, al dotarla de movimiento eléctrico, que hizo más automático aún el trabajo de aquélla. Para hacer una multiplicación basta con poner los dos factores, correr el carrillo y conectar el motor de la máquina a la red del alumbrado; la máquina trabaja completamente sola hasta terminar la multiplicación, en cuyo momento también se para el motor automáticamente.

Máquinas de calcular «Hamann-Manus» y «Hamann-Automat». Estas dos máquinas, construídas por Hamann en 1925 y 1928 respectivamente, tienen el mismo aspecto y forma exterior que la máquina de Odhner, pero su construcción es completamente distinta.

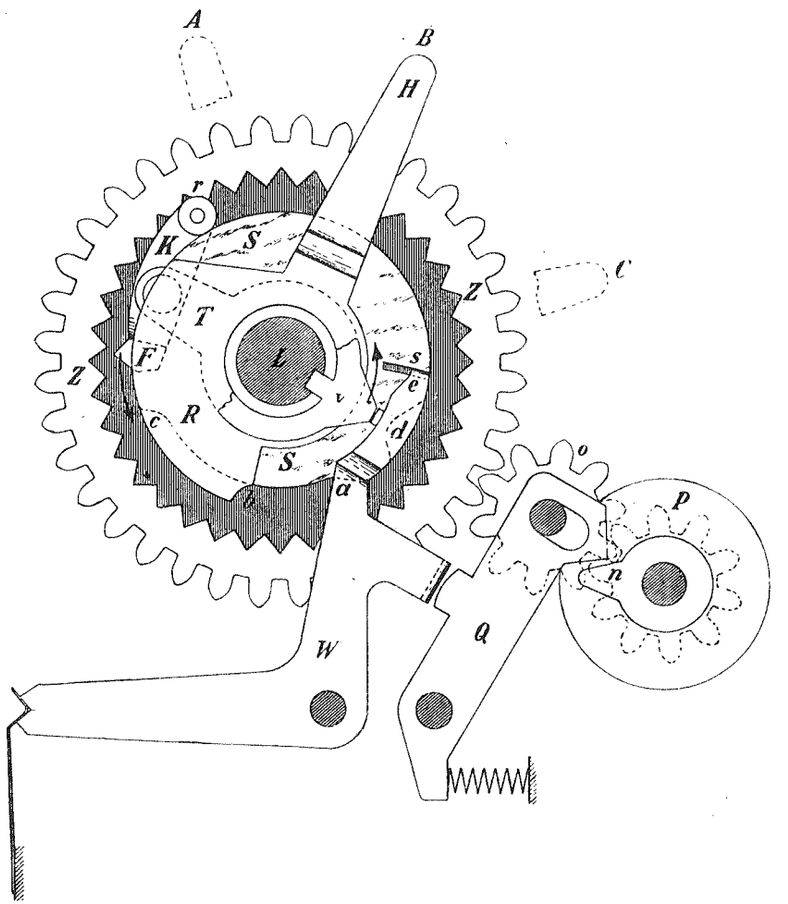


Fig. 133.—Piezas fundamentales de la máquina de calcular «Hamann-Manus»

En la figura 133 se ve el mecanismo numerador de la máquina «Hamann-Manus». El mecanismo registrador es accionado por la corona dentada *Z*, provista de dientes por fuera y por dentro y que gira libremente alrededor de su eje; por medio del diente *F* es

arrastrada en el sentido de la flecha, por el movimiento de rotación de la manivela. Para cada cifra del multiplicador, puesta en el numerador, engrana el diente Z_1 en un trozo más o menos largo de su recorrido, con los dientes de dentro de la corona Z, y ésta gira en tantos dientes como sea la cifra puesta.

El engrane del diente F con la corona Z está accionado y regulado por un disco fijo S y un segmento anular R, que gira al moverse la palanca H. El disco S, montado sobre el eje L de la manivela, es independiente de éste, manteniéndose fijo porque el extremo superior e de la palanca acodada W está doblado en ángulo recto hacia abajo y encaja en la ranura s practicada en el disco.

El disco S tiene una gran escotadura ac en su borde, de longitud igual a nueve dientes de la corona dentada Z, y otra escotadura pequeña d. La grande puede disminuir y hasta taparse del todo al girar el segmento anular R. Poniendo la palanca H en A se cierra toda la escotadura ac, y si se pone en C, queda ésta completamente abierta. En la posición B en que se encuentra la palanca H en la figura 133, queda abierta la escotadura en una longitud equivalente a cuatro dientes de la corona dentada Z. La escotadura d queda tapada, en su posición normal, por la parte superior de la palanca W.

Al girar la manivela, arrastra al brazo T, con un trinquete móvil K, que en un extremo lleva el diente F y en el otro un rodillo r. Este último rueda sobre el borde del disco S, contra el cual se mantiene apretado por un muelle. Si la escotadura grande está

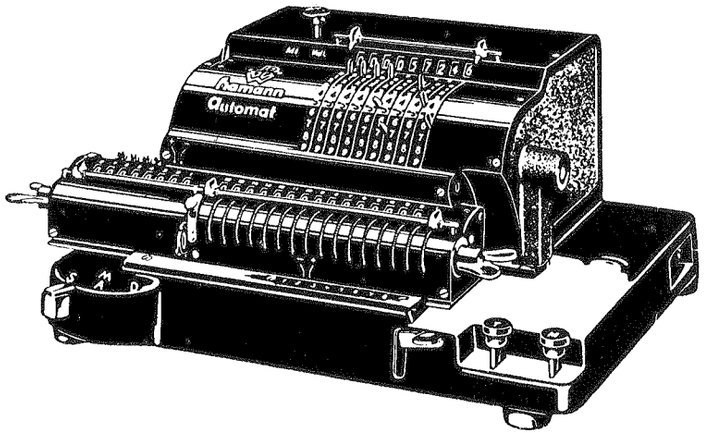


Fig. 134. — Máquina de calcular «Hamann-Automat»

completamente tapada, no produce efecto alguno la vuelta completa del rodillo r con el diente F solidario del mismo. En la posición representada en la figura 133, al entrar el rodillo en la escotadura, sube el diente F, que engrana con la corona Z y la hace girar en cuatro dientes. El mismo número de dientes gira el piñón o y, por lo tanto, la rueda P, que lleva el tambor numerado que aparece en el tablero registrador.

Para el pase de las decenas lleva la rúeda P un saliente n, que al pasar aquélla de 9 a 0, o de 0 a 9, empuja hacia atrás a la palanca Q, la cual, al apretarse contra la palanca acodada W, hace que el extremo superior de ésta deje al descubierto la pequeña escotadura d del disco S. El rodillo r, al girar alrededor del disco S, entra en la escotadura d, y el diente F engrana con la corona Z, haciéndola correr un diente. Al seguir girando la manivela, el saliente v a ella unido empuja hacia atrás la palanca W, cuyo extremo superior vuelve a tapar la escotadura d. Al mismo tiempo vuelve a su posición normal la palanca Q, quedando todo dispuesto para otro pase de decena.

La palanca Q obra sobre la palanca acodada W de la rueda anterior, que de este modo avanza un diente más es decir, una cifra más.

En el esquema representado en la figura 133 se ven las partes fundamentales del mecanismo numerador y del pase de decenas, sin descender a más detalles de funcionamiento y construcción. Sólo diremos que todos los movimientos están de tal modo combinados, que no hay que temer el giro imprevisto de ninguna de las partes componentes de los diversos mecanismos.

También esta máquina está provista de dispositivo para hacer las divisiones de modo totalmente automático.

La máquina «Hamann-Manus» se maneja a mano, mientras que la «Hamann-Automat» es movida por un motorcito eléctrico; esta última es la representada en la figura 134.

§ 33. Reseña histórica de las máquinas de calcular

Los dos inventos más importantes en la historia de las máquinas de calcular, se deben a Pascal y a Leibniz. El primero abrió, con su máquina de sumar, el camino a las máquinas automáticas, y el segundo, con el invento del mecanismo numerador y el perfeccionamiento del mecanismo registrador, hizo posible la máquina de multiplicar y dividir.

Máquina de sumar, de Pascal. La primera máquina de calcular fué inventada en 1642 por Pascal (1623-1662).

La figura 135 representa esta máquina histórica. $NOPR$ es una placa de cobre que sirve de tapa a la máquina; en la parte inferior de esta placa se ve una serie NO de ruedas dentadas, todas giratorias alrededor de su centro. La primera rueda (de la derecha)

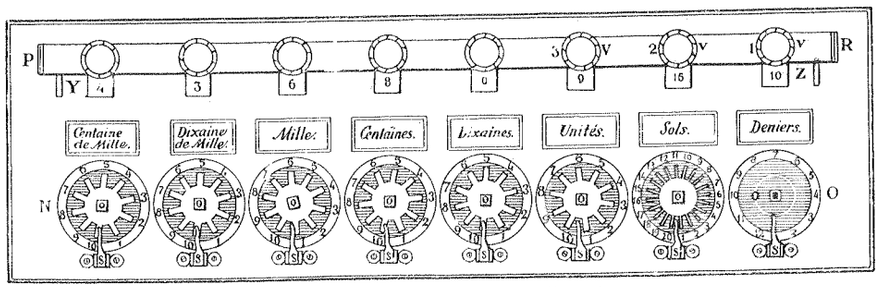


Fig. 135. — Máquina de sumar, de Pascal

tiene 12 dientes, la segunda 20, y todas las demás 10 dientes cada una. Estos números corresponden a las antiguas monedas francesas, *deniers, sols* y *livres,* cuya relación era: 1 *livre* = 20 *sols*, 1 *sol* = 12 *deniers*. De haber sido en nuestros tiempos, habría hecho Pascal todas las ruedas de 10 dientes.

En S se ven unas palanquitas de retención, dispuestas sobre las ruedas de modo que éstas puedan girar por debajo libremente; estos topes S sirven para detener el movimiento de un punzón que se introduce, a mano, entre los dientes de las ruedas, dando vuelta a éstas en el sentido de las agujas de un reloj (6, 5, 4, 3). Cada rueda lleva alrededor fijada una corona en cifras, cuyo número corresponde al de los dientes de cada una.

En *YZ* hay una serie de mirillas por donde se ven cifras: en el caso de la figura 135, 436809 *livres,* 15 *sols* y 10 *deniers*. La posición de la corredera *PR* representada en la figura es la correspondiente a la adición; cuando se trata de restar, se corre para abajo. Esta corredera lleva ruedecillas con cifras, que corresponden a las cifras de las ruedas *NO*, es decir, de derecha a izquierda, 12, 20, 10, 10... La máquina va dotada de un dispositivo para el pase de decenas, de efecto igual al de la actual máquina de Thomas-Burkhardt.

El manejo de la máquina para sumar es como sigue: se pone la corredera *PR* del modo representado en la figura 135, quedando al descubierto las mirillas *YZ*, y todas las ruedas *NO* se ponen en 0. Supongamos que se quiere sumar:

69^l	7^s	8^d
584	15	6

Se introduce el punzón en el diente 8 de la primera rueda *Q* de la derecha y se gira esta rueda hasta su tope *S*; se introduce después el punzón en el 7 de la segunda rueda y se gira hasta su tope *S*, y lo mismo se hace con el 9 para la tercera y el 6 para la cuarta, apareciendo de este modo el primer sumando $69^l\ 7^s\ 8^d$ en las mirillas de arriba. Se repiten estas operaciones para el segundo sumando $584^l\ 15^s\ 6^d$, resultando la suma $654^l\ 3^s\ 2^d$. Pueden hacerse multiplicaciones por repetición de sumas. Por lo que se ve, la máquina de Pascal era sólo una máquina de sumar destinada especialmente a operar con cantidades monetarias.

Máquina de calcular, de Leibniz. Sigue a la de Pascal en orden cronológico la máquina de calcular de Leibniz (1646-1716), de la cual decía su mismo autor, por carta, a Ludolf: «Ya tengo terminado mi instrumento aritmético, que no es parecido a ningún otro, ya que es completamente original». También, en una carta a Thomas Bernet, decía:

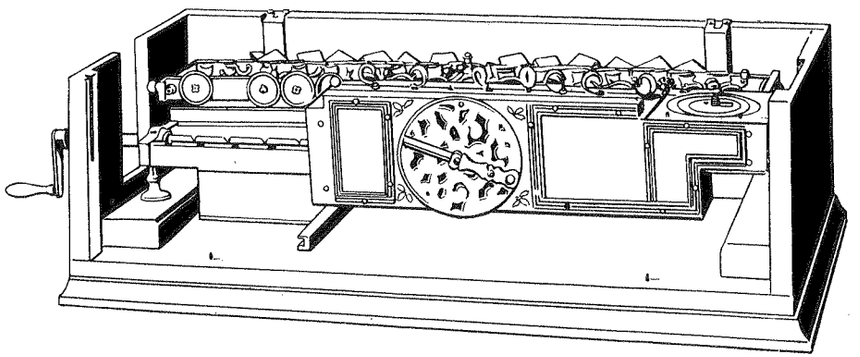


Fig. 136. — Máquina de calcular, de Leibniz

«He tenido la suerte de construir una máquina aritmética, absolutamente distinta de la de Pascal, pues con la mía pueden hacerse grandes multiplicaciones y divisiones sin ayuda de sumas ni restas».

En las figuras 136 y 137 se ve la máquina de Leibniz; la primera ha sido dibujada según una fotografía obtenida por nosotros en 1892 de la máquina existente en la Biblioteca Municipal de Hannóver; la segunda es un esquema en que se conservan las leyendas latinas originales de Leibniz.

A continuación traducimos la parte principal de la descripción de la máquina, hecha en latín por Leibniz, sobre todo en lo referente al modo de multiplicar con la misma:

«Supongamos que se trata de multiplicar dos números, pero sin que su producto tenga más de 10 cifras: por ejemplo 1709 × 365. Se ponen primero todas las manecillas o índices de las 8 ruedas pequeñas *(rotae minusculae)* en el 0 y después se ponen las de las cuatro últimas de la derecha en los números del multiplicando, es decir, en 1709; la parte móvil de la máquina *(pars mobilis)* se pone, al empezar, de modo que la primera raya o señal de las 8 ruedas coincida con la primera señal de las 12 ruedas de la parte inmóvil *(pars immobilis);* en esta parte, todas las ruedas marcan 0.

»Para multiplicar ahora 1709 por 365, se empieza por multiplicar por 5, cosa que se hace del modo siguiente: se introduce un punzón corto en el agujero 5 de la rueda grande de la derecha *(rota majuscula),* correspondiente a la numeración exterior, es decir, de la más cercana al borde, y se hace girar la rueda grande que hay en el medio de la máquina *(magna rota),* con lo cual gira también el disco móvil de la otra rueda grande *(majuscula).*

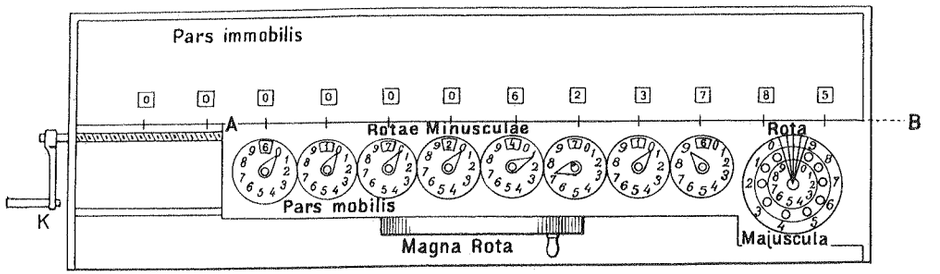


Fig. 137. — Dibujo geométrico de la máquina de Leibniz (longitud, 67 cm)

Al seguir girando la rueda central, llega un momento en que el punzón tropieza con un obstáculo, que se encuentra en la rueda grande de la derecha *(majuscula)* entre el 0 y el 9, y esta resistencia que se nota indica que la operación ha terminado, apareciendo en las mirillas de la parte inmóvil el producto de 1709 por 5, que es 8545.

»Para multiplicar por la segunda cifra 6, se corre la parte móvil a la izquierda, de modo que la señal de la primera de las 8 ruedas coincida con la señal de la segunda de las 12 ruedas de arriba; después se introduce el punzón en el 6 de la rueda grande *(majuscula),* también en la numeración exterior y se repite la operación anterior, y así sucesivamente.»

De aquí se deduce que los discos pequeños *(rotae minusculae)* de la parte móvil *(pars mobilis)* corresponden a las correderas con botones de la máquina de Burkhardt. Las mirillas de la parte fija o inmóvil corresponden a las ventanillas de la parte móvil de la máquina de Burkhardt. El movimiento es, en la máquina de Leibniz, contrario al de la máquina de Burkhardt, cosa que no tiene importancia, ya que se trata sólo de movimientos relativos.

La manivela *K* que se ve a la izquierda, en las figuras 136 y 137, sirve para hacer avanzar un lugar al número puesto, para multiplicar por 10, 100 etc., y la rueda delantera *(magna rota)* pone en movimiento todo el mecanismo, desempeñando el mismo papel que la manivela de la derecha en la máquina de Thomas-Burkhardt.

Por disposición oficial, Arturo Burkhardt desmontó, limpió y comprobó el funcionamiento de la máquina original de Leibniz, que como hemos dicho se conserva en la Biblioteca Municipal de Hannóver.

En la estructura interna de la máquina de Leibniz está realmente contenida la máquina de calcular del Padre Felipe Matthäus Hahn, de Echterdingen, gran matemático

y mecánico, que alternaba su misión sacerdotal con los cálculos matemáticos y la construcción de relojes astronómicos. El invento fué hecho en el año 1770, y la primera máquina se construyó en 1774. La máquina del P. Hahn tiene una disposición circular, con los ejes del numerador y del registrador de pie, es decir, verticales. Las cuatro máquinas construídas por el P. Hahn, de las cuales una se conserva en la Escuela Superior Técnica de Berlín, fueron las primeras máquinas de calcular que tuvieron aplicación verdaderamente práctica.

Casi la misma disposición presenta la máquina de calcular de J. H. Müller, de Darmstadt, que la ideó en 1782 y la construyó en 1783.

La máquina de Hahn puede considerarse como una precursora de todas las máquinas de calcular modernas.

Máquinas de calcular del siglo XIX. La primera máquina de calcular construída ya con fines comerciales y realmente práctica, fué la del alsaciano Carlos Javier Thomas, de Colmar, que en 1820 patentó un nuevo «Aritmómetro». La construcción de la máquina de Thomas se encuentra en esencia en la máquina de Burkhardt, construída en 1879 en Glashütte, y que hemos descrito en la página 108.

La máquina de calcular de Maurel y Jayet (1849), representada en la figura 138, utiliza también el sistema de rodillos de Leibniz: las distintas cifras del multiplicando se ponen corriendo unas ruedecitas dentadas sobre sus ejes, de sección cuadrada, con ayuda de las correderas *S*; pero no hay un rodillo debajo de cada eje, como en la máquina de Thomas, sino que todos los ejes están colocados alrededor de un solo rodillo. Al girar este último, va engranando sucesivamente con todas las ruedas dentadas.

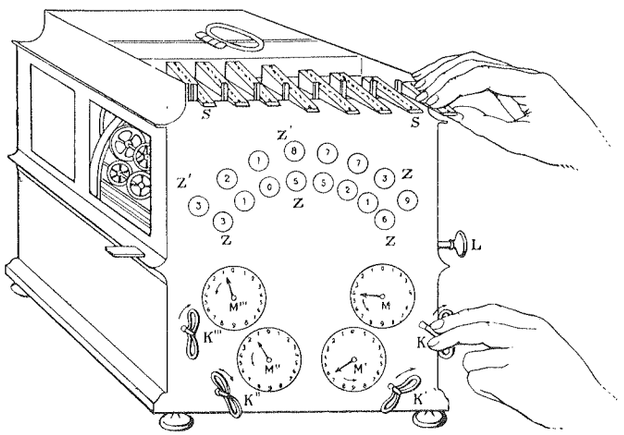


Fig. 138. — Máquina de calcular de Maurel y Jayet

Otra particularidad de esta máquina consiste en llevar varios rodillos montados sobre el mismo eje, de modo que puedan girar con entera independencia unos de otros. Estos rodillos corresponden a otras ruedas dentadas, montadas en los mismos ejes cuadrados que las antes citadas. Supongamos que se ponga la última corredera *S* en el número 3: al tiempo de hacer esta operación, se coloca una rueda del último eje cuadrado frente a tres dientes del primer rodillo y simultáneamente una rueda del penúltimo eje cuadrado queda frente a tres dientes del segundo rodillo, y una rueda dentada del tercer eje frente a otros tres dientes del tercer rodillo, etc. Lo mismo sucede al poner otra corredera en otro número, engranando otras ruedas de los distintos ejes con un número igual de dientes de cada rodillo. Con esta disposición se evita el tener que correr el numerador al pasar de una cifra del multiplicador a la anterior, como sucede en muchas máquinas de calcular.

Después de puestas las cifras del multiplicando con las correderas *S*, se pone en movimiento el primer rodillo dando vueltas a la llave *K*; el número de vueltas que se da a esta

llave es igual a la última cifra del multiplicador, por lo cual se le da vueltas hasta que la manecilla o índice *M* señale esta cifra. Lo mismo se hace con las llaves *K'*, *K''* y *K'''*, es decir, se les da sucesivamente vueltas hasta que los índices *M'*, *M''* y *M'''* marquen respectivamente las demás cifras del multiplicador, correspondiendo a cada número otro igual de vueltas del rodillo respectivo. En *Z* aparece el producto, y en *Z'* se van viendo las sumas de los productos que se vayan obteniendo.

El botón *L*, que empuja hacia la izquierda a una corredera, sirve para poner a cero los indicadores, y, por lo tanto, para volverlo todo a su posición normal.

La unión del mecanismo numerador con el registrador o indicador, y el pase de decenas en este último, constituye una novedad en esta máquina, por hacerse mediante los llamados piñones satélites.

La máquina de Maurel y Jayet, llamada «Aritmaurel», ha tenido poca aceptación, a pesar de sus muchas ventajas, debido probablemente a su mecanismo tan complicado.

Con esta máquina guarda mucha analogía la del matemático ruso Tschebyscheff, construída en el año 1878. Como mecanismo numerador, dispone esta máquina de un gran cilindro, que puede engranar con nueve ruedas dentadas independientes. La primera de estas ruedas tiene 9 dientes, la segunda 8, y así sucesivamente; estas ruedas están dispuestas de tal modo que nunca toca más de un diente en una generatriz del cilindro. Alrededor de este último hay colocados varios ejes de sección cuadrada, con distintas ruedas dentadas, que sirven para poner las diferentes cifras del multiplicando.

El pase de decenas, en el registrador, se hace mediante piñones satélites.

Al contrario de la máquina de Maurel y Jayet, ésta tiene un solo rodillo numerador, por lo cual tiene que estar provista de un sistema de avance para pasar de una cifra del multiplicador a otra; el mecanismo registrador o indicador es el que se corre, y de modo automático.

Para multiplicar se procede del modo siguiente: se empieza por poner el multiplicando, y con un punzón se toman las cifras del multiplicador en unas ruedas numeradas especiales; se gira entonces la manivela, con lo cual se pone en movimiento el mecanismo numerador y estas ruedas o discos numerados; el primero de éstos gira hasta que su punzón tropieza con un obstáculo, y entonces, automáticamente, se corre un lugar el mecanismo registrador y se pone en movimiento el disco siguiente. De este modo el operador da vueltas libremente a la manivela hasta que el último disco tropiece con su tope correspondiente.

Esta máquina se conserva en París, en el «Conservatoire des Arts et Métiers».

La máquina de calcular «Mercedes», de Hamann, tiene, en lugar del rodillo o cilindro, un disco especial sobre el cual están dispuestos radialmente los ejes del mecanismo registrador. Toda la máquina está encerrada en una caja cilíndrica de 13,5 cm de diámetro por 3,5 cm de altura. El disco principal lleva nueve series concéntricas de dientes: la serie más distante del centro tiene un solo diente en el borde del disco, mientras que la más próxima tiene nueve dientes, a una distancia del centro igual aproximadamente a un tercio del radio. Sobre los ejes de sección cuadrada del mecanismo registrador pueden correr las ruedas dentadas, en dirección radial respecto al disco, engranando con los dientes de este último. A cada vuelta del disco giran también las ruedas del registrador en un número de dientes igual al de la serie con que engrane.

La construcción de las máquinas de Maurel y Jayet y de Tschebyscheff está fundada en que la multiplicación es sólo una repetición de la suma, y ninguna de las dos significó un progreso esencial en la materia, pues en ambas había que dar tantas vueltas como en

y mecánico, ésta que la
ción de re K'' es
constru- res-
del motro
truío

127

única diferencia de no tener que correr el mecanismo registrador al ra del multiplicador.

ipio estaba basada la máquina del profesor Selling de Würzburg, 6, tal como la representa la figura 139 a escala 1 : 10 de la natural. or consiste en diez varillas paralelas, cuyos extremos, a derecha e izquierda, van unidos mediante unas pinzas de Nuremberg. La primera de estas varillas, que es la que se ve delante en la figura 139, es fija. La anilla que se ve en la última varilla sirve para abrir y cerrar las pinzas.

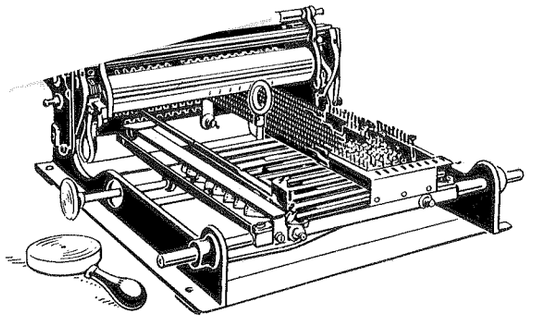


Fig. 139. — Máquina de calcular de Selling (aproximadamente $^1/_{10}$ del tamaño natural)

Sobre estas varillas descansan unas barras dentadas, en correspondencia con aquéllas y provistas de agujeros; al cerrar las pinzas, se unen las barras con las varillas, según el valor del multiplicando, mediante punzones adecuados, quedando así *puesto* el multiplicando. Si, por ejemplo, la última barra dentada se une con la cuarta varilla, al abrir del todo las pinzas se corre aquélla en 20 dientes; si la varilla se abre sólo los $^4/_5$ del total, se corre 16 dientes, si los $^3/_5$, 12 dientes, etc. Si se trata de multiplicar el número puesto, 4, por 9 se abren una vez completamente las pinzas, y después se abren en $^4/_5$; con la primera operación corre la barra 20 dientes, y con la segunda 16, es decir, 36 en total (4×9).

El movimiento de las varillas queda indicado en el registrador, que consiste en un sistema muy ingenioso de piñones satélites. Si las cuatro últimas barras dentadas se unen con las varillas 3.ª, 6.ª, 9.ª y 4.ª respectivamente, queda puesto el multiplicando 3694, y abriendo las pinzas $^3/_5$ del total, se ve en el registrador el producto $3 \times 3694 = 11082$. Para multiplicar por un factor de varias cifras, hay que correr el mecanismo numerador un lugar hacia la izquierda, al pasar de una cifra a otra.

La antigua máquina representada en la figura 139 fué construída por el mecánico Max Ott, de Munich.

Un nuevo principio o fundamento para la construcción de las máquinas de multiplicar, fué el empleado por León Bollée, en el año 1889, y posteriormente por Steiger en su máquina «Millionär», ya descrita en la página 116.

El hecho que más ha impulsado la aplicación y uso de las máquinas de calcular ha sido la aplicación a las mismas de motores eléctricos para su funcionamiento, pudiéndose hoy considerar el problema de la multiplicación mecánica completamente resuelto.

BIBLIOGRAFÍA:

Dr. EDUARD SELLING, Eine neue Rechenmaschine, mit zwei lithogr. Tafeln, Berlín, 1887. (Patente núm 39631 de 16 abril 1886.) Esta máquina se halla también descrita en Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 1887, págs. 403 y 413, y en Zentralzeitung f. Optik und Mech., 1888, pág. 3; Naturw.-tech. Umschau, tomo V, pág 198; Gaea, tomo XXV, pág. 134; Der Maschinenbauer, tomo XXIV, pág. 548. Con algunas de sus mejoras la describe POPPE en Dinglers Polytechn. Journal, 1889, tomo CCLXXI págs. 193, 205 y lámina 10. Una sencilla explicación del principio se encuentra en J LÜROTH, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig, 1900. El mismo SELLING describe una forma perfeccionada de su máquina en Zeitschr f. Math. u. Phys., 1905, páginas 86-103.

F. REULEAUX, Die sogenannte Thomassche Rechenmaschine, 2.ª edic., Leipzig, 1892.

W. DYCK, Katalog mathematischer und math.-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. München, 1892; Nachtrag, 1893.

V. G. von BOHL, Aparatos y máquinas para efectuar operaciones aritméticas (en lengua rusa). Moscou, 1896.

R. MEHMKE, Numerisches Rechnen. Encykl. d. math. Wiss. tomo I. Leipzig, 1901.

M. D'OCAGNE, Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. 3.ª edic., París, 1928.

L. JACOB, Le Calcul mécanique. París, 1911.

K. LENZ, Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Leipzig-Berlín, 1924.

E. MARTIN, Die Rechenmaschinen und ihre Entwicklungsgeschichte. Pappenheim, 1925.

F. TRINKS, Geschichtliche Daten aus der Entwicklung der Rechenmaschine von Pascal bis zur Nova-Brunsviga. Braunschweiger G. N. C. Monatsschrift, 1927, págs. 251-288.

CAPÍTULO IV

Cálculo de coordenadas

§ 34. Definiciones y generalidades

Un punto queda determinado, en un plano, por sus coordenadas rectangulares x, y. El eje de las X se considera como eje principal, al cual es perpendicular el eje de las Y. Se da a las coordenadas los signos + y —, para indicar el sentido de los ejes sobre que se miden aquéllas. Por ejemplo, en la figura 140, las coordenadas del punto P son $+y+x$, las del P' son $+y-x$, las del P'' $-y-x$, y las del P''' $-y+x$.

En Topografía se supone fijo un sistema de ejes coordenados, de modo que las x positivas están dirigidas hacia el Norte, y las y positivas hacia el Este, como se ve en la figura 140.

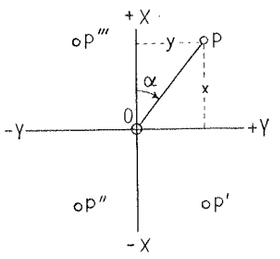


Fig. 140

La dirección de un radio vector OP, que sale del origen de coordenadas, está determinada por el ángulo α que forma con la dirección positiva del eje de las X, es decir, contado de $+X$ a $+Y$, suponiendo que OP coincide primero con OX y que después gira alrededor de O, hacia OY, o sea de izquierda a derecha. A este ángulo se le llama *ángulo de dirección* o *acimut*.

Este ángulo fué llamado por Gauss *acimut in plano*, para distinguirlo del acimut esférico, es decir, sobre la superficie esférica o esferoidal, y en las distintas naciones recibe diversos nombres, pero todos representativos de la separación angular del radio vector respecto a la dirección Norte.

Además del sistema de coordenadas orientado según los puntos cardinales, se emplean, para fines especiales, otros sistemas puramente locales, orientados de manera arbitraria, por ejemplo, con el eje $+X$ según un lado de un polígono, o según la tangente a una curva de una vía férrea, o a lo largo del trayecto principal de una de estas vías, etc. En estos casos, se deben tomar los ejes de tal modo que siempre se pase del $+X$ al $+Y$ por una rotación del mismo sentido que la de las agujas del reloj, ya que todas las fórmulas responden a esta condición.

En Topografía no se emplea el sistema ordinario de coordenadas de la Geometría analítica, que tiene $+X$ hacia la derecha y $+Y$ hacia arriba, es decir, que no puede tomarse como sistema topográfico de coordenadas aquel en que el giro de la dirección positiva desde el eje de las x $(+X)$ hacia la dirección positiva del eje de las y $(+Y)$ no se verifique en el llamado ordinariamente sentido de rotación positivo, que es el de las agujas de un reloj; al sentido de rotación de izquierda a derecha se le llama *normal*, y así se denominan también los limbos graduados de este modo, y *anormal* al contrario, o de derecha a izquierda.

Sistema de coordenadas empleado en el Mapa nacional de España, a cargo del Instituto Geográfico y Catastral (*)

El sistema de coordenadas empleado por el Instituto Geográfico y Catastral de España tiene como ejes el meridiano que pasa por el Observatorio Astronómico de Madrid y el paralelo de latitud 40°.

El mapa nacional se publica en escala 1 : 50000, dividido en 1130 hojas, de 20 minutos de base en sentido de los paralelos, por 10 de altura en el de los meridianos, considerando como plana la parte de superficie terrestre comprendida por cada una y usando la tercera proyección de Tissot. En estas hojas se sitúan los vértices geodésicos por sus coordenadas geográficas. La equidistancia entre las curvas de nivel es de 20 metros.

También el Instituto Geográfico y Catastral forma un mapa corográfico de España, con la mayor suma de datos que es posible obtener, en escala 1 : 200000, adoptando para

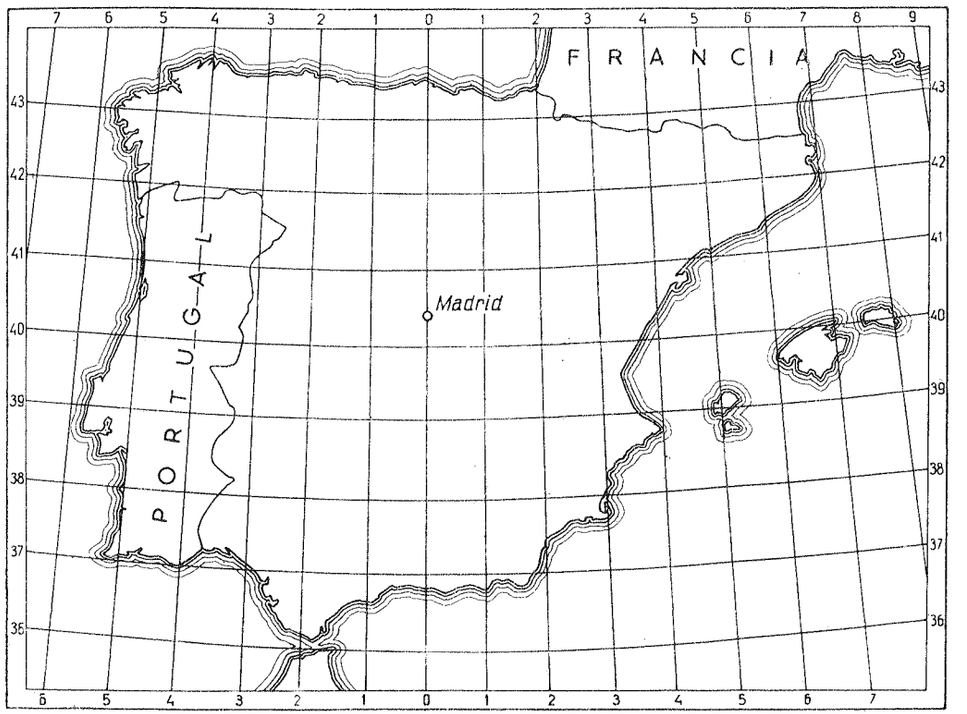


Fig. 141. — Mapa nacional de España a 1 : 50000; división en zonas por meridianos y paralelos

su representación el tercer sistema de Tissot; la equidistancia entre las curvas de nivel es de 100 metros. Cada hoja representa una parte del esferoide comprendida entre dos paralelos cuyas latitudes difieren 60′, y dos meridianos a 100′ de diferencia de longitudes; se ha adoptado esta división para que el número de hojas resulte el menor posible, habida cuenta del tamaño de las piedras que para el grabado posee el Instituto Geográfico.

Del estudio de esta proyección dedúcese que es simétrica con relación al meridiano medio, y por lo tanto, obtenidas las coordenadas de los puntos de intersección de los para-

(*) Añadido por el traductor.

lelos con los meridianos situados al E. del principal o medio, se tendrán las de los puntos de cruce de los mismos paralelos con otros meridianos situados al O. de aquél y cuyas diferencias de longitud con el central sean idénticas, pero en diferente sentido, que las de los otros meridianos. En cada hoja se toman como ejes coordenados el meridiano medio y la tangente al paralelo medio en su punto medio.

Las coordenadas geográficas empleadas para la situación de los vértices geodésicos son los valores angulares de la longitud y latitud, referida aquélla al meridiano que pasa por el Observatorio Astronómico de Madrid, y la segunda al Ecuador.

En la figura 141 se ve un mapa de España con la división en zonas por meridianos y paralelos, y la figura 142 representa una de las hojas del mapa corográfico de España,

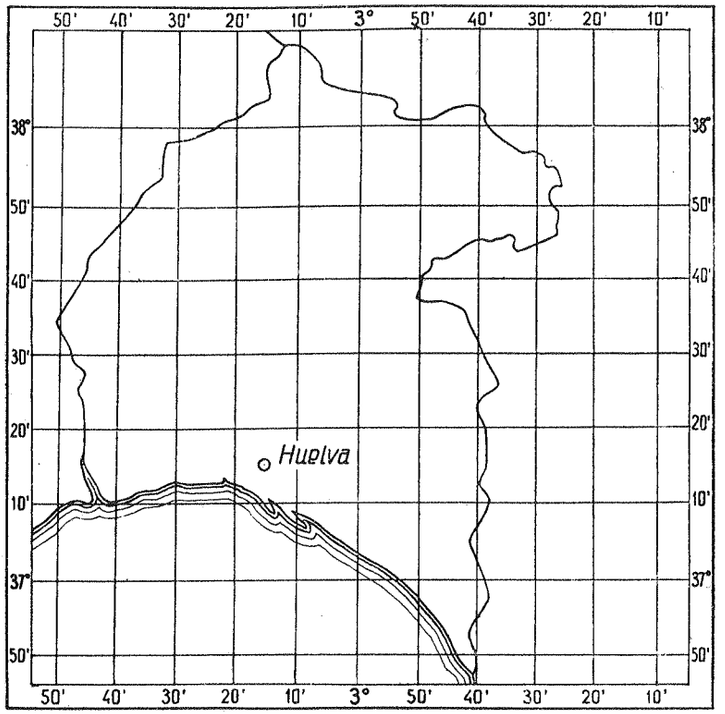


Fig. 142. — Disposición de una de las hojas del mapa corográfico de España a 1 : 200000

levantado a escala 1 : 200000 por el Instituto Geográfico, empleando el tercer sistema de Tissot.

También tiene publicados el Instituto Geográfico mapas de España en escala 1 : 1000000 y 1 : 500000, ambos en la proyección policónica acordada para el mapa internacional del Mundo en las Conferencias de Londres (1909) y París (1913).

§ 35. Fórmulas fundamentales del cálculo de coordenadas

Existen algunas fórmulas sencillas que son de uso diario en el cálculo de coordenadas, por lo cual vamos a deducirlas con todo detalle.

En la figura 143 se tienen dos puntos P, P', dados por sus coordenadas, que son respectivamente y, x e y', x'. La recta que une ambos puntos, considerada de P a P', tiene por acimut α, y considerada al contrario, es decir, de P' a P, tiene por acimut α', de modo que puede escribirse:

$$\text{acimut de } (PP') = \alpha \tag{1}$$
$$\text{acimut de } (P'P) = \alpha'. \tag{2}$$

De aquí resulta la siguiente definición: cuando de un punto P parte un rayo PP', se obtiene el acimut de este rayo trazando por P una recta PQ paralela al eje de las X, en el mismo sentido que la dirección positiva de este eje, y haciendo girar esta recta en sentido positivo o normal hasta que coincida con el segmento PP'. La medida o valor de este giro es el acimut del rayo PP'.

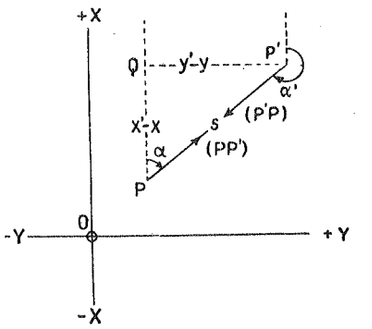


Fig. 143

Puesto que dos puntos determinan dos rayos, iguales pero de sentido contrario, habrá también dos acimutes, que son el de PP' y el opuesto, de $P'P$, que difieren entre sí 180°, es decir, que

$$(P'P) = (PP') \pm 180° \tag{3}$$

El doble signo ± de 180° significa, que un giro de 360° no hace variar la posición ni el acimut de un rayo. De acuerdo con esta teoría, pueden establecerse las siguientes igualdades, extrañas e inadmisibles en los cálculos ordinarios, pero válidas tratándose de orientaciones:

$$+180° = -180°, \quad +360° = 0, \quad -360° = 0 \tag{4}$$

Del mismo modo, y teniendo en cuenta estas igualdades, pueden siempre evitarse los acimutes negativos, pues si, por ejemplo, se tiene — 40°, se puede escribir

$$-40° = -40° + 360° = +320°.$$

Y no sólo se permite aumentar + 360°, sino un múltiplo cualquiera de ±360°.

Los acimutes se designan con una letra griega, por ejemplo α, o con dos mayúsculas encerradas en un paréntesis, tal como (PP'), que indica el acimut de la recta dirigida de P a P', mientras que $(P'P)$ representa el acimut del rayo que va de P' a P. En la figura 143, las flechas se corresponden con esta notación.

La distancia entre los dos puntos P y P', que se expresa por PP', está indicada en la figura por la letra s.

Con lo dicho basta para deducir de la figura las dos siguientes igualdades:

$$y' - y = s \operatorname{sen} \alpha \qquad x' - x = s \cos \alpha \tag{5}$$

o bien, empleando la otra notación:

$$y' - y = PP' \operatorname{sen} (PP') \qquad x' - x = PP' \cos (PP'). \tag{6}$$

Estas ecuaciones y sus distintas aplicaciones y consecuencias constituyen el fundamento de la Topografía y la Agrimensura, basándose en ellas todas las determinaciones de puntos por coordenadas rectangulares.

Estas ecuaciones son aplicables, en general, cualesquiera que sean los signos de $y' - y$ y de $x' - x$, y para todos los cuadrantes en que puede encontrarse α, tomándose siempre como positiva la distancia $PP' = s$ y dando al seno y coseno el signo que les corresponda según el cuadrante, a saber:

	Cuadrantes I	II	III	IV
sen	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

	Cuadrantes I	II	III	IV
tg y cot	+	−	+	−

2.° cuadrante: de 90° a 180°
sen 108° = + cos 18°
cos 108° = − sen 18°

3.er cuadrante: de 180° a 270°
sen 220° = − sen 40°
cos 220° = − cos 40°

4.° cuadrante: de 270° a 360°
sen 307° = − cos 37°
cos 307° = + sen 37°

Tomando ahora el rayo invertido, es decir, $P'P$, se deducen también de la figura 143 las siguientes ecuaciones:

$$y - y' = s \operatorname{sen} \alpha' \qquad x - x' = s \cos \alpha' \tag{7}$$

o también

$$y - y' = P'P \operatorname{sen} (P'P) \qquad x - x' = P'P \cos (P'P). \tag{8}$$

Como ejemplo numérico consideremos varios puntos de una triangulación, tal como se ve en la figura 144, donde se representan, a escala 1 : 40000, las coordenadas correspondientes al antiguo mapa de Hannóver.

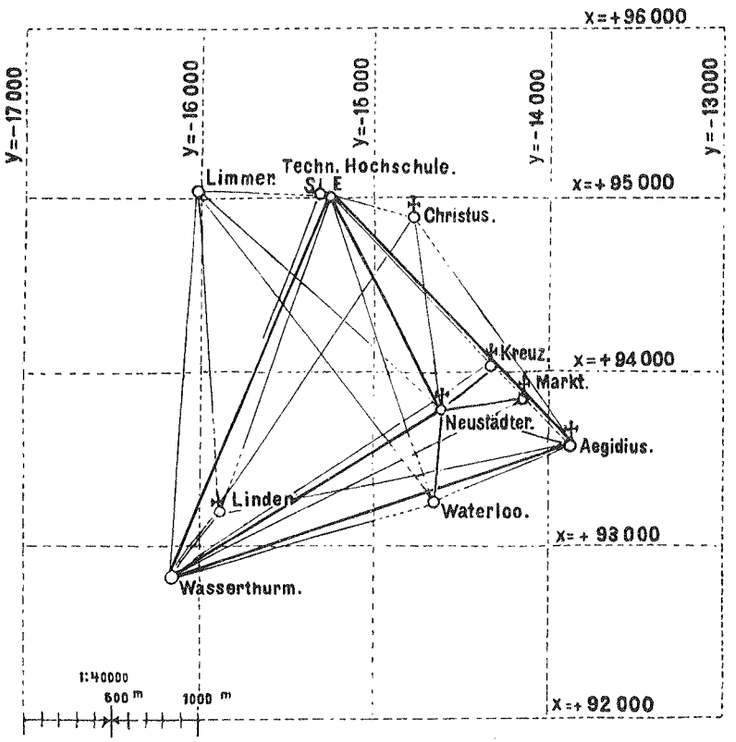


Fig. 144. — Antiguo sistema de coordenadas de Hannóver. Origen de coordenadas, Göttingen. Escala 1 : 40000

Los datos son los siguientes:

Escuela técnica superior, placa de hierro E, . . . $y = -15266{,}91$ m, $x = +95002{,}25$ m (9)
Distancia entre la Escuela y el obelisco de Waterloo . . . . . $s = 1851{,}02$ m (10)
Acimut de la recta que une estos dos puntos . . . . . $\alpha = 160° 46' 46''$ (11)

Se quiere hallar el valor de las coordenadas y', x' del obelisco de Waterloo, para lo cual se hacen las siguientes operaciones:

$\log s = 3{,}267411$	$\log s = 3{,}267411$
$\log \operatorname{sen} \alpha = 9.517467$	$\log \cos \alpha = 9{,}975091\ (n)$
$\log (s \operatorname{sen} \alpha) = 2{,}784878$	$\log (s \cos \alpha) = 3{,}242502\ (n)$
$s \operatorname{sen} \alpha = +609{,}37$	$s \cos \alpha = -\ 1747{,}84$ (12)
$y = -15266{,}91$	$x = +95002{,}25$
y como resulta $y' = -14657{,}54$ m	$x' = +93254{,}41$ m (13)

Puede presentarse el problema inverso, es decir, conocidas las coordenadas y, x de un punto P, y las y', x' de otro punto P', determinar el acimut de PP', o sea α, y la distancia s entre ambos puntos.

Para ello se parte también de las fórmulas

$$y' - y = s \operatorname{sen} \alpha, \qquad x' - x = s \cos \alpha, \tag{14}$$

que divididas ordenadamente dan:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x' - x}, \tag{15}$$

o, despejando s en las ecuaciones (14),

$$s = \frac{y' - y}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{y} \quad s = \frac{x' - x}{\cos \alpha}. \tag{16}$$

La igualdad que da el valor de α no determina concretamente este valor, pues para un valor de α que la satisfaga, hay siempre otro valor $\alpha \pm 180°$ que también la satisface, prescindiendo de la indeterminación que suponen los múltiplos positivos o negativos de 360°.

En las dos igualdades que dan el valor de s se observa que hay una condición implícita que satisfacer, a saber, que debiendo resultar positivo el valor de la distancia s en ambas igualdades, debe tener sen α el mismo signo de $y' - y$, y cos α el mismo de $x' - x$. De aquí resulta la regla siguiente:

α termina en el cuadrante	I,	II,	III,	IV
cuando la fracción $\frac{y' - y}{x' - x}$ tiene respectivamente el signo	$\frac{+}{+}$,	$\frac{+}{-}$,	$\frac{-}{-}$,	$\frac{-}{+}$

(17)

Como ya hemos dicho, la aplicación de estas fórmulas y leyes constituye el fundamento de todas las determinaciones y cálculos con coordenadas rectangulares. De esta última regla y de la fórmula que da la tg α, se deducen las siguientes leyes auxiliares:

1.ª Si se tienen en la fracción $\frac{y' - y}{x' - x}$ los signos $\frac{+}{+}$, el ángulo α corresponde al primer cuadrante, y todo es positivo.

2.ª Si se tienen los signos $\frac{-}{-}$, α termina en el tercer cuadrante, y se procede como en el caso anterior, agregando después 180° al valor resultante. (Regla: $\frac{-}{-} = +$.)

3.ª Cuando se tiene $\frac{+}{-}$ ó $\frac{-}{+}$, se busca en las tablas de logaritmos de líneas trigonométricas el log cot en vez del log tg, y al valor del ángulo hallado se le agregan 90° ó 270° según que el signo − esté en el denominador o en el numerador de la fracción $\frac{y' - y}{x' - x}$.

Estas reglas se resumen en el siguiente cuadro sinóptico:

Cociente positivo: $\frac{+}{+}$, $\frac{-}{-}$	Cociente negativo: $\frac{+}{-}$, $\frac{-}{+}$
empléase la tg.	en vez de tg se emplea la cot.
Aumento de 0°, 180°	Aumento de 90°, 270°
a denominador negativo,	90° de aumento
a numerador »	270° » »

Tratándose de división centesimal, se sustituyen en este cuadro 90° por 100^g, 180° por 200^g, y 270° por 300^g.

Volvamos al ejemplo anterior, suponiendo que se conocen las coordenadas de la Escuela técnica y del obelisco de Waterloo y apliquemos las fórmulas que dan tg α y s:

$$\begin{array}{lll} \text{Obelisco:} & y' = -14657{,}54 & x' = +93254{,}41 \\ \text{Escuela técnica:} & y = -15266{,}91 & x = +95002{,}25 \\ \hline \text{Diferencias:} & y' - y = +609{,}37 & x' - x = -1747{,}84 \end{array} \tag{18}$$

$$\begin{array}{l} \log (y' - y) = 2{,}784881 \\ \log (x' - x) = 3{,}242502\,(n) \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}542379\,(n) \end{array} \tag{19}$$

Teniendo en cuenta la regla dada para los signos, se ve que por ser

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{+}{-},$$

el ángulo α caerá en el segundo cuadrante, es decir, que se trata del caso de un cociente negativo con el signo — en el denominador. Según lo dicho anteriormente, se buscará 9,542379 en la columna de las cot en las tablas logarítmicas, encontrándose como antilogaritmo el valor: 70° 46′ 46″; luego se tendrá:

$$\alpha = 70^\circ\,46'\,46'' + 90^\circ = 160^\circ\,46'\,46''. \tag{20}$$

De las dos fórmulas que daban el valor de s se deduce:

$$\begin{array}{ll} \log (y' - y) = 2{,}784881 & \log (x' - x) = 3{,}242502\,(n) \\ \log \operatorname{sen} \alpha = 9{,}517467 & \log \cos \alpha = 9{,}975091\,(n) \\ \hline \log s = 3{,}267414 & \log s = 2{,}267411 \end{array} \tag{21}$$

$$s = 1851{,}04 \text{ m} \qquad s = 1851{,}02 \text{ m} \tag{22}$$

Estos dos valores de s no concuerdan exactamente, siendo el segundo, $s = 1851{,}02$ m, el de más precisión. Conviene detenerse un poco en este punto. Si $y' - y$ es muy pequeño en relación a $x' - x$, es también muy pequeño sen α, y su inversa $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ muy grande; podemos calcular la hipotenusa s, como en el triángulo PQP' de la figura 143, en función de $y' - y$, multiplicando esta diferencia, que es un cateto, por $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, siendo α el ángulo opuesto a este cateto; y puesto que el valor de $y' - y$ se redondea al centímetro y puede llevar un error de medio centímetro, el error de s puede alcanzar a $\frac{0{,}5}{\operatorname{sen} \alpha}$ cm, que para valores pequeños de α resulta bastante considerable.

Cuando $x' - x$ es mayor que $y' - y$, se debe operar con el coseno, y en caso contrario, con el seno.

Para saber si ha de emplearse el seno o el coseno, se deja, al empezar el cálculo, un renglón libre entre log $(y' - y)$ y log $(x' - x)$, y después se rellena este renglón, buscando

en la tabla de logaritmos de senos y cosenos el logaritmo correspondiente al ángulo α dado por la tg, y se resta del logaritmo más grande de los dos anteriores, es decir, del de $(y' - y)$ o del de $(x' - x)$. En el ejemplo anterior, se procedería del modo siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{Punto Obelisco de Waterloo:} & y' = -14697{,}54 & x' = +93254{,}41 \\ \text{» Escuela técnica:} & y = -15266{,}91 & x = +95002{,}25 \\ \hline \text{Diferencias:} & y' - y = +609{,}37 & x' - x = -1747{,}84 \end{array} \tag{23}$$

$$\begin{array}{l} \log (y' - y) = 2{,}784881 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(renglón libre)} \\ \log (x' - x) = 3{,}242502\,(n) \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}542379\,(n) \end{array}$$

Por ser un caso de cociente negativo $\frac{+}{-}$, se tiene:

$$\begin{array}{l} \alpha = 70^\circ\,46'\,46'' \\ +\ 90 \\ \hline \alpha = 160^\circ\,46'\,46'' \end{array} \tag{24}$$

Se abre la tabla de logaritmos, por 70°, y se busca en la columna de senos y cosenos (sen abajo y cos arriba: argumento de ángulos a la derecha), el valor correspondiente a 70° 46′ 46″, que es 9,975091, y se pone en el renglón que antes se dejó vacío; este valor se resta del mayor de los otros dos [log $(y' - y)$ o log $(x' - x)$], completándose el cálculo como sigue:

$$\begin{array}{ll} \log (y' - y) = 2{,}784881 & \\ \log (\operatorname{sen} \alpha \text{ ó } \cos \alpha) = 9{,}975091\,(n) & \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \text{ se resta el segundo renglón del} \\ \log (x' - x) = 3{,}242502\,(n) & \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \text{ tercero para tener log } s \\ \hline \log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}542379\,(n) & \alpha = 160^\circ\,46'\,46'' \qquad (24^*) \\ \log s = 3{,}267411 & s = 1851{,}02 \text{ m} \qquad (25) \end{array}$$

Estos valores coinciden con los anteriormente hallados, como siempre debe suceder.

En vez de restar el log sen o el log cos se puede sumar el complemento logarítmico del sen o del cos, lo cual resulta más cómodo cuando el log sen o el log cos empieza por 9,999.....

Si se trata de hallar solamente la distancia, y no el acimut, se pasa directamente del log tg α al log sen α ó al log cos α; también se puede calcular la distancia por el teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2}. \tag{26}$$

Esto último se hace cuando se dispone de una tabla de cuadrados y raíces cuadradas, pues de no ser así, es preferible recurrir al cálculo de la distancia en función del ángulo auxiliar α.

Comprobación del cálculo del acimut. En el Catastro de Prusia se emplean los dos métodos de cálculo siguientes para el cálculo del acimut:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \begin{array}{l} \text{siendo} \\ \text{y} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta y = y' - y \\ \Delta x = x' - x \end{array}$$

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}.$$

Aplicados estos dos métodos al ejemplo antes considerado, resulta:

$$\begin{array}{ll} x'-x=\Delta x=-1747{,}84 & \log(\Delta x+\Delta y)=3{,}056322\,(n)\\ y'-y=\Delta y=+\ 609{,}37 & \log(\Delta x-\Delta y)=3{,}372398\,(n)\\ \hline \Delta x+\Delta y=-1138{,}47 & \log \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=9{,}683924\\ \Delta x-\Delta y=-2357{,}21 & \\ 45^\circ+\alpha=205^\circ\,46'\,46'' & \alpha=160^\circ\,46'\,46'' \end{array} \qquad (27)$$

Como se ve, estos valores concuerdan perfectamente con el (24) antes hallado.

Esta comprobación tiene el único inconveniente de que al hacer uso de Δx y Δy, no quedan comprobadas las diferencias respectivas $x'-x$ e $y'-y$, lo cual se puede salvar poniendo la fórmula que da tg $(45^\circ+\alpha)$, en la forma siguiente:

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{(x'+y')-(x+y)}{(x'-y')-(x-y)},$$

donde no intervienen las diferencias Δx y Δy.

Notaciones gráficas. Cuando es preciso, se recurre a la representación gráfica, donde se señalan los ángulos con arcos; pero también pueden representarse los acimutes del modo indicado en la figura 143, donde (PP') y $(P'P)$ significan respectivamente α y α'. Ahora bien, para evitar confusiones y facilitar los cálculos, se emplean con preferencia las flechas, indicadoras del sentido de cada rayo; por ejemplo, en la figura 145, los acimutes de AP y de BP, designados respectivamente por φ y ψ, se hacen resaltar con las flechas correspondientes. Las coordenadas de los puntos extremos no se hacen constar en la figura. En la figura 146 se ven claramente representados los acimutes y las distancias.

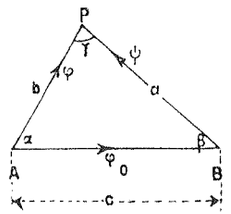


Fig. 145

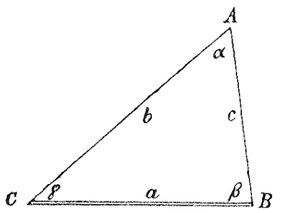


Fig. 146

De estas figuras se deducen inmediatamente las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{l|l} y_p-y_a=b\operatorname{sen}\varphi,\quad y_p-y_b=a\operatorname{sen}\psi & \operatorname{tg}(CB)=\dfrac{y_b-y_c}{x_b-x_c}\\ x_p-x_a=b\cos\varphi,\quad x_p-x_b=a\cos\psi & \\ \varphi=(AP)=(AB)-\alpha & y_a=y_c+b\operatorname{sen}(CA)=y_b+c\operatorname{sen}(BA)\\ \psi=(BP)=(BA)+\beta & x_a=x_c+b\cos(CA)=x_b+c\cos(BA)\\ \gamma=(PA)-(PB)= & (CA)=(CB)-\gamma,\quad (BA)=(BC)+\beta\\ =(\varphi\pm180^\circ)-(\psi\pm180^\circ)=\varphi-\psi & (BC)=(CB)\pm180^\circ \end{array}$$

Claro está que el cálculo con coordenadas y acimutes puede hacerse sin figura alguna, aunque es natural que hasta no tener práctica suficiente, se dibuje una figura con regla y a escala, aunque sea aproximada, para tener una primera comprobación de los signos de las diferencias de coordenadas, y de los cuadrantes en que se encuentran los acimutes.

Para todos los trabajos de poligonales y triangulaciones, debe hacerse un esquema o croquis donde se representen y se vean claramente los elementos que hay que calcular, como se indica en la figura 144.

Observación. En las instrucciones del Catastro prusiano, y en los formularios del mismo, se designan los acimutes con la letra griega ν afectada de índice y subíndice; por ejemplo ν_a^b representa el acimut del rayo que va del punto P_a al P_b, es decir, que según la figura 145, puede escribirse lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{acimut } (AB)=\nu_a^b\\ \quad\ \ \ (AP)=\nu_a^p\\ \quad\ \ \ (BP)=\nu_b^p \end{array}$$

Del mismo modo interpretaremos ν_a^c, etc.

También el cálculo de coordenadas del Catastro prusiano presenta algunas particularidades dignas de mención: por ejemplo, aunque lo general es distinguir con los signos + y — la dirección de las coordenadas x, y, en el referido catastro se emplea, en vez del signo —, el complemento aritmético, con el signo $\times$ antepuesto; es decir, que en el caso de la Escuela técnica superior, de la figura 144, se tiene:

$$\begin{array}{lll} \text{notación ordinaria} & y=-15266{,}91\text{ m} & x=+95002{,}25\text{ m}\\ \text{notación del Catastro prusiano} & y=\times\,84733{,}09 & x=95002{,}25 \end{array}$$

Sabido esto, es fácil ver que se puede pasar sin la menor dificultad de una notación a la otra. Para las abscisas x pueden evitarse siempre todos los signos negativos con sólo tomar el origen de coordenadas lo bastante al sur para que todas las x resulten positivas. Para las ordenadas y conviene conservar ambos signos + y —, por contarse también de este modo la longitud geográfica; en Geodesia no debe emplearse la notación $\times\, y$, pues de hacerlo así, hay que cambiar al signo $\times$ por el — antes de tomar el log y. (Véanse las Instrucciones del Instituto Geográfico Español.)

§ 36. Tablas y formularios

Tablas de logaritmos. Para los cálculos topográficos se emplean tablas de logaritmos de cinco y de seis cifras. Las de siete cifras raramente pueden necesitarse; en cambio, las de cuatro son muy convenientes para cálculos aproximados.

Hay muchas tablas de cinco cifras, de las cuales, las mejores para Topografía, son las de Gauss y las de Albrecht.

Hasta el año 1880 se empleaban las tablas de siete cifras en todos los cálculos, aun en los casos de bastar con cinco o seis; pero la reacción contra este exceso inútil de cifras ha degenerado en parte, actualmente, en el abuso contrario, empleándose casi para todo las tablas de cinco cifras. La regla que debe seguirse al hacer un cálculo, consiste en tomar una cifra más, en las tablas, de las correspondientes a la precisión real de los números de que se trate. En todos los casos debe operarse con tal precisión en los cálculos, que el error introducido por éstos no llegue a $^1/_3$ ó $^1/_5$ de los errores de observación correspondientes.

Las tablas centesimales de logaritmos y trigonométricas más empleadas en Topografía son las siguientes: de Gauss (Stuttgart, 1926), Gravelius (Berlín, 1886), Service Géographique de l'Armée (París, 1914), Chollet (París, 1912), Bouvart y Ratinet (París, 1920), la de cinco cifras de Schlömilch (Barcelona, 1940) y la de seis cifras de W. Jordan (Stuttgart, 1921).

Muy convenientes son también las tablas de conversión de grados sexagesimales en centesimales y viceversa. (Véanse, en el Apéndice, las tablas III y IV)

Tablas de coordenadas. Se emplean con tanta frecuencia en Topografía los productos $s\operatorname{sen}\alpha$ y $s\cos\alpha$, que hay tablas para los mismos, empleadas especialmente en el cálculo de poligonales; entre las más conocidas de estas tablas figuran las de Gauss y las de Clouth.

BIBLIOGRAFÍA:

GAUSS, F. G., Polygonometrische Tafeln, zum Gebrauche in der Landmessung bei Teilung des Quadranten in 90° zu 60'. 3.ª edic., Stuttgart, 1927.

CLOUTH, F. M., Tafeln zur Berechnung goniometrischer Koordinaten (neue Teilung). 4.ª edic., Halle, 1919.

REISSIG, TENNER UND REUTZEL, Tafel zur Berechnung der Koordinaten ohne Logarithmen (für neue Teilung). Heidelberg, 1930

RÖBERT, Der geschwind und richtig rechnende Markscheider. Leipzig, 1842.

ULFFERS, Berechnung von Dreiecks-, Vierecks- und Polygonnetzen ohne Logarithmen (für neue Teilung). Koblenz, 3.ª edic., 1862 (1.ª edic., 1833).

DITTMANN Koordinaten- und Tangententafeln. Würzburg, 1866.

LIEBENAM, Die Vielfachen Sinus und Cosinus. Eisleben, 1873

DOMKE, Nautische, astron. u. log. Tafeln usw. 10.ª edic., Berlín, 1901 (1.ª edic., 1874)

DEFERT, Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten (alte Teilung) Berlín, 1874.

SCHÜTZE, Tabellen zur Berechnung der Seigerteufen und Sohlen von 5' zu 5', 1875.

EREDE, La celerimensura cogli strumenti communi, $k \sin \alpha$, $k \cos \alpha$, tang α, cotang α de 1' en 1'. Pistoia, 1875. (Zeitschr. f. Verm , 1876, pág. 423.)

LÜLING, Mathematische Tafeln für Markscheider. Bonn, 1881 (4.ª edic., Berlín, 1898.)

GURDEN Traverse Tables, for every minute of angle up to 100 of distance. New edition, London, Griffin, 1888. VII y 270 págs fol. (Zeitschr. f. Verm., 1888, pág. 484)

ORLANDI, Manuale e tavole di celerimensura. Milano, 1889. 1000 páginas (nueva división). (Zeitschr. f. Verm., 1889, pág. 507.)

LÖWE, Koordinatentafel zur Berechnung der Koordinatenunterschiede in Polygonzügen. Liebenwerda, 1890. 56 págs. 8.° (Zeitschr. f. Verm., 1891, pág. 488)

DEBENEDETTI, Tavole ausiliari per calculo delle coordinate. Roma, 1891

LICKA, Tabelle zur Prüfung der Berechnung der Polygonzüge. (Z. f. Verm., 1985, p. 277.)

SEYFERT, Tafeln zur Berechnung der Sinus- und Cosinusprodukte. Breslau, 1895. (Zeitschr. f. Verm., 1897, pág. 55.)

SALMOIRAGHI, Nouvelles tables des coordonnées rectangulaires à cinq et à quatre décimales calculées suivant la division centésimale du quadrant. Milano, 1901.

SANFELICE, Calcolo tacheometrico semplificato. Milano, 1909.

Tablas trigonométricas. Llamamos así a las tablas que dan los valores naturales de las funciones trigonométricas. Conocidos estos valores y empleando las máquinas de calcular, se puede hallar directamente el valor de los productos s sen α y $s \cos \alpha$. En general, en los cálculos en que intervienen funciones trigonométricas, sustituyen muchas veces las máquinas de calcular a las tablas de logaritmos. De entre las tablas más usadas utilizables para el cálculo con máquina, pueden citarse las siguientes:

En grados sexagesimales:

SEIFFERT. O., Vierstellige polygonometrische Tafeln zur Berechnung und Sicherung der Koordinaten- unterschiede Braunschweig, 1907.

ZIMMERMANN, L., Die numerischen Werte der goniometrischen Funktionen auf vier Stellen von Minute zu Minute. Liebenwerda, 1897.

GAUSS, F. G., Fünfstellige vollständige trigonometrische und polygonometrische Tafeln für Maschinenrechnen. Teilung des Quadranten in 90° zu 60'. 4.ª y 5.ª edic. Stuttgart, 1925.

PETERS, J., Sechsstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. Berlín, 1929.

JORDAN, W., Opus Palatinum. Sinus- und Kosinustafeln von 10" zu 10" (siebenstellig). 2.ª edic. Hannover und Leipzig, 1913.

BRANDENBURG, H , Siebenstellige trigonometrische Tafel alter Teilung für Maschinenrechnen. Leipzig, 1923

En grados centesimales (*):

ENBERG, J., Fünfstellige Sinustafeln für Maschinenrechnen nach Dezimalteilung des Quadranten. Stockholm, 1910.

(*) V. las Tablas taquimétricas sexagesimales y centesimales, de H. Gorría, G. Gili, edit., Barcelona.

BALZER, F. und DETTWILER, H., Fünfstellige natürliche Werte der Sinus- und Tangentenfunktionen neuer Teilung für Maschinenrechnen. Stuttgart, 1919.

STEINBRENNER, G., Fünfstellige trigonometrische Tafeln neuer Teilung zum Maschinenrechnen. Braunschweig, 1914.

ENBERG, J. und LANGSTRÖM, E., Sechsstellige Tafeln über die Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen für zentesimale Teilung. Stockholm, 1925.

Formularios. Para todos los cálculos de cierta extensión son necesarios los formularios, y tratándose de trabajos topográficos de alguna importancia son indispensables. Varía su forma según las distintas naciones, y dentro de una misma nación son distintos de unos a otros Servicios. Ordinariamente los formularios están impresos y reunidos en un tomo con las instrucciones correspondientes, facilitándose al personal número suficiente de impresos para ser llenados a su tiempo.

Cifras decimales. Cuando por la precisión de los resultados conviene despreciar cifras decimales y redondear la última restante, puede darse el caso de ser 5 la primera de las que se desprecien y no saber si debe aumentarse en una uñidad la anterior o dejarse como esté. Una buena regla para los cálculos trigonométricos de Topografía consiste en redondear siempre a cifra par, cuando la primera decimal a suprimir es 5; por ejemplo:

$$18{,}925\ldots = 18{,}92 \qquad \text{y} \qquad 18{,}895\ldots = 18{,}90.$$

Valor del radiante o radián ρ. Cuando en un círculo de radio r se tiene un ángulo en el centro, α, se calcula la longitud b del arco correspondiente del modo que sigue:

$$b : 2\pi r = \alpha : 360°$$

de donde:

$$b = \frac{2\pi r \alpha}{360}.$$

Este arco suele expresarse en *radiantes,* llamándose así al ángulo en el centro cuyo arco subtendido tiene una longitud igual al radio del círculo. El radiante ρ es igual a $\frac{180°}{\pi}$ (para un radio $r = 1$); luego sustituyendo en el valor de b se tiene:

$$b = \frac{r\alpha}{\rho}.$$

El radiante entra en muchos cálculos, siendo muy frecuente encontrar la relación $180° : \pi$ en el transcurso de muchas operaciones de cálculo, por lo cual se le designa con una letra como símbolo, siendo la adoptada más generalmente la griega ρ, que así escrita representa la unidad de medida para ángulos expresados en grados: si el ángulo α se expresa en minutos o segundos, hay que aplicar otro valor de ρ, por lo cual se distinguen tres valores: $\rho°$, ρ' y ρ'', cuyas equivalencias numéricas damos a continuación.

Para la división sexagesimal de la circunferencia se tiene:

$\rho° = \frac{180°}{\pi}$	$= 57{,}295779513°$	$\log \rho° = 1{,}758\ 1226 \cdot 324$	$\log \frac{1}{\rho°} = 8{,}241\ 8773 \cdot 676$
$\rho' = \frac{180 \times 60}{\pi}$	$= 3437{,}7467708'$	$\log \rho' = 3{,}536\ 2738 \cdot 828$	$\log \frac{1}{\rho'} = 6{,}463\ 7261 \cdot 172$
$\rho'' = \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi}$	$= 206264{,}80625''$	$\log \rho'' = 5{,}314\ 4251 \cdot 332$	$\log \frac{1}{\rho''} = 4{,}685\ 5748 \cdot 668$

Los valores correspondientes en la división centesimal son los que siguen:

$$\rho^g = \frac{200}{\pi} = 63{,}661977237^g \qquad \log \rho^g = 1{,}803\ 8801\cdot 230 \qquad \log \frac{1}{\rho^g} = 8{,}196\ 1198\cdot 770$$

$$\rho^c = \frac{20000}{\pi} = 6366{,}1977237^c \qquad \log \rho^c = 3{,}803\ 8801\cdot 230 \qquad \log \frac{1}{\rho^c} = 6{,}196\ 1198\cdot 770$$

$$\rho^{cc} = \frac{2000000}{\pi} = 636619{,}77237^{cc} \qquad \log \rho^{cc} = 5{,}803\ 8801\cdot 230 \qquad \log \frac{1}{\rho^{cc}} = 4{,}196\ 1198\cdot 770$$

El número ρ entra también en el cálculo de los errores angulares y transversales; por ejemplo, si una visual experimenta una desviación de $\pm\ 1'$, el número $\rho' = 3438$ m expresa la distancia a que el error transversal es de 1 m. Estos cálculos se hacen siempre con toda rapidez y la mayoría de los operadores saben de memoria los valores aproximados de ρ^o, ρ', ρ'', etc., aunque existen para ello tablas especiales, las cuales evitan los errores que pueden cometerse en la colocación de la coma cuando se usa con este objeto la regla de cálculo.

§ 37. Cambio de coordenadas

Transformación de las x y las y. En la figura 147 se tiene un sistema de coordenadas X, Y y un punto A cuyas coordenadas son: $x = a$, $y = b$. Supongamos que el punto A se toma como nuevo origen de coordenadas, cuyos ejes, también rectangulares, sean X', Y', y de tal modo orientados que el eje X' forme un ángulo ε con el X.

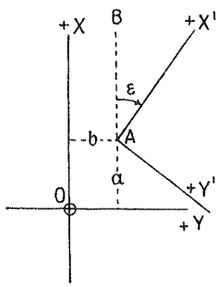


Fig. 147

Un punto de coordenadas x, y en el primer sistema O, tiene por coordenadas x', y' en el nuevo sistema A, las siguientes, según enseña la Geometría analítica:

$$\left.\begin{aligned} y &= b + x' \operatorname{sen}\varepsilon + y' \cos\varepsilon \\ x &= a + x' \cos\varepsilon - y' \operatorname{sen}\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Despejando x', y' en estas ecuaciones, resulta:

$$\left.\begin{aligned} y' &= (y - b)\cos\varepsilon - (x - a)\operatorname{sen}\varepsilon \\ x' &= (y - b)\operatorname{sen}\varepsilon + (x - a)\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Cuando dos sistemas de coordenadas no están relacionados entre sí por medio de los valores a, b y ε como en la figura 147, no se pueden aplicar directamente las fórmulas anteriores, y según el caso, habrá que hallar estos valores en función de los dados, como se ve a continuación.

Supongamos que se tienen dos puntos P_1 y P_2, en ambos sistemas de ejes, dados por sus respectivas coordenadas; con estos datos, hay que hallar el valor de a, b y ε, partiendo de las fórmulas de transformación (1).

Entre las coordenadas de un mismo punto correspondientes a los dos sistemas, hay las siguientes relaciones:

Punto P_1	Punto P_2
$y_1 = b + x_1' \operatorname{sen}\varepsilon + y_1' \cos\varepsilon$	$y_2 = b + x_2' \operatorname{sen}\varepsilon + y_2' \cos\varepsilon$
$x_1 = a + x_1' \cos\varepsilon - y_1' \operatorname{sen}\varepsilon$	$x_2 = a + x_2' \cos\varepsilon - y_2' \operatorname{sen}\varepsilon$

(3)

Restando estas ecuaciones, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1' - x_2')\operatorname{sen}\varepsilon + (y_1' - y_2')\cos\varepsilon \\ x_1 - x_2 &= (x_1' - x_2')\cos\varepsilon - (y_1' - y_2')\operatorname{sen}\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

y despejando sen ε y cos ε, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\varepsilon &= \frac{(y_1 - y_2)(x_1' - x_2') - (x_1 - x_2)(y_1' - y_2')}{s^2} \\ \cos\varepsilon &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1' - x_2') + (y_1 - y_2)(y_1' - y_2')}{s^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

donde:

$$s^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = (y_1' - y_2')^2 + (x_1' - x_2')^2. \qquad (6)$$

Dividiendo sen ε por cos ε se obtiene el valor de tg ε, y por sucesivas transformaciones se llega a la conclusión de que ε es una diferencia entre dos acimutes, a saber:

$$\varepsilon = (P_1 P_2) - (P_1' P_2') \qquad (7)$$

y como

$$\operatorname{tg}(P_1 P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(P_1' P_2') = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \qquad (8)$$

resulta:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}(P_1 P_2) - \operatorname{tg}(P_1' P_2')}{1 + \operatorname{tg}(P_1 P_2)\operatorname{tg}(P_1' P_2')}. \qquad (9)$$

Sustituyendo aquí los anteriores valores (8) de tg $(P_1 P_2)$ y tg $(P'_1 P'_2)$, se obtendrá idéntico resultado que dividiendo el valor de sen ε por el de cos ε (5).

Una vez conocido el valor de ε (7), se sustituye en las cuatro ecuaciones (3) y se deducen de éstas los valores de las constantes a y b.

Cuando se dan las coordenadas de los dos puntos en ambos sistemas, para calcular las constantes de transformación se tiene, en general, que resolver un problema más que determinado, que sólo tiene solución con la condición de que la distancia entre los dos puntos sea igual en ambos sistemas; es decir:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}, \quad \text{o sea,} \quad s = s'. \qquad (10)$$

Calculando unas en función de otras las coordenadas dadas por las ecuaciones (1) ó (2), pueden deducirse los valores de a, b y ε, y la concordancia de a y b en las *cuatro* ecuaciones (3) a pesar de la sobredeterminación, constituye una comprobación del cálculo, así como la condición $s = s'$, que siempre ha de verificarse, a menos que se cometan errores de cálculo o numéricos en el desarrollo de las operaciones.

Cambio de escala. Puede suceder que en un sistema se tenga una escala distinta que en el otro, en cuyo caso la condición $s = s'$ se convierte en esta otra:

$$\frac{s}{s'} = v \quad \text{ó bien} \quad s = v \cdot s', \qquad (11)$$

y el problema anterior, más que determinado, se reduce a uno determinado.

La causa de tal cambio de escala, o de la variación que pueda haber en la distancia expresada en uno o en otro sistema, puede consistir en que los dos puntos pertenezcan, por ejemplo, a triangulaciones medidas en épocas diferentes, para las cuales se midieran las bases con distintas unidades de medida.

El cambio de escala puede presentarse también cuando los puntos estén referidos a dos sistemas de coordenadas de distinta clase, como sucede en el ejemplo siguiente, en que los puntos están referidos, por una parte a un cierto sistema A (carta del Catastro prusiano), y por otra a otro sistema que llamaremos B (carta de Gauss-Krüger). En este ejemplo se trata de calcular las coordenadas de varios puntos en el sistema B, conocidos sus valores en el sistema A. Las fórmulas siguientes sólo son aplicables a pequeñas exten-

siones, como de un par de kilómetros cuadrados, donde las cantidades a, b tienen únicamente el significado de constantes operatorias.

Para dos vértices de triangulación, II y V, se tienen las siguientes coordenadas planas, en el sistema B:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V} \quad y_1' = 4586083{,}202\ \text{m} & x_1' = 5814825{,}642\ \text{m} \\ \text{II} \quad y_2' = 4586924{,}613 & x_2' = 5815529{,}152 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Para operar con números más sencillos, podemos suprimir las tres primeras cifras, lo cual representa un corrimiento general del origen de coordenadas. Tomando al mismo tiempo las coordenadas de los mismos vértices en el sistema A, tendremos:

Sistema A:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V} \quad y_1 = -4502{,}229\ \text{m} & x_1 = +4803{,}316\ \text{m} \\ \text{II} \quad y_2 = -3645{,}267 & x_2 = +5487{,}638 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Sistema B:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V} \quad y_1' = +6083{,}202\ \text{m} & x_1' = +4825{,}642\ \text{m} \\ \text{II} \quad y_2' = +6924{,}613 & x_2' = +5529{,}152 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Con estos valores (13) y (14), calculemos la distancia V-II y el acimut (V-II) en ambos sistemas:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Sistema A:} & \log \text{V-II} = 3.0400751{\cdot}3 & (\text{V-II}) = 51^\circ\,23'\,27'',923 \\ \text{Sistema B:} & \log \text{V'-II'} = 3.0401145{\cdot}5 & (\text{V'-II'}) = 50^\circ\,06'\,02'',713 \\ & \log v = 9.9999605{\cdot}8 & \varepsilon = +\ 1^\circ\,17'\,25'',210 \end{array}\right\} \tag{15}$$

A causa de este cambio de valores, equivalente a un cambio de escala, toman las fórmulas (1) y (2) la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = b + y'\,v\cos\varepsilon + x'\,v \quad \text{en}\ \varepsilon \\ x = a - y'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon + x'\,v\cos\varepsilon \end{array}\right\} \tag{16}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} y' = (y-b)\dfrac{1}{v}\cos\varepsilon - (x-a)\dfrac{1}{v}\,\text{sen}\,\varepsilon \\ x' = (y-b)\dfrac{1}{v}\,\text{sen}\,\varepsilon + (x-a)\dfrac{1}{v}\cos\varepsilon \end{array}\right\} \tag{17}$$

De este modo se tiene para los dos puntos V y II:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto } P_1\ (\text{V}) & \text{Punto } P_2\ (\text{II}) \\ y_1 - b = y_1'\,v\cos\varepsilon + x_1'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon & y_2 - b = y_2'\,v\cos\varepsilon + x_2'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon \\ x_1 - a = -y_1'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon + x_1'\,v\cos\varepsilon & x_2 - a = -y_2'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon + x_2'\,v\cos\varepsilon \end{array}\right\} \tag{18}$$

Con estas cuatro ecuaciones se pueden calcular las cuatro constantes a, b, v y ε de las fórmulas de transformación (16) y (17). Para ello, se empieza por restar dos a dos dichas ecuaciones (18), resultando:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - y_2 = (y_1' - y_2')\,v\cos\varepsilon + (x_1' - x_2')\,v\,\text{sen}\,\varepsilon \\ x_1 - x_2 = -(y_1' - y_2')\,v\,\text{sen}\,\varepsilon + (x_1' - x_2')\,v\cos\varepsilon \end{array}\right\} \tag{19}$$

De estas ecuaciones se despejan los valores de $v\,\text{sen}\,\varepsilon$ y $v\cos\varepsilon$, obteniéndose:

$$\left.\begin{array}{l} v\,\text{sen}\,\varepsilon = \dfrac{(y_1 - y_2)(x_1' - x_2') - (x_1 - x_2)(y_1' - y_2')}{(y_1' - y_2')^2 + (x_1' - x_2')^2} \\ v\cos\varepsilon = \dfrac{(y_1 - y_2)(y_1' - y_2') + (x_1 - x_2)(x_1' - x_2')}{(y_1' - y_2')^2 + (x_1' - x_2')^2} \end{array}\right\} \tag{20}$$

y dividiendo la primera de estas igualdades por la segunda, queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,\varepsilon = \dfrac{(y_1 - y_2)(x_1' - x_2') - (x_1 - x_2)(y_1' - y_2')}{(y_1 - y_2)(y_1' - y_1') + (x_1 - x_2)(x_1' - x_2')} \\ \text{o bien} \qquad \text{tg}\,\varepsilon = \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}}{1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot\dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}} \end{array}\right\} \tag{21}$$

Como se ve, resulta el ángulo ε expresado en forma de diferencia de dos ángulos, pudiéndose poner:

$$\text{tg}\,(P_1 P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{tg}\,(P_1' P_2') = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

y

$$s^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \qquad s'^2 = (y_1' - y_2')^2 + (x_1' - x_2')^2 \tag{22}$$

siendo

$$\varepsilon = (P_1 P_2) - (P_1' P_2'). \tag{23}$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (20), y teniendo en cuenta las igualdades (22), se tiene:

$$v^2 = \frac{s^2 s'^2}{s'^4} = \frac{s^2}{s'^2}, \quad \text{de donde} \quad v = \frac{s}{s'}. \tag{24}$$

Una vez hallados estos valores de ε y v, se sustituyen en las ecuaciones (18), para deducir los valores de a y b, que por despejarse entre cuatro ecuaciones, constituyen una comprobación excelente. De este modo se tienen ya determinadas las cuatro constantes a, b, ε y v que entran en las ecuaciones (16) y (17), y se pueden ya emplear directamente para calcular x e y conocidas que sean x', y', o al contrario, para hallar x', y' en función de x, y.

Las ecuaciones (16) y (17) pueden escribirse del modo siguiente, teniendo en cuenta que ε es un ángulo muy pequeño y que v es aproximadamente igual a la unidad:

$$\left.\begin{array}{l} y = y' + b + y'\,(v\cos\varepsilon - 1) + x'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon \\ x = x' + a - y'\,v\,\text{sen}\,\varepsilon + x'\,(v\cos\varepsilon - 1) \end{array}\right\} \tag{25}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} y' = y - b + (y-b)\left(\dfrac{1}{v}\cos\varepsilon - 1\right) - (x-a)\dfrac{1}{v}\,\text{sen}\,\varepsilon \\ x' = x - a + (y-b)\dfrac{1}{v}\,\text{sen}\,\varepsilon + (x-a)\left(\dfrac{1}{v}\cos\varepsilon - 1\right) \end{array}\right\} \tag{26}$$

Los valores numéricos de ε y v están dados en (15), a saber:

$$\varepsilon = +\ 1^\circ\,17'\,25'',210 \qquad \log v = 9{,}9999605{\cdot}8 \qquad v = 0{,}99990924 \tag{27}$$

y sustituídos en los términos anteriores en que intervienen, se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} \log\,(v\cos\varepsilon - 1) = 6{,}534026\,(n) & \log v\,\text{sen}\,\varepsilon = 8{,}352505 \\ \log\left(\dfrac{1}{v}\cos\varepsilon - 1\right) = 6{,}214844\,(n) & \log\dfrac{1}{v}\,\text{sen}\,\varepsilon = 8{,}352583 \\ b = -10692{,}002\ \text{m} & a = +116{,}304\ \text{m} \end{array}\right\} \tag{27'}$$

Con estos valores numéricos (27) y (27') y las fórmulas (26), se pueden transformar las coordenadas de varios puntos, expresadas en el sistema A, en las correspondientes al sistema B, como se ve en la tabla siguiente:

Vértices	Sistema A		Sistema B	
	y	x	y'	x'
I	− 23868,190 m	+ 4939,571 m	4586714,070 m	5814976,154 m
II	− 23645,267	+ 5487,638	4586924,613	5815529,151
III	− 24127,016	+ 5299,118	4586447,188	5815329,813
IV	− 24071,904	+ 4796,853	4586513,602	5814828,871
V	− 24502,229	+ 4803,316	4586083,203	5814825,641
VI	− 23471,804	+ 4713,455	4587115,483	5814759,001

Esta transformación o cambio de coordenadas puede también hacerse con ayuda de las coordenadas geográficas, obteniéndose variaciones de 1 mm a lo sumo. En este caso, también son aplicables las fórmulas ordinarias de las coordenadas planas.

Cambio o transformación de incrementos Δx y Δy. Cuando el ángulo ε es muy pequeño, como sucede con frecuencia en la práctica, al cambiar de coordenadas, los incrementos o diferencias de coordenadas de dos puntos se diferencian muy poco entre sí, considerados en uno o en otro sistema. Es muy fácil calcular estas variaciones, sin conocer previamente las constantes a, b, ε y v. Designaremos con Δx y Δy las diferencias de coordenadas entre dos puntos cualesquiera de un sistema, y con $\Delta x'$, $\Delta y'$ dichas diferencias en el otro sistema. Aplicando las fórmulas (1) a estos dos puntos, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= \Delta x' \operatorname{sen}\varepsilon + \Delta y' \cos\varepsilon \\ \Delta x &= \Delta x' \cos\varepsilon - \Delta y' \operatorname{sen}\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} \Delta y - \Delta y' &= + \Delta x' \operatorname{sen}\varepsilon + \Delta y' (\cos\varepsilon - 1) \\ \Delta x - \Delta x' &= - \Delta y' \operatorname{sen}\varepsilon + \Delta x' (\cos\varepsilon - 1) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Suponiendo que se conocen las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 en ambos sistemas, se pueden hallar las dos constantes $\operatorname{sen}\varepsilon$ y $\cos\varepsilon - 1$, para lo cual aplicamos las fórmulas (29) a estos dos puntos, puestas en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} (y_1 - y_2) - (y_1' - y_2') &= + (x_1' - x_2') \operatorname{sen}\varepsilon + (y_1' - y_2') (\cos\varepsilon - 1) \\ (x_1 - x_2) - (x_1' - x_2') &= - (y_1' - y_2') \operatorname{sen}\varepsilon + (x_1' - x_2') (\cos\varepsilon - 1) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Para facilitar las operaciones, pongamos:

$$\left.\begin{aligned} (y_1 - y_2) - (y_1' - y_2') &= \eta \\ (x_1 - x_2) - (x_1' - x_2') &= \xi \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

y despejando $\operatorname{sen}\varepsilon$ y $\cos\varepsilon - 1$ de las ecuaciones (30), resulta:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\varepsilon &= \frac{(x_1' - x_2')\,\eta - (y_1' - y_2')\,\xi}{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2} \\ \cos\varepsilon - 1 &= \frac{(x_1' - x_2')\,\xi + (y_1' - y_2')\,\eta}{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Con las ecuaciones (31), (32) y (29) queda completamente resuelto el problema.

Si, al contrario, hay que calcular $\Delta y'$ y $\Delta x'$ en función de Δy y Δx se emplean fórmulas análogas a las anteriores, partiendo de la (2), con lo cual se obtienen las ecuaciones que siguen:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= (y_1' - y_2') - (y_1 - y_2) \\ \xi &= (x_1' - x_2') - (x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\varepsilon &= \frac{-(x_1 - x_2)\,\eta + (y_1 - y_2)\,\xi}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \cos\varepsilon - 1 &= \frac{+(x_1 - x_2)\,\xi + (y_1 - y_2)\,\eta}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \Delta y' - \Delta y &= - \Delta x \operatorname{sen}\varepsilon + \Delta y (\cos\varepsilon - 1) \\ \Delta x' - \Delta x &= + \Delta y \operatorname{sen}\varepsilon + \Delta x (\cos\varepsilon - 1) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Cabe aún preguntar qué debe hacerse cuando, en esta transformación, hay que tener en cuenta una variación de escala o de unidad de medida. En este caso, hay que multiplicar, en las ecuaciones (28), los incrementos o diferencias $\Delta x'$ y $\Delta y'$ por el factor de reducción v. Hecho esto, se prosigue el cálculo de idéntico modo, llegándose así a las fórmulas (32) que en realidad darán el valor de $v \operatorname{sen}\varepsilon$ y $v\cos\varepsilon - 1$, mientras que las ecuaciones (34) darán $\frac{1}{v}\operatorname{sen}\varepsilon$ y $\frac{1}{v}\cos\varepsilon - 1$.

Supongamos, como ejemplo numérico, que se tengan dos puntos P_1 y P_2, cuyas coordenadas referidas a dos sistemas A y B sean conocidas en ambos sistemas, y que sean las siguientes:

Sistema A

	y	x
P_1 . . .	− 13879,790 m	+ 93575,890 m
P_2 . . .	− 16145,760	+ 92808,280

Sistema B

	y'	x'
P_1 . . .	− 23271,813 m	− 28308,395 m
P_2 . . .	− 25538,488	− 29071,474

Las diferencias serán:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= + 2265{,}970 \text{ m} & x_1 - x_2 &= + 767{,}610 \text{ m} \\ y_1' - y_2' &= + 2266{,}675 \text{ m} & x_1' - x_2' &= + 763{,}079 \text{ m} \\ \eta &= + \quad 0{,}705 \text{ m} & \xi &= - \quad 4{,}531 \text{ m} \end{aligned}$$

y las ecuaciones (34) dan:

$$\operatorname{sen}\varepsilon = - 0{,}0018882 \qquad \cos\varepsilon - 1 = 0{,}0003285.$$

Supongamos ahora que tenemos otro punto P_3 cuyas coordenadas en el sistema A sean conocidas, por ejemplo:

$$y = - 15320{,}943 \text{ m} \qquad x = + 95013{,}695 \text{ m}$$

y vamos a hallar la diferencia de coordenadas entre este punto y el anterior P_1, en el sistema B. En este caso tenemos:

$$\Delta y = - 1441{,}153 \text{ m} \qquad \Delta x = + 1437{,}805 \text{ m}$$

y según las ecuaciones (35), resulta:

$$\Delta y' - \Delta y = + 3{,}189 \text{ m} \qquad \Delta x' - \Delta x = + 2{,}248 \text{ m}$$

de donde:

$$\Delta y' = - 1437{,}964 \text{ m} \qquad \Delta x' = + 1440{,}053 \text{ m}$$

y las coordenadas de este tercer punto P_3, en el sistema B, serán:

$$y' = - 24709{,}777 \text{ m} \qquad x' = - 26868{,}342 \text{ m}.$$

§ 38. Cálculo de coordenadas en una red

Puntos intercalados. En la figura 148 se ven dos puntos A y E, dados por sus coordenadas, entre los cuales, y en la recta que los une, se encuentran dos puntos B y C determinados por las distancias s_1, s_2 y s_3. La distancia AE puede hallarse de dos modos: primero,

como suma de las distancias parciales, es decir, $s_1 + s_2 + s_3 = [s]$; y en segundo lugar, en función S de las coordenadas de A y E. Ante todo hay que saber si la diferencia entre ambos valores cae dentro de la tolerancia de error admisible (§ 21).

Repartiremos esta diferencia $S - [s]$ entre los tres trozos s_1, s_2 y s_3, con lo cual quedarán éstos expresados del modo siguiente:

$$s_1' = s_1 + \frac{S-[s]}{[s]} s_1 \quad , \quad s_2' = s_2 + \frac{S-[s]}{[s]} s_2 \quad , \quad s_3' = s_3 + \frac{S-[s]}{[s]} s_3$$

o sea

$$s_1' = \frac{S}{[s]} s_1 \quad , \quad s_2' = \frac{S}{[s]} s_2 \quad , \quad s_3' = \frac{S}{[s]} s_3 \tag{1}$$

cuya suma es igual a S.

Con las distancias parciales corregidas se pueden distribuir o repartir entre ellas las diferencias de coordenadas $y_e - y_a$ y $x_e - x_a$ entre los puntos extremos E y A, con lo cual se tendrán las diferencias de coordenadas para los puntos intercalados, es decir:

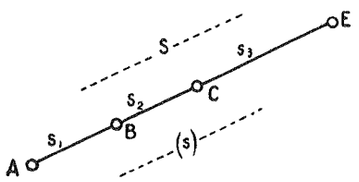


Fig. 148

$$y_b - y_a = \frac{y_e - y_a}{S} s_1' \quad \text{y} \quad x_b - x_a = \frac{x_e - y_a}{S} s_1'$$

y sustituyendo el valor de s_1' (1) resulta:

$$y_b - y_a = \frac{y_e - y_a}{[s]} s_1 \quad \text{y} \quad x_b - x_a = \frac{x_e - x_a}{[s]} s_1. \tag{2}$$

Análogamente pueden hallarse las diferencias de coordenadas de los puntos B y C, y de los C y E. En resumen, el cuadro de operaciones es el siguiente:

Se empieza por calcular los cocientes

$$\frac{y_e - y_a}{[s]} = \beta \qquad \frac{x_e - x_a}{[s]} = \alpha \tag{3}$$

y de aquí se deducen las siguientes diferencias:

Punto A		
» B	$\Delta y_1 = \beta s_1$	$\Delta x_1 = \alpha s_1$
» C	$\Delta y_2 = \beta s_2$	$\Delta x_2 = \alpha s_2$
» D	$\Delta y_3 = \beta s_3$	$\Delta x_3 = \alpha s_3$
Prueba	$[\Delta y] = \beta [s] = y_e - y_a$	$[\Delta x] = \alpha [s] = x_e - x_a$

(4)

Sumando Δy y Δx respectivamente con y_a y x_a, deben obtenerse y_e y x_e, teniéndose así una comprobación del cálculo efectuado.

Este cálculo de puntos intercalados se presenta con mucha frecuencia en Topografía, por lo cual tiene importancia práctica. Puede hacerse con ayuda de una tabla de logaritmos, de una tabla de multiplicar (§ 39), de una máquina de calcular, o de una regla de cálculo (§ 29). La máquina de calcular es la que mejor se presta a estas operaciones.

Ejemplo. En la figura 149 tenemos varios puntos, B, C y E, con las distancias al A anotadas a su derecha, y el D, situado en una perpendicular a AE y distante 23,84 del punto B. Sobre este último punto D insistiremos después.

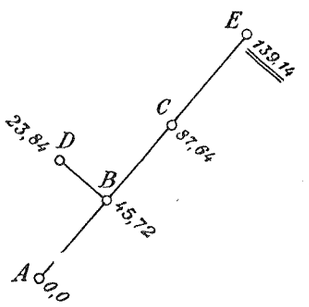


Fig. 149

El cálculo está hecho con la tabla de calcular de Crelle y unas tablas de cuadrados.

En primer lugar daremos el cálculo de la diferencia $d = S - [s]$, y de los cocientes α y β en función de las coordenadas conocidas de A y E y de la longitud dada $[s] = 139{,}14$ m:

$y_a = -25420{,}70$	$x_a = -25878{,}83$	$(y_e - y_a)^2 = 16713{,}0$
$y_e = -25291{,}42$	$x_e = -25827{,}59$	$(x_e - x_a)^2 = 2625{,}5$
$y_e - y_a = +129{,}28$	$x_e - x_a = +51{,}24$	$S^2 = 19338{,}5$
		$S = 139{,}06$
$\beta = +0{,}929\ldots$	$\alpha = +0{,}368\ldots$	$[s] = 139{,}14$
		$d = S - [s] = -0{,}08$

Los cocientes β y α se dan sólo con tres cifras, pues según se ve por la formación de los productos (4), el resto es proporcional a s. También aquí debe verificarse la comprobación $[\Delta y] = \beta [s]$, y $[\Delta x] = \alpha [s]$.

El cálculo se dispone del modo siguiente:

		$s =$	Δy	Δx	y	x	
A	0,00				**−25420,70**	**−25878,83**	A
		45,72	+ 42,47	+ 16,82$_{(5)}$			
B	45,72				−25378,22	−25862,00	B
		41,92	+ 38,94	+ 15,43			
C	87,64				−25339,27	−25846,56	C
		51,50	+ 47,84	+ 18,95			
E	139,14				**−25291,42**	**−25827,59**	E
		139,14	+ 129,25	+ 51,20			

Si se emplea la máquina de calcular, se efectúan los cálculos de este mismo modo. Para el cálculo de d lo mejor es hacer uso de unas tablas de cuadrados. Los cocientes β y α se hallan con cinco o seis cifras, con lo cual, empleando la máquina de calcular, se deducen directamente las coordenadas por una multiplicación y adición sucesivas.

Si se emplean las tablas de logaritmos, hay que ampliar algo el esquema de cálculo anterior. En la primera parte, debajo de $y_e - y_a$ y de $x_e - x_a$, va el cálculo logarítmico de β y α, y en la segunda parte entre las columnas s y Δy, van los productos βs y αs calculados por logaritmos.

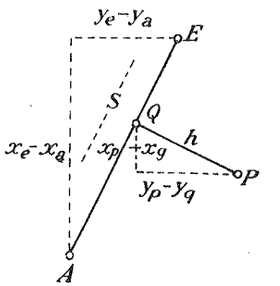


Fig. 150

Puntos laterales. Supongamos que dada una alineación AE y un punto de la misma Q (fig. 150), se determine un punto P fuera de aquélla, por la longitud h de la perpendicular PQ bajada del punto P a la recta AE; desde luego, pueden formularse las siguientes igualdades:

$$y_p - y_q = \frac{x_e - x_a}{S} h, \qquad x_p - x_q = -\frac{y_e - y_a}{S} h \tag{5}$$

desde h es positiva o negativa, según el punto P caiga a la derecha o a la izquierda de AE.

Para el cálculo resulta mucho mejor corregir la distancia h del mismo modo que se hizo con las distancias parciales s_1, s_2, s_3 de la alineación AE (fig. 148), poniendo en vez de h,

$$h' = h + \frac{S-[s]}{[s]} h = \frac{S}{[s]} h. \tag{6}$$

Siendo siempre muy pequeña la distancia h, la corrección resultante es despre-

ciable, por lo cual pueden ponerse las fórmulas anteriores del modo siguiente:

$$y_p - y_q = \frac{x_e - x_a}{[s]}\,h, \qquad x_p - x_q = -\frac{y_e - y_a}{[s]}\,h. \tag{7}$$

Para este cálculo pueden emplearse también los cocientes β y α.

Para el ejemplo representado en la figura 149, tenemos $h = -23{,}84$ m; y multiplicado este valor por los valores aproximados de $\alpha = +0{,}368$ y $\beta = +0{,}929$, resulta:

$$+h\alpha = -8{,}77 \text{ m} \quad \text{y} \quad -h\beta = +22{,}15 \text{ m}.$$

Estos números deben sufrir una pequeña corrección, como los β s y α s anteriores, de modo que tendremos el cálculo de las coordenadas del modo siguiente (fig. 149):

	Δy	Δx	y	x	
B			$-25378{,}22$	$-25862{,}00$	B
	$-8{,}77$	$+22{,}25^{+2}$			
D			$-25386{,}99$	$-25839{,}83$	D

Este cálculo puede hacerse en el mismo cuadro o esquema de operaciones formado para los puntos B, C, etc., de las figuras 148 y 149.

Puntos de intersección. En la figura 151, los cuatro puntos A, B, C y D están dados por sus coordenadas, y se trata de calcular las coordenadas x, y, del punto de intersección P de las diagonales AC y BD.

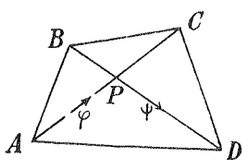


Fig. 151

En Geometría analítica se procedería escribiendo las ecuaciones de estas rectas AC y BD y resolviéndolas para obtener las coordenadas de su punto de intersección P.

Pero vamos a resolver este problema teniendo además en cuenta lo expuesto anteriormente.

Sean φ y ψ los acimutes de las rectas AC y BD, dados por las igualdades siguientes:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{y_d - y_b}{x_d - x_b}. \tag{8}$$

Las ecuaciones de las rectas AC y BD son:

$$y - y_a = (x - x_a)\operatorname{tg}\varphi \qquad y - y_b = (x - x_b)\operatorname{tg}\psi. \tag{9}$$

Resolviendo estas ecuaciones en x e y, se tienen las coordenadas del punto de intersección P. Restando, para ello, la segunda ecuación de la primera, se elimina la y y queda x.

$$x = \frac{(y_b - y_a) + x_a \operatorname{tg}\varphi - x_b \operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}. \tag{10}$$

Pero esta fórmula no es aplicable aún al cálculo numérico, porque generalmente las coordenadas x_a y x_b vienen dadas por números muy grandes, por lo cual es mejor operar con las diferencias de coordenadas, transformando la ecuación anterior de modo que se tenga:

$$x - x_a = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi} \qquad y - y_a = (x - x_a)\operatorname{tg}\varphi \tag{11}$$

$$x - x_b = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi} \qquad y - y_b = (x - x_b)\operatorname{tg}\psi. \tag{12}$$

Los ángulos φ y ψ no se emplean aquí directamente, sino dados por sus respectivas tangentes, que son iguales a los cocientes de las diferencias de coordenadas. Las fórmulas (8), (11) y (12) contienen, en realidad, todo el cálculo operatorio, y sirven, no sólo para este caso de intersección directa de dos alineaciones (diagonales de la figura 151), sino también para la intersección de las prolongaciones de dos rectas. El modo de determinar los ángulos φ y ψ es indiferente; por ejemplo, se puede conocer $\operatorname{tg}\psi$ sabiendo que la recta BD debe ser paralela o perpendicular a otra recta cualquiera dada MN, en cuyos casos se tendrá, respectivamente:

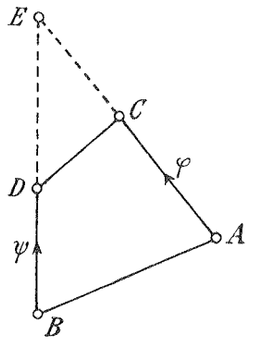


Fig. 152

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} \quad \text{o bien} \quad \operatorname{tg}\psi = -\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m}.$$

Vamos a aplicar las fórmulas a un ejemplo práctico (figura 152), siguiendo la misma notación que en la figura 151. Las coordenadas de los cuatro vértices suponemos que son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{lll} A & y_a = +97{,}860 & x_a = +35{,}620 \\ B & y_b = 0{,}000 & x_b = 0{,}000 \\ C & y_c = +52{,}460 & x_c = +104{,}700 \\ D & y_d = +5{,}710 & x_d = +68{,}100 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Según (8) resulta:

$$\operatorname{tg}\varphi = -0{,}657210 \qquad \operatorname{tg}\psi = +0{,}083847$$

$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = -0{,}741057$$

y las formulas (11) y (12) nos dan, con comprobación, las coordenadas del punto E, que son:

$$\left.\begin{array}{l} y = +13{,}721 \\ x = +163{,}644 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Para este cálculo con las fórmulas (8), (11) y (12), se presta de modo especial la máquina de calcular.

BIBLIOGRAFÍA: El tema de las coordenadas del punto de intersección de dos rectas se halla desarrollado en varios números de Zeitschr. f. Verm.: 1876, pág. 475, WIDMANN, Schnitt einer Eigentumsgrenze mit einer Böschungslinie; 1891, pág. 114, REX, Auflösung mit Determinanten; 1908, pág. 940, RAMANN, Rechenschema für log. Rechnung; 1909, pág. 505, HAMMER, Besprechung verschiedener Lösungen; 1911, pág. 173, DIETZE, Lösung nach dem Schema der Kleinpunktsberechnung. Véase, además, en Zeitschr. d. Rh.-Westf. Landm.-V.; 1908, pág. 344, MASCHE, Schema für die Rechenmaschine.

Puntos determinados por intersección de arcos. En la figura 153 se conocen los puntos A y B, y se quiere fijar un tercero P que está a una distancia b de A, y a de B.

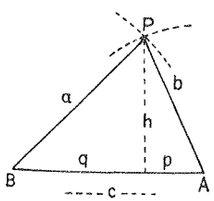


Fig. 153

Gráficamente, se resuelve el problema trazando desde A y B dos arcos de círculo, con radios respectivamente iguales a b y a, y el punto de intersección de ambos arcos es el punto pedido P.

Para resolver este mismo problema analíticamente, se empieza por enunciarlo del siguiente modo: se tienen dos puntos A y B dados por sus coordenadas, y un tercer punto P determinado por las dos distancias $AP = b$ y $BP = a$; se trata de hallar las coordenadas x, y, de este punto P.

El lado $AB = c$ puede calcularse en función de las coordenadas de sus extremos A y B, con lo cual se tienen ya, en el triángulo ABC, los tres lados a, b, c conocidos, pudiéndose por consiguiente hallar los ángulos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

y análogamente para β y γ.

Conocidos los lados y los ángulos se puede proceder como en una triangulación ordinaria (§ 86); pero vamos a dar aquí otra solución, debida a Gauss.

En la figura 153 se tiene:

$$p^2 = b^2 - h^2, \quad q^2 = a^2 - h^2, \quad h = \sqrt{(b+p)(b-p)} = \sqrt{(a+q)(a-q)} \tag{15}$$

y restando la segunda igualdad de la primera,

$$p^2 - q^2 = b^2 - a^2$$

o sea

$$(p-q)(p+q) = (b-a)(b+a),$$

y dividiendo sucesivamente por $2(p+q)$ y por $2(p-q)$, y sustituyendo $p+q$ por su igual c, se tiene:

$$\frac{p-q}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2c} \quad \text{y} \quad \frac{p+q}{2} = \frac{c}{2}. \tag{16}$$

Estas igualdades podemos escribirlas en la forma siguiente:

$$\frac{p-q}{2} = \frac{b^2-a^2}{2c} \quad \text{y} \quad \frac{p+q}{2} = \frac{c^2}{2c}$$

entre las cuales despejaremos p y q, resultando:

$$p = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c} \qquad q = \frac{+a^2-b^2+c^2}{2c}. \tag{17}$$

Con p, o bien q, y h, deducida de la fórmula (15), se tiene el punto P determinado por coordenadas rectangulares respecto a AB, quedando sólo calcular, con las fórmulas (2) las coordenadas del pie de la perpendicular h bajada de P a AB, y con las fórmulas (7) las coordenadas de P.

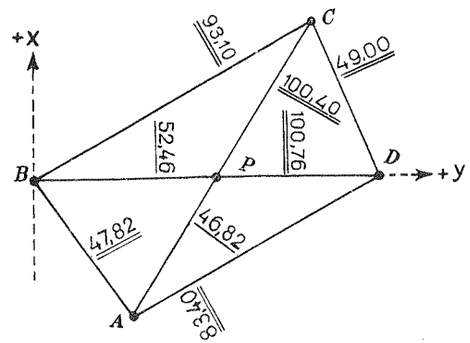


Fig. 154

Cuadrilátero con diagonales. Este problema de coordenadas puede encontrar especial aplicación en pequeños levantamientos en que la red esté reducida a uno o varios triángulos, o a un cuadrilátero con diagonales (§ 25).

Supongamos, como representa la figura 154, que se tengan medidas todas las alineaciones, y las parciales que parten del punto de intersección P; en estas condiciones se puede tomar una línea cualquiera, por ejemplo, la diagonal BD, como eje de las abscisas o de las ordenadas (o paralela al mismo); con las fórmulas (15) y (16) se pueden determinar los puntos C y A respecto a BD, en los triángulos BAD y BCD, teniéndose una comprobación en la diagonal AC, que une los puntos A y C así determinados. Según el caso,

se puede tomar otro sistema de coordenadas, por ejemplo, el lado AD como eje de abscisas o de ordenadas, de modo que los puntos B y C pueden determinarse en este sistema por los triángulos ABD y ACD, respecto a AD, teniéndose una comprobación de las operaciones efectuadas, en la longitud medida de la alineación BC y en la situación del punto P sobre las dos rectas BD y AC.

Si alguna de las rectas BD ó AD está dada en un sistema general de coordenadas, se aplican las fórmulas (2).

Vamos a resolver, como ejemplo práctico, el caso de la figura 154. Tomando en ésta como eje de las y la diagonal BD, se tienen las siguientes coordenadas, deducidas de las distancias medidas, que son las que figuran en los segmentos correspondientes:

	y	x	
B	0,00	100,00	}
P	52,46	100,00	}
D	100,76	100,00	}

(18)

Según las fórmulas (15) y (16) se tiene en los triángulos BDC y BDA, tomando BD como base:

En el triángulo	BDC	$p = 81{,}48$	$q = 18{,}28$	$h = 45{,}04$
»	»	BDA	$p = 73{,}55$	$q = 27{,}21$	$h = 39{,}32$

Con lo cual se calculan las coordenadas de C y A:

	y	x
C	81,48	145,04
A	27,21	60,68

Para la línea AC, con el punto intermedio P, según lo dicho anteriormente (pág. 148), resulta la diferencia $S - [s]$ igual a $100,31 - 100,40 = -0,09$, y las coordenadas de P,

$$y = 52{,}52 \qquad x = 100{,}02$$

que concuerdan con los valores dados en (18).

Al tratar del cálculo de coordenadas de una red, se puede estudiar también la compensación por el método de los mínimos cuadrados, pero esto constituye materia suficiente para tratados especiales, de los cuales hay muchos excelentes. En la lista bibliográfica que sigue damos los títulos de algunos de estos tratados.

BIBLIOGRAFÍA:

CH. L. GERLING, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie. Hamburg u. Gotha, 1843, págs. 310-321.

J. J. VORLÄNDER, Ausgleichung der Fehler unmittelbar gemessener Längen in einfachen Linienverbindungen. (Zeitschr. f. Verm., 1873, págs. 145-171.)

O. KOLL, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Meth. d. kl. Qu., Berlín, 1901, páginas 262-267.

F. G. GAUSS, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Stuttgart, 1922, págs. 538-567.

L. KRÜGER, Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. Potsdam, 1908.

R. SCHUMANN, Zur Ausgleichung von Liniennetzen. (Mitt. a. d. Markscheidewesen. N. F. Heft 11, 1909, págs. 11-35.)

E. HAMMER, Zur Ausgleichung von Streckennetzen. (Zeitschr. f. Verm., 1911, págs. 517-534.)

CAPÍTULO V

Cálculo y división de superficies

§ 39. Área en función de coordenadas rectangulares

Cuando se tiene una figura o plano levantados en coordenadas rectangulares, la superficie correspondiente queda dividida en triángulos rectángulos y trapecios, como se ve en la figura 155, calculándose el área S por la fórmula siguiente:

$$2S = a h_2 + b(h_2 + h_3) + c(h_3 + h_4) + d(h_4 + h_5) + e h_5. \qquad (1)$$

Si se forma algún trapecio de segundo orden, es decir, cuyos lados oblicuos se corten entre los dos paralelos, se calcula el área total con la misma fórmula anterior, como si se tratara de un trapecio ordinario o de primer orden, pero poniendo sus lados paralelos o bases con distinto signo uno de otro. Por ejemplo, en la figura 156, en la cual tenemos un trapecio de segundo orden AA_0B_0B, tomemos la diferencia entre los dos triángulos AA_0S y BB_0S, cuyas áreas respectivas son:

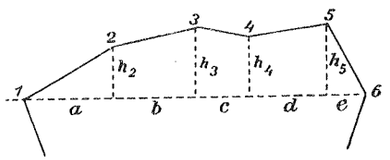


Fig. 155. — Triángulos rectángulos y trapecios

$$2A\overset{\triangle}{A_0}S = ay \qquad 2B\overset{\triangle}{B_0}S = by'$$

y restando ordenadamente,

$$2\left(A\overset{\triangle}{A_0}S - B\overset{\triangle}{B_0}S\right) = ay - by'. \qquad (2)$$

Por otra parte, el trapecio AA_0B_0B, cuya altura es $x = a + b$, da:

$$x(y - y') = (a + b)(y - y') = ay - by' + by - ay'.$$

Pero como por la semejanza de los dos triángulos se tiene $a : y = b : y'$, es decir, $ay' = by$, queda la igualdad anterior reducida a esta otra:

$$x(y - y') = ay - by'. \qquad (3)$$

Y comparando esta igualdad con la (2), resulta:

$$2\left(A\overset{\triangle}{A_0}S - B\overset{\triangle}{B_0}S\right) = x(y - y'). \qquad (4)$$

Como ejemplo numérico de cálculo de esta clase, determinemos el área de la superficie representada en la figura 157, aplicando las fórmulas anteriores a los datos numéricos en ella anotados:

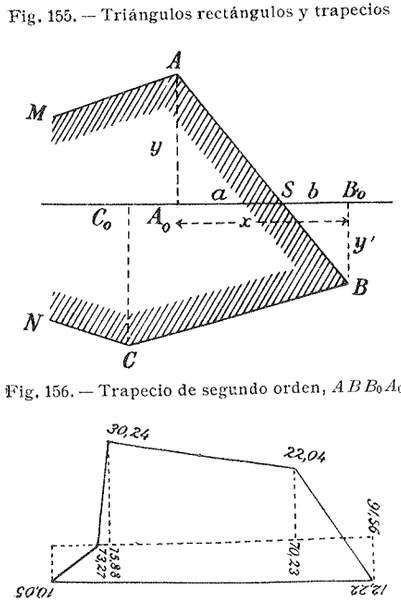


Fig. 156. — Trapecio de segundo orden, $AB B_0 A_0$

Fig. 157. — Escala $^1/_{200}$

$$\begin{aligned}
&+ (15{,}88 - 13{,}27) \times 30{,}24 && = + 2{,}61 \times 30{,}24 = + 78{,}9\\
&+ (70{,}23 - 15{,}88) \times (30{,}24 + 22{,}04) && = + 54{,}35 \times 52{,}28 = + 2841{,}4\\
&+ (91{,}56 - 70{,}23) \times (22{,}04 - 12{,}22) && = + 21{,}33 \times 9{,}84 = + 209{,}5\\
&+ 91{,}56 \times (12{,}22 + 10{,}05) && = + 91{,}56 \times 22{,}27 = + 2039{,}0\\
&- 13{,}27 \times 10{,}05 && = - 13{,}27 \times 10{,}05 = - 133{,}4\\
&&& \text{Sumas: } + 5168{,}8 - 133{,}4\\
&&& 2S = 5035{,}4\\
&&& S = 2517{,}7 \text{ m}^2\\
&&& S = 25 \text{ áreas } 17{,}7 \text{ centiáreas.}
\end{aligned}$$

Fórmulas generales. Vamos a generalizar la fórmula anterior (1), para lo cual referiremos la figura de que se trate a un sistema de coordenadas ortogonales, como el representado en la figura 158, en que se supone que para pasar del eje de las x al de las y, se ha de efectuar un giro en el sentido de las agujas de un reloj.

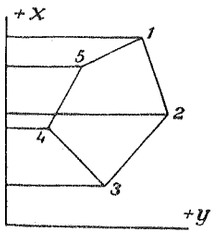


Fig. 158

En esta figura tenemos un pentágono, cuya superficie vamos a calcular en función de las coordenadas de sus vértices, que deben siempre numerarse de izquierda a derecha. Mediante las ordenadas y de estos vértices se forman cinco trapecios, de los cuales resulta el área del pentágono, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned}
2S = &(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) && = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2)\\
&+ (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) && + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3)\\
&+ (x_4 - x_3)(y_3 + y_4) && + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4)\\
&- (x_5 - x_4)(y_4 + y_5) && + (x_4 - x_5)(y_4 + y_5)\\
&- (x_1 - x_5)(y_5 + y_1) && + (x_5 - x_1)(y_5 + y_1)
\end{aligned}$$

y en general:

$$2S = \Sigma (x_n - x_{n+1})(y_n + y_{n+1}). \qquad (5)$$

Si se efectúan las multiplicaciones indicadas y se ordena el resultado en x, se tiene:

$$\begin{aligned}
2S = &\; x_1(y_2 - y_5)\\
&+ x_2(y_3 - y_1)\\
&+ x_3(y_4 - y_2)\\
&+ x_4(y_5 - y_3)\\
&+ x_5(y_1 - y_4)
\end{aligned}$$

y en general: $2S = \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1}).$ (6)

Si, en cambio, se ordena en y, resulta:

$$\begin{aligned}
2S = &\; y_1(x_5 - x_2)\\
&+ y_2(x_1 - x_3)\\
&+ y_3(x_2 - x_4)\\
&+ y_4(x_3 - x_5)\\
&+ y_5(x_4 - x_1)
\end{aligned}$$

y en general: $2S = \Sigma y_n (x_{n-1} - x_{n+1}).$ (7)

La fórmula (5) puede ponerse de este otro modo

$$\begin{aligned}
2S = &\; (y_2 - y_1)(x_1 + x_2)\\
&+ (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)\\
&+ (y_4 - y_3)(x_3 + x_4)\\
&+ (y_5 - y_4)(x_4 + x_5)\\
&+ (y_1 - y_5)(x_5 + x_1)
\end{aligned}$$

y en general: $2S = \Sigma (y_{n+1} - y_n)(x_n + x_{n+1})$ (8)

Las cuatro fórmulas (5) a (8) sólo dan resultados positivos cuando los vértices están numerados de izquierda a derecha, o sea, en el sentido en que marchan las agujas de un reloj.

A continuación damos un ejemplo numérico (fig. 159). con los cuadros de operaciones necesarias para la aplicación de las cuatro fórmulas generales anteriores. La figura representa un polígono determinado por quince vértices, de coordenadas conocidas.

De las cuatro fórmulas generales resulta el siguiente valor para la superficie del polígono:

$$2S = 121345{,}4\ \text{m}^2, \qquad S = 60673\ \text{m}^2, \quad \text{o sea} \quad S = 6\ \text{Ha},\ 6\ \text{a},\ 73\ \text{ca}.$$

Coordenadas de los vértices (fig. 159) y preparación del cálculo del área del polígono

Punto	y_n	$y_{n+1} - y_n$	$y_{n+1} - y_{n-1}$	x_n	$x_n - x_{n+1}$	$x_{n-1} - x_{n+1}$	$y_n + y_{n+1}$	$x_n + x_{n+1}$
	m			m			−	+
(17)	− 85442,82			+ 5795329,61				
		+ 51,26			− 13,94		834,38	673,16
(18)	. . 391,56		+ 100,99	. . . 343,55		− 8,65		
		+ 49,73			+ 5,29		733,39	681,81
(19)	. . . 341,83		+ 111,45	. . . 338,26		+ 6,11		
		+ 61,72			+ 0,82		621,94	675,70
(20	. . . 280,11		+ 149,69	. . . 337,44		+ 40,96		
		+ 87,97			+ 40,14		472,25	634,74
(21)	. . . 192,14		+ 49,65	. . . 297,30		+ 152,76		
		− 38,32			+ 112,62		422,60	481,98
(22)	. . . 230,46		− 30,99	. . . 184,68		+ 215,16		
		+ 7,33			+ 102,54		453,59	266,82
H	. . . 223,13		− 38,84	. . 082,14		+ 101,65		
		− 46,17			− 0,89		492,43	165,17
(29)	. . . 269,30		− 130,75	. . 083,03		− 11,70		
		− 84,58			− 10,81		623,18	176,87
(28)	. . . 353,88		− 115,95	. . 093.84		− 4,70		
		− 31,37			+ 6,11		739,13	181,57
(27)	. . . 385,25		− 54,75	. . . 087,73		− 2,71		
		− 23,38			− 8,82		793,88	184,28
(26)	. . . 408,63		− 30,74	. . . 096,55		+ 13,62		
		− 7,36			+ 22,44		824,62	170,66
(25)	. . . 415,99		+ 2,93	. . . 074,11		+ 33,49		
		+ 10,29			+ 11,05		821,69	137,17
(24)	. . . 405,70		+ 17,83	. . . 063.06		+ 47,94		
		+ 7,54			+ 36,89		803,86	89,23
(23)	. . . 398,16		− 61,67	. . . 026,17		+ 4,51		
		− 69,21			− 32,38		865,53	84,72
(10)	. . 467,37		− 44,66	. . . 058,55		− 303,44		
		+ 24,55			− 271,06		910,19	388,16
(17)	. . . 442,82		+ 75,81	. . . 329,61		− 285,00		
		(+ 51,26)			(− 13,94)			
(18)	. . . 391,56			. . . 343,55				
	Sumas	+ 300,39 − 300,39	+ 508,35 − 508,35	Sumas	+ 337,90 − 337,90	+ 616,20 − 616,20		

Cálculo del área (fig. 159)

Fórmula (5)

$x_n - x_{n+1}$	$y_n + y_{n+1}$	Producto $(x_n - x_{n+1})(y_n + y_{n+1})$	
	−	+	−
− 13,94	834,38	11631,3	
+ 5,29	733,39		3879,6
+ 0,82	621,94		510,0
+ 40,14	472,25		18956,1
+ 112,62	422,60		47593,2
+ 102,54	453,59		46511,1
- 0,89	492,43	438,3	
− 10,81	623,18	6736,6	
+ 6,11	739,13		4516,1
− 8,82	793,88	7002,0	
+ 22,44	824,62		18504,5
+ 11,05	821,69		9079,7
+ 36,89	803,86		29654,4
− 32,38	865,53	28025,9	
− 271,06	910,19	246716,1	
		+ 300550,2	− 179204,7
		$2S = +$ 121345,5	

Fórmula (6)

$y_{n+1} - y_{n-1}$	x_n	Producto $x_n(y_{n+1} - y_{n-1})$	
	+	+	−
+ 100,99	343,55	34695,1	
+ 111,45	338,26	37699,1	
+ 149,69	337,44	50511,4	
+ 40,65	297,30	14760,9	
− 30,99	184,68		5723,2
− 38,84	82,14		3190,3
− 130,75	83,03		10856,2
− 115,95	93,84		10880,7
− 54,75	87,73		4803,2
− 30,74	96,55		2967,9
+ 2,93	74,11	217,1	
+ 17,83	63,06	1124,4	
− 61,67	26,17		1613,9
− 44,66	58,55		2614,8
+ 75,81	329,61	24987,7	
		+ 163995,7	− 42650,2
		$2S = +$ 121345,5	

Fórmula (7)

$x_{n-1} - x_{n+1}$	y_n	Producto $y_n(x_{n-1} - x_{n+1})$	
	−	+	−
− 8,65	391,56	3387,0	
+ 6,11	341,83		2088,6
+ 40,96	280,11		11473,3
+ 152,76	192,14		29351,3
+ 215,16	230,46		49585,8
+ 101,65	223,13		22681,2
− 11,70	269,30	3150,8	
− 4,70	353,88	1663,2	
− 2,71	385,25	1044,0	
+ 13,62	408,63		5565,5
+ 33,49	415,99		13931,5
+ 47,94	405,70		19449,3
+ 4,51	398,16		1795,7
− 303,44	467,37	141818,8	
− 285,00	442,82	126203,7	
		+ 227267,5	− 155922,2
		$2S = +$ 121345,3	

Fórmula (8)

$y_{n+1} - y_n$	$x_n + x_{n+1}$	Producto $(y_{n+1} - y_n)(x_n + x_{n+1})$	
	+	+	−
+ 51,26	673,16	34506,2	
+ 49,73	681,81	33906,3	
+ 61,72	675,70	41704,2	
+ 87,97	634,74	55838,1	
− 38,32	481,98		18469,5
+ 7,33	266,82	1955,8	
− 46,17	165,17		7625,9
− 89,58	176,87		14959,7
− 31,37	181,57		5695,9
− 23,38	184,28		4308,5
− 7,36	170,66		1256,1
+ 10,29	137,17	1411,5	
+ 7,54	89,23	672,8	
− 69,21	84,72		5863,5
+ 24,55	388,16	9529,3	
		+ 179524,2	− 58179,1
		$2S = +$ 121345,1	

Claro está que, en general, nunca se calcula con las cuatro fórmulas, habiéndolo hecho en este ejemplo para comparar los resultados de las mismas. Para comprobar, se emplean, de ordinario, las dos fórmulas (5) y (8), o las (6) y (7), siendo preciso hacer un esquema de cálculo, o formulario, para que las operaciones resulten ordenadas y el trabajo más cómodo y seguro.

Para obtener los productos, lo mejor es el empleo de la máquina de calcular, aunque también pueden utilizarse, con buen resultado, las tablas de multiplicar, como las de Crelle, de tres y tres cifras (Berlín, 1907); las de Zimmermann, de tres y dos cifras (Berlín, 1922); las del mismo autor para factores de 1 a 10000 por 1 a 100 (Liebenwerda, 1906),

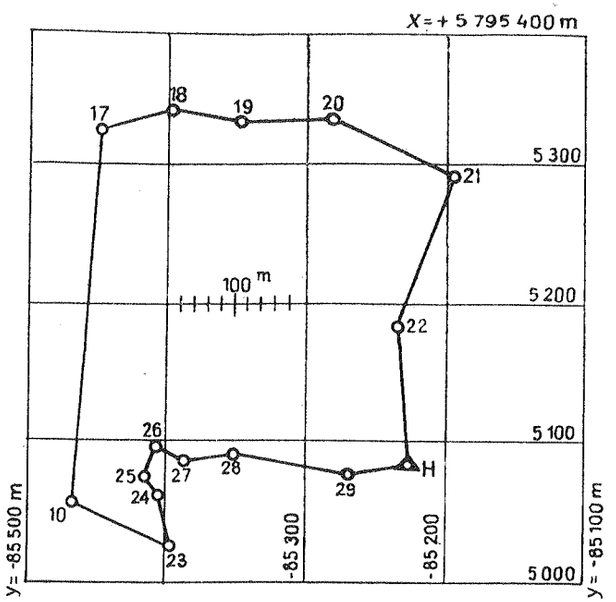


Fig. 159. — Polígono cerrado con 15 vértices. (Escala 1 : 5000)

de dos a cuatro cifras; las del Dr. Peters para multiplicar y dividir números de 1 a 4 cifras (Berlín, 1909), y las de Kühtmann, de tres y tres cifras (Dresde, 1911).

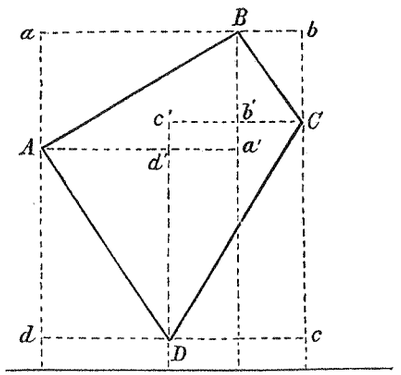


Fig. 160

Casos particulares: el triángulo y el cuadrilátero. El área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices es:

$$2S = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2), \quad (9)$$

pudiéndose poner también esta ecuación en forma de determinante.

Sumando y restando $x_3 y_3$ al segundo miembro, puede escribirse esta ecuación del modo siguiente:

$$2S = (y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_3)(y_3 - y_2). \quad (10)$$

Para un cuadrilátero, se obtiene también una fórmula sencilla aplicando, por ejemplo, la (6), prescindiendo de signos:

$$2S = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3) \quad (11)$$

o sea:

$$2S = (y_1 - y_3)(x_4 - x_2) - (x_1 - x_3)(y_4 - y_2) \quad (12)$$

Estas fórmulas tienen una interpretación o significado geométrico bien patente y que corresponde, como se ve en la figura 160, a la diferencia entre los dos rectángulos

$$abcd - a'b'c'd'.$$

El rectángulo mayor $abcd$ se descompone en otros cuatro rectángulos que tienen por diagonales AB, BC, CD y DA, resultando que:

$$2S = 2ABCD = abcd - a'b'c'd'.$$

Corrección por causa de la curvatura terrestre. Tratándose de coordenadas planas, hay que aplicar una corrección al área calculada en función de las mismas, teniendo en cuenta el factor m de relación entre una longitud contada sobre la superficie terrestre (l) y en el plano (L); pero como esta relación se refiere a líneas, al tratar de superficies habrá que multiplicarla por 2, y la corrección que habrá que aplicar a la superficie S calculada en función de las coordenadas de sus vértices será:

$$-2S(m-1),$$

donde, llamando r al radio medio de curvatura,

$$m - 1 = \frac{y^2}{2r^2},$$

y tomando para $\log \frac{1}{r^2}$ el valor medio $6{,}39011 - 20$, tendremos para el ejemplo de la figura 159, en que $y = -85300$,

$$m - 1 = 0{,}000111,$$

y la corrección para $S = 60673$ m² será:

$$-2S(m-1) = -13 \text{ m}^2,$$

siendo por lo tanto el verdadero valor de S el siguiente:

$$S_0 = 60660 \text{ m}^2.$$

Esta corrección, por su pequeñez, se aplica solamente a grandes superficies.

Influencia de la altura. Las superficies reales sobre el terreno no son tampoco comparables con las corregidas S_0, pues aquéllas se encuentran a una cierta altura H sobre el nivel del mar, mientras que estas últimas están reducidas a este nivel. Para tener la superficie sobre el terreno hay que aplicar al área S_0 la siguiente corrección:

$$+2S_0\frac{H}{r}$$

donde r es el valor medio del radio de la Tierra, para la extensión de terreno considerada.

Método de cálculo de Elling. El cálculo de las superficies en función de las coordenadas de sus vértices se simplifica mucho con el empleo de las máquinas de calcular, pues las diferencias $y_{n+1} - y_{n-1}$ y $x_{n-1} - x_{n+1}$ puede decirse que se calculan automáticamente, ya que las coordenadas van apareciendo en el cuenta-revoluciones de la máquina al dar vueltas a la manivela. Encontramos muy ventajoso, para este objeto, el empleo de una máquina del tipo Odhner, con pase de decenas en el cuenta-revoluciones de la manivela, aunque, claro está, todas las máquinas pueden emplearse para estos cálculos.

Por ejemplo, si se trata de calcular el producto 47,36 (93,52 — 76,48), se pone el número 76,48 en el cuenta-revoluciones, y el número 47,36 en el mecanismo numerador (teclado), estando en cero el registrador donde aparecen los resultados. Se dan vueltas entonces a la manivela, adelante y atrás, con el correspondiente movimiento del carrillo, hasta que en el cuenta-revoluciones se vea el número 93,52, es decir, que la manivela habrá dado 93,52—76,48 = 17,04 vueltas, con lo cual aparecerá en el registrador el resultado, a saber:

$$47{,}36 \times 17{,}04 = 807{,}0144.$$

Este es el fundamento del método de Elling, que consiste en lo siguiente: para calcular una superficie S por la fórmula (6), de la página 155,

$$2\,S = \Sigma\, x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1}) \qquad (13)$$

se pone y_1 en el cuenta-revoluciones, dando vueltas a la manivela, y x_2 en el numerador (teclado). Se dan entonces vueltas a la manivela y se corre el carrillo hasta tener y_3 en el cuenta-revoluciones, apareciendo en el registrador el resultado o producto $x_2\,(y_3 - y_1)$. Se pone entonces el número x_4 en el mecanismo numerador, con las teclas o palanquitas, y el y_5 en el cuenta-revoluciones, agregándose así, al anterior producto dado en el registrador, el nuevo producto $x_4\,(y_5 - y_3)$. Si se trata de un número impar de x, se continúa el procedimiento hasta poner todas las x en el numerador, hecho lo cual se repite el cálculo para todo el polígono, resultando finalmente el valor de $2\,S$. Si el número de x es par no puede aplicarse este procedimiento, pues sólo se obtendría la mitad de los puntos; pero puede salvarse este inconveniente tomando un punto dos veces seguidas, cosa que no hace variar el área de la figura.

La segunda fórmula (7), se pone en esta otra forma:

$$-2\,S = y_n\,(x_{n+1} - x_{n-1}) \qquad (14)$$

con la cual se puede calcular por el mismo método, con sólo cambiar x por y, aunque el signo de $2\,S$ sea negativo.

En el caso de que todas las abscisas y las ordenadas sean negativas, se prescinde de los signos y se procede exactamente igual que antes, sin que el resultado experimente variación alguna. Si todas las abscisas o todas las ordenadas son negativas, puede prescindirse también del signo, pero en este caso hay que cambiar el signo del resultado.

Cuando se trata de signos contrarios (unos positivos y otros negativos) es conveniente hacer positivas todas las abscisas y ordenadas, por adición de una cantidad constante.

Para hacer el cálculo se forma una tabla de coordenadas, por orden normal de vértices, o sea de izquierda a derecha. Al terminar se repiten los dos primeros puntos; además, para un número par de puntos, se toma dos veces seguidas un punto cualquiera.

Con objeto de facilitar el cálculo y evitar confusiones, resulta muy práctico el empleo de una especie de plantilla que se coloca sobre la tabla de coordenadas, de modo que se vean éstas por unas ventanillas adecuadas, de tal manera dispuestas que sólo se vea una y con una x, pero no pertenecientes a un mismo punto, sino la y a uno y la x al anterior o al siguiente, y siempre de modo alterno, es decir, una sí y otra no, etc.

Cuando no se emplea esta plantilla, hemos encontrado muy práctico el ir señalando con un trazo de lápiz la ordenada o abscisa que se vaya tomando en la máquina de calcular, y seguir operando hasta que queden marcados todos los números de una columna.

Como ejemplo numérico de aplicación del método de Elling, tomaremos el de la figura 159, resumiendo todas las operaciones en la siguiente tabla, en que no solamente

está consignado el resultado final, sino todos los parciales, las lecturas de las cantidades tomadas y las resultantes en el cuenta-revoluciones de la manivela, con objeto de comprobar el resultado y de ver claramente toda la marcha operatoria. Claro está que en la práctica se prescinde de todos los resultados parciales y sólo se registra el final.

Punto	y	x	Teclado o marcador	Cuenta-revoluciones	Registrador (resultados)	Teclado o marcador	Cuenta-revoluciones	Registrador (resultados)
17	— 442,82	+ 329,61		442,82			329,61	
18	— 391,56	+ 343,55	343,55	341,83	× 965304,8855	391,56	338,26	3386,9940
19	— 341,83	+ 338,26	337,44	192,14	× 914793,4919	280,11	297,30	× 991913,6884
20	— 280,11	+ 337,44	184,68	223,13	× 920516,7251	230,46	82,14	× 942327,9148
21	— 192,14	+ 297,30	83,03	353,88	× 931372,8976	269,30	93,84	× 945478,7248
22	— 230,46	+ 184,68	87,73	408,63	× 936176,1151	385,25	96,55	× 946522,7523
x	— 223,13	+ 082,14	74,11	405,70	× 935958,9728	415,99	63,06	× 932591,2472
29	— 269,30	+ 083,03	26,17	467,87	× 937572,8767	398,16	58,55	× 930795,5456
28	— 353,83	+ 093,84	329,61	391,56	× 912585,1426	442,82	343,55	56999,2456
27	— 385,25	+ 087,73	338,26	280,11	× 874886,0656	341,83	337,44	54910,6643
26	— 408,63	+ 096,55	297,30	230,46	× 860125,1206	192,14	184,68	25559,3579
25	— 415,99	+ 074,11	82,14	269,30	× 863315,4382	223,13	83,03	2878,1934
24	— 405,70	+ 063,06	93,84	385,25	× 874196,1862	353,88	87,73	4541,4294
23	— 398,16	+ 026,17	96,55	415,99	× 877164,1332	408,63	74,11	× 998975,8888
10	— 467,37	+ 058,55	63,06	398,16	× 876039,7734	405,70	26,17	× 979526,6308
17	— 442,82	+ 329,61	58,55	442,82	× 878654,6164	467,87	329,61	121345,3836
18	— 391,56	+ 343,55						
					$2\,S = 121345{,}3836$			$2\,S = 121345{,}3836$

Por ser negativas todas las ordenadas, se obtiene un primer resultado (fórmula 13) negativo, y un segundo (fórmula 14) positivo.

El cálculo anterior ha sido hecho con una máquina de calcular Brunswiga, modelo Trinks-Triplex, pero no ofrece dificultad alguna el repetirlo con otra cualquiera.

Este método ha sido descrito por L. P. ELLING en Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvaesen, tomo X, 1925, pág. 305 y siguientes. Otro desarrollo le ha sido dado por CHR. LORENZEN en Zeitschr. f. Verm., 1926, págs. 545-552. Sobre la práctica del procedimiento, véase Braunschweiger G. N. C. Monatsschrift, 1928, págs. 275-280.

§ 40. Determinación gráfica del área de una figura

Si en una figura o plano se mide la base a y la altura h de un triángulo, se obtiene el área de este último multiplicando la base por la altura y dividiendo por 2 el producto resultante.

Si se tiene un cuadrilátero y se mide una diagonal d y la suma de las respectivas alturas $(h_1 + h_2)$ de los dos triángulos en que queda descompuesto, se deduce el área S del modo siguiente:

$$2\,S = d\,(h_1 + h_2).$$

Para este uso resulta muy práctico el empleo de una placa de cristal milimetrada, es decir, con una cuadrícula al milímetro.

Puesto que todo polígono puede dividirse, mediante sus diagonales, en triángulos, es

evidente que la superficie del mismo se puede determinar de este modo. Este procedimiento es muy seguro, pero también muy lento y fatigoso.

Muy rápido es el método consistente en convertir el polígono en un triángulo por medio de paralelas convenientemente trazadas. Por ejemplo, en el hexágono $ABCDEF$ de la figura 161, trazando la diagonal DF y por E su paralela EE', se tiene que el triángulo DEF es equivalente al DFE', y lo mismo sucede con los triángulos CBA y $CB'A$, y con los DCB' y $DC'B'$, quedando convertido el hexágono en el triángulo equivalente $C'DE'$, cuya superficie se determina midiendo la base $C'E'$ y la altura DD'.

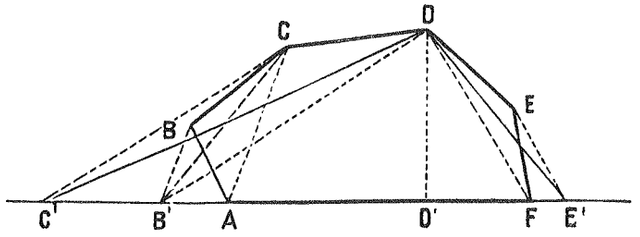
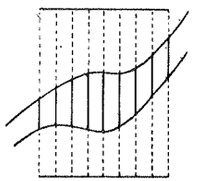


Fig. 161. — Transformación de un polígono en triángulo

Con alguna práctica no es preciso siquiera trazar las líneas auxiliares CA, BB', etc., y para simplificar conviene a veces multiplicar una de las líneas, base o altura, por un número entero, 20, 50, 100, etc.

Para esta conversión en triángulo equivalente, ha construído Hofmann un instrumento auxiliar para el trazado de paralelas.

Un procedimiento muy práctico para la determinación de áreas, especialmente tratándose de superficies irregulares alargadas, es el representado en la figura 162 y que consiste en poner sobre la figura cuya superficie se quiere determinar, un papel transparente que lleva dibujada una serie de paralelas distantes entre sí un número entero, por ejemplo, 2 mm; con el compás se miden y se van sumando, poniéndolas unas a continuación de otras, las longitudes medias de las bandas de 2 mm de anchura en que queda dividida la superficie, y después se multiplica la suma resultante por esta anchura común. La longitud media de cada banda o faja es la distancia entre sus lados superior e inferior contada paralelamente a las dos líneas paralelas que la limitan y a igual distancia de ambas. Para esto se emplea el *compás de sumar,* que indica en una ruedecilla numerada el número total de longitudes tomadas.


Fig. 162. — Descomposición en fajas paralelas

También la placa reticulada que antes hemos citado, sirve muy bien para tomar la altura media de las bandas, poniéndose la línea cero sobre el lado de abajo, y leyéndose con el superior.

En este principio se funda el planímetro de corredera construído por Mönkemöller, en el que la suma de las alturas de las distintas fajas, se hace corriendo, sobre una varilla-guía, un rodillo o tambor giratorio.

Tabla hiperbólica de Kloth. Por ser la hipérbola de asíntotas ortogonales, el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas cumplen con la condición de ser su producto xy constante, puede utilizarse para la determinación gráfica de áreas. La tabla construída por Kloth consiste en una placa transparente, en cuya cara de abajo están trazadas, por procedimiento fotográfico, dos ramas simétricas de hipérbola equilátera, como se ve en la figura 163, en que todas las hipérbolas tienen por asíntotas comunes las rectas CA y CB. La superficie que se trata de medir se descompone en triángulos y en cuadriláteros, como para el cálculo con regla y compás. El modo de calcular un cuadrilátero, por ejemplo, el $adbc$, es el siguiente: se pone la placa sobre el plano, de modo que el punto C de intersección de las asíntotas caiga sobre un vértice (el a en nuestro caso), y que el eje de la placa CA pase por el vértice opuesto b; apoyando el borde de la izquierda sobre una regla, se corre la placa hasta que CA pase por el punto c, leyéndose entonces con el punto b (entre las curvas) el área del triángulo abc. Se corre entonces hacia arriba la placa, hasta que la línea CA pase por el punto d, y el punto b, por las curvas entre que se halle, nos dará el área del triángulo abd. Véase una nota del mismo Kloth en Zeitschr. f. Verm., 1893, págs. 338 a 340.

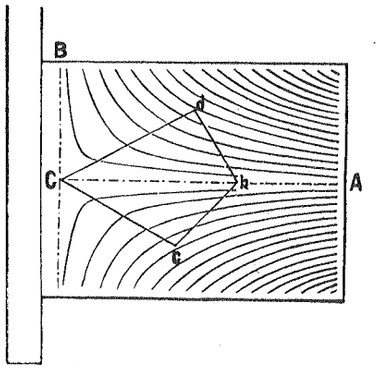


Fig. 163. — C coincide con el vértice a del cuadrilátero

Planímetro de Waues. Supongamos que se tiene un triángulo ACB (fig. 164), y que a una distancia cualquiera h de la base s se traza una paralela a esta última; trazando desde B como centro y con un radio igual a s un arco, hasta cortar en C' a dicha paralela, resulta que la perpendicular AD bajada desde A a BC', es siempre igual a h. Si por C se traza una paralela a s, se determina sobre BC' la longitud s', y el área del triángulo ABC es igual a $\frac{s'h}{2}$ (*). Mediante esta construcción se puede transformar un triángulo de forma cualquiera en otro de altura h.

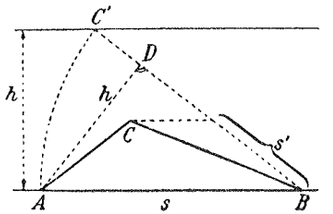


Fig. 164

En este principio se funda el planímetro de Waues, con el cual y con ayuda de una regla móvil graduada, se determina la longitud s' para un triángulo cualquiera, y siendo constante la altura h, se divide la regla de modo que dé directamente el producto $\frac{s'h}{2}$. (Véase Ztschr. f. Verm., 1905, pág. 554.)

Variaciones del papel. El papel de dibujo experimenta alteraciones o cambios de tamaño a causa de la humedad, y las variaciones en distintas direcciones no son siempre iguales. Los papeles litográficos estampados en húmedo experimentan contracciones desiguales, de hasta el 1 % en una dirección y el 1,5 % en la normal a ésta.

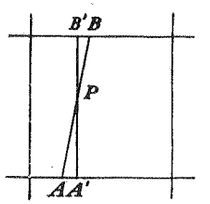


Fig. 165

Considerando en primer lugar la variación que sufre en una sola dirección una cuadrícula (fig. 165), se ve que la longitud inexacta $A'B'$ es menor que la primitiva AB, que se pone inclinada para medir por partes proporcionales el acortamiento del trozo $A'P$ o $B'P$ por medio de una regla bien dividida.

(*) Que la perpendicular AD bajada desde A a BC' es siempre igual a h se demuestra fácilmente con sólo trazar por B la perpendicular común a AB y a su paralela, formándose un triángulo rectángulo igual al ADB.

El área del triángulo ACB resulta igual a $\frac{s'h}{2}$ por ser equivalente al triángulo que tiene por base s' y por vértice opuesto A, ya que ambos tienen un lado común s y los vértices opuestos sobre una paralela al mismo. — N. del T.

Variación en una dirección oblicua. Si un cuadrado (fig. 166) experimenta en un sentido una contracción del p %, y perpendicularmente a éste del q %, se trata de averiguar en qué tanto por ciento p' % se contraerá la línea oblicua l, que corta a los lados a y b.

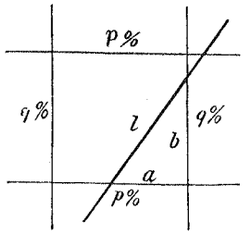


Fig. 166

Sean a, b y l las longitudes originales o exactas de estos lados y de la línea inclinada l; y a', b', l' las nuevas longitudes de estas rectas, a causa de la contracción del papel; es evidente que entre estos elementos pueden establecerse las fórmulas siguientes:

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad l' = \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Según lo supuesto en el enunciado, se tiene:

$$a' = a\left(1 - \frac{p}{100}\right) \qquad b' = b\left(1 - \frac{q}{100}\right) \qquad l' = l\left(1 - \frac{p'}{100}\right) \tag{1}$$

Elevando al cuadrado a' y b', y despreciando los términos cuadrados en p y q, por ser siempre pequeñas estas cantidades y muy grandes los denominadores, resulta:

$$a'^2 = a^2\left(1 - \frac{2p}{100}\right) \qquad b'^2 = b^2\left(1 - \frac{2q}{100}\right)$$

y sumando ambas, después de desarrolladas:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 - \frac{2}{100}(a^2p + b^2q) = (a^2 + b^2)\left(1 - \frac{2}{100}\,\frac{a^2p + b^2q}{a^2 + b^2}\right)$$

y también:

$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = l' = l\left(1 - \frac{1}{100}\,\frac{a^2p + b^2q}{a^2 + b^2}\right). \tag{2}$$

Comparando los dos valores de l' (1) y (2), se obtiene el tanto por ciento de contracción en la dirección l:

$$p' = \frac{a^2p + b^2q}{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Esta fórmula nos dice que p' es una media aritmética entre los valores p y q, afectados de los pesos a^2 y b^2.

También puede determinarse p' en función del ángulo de dirección de la recta inclinada, del modo siguiente:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

y sustituyendo en (3), resulta:

$$p' = p\cos^2\varphi + q\,\operatorname{sen}^2\varphi. \tag{4}$$

Esta determinación de la contracción del papel en una dirección oblicua sólo es necesaria, para la medición de superficies, cuando una sola de las dimensiones se toma en el plano, mientras la otra se ha medido directamente en el campo. En cambio, en el cálculo de superficies referidas a dos direcciones ortogonales en el plano, sólo hay que considerar las contracciones p y q de los bordes, como se ve a continuación:

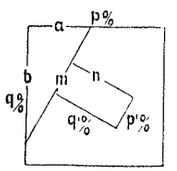


Fig. 167

Supongamos que hay que calcular el área de un rectángulo, $m \times n$ (figura 167), en que m está afectado de la contracción oblicua p' y n de la de igual clase q'; según la fórmula (4) se tiene:

$$p' = p\cos^2\varphi + q\,\operatorname{sen}^2\varphi \qquad \text{y} \qquad q' = p\,\operatorname{sen}^2\varphi + q\cos^2\varphi.$$

de donde resulta:

$$p' + q' = p + q. \tag{5}$$

En vez del producto $m \times n$, hay que calcular en realidad este otro:

$$mn\left(1 + \frac{p'}{100}\right)\left(1 + \frac{q'}{100}\right) = mn\left(1 + \frac{p' + q'}{100}\right) = mn\left(1 + \frac{p + q}{100}\right).$$

El cálculo del área sobre un plano lleva siempre consigo la determinación del tanto por ciento de contracción $p + q$, tanto si se hace el cálculo referido a las dos direcciones principales o cardinales, con las mismas contracciones p y q, o referido a otras direcciones cualesquiera, o si se hace con planímetro.

Cuando se opera con papel cuadriculado hay que hallar la contracción del mismo, por comparación con una regla en la dirección de las coordenadas.

BIBLIOGRAFÍA:

La variación de tamaño de los papeles de los planos y cartas ha sido objeto de numerosos estudios, de los cuales pueden citarse los siguientes:

W. LÁSKA (Zeitschr. f. Verm., 1906, págs. 113-121).
K. FUCHS (Zeitschr. f. Verm., 1907, págs. 289-298).
K. GAMPERT (Zeitschr. f. Verm., 1925, págs. 167-174).
W. BRAUN (Zeitschr. f. Verm., 1926, págs. 579-586).
SCHMIDT (Zeitschr. f. Verm., 1927, págs. 225-231).

§ 41. Planímetro polar de Amsler

La figura 168 representa el planímetro inventado por Amsler, de Schaffhausen, en 1854, que permite determinar con un sencillo movimiento el área de una figura plana cualquiera. Las figuras 169 y 170 son esquemas teóricos para facilitar la descripción y explicación del planímetro de Amsler.

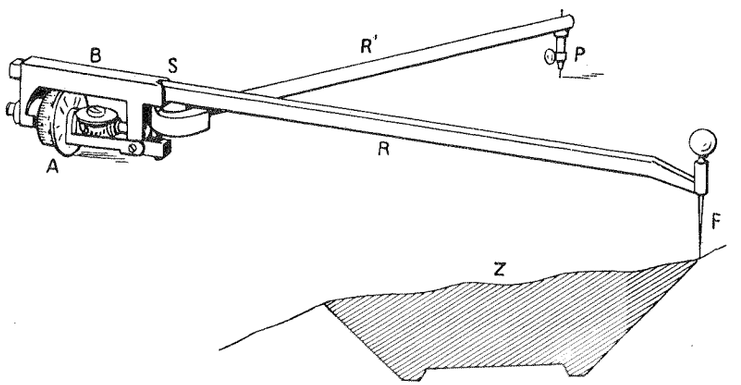


Fig. 168. — Planímetro polar de Amsler

En la exposición de la teoría de este planímetro nos referiremos a las acotaciones de las figuras 168 y 169, donde las letras R, R', r, r' indican las longitudes marcadas en el grabado; P es el *polo* del instrumento, que se fija sobre el papel, girando a su alrededor el brazo $PS = R'$, que se llama brazo polar. El otro extremo S de este brazo describe, por consiguiente, un círculo de radio R' alrededor del polo P.

Un segundo brazo $SF = R$, llamado brazo trazador, va articulado con el brazo polar en S, de modo que el punzón F puede, a su vez, describir un círculo de radio R alrededor del punto S.

Debajo del brazo libre FS va una rueda loca o tambor A, llamada rueda integrante o contadora, cuyas vueltas se leen en un disco graduado; por medio de un nonio puede apreciarse hasta la milésima de vuelta. Del número de vueltas del tambor o ruedecilla A se deduce la superficie de la figura cuyo contorno recorre el punzón F.

La rueda A se encuentra a una distancia r del punto de articulación S; en la figura 169 esta distancia se cuenta en la prolongación del brazo trazador, hacia la izquierda. Hay planímetros en que la rueda A está debajo del brazo mismo, es decir, entre S y F; en este

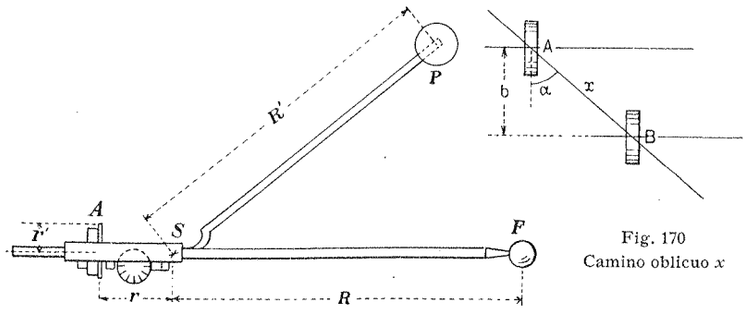


Fig. 169

Fig. 170
Camino oblicuo x

caso, para explicar la teoría del instrumento sirven las mismas fórmulas siguientes, con sólo cambiar el signo de r, es decir, haciendo ésta negativa.

Paso del punzón a lo largo de una línea oblicua x *y sobre una circunferencia* (figura 170). Si la rueda A recorre un cierto camino b en su propia dirección, su borde describe un arco b.

Si la rueda se traslada en sentido de su eje, es decir, normalmente a su propia dirección, cualquiera que sea el camino recorrido, su borde no desarrolla o describe arco alguno.

Finalmente, si el centro de la rueda se mueve a lo largo de una línea recta x que forme un ángulo α con su propia dirección (o un ángulo $90^o - \alpha$ con el eje de la rueda), su borde desarrolla un arco dado por la siguiente ecuación:

$$b = x \cos \alpha. \tag{1}$$

Esta ecuación sirve también para el caso en que la rueda A se mueva sobre una circunferencia alrededor del polo P, siendo entonces x un arco de esta circunferencia y α el ángulo comprendido entre el eje de la rueda y el radio del círculo. Este es el caso considerado en la figura 171, del cual vamos ahora a ocuparnos.

Cuando el punzón F (fig. 171) describe un arco de círculo FF' de radio f y con un ángulo en el centro $FPF' = \varphi$, el centro de la rueda A describe también un arco de círculo alrededor de P con el mismo ángulo en el centro φ.

Si $AP = f'$ es el radio de este arco de círculo descrito por A, la longitud del mismo (no representado en la figura) será:

$$x = f' \varphi,$$

donde φ está expresado en valor analítico o trigonométrico.

Este arco x corresponde al camino x recorrido por la rueda A en la figura 170, teniéndose por lo tanto la siguiente igualdad, deducida de (1):

$$b = x \cos \alpha = f' \varphi \cos \alpha. \tag{2}$$

El valor de $f' \cos \alpha$ se halla en función de las dimensiones del instrumento y del radio f del camino recorrido por el punzón F: para ello se proyectan f' y R' sobre el brazo

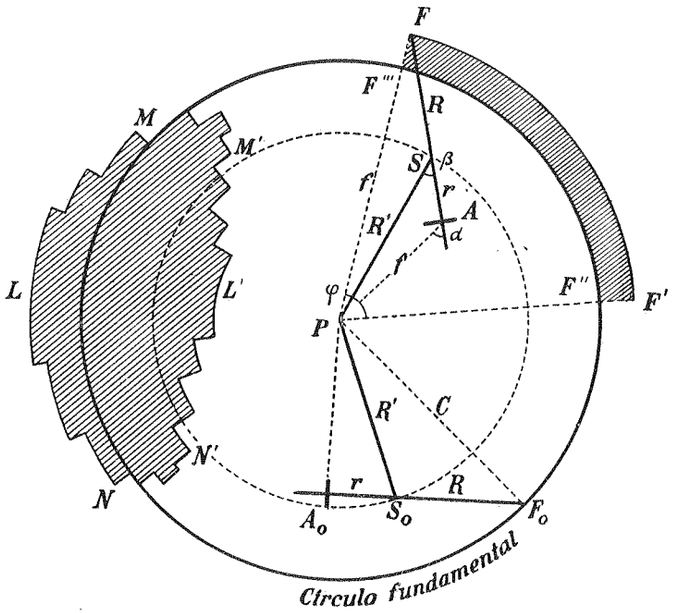


Fig. 171

trazador FA, suponiendo que R' forme un ángulo β con R (fig. 171), con lo cual resulta:

$$f' \cos \alpha = R' \cos \beta - r.$$

Además, en el triángulo PFS se tiene:

$$f^2 = R^2 + R'^2 + 2 R R' \cos \beta$$

y despejando aquí el valor de $R' \cos \beta$ para sustituirlo en el de $f' \cos \alpha$, se obtiene, partiendo de la ecuación (2):

$$b = \varphi (R' \cos \beta - r) = \varphi \left(\frac{f^2 - R^2 - R'^2}{2 R} - r \right)$$

de donde:

$$R b = \frac{\varphi}{2} (f^2 - R^2 - R'^2 - 2 R r). \tag{3}$$

Para simplificar, se reúnen todos los términos constantes del modo siguiente:

$$R^2 + R'^2 + 2 R r = C^2 \tag{4}$$

pudiéndose poner la fórmula (3) de este otro modo:

$$R b = \frac{1}{2} \varphi (f^2 - C^2). \tag{5}$$

La constante C (4) tiene una interpretación geométrica bien sencilla; a saber, es el valor del radio de giro f del punzón para el cual la dirección del radio f' es perpendicular al brazo trazador FA, es decir, que en el caso de la figura 171, $PF_0 = C$, siendo PA_0 perpendicular a A_0F_0.

Esta conclusión puede deducirse también directamente de la fórmula (4), puesto que r es la proyección de R (parte inferior de la figura 171), así como también de la fórmula (5) con referencia a la figura 170, ya que como se ve en dicha parte inferior de la figura 171, el ángulo α es de 90°, y sustituyendo este valor en la fórmula (1) referente a la figura 170, resulta $b = 0$, lo cual sucede en la fórmula (5) para $f = C$.

El círculo cuyo radio es C se llama *círculo fundamental*. Cuando el punzón se mueve sobre este círculo, la rueda A no gira alrededor de su eje.

También los valores $\frac{1}{2} f^2 \varphi$ y $\frac{1}{2} C^2 \varphi$ (5) tienen su interpretación geométrica: son las áreas de los sectores de los círculos de radios f y C respectivamente y ángulo en el centro φ, y la diferencia entre ambos, o sea, su igual, Rb, representa la superficie rayada en forma de corona circular $FF'F''F'''$ (fig. 171).

De aquí resulta la ley siguiente: cuando el punzón F recorre un arco de círculo FF' (pero no una curva cerrada) alrededor del polo P, la rueda o tambor A describe un arco b, que multiplicado por R, da el área de una corona circular limitada por el arco recorrido FF', por el círculo fundamental $F''F'''$, y por los radios $F'F''$ y $F'''F$ correspondientes a los extremos del arco primero. De este modo se comprende que la operación de medir superficies con planímetro no es realmente un cálculo, sino un sistema mecánico y casi intuitivo de hallar aquéllas.

Claro está que hay necesidad de establecer un sentido de rotación para la ruedecilla A y un signo para la superficie. Si el ángulo φ se describe de izquierda a derecha, yendo el punzón por fuera del círculo fundamental, se toma como positiva la superficie anular $FF'F''F'''$, y en este caso las lecturas de la ruedecilla son crecientes, es decir, que la final debe ser mayor que la inicial. Se supone también aquí que la rueda contadora A siempre se ve, desde el polo P, a la derecha, es decir, que nunca pasa al otro lado del brazo polar.

Movimiento del punzón sobre una línea cualquiera. Consideremos ahora el caso de recorrer con el punzón F una línea quebrada NLM o $M'L'N'$ (fig. 171). Se ve, en primer lugar, que al recorrer los trozos radiales, dirigidos hacia el centro, se compensan o anulan los correspondientes arcos desarrollados por la ruedecilla, por lo cual no hay que tenerlos en cuenta. Esto sentado, podemos sustituir una línea cualquiera entre M y N o entre M' y N', por otra quebrada de intervalos infinitamente pequeños, y la superficie correspondiente quedará así descompuesta en zonas circulares elementales, cuyas líneas de separación, si fueran recorridas por el punzón en uno y otro sentido, no ejercerían efecto alguno sobre el área total; por esta razón puede enunciarse la ley anterior de los dos modos siguientes, según el caso:

1. Cuando el punzón del planímetro recorre una línea cerrada, con el polo fuera del recinto limitado por la misma, la ruedecilla desarrolla un arco b, que multiplicado por R da el área S de dicho recinto. Es decir, que:

$$S = bR \text{ (polo exterior).} \tag{6}$$

2. Cuando se recorre una línea cerrada, con el polo P dentro del recinto limitado por aquélla, el producto bR da la superficie comprendida entre dicha línea y el círculo fundamental, es decir, que no representa el área S del espacio comprendido por el perímetro recorrido, para obtener la cual hay que agregar al producto bR, el área $C^2\pi$ del círculo fundamental, o sea:

$$S = bR + C^2\pi \text{ (polo interior).} \tag{7}$$

En vez del arco b desarrollado por la ruedecilla, se puede tomar el número n de vueltas dado por ésta; en efecto, siendo r' el radio de la ruedecilla (fig. 169), una vuelta completa de ésta equivale a un arco u desarrollado por su borde y cuya longitud viene dada por la expresión $u = 2r'\pi$. El arco total b correspondiente a n vueltas será:

$$b = nu. \tag{8}$$

Sustituyendo este valor en (6) y (7) se tiene:

$$S = Rnu \quad \text{(polo exterior)} \tag{9}$$
$$S = Rnu + C^2\pi \quad \text{(polo interior).} \tag{10}$$

El producto Ru representa el valor del área correspondiente a una vuelta de la ruedecilla, como se ve haciendo $n = 1$.

Es evidente la ventaja que supone el hacer el producto Ru igual a la unidad, a 10 ó una potencia cualquiera de 10, ya que la multiplicación de n por Ru se hace instantáneamente sin la menor dificultad. Para lograr esta condición, se puede correr el brazo R dentro de su caja, y una vez conocido el valor de u, se calcula la longitud que hay que dar a R para que Ru sea igual a 1; para un planímetro en que $r' = 1$ cm, o sea, en que $u = 2\pi = 6{,}283$ cm, habrá que tomar

$$R = \frac{1}{u} = 0{,}159 \text{ cm}, \qquad \text{o también} \qquad R = \frac{100}{u} = 15{,}9 \text{ cm}.$$

Esta determinación de R es muy poco precisa, pero sirve de punto de partida para hallar más exactamente su valor, planimetrando una superficie ya conocida. Para ello se toma $R = 15{,}9$ cm y se hace una señal en el brazo trazador, y se recorre entonces con el punzón el perímetro de una superficie de comprobación, igual por ejemplo, a 100 cm². Supongamos que con el planímetro se obtiene un área de 97,6 cm², que como se ve es errónea por defecto. Según la fórmula (9), para dos pruebas o determinaciones sucesivas de la misma superficie S, con longitudes del brazo trazador iguales a R_1 y R_2 respectivamente y las correspondientes lecturas n_1 y n_2, se tiene:

$$S = 2R_1r'\pi n_1 = 2R_2r'\pi n_2$$

de donde:

$$R_2 : R_1 = n_1 : n_2.$$

De aquí se deduce la siguiente ley para regular la longitud R del brazo trazador: cuando al hacer una comprobación resulta un valor más pequeño de lo que debiera resultar, se acorta el brazo trazador R, y cuando la prueba da un valor excesivo, se debe alargar dicho brazo.

En el caso del ejemplo anterior, el brazo $R = 15{,}9$ debe hacerse igual a $15{,}9 \times \frac{97{,}6}{100}$, es decir, que ha de acortarse en una cantidad ΔR dada por la siguiente igualdad:

$$\Delta R = 15{,}9 \times \frac{97{,}6}{100} - 15{,}9 = -15{,}9\left(\frac{100 - 97{,}6}{100}\right)$$

o sea

$$\Delta R = -\frac{2{,}4}{100} \times 15{,}9 \text{ cm} = -0{,}38 \text{ cm}.$$

En resumen: el brazo trazador R debe acortarse en un tanto por ciento de su longitud igual al tanto por ciento de disminución de la superficie respecto a su verdadero valor, y al contrario cuando la superficie resulte errónea por exceso.

Cuando no se consigue la regulación precisa en la primera vez, se repite cuantas veces sean necesarias.

Para señalar de modo permanente la longitud del brazo determinada por estos tanteos se hace una raya en el mismo, si ya no está marcada ésta por el constructor.

Lo que antecede se refiere únicamente a la determinación de superficies con el polo exterior; para el polo interior hay que determinar, además, la constante $C^2\pi$, cuyo valor puede calcularse de antemano por la ecuación (4): $C^2 = R^2 + R'^2 + 2Rr$. En el ejemplo anterior se tiene: $R' = 15{,}9$ cm, $R = 15{,}7$ cm y $r = 3{,}4$ cm, resultando para $C^2\pi$ el valor 1908 cm². También puede hallarse directamente el valor de C poniendo el planímetro sobre el tablero de dibujo de modo que PA_0 sea perpendicular a A_0F_0, como se ve en la figura 171, y en estas condiciones PF_0 es igual a C, evitándose así el tener que hacer el cálculo indicado en la fórmula (4).

La corrección de la constante $C^2\pi$ determinada de este modo previo o aproximado, se hace recorriendo el perímetro de una superficie conocida, con el polo dentro de la misma, y comparando el resultado con el valor exacto de esta última. Por ejemplo, si al planimetrar un cuadrado de 1600 cm², el número de vueltas que da la rueda contadora es $n = -295{,}0$, se tiene: $1600 = n + C^2\pi$, o sea: $1600 = -295{,}0 + C^2\pi$, de donde $C^2\pi = 1895{,}0$.

Siempre conviene conocer con mucha aproximación el valor de la constante $C^2\pi$, *antes* de determinarlo exactamente, pues el disco graduado que registra las vueltas de la rueda contadora no indica más de 100 vueltas de esta última, equivalentes en nuestro ejemplo a 1000 cm² de superficie medida. Si la constante es mayor que la superficie planimetrada, n ha de ser negativo, como se ve en las lecturas del contador. En el caso anterior, la primera lectura sería, por ejemplo de 1149,1 y la segunda o final, de 854,1 cm², de donde $n = 854{,}1 - 1149{,}1 = -295{,}0$ y teniendo en cuenta el valor aproximado de $C^2\pi$, resulta: $S = -295 + 1895 = +1600$, como así debe ser.

Siempre que es posible, se evita el empleo del planímetro con el polo interior, y cuando se trata de superficies grandes se dividen en otras más pequeñas que se planimetran por separado con el polo exterior.

Los planímetros antiguos llevan el brazo trazador grabado con distintas señales acotadas, que indican el valor de Ru correspondiente a cada una de ellas.

Valor de la unidad del nonio. Los planímetros modernos llevan el brazo trazador dividido en medios milímetros, y en la caja o puente dd por donde corre o se desliza este brazo va un nonio n (fig. 172). Si el cero del nonio está colocado exactamente en el punto debido, la posición e del mismo dará la longitud del brazo libre $R = \frac{1}{2}e$. Ordinariamente no se cumple esta condición, por lo cual hay que introducir una pequeña corrección e_0, teniéndose:

$$R = \frac{1}{2}(e - e_0), \tag{11}$$

y el valor de la superficie planimetrada será:

$$S = \frac{1}{2}(e - e_0)\, u\, n. \tag{12}$$

Con el nonio de la rueda contadora se leen milésimas de vuelta, expresándose así

el arco total recorrido por aquélla, es decir, que llamando n' a esta lectura, se tiene: $n = \frac{n'}{1000}$, y sustituyendo en (12):

$$S = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000}\, u\, n'. \tag{13}$$

Si u está dado en milímetros, la superficie resulta expresada en milímetros cuadrados. Ahora bien, si la superficie se halla en un plano levantado a escala $1 : m$, para expresarla en metros cuadrados se tendrá:

$$S' = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000}\frac{m^2}{1000^2}\, u\, n'. \tag{14}$$

El valor

$$w = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000}\frac{m^2}{1000^2}\, u \tag{15}$$

por el cual hay que multiplicar el número n' de vueltas, representa el área correspondiente a un recorrido de la rueda contadora igual a la milésima parte de una vuelta. A este factor u se le llama *valor de la unidad del nonio.*

Ordinariamente el constructor acompaña con cada planímetro una pequeña tabla que da la longitud e del brazo trazador correspondiente a distintas escalas de los planos y a diferentes valores de la unidad del nonio. Por ejemplo, el planímetro n.° 1248 de Dennert y Pape, lleva la siguiente tabla:

Escala $1 : m$	Posición del cero del nonio en el brazo libre e	Valor de la unidad del nonio w
1 : 1000	336,0	10 m²
1 : 1250	269,2	12,5 »
1 : 2000	169,2	20 »
1 : 500	336,0	2,5 »
1 : 250	136,2	0,25 »

Estos datos pueden también aprovecharse para calcular por la fórmula (15), las constantes e_0 y u, de modo que según la siguiente ecuación, deducida de la (15),

$$e = e_0 + \frac{2000\, w}{u}\left(\frac{1000}{m}\right)^2 \tag{16}$$

puede hallarse la posición e del cero del nonio sobre el brazo trazador, para cualquier valor de w y m.

Para el planímetro antes citado, resulta:

$$e = 3{,}0 + 33{,}3\left(\frac{1000}{m}\right)^2 w \tag{17}$$

siendo $e_0 = 3{,}0$ y $u = 60{,}06$ mm.

Planímetro de compensación. Entre los errores inherentes al planímetro polar, desempeña un papel muy importante la inclinación de la rueda contadora; es decir, que si el eje de la rueda no es paralelo al eje del brazo trazador, resulta un error que obra siempre en el mismo sentido si la rueda y el brazo se encuentran constantemente a un mismo lado de la figura que se planimetra.

Para eliminar este error, construyó Coradi, de Zurich, por indicación del geómetra

Lang, el planímetro de compensación representado en la figura 172, de tal modo dispuesto que el brazo trazador A pasa por debajo del brazo polar P, con lo cual puede fácilmente colocarse el planímetro en dos posiciones simétricas entre sí, sin variar la posición del polo. Así queda sin efecto la inclinación de la rueda contadora L, pues se mide la superficie con el planímetro en dos posiciones simétricas respecto a esta superficie y se toma la media de los dos resultados.

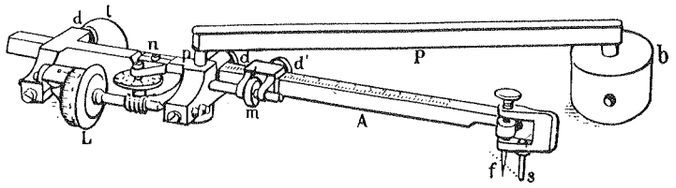


Fig. 172. — Planímetro de compensación

Sobre la teoría de este planímetro, véanse en Zeitschr. f. Verm. los tomos: 1894, página 353; 1878, pág. 264; 1892, pág. 609, y 1880, pág. 27.

Planímetro polar para polo exterior e interior. Mediante una adecuada colocación de la rueda contadora se puede conseguir que el círculo fundamental sea igual a cero, de modo que la fórmula (9) sirve tanto para el polo exterior como para el polo interior. Ahora bien, según la fórmula (4), la superficie del círculo fundamental es:

$$C^2\pi = (R^2 + R'^2 + 2Rr)\pi.$$

Y para que sea igual a cero es preciso que

$$R^2 + R'^2 + 2Rr = 0,$$

o sea, que

$$r = -\frac{R^2 + R'^2}{2R} \qquad (18)$$

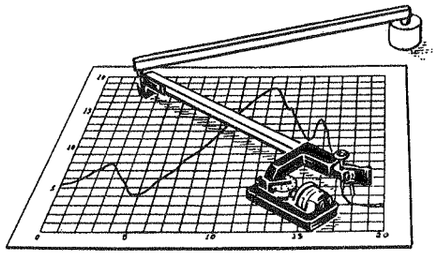


Fig. 173. — Planímetro para polo exterior e interior

lo cual significa que la rueda contadora no ha de estar en la prolongación del brazo trazador, sino en este mismo brazo, a una distancia r del punto de articulación dada por la fórmula (18).

En este principio se funda el planímetro polar (fig. 173) construído por Ott, de Kempten; en este instrumento el brazo trazador es de longitud constante e igual al polar, es decir, $R = R'$, de modo que según (18) resulta también r igual a R, lo cual quiere decir que la rueda contadora está a la misma distancia del punto de articulación que el punzón. El eje de la ruedecilla es paralelo al brazo trazador, al cual va fijo, no estorbando para nada el manejo del punzón.

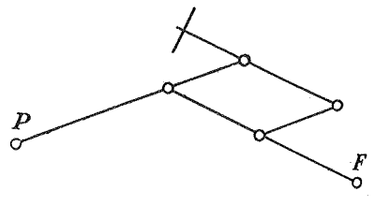


Fig. 174. — Planímetro-pantógrafo

Planímetro pantógrafo. En la figura 174 se ve este planímetro, que se diferencia del polar ordinario en que la rueda contadora no va en el brazo trazador, sino unida a éste por un paralelogramo articulado; de este modo, para calcular un área no hay que multiplicar el recorrido de la rueda por el brazo trazador, sino sólo por una fracción del mismo, pudiéndose, por consiguiente, aumentar en la misma proporción el recorrido de la rueda, con lo cual se consigue una mayor precisión en la medida de las superficies. Sin embargo, parece que este instrumento no ha tenido éxito en la práctica.

Planímetro de rueda deslizante. En la figura 175 se ve un modelo especial de planímetro polar, construído por H. Fieguth, de Danzig, en el cual, en vez de la rueda de tambor ordinaria va una ruedecilla de bordes cortantes que puede girar libremente y deslizarse a lo largo de su eje, que es perpendicular al brazo trazador. Al pasar el punzón por el contorno de una figura, da vueltas la rueda y al propio tiempo se desliza sobre su eje; el deslizamiento total experimentado por la misma al recorrer el punzón un contorno cerrado se lee en una escala, y multiplicado por la longitud del brazo trazador da el área de la superficie limitada por dicho perímetro.

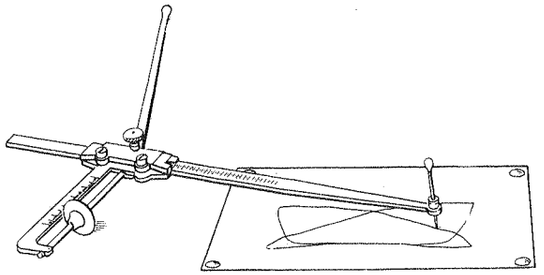


Fig. 175. — Planímetro de rueda deslizante

La teoría de este aparato se comprende inmediatamente comparando este planímetro con el de Amsler: ambos tienen una rueda giratoria, y el recorrido de la de Amsler es igual al deslizamiento lateral de la de Fieguth. La teoría general dada anteriormente para el planímetro polar se puede aplicar al de Fieguth, obteniéndose el resultado ya expresado.

El fundamento de este planímetro ha sido expuesto por Amsler; en el párrafo 46 (figura 194), volveremos sobre esta misma teoría. En igual principio está basado el planímetro de Lippincott.

§ 42. Planímetro de rodillos de Coradi

Planímetros de rodillos. Entre todos los planímetros modernos merecen atención especial los de rodillos, de Coradi. Estos instrumentos no tienen ningún punto fijo sobre el papel de dibujo, al contrario del planímetro polar, descansando sobre el mismo con dos rodillos giratorios. La ruedecilla contadora no se apoya sobre el papel, sino que va dis-

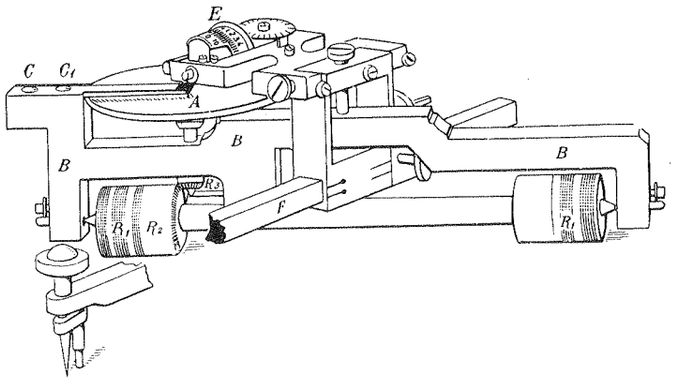


Fig. 176. — Planímetro de disco y rodillos (1/2 del tamaño natural, aproximadamente)
Distancia entre los rodillos R_1 R_1 = 16 cm; diámetro del disco 5,5 cm

puesta en la parte superior. Con estos planímetros puede medirse cualquier superficie cuya anchura no exceda de cierto valor (34 cm con el modelo representado en la figura 176), no habiendo límite alguno para la longitud.

Planímetro de disco y rodillos. La figura 176 representa uno de estos planímetros a escala mitad de la natural; la distancia entre los rodillos $R_1 R_1$ es de 16 cm, y el diámetro del disco A es de 5,5 cm. El bastidor $B\,B$ sirve de soporte a todas las demás partes del instrumento; en primer lugar, bajo este bastidor se encuentra el eje de los rodillos $R_1 R_1$, los cuales, con su superficie de rodamiento no pulimentada, corren sobre el tablero de dibujo, transmitiendo su rotación al disco horizontal A por medio de un engranaje cónico $R_2 R_3$.

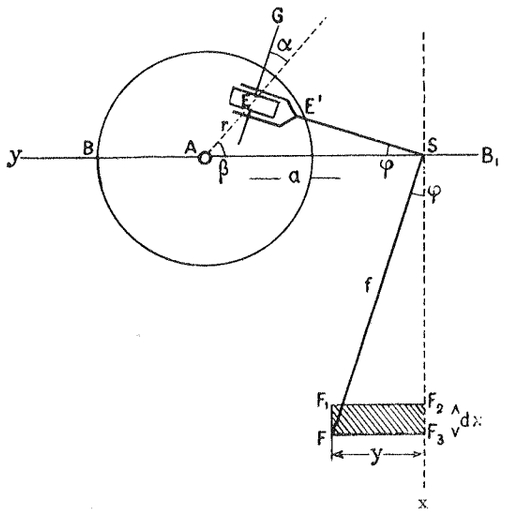


Fig. 177

Supongamos (fig. 177), que el punzón recorra un camino $F_2 F_3 = dx$ normal a $B\,B_1$, dando lugar a un giro de los rodillos de radio R_1 igual a dw:

$$dw = \frac{dx}{R_1}.$$

El disco A girará $d\beta$, y siendo R_2 y R_3 los radios de la rueda y el piñón cónicos que le transmiten el movimiento de los rodillos,

$$d\beta = \frac{R_2\,dx}{R_3 R_1} = k\,dx. \qquad (1)$$

Siendo k constante, se ve que el giro del disco A es proporcional al camino dx recorrido por los rodillos.

Para ver lo que sucede al mover el punzón en cualquier otra dirección, observemos lo que ocurre con el brazo SF y su perpendicular SE, en cuyo extremo va la rueda contadora. El punto S, situado sobre al bastidor $B\,B$, coincide con el eje a cuyo alrededor pueden girar los brazos SF y SE; estos dos brazos forman, en la figura 177, un ángulo φ con las direcciones SY y SX.

El brazo SE se bifurca en E', y entre la horquilla que forma lleva el eje de la ruedecilla E, en la dirección EG. Esta ruedecilla E, que va unida a un contador, descansa sobre el disco A, y a causa del giro $d\beta$ de este último, describe o desarrolla un arco db dado por la siguiente fórmula:

$$db = r\,d\beta\,\cos\alpha, \qquad (2)$$

donde r es la distancia de la ruedecilla al centro del disco, y el ángulo α tiene el mismo significado que en la figura 170 correspondiente al planímetro polar.

Sustituyendo en (2) el valor de $d\beta$ dado en (1), se tiene:

$$db = k\,r\,dx\,\cos\alpha \qquad (3)$$

que resume la teoría completa del planímetro de rodillos.

En la figura 177 se ve que $\alpha + \beta + \varphi = 90°$, y que

$$\frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\varphi+\beta)} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

y sustituyendo el valor de $r\cos\alpha$ por su igual $a\,\operatorname{sen}\varphi$, según se deduce de esta ecuación, se convierte la fórmula (3) en la siguiente:

$$db = k\,a\,\operatorname{sen}\varphi\,dx = \frac{k\,a}{f}\,y\,dx \qquad (4)$$

habiendo sustituído $\operatorname{sen}\varphi$ por su valor $\frac{y}{f}$. En esta fórmula, k y a son constantes, y el brazo f se regula para cada escala, por lo cual también puede considerarse como constante en esta última fórmula, resultando que al pasar el punzón de F a F_1, la rueda E describe un arco db que es proporcional al área $y\,dx$ del rectángulo $F F_1 F_2 F_3$. Si se recorre con el punzón el perímetro $F F_1 F_2 F_3 F$ de este rectángulo, se obtiene el mismo resultado, pues los efectos de los trozos $F_1 F_2$ y $F_3 F$ se anulan, y el $F_2 F_3$, por estar sobre el eje SX no produce ningún giro db en la ruedecilla E, ya que en este caso $\alpha = 90°$.

El recorrido del perímetro de una superficie cualquiera equivale, pues, a la integración de la fórmula (4), como en el planímetro polar.

El brazo trazador $SF = f$ (fig. 177), o F (fig. 176), que puede correrse por una caja o vaina, va provisto de una graduación, y mediante las pruebas necesarias se le da la longitud conveniente para que la constante $\frac{k\,a}{f}$ de la fórmula (4) sea igual a 1, a 100, etc., con lo cual se obtiene la superficie directamente, con sólo la lectura que den la ruedecilla E y su contador. La lectura se hace en tres veces: dos en el disco contador y una en la rueda con su nonio; por ejemplo:

índice en el centro del contador.	34
» » borde » »	17
rueda . . .	328
Suma . . .	357328

Por lo demás, el manejo de este planímetro es igual al del polar.

Planímetro esférico de rodillos. La figura 178 representa otro modelo de planímetro de rodillos, en el cual los rodillos R' transmiten su movimiento de rotación a un cas-

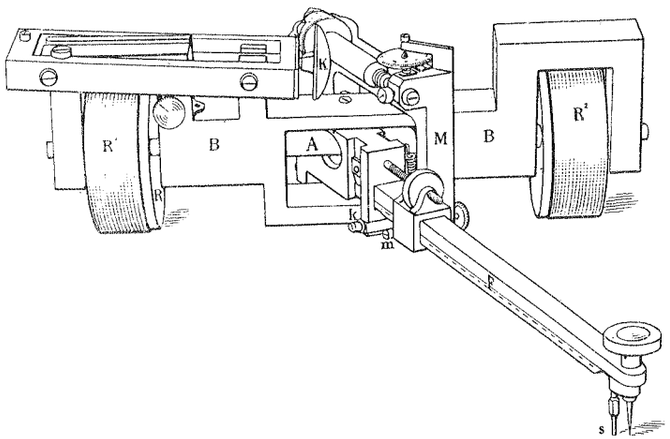


Fig. 178. — Planímetro esférico de rodillos, ≈ 1/2 del tamaño natural. Distancia entre los rodillos, 12 y 16 cm

quete esférico K; contra este casquete se apoya a presión, por efecto de un muelle, un cilindro, que por medio del bastidor M va unido al brazo trazador F en posición paralela

a este último. El cilindro lleva en un extremo una ruedecilla y va provisto también de un disco contador, para poder leer su número de revoluciones.

Para exponer la teoría de este planímetro, partamos del supuesto de que el eje de giro del brazo trazador pase por el centro del casquete esférico, y que para todas las posiciones de dicho brazo, el contacto o tangencia del cilindro con el casquete se haga en un punto del círculo máximo horizontal de la superficie esférica a que pertenece este casquete, cosa que, como se ve en la figura 178, no sucede en realidad.

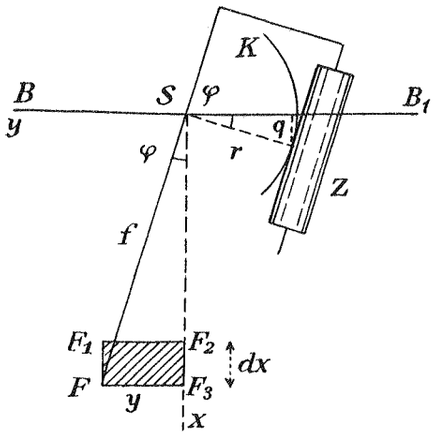


Fig. 179

A esta hipótesis corresponde la figura 179, donde x, y son los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen S coincide con el centro del casquete esférico K, estando x dirigida hacia el punzón. Cuando el brazo f es paralelo al eje de las x, el cilindro Z toca al casquete precisamente en su polo, y al avanzar el punzón en dicha dirección, no se produce ninguna rotación en el cilindro. Si el brazo f está en la posición indicada en la figura 179, es decir, formando un ángulo φ con el eje de las x, el punto de contacto se encuentra en un círculo de radio $q = r \operatorname{sen} \varphi$.

Si se mueve el punzón de F a F_1, recorriendo el espacio dx, giran los rodillos, cuyo radio designaremos con R' (fig. 178) en un ángulo $\frac{dx}{R'}$; llamando R y R_1 a los radios de las ruedas dentadas engranadas entre sí y montadas respectivamente sobre el eje de los rodillos y sobre el eje del casquete esférico, tendremos que este último girará un ángulo dado por la fórmula siguiente:

$$d\lambda = \frac{dx}{R'} \frac{R}{R_1}.$$

El arco recorrido sobre el círculo de tangencia será:

$$db = r \operatorname{sen} \varphi \, d\lambda = \frac{R}{R'} \frac{r}{R_1} \operatorname{sen} \varphi \, dx \tag{5}$$

o bien, designando con la letra k el valor constante $\frac{R}{R'} \frac{r}{R_1}$,

$$db = k \operatorname{sen} \varphi \, dx \tag{6}$$

Y por ser $\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{f}$, resulta por último:

$$db = \frac{k}{f} y \, dx \tag{7}$$

es decir, que el arco desarrollado por la rueda (leído en el contador y en la misma ruedecilla con su nonio) es proporcional al elemento de superficie $FF_1F_2F_3$. El resultado, como se ve, es el mismo que el obtenido con el planímetro de disco y rodillos, deduciéndose que el área de una superficie cualquiera cuyo contorno se recorre con el punzón, es proporcional a la lectura del contador y la rueda.

Pero como se ve en la figura 178, los movimientos del cilindro son diferentes de como

se representan en la figura 179: las condiciones simples y especiales de esta figura sólo se cumplen cuando para la posición normal del brazo trazador el punto de contacto coincide con el polo del casquete esférico y cuando el eje de giro de dicho brazo pasa por el centro de la esfera a que pertenece el casquete. Ahora bien, como estas dos condiciones no se cumplen en la realidad, debemos suponer que para la posición del brazo SF dada en la figura 179, el punto de contacto está en un sitio cualquiera de la superficie esférica, representada en la figura 180, en la cual consideramos una esfera completa en vez del casquete K.

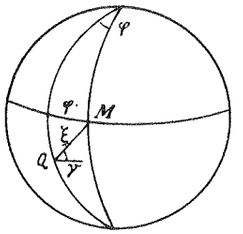


Fig. 180

Por el punto M, en que el eje de rotación de la esfera (de radio r) corta a su superficie, tracemos un círculo máximo vertical y otro horizontal; si el brazo del planímetro forma con su posición normal (como en la figura 179) un ángulo φ, el punto de contacto estará sobre un círculo máximo vertical, que formará con el que pasa por M un ángulo igual φ. Sea Q este punto de contacto, a una distancia angular ξ de M; la distancia lineal ρ del punto Q al eje de giro de la esfera será:

$$\rho = r \operatorname{sen} \xi, \tag{8}$$

donde r es el radio de la esfera.

Este valor ρ es el del radio del círculo menor en el cual permanece el punto de contacto mientras gira la esfera, para la posición del brazo representada en la figura 179. La dirección del giro de la esfera en el punto Q es perpendicular a QM, siendo horizontal el eje del cilindro. Si la esfera gira en un ángulo $d\lambda$, el punto de contacto recorre un camino $\rho \, d\lambda$, y sobre la superficie cilíndrica este camino será:

$$db = \rho \, d\lambda \cos \gamma = r \operatorname{sen} \xi \cos \gamma \, d\lambda. \tag{9}$$

Pero como

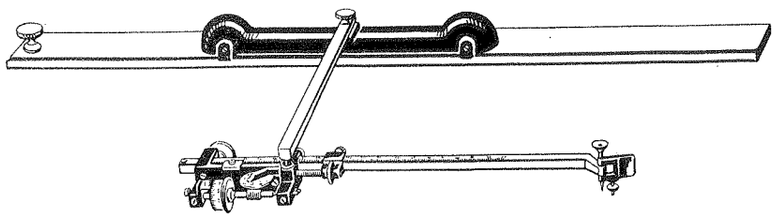
$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \xi} \tag{10}$$

se tendrá, sustituyendo este valor en (9)

$$db = r \operatorname{sen} \varphi \, d\lambda. \tag{11}$$

El giro de la rueda corresponde exactamente al movimiento del punto de contacto sobre el círculo horizontal que pasa por M, como se supuso en la figura 179. De aquí se deduce que la fórmula (7) es perfectamente aplicable, en general, a los planímetros esféricos de rodillos.

Transformación de los planímetros polares en planímetros de rodillos. Si en un planímetro polar ordinario, en vez de moverse la articulación de ambos brazos sobre un


Fig. 181

círculo, lo hiciera sobre una recta, nada variaría en la teoría del instrumento, pudiéndose medir superficies de cualquier tamaño y siendo el brazo polar, en este caso, de longitud

infinita. En este principio se fundan los modernos planímetros, que tienen un dispositivo complementario, a manera de accesorio, para convertir en rectilíneo el movimiento de la articulación, como se ve en los planímetros representados en las figuras 181 y 182.

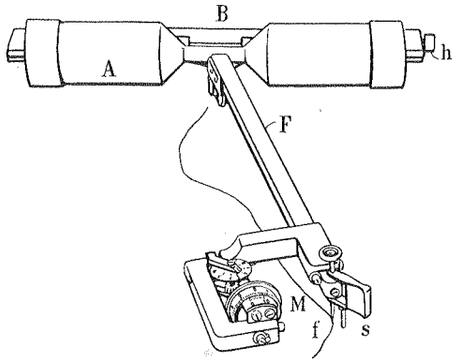


Fig. 182

La figura 181 representa un planímetro ordinario, cuyo brazo polar se ha sustituído por otro que en un extremo lleva la articulación y por el opuesto va rígidamente unido a un carrillo, que sobre dos rodillos puede correrse en línea recta sobre una corredera.

En la figura 182, el brazo trazador F es el mismo del planímetro de Ott representado en la figura 173, pero unido a un carrillo con dos rodillos A, con lo cual el planímetro polar de aquella figura queda convertido en esta otra en uno de rodillos.

La casa Dennert y Pape, de Altona, construye dispositivos de rodillos para adaptarlos a los planímetros polares ordinarios.

§ 43. Planímetro polar de suspensión

Planímetro polar de disco. La casa Coradi ha construído también dos planímetros polares fundados en el mismo principio que los de rodillos, y llamados *de suspensión,* en los cuales la rueda contadora no se mueve sobre el papel.

Uno de ellos es el planímetro polar de disco representado en la figura 183, el cual consiste en un disco o cilindro metálico P de poca altura y muy pesado *(disco polar),* provisto de un reborde dentado; en el centro del mismo hay practieada una cavidad de forma esférica, en la cual se articula el brazo polar A, y que es realmente el polo del instrumento.

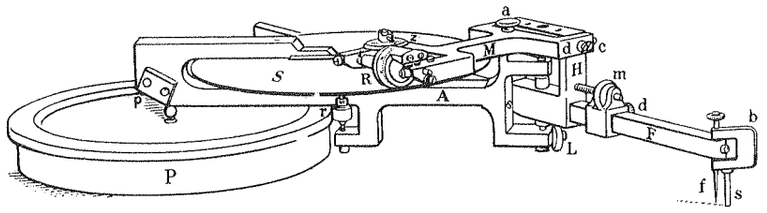


Fig. 183. — Planímetro polar de disco

Este brazo polar A lleva por debajo una rueda dentada r que engrana con el reborde del disco polar P; el eje de esta rueda va unido al centro del disco S. El brazo polar está articulado con el brazo trazador F en cuyo extremo va el punzón f; este brazo F lleva unida la rueda contadora R por medio del bastidor M, como en el planímetro de disco y rodillos de la figura 176.

Al recorrer una línea con el punzón, la rueda dentada hace que gire el disco, moviéndose sobre este la ruedecilla contadora.

Para comprender la teoría de este planímetro tenemos que considerar, por una parte, el movimiento de la ruedecilla sobre el disco giratorio (fig. 177), y por otra, las propiedades de los planímetros polares ordinarios (pág. 166).

Sea P el polo (fig. 184), S la articulación de los dos brazos, y F el punzón; este último, al pasar de F a F' se mueve sobre un círculo de radio f, describiendo un arco FF' cuyo ángulo en el centro es ψ. Si R_1 es el radio del disco polar y R_2 el de la rueda dentada, al movimiento del punzón de F a F' corresponderá un movimiento angular λ del disco giratorio dado por la siguiente fórmula:

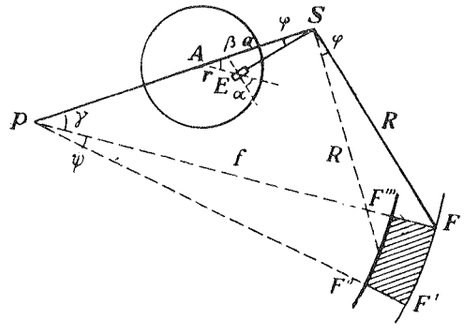


Fig. 184

$$\lambda = \frac{R_1}{R_2}\,\psi = k\,\psi \qquad (1)$$

donde $k = \dfrac{R_1}{R_2}$.

Bajo la ruedecilla E pasa un arco de círculo de radio r y de amplitud λ, y sea α el ángulo que el eje de la ruedecilla forma con el radio del disco que va al punto de contacto de éste con aquélla. En este supuesto, al pasar el punzón de F a F', la ruedecilla recorrerá o desarrollará un arco b, que vendrá dado por la siguiente igualdad:

$$b = k\,r\,\psi\,\cos\alpha. \qquad (2)$$

En el triángulo ASE se tiene:

$$r\ \text{sen}\ (\varphi + \beta) = a\ \text{sen}\ \varphi$$

y

$$\varphi + \beta = 90^\circ - \alpha$$

de donde:

$$r\,\cos\alpha = a\ \text{sen}\ \varphi, \qquad (3)$$

y sustituyendo este valor en (2) resulta:

$$b = k\,a\,\psi\ \text{sen}\ \varphi. \qquad (4)$$

Ahora bien, en el triángulo PSF se tiene, llamando p al brazo polar PS:

$$f^2 = p^2 + R^2 - 2\,p\,R\,\cos\,(90^\circ + \varphi)$$

de donde:

$$\text{sen}\ \varphi = \frac{f^2 - (p^2 + R^2)}{2\,p\,R}, \qquad (5)$$

y sustituyendo este valor en (4),

$$b = \frac{k\,a}{2\,p\,R}\left(f^2 - (p^2 + R^2)\right)\psi,$$

y haciendo $p^2 + R^2 = C^2$, y multiplicando por R,

$$R\,b = \frac{k\,a}{p}\,\frac{f^2}{2}\,\psi - \frac{k\,a}{p}\,\frac{C^2}{2}\,\psi. \qquad (6)$$

Abstracción hecha de la constante $\dfrac{k\,a}{p}$, se ve que los dos términos del segundo miembro de esta igualdad representan las áreas de dos sectores de radio f y C respectivamente, de los cuales el último corresponde a la posición del brazo trazador perpendicular al brazo polar. En este último caso, el punzón describe el circulo fundamental, para el cual la ruedecilla no efectúa rotación alguna. Si los dos puntos F'' y F''' están sobre el círculo fundamental, la superficie $FF'F''F'''$ multiplicada por la constante $\dfrac{k\,a}{p}$, es igual al giro o desarrollo Rb de la ruedecilla.

De este modo hemos llegado al mismo resultado obtenido en la fórmula (5) del párrafo 41 (pág. 167) para el planímetro polar ordinario, pudiendo aplicar todas las consideraciones allí consignadas al planímetro polar de disco.

Planímetro polar esférico. En la figura 185 se ve el otro tipo de planímetro de suspensión, en el cual, en vez del disco giratorio, hay un casquete esférico, como en el planímetro de la figura 178.

El cilindro o masa polar p tiene dentado su borde superior, con el cual engrana un piñón situado debajo del brazo polar; este piñón va montado sobre el eje horizontal del casquete esférico K, de modo que al girar el brazo polar alrededor del polo, gira también

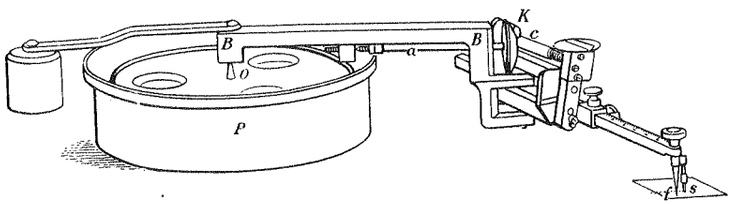


Fig. 185. — Planímetro polar esférico

este casquete. Sobre el brazo trazador, entre las ramas de una horquilla solidaria con el mismo, va montado un cilindro c, cuyo eje es paralelo al de dicho brazo, y que se mantiene apretado contra el casquete esférico por efecto de un muelle.

Para exponer la teoría de este planímetro, partamos de las hipótesis hechas anteriormente para el planímetro esférico de rodillos (figs. 178 a 180), es decir, supongamos que el eje de rotación del brazo trazador pase por el centro del casquete, y que el contacto del cilindro con este casquete se verifique en puntos del círculo máximo horizontal de la esfera a que pertenece aquél. A estas hipótesis corresponde la figura 186, de la cual se deduce fácilmente la anterior fórmula (6).

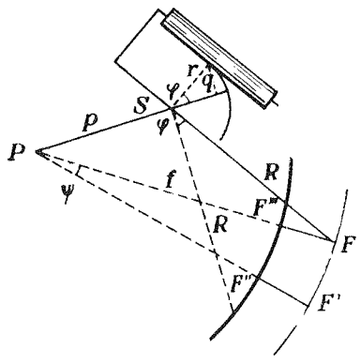


Fig. 186

Cuando el punzón describe un arco de círculo FF' alrededor del polo P, con una amplitud ψ, siendo R_1 y R_2, respectivamente, los radios del cilindro polar y del piñón, el ángulo girado por el casquete esférico será:

$$\lambda = \frac{R_1}{R_2}\psi = k\psi. \qquad (1^*)$$

Por otra parte, el movimiento angular del cilindro, según la fórmula (5) del párrafo 42 (pág. 176), será:

$$b = r\lambda \operatorname{sen}\varphi = kr\psi \operatorname{sen}\varphi. \qquad (4^*)$$

Procediendo de modo análogo a como se hizo para el planímetro polar de disco, calcularemos el valor de sen φ en el triángulo PSF, resultando, como en la última fórmula (5):

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{f^2 - (p^2 + R^2)}{2pR} \qquad (5^*)$$

y obteniéndose, por la fórmula (6),

$$Rb = \frac{kr}{p}\frac{f^2}{2}\psi - \frac{kr}{p}\frac{p^2 + R^2}{2}\psi$$

o bien, haciendo $p^2 + R^2 = C^2$,

$$Rb = \frac{kr}{p}\frac{f^2}{2}\psi - \frac{kr}{p}\frac{C^2}{2}\psi. \qquad (6^*)$$

Como se ve, la teoría del planímetro polar de disco es enteramente aplicable al planímetro polar esférico, con sólo sustituir la distancia a del centro del disco a la articulación S (fig. 184), por el radio r del casquete esférico (fig. 186).

§ 44. Planímetro de varilla de Prytz

Un planímetro extrordinariamente sencillo es el inventado por el capitán dinamarqués Prytz, descrito por su autor en 1886 en la «Tekniske Forenings Tidsskrift». También el fabricante Cornelio Kundsen, de Copenhague, describe este planímetro, con su teoría, en su folleto titulado «Le planimètre hachette ou le stang-planimètre de H. Prytz, Capitaine, est fabriqué chez Cornelius Kundsen, ingénieur opticien. Copenhague, imprimerie de Hoffensberg, 1894». Después el mismo inventor ha expuesto la teoría de este planímetro en la «Tidsskrift for Opmaalings-og Matrikulvaesen, enero de 1895», y según estas memorias originales han aparecido en la revista alemana «Zeitschrift für Verm.», descripciones y teorías del profesor Runge (1895), y de Hamann (1896).

La figura 187 representa el planímetro de Prytz, a escala 1 : 5; la longitud de la varilla, en su parte horizontal, es decir, la distancia l entre el extremo M de la izquierda, en

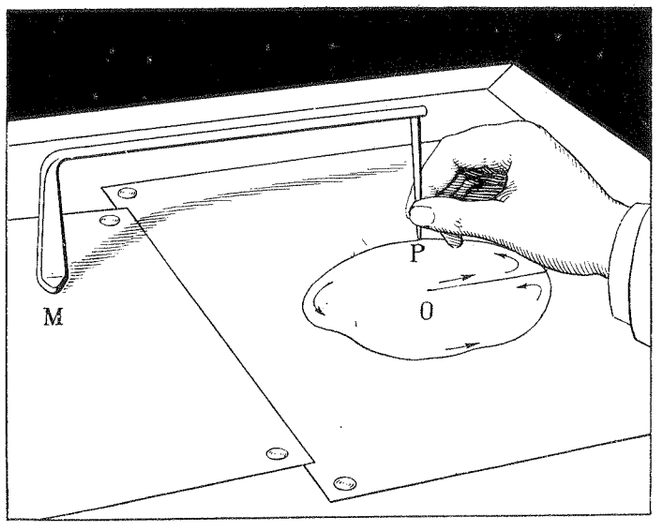


Fig. 187. — Planímetro de varilla, de Prytz. $l = 25$ cm

forma de cuchillo, y el de la derecha P, que es un punzón, es de 25 cm. El manejo y funcionamiento de este planímetro consiste simplemente en recorrer con el punzón P el contorno de la superficie cuya área se quiere hallar, como se hace con el planímetro polar, con lo cual la cuchilla M se moverá en su propia dirección sobre el papel atrás y adelante. En su punto de partida y en el final, se aprieta un poco para que deje dos señales. La distancia transversal entre estas dos señales es proporcional al área de la superficie cuyo contorno ha recorrido el punzón P. Si esta superficie es pequeña, se obtiene como primera

aproximación para valor de su área el producto $c\,l$ de dicha distancia transversal c por la longitud l del brazo del planímetro.

Como introducción a la teoría del planímetro de varilla, consideremos el caso general representado en la figura 188, prescindiendo de la marcha que siga la cuchilla del planímetro, es decir, supongamos una recta de longitud l, que recorra dos curvas cerradas S y H, de modo que el extremo de la derecha no salga de la curva S, ni el de la izquierda de la curva H, y sea G la superficie barrida por la recta l. Con las letras S y H no designamos solamente las curvas recorridas, sino también las áreas limitadas por las mismas, y vamos a demostrar que $S = G + H$.

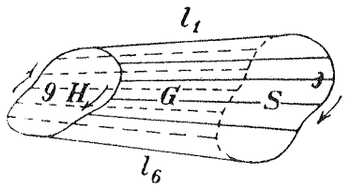


Fig. 188

Para ello, demos signo al movimiento de la recta sobre la superficie barrida G, y consideremos como positiva la parte de superficie recorrida de 1 a 3, etc., hasta 6, y como negativa la parte de 6 a 9, etc., hasta 1, recorrida por la recta en sentido contrario al anterior: de este modo el área G es la suma algebraica de las dos áreas así barridas o recorridas por la recta l.

Dividamos la superficie G en otras dos partes: una positiva G' y otra negativa G''; la positiva G' corresponde a la parte en que la recta l está representada de trazo lleno (figura 188), y G'' a la parte en que l está de trazo cortado; tomando valores absolutos es evidente que $S + G'' = G' + H$, pero como $G' - G'' = G$, resulta que

$$S = G + H. \tag{1}$$

Otra demostración muy clara de esta igualdad consiste en suponer la figura 188 como proyección de una especie de cono, cuyas bases se proyecten en S y H, y cuyas generatrices se proyecten sobre las distintas rectas l de dicha figura. Como la suma algebraica de las proyecciones de las caras de un cuerpo cerrado debe ser cero (del mismo modo que la suma algebraica de las proyecciones de los lados de un polígono cerrado debe ser cero), resulta en este caso que $S = G + H$, igualdad idéntica a la deducida antes de manera diferente.

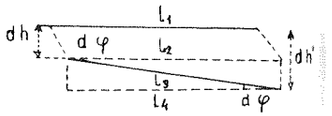


Fig. 189

En la figura 188 se ha representado el caso más sencillo que puede imaginarse, con las curvas S y H sin lazos ni recodos, de modo que las distintas posiciones de la recta l dividen la superficie G en fajas perfectamente definidas. Pero también en los casos más complicados, es decir, cuando las curvas S y H presentan lazos, o se cortan en forma de ∞, etc., se obtiene la misma igualdad (1), si se toman siempre del mismo modo los signos de cada parte, como sucede para todas las integraciones de superficies.

Partamos de la ecuación diferencial que da el área barrida por una recta de longitud l (fig. 189) al pasar de la posición l_1 a la posición l_3, dividiendo este movimiento en dos partes: la primera de l_1 a l_2, en la cual se mantiene la recta paralela a sí misma, siendo dh la distancia entre ambas posiciones, y la segunda parte o fase del movimiento, de l_2 a l_3, en la cual la recta gira un ángulo $d\varphi$ alrededor de su extremo de la izquierda, en sentido normal o positivo. Es decir, que la superficie barrida por la recta es la suma de un paralelogramo con un sector circular, por lo cual se tendrá:

$$dG = l\,dh + \frac{l^2}{2}\,d\varphi. \tag{2}$$

En vez del anterior movimiento, supongamos ahora que la recta se traslade primero

de l_1 a l_4, paralelamente a sí misma, siendo dh' la distancia entre ambas posiciones, y que después gire un ángulo $d\varphi$, en sentido positivo, alrededor de su extremo de la derecha, para colocarse en la posición l_3. En este caso la superficie comprendida entre l_1 y l_3 es igual a la diferencia entre un paralelogramo y un sector circular, teniéndose por consiguiente:

$$dG = l\,dh' - \frac{l^2}{2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Pero como $dh' = dh + l\,d\varphi$, se ve que la ecuación (3) es igual a la (2).

Integrando las dos ecuaciones (2) y (3), resulta:

$$G = l\int dh + \frac{l^2}{2}\int d\varphi \qquad \text{y} \qquad G = l\int dh' - \frac{l^2}{2}\int d\varphi. \tag{4}$$

Estas ecuaciones deben interpretarse correctamente, y no olvidar su deducción, para no incurrir después en contradicciones al tratar de aplicarlas a diferentes casos. Hay que tener en cuenta, que la traslación paralela de la recta se verifica, en los dos casos a que hacen referencia las ecuaciones (4), en el mismo sentido, pero el giro de la recta tiene lugar, en el primer caso, sobre el extremo de la izquierda, y en el segundo sobre el de la derecha. Es también evidente que $\int dh$ no es igual a $\int dh'$.

Supongamos ahora un tercer caso, en el cual el paso de l_1 a l_3 se haga primero manteniéndose paralela la recta a sí misma, en una distancia dh'', y después girando la recta l un ángulo $d\varphi$ alrededor de su punto medio, de modo que la ecuación correspondiente (4) se podrá escribir así:

$$G = l\int dh''. \tag{5}$$

Al aplicar la ecuación (4) al planímetro de Prytz se encuentra, en primer lugar, que todas las desviaciones o traslaciones transversales dh son nulas, es decir, que $dh = 0$, pues la cuchilla M no se mueve más que cuando la varilla l es tangente a la curva. Por ejemplo, en la figura 190, cuando se recorre con el punzón el contorno de la superficie S en el sentido 1, 2, 3, 4, 5, 1, la cuchilla M recorre, a la izquierda, el camino 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, presentando en 3′ un punto de retroceso. Como se ve, mientras el punzón recorre una línea cerrada, la cuchilla M describe una curva abierta, pero puede ésta cerrarse por un giro del instrumento alrededor del punzón, en la posición 1 = 5, describiendo entonces la cuchilla M el arco de círculo $c = 5'\,1'$, en una amplitud o ángulo en el centro igual a φ, y puesto que la longitud del brazo l es igual a 1-1′ y a 5-5′, se tiene, para longitud del arco:

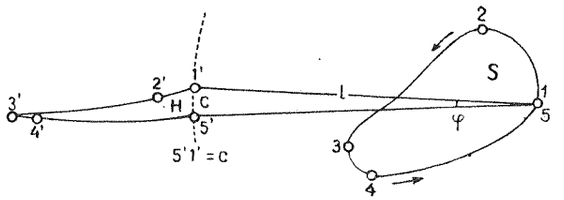


Fig. 190

$$c = l\varphi \qquad \text{o bien} \qquad c = l\,\frac{\varphi}{\rho}, \tag{6}$$

siendo, como es sabido, $\rho = \dfrac{180}{\pi}$.

Llamando c' a la cuerda de este arco, se tendrá:

$$c' = c - \frac{c^3}{24\,l^2}$$

Apliquemos ahora la fórmula (4) a los dos movimientos de la varilla: el primero cuando se recorre el contorno de S y el segundo al girar la varilla alrededor de P para recorrer con la cuchilla el arco c; para el primero tomemos la primera fórmula, en función de dh, y para el segundo la segunda, en función de dh'; sumando ambas tendremos:

$$G = l\int_1^5 dh + \frac{l^2}{2}\int_1^5 d\varphi + l\int_{5'}^{1'} dh' - \frac{l^2}{2}\int_{5'}^{1'} d\varphi.$$

En el primer recorrido, es $dh = 0$, y en el segundo (arco $c = l\,\varphi$) es también constantemente $dh' = 0$, y como la suma de giros elementales de 1 a 5 es igual a la suma negativa de 5′ a 1′, se tiene para expresión de la superficie G:

$$G = \frac{l^2}{2}\int_1^5 d\varphi - \frac{l^2}{2}\int_{5'}^{1'} d\varphi = l^2\int_1^5 d\varphi = l^2\,(\varphi_5 - \varphi_1). \tag{8}$$

La diferencia angular $\varphi_5 - \varphi_1$ corresponde al ángulo φ, que como se ve en la figura 190, es descrito en sentido retrógrado o contrario al de las agujas del reloj, siendo recorridos también en este sentido los contornos de las dos superficies S y H. Según (4) tenemos $G = l^2\varphi$, y sustituyendo este valor en la fórmula fundamental (1), que aunque deducida para el caso de ser recorrido el contorno en sentido normal o dextrógiro, o sea de izquierda a derecha, es válida también para el caso en que *todas* las superficies sean contorneadas en sentido contrario, resulta para valor de la superficie planimetrada S:

$$S = l^2\varphi + H. \tag{9}$$

El valor $l^2\varphi$, o su igual cl para valores pequeños de φ, se determina con toda facilidad, pero no sucede lo mismo con el de la superficie H (fig. 190), y queda aún por conocer el valor del área S, que se compone de un rectángulo cl y de otra superficie de contorno curvilíneo irregular H. Pero en condiciones normales, se tiene la ventaja de que la superficie H es mucho más pequeña que la S, y tanto más pequeña cuanto menores son las dimensiones de S respecto a la longitud l de la varilla. Es decir, que cuando S es muy pequeña se puede despreciar èl valor de H.

Supongamos, por ejemplo, que con el planímetro representado en la figura 187, cuya varilla l tiene 25 cm de longitud, recorremos el perímetro de una pequeña superficie, de 1 cm²; la distancia c resultará igual a 0,4 mm, que multiplicada por $l = 25$ cm nos dará $cl = 1$ cm², que es exactamente la superficie de S.

Para seguir un método más exacto y preciso, hay que tener en cuenta el signo de la superficie H, y volviendo a la fórmula fundamental $S = G + H$, deducida de la generación de las superficies de la figura 188, tenemos que H es positiva cuando es recorrida en el mismo sentido que S, y negativa cuando se recorre en sentido contrario. Esto sentado, veamos lo que sucede en la figura 191 en que AB es la dirección inicial de la varilla l del planímetro, correspondiendo la superficie H' al caso en que el punzón P está en O y la cuchilla M hacia A, y la H'' al caso en que la cuchilla cae hacia B, estando también P en O. Según lo dicho, la superficie H', de la izquierda, será positiva, y la H'', de la derecha, negativa.

De aquí se deduce un procedimiento mejor para determinar la superficie S, que consiste en recorrer su contorno *dos veces,* con el planímetro colocado en dos posiciones simétricas respecto al punto de partida, es decir, formando entre sí las dos posiciones de la varilla un ángulo de 180°, con el vértice en el punto de arranque del punzón; se halla la media aritmética $c = \frac{c' + c''}{2}$ de las longitudes c' y c'' obtenidas y se multiplica esta media por l, resultando así un valor para S mucho más exacto que si sólo se operara con uno de los arcos c' o c'', partiendo del supuesto de que las superficies H' y H'' sean iguales y prescindiendo de sus signos respectivos.

Es decir, que tomaremos como fórmula para determinar el área de S la siguiente:

$$S = \frac{c' + c''}{2}\,l = c\,l. \tag{10}$$

En la figura 191 se recorre la superficie S partiendo de un punto 1 de su contorno, en el sentido 1, 2, 3, 4, 5, para volver al mismo punto 1 = 5; el recorrido con la varilla a la izquierda da 1-5 = c', y con la varilla a la derecha 1-5 = c'', teniéndose $S = \frac{c' + c''}{2}\,l$. Aun puede perfeccionarse más el procedimiento partiendo de un punto *interior* 0, en vez de hacerlo de uno situado en el contorno; de este modo, se recorre la superficie S de la figura 191 del 0 al 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que coincide con el 0, como se ve también en la figura 187. Los arcos resultantes serán ahora 0-6 = d' a la izquierda, y 0-6 = d'' a la derecha, y el área S será:

$$S = \frac{d' + d''}{2}\,l. \tag{11}$$

También puede hacerse una sola de las figuras H' o H'' aproximadamente igual a cero, para lo cual es preciso que la figura tenga forma de cuadrilátero muy alargado, como se ve en la figura 190; según Hamann, para conseguir este resultado, se toma para el

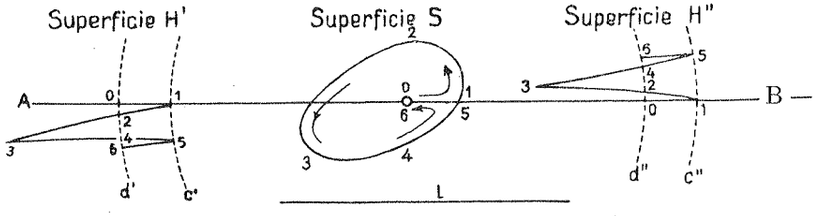


Fig. 191

brazo l una posición inicial o de partida tal, que la normal trazada al mismo por el punto P (punzón), divida a la supeficie S en dos partes aproximadamente iguales.

Hay otro planímetro de varilla, el de Pregel, que consiste en un carrillo de dos ruedas, que pueden girar con independencia una de otra, alrededor de un mismo eje. El brazo del planímetro va fijado perpendicularmente a este eje, en su punto medio, y en el extremo libre lleva el punzón. El punto de intersección del brazo con el eje de las ruedas puede señalarse en el papel apretando una aguja dispuesta en dicho punto. Al recorrer el contorno de una superficie con el punzón, describe este punto la misma curva que la cuchilla del planímetro de Prytz.

§ 45. Precisión de las mediciones con planímetro

Si se mide varias veces una misma superficie, cambiando la posición del planímetro, sobre todo variando de sitio el polo en el planímetro polar, se puede apreciar la precisión de la medida.

En la tabla siguiente se ve el resultado de una prueba de esta clase, hecha con un planímetro polar, sin cambiar la longitud del brazo, pero variando la posición de su polo.

Posición I del polo			Posición II del polo		
Lecturas	Diferencias		Lecturas	Diferencias	
6968			1622		
8937	196,9	cm²	3602	198,0	cm²
0904	196,7	»	5581	197,9	»
2875	197,1	»	7565	198,4	»
4845	197,0	»	9549	198,4	»
Media	196,92	cm²	Media	198,18	cm²

(1)

La diferencia entre los dos resultados es de 1,26 cm², o sea, del 0,6 %, que se ha de considerar como excesiva. Los resultados obtenidos con distintas posiciones del polo no deben diferir entre sí más del 0,5 %.

La causa de tal diferencia reside principalmente en la inclinación del eje de la ruedecilla respecto al eje del brazo trazador R, en el planímetro polar, como ya se dijo al tratar del planímetro de compensación (fig. 172), en el cual se anula el error producido por esta falta de paralelismo entre el eje de la rueda y el del brazo trazador.

En las instrucciones dadas por Coradi para el manejo y verificación del planímetro, se encuentra la siguiente regla sobre la mejor colocación del instrumento: «Se pone el punzón en el centro de la superficie que se va a medir, y el polo se sitúa de modo que la prolongación de la cara de la ruedecilla pase por el mismo, y si se trata de planímetro de rodillos, de modo que el brazo trazador sea perpendicular al eje de giro de aquéllos; en esta posición se traslada el punzón hasta llegar al perímetro de la superficie, y este punto se toma como de partida o arranque para recorrer el contorno.»

Vamos a tratar ahora de los errores accidentales que pueden cometerse en la medición con planímetro, para procurar deducir la fórmula o ley que los rige. Desde luego el error no es proporcional a la superficie, pues el llamado error relativo, es decir, la relación entre el error ΔS de la superficie y la superficie medida S, es para superficies pequeñas mayor que para grandes superficies.

Puede deducirse una ley general para estos errores, midiendo directamente un rectángulo, en el cual se tendrá (véase § 47):

$$\Delta S = k\sqrt{S}. \tag{2}$$

Lorber da la siguiente ecuación:

$$\Delta S = c\,(s) + k\sqrt{S\,(s)} \tag{3}$$

donde (s) es el valor superficial correspondiente a una vuelta de la ruedecilla ($n = 1$). Para un planímetro polar encuentra Lorber los coeficientes numéricos que siguen:

$$\Delta S = 0{,}00126\,(s) + 0{,}00022\sqrt{S\,(s)} \tag{4}$$

donde todos los elementos superficiales están expresados en centímetros cuadrados. El término constante que hay en esta ecuación es de determinación, en general, muy laboriosa.

Los razonamientos siguientes parten, como base, de la fórmula (2), donde se representa con ΔS el error puramente accidental o irregular (de medición), que puede calcularse por las diferencias que se observen al medir repetidas veces una misma superficie sin variar la posición del polo; pero no están comprendidos en ΔS los errores instrumentales

eventuales, como, por ejemplo, una longitud equivocada del brazo, o una desviación del eje de la ruedecilla, etc.

Estos errores accidentales son muy pequeños, pudiéndose formular mediante la expresión

$$\Delta S_1 = 0{,}003\sqrt{S} \tag{5}$$

donde tanto ΔS_1 como S se expresan en centímetros cuadrados.

Ahora bien, cuando se quiere conocer el error medio, teniendo además en cuenta los errores instrumentales (falta de exactitud en la longitud del brazo, desviación del eje de la ruedecilla, etc.) no puede aplicarse la fórmula (5) directamente, siendo lógico añadir a la fórmula un término en S, como se ve en la siguiente:

$$\Delta S = k_1 S + k_2\sqrt{S} \quad \text{o sea, aproximadamente,} \quad \Delta S = \sqrt{k_1^2 S^2 + k_2^2 S}. \tag{6}$$

También en este caso puede expresarse el error por la sencilla fórmula $k\sqrt{S}$, escogiendo para la constante k un valor adecuado, ya que, al fin y al cabo, esta expresión es una fórmula empírica.

Para investigar la ley de los errores del planímetro hay que partir de una serie de mediciones distintas. Muy extensos son los estudios y experimentos hechos por Lorber sobre esta materia, empleando una placa de comprobación, que consistía en una plancha metálica que tenía grabados círculos de distintos tamaños, con lo cual no había que tener en cuenta los errores que siempre pueden cometerse al recorrer el contorno de una superficie desconocida.

Otra serie de experimentos es la publicada por Montigel, que empleaba un planímetro polar, en el cual el valor superficial correspondiente a una vuelta de la rueda contadora era de 57 centímetros cuadrados. Las fórmulas fundamentales, encontradas para expresar ΔS en función de S, fueron:

$$\Delta S = 0{,}000409\,S + 0{,}0125\sqrt{S} + 0{,}056$$
$$\Delta S = 0{,}0191\sqrt{S} + 0{,}041.$$

Estas dos fórmulas pueden, con suficiente exactitud, resumirse en la siguiente:

$$\Delta S = 0{,}022\sqrt{S}.$$

También Lüdemann ha hecho experimentos y mediciones reiteradas con dos planímetros polares, en los cuales, por el orden y disposición de las medidas, quedaban eliminados o compensados los errores instrumentales, sobre todo el de desviación del eje de la rueda contadora. Como valor medio de ΔS, para ambos instrumentos, resultó:

$$\Delta S = 0{,}017\sqrt{S}$$
$$\Delta S = 0{,}0167\sqrt{S} - 0{,}0094$$
$$\Delta S = 0{,}0270\sqrt{S} - 0{,}00151\,S.$$

Si seguimos con la expresión $\Delta S = k\sqrt{S}$ tendremos también, según los valores que acabamos de dar:

$$\Delta S = 0{,}02\sqrt{S}.$$

La siguiente tabla, correspondiente a esta fórmula, da el valor de ΔS para distintas áreas S:

Superficie planimetrada S	$\sqrt{S}$	Error medio de un pase de planímetro $\pm 0{,}02\sqrt{S}$	
1 cm²	1,00 cm	± 0,02 cm² ó el	2,0 %
10	3,16	0,06	0,6
25	5,00	0,10	0,4
100	10,00	0,20	0,2
225	15,00	0,30	0,13
400	20,00	0,40	0,10
1000	31,62	0,63	0,06

Si S y ΔS se expresan en metros cuadrados y el plano de que se trate está hecho a escala $1 : M$, se tiene, para hallar el error medio de un pase de planímetro polar, la siguiente fórmula:

$$\Delta S = \pm 0{,}0002\, M \sqrt{S}. \tag{7}$$

Las superficies muy pequeñas y estrechas no deben medirse con los planímetros polares ordinarios, porque resultan muy poco exactas las mediciones; para estos casos debe recurrirse al método expuesto anteriormente (fig. 162, pág. 162).

Para el planímetro de varilla de Prytz, en empleo ordinario, puede tomarse como error el 1 %. En los trabajos de Hammer y Hamann, la medición de superficies comprendidas entre 9 y 88 centímetros cuadrados, hecha con este planímetro, resultó con un error medio del 0,5 %.

§ 46. Reseña histórica del planímetro

La idea de un planímetro para medir superficies recorriendo su perímetro, parece deberse al matemático J. M. Hermann, de Baviera, que la concibió en 1814. No se conoce publicación alguna de Hermann sobre la materia, pero en la memoria de Bauernfeind sobre «Historia del planímetro» (tomo 137 del «Dinglers Polyt. Journal», año 1855), encontramos la siguiente nota de Hermann:

«Las áreas de dos triángulos o de dos paralelogramos que tengan la misma base están entre sí en la misma relación que sus respectivas alturas. Supongamos ahora que se tiene un círculo cuya circunferencia sea igual a una de dichas bases comunes, y que esté unido de cierta manera a otro, de tal modo que cuando este último girando recorra toda la base, el primero dé una vuelta completa alrededor de su eje, siendo la altura de la figura de que se trate igual a la unidad. Supongamos luego que la altura de la figura sea igual a 2 y que el círculo primero dé, en este caso, dos vueltas alrededor de su eje mientras el segundo recorre la base; y por último, supongamos que el número de vueltas del círculo aumente proporcionalmente a la altura; en estas condiciones, pudiendo conocer el número de vueltas que da el círculo, se tiene un dispositivo que de modo mecánico determina el área de una figura. Es decir, que para obtener el área de las figuras regulares con una máquina, bastaría hallar el modo de que las revoluciones del círculo cumplieran con las condiciones de los supuestos anteriores.»

Según Bauernfeind, construyó Hermann, en el año 1827, un planímetro fundado en esta idea, pero no dice cómo se resolvió el problema anterior. Es de suponer que el invento fué conocido por muy poca gente, y con el tiempo cayó en el olvido más completo.

El primer planímetro realmente práctico fué el inventado en 1827 por el ingeniero suizo Oppikofer. En este instrumento se encuentra, por primera vez, la ruedecilla contadora. Unos cuantos años más tarde fué construído el planímetro de Oppikofer, con algunos perfeccionamientos insignificantes, por el mecánico Ernst, de París.

El planímetro de Oppikofer. En la figura 192 se ve en esquema este planímetro consistente en un carrillo W que se puede correr en línea recta sobre dos correderas situadas en un tablero; en este carrillo va montado un cono metálico giratorio alrededor de su eje; la generatriz superior del cono es horizontal, de modo que su eje forma con la horizontal un ángulo igual a la mitad de la abertura del cono. El eje de este cono lleva montada una rueda L, que corre sobre una tercera corredera o guía y que al mover el carrillo hace que gire el cono.

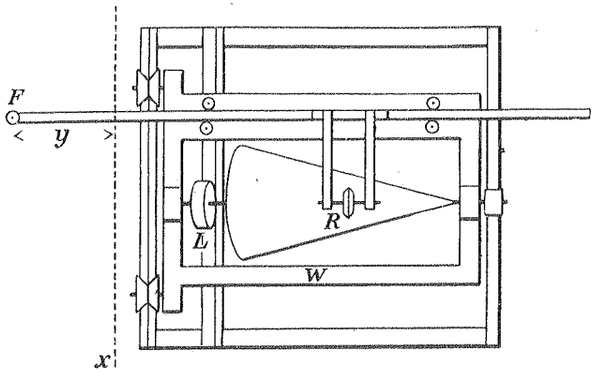


Fig. 192. — Planímetro de Oppikofer

Sobre el carrillo se mueve, por entre cuatro rodillos, el brazo trazador, que en su extremo lleva el punzón F; este brazo lleva unido un bastidor, entre cuyos listones gira la ruedecilla contadora R, que se mueve longitudinalmente sobre la generatriz horizontal del cono.

Si el punzón se mueve hacia la derecha, la ruedecilla se traslada hacia el vértice del cono, y cuando llega a éste, permanece sin girar aunque el carrillo se mueva. La recta que describe el punzón para esta posición de la rueda R es perpendicular a la generatriz horizontal del cono y la tomaremos como eje x de las abscisas.

Si el punzón se encuentra a una distancia y del eje de las abscisas, es evidente que, al moverse el carrillo, la ruedecilla R girará sobre un círculo de la superficie cónica de radio $y \operatorname{sen} w$, siendo w la mitad del ángulo en el vértice del cono. Llamando r al radio de la rueda L, tendremos que para un movimiento del punzón igual a dx, la ruedecilla R desarrollará un arco db cuya longitud será:

$$db = \frac{dx}{r}\, y \operatorname{sen} w,$$

o sea

$$db\, \frac{r}{\operatorname{sen} w} = y\, dx. \tag{1}$$

Si el punzón recorre el contorno de una figura cerrada, se tiene, integrando la ecuación (1), que el segundo miembro dará el área de dicha figura y el primero el recorrido de la ruedecilla R multiplicado por la constante $\dfrac{r}{\operatorname{sen} w}$.

Planímetro de Wetli. El planímetro de Oppikofer no se extendió mucho, debido, según parece, a su escasa precisión. En el año 1849, dió a conocer el ingeniero Wetli, de Zurich, otro planímetro, fundado también en la teoría de Hermann. En este instrumento,

representado esquemáticamente en la figura 193, hay también un carrillo W que corre sobre dos guías, pero el cono está sustituído por un disco S que puede girar, sobre el carrillo, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro; el tablero base, que tiene forma de bastidor rectangular, lleva unida la ruedecilla contadora R, de eje horizontal, de modo que se apoya, al girar, sobre el disco S.

El disco gira al moverse el brazo trazador, que corre por entre cuatro rodillos fijos sobre el carrillo y que lleva en su extremo el punzón F. En la parte vaciada del brazo va un alambre muy fino y tirante, que rodea a una rueda r fija al disco S, de modo que cuando el brazo se corre en su propia dirección, el disco S no cesa de girar: al mismo tiempo la ruedecilla R gira más o menos según su distancia al centro del disco.

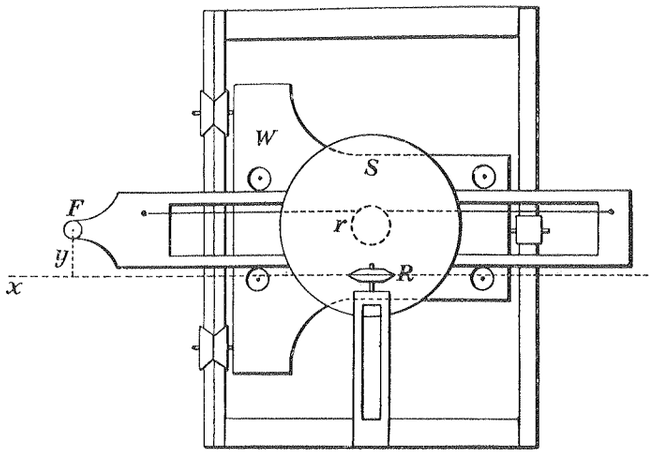


Fig. 193. — Planímetro de Wetli

Para exponer la teoría de este planímetro, tomemos como eje de las abscisas la recta que pasa por el centro de la ruedecilla R perpendicularmente a su eje de rotación. Cuando el punzón F se mueve sobre esta recta, la ruedecilla R no gira, es decir, desarrolla o recorre un arco igual a cero.

Si suponemos que el punzón F está a una distancia y del eje x, y llamamos r al radio de la rueda fijada al disco S, tenemos que al recorrer el punzón una longitud elemental d en la dirección del eje x, la ruedecilla R recorrerá o desarrollará un arco que será:

$$db = \frac{dx}{r} y$$

o bien:

$$r\,db = y\,dx \qquad (2)$$

que por integración da al área de una figura cerrada cuyo contorno se recorre con el punzón F.

Para simplificar hemos supuesto, en la figura 193, que el brazo pasa por el centro del disco: pero es evidente que para la teoría no importa nada que el punzón esté en cualquier posición, bastando que esté rígidamente unido al bastidor que constituye el brazo trazador de este planímetro.

El planímetro de Wetli fué construído por diferentes casas, como la Starke, de Viena, la Goldschmid, de Zurich, etc. Más tarde perfeccionó este instrumento el astrónomo Hansen, pero sin introducir en el mismo novedad alguna fundamental, habiendo construído el planímetro así perfeccionado el mecánico Ausfeld, de Gotha.

Planímetro polar. Los dos planímetros anteriores, el de Oppikofer y el de Wetli, estaban fundados en las propiedades de las coordenadas rectangulares; en cambio, el de

Amsler se basaba en las coordenadas polares. El planímetro polar, que es el más sencillo de todos los planímetros de recorrido, fué inventado por Amsler en 1854 y dos años después descrito en el libro titulado «Sobre la determinación mecánica del área, del momento estático y del momento de inercia de las figuras planas, y en especial, sobre un nuevo planímetro polar, por Jacobo Amsler, profesor en el Gimnasio de Schaffhausen, 1856».

Casi al mismo tiempo, en el año 1855, el profesor Miller, de la Escuela de Minas de Leoben, expuso el mismo principio del planímetro polar, que fué construído por el mecánico Starke, de Viena.

El libro de Amsler, que acabamos de citar, contiene, además de la descripción del planímetro polar simple, referencias a otras formas de planímetros. Por ejemplo, en dicha obra se ve el planímetro polar representado en la figura 194, en el cual, perpendicularmente al brazo trazador, va otro brazo que puede correrse en su propia dirección y que lleva en cada extremo una rueda de borde cortante. Al recorrer el contorno de una figura con el punzón F, se mueve el brazo transversal perpendicularmente al brazo trazador, y la longitud en que se corre dicho brazo es proporcional al área de la figura contorneada. En este mismo principio está fundado el planímetro de Fieguth (fig. 175), descrito anteriormente (pág. 173).

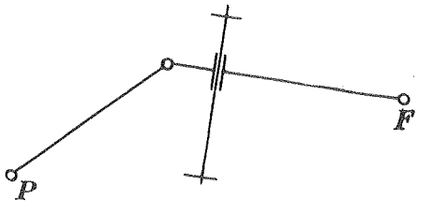


Fig. 194

Otro de los planímetros descritos en la obra de Amsler es el representado en la figura 195, en el cual un carrillo W se mueve en línea recta sobre dos ruedas y sobre el borde de una media esfera K. El brazo trazador gira alrededor de un eje vertical C que pasa por el centro de la esfera K, y la rueda contadora D toca a la esfera en puntos de su círculo máximo horizontal. Como se ve, éste es el planímetro esférico de rodillos, en su forma más sencilla.

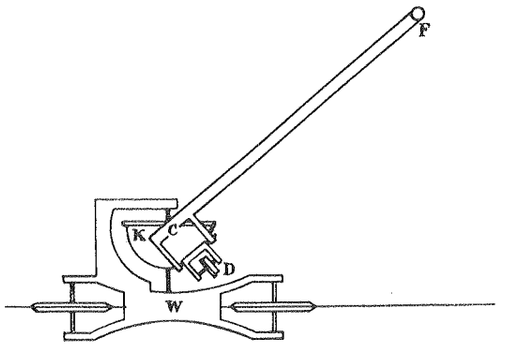


Fig. 195

La teoría general del planímetro esférico fué dada por Amsler en «Zeitschr. f. Instr., 1884», y puesta en práctica por Coradi en el planímetro esférico de rodillos (fig. 178) y en el planímetro polar esférico (fig. 185).

La adición de un disco al planímetro de rodillos y al planímetro polar (figs. 176 y 183) fué propuesta por Hohmann en «Zeitschr. f. Verm., 1881».

En el perfeccionamiento y generalización de los planímetros figura en primer lugar G. Coradi, de Zurich.

BIBLIOGRAFÍA:

DECHER, Theorie und Konstruktion eines neuen auf Polarkoordinaten gegründeten Planimeters. (Dinglers Polyt. Journal, 1885, tomo CXXXVI, págs. 168-181.)

BREMIKER, Theorie des Amslerschen Polarplanimeters. Berlín, 1863.

FAVARO, Beiträge zur Geschichte der Planimeter (Allg. Bauzeitg. Wien, 1873, págs. 68-90, 93-108), con bibliografía de la Planimetría mecánica, 1815-1872, págs. 105-109.

TINTER, Ein Beitrag zur Kenntnis der Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter. (Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Arch.-Vereins, 1877, 8. u. 9. Heft.)

CORADI, Neuer Polarplanimeter. (Zeitschr. f. Verm., 1880, págs. 25-28. Pantographenplanimeter.)

DOLL, Untersuchung der Genauigkeit des Planimeters núm. 155, por Ott y Coradi. (Zeitschr. f. Verm., 1880, págs. 28-37.)

CORADI, Das Präzisionsplanimeter, Patent Hohmann-Coradi. (Zeitschr. f. Verm., 1881, páginas 127-134).

LORBER, Ein Beitrag zur Bestimmung der Konstanten des Polarplanimeters. (Sitz.-Ber. d. Ak. d. W. Wien, 1882.)

REITZ, Planimeter, Patent Hohmann-Coradi. (Zeitschr. f. Verm., 1882, págs. 523-527.)

HOHMANN, Beschreibung, Theorie und Gebrauch des Präzisionsplanimeters. Erlangen, 1882.

HOHMANN, Das freischwebende Präzisionsplanimeter. Erlangen, 1883.

HOHMANN, Das Linear-Rollplanimeter. Erlangen, 1884.

AMSLER, Neuere Planimeterkonstruktionen. (Zeitschr. f. Instr., 1884, págs. 17-24.)

REITZ, Rollplanimeter, Patent Hohmann-Coradi. (Zeitschr. f. Verm., 1884, págs. 479-482.)

LORBER, Das freischwebende Präzisions-Polarplanimeter. (Zeitschr. f. Verm., 1884, páginas 1-19.)

FENNER, Beitrag zur Theorie des Rollplanimeters. (Zeitschr. f. Verm., 1886, págs. 216-219, 242-249, 560.)

LORBER, Coradis Kugelplanimeter. (Zeitschr. f. Verm., 1888, págs. 161-187.)

HAMMER, Das Hamannsche Polarplanimeter. (Zeitschr. f. Instr., 1896, págs. 361-366.)

LANG, Neuerung am Kompensations-Planimeter. (Zeitschr. f. Verm., 1898, págs. 147-148)

Una bibligrafía muy extensa sobre Planimetría mecánica se encuentra en E. DOLEZAL, Planimeterstudien, Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch der k. k. mont. Hochsch. zu Leoben und Pribram , 1906, págs. 293-360, y 1907, págs. 81-143.

§ 47. Precisión en la medición de superficies

En el párrafo 45 (pág. 185) hemos tratado de la precisión de las mediciones con planímetro; vamos ahora a exponer algunas consideraciones sobre la precisión del cálculo de áreas en general, cosa que si bien ha de tener poca importancia práctica, completa y aclara bastante la cuestión anterior. Primero daremos varias fórmulas teóricas, y después los resultados prácticos correspondientes.

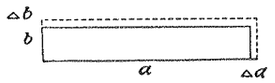


Fig. 196

Cuando se tiene un rectángulo de lados a y b, su área es

$$S = a \times b \tag{1}$$

Si los lados a y b (fig. 196) están afectados respectivamente de los errores $\pm \Delta a$ y $\pm \Delta b$, el área S resultará también efectada de un error $\pm \Delta S$, es decir:

$$S \pm \Delta S = (a \pm \Delta a) \times (b \pm \Delta b) = ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a \Delta b.$$

Restando de esta igualdad la (1), y despreciando el valor muy pequeño $\Delta a \, \Delta b$, resulta:

$$\pm \Delta S = \pm a\Delta b \pm b\Delta a. \tag{2}$$

Si Δa es igual a Δb y en cambio a es bastante más grande que b, el error parcial $a\Delta b$ resulta también mucho mayor que el $b\Delta a$. Esto justifica la regla seguida en la práctica para todo trabajo de Agrimensura, de que si se trata de parcelas estrechas y largas, los lados *cortos* deben medirse relativamente con mucha más precisión que los largos; en el caso de una parcela como la representada en la figura 197, los lados cortos AB, CD, etc., deben medirse directamente en el campo con 1 cm de precisión, y los AC, BD, etc., basta medirlos en el plano, hasta con 0,1 m de precisión solamente.

Volvamos ahora a la fórmula teórica (2) y supongamos que Δa y Δb no son errores observados, sino errores medios, y en este supuesto el error medio ΔS será:

$$\Delta S = \sqrt{(a\Delta b)^2 + (b\Delta a)^2}. \tag{3}$$

Para deducir consecuencias concretas de esta fórmula, hay que considerar varios casos respecto a Δa y Δb, que son los siguientes:

1.er caso. Supongamos que en la fórmula (3) se tenga:

$$\Delta a = \Delta b = c \tag{4}$$

es decir, que el error lineal sea constante, o sea, independiente de las longitudes medidas, como ocurre en el trazado o dibujo de los planos; sustituyendo el valor de Δa y Δb (4) en (3) y poniendo la constante fuera del radical, se tiene:

$$\Delta S = c\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{5}$$

Esta fórmula nos dice que el error superficial es proporcional a la diagonal del rectángulo.

En vez de los lados a y b, vamos a referir ahora la superficie a la relación entre sus lados, es decir, vamos a partir de estas dos ecuaciones:

$$ab = S, \qquad \frac{a}{b} = n \tag{6}$$

en las cuales, eliminando sucesivamente a y b, tendremos:

$$b = \sqrt{\frac{S}{n}}, \qquad a = \sqrt{Sn} \tag{7}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (5) resulta:

$$\Delta S = c\sqrt{S}\sqrt{\frac{n^2+1}{n}}. \tag{8}$$

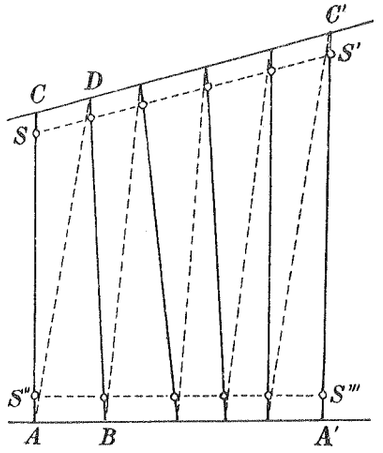


Fig. 197

De aquí se deduce la regla práctica, que dice que para mediciones directas sobre un plano, el error superficial ΔS es proporcional a la raíz cuadrada del área S, para un valor dado de n.

Como ejemplo numérico podemos suponer que el error de medida sea

$$c = \pm 0{,}1 \text{ mm}; \tag{9}$$

la aplicación de la fórmula anterior nos dará la siguiente tabla, para distintos valores de S y n:

Area S	$\sqrt{S}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
cm²	cm	cm²	cm²	cm²	cm²
1	1	$\Delta S = 0{,}01$	$\Delta S = 0{,}02$	$\Delta S = 0{,}02$	$\Delta S = 0{,}03$
25	5	0,07	0,08	0,11	0,16
100	10	0,14	0,16	0,23	0,32
225	15	0,21	0,24	0,34	0,46
400	20	0,28	0,32	0,46	0,64
900	30	0,42	0,47	0,68	0,95

(10)

2.º caso. Supongamos que en la fórmula (3) se verifique que

$$\Delta a = C a \quad \text{y} \quad \Delta b = C b \tag{11}$$

es decir, que los errores lineales sean proporcionales a las longitudes medidas; sustituyendo estos valores en (3) resulta:

$$\Delta S = C\sqrt{(a\,b)^2 + (a\,b)^2} = C \cdot S \cdot \sqrt{2}. \tag{12}$$

En este caso, el error superficial es también proporcional a la superficie misma, y es independiente de la relación n entre sus lados.

3.er caso. Si en la fórmula (3) se tiene

$$\Delta a = k\sqrt{a} \quad \text{y} \quad \Delta b = k\sqrt{b} \tag{13}$$

es decir, que los errores lineales sean proporcionales a las raíces cuadradas de las longitudes (como sucede para los errores accidentales), sustituyendo estos valores en (3), resultará:

$$\Delta S = k\sqrt{a^2 b + b^2 a} = k\sqrt{a\,b\,(a+b)}. \tag{14}$$

Introduciendo en esta fórmula la relación n entre a y b (6) y sustituyendo en la misma los valores de a y b (7) queda:

$$\Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\sqrt{1+n} = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt[4]{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Según sea n, así será el rectángulo más o menos estrecho.

$n = 1$ da	$n = 10$ ó $n = 0{,}1$ da
$\Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt{2} = 1{,}414\,k\sqrt[4]{S^3}$	$\Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt{12{,}1} = 1{,}865\,k\sqrt[4]{S^3}$

(16)

El error medio accidental de las mediciones con regla o cinta, se ha tomado (§ 21, pág. 72) igual a 5 cm por 100 m, o sea, 0,005 m por 1 m; es decir, que:

$$\Delta a = 0{,}005\sqrt{a}, \quad \text{o sea} \quad k = 0{,}005\ \text{m}. \tag{17}$$

Sustituyendo este valor de k en (16) resulta:

$$\text{para } n = 1,\ \Delta S = 0{,}00707\sqrt[4]{S^3}; \qquad \text{para } n = 10,\ \Delta S = 0{,}00932\sqrt[4]{S^3}. \tag{18}$$

Con esta fórmula se calcula la siguiente tabla de errores superficiales teóricos para las mediciones de parcelas:

Superficie S		Cuadrado	Rectángulo 1×10
1 centiárea	= 1 m²	$\Delta S =$ 0,01 m²	$\Delta S =$ 0,01 m²
10 centiáreas	= 10 »	0,04	0,05
1 área	= 100 »	0,2	0,3
10 áreas	= 1000 »	1,3	1,7
1 hectárea	= 10000 »	7,1	9,3
10 hectáreas	= 100000 »	39,8	52,4

(19)

Estos son los valores puramente teóricos de los errores; en la práctica estos valores son siempre más grandes, porque además de los errores considerados Δa y Δb, se cometen siempre otros.

En la práctica, estas consideraciones teóricas sólo son aplicables a la *forma* de la ecuación del error, no utilizándose, desde luego, la fórmula (12); lo más corriente es dar el error superficial en tanto por ciento. Para trabajos de Agrimensura puede tomarse una fórmula que sea como promedio de las (8), (12) y (15).

Error tolerable. Los errores máximos tolerables en la medición de áreas, varían considerablemente de unos Estados a otros, y aun dentro de un mismo Estado, como sucede en Alemania, varían de unas regiones a otras. Para evitar los inconvenientes originados de esta falta de uniformidad, se creó en dicho país una Comisión encargada de unificar estas tolerancias, estando pendiente sus trabajos y acuerdos de la resolución del Consejo topográfico (*).

1. *Determinación de áreas con los datos tomados sobre el terreno.* Teniendo en cuenta las distintas clases de terrenos en la precisión con que debe medirse su cabida, se emplean las siguientes fórmulas:

Para terrenos llanos (o de buena calidad). . . .	$f_1 = 0{,}20\sqrt{S} + 0{,}00030\,S$
» » ondulados (o de calidad regular).	$f_2 = 0{,}25\sqrt{S} + 0{,}00045\,S$
» » accidentados (o de mala calidad).	$f_3 = 0{,}30\sqrt{S} + 0{,}00060\,S$

(20)

2. *Determinación gráfica de áreas.* Para el cálculo del área sobre un plano hecho a escala $1:M$, se tiene la fórmula:

$$f = 0{,}0004\,M\sqrt{S} + 0{,}0003\,S. \tag{21}$$

Para el planímetro polar hemos hallado (fórmula (7), pág. 188), como expresión del error medio de una vuelta de planímetro $0{,}0002\,M\sqrt{S}$. Tomando como error tolerable el triple del error medio, y dando por supuesto que la medición se hace con dos recorridos o vueltas de planímetro, resulta un error tolerable de $0{,}00042\,M\sqrt{S}$, que concuerda con la anterior expresión (21).

En la determinación gráfica de las áreas hay que tener en cuenta que sólo se trata de saber la precisión con que puede calcularse o medirse el área de una figura dada por un plano. Pero en cambio, estudiando la precisión con que puede medirse una superficie sobre el terreno, no se llega a la anterior fórmula (21).

Para que salte a la vista el valor del error tolerable correspondiente a distintas superficies, hemos calculado la siguiente tabla, partiendo de las fórmulas (20) y (21).

Error tolerable en el cálculo de áreas

Superficie S	Cálculo directo con los datos de campo			Cálculo gráfico		
	f_1	f_2	f_3	1:500	1:1000	1:2000
	m²	m²	m²	m²	m²	m²
1 a	2	2	3	2	4	8
2	3	4	4	3	6	11
4	4	5	6	4	8	16
6	5	6	8	5	10	20
8	6	7	9	6	11	23
10	6	8	10	6	13	25
20	10	12	15	10	18	36
50	16	20	24	16	30	58
1 Ha	23	30	36	23	43	83
2	34	44	54	34	63	119
5	60	78	97	60	104	194
10	93	124	155	93	156	283
20	149	202	254	149	239	418
40	247	338	430	247	373	626
60	335	464	592	335	490	800

(22)

(*) Véanse, en el Apéndice, las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral de España.

En el caso de que la determinación del área se haga, parte con los datos de campo y parte sobre el plano (véase pág. 192), no puede darse un error tolerable de conjunto, sino que hay que tomar los correspondientes a la clase de terreno (20) por una parte, y los referentes a la escala del plano por otra (21). El mismo procedimiento hay que seguir cuando se compara el área hallada en función de los datos de campo con la deducida gráficamente sobre el plano.

Compensación de áreas. Al determinar el área de una superficie, lo que siempre se hace es tomar la media de los distintos valores que resultan de calcular aquélla varias veces de modo diferente. Si una de las determinaciones es de más precisión que otra, se toman los números convenientes para representar los respectivos pesos y se calcula la media aritmética con arreglo a lo expuesto en el párrafo 7 (pág. 15). Por ejemplo, si una vez se calcula el área por coordenadas y otra gráficamente, se puede tomar la primera directamente como resultado y la segunda como comprobación. Claro está que todos estos cálculos deben hacerse dentro de los errores tolerables admitidos.

Tratándose de superficies aisladas, se mide cada una dos veces y se toma la media de ambas mediciones. Si se trata de una superficie compuesta de varias partes, como acontece en las hojas del Mapa o del Catastro parcelario, en los planos de poblaciones, etc., se halla primero el área de la superficie total o polígono topográfico, por un método de gran precisión (lo mejor es por coordenadas, como en la figura 159), y la diferencia entre este valor y el resultante del cálculo de las superficies parciales, parcelas o zonas, se reparte proporcionalmente al área de cada una de estas superficies parciales. De aquí puede deducirse, según lo dicho en el párrafo 9 (pág. 22), el error medio correspondiente al cálculo de la unidad de superficie y a cada una de las superficies parciales. Para hallar la precisión por el cálculo doble de las superficies, se presta perfectamente la determinación del error medio deducido de diferencias de observación o errores residuales, expuesto en el párrafo 10 (pág. 25).

§ 48. Fórmulas especiales para triángulos y cuadriláteros

Como introducción a la teoría de la división de superficies vamos a dar las principales fórmulas para el cálculo del área de triángulos y cuadriláteros.

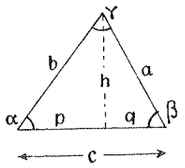


Fig. 198

1. Si se da la base c y la altura n de un triángulo (fig. 198), su área viene expresada por la fórmula siguiente:

$$\Delta = \frac{c\,h}{2}. \tag{1}$$

2. Cuando se conocen dos lados b c, y el ángulo comprendido α, el área del triángulo es:

$$\Delta = \frac{1}{2}\,b\,c \operatorname{sen}\alpha. \tag{2}$$

3. Dado un lado y los dos ángulos adyacentes al mismo, según la fórmula anterior (2) y por la ley de los senos, se tiene:

$$2\Delta = b\,c \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad b = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta,$$

de donde:

$$2\Delta = \frac{c^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{c^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \quad \text{o sea} \quad 2\Delta = \frac{c^2}{\cot\alpha + \cot\beta}. \tag{3}$$

Esta fórmula se deduce, de modo más geométrico, suponiendo descompuesta la base c (fig. 198) en las dos partes p y q.

4. Conociendo los tres lados a, b y c de un triángulo, su área Δ se calcula por esta fórmula:

$$\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \qquad \text{donde} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}. \tag{4}$$

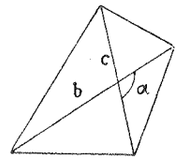


Fig. 199

5. La fórmula (2) puede generalizarse al cuadrilátero, suponiendo que los lados b y c se corten (fig. 199), es decir, que sean las diagonales de un cuadrilátero; en este caso, se ve fácilmente que el área A del cuadrilátero resulta dada por la fórmula siguiente:

$$2A = b\,c \operatorname{sen}\alpha. \tag{5}$$

6. Otra generalización de la fórmula (2) es la que resulta de suponer que los dos lados b y c no se cortan, teniéndose, según se ve en la figura 200:

$$b\,c \operatorname{sen}\alpha = [(b+b') - b']\;[(c+c') - c'] \operatorname{sen}\alpha$$

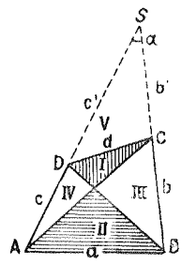


Fig. 200

es decir,

$$\begin{aligned} b\,c \operatorname{sen}\alpha = {} & (b+b')\,(c+c') \operatorname{sen}\alpha - \\ & -(b+b')\,c' \operatorname{sen}\alpha - \\ & -(c+c')\,b' \operatorname{sen}\alpha + \\ & +b'\,c' \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

o sea (fig. 200):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,b\,c \operatorname{sen}\alpha = {} & I + II + III + IV + V - \\ & -(I \quad + III \quad + V) - \\ & -(I \quad + IV + V) + \\ & +\qquad\qquad V \end{aligned}$$

de donde:

$$b\,c \operatorname{sen}\alpha = 2\,(II - I). \tag{6}$$

7. El área A de un trapecio, cuyas bases o lados paralelos sean a y b y la altura h, está dada por esta fórmula:

$$2A = (a+b)\,h. \tag{7}$$

8. El área de un cuadrilátero cualquiera $ABCD$ (fig. 201), del cual se conocen tres lados c, a, b y los ángulos A y B comprendidos entre ellos, está dada por la fórmula siguiente:

$$2S = c\,a \operatorname{sen} A + a\,b \operatorname{sen} B - c\,b \operatorname{sen}(A+B). \tag{8}$$

Trazando las líneas auxiliares que se ven en la figura 200 se tiene:

$$\begin{aligned} c\,a \operatorname{sen} A &= 2\,\Delta\,DAB = 2\,(IV + II) \\ a\,b \operatorname{sen} B &= 2\,\Delta\,ABC = 2\,(III + II) \\ -c\,b \operatorname{sen}(A+B) &= -2\,(II - I) \quad \text{[según (6)]} \\ \text{Suma} &= 2\,(IV + III + II + I) = 2\,S. \end{aligned}$$

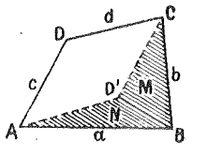


Fig. 201

El último término de la fórmula (8), es decir, $c\,b \operatorname{sen}(A+B)$, tiene además del significado $2\,(II - I)$ que da la fórmula (6), el de ser igual al doble del área del triángulo $CBD' = M$ (fig. 201). Al triángulo M le llamamos triángulo de convergencia para los lados c y b, y análogamente, el triángulo $ABD' = N$, será el triángulo de convergencia para los lados a y d.

La fórmula (8), aplicada al cuadrilátero de la figura 202, da:

$$2S = a\,m \operatorname{sen}\alpha + a\,n \operatorname{sen}\beta - m\,n \operatorname{sen}(\alpha+\beta). \tag{9}$$

9. Si se conocen dos lados opuestos a, b (fig. 202), y todos los ángulos α, β, γ, δ (en realidad basta con tres, ya que el cuarto se deduce inmediatamente de la condición $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$), se halla el área del cuadrilátero como diferencia entre dos triángulos, dados por la fórmula (3) dél modo siguiente:

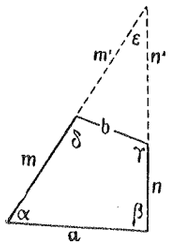


Fig. 202

$$2A=\frac{a^2}{\cot\alpha+\cot\beta}-\frac{b^2}{\cot(180°-\gamma)+\cot(180°-\delta)}$$

de donde:

$$2A=\frac{a^2}{\cot\alpha+\cot\beta}+\frac{b^2}{\cot\gamma+\cot\delta}. \tag{10}$$

Las fórmulas dadas en los nueve casos anteriores constituyen, en general, la base para la división de superficies, objeto del párrafo siguiente. También haremos uso, en parte, del cálculo de coordenadas, estudiado en el capítulo IV.

§ 49. División de un triángulo

1.° Se tiene un ángulo MAN (fig. 203) y una recta $M'N'$: trazar una paralela MN a ésta, de tal modo que el triángulo resultante MAN tenga un área dada igual a S.

El problema se resuelve fácilmente prolongando los lados AM y AN del ángulo dado, hasta que corten a la recta dada $M'N'$, formándose así el triángulo ABC; se miden la base c de este triángulo y su altura h, de modo que en la figura 203 se tendrá:

$$2S:ch=m^2:c^2$$

de donde:

$$m=c\sqrt{\frac{2S}{ch}}. \tag{1}$$

Midiendo también el lado $AC=b$, se tiene análogamente:

$$n=b\sqrt{\frac{2S}{ch}}. \tag{2}$$

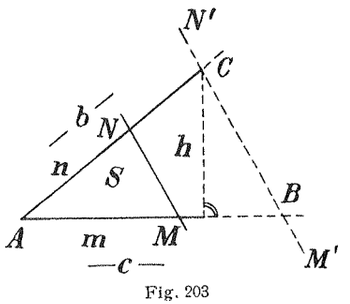


Fig. 203

Conocidas m y n basta tomar las longitudes correspondientes a partir de A para tener los puntos M y N.

2.° Sea ABC un triángulo dado (fig. 204) y sobre uno de sus lados un punto M. Se trata de trazar por M una recta de tal modo que determine un triángulo MAN de área igual a S.

La solución más sencilla de este problema consiste en trazar por M la altura ME sobre el lado AN, y calcular el lado $AN=m$ por la fórmula:

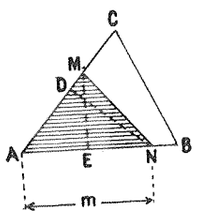


Fig. 204

$$m=\frac{2S}{ME}. \tag{3}$$

También puede resolverse este problema, calculando la longitud de la perpendicular DN por la condición:

$$DN=\frac{2S}{AM}. \tag{4}$$

Se traza después una paralela a AM a una distancia DN y el punto N queda determinado por la intersección de esta paralela con la recta AB.

3.° Dado un ángulo α (fig. 205) y un punto P, trazar por este punto una recta MN que determine con aquel ángulo un triángulo de área dada S.

En primer lugar se fija la posición del punto P, midiendo las longitudes a y h, y al mismo tiempo se mide la ordenada h_1 del punto Q. Llamando $AM=m$ y $AN=n$, se tiene:

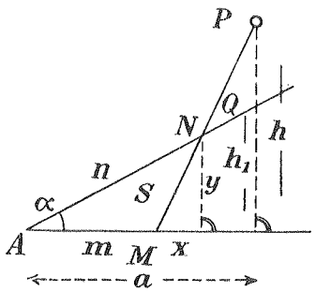


Fig. 205

$$2S=mn\operatorname{sen}\alpha \tag{5}$$

$$\frac{a-m}{h}=\frac{x}{y}\qquad x+m=n\cos\alpha$$

$$y=n\operatorname{sen}\alpha$$

de donde:

$$\frac{a-m}{h}=\frac{n\cos\alpha-m}{n\operatorname{sen}\alpha}$$

y sustituyendo aquí el valor de n deducido de la fórmula (5), queda:

$$2\frac{a}{h}S-2\frac{m}{h}S=2S\cot\alpha-m^2$$

o bien

$$m^2-\frac{2S}{h}m=\frac{2S}{h}(h\cot\alpha-a)$$

y resolviendo esta ecuación de segundo grado en m, resulta:

$$m=\frac{S}{h}\pm\frac{S}{h}\sqrt{1+\frac{2h}{S}(h\cot\alpha-a)}.$$

Si no se da directamente el ángulo α, podemos poner $\cot\alpha=\frac{a}{h_1}$, y el valor de m vendrá dado por la siguiente fórmula:

$$m=\frac{S}{h}\pm\frac{S}{h}\sqrt{1+\frac{2ah}{Sh_1}(h-h_1)}. \tag{6}$$

Una vez determinado de este modo el punto M, queda también determinado el N (al unir M con P), pudiendo medirse su ordenada y, con lo cual se obtiene el área del triángulo AMN por la fórmula

$$S=\frac{1}{2}my$$

que sirve así de comprobación.

El signo del segundo término de la fórmula (6), se determina fácilmente en cada caso particular. Si el punto P está dentro del ángulo α, admite el problema, en general, dos soluciones, de las cuales la práctica indicará la más conveniente.

Sobre esta división del triángulo conviene hacer notar que todas las rectas que forman con un ángulo dado α un espacio triangular de área constante, son tangentes a una hipérbola cuyas asíntotas son los lados del ángulo dado.

§ 50. División de un cuadrilátero por una recta paralela a una dirección dada

1.° *División de un cuadrilátero por una recta paralela a uno de sus lados.* Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ (fig. 206), y se quiere separar del mismo una superficie de área dada S, trazando una paralela MN a uno de los lados AB.

En muchos casos se puede resolver rápidamente el problema por tanteo, determinando la distancia aproximada y_0 de la paralela al lado AB sobre un plano, o por la relación $y_0 = S : a$. Una vez trazada la paralela M_0N_0 a AB, y medida su longitud x_0, se tiene el área del trapecio ABM_0N_0 por la fórmula siguiente:

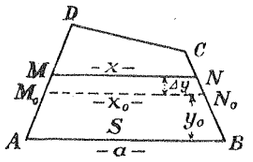


Fig 206

$$ABM_0N_0 = S_0 = \frac{1}{2}(a + x_0)\,y_0.$$

Para la traslación Δy que tiene que experimentar la línea M_0N_0, para pasar de la solución aproximada S_0 a la exacta S, se tiene:

$$\Delta y = \frac{S - S_0}{x_0}.$$

Midiendo la línea MN puede determinarse el área del trapecio $ABNM$, y si es preciso se vuelve a correr un poco la paralela.

Para la resolución matemática, por decirlo así, de este problema, se toma el lado AB como eje de abscisas (fig. 207), y por el punto C se traza una paralela a AB, cuyo punto de intersección E con el lado AD se determina sobre este lado por sus distancias a A y D; además, se mide también la longitud $EC = b$ de dicha paralela.

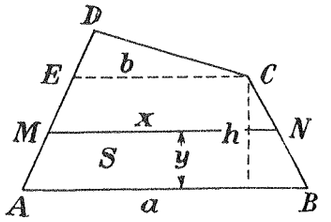


Fig. 207

Después de calcular el área del cuadrilátero total $ABCD$, la del trapecio $ABCE$ y la del triángulo ECD, se ve, por el valor del área dada S, si la paralela correspondiente (solución del problema) ha de estar por encima o por debajo de la paralela trazada CE. En el primer caso, queda reducido el problema a dividir el triángulo EDC por una paralela a su base EC de modo que quede una parte de área determinada, ya resuelto en la página 198.

En el segundo caso, se trata de dividir un trapecio por una paralela MN a sus bases; en la figura 207 se tiene:

$$S = \frac{a + x}{2}y, \quad \text{y también} \quad y = \frac{a - x}{a - b}h$$

y sustituyendo en S este valor de y,

$$S = \frac{a^2 - x^2}{a - b}\frac{h}{2}$$

de donde:

$$x^2 = a^2 - \frac{2(a - b)}{h}S. \qquad (1)$$

Una vez calculado el valor de x se sustituye en S y en y, y se despeja y en la expresión de S, resultando:

$$y = \frac{2S}{a + x}, \quad \text{y también} \quad y = \frac{a - x}{a - b}h. \qquad (2)$$

Conocida y puede ya trazarse la paralela MN, sirviendo de comprobación la condición de que MN ha de ser igual a x. Para llevar al terreno este resultado, se miden también las longitudes AM y BN, con lo cual queda determinada la alineación pedida MN.

Tratándose de cuadriláteros grandes, resulta fastidiosa la resolución de la ecuación (1). Más precisa y fácil es la determinación de x por Trigonometría, tomando x y $\sqrt{\frac{2(a\,b)}{h}S}$

como catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a. Llamando φ al ángulo agudo adyacente al cateto x, se tiene:

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{2S(a - b)}{h\,a^2}} \quad \text{y} \quad x = a\cos\varphi = a\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

de donde:

$$a - x = 2a\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}.$$

El ejemplo siguiente indica el modo de aplicar, en la práctica, esta fórmula: Sea $ABCD$ (fig. 208) un cuadrilátero que se trata dividir en dos partes equivalentes entre sí, por una paralela MN al lado AB.

Tomando las coordenadas de los puntos C y D respecto a AB como eje de abscisas y OD de ordenadas, y trazando CE, paralela a AB (a distancia 30,02 m de AB), se calcula el área A del cuadrilátero del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 54{,}12 \times 37{,}10 &= 2007{,}85 \\ 85{,}30 \times 30{,}02 &= 2560{,}71 \\ \hline 2\,A &= 4568{,}56 \\ A &= 2284{,}3 \end{aligned}$$

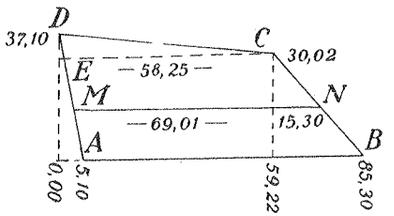


Fig. 208

Si se quiere dividir en dos partes equivalentes el cuadrilátero de superficie A, se tiene que $A = 2S = 2284{,}3$. En el caso de este ejemplo, los valores de a, b y h, son:

$$a = 80{,}20 \qquad b = 58{,}25 \qquad h = 30{,}02$$

y la superficie del trapecio $ABCE$ es:

$$138{,}45 \times 15{,}01 = 2078{,}1.$$

La paralela buscada cae, en este caso, entre las dos paralelas AB y CE, y aplicando las fórmulas (1) y (2) resulta:

$$x = \sqrt{80{,}20^2 - \frac{21{,}95}{30{,}02} \times 2284{,}3} = 69{,}01$$

$$y = \frac{11{,}19}{21{,}95} \times 30{,}02 = 15{,}30.$$

Con esto ya se puede trazar la paralela MN y jalonarla en el terreno; su longitud MN ha de ser igual a $x = 69{,}01$, con lo cual se tiene una comprobación de su trazado.

Puede hacerse una comprobación de áreas, midiendo independientemente el área del cuadrilátero $MNCD$ (por ejemplo, mediante su diagonal ND y las perpendiculares a la misma desde C y M), con lo cual, si todas las medidas anteriores están expresadas en metros, dicha área $MNCD$ resultará, con pocos metros cuadrados de diferencia, igual a la del trapecio S, o sea, a 1142 m².

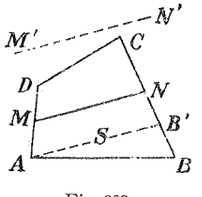


Fig. 209

2.° *División de un cuadrilátero por una recta paralela a una dirección dada $M'N'$.* Sea el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 209), en el cual se quiere determinar una superficie $ABNM = S$, por una paralela MN a la dirección o recta dada $M'N'$.

Este caso puede reducirse al anterior (fig. 208), trazando por A una paralela AB' a $M'N'$, calculando el área del triángulo $AB'B$ y determinando la posición de la

paralela MN, es decir, la superficie del trapecio $ABNM$. El cuadrilátero total se descompone, según hemos dicho, en un triángulo $AB'B$ y en el cuadrilátero $AB'CD$, y a éste puede aplicarse todo lo dicho en el caso 1.°.

§ 51. División de un cuadrilátero por una recta que pase por un punto dado

1.° Separar de un cuadrilátero $ABCD$ (fig. 210) una parte $ABNM = S$, por medio de una recta MN que pase por un punto M situado en uno de los lados AD.

Se traza, para resolver este problema, la diagonal MB del cuadrilátero $AMNB$ y se determina el área del triángulo ABM, que restada de la S dará el área del triángulo MBN. Dividiendo esta última por la longitud MB se tiene la altura h, y ya puede fijarse el punto N, para lo cual, lo más sencillo y fácil de pasar al terreno es tomar el lado BC como base de levantamiento o línea de referencia, y conociendo el área del triángulo MBN y su altura respecto a BC, hallar directamente la longitud $BN = n$.

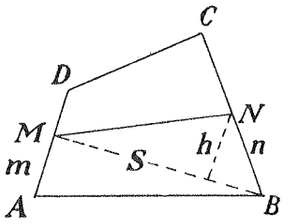


Fig. 210

Este problema tiene en la práctica la siguiente aplicación: supongamos que por un medio cualquiera, por ejemplo, por construcción, se trace en un plano una secante MN que aproximadamente divida a la superficie dada del modo indicado, y que cumpla además con otra condición cualquiera: ser paralela a una dirección dada, estar orientada hacia un punto distante, etc. Como ordinariamente estas condiciones secundarias deben tener sólo la exactitud que dé el dibujo en el plano, mientras que la división de superficies debe ser tan exacta como la medición en el terreno, resulta suficiente tomar la distancia m en el plano y calcular con toda precisión la n.

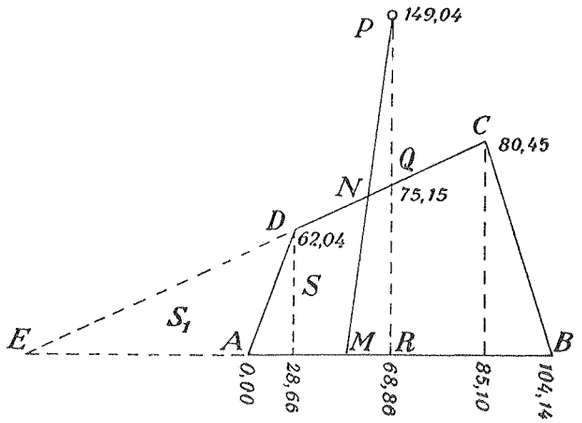


Fig. 211

2.° Del cuadrilátero $ABCD$ (figura 211) separar una parte $AMND$, de área S, por una recta MN que pase por un punto dado P.

Este problema se reduce al 3.° de la división de triángulos (página 199, figura 205), del modo siguiente: se refieren los cuatro vértices del cuadrilátero y el punto P al lado AB, mediante abscisas y ordenadas; se determina, mediante el cálculo, la posición del punto E de intersección de los lados DC y AB, de modo que pueda conocerse en seguida el área S_1 del triángulo ADE y ya tenemos el caso de separar del triángulo BEC, o del espacio determinado por el ángulo BEC, una superficie igual a $S + S_1$ mediante una recta que pase por P.

Con los datos de la figura 211, se calcula la longitud de EA por la semejanza de

los dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son respectivamente ED y EC:

$$\frac{EA + 28{,}66}{85{,}10 - 28{,}66} = \frac{62{,}04}{80{,}45 - 62{,}04}$$

de donde:

$$EA = 161{,}54. \tag{1}$$

Por consiguiente, el doble del área del triángulo EAD será:

$$2\,S_1 = 10021{,}9.$$

El cálculo del área del cuadrilátero $ABCD$ se hace de este modo:

$$\begin{aligned} 85{,}10 \times 62{,}04 &= \ 5279{,}62 \\ 75{,}48 \times 80{,}45 &= \ 6072{,}37 \\ \text{Doble del área } ABCD &= 11352{,}0 \end{aligned}$$

Vamos ahora a dividir el cuadrilátero $ABCD$ en tres partes iguales, de modo que las líneas secantes pasen por el punto P. Para la primera parte se tendrá: $2\,S = 3784{,}0$, y sumando esta parte con el doble del área del triángulo AED, resultará:

$$\begin{aligned} 2\,S &= 3784{,}0 \\ 2\,S_1 &= 10021{,}9 \\ 2\,(S + S_1) &= 13805{,}9 \end{aligned} \tag{2}$$

Para aplicar la ecuación (6) de la página 199, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} a &= 161{,}54 + 68{,}86 = 230{,}40 \\ h &= 149{,}04 \\ h_1 &= \ 75{,}15 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

y en vez de S, en dicha ecuación, pondremos $S + S_1$, resultando:

$$EM = 46{,}32 \pm 46{,}32\sqrt{1 + 10{,}781} = 46{,}32 \pm 152{,}08.$$

De los dos signos, tomaremos sólo el superior, y se tendrá:

$$\begin{aligned} EM &= 198{,}40 \\ EA &= 161{,}54 \\ m &= \ 36{,}86 \end{aligned} \tag{4}$$

Para la segunda secante, que separará en el cuadrilátero $ABCD$ dos tercios de su superficie, se tendrá:

$$\begin{aligned} 2\,S' &= 7568{,}0 \\ 2\,S_1 &= 10021{,}9 \\ 2\,(S' + S_1) &= 17589{,}9 \end{aligned} \tag{5}$$

Los valores numéricos (3) sirven también para este segundo cálculo, y el valor correspondiente de EM' será:

$$\begin{aligned} EM' = 59{,}01 \pm 59{,}01\sqrt{1 + 7{,}678} &= 59{,}01 \pm 173{,}84 \\ EM' &= 232{,}85 \\ EA &= 161{,}54 \\ m' &= \ 71{,}31 \end{aligned} \tag{6}$$

Tomando las longitudes dadas por (4) y (6) sobre AB, a contar desde A, se obtienen los puntos M y M', que se unen con el punto P.

3.° La solución anterior no sirve para el caso en que los dos lados AB y DC del cuadrilátero sean casi paralelos, pues el triángulo S_1 (fig. 211) resulta entonces indefini-

damente grande. En este caso en vez del cuadrilátero $ABCD$ se divide el $ARQD$, y se calcula la longitud m del trozo MR.

Llamemos, para ello, φ y α a los ángulos en P y Q (fig. 212), y aplicando la ecuación (3) de la página 196 a los triángulos PMR y PNQ, tendremos:

$$2S = \frac{h^2}{\cot\varphi} - \frac{(h-h_1)^2}{\cot\varphi - \cot\alpha}$$

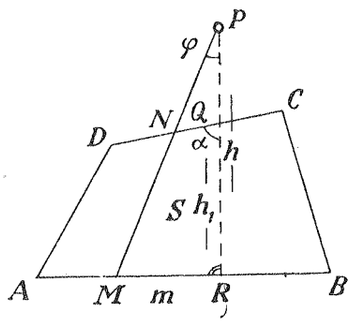


Fig. 212

y si se hacen operaciones para ordenar esta ecuación en cot φ, queda:

$$2S\cot^2\varphi - [2S\cot\alpha + h^2 - (h-h_1)^2]\cot\varphi = -h^2\cot\alpha \quad (7)$$

de donde puede calcularse el valor de cot φ, con el cual se halla el de MR, que será:

$$MR = m = \frac{h}{\cot\varphi}. \quad (8)$$

Como se ve, no es necesario hallar el valor de φ por Trigonometría, ni es preciso conocer el valor del ángulo α, pues la cot α puede deducirse directamente de los datos numéricos del problema.

Si aplicamos las fórmulas (7) y (8) al anterior ejemplo, tendremos, en primer lugar, para la superficie del cuadrilátero $ARQD$:

$$\begin{array}{r} 68{,}86 \times 62{,}04 = 4272{,}07 \\ 40{,}20 \times 75{,}15 = 3021{,}03 \\ \hline 2(ARQD) = 7293{,}1 \end{array}$$

El doble de la superficie separada $AMND$ es 3784,0 por lo cual, restando ésta de la anterior, tendremos:

$$2S = 3509{,}1.$$

Pero según los datos numéricos de la figura 211, se tiene:

$$\cot\alpha = \frac{13{,}11}{40{,}20} \qquad \begin{array}{l} h = 149{,}04 \\ h_1 = 75{,}15 \end{array}$$

y sustituyendo valores en la ecuación (7):

$$3509\cot^2\varphi - 17897\cot\varphi = -7244$$

de donde resultan para cot φ los dos valores siguientes:

$$\cot\varphi_1 = 4{,}657 \qquad \cot\varphi_2 = 0{,}443.$$

Como sólo puede utilizarse en este caso el primer valor, tendremos según (8):

$$\begin{array}{r} m = 32{,}00 \\ AR = 68{,}86 \\ \hline AM = 36{,}86 \end{array}$$

Para la segunda secante, vimos que el doble de la superficie separada $AM'N'D$ era 7568,0, teniéndose:

$$\begin{array}{l} 2S' = 7293{,}1 - 7568{,}0 = -274{,}9 \\ -275\cot^2\varphi' - 16663\cot\varphi' = -7214 \end{array}$$

de donde:

$$\cot\varphi_1' = +0{,}432 \qquad \cot\varphi_2' = -61{,}024.$$

Aquí sólo podemos tomar el segundo valor (cot φ_2'), resultando para m' el siguiente:

$$m' = -2{,}44$$

cuyo signo negativo indica que M' cae entre R y B.

$$\begin{array}{r} AR = 68{,}86 \\ M'R = -2{,}44 \\ \hline AM' = 71{,}30 \end{array}$$

Este resultado coincide con el obtenido anteriormente en la primera solución del problema, pág. 203, (6).

§ 52. División de cuadriláteros y polígonos en general, por rectas que determinen sobre los lados partes proporcionales

De todos los problemas teóricos de división de superficies, el de la partición por rectas que dividan a los lados en determinada relación, es de los pocos que tienen verdadera aplicación práctica, sobre todo tratándose de la división de polígonos muy alargados, por lo cual vamos a estudiarlo con todo detenimiento.

Aplicando la fórmula (9) de la página 197 a cada uno de los cuadriláteros $ABCD$ y $AEFD$ (fig. 213), cuyas áreas son respectivamente J y S, se tiene:

$$2J = a\,m\,\text{sen}\,A + a\,m'\,\text{sen}\,D - m\,m'\,\text{sen}\,(A+D) \quad (1)$$
$$2S = a\,n\,\text{sen}\,A + a\,n'\,\text{sen}\,D - n\,n'\,\text{sen}\,(A+D) \quad (2)$$

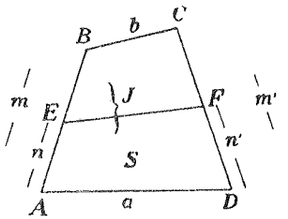


Fig. 213

El producto $m\,m'$ sen $(A+D)$ lo haremos igual a $2M$, es decir

$$m\,m'\,\text{sen}\,(A+D) = 2M \quad (3)$$

donde M es el área de un triángulo que tiene dos lados m y m' y un ángulo comprendido entre ambos igual a $180° - (A+D)$, o sea del triángulo de convergencia (pág. 197). Sustituyendo la expresión (3) en (1), queda ésta en la forma siguiente:

$$2J = a\,(m\,\text{sen}\,A + m'\,\text{sen}\,D) - 2M. \quad (4)$$

Impongamos ahora a la línea EF la condición de dividir a los lados AB y CD en partes proporcionales, es decir, que:

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} = v \quad (5)$$

Sustituyendo en (2) el valor de n y el de n' de aquí deducidos, tendremos:

$$2S = v\,a\,(m\,\text{sen}\,A + m'\,\text{sen}\,D) - v^2\,m\,m'\,\text{sen}\,(A+D).$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro es igual, según (4), a $2v\,(J+M)$ y el segundo a $2v^2M$ (3), es decir, que puede ponerse:

$$2S = 2v\,(J+M) - 2v^2M, \quad \text{o sea} \quad v^2M - v\,(J+M) + S = 0. \quad (6)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado en v, se tiene:

$$v = \frac{J+M}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{J+M}{2M}\right)^2 - \frac{S}{M}}. \quad (7)$$

Esta fórmula resulta inaplicable en la mayoría de los casos, ya que ordinariamente los lados AB y CD son casi paralelos, siendo, por lo tanto, $A+D$ igual, aproximadamente, a 180°, y según (3), resulta $M=0$, por lo cual la fórmula (7) toma, en este caso, la forma siguiente:

$$v=\infty\pm\sqrt{\infty^2-\infty}. \tag{8}$$

Para salvar esta dificultad, ordenaremos la fórmula (6) en $\frac{1}{v}$, en vez de hacerlo en v, y tendremos:

$$M-(J+M)\frac{1}{v}+S\left(\frac{1}{v}\right)^2=0 \tag{9}$$

y resuelta esta ecuación de segundo grado en $\frac{1}{v}$, se tendrá:

$$\frac{1}{v}=\frac{J+M}{2S}\pm\sqrt{\left(\frac{J+M}{2S}\right)^2-\frac{M}{S}}. \tag{10}$$

Prácticamente, sólo se puede tomar la raíz positiva (como ya discutiremos después), y por ello tomaremos esta ecuación con sólo el signo positivo y escrita en la siguiente forma:

$$\frac{1}{v}=\frac{J+M}{2S}+\frac{J+M}{2S}\sqrt{1-\frac{4MS}{(J+M)^2}} \tag{11}$$

de donde volveremos a despejar el valor de v, que será:

$$v=\frac{2S}{(J+M)+(J+M)\sqrt{1-\frac{4MS}{(J+M)^2}}}$$

Dividiendo numerador y denominador por J, y poniendo $\frac{M}{J}=z$ y $\frac{S}{J}=q$, se tiene:

$$v=\frac{2q}{(1+z)+(1+z)\sqrt{1-\frac{4qz}{(1+z)^2}}} \tag{12}$$

Si en vez de quedar la superficie S entre el lado AD y la recta EF, hubiera de quedar entre esta recta y el lado BC, se toma $J-S$ en vez de S, y $1-v$ en vez de v; además M cambia de signo, pues en (3) hay que poner sen $(B+C)$ en vez de sen $(A+D)$. Introduciendo estas variaciones en (11) se tiene:

$$\frac{1}{1-v}=\frac{J-M}{2(J-S)}+\frac{J-M}{2(J-S)}\sqrt{1+\frac{4M(J-S)}{(J-M)^2}}$$

o bien

$$1-v=\frac{2(1-q)}{(1-z)+(1-z)\sqrt{1+\frac{4z(1-q)}{(1-z)^2}}} \tag{13}$$

En cuanto al doble signo de la raíz en (12) y (13), no cabe duda que las fracciones primeras (5) que dan el valor de v y el de $1-v$ son positivas; el triángulo de convergencia M puede ser positivo o negativo, y, por lo tanto, también z puede ser positivo o negativo. Si z es positivo, sólo puede emplearse el signo + de la raíz en la fórmula (13), pues para que $1-v$ resultara negativo sería preciso que v fuera mayor que la unidad. También se ve en (12) que el valor de v resulta muy grande si se toma para la raíz el signo menos. Por otra parte, si z es negativo, el valor de v dado en (12) resulta también positivo, tomando la raíz con signo positivo; del mismo modo hay que tomar en (13) el signo

positivo de la raíz, pues de no ser así resulta muy grande el valor de $1-v$, al ser negativo v.

Es decir, que en todos los casos hay que tomar el signo positivo de la raíz en las fórmulas (12) y (13).

MITTELSTAEDT ha publicado una tabla para el cálculo del factor de proporcionalidad v, en Zeitschr. f. Verm., 1920, págs. 573-576. Véase además, del mismo autor, Zeitschr. f. Verm., 1929, págs. 792-793, 841-852.

Cálculo del triángulo de convergencia M. Para hallar el área del triángulo de convergencia M (fig. 214), raramente se recurre al cálculo trigonométrico con el ángulo en C. Trazando en el cuadrilátero sus dos diagonales, se tiene:

Triángulo de convergencia $M=\triangle ABD-\triangle ABC$,

pues los tres triángulos tienen común la base AB o BC, y la altura del de convergencia es igual a la diferencia de alturas de los dos triángulos ABD y ABC.

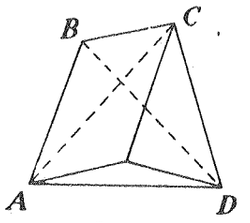


Fig. 214

Ahora bien, la diferencia entre las áreas de los triángulos ABD y ABC es igual al área del cuadrilátero cóncavo $ACBD$, es decir, del formado por los dos lados AD y BC y las dos diagonales AC y DB; por consiguiente, el área del triángulo de convergencia M es igual al área de este último cuadrilátero.

Cuando se conocen las coordenadas de los cuatro vértices, se tiene según la fórmula (12) para cuadriláteros (pág. 158):

$$2M=(x_a-x_b)(y_c-y_d)-(y_a-y_b)(x_c-x_d). \tag{14}$$

Para saber cuál de los dos cuadriláteros cóncavos que las dos diagonales determinan en uno convexo, hay que tomar para el cálculo del triángulo de convergencia, se sigue esta regla: se toma el cuadrilátero cóncavo formado por las dos diagonales y los dos lados no cortados por la secante; el orden que hay que seguir en los vértices del cuadrilátero debe ser tal que se cuenten de izquierda a derecha en el triángulo formado por las diagonales y el lado del cuadrilátero sobre el cual se calcula la parte n (fig. 213).

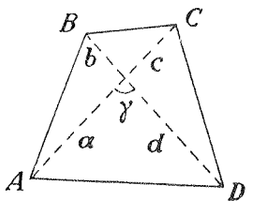


Fig. 215

A Thie se debe el modo de calcular directamente el cociente $z=\frac{M}{S}$ en el caso de que el cuadrilátero esté dado por sus diagonales y por la posición recíproca de éstas, es decir, por los segmentos en que aquéllas se dividen mutuamente y por el ángulo que las dos forman entre sí. Por ejemplo, llamando a, b, c y d a estos segmentos, y γ al ángulo (fig. 215), se tiene:

$$2M=2\triangle ABD-2\triangle ABC=(ad-bc)\operatorname{sen}\gamma.$$

Por otra parte, el área de todo el cuadrilátero, igual a la suma de los cuatro triángulos formados alrededor del punto de intersección de las diagonales, está dada por la fórmula siguiente:

$$2S=(a+c)(b+d)\operatorname{sen}\gamma$$

y el valor de z será:

$$z=\frac{ad-bc}{(a+c)(b+d)}. \tag{15}$$

De este modo se halla fácilmente el valor de z en función de los segmentos de las diagonales y de la longitud total de éstas, sin tener que calcular previamente ninguna área.

Generalización a los polígonos. La anterior división del cuadrilátero se puede hacer extensiva a un polígono, cuando éste se compone de varios cuadriláteros dispuestos unos a continuación de otros, como se ve en la figura 216, y cuando todas las secantes, ($A''B''$, $B''C''$, etc.) dividen a los lados en partes que están entre sí en la misma relación, es decir, cuando:

$$\frac{1}{v} = \frac{A'A}{A'A''} = \frac{B'B}{B'B''} = \frac{C'C}{C'C''} = \frac{D'D}{D'D''} = \frac{E'E}{E'E''}.$$

En este caso puede aplicarse lo dicho para la figura 213, llegándose a las mismas fórmulas (6), (9), etc., llamando J a la suma de todos los cuadriláteros completos, y S a la suma de los cuadriláteros parciales separados en la parte inferior por las secantes, es decir, siendo J el polígono alargado total, y S el parcial alargado que queda en la parte inferior.

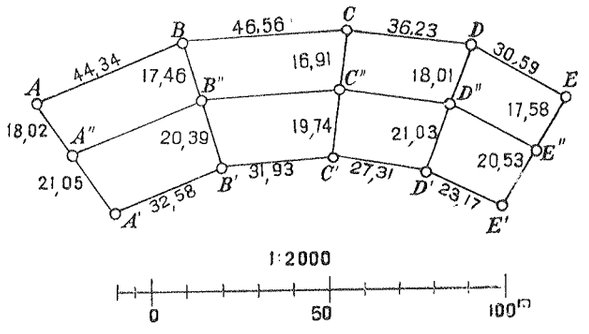


Fig. 216

Tomemos el polígono representado en la figura 216, con los datos numéricos que en ésta se consignan, como ejemplo para aplicación del cálculo anterior, siendo las coordenadas de los vértices las siguientes:

	y	x		y	x
A	0,00	0,00	A'	+ 21,77	− 32,44
B	+ 40,93	+ 17,05	B'	+ 51,57	− 19,27
C	+ 87,44	+ 19,22	C'	+ 83,43	− 17,21
D	+ 123,34	+ 14,33	D'	+ 110,23	− 22,44
E	+ 150,37	0,00	E'	+ 130,96	− 32,79

(16)

En primer lugar, se calcula la superficie J en función de las coordenadas, resultando:

$$J = 5115{,}0 \text{ m}^2.$$

También pueden calcularse los lados en función de las coordenadas, teniéndose:

$$\left.\begin{array}{l} A'A = 39{,}067 \text{ m} \\ B'B = 37{,}846 \\ C'C = 36{,}650 \\ D'D = 39{,}037 \\ E'E = 38{,}104 \end{array}\right\} \quad (17)$$

Queda por calcular M, que se halla como suma de los triángulos de convergencia de los cuatro cuadriláteros en función de las coordenadas, según la fórmula (14), como se ve a continuación:

$$\begin{array}{l} +32{,}44 \times 10{,}64 - 21{,}44 \times 36{,}32 = -\ 445{,}53 \\ -36{,}32 \times\ 4{,}01 - 10{,}64 \times 36{,}43 = -\ 533{,}25 \\ -36{,}43 \times 13{,}11 +\ 4{,}01 \times 36{,}77 = -\ 330{,}15 \\ -36{,}77 \times 19{,}41 + 13{,}11 \times 32{,}79 = -\ 283{,}82 \\ \text{Suma}\quad 2M = -\ 1592{,}75 \quad M = -\ 796{,}4. \end{array} \quad (18)$$

Tenemos, por consiguiente:

$$J = 5115{,}0, \qquad S = 0{,}5\,J, \qquad M = -\ 796{,}4;$$

de donde:

$$z = -\ 0{,}15568 \quad \text{y} \quad q = 0{,}5.$$

Y sustituyendo este valor de q en (12),

$$v = \frac{1}{(1+z) + (1+z)\sqrt{1 - \frac{2z}{(1+z)^2}}} = \frac{1}{1 + z + \sqrt{1+z^2}}.$$

o sea, poniendo en vez de z su valor:

$$v = 0{,}53869; \quad (19)$$

y según (13),

$$1 - v = \frac{1}{(1-z) + (1-z)\sqrt{1 + \frac{2z}{(1-z)^2}}} = \frac{1}{1 - z + \sqrt{1+z^2}};$$

o sea

$$1 - v = 0{,}46131. \quad (20)$$

Multiplicando estos valores de $1 - v$ y de v por las distancias $A'A$, $B'B$, etc., dadas en (17), se obtienen las partes en que quedan divididas estas distancias, a saber:

	AA'	BB'	CC'	DD'	EE'
parte superior	18,022	17,459	16,907	18,008	17,578
» inferior	21,045	20,387	19,743	21,029	20,526
sumas	39,067	37,846	36,650	39,037	38,104

(21)

que son los segmentos indicados, con 1 cm de aproximación, en la figura 216.

Fórmulas aproximadas. Cuando M es pequeño, la expresión (11) de la página 206 puede desarrollarse en una serie, cuyo comienzo es:

$$\frac{1}{v} = \frac{J+M}{2S} + \frac{J+M}{2S}\left(1 - \frac{2MS}{(J+M)^2}\right) = \frac{J+M}{S} - \frac{M}{J+M}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{J}{S}\left(1 + \frac{M}{J}\right) - \frac{M}{J+\ldots} \text{ (aprox.)}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{J}{S}\left[1 + \frac{M}{J}\left(1 - \frac{S}{J}\right)\right] \quad (22)$$

y

$$v = \frac{S}{J}\left[1 - \frac{M}{J}\left(1 - \frac{S}{J}\right)\right] \text{ (aprox.)}. \quad (23)$$

Para partir por la mitad la superficie J, se tiene $J = 2S$, y en ese caso, la fórmula anterior nos dará:

$$v_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{M}{J} \text{ (aprox.)}. \quad (24)$$

Vamos también a hallar un valor aproximado para el triángulo de convergencia M. Según la fórmula (3) de la página 205,

$$2M = m\,m' \operatorname{sen}(A + D), \quad (25)$$

y si el cuadrilátero fuera un trapecio, se tendría (fig. 217):

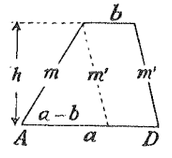


Fig. 217

$$2M = (a - b)\,h. \quad (26)$$

En este caso, el área total del cuadrilátero será:

$$2J = (a + b)\,h, \qquad \text{y por consiguiente} \qquad \frac{M}{J} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (27)$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (23), resulta:

$$v = \frac{S}{J} - \frac{a-b}{a+b}\frac{S}{J}\left(1 - \frac{S}{J}\right) \text{ (aprox.)} \tag{28}$$

y para el caso de dividir el cuadrilátero por la mitad, es decir, en dos partes equivalentes, $2S = J$,

$$v_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{a-b}{a+b} \text{ (aprox.)}. \tag{29}$$

Aplicando estas fórmulas aproximadas a la figura 216, tenemos:

lados superiores	lados inferiores
44,34	32,58
46,56	31,93
36,23	27,31
30,59	23,17
$b = 157{,}72$	$a = 114{,}99$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{-42{,}73}{272{,}71} = -0{,}15669 \tag{30}$$

y

$$v = 0{,}5000 + 0{,}0392 = 0{,}5392, \qquad 1 - v = 0{,}4608, \tag{31}$$

mientras que los valores exactos deducidos del cálculo son, según las fórmulas (19) y (20):

$$v = 0{,}5387 \quad \text{y} \quad 1 - v = 0{,}4613.$$

Para concluir, vamos a determinar gráficamente los triángulos de convergencia, y consideremos para ello el caso de la figura 218, en que se trata de dividir la parcela

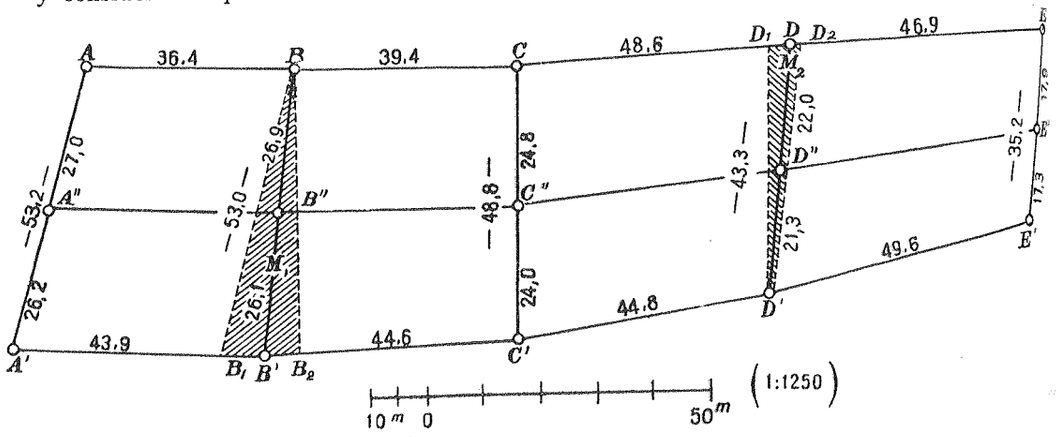


Fig. 218

representada por el decágono alargado $ABCDEE'D'C'B'A'$, en dos partes de igual área o equivalentes, en el sentido de su longitud.

Las transversales que dan las anchuras de la parcela se suponen medidas directamente, es decir, que se parte de sus valores:

$$AA' = 53{,}20 \text{ m} \quad BB' = 53{,}00 \text{ m} \quad CC' = 48{,}80 \text{ m} \quad DD' = 43{,}30 \text{ m} \quad EE' = 35{,}20 \text{ m}. \tag{32}$$

El área del polígono total se calcula fácilmente; por ejemplo, empleando un planímetro se encuentra (fig. 218):

$$J = 82{,}02 \text{ a}. \tag{33}$$

Trazando las paralelas convenientes, se construyen los cuatro triángulos de convergencia M, y tomados de dos en dos, como se ve en las partes sombreadas de la figura, se planimetran, resultando:

$$M_1 = +21{,}6, \qquad M_2 = -5{,}4, \qquad M_1 + M_2 = M = +16{,}2 \text{ a}. \tag{34}$$

Sustituyendo el anterior valor de J (33) y el de $M = M_1 + M_2$ (34) en las fórmulas (11) a (13), se obtiene:

$$\frac{1}{v} = 2{,}031196 \qquad v = 0{,}49232 \qquad 1 - v = 0{,}50768$$

y multiplicando por $1 - v$ y por v las anchuras (32), resultan para los segmentos superior e inferior en que éstas quedan divididas, los siguientes valores:

	A	B	C	D	E
parte superior	27,01	26,91	24,78	21,98	17,87
» inferior	26,19	26,09	24,02	21,32	17,33
sumas	53,20	53,00	48,80	43,30	35,20

Éstos son los valores de las anchuras consignadas en dicha figura 219, con un decímetro de aproximación.

También puede aplicarse en este caso la fórmula aproximada (29), y corregirla después si es preciso.

BIBLIOGRAFÍA:

F. G. GAUSS y VOGLER (Zeitschr. f. Verm., 1884, pág. 277). WILSKI (Zeitschr. f. Verm., 1885, págs. 289-298); ZIMMERMANN (Zeitschr. f. Verm., 1894, págs. 321-333, y 1895, págs. 80, 383); FIRMENICH (Zeitschr. f. Verm., 1884, págs. 85-90); ABENDROTH (Zeitschr. f. Verm., 1898, pág. 490); EHRHARDT (Zeitschr. f. Verm., 1902, págs. 317-326, 338-343); WILDT (Zeitschr. f. Verm., 1902, páginas 477 a 486).

Véase nuestro trabajo sobre las fórmulas aproximadas de división de polígonos, en Zeitschr. f. Verm., 1886, págs. 469-473; así como el de W. HOSSDORF sobre la división gráfica de cuadriláteros irregulares (Zeitschr. f. Verm., 1917, págs. 1-13).

§ 53. Rectificación de linderos

Los problemas anteriores sobre división o partición de superficies encuentran frecuentemente aplicación en la rectificación y transformación de linderos, cuyo objeto es convertir lindes irregulares de parcelas en otras regulares, sin pérdida de superficie y de modo que puedan señalarse con el menor número posible de mojones.

Consideraremos algunos casos, a los cuales pueden reducirse casi todos los que en la práctica pueden presentarse:

1.° Transformar un lindero quebrado $ABCDEF$ en otro recto AA'' que pase por el punto A (fig. 219).

Se toma una recta AA' como solución aproximada del problema, y se halla el área compren-

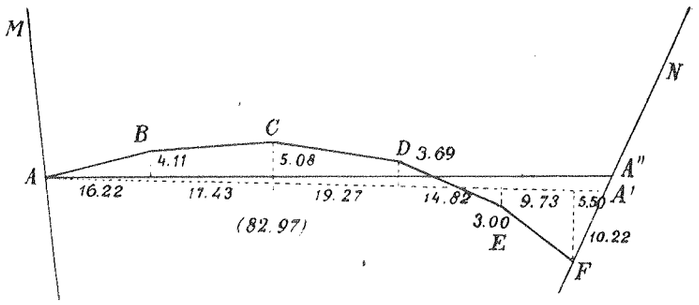


Fig. 219.—Lindero antiguo, $ABCDEF$. Lindero nuevo, AA''. Escala 1:100

dida entre esta recta y la linde primitiva poligonal, partiendo de las coordenadas de los vértices de esta última, como se ve en la figura 219. Este cálculo se hace por la fórmula (7) de la página 155, que nos da:

$$
\begin{aligned}
+\ 4{,}11\ (16{,}22 + 17{,}43) &= +\ (\ 4{,}11 \times 33{,}65) = +\ 148{,}30\\
+\ 5{,}08\ (17{,}43 + 19{,}27) &= +\ (\ 5{,}08 \times 36{,}70) = +\ 186{,}44\\
+\ 3{,}69\ (19{,}27 + 14{,}82) &= +\ (\ 3{,}69 \times 34{,}09) = +\ 125{,}79\\
-\ 3{,}00\ (14{,}82 + \ 9{,}73) &= -\ (\ 3{,}00 \times 24{,}55) = \qquad -\ 73{,}65\\
-\ 10{,}22\ (\ 9{,}73 + \ 5{,}50) &= -\ (10{,}22 \times 15{,}23) = \qquad -\ 155{,}65\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 450{,}53 - 229{,}30\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 2S = +\ 221{,}23 \quad S = 110{,}6\ \text{m}^2.
\end{aligned}
$$

Este resultado nos dice que por encima de la recta AA' queda una superficie demasiado grande (con 110,6 m² de exceso) y por debajo demasiado pequeña (con 110,6 m² de defecto); por consiguiente, hay que elevar dicha recta hacia AA'', de modo que el triángulo $AA'A''$ tenga por área precisamente los 110,6 m². Para ello se determina el punto A'' de manera que su distancia y a la recta AA' esté dada como sigue:

$$y = 2\,\frac{110{,}6}{82{,}97} = \frac{221{,}23}{82{,}97} = 2{,}666\ \text{m},$$

o bien, por la longitud de $A'A''$, que habrá de ser:

$$A'A'' = \frac{\sqrt{10{,}22^2 + 5{,}50^2}}{10{,}22}\,2{,}666 = \frac{11{,}61}{10{,}22}\,2{,}666 = 3{,}02\ \text{m},$$

con lo cual se sitúa perfectamente, tanto en el plano como en el terreno el punto A''.

En este caso hemos supuesto que las dos parcelas colindantes estaban limitadas lateralmente por alineaciones AM y FN concurrentes.

2.° Si las dos parcelas colindantes están comprendidas en una faja limitada por alineaciones paralelas AM y DN, supongamos que se trata de convertir el lindero quebrado $ABCD$ en otro recto PQ perpendicular a AM (fig. 220).

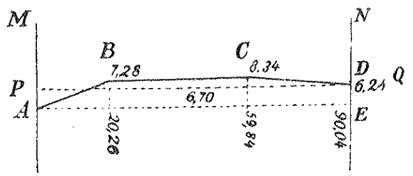


Fig. 220. — Escala 1 : 200

Se traza, para ello, la alineación AE perpendicular a los límites paralelos de la faja, y se toma como base para medir las coordenadas de los vértices del lindero poligonal; siendo estas coordenadas las indicadas en la figura, se calcula la superficie S comprendida entre este lindero y la recta AE del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
20{,}26 \times 7{,}28\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ &= \ 147{,}49\\
(59{,}84 - 20{,}26)\ (7{,}28 + 8{,}34) = 39{,}58 \times 15{,}62 &= \ 618{,}24\\
(90{,}04 - 59{,}84)\ (8{,}34 + 6{,}24) = 30{,}20 \times 14{,}58 &= \ 440{,}32\\
2S = 1206{,}05 \quad S &= 603{,}0\ \text{m}^2.
\end{aligned}
$$

Basta ahora calcular la distancia y a que debe estar la recta PQ, solución del problema, de la AE, paralela a ella, distancia que vendrá dada por la siguiente fracción:

$$y = \frac{603{,}0}{90{,}04} = 6.70\ \text{m},$$

con lo cual ya puede trazarse sin dificultad alguna la nueva linde PQ.

3.° Si los límites o linderos laterales son *casi* paralelos, se resuelve el problema,

como se ve en la figura 221, donde se trata de convertir el lindero ABC en una recta paralela a PR, no siendo paralelos los límites PA y RC.

Para ello se traza, a estima, la recta $M'N'$, paralela a PR, y se ve en cuánto se diferencia el área $PM'N'R$ de la $PABC$; si, por ejemplo, resulta aquélla menor que ésta, se corre $M'N'$ paralelamente a sí misma, hasta una posición MN tal que la faja $MNN'M'$, que puede considerarse como un rectángulo, tenga por área precisamente la diferencia $S - S'$, antes hallada, para lo cual se determina su anchura y por la siguiente condición:

$$y = \frac{S - S'}{MN}.$$

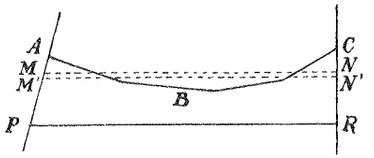


Fig. 221

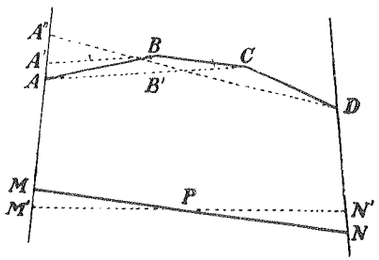


Fig. 222

4.° En la figura 222 se ve otro caso resuelto por tanteo. Se trata de convertir en recto el lindero poligonal $ABCD$, que se supone difiere poco de la recta AD y que es aproximadamente normal al límite AM (o al DN); para ello se toma AA' igual a la distancia BB', y se transforma CBA en CAA' y del mismo modo se transforma DCA' en $DA'A''$.

Para variar un poco la dirección de un lindero supuesto en MN, se puede girar alrededor de su punto medio P, hasta colocarlo en $M'N'$.

5.° En la rectificación de linderos hay, a veces, que tener en cuenta el valor relativo de las parcelas colindantes, como en el instructivo ejemplo publicado por Voigt y representado en la figura 223. Se trataba de sustituir la linde quebrada $ABCD$ por una recta; la parcela S lindaba al Norte, con una calle, y al Sur, con la línea férrea; la otra parcela K limitaba sólo con la calle, por lo cual su valor unitario era superior al de S. Los propietarios convinieron en que el valor relativo de las parcelas era $K : S = 3 : 2$. Claro está que la exactitud de esta relación no debe preocupar al encargado de hacer la rectificación del lindero, el cual acepta del valor dado por los propietarios como condición previa y se limita a resolver el problema geométricamente.

La solución dada por Voigt a este problema, es la recta OM.

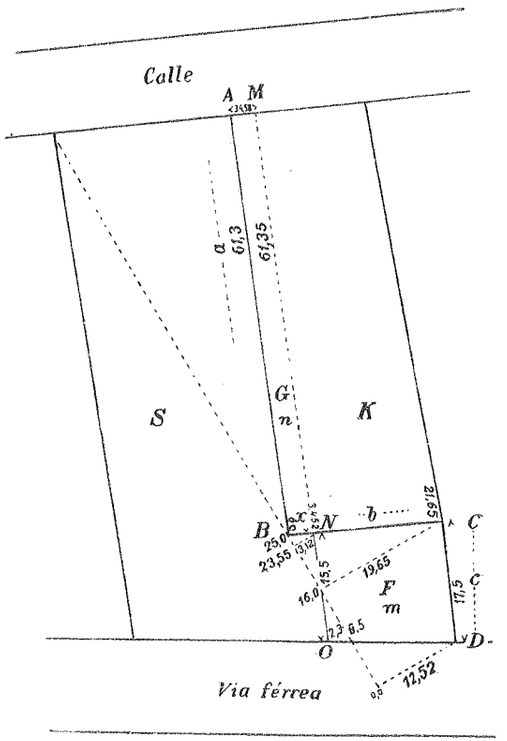


Fig. 223. — Escala 1 : 1000

Partición de terrenos en general. Estos problemas de división de superficies se presentan en el terreno de dos modos: como tales particiones y como problemas de rectificación de linderos, como en los últimos ejemplos estudiados.

Los problemas que se resuelven por sólo el cálculo, han de ser siempre relativamente sencillos. Cuando son complicados y difíciles, se consigue más pronto el objeto propuesto por ensayos o tanteos, sobre todo cuando las condiciones secundarias (como, por ejemplo, el que la secante pase por un punto dado o sea paralela a una recta dada) requieran menos precisión que la principal de división o partición de la superficie. En estos casos se hace primero una división en un plano a gran escala, y se corrige, si es preciso, al pasar al terreno el resultado.

Claro está que el cálculo directo de las divisiones de superficies tiene siempre su valor peculiar, y quien se ejercite en ello encontrará muchas ocasiones en que aplicarlo en la práctica, en los trabajos de Agrimensura, Catastro, Deslindes, etc.

BIBLIOGRAFÍA. Sobre partición de terrenos de valor variable merecen citarse: el trabajo de ZWICKY (Zeitschr. f. Verm., 1890) titulado «Momento estático polar y su aplicación a la determinación de la distancia media de una parcela a su entrada» y el de WILCKE (Zeitschr. f. Verm., 1901) sobre «División de una parcela con superficie de valor variable».

Son dignas de mención las siguientes obras referentes a partición de terrenos: «Introducción al cálculo y división de polígonos», por H. HÖLSCHER: Berlín y Charlotemburgo, 1884; «División de parcelas, especialmente en coordenadas rectangulares», por F. G. GAUSS, 4.ª edic., Berlín, 1904; «Cálculo y partición de parcelas de lindes rectas», por DÖRGENS, Berlín, 1871; y finalmente, «Ejercicios geodésicos para Ingenieros y Topógrafos», por VOGLER, 3.ª edic., parte I, Berlín, 1910.

CAPÍTULO VI

Elementos principales de los instrumentos topográficos

§ 54. El nivel

La palabra *nivel,* «libella» en latín, es diminutivo de *libra* (balanza).

El nivel de aire, que es el que se emplea en Topografía, sirve para determinar la dirección horizontal y la vertical, por medio de la superficie libre de un líquido en reposo.

En los aparatos topográficos, el líquido del nivel se encuentra contenido en un recipiente de vidrio, que exteriormente tiene forma de tubo o de casquete esférico, llamándose respectivamente nivel tubular y nivel esférico.

Nivel tubular. Consiste este nivel en un tubo cilíndrico de vidrio, cuya cara interna tiene la forma que engendra un arco de círculo girando alrededor de una cuerda que coincide con el eje del tubo, como se ve en la figura 224, que representa una sección longitudinal de un nivel tubular, con la curvatura interna muy exagerada.



Fig. 224. — Sección longitudinal de un nivel tubular. La curvatura se ha exagerado en el dibujo

Los niveles tubulares tienen ordinariamente de 8 a 16 cm de longitud por 1,3 a 1,8 cm de anchura. La construcción de estos niveles se hace montando horizontalmente un tubo cilíndrico en un mandril y vaciando su interior con una broca de forma adecuada.

El tubo se llena con éter, pero dejando un pequeño espacio vacío, que sólo contendrá vapor de éter y que es la *burbuja* del nivel, la cual ocupa siempre la parte más alta del tubo; después de lleno de éter el tubo, se cierra a la lámpara su extremo abierto.

Para poder regular la longitud de la burbuja, que varía con la temperatura del líquido, llevan algunos niveles, cerca de uno de sus extremos, un diafragma con un pequeño orificio, formando así una cámara o depósito en dicho extremo. Se comprende fácilmente que se puede hacer pasar una pequeña parte del líquido o de la burbuja a dicha cámara poniendo verticalmente el nivel, con la cámara hacia abajo o hacia arriba.

El tubo lleva grabada por fuera una graduación en líneas de París (1 línea = 2,26 mm), y a veces también en dobles milímetros; la raya o división central se llama *centro* o *punto normal* y se encuentra en el sitio de máxima anchura del tubo. En los aparatos topográficos corrientes faltan en el medio de la escala algunas divisiones, para facilitar la colocación de la burbuja simétricamente respecto al centro de aquélla. Para muchas aplicaciones están numeradas las divisiones de la escala, con el cero en uno de los extremos o en el centro de la misma.

A veces va la escala sobre una lámina especial, fijada en la *armadura* del nivel, que puede correrse un poco en el sentido de su longitud. Sobre el nivel mismo hay entonces una sola señal, que debe caer exactamente debajo del punto medio de la escala.

Los niveles *reversibles* llevan divisiones arriba y abajo del tubo, siendo indiferente el empleo de una u otra, con tal que los puntos medios estén bien centrados.

La armadura del nivel sirve para sujetar o adaptar éste al aparato de que se trate. En la figura 225 se ve la armadura construída por Fennel, de Kassel, en la cual se sujeta el tubo de vidrio con yeso. En los niveles de precisión va encerrado el tubo metálico de la armadura en otro tubo de vidrio, para proteger al nivel de los cambios bruscos de temperatura.

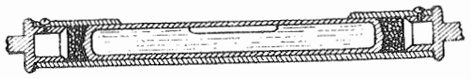


Fig. 225. — Armadura de un nivel tubular

El nivel tubular fué inventado en 1661 por el francés Thévenot; al principio consistía en un tubo cilíndrico interiormente, y parece ser que a fines del siglo XVIII se pensó en que debería ser algo curvo.

Nivel esférico. Se llama así al constituído por una caja metálica (fig. 226) con una tapa o cubierta de vidrio que tiene la cara interior esférica. En el centro de esta placa de vidrio hay señalados varios círculos concéntricos para facilitar la colocación de la burbuja, que es de forma circular, en el medio de aquélla. La caja del nivel lleva un orificio para llenarla de líquido (alcohol, de ordinario), y se tapa después con un tornillo.



Fig. 226
Nivel esférico con cierre de tornillo

Los niveles esféricos modernos consisten, como los tubulares, en un recipiente de vidrio cerrado a la lámpara (fig. 227), sirviendo únicamente de armadura la caja metálica en que aquél está contenido. Los niveles esféricos antiguos tenían el inconveniente de que el líquido se evaporaba por entre la rosca y el tornillo, y había necesidad de volverlos a llenar, por lo cual actualmente son preferidos los que tienen la caja interior totalmente de vidrio.

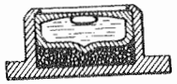


Fig. 227
Nivel esférico cerrado a la lámpara

Los niveles esféricos no se emplean en los instrumentos geodésicos más que para poner éstos aproximadamente en estación. El radio de la cara esférica interior de la tapa de cristal es pequeño, de $^1/_2$ a 2 m. Los niveles esféricos tienen poca precisión, pero son de uso muy sencillo y cómodo.

§ 55. Sensibilidad del nivel

Para la posición horizontal del nivel, se ve la burbuja ocupar la parte más alta del tubo, que como hemos visto está ahuecada en forma de tonel, y queda simétricamente colocada respecto al punto medio de aquél. Al punto medio de la superficie superior de la burbuja se llama, abreviadamente, *centro* o *punto medio de la burbuja*.

Se llama *eje del nivel* a la tangente a la cara interior del mismo en el punto normal, paralela a la dirección del tubo. Si el eje AB es horizontal (fig. 228), el punto medio M de la burbuja coincide con el punto normal N, y entonces se dice que el nivel está *calado*.

Cuando el eje no es horizontal (fig. 229), el centro de la burbuja queda a cierta distancia del punto normal, llamada desplazamiento o desviación de la burbuja, que se mide

ordinariamente en divisiones de la escala. En la figura 229 se ve que el desplazamiento de la burbuja es a, y la inclinación del nivel está dada por el ángulo α.

Si C o C' es el centro de curvatura de la sección longitudinal del nivel, se tiene:

$$\alpha = \frac{a}{R}\rho. \qquad (1)$$

El radio de curvatura debe ser constante en toda la longitud del nivel, que es lo que se supone en teoría y lo que se persigue en la construcción.

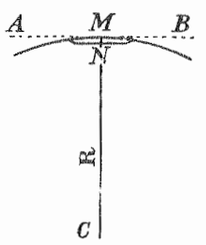


Fig. 228.— Nivel en posición correcta

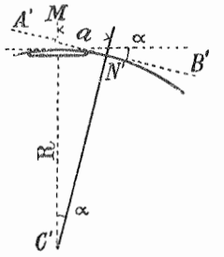


Fig. 229.— Nivel inclinado de un ángulo α

La inclinación del eje del nivel correspondiente a un desplazamiento de una división, se llama *sensibilidad* del nivel.

Para determinar la sensibilidad de un nivel se emplea la *probeta* o *examinador de niveles* de Sickler, representado en las figuras 230 y 231, que consiste, en esencia, en un brazo sólido de longitud l, que descansa sobre un soporte o base mediante dos tornillos situados en un extremo y un tornillo micrométrico que va en el otro extremo. En la figura 230, el brazo principal es BB'; el tornillo micrométrico es S; AA' son dos tornillos situados en cruz respecto a BB', en los extremos de un nivel transversal Q; CC', DD', son caballetes para colocar los niveles, y TT' es un termómetro.

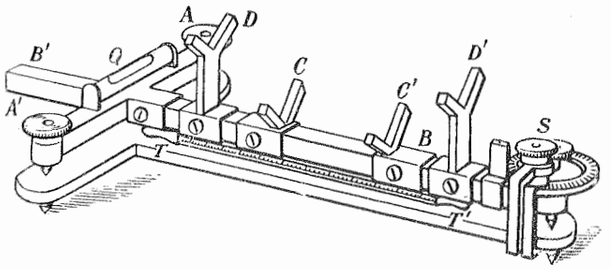


Fig. 230. – Probeta o examinador de niveles, de Sickler

Si h es el paso del tornillo S (fig. 231) y l la longitud del brazo BB', a una vuelta completa del tornillo corresponderá una inclinación que vendrá dada por

$$\alpha_1 = \frac{h}{l}\rho. \qquad (2)$$

Las dimensiones de h y l se toman de tal manera que α_1 resulte un número entero. Por ejemplo, uno de estos aparatos tiene $h = 0{,}51$ y $l = 438{,}3$ mm, para cuyos valores $\alpha_1 = 4'$, estando dividido el disco o cabeza del tornillo en 240 partes, que corresponden a segundos de arco.

Para determinar el paso h del tornillo se dan a éste diez o veinte vueltas en distintas posiciones del mismo, y se mide con un compás la altura correspondiente.

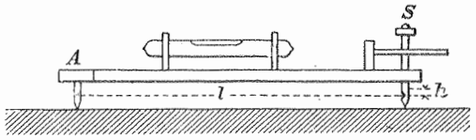


Fig. 231. — Esquema de la probeta de niveles

Además, puede determinarse el ángulo α_1 o la relación $\frac{h}{l}$, colocando en los soportes DD' un anteojo, con el cual se lee una escala situada a distancia conocida, mientras se da la vuelta al tornillo micrométrico S.

A continuación damos en una tabla el resultado de la prueba o determinación de sensibilidad de un nivel, hecha con la probeta representada en la figura 230.

Tornillo micrométrico	Burbuja izquierda	Burbuja derecha	Desplazamiento izquierdo	Desplazamiento derecho	Longitud de la burbuja
3′ 0″	26,0	43,2	1,6	1 6	17,2
3 10	24,4	41,6	1,6	1,5	17,2
3 20	22,8	40,1	1,7	1,7	17,3
3 30	21,1	38,4	1,4	1,4	17,3
3 40	19,7	37,0	1,5	1,5	17 3
3 50	18,2	35,5	1,4	1,4	17,3
4 0	16,8	34,1	1,5	1,5	17.3
4 10	15,3	32,6	1,6	1,5	17,3
4 20	13,7	31,1	1,5	1,5	17,4
4 30	12,2	29,6	1,5	1,5	17,4
4 40	10,7	28,1	1,6	1,6	17,4
4 50	9,1	26,5	1,5	1,5	17,4
5 0	7,6	25,0	1,6	1,5	17,4
5 10	6,0	23,0	1,5	1,5	17,5
5 20	4.5	22,5			17,5
2′ 20″ = 140″	21,5	21,2	21,5	21,2	
			Media = 21,35		

(3)

Es decir, que a una inclinación de 2′ 20″ = 140″ corresponde un desplazamiento, promedio de la burbuja igual a 21,35 divisiones; luego, a una división corresponderá una inclinación de

$$\frac{140}{21{,}35} = 6{,}56''.$$

La repetición de la prueba, en sentido contrario, dió 6,7″, por lo cual, tomando la media de ambos resultados, se tiene:

Sensibilidad = 6,6″ por división.

La duración de la prueba fué de veinte minutos. Conviene proceder despacio, pues la burbuja tarda bastante en quedar en reposo después de cada movimiento.

En este ejemplo, los desplazamientos, para los catorce movimientos del tornillo, son bastante iguales, oscilando entre los límites 1,4 y 1,7. Cuando para movimientos iguales del tornillo los desplazamientos son también iguales, se tiene la prueba de que el tubo es interiormente de forma circular (tórica), siendo iguales todos los pasos del tornillo.

Al contrario, comparando los desplazamientos de la burbuja en distintas posiciones del tornillo, se ve si los pasos de éste son todos iguales; por esto es conveniente que los soportes de la izquierda *A* (fig. 231) sean tornillos, como se ve en *AA′* en la figura 230.

La longitud de la burbuja aparece algo variable en el ejemplo anterior (entre 17,2 y 17,5), debido no sólo a la variación de temperatura durante la prueba, sino probablemente también a la desigual anchura del tubo.

Para los aparatos empleados en Topografía, se recomiendan las siguientes sensibilidades de nivel:

Nivelaciones de precisión	5″ por división de 2,26 mm
Teodolitos grandes para acimutes y niveles grandes	10″ » » » » »
Teodolitos y niveles corrientes	20″ » » » » »
Niveles pequeños	30″ a 40″ por división de 2,26 mm
Eclímetros o clisímetros de mano, rectificadores y niveles esféricos	2′ a 4′ » » » » »
Niveles esféricos para minas	5′ a 10′ » » » » »

Cuando los niveles son demasiado sensibles, no acaban de quedar nunca en reposo, dificultándose el trabajo sin ganar nada en precisión.

Probeta de precisión del Instituto Geodésico de Potsdam. Para las verificaciones delicadas de los niveles grandes no sirven las probetas construídas con arreglo al principio en que está basado el de la figura 230, pues el tornillo micrométrico resultaría sobrecargado al soportar el peso de todo el brazo y, además, el del nivel con su armadura. Para obviar este inconveniente construyó la casa Hildebrand, de Freiberg, un examinador de niveles ideado por Bruns en 1886, en el cual el brazo va apoyado, hacia su mitad, en un soporte o zócalo, por medio de un eje transversal unido a aquél, de modo que el peso del nivel queda casi equilibrado, y el tornillo micrométrico sólo experimenta una pequeña sobrecarga. De este modo es posible colocar sobre la probeta el instrumento entero cuyo nivel se quiere comprobar, sin necesidad de desmontar éste.

Con idéntico fin construyó, en el año 1898, la misma casa Hildebrand, el aparato representado en la figura 232, para el Instituto Geodésico de Potsdam. El zócalo pesado *A*, en el cual se apoya el eje transversal, descansa sobre el suelo con tres tornillos nivelantes,

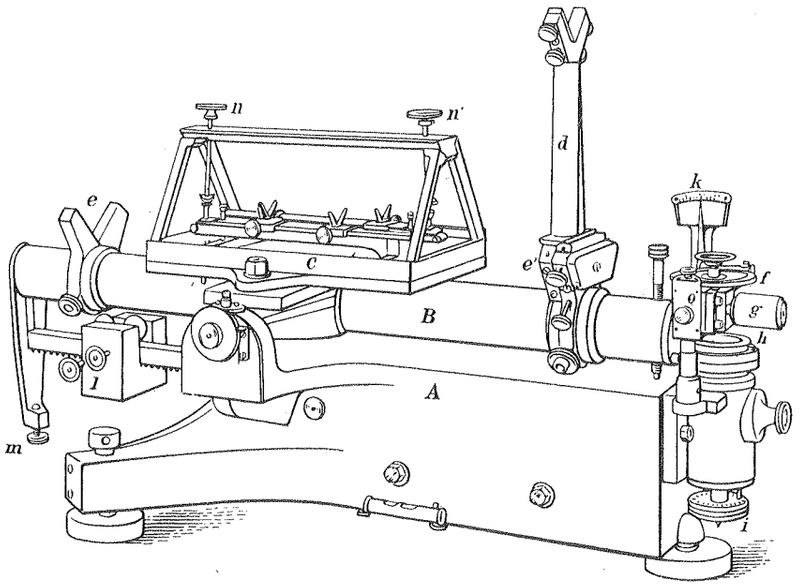


Fig. 232. — Examinador de niveles del Instituto Geodésico de Potsdam

con los cuales se pone horizontal dicho eje transversal. El brazo longitudinal *B* tiene 76 cm de largo y consiste en un tubo cilíndrico de 6 cm de diámetro exterior. Para equilibrar este brazo sirve el peso corredizo *l*, y el tornillo *m*, provisto de muelle, impide que en un desequilibrio brusco pueda producirse un golpe seco contra el suelo.

El tornillo micrométrico, cuya cabeza o tambor se ve en *f*, pasa por una rosca practicada en un saliente del brazo *B*, y se apoya, por su punta, en una placa de ágata *h*, la cual va sobre un cilindro que puede subir o bajar girando el tornillo *i*, para emplear distintas

partes del filete del tornillo micrométrico. El índice *k* sirve para leer el número de vueltas enteras de este tornillo.

Sobre el eje *B*, cerca del eje transversal, se atornilla una placa de forma especial para colocar sobre ella el aparato cuyo nivel se quiera examinar. Esta placa puede sustituirse por una vitrina *C* en la cual pueden colocarse varios niveles. Finalmente, el brazo *B* lleva unos collares con soportes en forma de horquilla, unos bajos, como *e*, y otros altos, como *d*, para la colocación de niveles caballeros.

§ 56. Empleo del nivel

Aunque los diferentes modos de verificar y corregir los niveles deben estudiarse separadamente al tratar de cada uno de los instrumentos que llevan niveles, conviene tener en cuenta una serie de hechos generales que constituyen el fundamento del uso y aplicación de los mismos.

Nivel de reglilla. Llamamos así al nivel tubular representado en la figura 233, empleado para determinar la horizontalidad de una línea y, por lo tanto, por intersección de dos de éstas, la de un plano. El nivel de reglilla lleva su armadura unida a una reglilla metálica del modo siguiente: por un extremo va articulada mediante un eje alrededor del cual puede girar el nivel, y por el otro extremo va sujeta con un tornillo de corrección, de modo que dando vueltas a la cabeza *a* se hace subir o bajar un poco dicho extremo para lograr el paralelismo del eje del nivel con la reglilla.

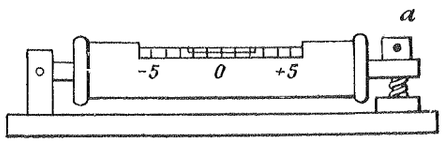


Fig. 233. – Nivel de reglilla

Si el nivel está corregido, su eje será paralelo a la reglilla, o, mejor dicho, a su proyección sobre la misma.

Para comprobar un nivel descorregido, se coloca sobre un soporte con tornillos nivelantes (por ejemplo, en una probeta o examinador de niveles) y se le da una inclinación tal que la burbuja quede calada, con lo cual el eje *AB* del nivel (fig. 234) estará horizontal; la inclinación del soporte *CD* respecto a la horizontal será entonces igual al ángulo α que forma el eje *AB* del nivel con su proyección sobre la reglilla. Se vuelve el nivel, es decir, se hace girar 180° sobre el soporte, y entonces el eje del mismo *A'B'* formará un ángulo 2α con la horizontal, y el desplazamiento de la burbuja corresponderá también al ángulo 2α. De aquí se deduce la regla para corregir el nivel, que consiste en girar el tornillo de corrección *a* (fig. 233) para hacer que la burbuja recorra la *mitad* de este desplazamiento, quedando así paralelos el eje del nivel y la reglilla. Si al mismo tiempo se quiere colocar horizontal el soporte, se mueven sus tornillos nivelantes de modo que la burbuja del nivel acabe de recorrer la segunda mitad del desplazamiento primero, con lo cual quedará calada.

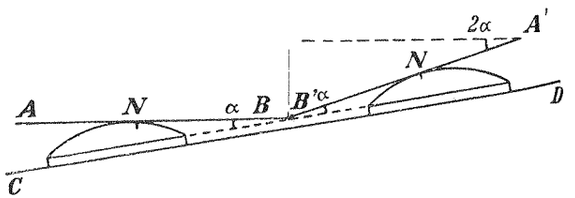


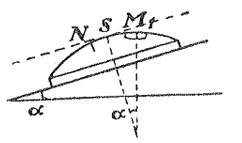
Fig. 234. — Inversión del nivel

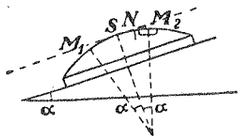
También puede seguirse el método contrario, consistente en nivelar primero el soporte haciendo que la burbuja recorra la mitad de su desplazamiento, y después calando ésta con

el tornillo de corrección. Este procedimiento resulta especialmente ventajoso cuando el nivel está tan descorregido, que después de darle la media vuelta no puede hacerse la lectura; en este caso se cala la burbuja con los tornillos nivelantes del soporte, contando las vueltas que hay que dar a los mismos, y se giran hacia atrás en un número de vueltas igual a la mitad de las dadas primeramente. De este modo se tiene la reglilla del nivel casi horizontal, y se procede a hacer una nueva corrección por el método general (fig. 234).

Punto de calado del nivel de reglilla. El giro de 180° del nivel nos lleva a otra consecuencia importante.

En vez de poner paralelo el eje del nivel a la reglilla por medio del tornillo de corrección, se puede escoger otro punto normal sobre la escala del nivel y, por lo tanto, determinar otro eje. Vamos a tomar como punto normal aquel en que la tangente al nivel sea paralela a la reglilla, y llamemos a este punto, centro o punto de calado del nivel. Si la posición de este punto es conocida, no hay que hacer más corrección del nivel: para colocar horizontal la reglilla bastará girar los tornillos nivelantes del soporte de modo que el punto medio de la burbuja coincida con el punto de calado.





Figs. 235 y 236

En la figura 235, que representa un nivel descorregido, el punto normal está en *N*; en *S* tenemos el punto de calado, y la tangente en *S* la tomamos como eje auxiliar del nivel. Si el punto medio de la burbuja está en M_1, la distancia angular del mismo al punto de calado será igual a la inclinación α de la reglilla.

Al dar la media vuelta al nivel, pasan a ocupar los puntos M_1 y *N* las posiciones indicadas en la figura 236, mientras que el punto medio de la burbuja estará en M_2, es decir, que este punto, al girar el nivel, ha pasado de la división M_1 a la M_2, correspondiendo este recorrido a un ángulo 2α, y el promedio de ambas lecturas M_1 y M_2 da la posición del punto de calado *S*.

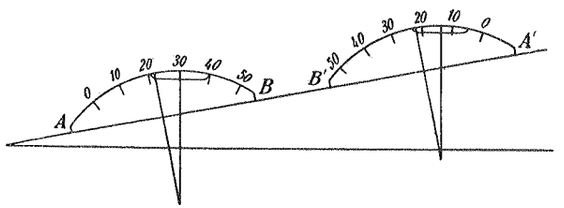


Fig. 237. — Determinación del punto de calado

Supongamos, por ejemplo, que tenemos un nivel de numeración corrida, es decir, con el cero de su división en un extremo y que la división que ocupa el punto medio sea la 25; en la primera posición y en la segunda se obtienen las siguientes lecturas (fig. 237):

Posición *AB*:	izquierda 21,8	derecha 39,3	Media =	30,6
» *B'A'*:	derecha 6,3	izquierda 22,6	=	14,4
Media:	14,0	31,0		22,5

Punto de calado = Media total: 22,5.

Como se ve en la figura 237, el punto 22,5 es el punto de calado del nivel respecto a la reglilla, y si se inclina el soporte de modo que el centro de la burbuja ocupe el punto 22,5, se tiene la reglilla en posición horizontal.

Después de puesta horizontal la reglilla, se puede llevar el centro de la burbuja, con el tornillo de corrección, a situarse en el punto normal 25,0; pero es más sencillo tomar como nuevo punto normal el 22,5 y no tocar más al tornillo. Esto conviene hacerlo, sobre

todo, con los niveles muy sensibles, en que el punto de calado puede determinarse, por lecturas repetidas, con mucha más exactitud que la que cabe esperar de la corrección necesaria para mantener aquél en el punto normal.

Medida de la inclinación con el nivel. Colocando el nivel sucesivamente en dos posiciones invertidas, como se ve en las figuras 235 y 236, se puede determinar la inclinación de la reglilla, es decir, el ángulo que ésta forma con la horizontal, pues la distancia angular entre las dos posiciones M_1 y M_2 al centro de la burbuja, es igual al doble del ángulo de inclinación α. En el ejemplo de la figura 237 se tiene también:

$$\text{Inclinación de la reglilla} = \frac{30{,}6 - 14{,}4}{2} = 8{,}1 \text{ divisiones.}$$

La medida de la inclinación por medio del nivel desempeña un papel muy importante en la teoría general de instrumentos.

Medida del ángulo de una cuña. Sobre una base firme se coloca la cuña, cuyo ángulo agudo β quiere medirse (fig. 238), y encima de ésta se dispone un nivel de reglilla.

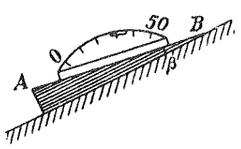


Fig. 238

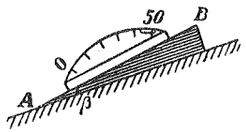


Fig. 239

En AB se tiene la proyección del eje del nivel sobre la reglilla. Se lee la posición de la burbuja, y levantando el nivel se da la vuelta a la cuña, poniendo nuevamente el nivel sobre ésta, en la misma posición de antes (fig. 239), con lo cual la reglilla formará un ángulo 2β con su dirección primera; se vuelve a leer en la escala la posición de la burbuja, y la diferencia entre las dos lecturas es igual al doble del ángulo β de la cuña.

Como se ve, para esta medida importa poco que el nivel esté corregido o no respecto a su reglilla. Si se tiene un nivel corregido, al dar la vuelta a la cuña se gira también el nivel, de modo que en la segunda posición caiga el cero de su escala a la derecha; para tener el ángulo 2β, basta leer (sin tener en cuenta la numeración de las divisiones) la posición del centro de la burbuja, en ambas posiciones, respecto a la primera división de la izquierda.

De aquí podemos deducir un modo de rectificar los niveles, generalización del antes indicado en la figura 234. En efecto, consideraremos el nivel descorregido como uno corregido situado sobre una cuña, cuyo ángulo sea igual al formado por el eje del nivel y su reglilla. Si se coloca el nivel sobre un soporte fijo, y se gira después 180° sobre el mismo, el ángulo que forma el eje del nivel con su reglilla es igual a la mitad del correspondiente a las divisiones recorridas por la burbuja en uno o en otro sentido, por efecto de dicho giro.

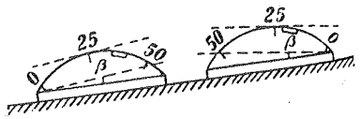
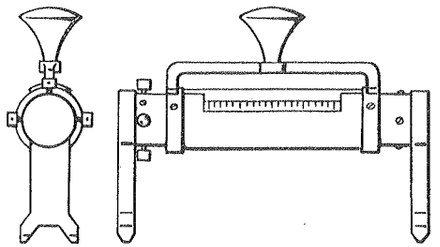


Fig. 240

Por ejemplo, en la figura 240, el centro de la burbuja se encuentra, en la primera posición del nivel, en el punto 38,2 de la escala: al darle la vuelta, se tiene que el centro de la burbuja está en el punto 31,4 contado a partir de la división 50; luego el ángulo formado por el eje del nivel y su reglilla será igual a $\frac{38{,}2 - 31{,}4}{2} = 3{,}4$ divisiones. Si por medio del tornillo de corrección se corre el centro de la burbuja 3,4 divisiones, se colocará en el medio de ambas lecturas 34,8, y se tendrán ambas líneas, eje y reglilla, paralelas, quedando el nivel corregido.

Nivel caballero. Un caso particular de los niveles de reglilla lo constituye el *nivel caballero,* que sirve para nivelar ejes de forma cilíndrica, como, por ejemplo, el eje horizontal de los teodolitos, para lo cual lleva dos patas terminadas inferiormente en forma de Λ, para colocarlas sobre los ejes. En la figura 241 se ve un nivel caballero con sus cuatro tornillos de corrección, con los cuales puede moverse uno de los extremos del nivel en sentidos vertical y horizontal. No basta con la corrección en sentido vertical, como se hace con el nivel de reglilla, para colocar el eje del nivel paralelo al eje del cilindro que se quiere nivelar, pues aun cuando ambos ejes sean horizontales, pueden no ser paralelos, sino estar cruzados, cosa que se descubre fácilmente nivelando primero el eje cilíndrico de modo que la burbuja quede calada, y dando después un suave movimiento de vaivén al nivel sobre sus horquillas de apoyo, a uno y otro lado del eje cilíndrico; si éste está cruzado con el del nivel, se elevará una vez un extremo de éste y otra vez el otro, es decir, que la burbuja tan pronto se correrá hacia un extremo como a otro. Una vez comprobada la existencia del cruzamiento de los ejes, se corrige lateralmente el nivel con los tornillos correspondientes. El paralelismo entre el eje del nivel y el cilíndrico se consigue del mismo modo que en el nivel de reglilla, ya sea como se ve en la figura 234, o con ayuda del punto de calado (figura 235), o midiendo el ángulo formado por ambos ejes (fig. 240).


Fig. 241. — Nivel caballero

Muñones y collares desiguales. Si los muñones del eje de giro del anteojo de un teodolito, o los collares del anteojo giratorio de un nivel, no tienen exactamente el mismo diámetro, es evidente que no determinan una superficie cilíndrica, y ya no basta la anterior corrección para hacer paralelos el eje del nivel y el eje de giro del anteojo del teodolito, o el eje mecánico del anteojo, es decir, la recta que pasa por el centro de los dos collares del mismo.

En la figura 242, O y O' representan los centros de los dos muñones o collares, que suponemos abatidos sobre el plano del papel para facilitar la explicación siguiente. P y P' representan los pies del nivel caballero, y QQ' son los cojinetes del eje o del anteojo, que tienen la misma forma que los pies del nivel caballero.

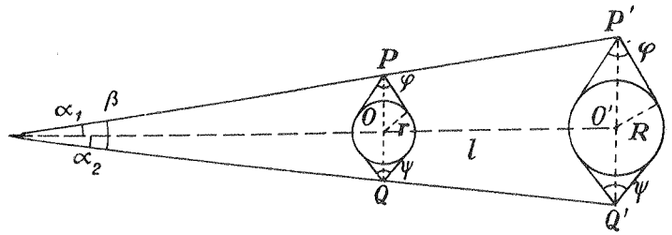


Fig. 242

Cuando se invierte la posición del nivel, no cambia de posición la línea que une los puntos P y P'. En vez del nivel caballero podemos imaginar que se trata de un nivel ordinario de reglilla, colocado sobre la recta PP', y seguir el mismo procedimiento empleado con éste para colocar horizontalmente la línea PP' o para determinar su inclinación.

Siguiendo el método indicado en las figuras 238 y 239, levantaremos el nivel e invertiremos la posición del eje de giro del anteojo si se trata de un teodolito o el anteojo mismo si se trata de un nivel de anteojo, o sea, cambiaremos entre sí de sitio los muñones o los collares, volviendo a colocar en la misma posición el nivel, es decir, sin hacerle

girar 180° (fig. 242). La diferencia de lecturas del nivel, antes y después, será igual al ángulo 2β, ya que el ángulo β corresponde en este caso al ángulo agudo de la cuña en dichas figuras anteriores.

Conociendo β, pueden calcularse los dos ángulos α_1 y α_2, pues en la figura 242 se tiene:

$$OP = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} \qquad O'P' = \frac{R}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} \qquad \alpha_1 = \frac{O'P' - OP}{l}$$

$$OQ = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \qquad O'Q' = \frac{R}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \qquad \alpha_2 = \frac{O'Q' - OQ}{l}$$

de donde:

$$\alpha_1 = \frac{R-r}{l}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} \qquad \alpha_2 = \frac{R-r}{l}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta$$

$$\alpha_1 = \beta\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}} \qquad \alpha_2 = \beta\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}}.$$

Los ángulos φ y ψ, necesarios para obtener los valores de α_1 y α_2, pueden medirse con suficiente exactitud con un transportador ordinario. Si los cojinetes no tienen forma de horquilla (angular) sino semicircular, se tiene $\psi = 180°$. Una vez hallados estos valores y medida la distancia l entre los pies del nivel caballero o entre los dos cojinetes, se deduce fácilmente de las anteriores igualdades el valor de $R - r$.

Para colocar horizontalmente el eje OO', hay que dar a la línea PP' una inclinación igual a α_1.

Nivel de plataforma (acimutal). Para colocar verticalmente el eje principal de un teodolito o de un nivel de anteojo, debe ir unido fijamente a dicho eje, o a la plataforma con que éste forma cuerpo, un nivel tubular, de modo que tome parte en el giro del instrumento alrededor del eje. También puede servir para este objeto un nivel caballero dispuesto sobre el eje horizontal del teodolito o sobre los collares del anteojo del nivel, y que para esta aplicación se considera como un nivel fijo al instrumento.

Si el nivel está corregido respecto al eje vertical, su eje será perpendicular a este eje, por lo cual bastará calar el nivel en dos posiciones normales entre sí, por medio de los tornillos nivelantes de la plataforma, para que el eje principal del instrumento quede en posición vertical.

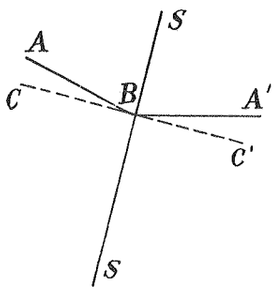


Fig. 243

Si el nivel no está corregido, como representa la figura 243, en la cual se ve que el eje AB del nivel es oblicuo respecto al eje principal SS del instrumento, puede considerarse el nivel como uno ordinario de reglilla colocado sobre la línea CC', perpendicular a dicho eje principal. Al girar 180° el instrumento, el nivel seguirá situado sobre la misma línea CC', pudiéndose aplicar, por consiguiente, el sencillo procedimiento de la figura 234 para corregir el nivel. Pero también puede determinarse el punto de calado según el sistema representado en las figuras 235 a 237; si se cala la burbuja, por medio de los tornillos nivelantes, en dos posiciones del eje del nivel perpendiculares entre sí, se tiene vertical el eje principal del instrumento. También aquí puede correrse la burbuja tocando al tornillo de corrección del nivel.

Tratándose, sobre todo, de teodolitos grandes, basta con tener el nivel corregido con cierta aproximación y determinar cada vez con toda precisión el punto de calado, para poder colocar el eje principal verticalmente.

También puede corregirse el nivel por el procedimiento de la figura 240, midiendo el ángulo formado por el eje del nivel y la normal al eje principal del instrumento. Para ello se lee, antes y después de girar el instrumento, la posición del centro de la burbuja, las dos veces respecto al extremo izquierdo (o al derecho) de la escala. Colocando la burbuja en el medio de ambas lecturas, por medio del tornillo de corrección, se tiene el eje del nivel perpendicular al eje principal del instrumento.

Nivel reversible. El nivel reversible, ya citado anteriormente (pág. 216), fué empleado, en el año 1859, por Amsler, el inventor del planímetro, en la construcción de un nivel de anteojo que podía girar alrededor de su eje longitudinal apoyándose con dos collares cilíndricos sobre cojinetes en forma de horquilla. A causa de ser su comprobación muy fácil y práctica, se ha extendido en la actualidad considerablemente el uso de los niveles de anteojo provistos de nivel reversible.

En general, si un cuerpo cualquiera, giratorio alrededor de un eje, se provee de un nivel reversible, puede colocarse con este eje horizontal valiéndose de las indicaciones del nivel.

En primer lugar hemos de hacer observar que en un nivel reversible hay dos ejes, que, como ya dijimos en la página 216, son las tangentes al mismo en los dos puntos normales de las dos escalas y situadas ambas en el mismo plano que pasa por el eje longitudinal del tubo. Desde luego supondremos que la posición correcta de ambos puntos normales es aquella para la cual son paralelos entre sí los dos ejes dichos, pero ambos ejes pueden formar con el de rotación del nivel, o eje longitudinal del tubo, un ángulo α.

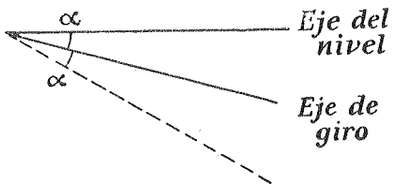


Fig. 244

La primera revisión del nivel debe consistir en descubrir si los ejes del nivel y el de rotación están algo cruzados, lo cual se hace del mismo modo que con el nivel caballero. Se corrige este cruce con los tornillos laterales de corrección del nivel.

En la figura 244 se supoue que la burbuja está calada en la escala superior del nivel, de modo que el eje de giro forma un ángulo α con la horizontal. Si se gira el nivel 180° alrededor del eje de rotación, queda la otra escala hacia arriba y la burbuja experimenta un desplazamiento 2α, correspondiente a la inclinación de los ejes del nivel. Se puede hacer recorrer a la burbuja la mitad de este desplazamiento con los tornillos nivelantes del instrumento, con lo cual se tiene ya horizontal el eje de giro: si la otra mitad del desplazamiento se corrige con el tornillo de corrección del nivel, se tienen los ejes de éste paralelos al de rotación.

Puede también procederse no variando la posición del eje de giro y haciendo correr la burbuja la mitad del desplazamiento sufrido, con el tornillo de corrección del nivel, con lo cual se consigue el paralelismo entre los ejes del nivel y el de rotación. En este caso no es necesario que el nivel quede calado en la primera posición, como en la figura 244, pudiéndose partir de cualquier sitio en que se encuentre la burbuja.

Convergencia de los ejes del nivel reversible. Hemos supuesto anteriormente que los dos ejes del nivel eran paralelos entre sí; vamos ahora a ver cómo se puede descubrir si es defectuosa la situación de los puntos normales, o sea, si los dos ejes del nivel, en vez de ser paralelos, forman uno con otro un pequeño ángulo.

En la figura 245 se supone que los dos ejes del nivel forman entre sí un ángulo λ, y que el nivel con sus dos ejes gira alrededor del eje de rotación DC. En la primera posición, el primer eje AC del nivel es horizontal, estando calada la burbuja en A; después del giro, pasa el segundo eje BE a la posición $B'E$, y se quiere saber la inclinación del eje $L'B'$, o el desplazamiento observado en B'. En la figura se ve que el eje LAC tiene de inclinación cero, por ser horizontal; que el eje de giro DC tiene la inclinación δ, y el eje $L'E$ del nivel, una inclinación igual a $\delta + (\delta + \lambda) = 2\delta + \lambda$.

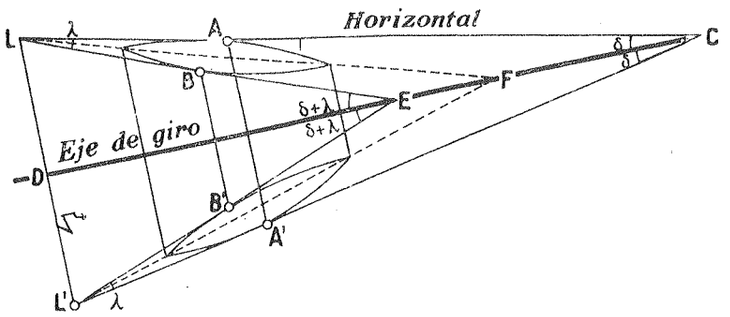


Fig. 245. — Nivel reversible

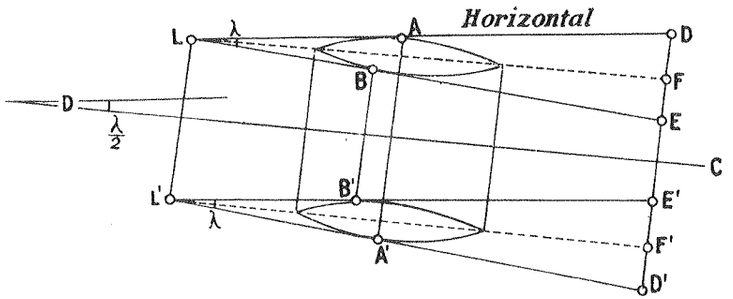


Fig. 246. — Nivel reversible, en el caso de rectificación por mitades

Si después del giro se hace la corrección ordinaria del nivel (la mitad con los tornillos nivelantes y la otra mitad con el tornillo de corrección), el nivel describirá un ángulo, respecto al eje de rotación, igual a $\delta + \frac{\lambda}{2}$, es decir, que los dos ejes del nivel formarán entonces con el de giro los siguientes ángulos:

$$\delta - \left(\delta + \frac{\lambda}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \delta + \lambda - \left(\delta + \frac{\lambda}{2}\right)$$

o sea

$$-\frac{\lambda}{2} \qquad \text{y} \qquad +\frac{\lambda}{2}.$$

lo cual nos dice que el eje de giro, después de la corrección, queda paralelo a la bisectriz LF del ángulo λ, como claramente se ve en la figura 246, donde el eje de giro DC forma un ángulo $\frac{\lambda}{2}$ con la horizontal, y antes de dar la vuelta al nivel, la burbuja queda calada en A y después en B'.

Se ve también que el calarse la burbuja en las dos posiciones del nivel no es señal de que el eje de giro sea horizontal, ni de que el nivel es simétrico.

Para determinar el ángulo de convergencia λ supongamos al nivel reversible unido al anteojo de un instrumento de nivelación provisto de collares cilíndricos, de modo que el eje de rotación coincida con el eje de ambos collares, o sea la recta que une sus centros. Corrigiendo el nivel del modo indicado para la figura 244 y calando la burbuja con los tres tornillos nivelantes, se obtiene para el eje de giro una inclinación igual a $\frac{\lambda}{2}$. Se da por supuesto que los dos collares tienen el mismo diámetro; de no ser así, debe determinarse también el ángulo α_1 del modo indicado para la figura 242.

Al tratar de los instrumentos empleados en nivelación, veremos otro método para determinar el ángulo de convergencia λ valiéndose de visuales dirigidas con el anteojo. Sólo nos resta decir que en la verificación de tres niveles reversibles de 20″, 20″ y 5″ respectivamente, encontró Dorn ángulos de convergencia de 0,3″, 21″ y 58″. En cambio, se tiene la prueba de 710 niveles, descrita por Fennel, en la cual sólo se encontraron errores inferiores a 1″.

§ 57. Precisión de los niveles

De los estudios hechos por Reinhertz sobre la precisión de los niveles, tomamos los siguientes datos.

La precisión con que el centro de la burbuja se cala en el punto normal de la escala, o con que puede leerse la posición de la burbuja respecto a las divisiones de la escala, depende de la sensibilidad del nivel, como se ve en la tabla que sigue:

Sensibilidad del nivel	Error medio del calado		Error medio de la lectura	
3″ por división	± 0,15″	ó ± 0,05 de división	± 0,30″	ó ± 0,10 de división
5 » »	0,2	0,04 » »	0,35	0,07 » »
10 » »	0,3	0,03 » »	0,5	0,05 » »
20 » »	0,4	0,02 » »	0,85	0,04 » »
30 » »	0,5	0,015 » »	1,2	0,04 » »
60 » »	0,7	0,01 » »	1,6	0,03 » »
1 división = 2,256				

Para diecisiete niveles, con sensibilidades comprendidas entre 3″ y 55″, empleando el aparato representado en la figura 230, se hallaron errores medios representables por medio de las fórmulas siguientes:

error medio de calado en segundos $\pm 0{,}09\sqrt{A''}$

» » » » » divisiones $\pm \dfrac{0{,}09}{\sqrt{A''}}$

» » » lectura en segundos $\pm 0{,}20\sqrt{A''}$

» » » » » divisiones $\pm \dfrac{0{,}20}{\sqrt{A''}}$

donde A'' es la sensibilidad correspondiente a una división.

De aquí se deduce que el calado de la burbuja es más exacto que la lectura de ésta sobre la escala, siendo indudablemente más penoso también el calar la burbuja que el leer en la escala. De los números anteriores se deduce también que a un aumento de sensibilidad no corresponde un aumento proporcional de precisión.

Para los niveles esféricos con radio de curvatura de 1,5 m a 2,0 m, resulta, para un diámetro de la burbuja comprendido entre 10 mm y 15 mm, un error medio de calado de unos $\pm 5''$.

Influencia de la temperatura y de la presión atmosférica. El primer efecto del calor sobre el nivel consiste en la variación de longitud de la burbuja, la cual en tiempo frío es más grande que en tiempo de calor. Por ejemplo, en un instrumento de nivelación de Bamberg, cuyo nivel no tiene depósito adicional, hemos encontrado, para una sensibilidad de 6,6″ por división:

Temperatura	$t = 0°$	5°	10°	15°	20°	25° C
Longitud de la burbuja	$l = 26{,}5$	24,5	22,5	20,5	18,5	16,5 divisiones

A una variación de temperatura $\Delta t = 1°$, corresponde una longitud $\Delta l = 0{,}4$ de división.

Una vez hallada esta relación para un nivel, puede éste emplearse como termómetro.

La influencia de la temperatura sobre la longitud de la burbuja varía para las diferentes sensibilidades, como se ve en los siguientes valores medios, tomados de los trabajos antes aludidos:

Sensibilidad	Longitud de la burbuja l 0°	a 15°	a 30°	Variación Δl por 1
5″ por división	32	25	18	0,45
10 » »	30	24	18	0,35
15 » »	26	22	18	0,28
20 » »	24	20	17	0,24
30 » »	23	20	18	0,18

Esta tabla nos dice que la influencia de la temperatura sobre la longitud de la burbuja es bastante mayor cuanto mayor es la sensibilidad del nivel, por lo cual los niveles muy delicados van provistos de cámara o depósito adicional, como ya se dijo en la página 215.

Resulta también ventajoso construir niveles cuya burbuja tenga una longitud constante, insensible a las variaciones de temperatura; para ello se emplean tubos de sección transversal elíptica, en vez de circular, que bien elegidos resuelven el problema de la insensibilidad a la temperatura.

La longitud de la burbuja ejerce una considerable influencia en la precisión del nivel; las burbujas pequeñas son muy perezosas, siendo la longitud más conveniente la igual a la mitad del largo del tubo. En el estudio ya citado se encuentra la siguiente tabla, para un nivel de 16″ de sensibilidad:

Longitud de la burbuja	4	10	16	20	29 divisiones
Error medio de calado	1,4″	0,6″	0,4″	0,3″	0,2″

en donde se ve que para grandes longitudes de la burbuja la precisión es bastante mayor que para longitudes pequeñas de la misma.

La influencia del calor sobre los niveles se manifiesta también de otro modo: poniendo al sol un nivel, se ve que la burbuja se corre hacia el sol, de modo que el extremo más distante de ésta se encoge, es decir, se acerca al sol, en una distancia igual a

la contracción experimentada por la burbuja. Por esta razón conviene proteger el nivel, es decir, su armadura, con una cubierta aislante o mala conductora del calor, de papel, tela, madera, etc., o emplear una doble armadura.

En el campo deben resguardarse del Sol, bajo una sombrilla o paraguas, los aparatos provistos de nivel sensible.

Gran importancia tiene el saber si la sensibilidad del nivel varía con la temperatura o no. En los estudios hechos por Reinhertz se ve que de 21 niveles, para temperaturas comprendidas entre $-4°$ y $+28°$, la gran mayoría, a saber, 16, no experimentaron variaciones mayores del triple de los errores tolerables, y de los cinco restantes, que variaron de modo apreciable, cuatro aumentaron su sensibilidad al subir la temperatura y sólo uno perdió sensibilidad. Todos estos niveles eran de armadura metálica, y puede ser que los tubos de vidrio no varíen en su curvatura por efecto de los cambios de temperatura.

Este resultado fué también confirmado por los experimentos de Samel, en los cuales, para niveles provistos de armadura, observó variaciones considerables de sensibilidad, y en niveles sin armadura no ejercieron influencia apreciable los cambios de temperatura.

Menos éxito han tenido los estudios encaminados a demostrar la influencia de la presión atmosférica sobre la sensibilidad de los niveles. Según los experimentos y trabajos de Petrelius y de Heil existe esta influencia, mientras que según Samel y otros autores la sensibilidad de un nivel es independiente de la presión atmosférica, no estando aún en la actualidad resuelta esta cuestión de modo definitivo ni satisfactorio.

Acciones químicas en los niveles. Además de las variaciones que experimentan los niveles por efecto del calor, presentan éstos a veces ciertas anomalías que hay que buscar en la composición química del vidrio y del líquido que ocupa el tubo. Si el vidrio no es lo bastante resistente a la acción de los líquidos, se producen con el tiempo una especie de excrecencias que se depositan en la cara interior del tubo, entorpeciendo la marcha normal de la burbuja. Al poner el nivel sobre una probeta o examinador de niveles, se observan desplazamientos irregulares, es decir, que la burbuja queda a veces adherida al vidrio y a veces suelta, moviéndose a saltos. Este inconveniente se remedia lavando a fondo interiormente el nivel, con alcohol y éter.

BIBLIOGRAFÍA:

LIAGRE, Sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les moyens d'y remédier. (GRUNERT, Archiv der Math. u. Phys., 6.ª parte, 1845, p. 400-404 y 7.ª parte, 1846, págs. 1-3.)

HENSOLDT, Das orthoskopische Ocular, de KARL KELLNER, y un apéndice sobre la prueba de niveles, por HENSOLDT (Mechaniker, Braunschweig, 1849).

PETRELIUS, Über die Veränderungen der Empfindlichkeit der Libellen. (Öfversigt af Finska Vet.-Soc. Förhandlingar, tomo XLIV.) Helsingfors, 1901.

BIGOURDAN, Über die Krümmungsveränderungen der Gläser mancher Libellen unter dem Einfluss der Temperaturänderung. (Compt. rend., tomo CXXXVII, 1903, pág. 385; Ref. Zeitschr. f. Instr., 1905, pág. 209.)

HEIL, Veränderlichkeit der Libellenkrümmung und ihre Ursachen (Zeitschr. f. Verm., 1910, páginas 745-752.)

SAMEL, Der Einfluss von Luftdruck und Temperatur auf die Angabe von Röhrenlibellen. (Zeitschr. f. Verm., 1913, págs. 569-577, 586-591, 609-622.)

VOGLER, Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure. Segunda parte, Winterübungen. 3.ª edición, pág. 53. Berlín, 1913.

RIETH, Unregelmässigkeiten der Libellen. (Zentralzeitung f. Optik und Mech., 1887, página 133; Zeitschr. f. Verm., 1887, pág. 297.) Einfluss des Glases auf die Beweglichkeit der Libellen. (Dinglers, Polytechnisches Journal, 1887, tomo CCLXIV, pág. 501.)

WEBER, Ursachen der Fehler an Libellen. Zentralzeitung f. Optik und Mech., 1888, pág. 253.)

MYLIUS, Über die Störungen der Libellen. Mitteilung aus der Physikalisch-technischen Reichsanstalt. (Zeitschr. f. Instrumentenk., 1888, págs. 267, 428.) MYLIUS u. FÖRSTER, Über die Löslichkeit der Kali- und Natrongläser in Wasser. (Zeitschr. f. Instrumentenk., 1889, páginas 117-122.) LÖWENHERZ, Störungen bei Libellen. (Zeitschr. f. Instrumentenk., 1891, pág. 166.) Sobre la calidad de los vidrios para niveles, véase también Zeitschr f. Instrumentenk., 1892, página 170.

§ 58. Refracción de la luz a través de superficies esféricas

Para comprender mejor el funcionamiento de los aparatos topográficos, en cuanto se refiere a la parte óptica de los mismos, damos a continuación, en síntesis, la teoría general de la Dióptrica.

Empezaremos por considerar la marcha de un rayo luminoso al llegar a una superficie esférica, de separación entre dos medios distintos, como, por ejemplo, aire y vidrio. En la figura 247 suponemos que procedente de un punto luminoso P, incide un rayo sobre la superficie esférica en el punto Q. Siendo, por hipótesis, distintos los medios separados por esta superficie, y, por consiguiente, de diferente índice de refracción, n y n', se refractará el rayo en Q, desviándose en la dirección QP'. Si i, i' son los ángulos que el rayo luminoso forma, antes y después de la refracción, con la normal en Q, que es el radio de la superficie esférica, se tiene, en virtud de la ley de la refracción de la luz:

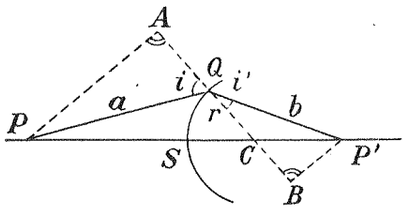


Fig. 247

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'} = \frac{n'}{n}. \tag{1}$$

Con esta ley puede ya establecerse una relación de posición entre los dos puntos P y P'; en efecto, de la semejanza entre los dos triángulos ACP y BCP' se deduce:

$$\frac{AP}{BP'} = \frac{AQ + r}{BQ - r}$$

o bien

$$\frac{a \operatorname{sen} i}{b \operatorname{sen} i'} = \frac{a \cos i + r}{b \cos i' - r}$$

y teniendo en cuenta la fórmula (1),

$$\frac{a\,n'}{b\,n} = \frac{a \cos i + r}{b \cos i' - r}. \tag{2}$$

Supongamos ahora que los dos ángulos i, i' sean muy pequeños, de modo que sus segundas y mayores potencias resulten despreciables; en este caso se tiene:

$$\cos i = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos i' = 1, \tag{3}$$

y sustituyendo estos valores en (2),

$$\frac{n'}{n} = \frac{1 + \frac{r}{a}}{1 - \frac{r}{b}}$$

o sea

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{b} = \frac{n' - n}{r}. \tag{4}$$

Las condiciones (3) significan también que el rayo luminoso forma ángulos muy pequeños con la recta PP', del mismo orden que los i, i'. Es decir, que el punto Q estará muy próximo al S y, por lo tanto, se podrá tomar a como valor de PS y b de $P'S$, teniéndose así que a y b representan respectivamente las distancias de los puntos P y P' al polo S.

La ecuación (4) en que no entran los ángulos i, i' es aplicable a todos los rayos que parten de P y llegan a la superficie esférica, con tal que los correspondientes ángulos i, i' sean tan pequeños que cumplan con las condiciones (3). Todos estos rayos deben converger, después de refractados, en un mismo punto P', al cual llamaremos *imagen* del punto luminoso P. A los rayos que cumplen con las condiciones (3) se les llama *rayos axiales o centrales*.

Podemos ahora poner en otra forma la ecuación fundamental (4); en efecto, suponiendo que la distancia del punto P a la superficie esférica sea infinitamente grande, se convierte dicha ecuación en la siguiente, haciendo en aquélla $a = \infty$

$$b = \frac{n'\,r}{n' - n}$$

y al contrario, si el punto P' está infinitamente alejado de S, queda:

$$a = \frac{n\,r}{n' - n}.$$

Para estos dos valores particulares de a y b existe una notación propia, a saber:

$$f = \frac{n\,r}{n' - n} \qquad \text{y} \qquad f' = \frac{n'\,r}{n' - n}. \tag{5}$$

A estas dos magnitudes f y f' se las llama *distancias focales* de la superficie refringente, y a los puntos que se hallan a estas distancias f y f', uno delante y otro detrás de dicha superficie, se les designa con el nombra de *focos*.

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (4) por $\frac{r}{n' - n}$ tenemos:

$$\frac{n\,r}{a\,n' - n)} + \frac{n'\,r}{b\,(n' - n)} = 1 \tag{6}$$

y según (5),

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1. \tag{7}$$

Hasta aquí hemos considerado un solo punto-objeto y su imagen; supongamos ahora que el rayo luminoso $PSCP'$ gira alrededor del centro C de la superficie esférica en un ángulo muy pequeño, del orden de i, i', resultando así, como se ve en la figura 248, una nueva serie de puntos $P_1 S_1 C P_1'$, de los cuales P y P' siguen en la relación de objeto a imagen. Por la pequeñez del ángulo de giro podemos considerar los arcos elementales PP_1, SS_1 y $S'P_1'$ como segmentos rectilíneos, perpendiculares a PP'.

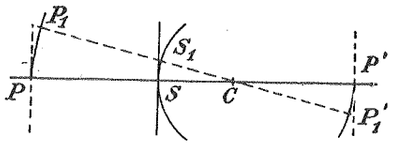


Fig. 248

De aquí se deduce que, dentro de un ángulo pequeño, todos los puntos situados en un plano perpendicular al eje en P tienen sus imágenes en un plano también perpendicular en el punto P', y puesto que todas las líneas que unen los puntos-objetos con sus imágenes pasan por el centro C de la esfera, se deduce de la semejanza entre los triángulos $P_1 PC$

y $P'P_1'C$, que toda figura contenida en el plano-objeto tiene como imagen una figura semejante en el plano imagen.

Refracción a través de dos superficies esféricas sucesivas. Vamos a considerar ahora la marcha de un rayo luminoso a través de dos superficies refringentes (fig. 249), situadas a distancia e una de otra y con radios iguales, $r_1 = r_2$. Los dos medios exteriores, es decir, el de la izquierda de la primera superficie esférica y el de la derecha de la segunda, tienen el mismo índice de refracción n, mientras que el comprendido entre ambas tiene uno distinto n'. La recta que pasa por los centros de las dos esferas es el *eje* del sistema.

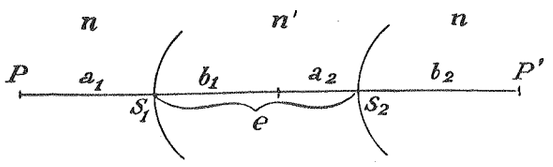


Fig. 249

Un rayo que parta del punto luminoso P, situado sobre el eje a distancia a_1 de S_1, se refractará en la primera superficie según la fórmula (7):

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_1'}{b_1} = 1 \qquad \text{de donde} \qquad b_1 = \frac{a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \tag{8}$$

siendo f_1 y f_1' las distancias focales de la primera superficie. El punto resultante, imagen del P, obra como objeto respecto a la segunda superficie, teniéndose:

$$a_2 = e - b_1 = e - \frac{a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \qquad \text{o bien} \qquad a_2 = \frac{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \tag{9}$$

y según la ecuación (7), la refracción en la segunda superficie refringente cumplirá con esta condición:

$$\frac{f_2}{a_2} + \frac{f_2'}{b_2} = 1$$

y sustituyendo a_2 por su valor (9), tendremos:

$$\frac{a_1 f_2 - f_1 f_2}{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1'} + \frac{f_2'}{b_2} = 1.$$

De aquí se puede deducir la distancia b_2 a que se ha de encontrar la imagen final de la segunda superficie refringente, que será:

$$b_2 = \frac{e a_1 f_2' - e f_1 f_2' - a_1 f_1' f_2'}{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1' - a_1 f_2 + f_1 f_2} \tag{10}$$

Puntos principales y focos. Con la ecuación anterior puede calcularse la distancia a que ha de resultar la imagen de un punto-objeto cualquiera, pero vamos a modificarla para darle una forma más simétrica. Determinaremos para ello, como antes se hizo para una sola superficie refringente, la imagen de un punto infinitamente lejano, y también el punto-objeto correspondiente a una imagen situada a distancia infinita. Escribamos la ecuación (10) en la siguiente forma:

$$b_2 = \frac{e f_2' - \dfrac{e}{a_1} f_1 f_2' - f_1' f_2'}{e - \dfrac{e}{a_1} f_1 - f_1' - f_2 + \dfrac{f_1 f_2}{a_1}}$$

en la cual, para $a_1 = \infty$, resulta:

$$b_2 = \frac{e f_2' - f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2} = \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}. \tag{11}$$

Por otra parte, según la ecuación (10), para que b_2 sea ∞, es preciso que

$$e a_1 - e f_1 - a_1 f_1' - a_1 f_2 + f_1 f_2 = 0,$$

es decir, que para $b_2 = \infty$ se tiene:

$$a_1 = \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \tag{12}$$

A los dos puntos F y F' (fig. 250) determinados con las fórmulas (11) y (12) se les llama, como anteriormente, *focos* del sistema dióptrico que estamos considerando. Ahora bien, no vamos a seguir refiriendo las distancias del objeto y de la imagen a los puntos S_1 y S_2, sino a los focos F y F' que acabamos de definir. Llamando x a la distancia, del objeto P al foco F, y x' a la de la imagen P' al foco F_1', tenemos:

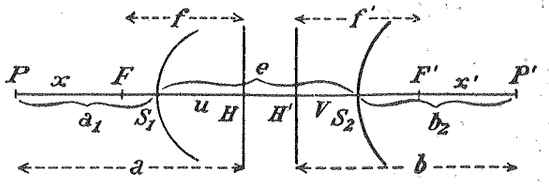


Fig. 250

$$x = a_1 - \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \qquad x' = b_2 - \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}$$

de donde:

$$a_1 = x + \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \qquad b_2 = x' + \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}. \tag{13}$$

Sustituyendo en la igualdad (10) estos valores de a_1 y b_2, resulta:

$$x' + \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e} = \frac{e f_1 f_2' + (f_1' f_2' - e f_2')\left(x + \dfrac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e}\right)}{f_1 f_2 - e f_1 - (f_1' + f_2 - e)\left(x + \dfrac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e}\right)}$$

y por medio de sencillas transformaciones, queda:

$$x x' (f_1' + f_2 - e)^2 = f_1 f_2 f_1' f_2' \tag{14}$$

y poniendo

$$\frac{f_1 f_2}{f_1' + f_2 - e} = f \qquad \text{y} \qquad \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2 - e} = f' \tag{15}$$

se tiene:

$$x x' = f f'. \tag{16}$$

Consideremos ahora dos puntos auxiliares H y H' (fig. 250) que estén respectivamente de los focos F y F' a las distancias f y f'. La distancia del objeto P al punto H y la de la imagen P' al punto H', que designaremos con a y b, estarán dadas por las siguientes igualdades:

$$x = a - f \qquad \text{y} \qquad x' = b - f'$$

y sustituyendo estos valores de x y x' en (16), tenemos:

$$(a - f)(b - f') = f f',$$

de donde:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1. \tag{17}$$

Esta fórmula coincide con la (7), deducida para la refracción sobre una sola superficie esférica. Es decir, que si para un sistema de dos superficies refringentes se calcula la posición de los focos según las fórmulas (11) y (12), y con ayuda de la (15) se determina la

y $P'P_1'C$, que toda figura contenida en el plano-objeto tiene como imagen una figura semejante en el plano imagen.

Refracción a través de dos superficies esféricas sucesivas. Vamos a considerar ahora la marcha de un rayo luminoso a través de dos superficies refringentes (fig. 249), situadas a distancia e una de otra y con radios iguales, $r_1 = r_2$. Los dos medios exteriores, es decir, el de la izquierda de la primera superficie esférica y el de la derecha de la segunda, tienen el mismo índice de refracción n, mientras que el comprendido entre ambas tiene uno distinto n'. La recta que pasa por los centros de las dos esferas es el *eje* del sistema.

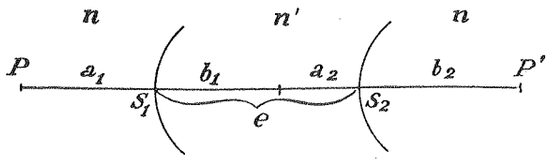


Fig. 249

Un rayo que parta del punto luminoso P, situado sobre el eje a distancia a_1 de S_1, se refractará en la primera superficie según la fórmula (7):

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_1'}{b_1} = 1 \qquad \text{de donde} \qquad b_1 = \frac{a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \tag{8}$$

siendo f_1 y f_1' las distancias focales de la primera superficie. El punto resultante, imagen del P, obra como objeto respecto a la segunda superficie, teniéndose:

$$a_2 = e - b_1 = e - \frac{a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \qquad \text{o bien} \qquad a_2 = \frac{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1'}{a_1 - f_1} \tag{9}$$

y según la ecuación (7), la refracción en la segunda superficie refringente cumplirá con esta condición:

$$\frac{f_2}{a_2} + \frac{f_2'}{b_2} = 1$$

y sustituyendo a_2 por su valor (9), tendremos:

$$\frac{a_1 f_2 - f_1 f_2}{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1'} + \frac{f_2'}{b_2} = 1.$$

De aquí se puede deducir la distancia b_2 a que se ha de encontrar la imagen final de la segunda superficie refringente, que será:

$$b_2 = \frac{e a_1 f_2' - e f_1 f_2' - a_1 f_1' f_2'}{e a_1 - e f_1 - a_1 f_1' - a_1 f_2 + f_1 f_2} \tag{10}$$

Puntos principales y focos. Con la ecuación anterior puede calcularse la distancia a que ha de resultar la imagen de un punto-objeto cualquiera, pero vamos a modificarla para darle una forma más simétrica. Determinaremos para ello, como antes se hizo para una sola superficie refringente, la imagen de un punto infinitamente lejano, y también el punto-objeto correspondiente a una imagen situada a distancia infinita. Escribamos la ecuación (10) en la siguiente forma:

$$b_2 = \frac{e f_2' - \frac{e}{a_1} f_1 f_2' - f_1' f_2'}{e - \frac{e}{a_1} f_1 - f_1' - f_2 + \frac{f_1 f_2}{a_1}}$$

en la cual, para $a_1 = \infty$, resulta:

$$b_2 = \frac{e f_2' - f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2} = \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}. \tag{11}$$

Por otra parte, según la ecuación (10), para que b_2 sea ∞, es preciso que

$$e a_1 - e f_1 - a_1 f_1' - a_1 f_2 + f_1 f_2 = 0,$$

es decir, que para $b_2 = \infty$ se tiene:

$$a_1 = \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \tag{12}$$

A los dos puntos F y F' (fig. 250) determinados con las fórmulas (11) y (12) se les llama, como anteriormente, *focos* del sistema dióptrico que estamos considerando. Ahora bien, no vamos a seguir refiriendo las distancias del objeto y de la imagen a los puntos S_1 y S_2, sino a los focos F y F' que acabamos de definir. Llamando x a la distancia, del objeto P al foco F, y x' a la de la imagen P' al foco F_1', tenemos:

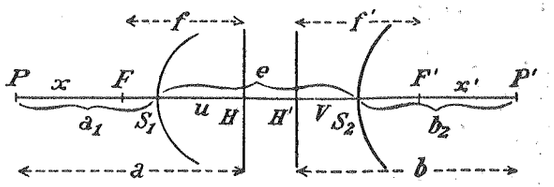


Fig. 250

$$x = a_1 - \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \qquad x' = b_2 - \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}$$

de donde:

$$a_1 = x + \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} \qquad b_2 = x' + \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e}. \tag{13}$$

Sustituyendo en la igualdad (10) estos valores de a_1 y b_2, resulta:

$$x' + \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e} = \frac{e f_1 f_2' + (f_1' f_2' - e f_2')\left(x + \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e}\right)}{f_1 f_2 - e f_1 - (f_1' + f_2 - e)\left(x + \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e}\right)}$$

y por medio de sencillas transformaciones, queda:

$$x x' (f'_1 + f_2 - e)^2 = f_1 f_2 f_1' f_2' \tag{14}$$

y poniendo

$$\frac{f_1 f_2}{f_1' + f_2 - e} = f \qquad \text{y} \qquad \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2 - e} = f' \tag{15}$$

se tiene:

$$x x' = f f'. \tag{16}$$

Consideremos ahora dos puntos auxiliares H y H' (fig. 250) que estén respectivamente de los focos F y F' a las distancias f y f'. La distancia del objeto P al punto H y la de la imagen P' al punto H', que designaremos con a y b, estarán dadas por las siguientes igualdades:

$$x = a - f \qquad \text{y} \qquad x' = b - f'$$

y sustituyendo estos valores de x y x' en (16), tenemos:

$$(a - f)(b - f') = f f',$$

de donde:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1. \tag{17}$$

Esta fórmula coincide con la (7), deducida para la refracción sobre una sola superficie esférica. Es decir, que si para un sistema de dos superficies refringentes se calcula la posición de los focos según las fórmulas (11) y (12), y con ayuda de la (15) se determina la

posición de los puntos H y H', basta aplicar la sencilla fórmula (17) para calcular la posición de la imagen correspondiente a un punto luminoso cualquiera.

A estos puntos H y H' se les llama *puntos principales* del sistema, y a los segmentos f y f', *distancias focales equivalentes* del mismo. Los planos normales al eje, en los puntos principales y en los focos, se llaman respectivamente planos principales y planos focales del sistema. De lo expuesto se deduce que un sistema con dos superficies refringentes queda perfectamente representado por los dos puntos principales y los dos focos.

Vamos a dar a continuación, a manera de resumen, las distancias de los puntos principales y de los focos a los polos de las superficies refringentes, así como las que hay entre los focos y los puntos principales y entre estos dos últimos, deducidas todas de las anteriores fórmulas (11), (12) y (15):

$$\left.\begin{aligned} F S_1 &= \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1' + f_2 - e} & S_2 F' &= \frac{f_1' f_2' - e f_2'}{f_1' + f_2 - e} \\ F H = f &= \frac{f_1 f_2}{f_1' + f_2 - e} & H' F' = f' &= \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2 - e} \\ S_1 H &= \frac{e f_1}{f_1' + f_2 - e} & H' S_2 &= \frac{e f_2'}{f_1' + f_2 - e} \\ H H' &= e - \frac{e f_1 + e f_2'}{f_1' + f_2 - e} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Construcción gráfica. La fórmula (17), que relaciona entre sí las distancias a del objeto y b de la imagen a los puntos principales, sirve también, como ya vimos en la figura 248, para puntos no axiales. De aquí deducimos una sencilla construcción gráfica de la imagen correspondiente a cada objeto. Por ejemplo, si el objeto es PP_1 (figura 251), se traza por P_1 un rayo paralelo al eje, como si procediera de un punto del eje situado a distancia infinita; según la fórmula (17), este rayo se refractará, yendo a pasar por el foco F'. Del mismo modo, el rayo P_1F, que pasa por el foco F, se refractará saliendo paralelo al eje; la intersección P_1' de los dos rayos será la imagen del punto P_1, y el punto P' será la imagen del punto P.

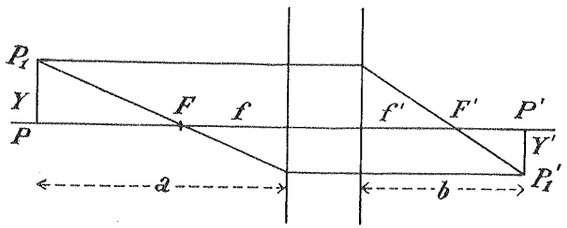


Fig. 251

En la figura 251 podemos también establecer la relación entre el tamaño Y' de la imagen y el Y del objeto, o sea, deducir el aumento lineal correspondiente, ya que evidentemente se tiene:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{a - f} = \frac{b - f'}{f'}. \qquad (19)$$

Los cálculos anteriores pueden también hacerse extensivos a más de dos superficies refringentes; el resultado es que para un número cualquiera de superficies refringentes siempre hay dos puntos principales y dos focos, que representan plenamente al sistema dióptrico de que se trate y que cumplen con la ecuación (17), como demostró por primera vez C. F. Gauss en el año 1840.

La teoría de los puntos principales y de los focos puede considerarse y tratarse como puramente geométrica, sin recurrir a la ley física de la refracción de la luz. Es decir, que si se parte del supuesto de que cualesquiera rectas que partan de un punto (objeto) determinarán otras rectas concurrentes en otro punto (imagen), se pueden siempre encontrar dos puntos principales y dos focos, mediante los cuales, y con ayuda de la fórmula (17), puede construirse la imagen de cualquier otro punto. En Geometría se llama *homología* a la relación de esta clase entre dos figuras, de las cuales una corresponde al objeto y otra a la imagen.

§ 59. Lentes

Entendemos por *lente* un cuerpo vítreo limitado por dos superficies esféricas: la recta que une entre sí los centros de estas últimas es el *eje óptico* y la distancia entre los dos polos de las mismas es el *espesor* de la lente. En la construcción de las lentes se emplean vidrios de distintas clases, especialmente el *crown* y el *flint*, que tienen distinto índice de refracción. Para el *crown* oscila el valor de n entre los 1,5 y 1,6, y para el *flint*, entre 1,6 y 1,8.

La teoría expuesta en el párrafo anterior es aplicable al caso particular de las lentes, en las cuales hay que tener en cuenta que por ambas caras están rodeadas de aire, cuyo índice de refracción n se supone igual a la unidad, por lo cual en las fórmulas anteriores hay que sustituir n por 1 y n' por n.

De las fórmulas (5) se deduce, para las dos caras de la lente:

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \frac{f_2}{f_2'} = n$$

de donde:

$$f_1 f_2 = f_1' f_2'$$

y según las fórmulas (15), al llevar a ellas estos valores iguales, resulta que las dos distancias focales equivalentes, para una lente rodeada de aire, son iguales entre sí, por lo cual llamaremos simplemente f a la distancia focal de la lente.

La fórmula general (17) se convierte, en el caso de las lentes, en esta otra:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

que es fundamental en la teoría de las lentes. En esta fórmula se toma a como positiva cuando el objeto está delante de la lente, y b se considera positiva cuando la imagen está detrás de la lente. En caso contrario cambia el signo de a o de b.

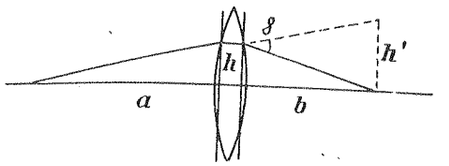


Fig. 252

Vamos a estudiar ahora la desviación de un rayo al atravesar la lente, es decir, el ángulo δ (figura 252) que forma el rayo incidente con el emergente, para lo cual llamaremos a y b a las distancias a que el rayo corta al eje óptico, antes y después de atravesar la lente, y tendremos (fig. 252):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{a + b}{a b} = \frac{1}{f}.$$

El paso del rayo a través de la lente se hace a una distancia h del eje óptico, teniéndose:

$$h' = h \frac{a + b}{a} = h \frac{b}{f}.$$

y si h es muy pequeña, el ángulo δ será:

$$\delta = \frac{h'}{b} \qquad \text{o bien} \qquad \delta = \frac{h}{f}. \tag{2}$$

También la construcción gráfica dada en la figura 251 es aplicable a las lentes. Sean H y H' los dos puntos principales (fig. 253), y F, F' los dos focos. Aplicando al punto-objeto P dicha construcción, se obtiene el punto-imagen P', teniéndose:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{a-f} = \frac{b-f}{f}. \tag{3}$$

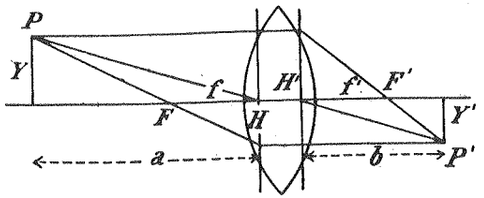


Fig. 253

Pero de la fórmula fundamental (1), se deduce:

$$\frac{1}{b} = \frac{a-f}{af} \qquad \text{y también} \qquad \frac{a-f}{f} = \frac{a}{b}$$

y sustituyendo en (3) tenemos:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

De aquí se deduce que PH y $H'P'$ (fig. 253) son paralelas entre sí, es decir, que los rayos que pasan por los puntos principales atraviesan la lente sin desviarse de su dirección de incidencia. A estos rayos se les llama *rayos principales*.

Según su curvatura, hay que distinguir dos formas o clases principales de lentes, que son las *convergentes* y las *divergentes*.

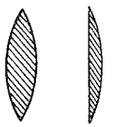


Fig. 254

Lentes convergentes o convexas. Se llama así a las lentes cuyas dos caras son convexas (lentes biconvexas), o una convexa y la otra plana (lentes planoconvexas), como se ve en la figura 254.

Respecto a las posiciones del objeto y la imagen, en una lente convergente pueden presentarse los siguientes casos:

1.	$a = \infty$	$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$	$b = f$	
2.	$\infty > a > 2f$	. . . . .	$b > f$	
3.	$a = 2f$	$\frac{1}{2f} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$	$b = 2f$	(5)
4.	$2f > a > f$	. . . . .	$b > a$	
5.	$a = f$	$\frac{1}{f} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$	$b = \infty$	
6.	$a < f$	. . . . .	b negativo	

Si el objeto y la imagen están a distinto lado de la lente, la imagen es real casos 1 al 5), y en caso contrario, la imagen es virtual (caso 6).

Lentes divergentes o cóncavas. Son las lentes que tienen sus dos caras cóncavas (bicóncavas), o una cóncava y la otra plana (planocóncavas), como se ve en la figura 255. En los instrumentos topográficos se emplean unidas siempre a lentes convergentes.

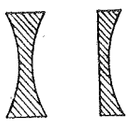


Fig. 255

Las posiciones relativas de objeto e imagen cumplen también con la ecuación fundamental (1), pero con la distancia focal negativa.

Cálculo de la distancia focal en función de los radios de curvatura. Vamos a ocuparnos sólo de las lentes convergentes, cuyos radios de curvatura r_1 y r_2 consideramos como positivos. Aplicando a la figura 256 las fórmulas (5) de la página 231, tendremos para la refracción en la primera superficie esférica (de la izquierda), sustituyendo n por 1 y n' por n:

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \qquad f_1' = \frac{n r_1}{n-1} \tag{6}$$

y análogamente, para la segunda refracción:

$$f_2 = \frac{r_2}{n-1} \qquad f_2' = \frac{n r_2}{n-1}. \tag{7}$$

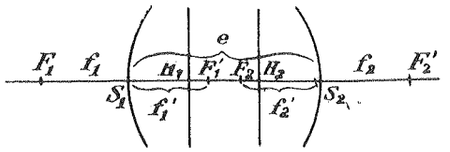


Fig. 256

De aquí puede deducirse el valor de las distancias focales, aplicando la fórmula (15) de la página 233, pero hay que tener en cuenta que en la figura 256 las distancias focales f_2 y f_2' están cambiadas, por lo cual en la citada fórmula (15) hay que sustituir f_2 por f_2' y f_2' por f_2, teniéndose:

$$f = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{n r_1}{n-1} + \frac{n r_2}{n-1} - e}$$

o sea

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)\left(r_1 + r_2 - \frac{n-1}{n} e\right)}. \tag{8}$$

También podemos calcular las distancias respectivas de los puntos principales H_1 y H_2 a los polos S_1 y S_2, aplicando las correspondientes fórmulas (18) de la página 234, con sólo sustituir f_2 por f_2', y al contrario:

$$S_1 H_1 = \frac{e r_1}{n-1} \cdot \frac{1}{\frac{n r_1}{n-1} + \frac{n r_2}{n-1} - e}$$

o bien

$$S_1 H_1 = \frac{e r_1}{n r_1 + n r_2 - (n-1) e}. \tag{9}$$

Y análogamente:

$$H_2 S_2 = \frac{e r_2}{n r_1 + n r_2 - (n-1) e}. \tag{10}$$

La distancia entre ambos puntos principales será:

$$H_1 H_2 = e - S_1 H_1 - H_2 S_2$$

es decir:

$$H_1 H_2 = e\left(1 - \frac{r_1 + r_2}{n r_1 + n r_2 - (n-1) e}\right). \tag{11}$$

De aquí podemos deducir un valor aproximado y más sencillo para la distancia entre los puntos principales, despreciando en el denominador de la anterior expresión el término muy pequeño $(n-1)\,e$, con lo cual queda:

$$H_1 H_2 = e\left(1 - \frac{r_1 + r_2}{n r_1 + n r_2}\right) + \ldots,$$

y por consiguiente,

$$H_1 H_2 = e\,\frac{n-1}{n} + \ldots \tag{12}$$

Siendo n, en números redondos, igual a 1,5, podemos decir que la distancia que hay entre los dos puntos principales es aproximadamente igual a un tercio del espesor de la lente.

Aplicación a las lentes divergentes. Las anteriores fórmulas, de (8) a (12), son aplicables a las lentes cóncavas, sin más modificación que tomar como negativos los dos radios r_1 y r_2, con lo cual la distancia focal resulta también negativa.

Si uno de los radios, por ejemplo el r_1, es infinitamente grande, se dividen en las fórmulas (8) a (11) numerador y denominador por r_1 y se hace después $r_1 = \infty$.

Combinación de dos lentes. Como veremos más adelante, se emplean de ordinario dos lentes combinadas, en vez de una sola. Para estudiar el funcionamiento de un sistema de dos lentes, representaremos éstas, como ya se dijo anteriormente, sólo por sus puntos principales y sus focos, dando sus distancias focales f_1 y f_2. Sean, en la figura 257, H_1 y H_1' los puntos principales de la primera lente, y H_2 H_2', los de la segunda: la distancia entre los dos puntos principales interiores H_1' H_2 es igual a e.

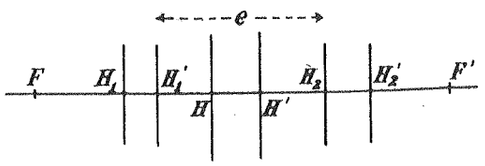


Fig. 257

Las fórmulas halladas para el caso de dos superficies refringentes pueden aplicarse a este sistema, pero teniendo en cuenta que todas las distancias deben referirse a los puntos principales. Lo mismo que se hizo al tratar de las dos superficies refringentes, se determinan ahora, para las dos lentes, dos puntos principales HH', dos focos FF' y una distancia focal equivalente f. La tercera de las fórmulas (18) de la página 234, nos da en primer término:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}, \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}. \tag{13}$$

La posición de los focos queda determinada por las fórmulas primera y segunda (18):

$$F H_1 = \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1 + f_2 - e} \qquad H_2' F' = \frac{f_1 f_2 - e f_2}{f_1 + f_2 - e}. \tag{14}$$

Conocidos los focos y la distancia focal equivalente, se conoce también la posición de los dos puntos principales del sistema.

Este método puede hacerse extensivo al caso de un sistema de tres lentes, pero nos limitaremos a dar la fórmula para el cálculo de la distancia focal equivalente para tres lentes, conociendo las distancias e_1 y e_2, que es como sigue:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{e_1}{f_1}\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right) - \frac{e_2}{f_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{e_1 e_2}{f_1 f_2 f_3} \tag{15}$$

Lentes infinitamente delgadas. En muchos casos, y para muchas aplicaciones, puede despreciarse el espesor de las lentes, es decir, que éstas pueden considerarse como infinitamente delgadas. De este modo se tiene que los dos puntos principales coinciden en uno solo, y las fórmulas correspondientes a la combinación de varias lentes son de la mayor sencillez.

Supongamos, por ejemplo, un sistema de tres lentes de distancias focales f_1, f_2, f_3, y distancias e_1, e_2, e imaginemos un haz de rayos paralelos al eje óptico que incida sobre la primera lente, es decir que la distancia del objeto es $a_1 = \infty$, y según la fórmula fundamental (1) de la página 235, $b_1 = f_1$.

Para la segunda lente se tiene:

$$a_2 = e_1 - b_1 \quad \text{y} \quad b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2}$$

y para la tercera:

$$a_3 = e_2 - b_2 \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{a_3 f_3}{a_3 - f_3}.$$

Esta distancia b_3 nos da la posición del foco de la derecha del sistema total. El foco de la izquierda se hallaría del mismo modo, haciendo llegar a la primera lente de la derecha un haz de rayos paralelos al eje óptico del sistema.

Para determinar la distancia focal equivalente, consideremos la figura 258, correspondiente al primer cálculo anterior: en ella se ve que la distancia al eje de los puntos por donde un rayo procedente de la izquierda atraviesa las tres lentes son y_1, y_2, y_3, verificándose que:

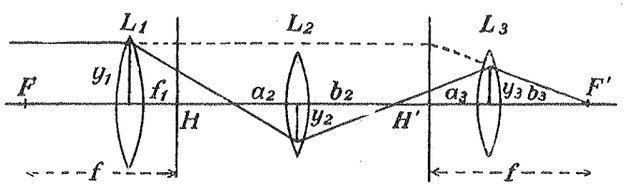


Fig. 258

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2}{f_1} \qquad \frac{y_3}{y_2} = \frac{a_3}{b_2} \qquad \frac{y_1}{y_3} = \frac{f}{b_3}$$

de donde:

$$f = \frac{f_1 b_2 b_3}{a_2 a_3}. \tag{16}$$

También aquí es aplicable la observación hecha a la fórmula fundamental (1) en la página 235, para dar a a y b los signos que respectivamente les correspondan. La fórmula (16) es válida para un sistema de un número cualquiera de lentes de cualquier forma. Si la distancia focal f resulta positiva, los dos puntos principales se hallan comprendidos entre los focos, y si aquélla es negativa, ambos caen por fuera de los focos.

§ 60. Aberraciones de las lentes

Aberración esférica. En todo lo expuesto hasta aquí hemos supuesto que los rayos luminosos cumplen con las condiciones al principio impuestas, a saber, que forman ángulos muy pequeños con el eje óptico y con el radio de la superficie de las lentes, lo cual equivale a decir que los rayos luminosos inciden sobre la lente en puntos muy próximos al eje, o sea que la abertura o región utilizable de la lente es muy pequeña comparada con la distancia focal. En la práctica no puede cumplirse esta condición, pues empleando sólo rayos axiales, únicamente pueden obtenerse imágenes de objetos infinitamente pequeños, y aun éstas con muy poca intensidad luminosa.

Si suponemos ahora que de un punto cualquiera llega a la lente un haz de rayos luminosos que forme un ángulo grande con el eje óptico, y que aquélla tiene una gran abertura, se producen desviaciones de los rayos que quitan nitidez a la imagen; a este fenómeno se llama *aberración de esfericidad* y su efecto consiste en que a un punto luminoso como objeto no corresponde un solo punto como imagen, sino muchos, muy próximos entre sí, en parte superpuestos, dando lugar a una imagen confusa. Este efecto es tanto más notable cuanto más se apartan las lentes de las condiciones al principio señaladas.

Este defecto de las lentes no se aprecia mucho, en la práctica, gracias a la imperfección de nuestra agudeza visual, ya que el ojo humano no puede descubrir la confusión o falta de nitidez de las imágenes mientras no se pase de ciertos límites. De aquí resulta que

puede haber cierta tolerancia en las condiciones indicadas para la incidencia de los rayos y para la abertura de las lentes.

La aberración de esfericidad depende, no sólo de la forma de la lente, sino de su espesor, y puesto que una lente, para una determinada distancia focal, admite infinidad de combinaciones de los radios de sus caras, se pueden elegir éstos cuidadosamente para que los límites de nitidez resulten bastante amplios. Mejor aún se consigue la ampliación de estos límites con un sistema de dos lentes, pues para tener una determinada distancia focal equivalente se pueden variar los cuatro radios y la distancia entre las lentes. Además, es mejor también un sistema de dos lentes que una sola, pues la refracción queda repartida entre ambas y no es preciso que sea tan pronunciada la refracción en cada una de ellas. Valiéndose de estos medios pueden reducirse considerablemente la aberración de esferidad y sus efectos en las imágenes obtenidas con lentes (*).

Aberración cromática. Hasta ahora hemos supuesto que un rayo de luz, al refractarse, daba lugar a un solo rayo, es decir, que la desviación era única: pero no es así, pues la luz solar está compuesta de una serie de colores, es decir, que cada rayo se compone en realidad de varios rayos de distintos colores y diversa refrangibilidad. Por consiguiente, al atravesar un rayo de luz blanca una lente, los diferentes rayos de colores que lo forman se refractan desigualmente, y cada uno da una imagen del punto-objeto, que por estar muy próximas entre sí, son apreciadas por el ojó como una sola irisada, es decir, con bordes coloreados y difusos.

Los índices de refracción de los distintos colores de la luz solar se determinan para las rayas de Fraunhofer: la raya C corresponde al rojo, la D al amarillo y la F al azul. Además, los índices de refracción dependen de la clase de vidrio, siendo los empleados en los instrumentos ópticos el *crown* (vidrio corriente) y el *flint* (pesado). El índice de refracción correspondiente a la raya D se representa por n_D y se toma como índice medio de refracción, y la diferencia $n_F - n_C = \Delta n$ se llama *dispersión* media de la clase de vidrio de que se trate.

Según Czapski-Eppenstein, los valores de n_D y de Δn son los siguientes:

	Crown	*Flint*
n_D	1,518	1,620
$n_F - n_C$	0,0086	0,0171

Vamos a estudiar el efecto de la dispersión de la luz en los rayos centrales. Para un cálculo aproximado de la aberración cromática podemos despreciar el espesor de la lente, según lo cual la fórmula (8) de la página 237 nos da:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \tag{1}$$

donde n se refiere a un solo color. Para otro color cualquiera se pondrá $n + dn$ en vez de n en la fórmula anterior, obteniéndose la variación df para la distancia focal del modo siguiente:

$$-\frac{1}{f^2}df = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}dn = \frac{1}{f}\frac{dn}{n-1}$$

de donde:

$$df = -f\frac{dn}{n-1}. \tag{2}$$

(*) Una lente desprovista de aberración de esfericidad se dice que es *aplanética*. — N. del T.

Por ejemplo, si se tiene una lente que para el índice medio de refracción tenga una distancia focal $f = 300$ mm, y $dn = \mp 0{,}01$, la fórmula (2) nos dará en números redondos:

$$df = \pm 6 \text{ mm},$$

lo cual significa que para los rayos rojos y azules la distancia focal difiere 6 mm de la distancia focal media.

Avancemos algo más y supongamos que se combinan dos lentes de espesor despreciable, de distancias focales f_1 y f_2, a una distancia entre sí igual a e, con una distancia focal equivalente f. Según la fórmula (13) de la página 238, se tiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}. \tag{3}$$

Si f_1 y f_2 son las distancias focales correspondientes a los rayos rojos, las variaciones de las mismas para los rayos violetas serán df_1 y df_2 y, por consiguiente, para estos últimos rayos, la distancia focal equivalente f experimenta también una variación df, y según la fórmula (3) se tendrá:

$$-\frac{1}{f^2}df = \left(-\frac{1}{f_1^2} + \frac{e}{f_1^2 f_2}\right)df_1 + \left(-\frac{1}{f_2^2} + \frac{e}{f_1 f_2^2}\right)df_2,$$

o sea

$$\frac{1}{f^2}df = \frac{1}{f_1}\left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2}\right)df_1 + \frac{1}{f_2}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}\right)df_2.$$

Designemos con n_1 y n_2 respectivamente los índices de refracción de ambas lentes para los rayos rojos, y con Δn_1 y Δn_2 las diferencias entre dichos índices para los rayos violetas y los rojos, de modo que, según la fórmula (2), tendremos:

$$\frac{1}{f^2}df = -\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2}\right) - \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}\right). \tag{4}$$

Para que este sistema de lentes tenga la misma distancia focal equivalente, tanto para los rayos rojos como para los violetas, es decir, para que $df = 0$, es preciso que el segundo miembro de esta última igualdad se anule, o sea:

$$\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2}\right) + \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}\right) = 0. \tag{5}$$

Ésta es la condición de acromatismo para un sistema dióptrico compuesto de dos lentes.

Puede considerarse un caso especial, a saber, cuando las dos lentes sean de la misma clase de vidrio, es decir, cuando $n_1 = n_2 = n$, y $\Delta n_1 = \Delta n_2 = \Delta n$, en cuyo caso, según la fórmula (5), se tiene:

$$\frac{\Delta n}{n-1}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{2e}{f_1 f_2}\right) = 0, \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{2e}{f_1 f_2} = 0,$$

de donde se deduce que

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2}. \tag{6}$$

§ 61. Diafragmas

Los medios que hemos indicado para atenuar los efectos de las aberraciones esférica y cromática, dan lugar a una mejora considerable de las imágenes, pero no son suficientes para los casos de haces de rayos de gran abertura o muy inclinados respecto al eje del sis-

tema, por lo cual es preciso emplear *diafragmas* que limiten la abertura o amplitud de los haces luminosos y permitan obtener imágenes bien nítidas. La pupila en el ojo desempeña el mismo papel que un diafragma en un instrumento óptico.

En la figura 259 se ve una lente L con un diafragma BB antepuesto; de todos los rayos que parten de un punto cualquiera P, únicamente se utilizan para formar su imagen P' los que pasan por el diafragma BB, que reduce de este modo el cono luminoso procedente de P. Para determinar la limitación de los rayos luminosos concurrentes en P', se construye la imagen virtual AA del diafragma BB, y el cono luminoso de vértice P' queda limitado por la imagen AA del diafragma.

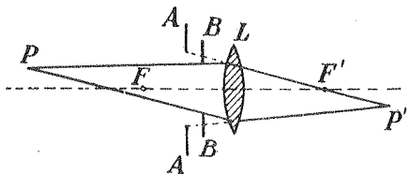


Fig. 259

Si el diafragma BB estuviera detrás de la lente, limitaría el cono luminoso procedente de la imagen, mientras que su imagen virtual AA limitaría el cono luminoso procedente del objeto.

Según la notación de Abbe, se llama *pupila de incidencia* o *de entrada* al diafragma o imagen que limita el cono luminoso procedente del objeto, y *pupila de emergencia* o *de salida* (anillo ocular, según Biot), a la imagen del diafragma, o al diafragma mismo que limita el cono de la imagen. Es decir, que en la figura 259 el diafragma BB es la *pupila de entrada*, y la imagen AA, la de salida. El diafragma se llama, en general, *diafragma de abertura*.

Supongamos ahora dos lentes L_1 L_2 (fig. 260), entre las cuales, en un punto cualquiera, se coloca un diafragma B, y sean F_1 F_1' y F_2 F_2' respectivamente los focos de estas lentes. Los rayos procedentes del punto objeto P concurren, después de atravesar las lentes, en el punto-imagen P', siendo eficaces únicamente los que pasan por el diafragma B. Para determinar la limitación de los conos procedentes del objeto y de la imagen, se construyen las imágenes E y A del diafragma B dadas por las dos lentes L_1 y L_2; el cono luminoso del objeto P queda limitado por la imagen E, y el de la imagen P' por la imagen A, es decir, que E y A son las pupilas en entrada y salida del sistema dióptrico formado por las dos lentes.

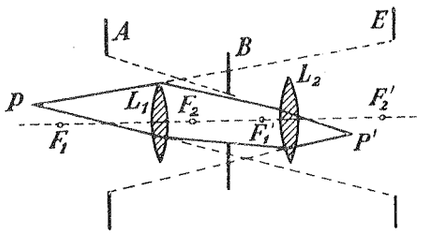


Fig. 260

Si se tienen varios diafragmas, la *pupila de entrada* será el diafragma o su imagen que se vea desde P bajo el menor ángulo, y la *pupila de salida* la formará el diafragma o su imagen que se vea desde P' bajo el ángulo más pequeño.

Evidentemente, las armaduras mismas de las lentes pueden servir de diafragmas, y constituir la pupila de entrada o de salida.

Aun es necesaria otra limitación de rayos para eliminar los que formen ángulos muy grandes con el eje del sistema dióptrico. Los diafragmas destinados a este uso limitan, por consiguiente, el campo visual, por lo cual se llaman *diafragmas de campo*. Estos diafragmas se emplean en los instrumentos en que mediante un sistema de lentes se proyecta una imagen real del objeto. Si se dispone el diafragma de campo en el sitio en que se forma la imagen, se obtiene al mismo tiempo una gran nitidez en esta última.

Volviendo a la figura 259, supongamos que a la derecha de la lente se dispone un diafragma de campo, como se ve en P_1' P_2' en la figura 261; sean B y A respectivamente el diafragma de abertura y su imagen (pupila de salida). Los puntos P_1 y P_2 son los puntos extremos del objeto, cuyos rayos principales aun pasan por el diafragma de campo, y que tienen sus imágenes en P_1' y P_2'. Al ángulo 2ω bajo el cual se ven los puntos P_1 y P_2 desde el centro de la pupila de entrada, es decir, en la figura 261, desde el centro del diafragma de abertura B, se llama *ángulo visual*.

Como la posición del plano de la imagen P_1' P_2' está dada por la distancia del objeto a la lente, se deben regular y variar la colocación del diafragma de campo para que siempre

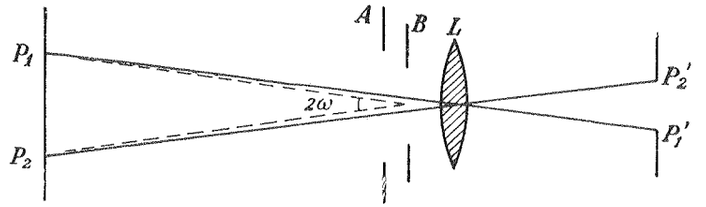


Fig. 261

coincida con el plano de la imagen. Se ve, con la sola inspección de la figura 261, que el ángulo visual 2ω depende de la distancia a que está el plano-objeto de la lente.

En los párrafos 64 y 65 volveremos a ocuparnos de las lentes.

§ 62. Refracción de la luz a través de los prismas

En la figura 262 se ve una sección recta de un prisma óptico, es decir, el corte producido por un plano perpendicular a las aristas del mismo. Un rayo contenido en este plano que llegue a la primera cara del prisma con un ángulo de incidencia α_1 se refracta en esta cara y nuevamente en la segunda, saliendo del prisma con un ángulo de emergencia α_2; según la figura, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha_1 &= n\operatorname{sen}\beta_1\\ \operatorname{sen}\alpha_2 &= n\operatorname{sen}\beta_2\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y el ángulo de desviación δ será:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \qquad (2)$$

y como

$$\beta_1 + \beta_2 = \gamma \qquad (3)$$

resulta:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma. \qquad (4)$$

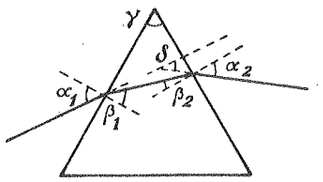


Fig. 262

Conociendo α_1, se deduce β_1 de la primera ecuación (1); y sustituído su valor en (3), se tiene el de β_2, con lo cual ya puede calcularse α_2 por la segunda ecuación (1), y finalmente, por sustitución en (4) se halla el valor de δ.

Si el ángulo de refringencia γ es muy pequeño y el rayo incide casi perpendicularmente sobre la primera cara del prisma, se pueden escribir las anteriores fórmulas (1) y (4) del siguiente modo:

$$\alpha_1 = n\,\beta_1 \qquad \alpha_2 = n\,\beta_2$$
$$\delta = n\,(\beta_1 + \beta_2) - \gamma$$

y según la fórmula (3), esta última se convierte en la siguiente:

$$\delta = (n-1)\,\gamma. \qquad (5)$$

En este caso se tiene que el ángulo de desviación δ es proporcional al ángulo refringente γ del prisma, e independiente del ángulo de incidencia α_1.

Desviación mínima. Para determinar el ángulo de incidencia α_1 a que corresponde la mínima desviación δ del rayo luminoso, hay que hallar el cociente diferencial $\frac{d\delta}{d\alpha_1}$, o sea la derivada de δ respecto a α_1: para ello diferenciaremos las ecuaciones (4), (1) y (3), y tendremos:

$$d\delta = d\alpha_1 + d\alpha_2$$
$$\cos\alpha_2\, d\alpha_2 = n\cos\beta_2\, d\beta_2$$
$$\cos\alpha_1\, d\alpha_1 = n\cos\beta_1\, d\beta_1$$
$$d\beta_2 = -d\beta_1$$

de donde:

$$d\delta = \left(1 - \frac{\cos\beta_2\cos\alpha_1}{\cos\beta_1\cos\alpha_2}\right) d\alpha_1.$$

Es decir, que el cociente $\frac{d\delta}{d\alpha_1}$ será cero, cuando se tenga:

$$\frac{\cos\beta_2\cos\alpha_1}{\cos\beta_1\cos\alpha_2} = 1.$$

Esta condición se cumple para $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$, es decir, cuando el rayo incidente y el emergente son simétricos respecto a la bisectriz del ángulo γ.

Llamemos, en este caso, δ_0 al ángulo de desviación mínima, y sustituyamos α_1 y α_2 por α, y β_1 y β_2 por β; según las fórmulas (4) y (3) se tendrá:

$$\alpha = \frac{\delta_0 + \gamma}{2} \qquad \beta = \frac{\gamma}{2}$$

y según las ecuaciones (1),

$$\operatorname{sen}\frac{\delta_0 + \gamma}{2} = n\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}, \tag{6}$$

de donde puede calcularse δ_0 sin dificultad alguna.

Prisma acromático. Como ya dijimos al tratar de la aberración cromática de las lentes, un rayo luminoso está compuesto de rayos de distintos colores, cada uno de los cuales tiene un índice de refracción diferente, y al atravesar un prisma le sucederá como al atravesar una lente, que se descompondrá en sus rayos monocromáticos, los cuales experimentarán desviaciones δ dependientes de sus índices de refracción particulares.

Si, análogamente a lo dicho para las lentes (pág. 240), designamos con Δn la dispersión media producida por un prisma, tendremos que, según la anterior fórmula (5), la divergencia entre los rayos rojo y azul, después de atravesar el prisma (suponiendo que éste tiene un pequeño ángulo refringente γ y que el ángulo de incidencia es también muy pequeño), será:

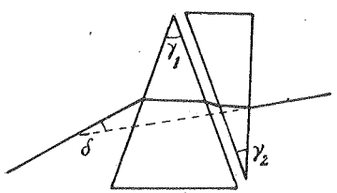


Fig. 263

$$\Delta\delta = \gamma\,\Delta n. \tag{7}$$

Esta dispersión de los rayos constituye un inconveniente considerable en el empleo de los prismas en los instrumentos ópticos, por producir imágenes de bordes irisados, como sucede en las lentes. Esta dificultad puede salvarse combinando dos prismas de distinta clase de vidrio y con sus ángulos refringentes invertidos, es decir, colocados

como se ve en la figura 263; de este modo el rayo experimenta una desviación total δ, al atravesar los dos prismas de pequeño ángulo refringente γ_1 y γ_2, que según la fórmula (5) vendrá expresada del modo siguiente:

$$\delta = (n_1 - 1)\gamma_1 - (n_2 - 1)\gamma_2 \tag{8}$$

y la dispersión entre los rayos rojo y azul, según la fórmula (7), será:

$$\Delta\delta = \gamma_1\Delta n_1 - \gamma_2\Delta n_2. \tag{9}$$

Es decir, que la dispersión se anulará o desaparecerá seleccionando las clases de vidrio y los ángulos refringentes de ambos prismas de tal modo que se tenga:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}. \tag{10}$$

Una combinación de prismas que cumpla con esta condición se dice que es un *prisma acromático*.

Para construir un prisma acromático con cierta desviación δ, empleando vidrios de determinada clase, se despejan los respectivos ángulos refringentes γ_1 y γ_2 de las ecuaciones (8) y (10), resultando los siguientes valores:

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{\Delta n_1}\cdot\frac{1}{\frac{n_1-1}{\Delta n_1} - \frac{n_2-1}{\Delta n_2}} \qquad \gamma_2 = \frac{\delta}{\Delta n_2}\cdot\frac{1}{\frac{n_1-1}{\Delta n_1} - \frac{n_2-1}{\Delta n_2}}. \tag{11}$$

Como ejemplo, supongamos que hemos de calcular un prisma acromático que para pequeños ángulos de incidencia produzca una desviación $\delta = 34'\ 22{,}65''$, o sea $\delta = \frac{\rho}{100}$ y que sus dos prismas parciales hayan de ser uno de *crown* y otro de *flint*.

Según los datos numéricos consignados en la página 240, tenemos:

$$n_1 = 1{,}518 \qquad \Delta n_1 = 0{,}0086$$
$$n_2 = 1{,}620 \qquad \Delta n_2 = 0{,}0171$$

de donde:

$$\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} = 60{,}23 \qquad \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2} = 36{,}26$$
$$\frac{n_1 - 1}{\Delta n_1} - \frac{n_2 - 1}{\Delta n_2} = 23{,}97.$$

Y sustituyendo estos valores en (11) resulta:

$$\gamma_1 = 2^\circ\ 46'\ 45{,}9\text{t}''$$
$$\gamma_2 = 1^\circ\ 23'\ 52{,}24''.$$

Donde se ve que el prisma de *crown* ha de tener un ángulo de refringencia aproximadamente doble del de *flint*.

§ 63. El órgano de la visión en el hombre

El globo ocular que, alojado en su órbita, puede moverse dentro de ciertos límites en todas direcciones, está recubierto casi en su totalidad por la membrana *esclerótica S* (figura 264); en su parte delantera está sustituída esta membrana por otra de menor radio de curvatura, más fuerte y transparente, *H*, que es la *córnea*. La esclerótica está recubierta interiormente con una membrana muy fina, la *coroides*, y por detrás de la córnea se

encuentra otra membrana, el *iris, JJ,* con un orificio en el centro, que es la *pupila.* El diámetro de la pupila varía según la cantidad de luz que llega al ojo, y oscila entre 1 y 5 mm. Detrás del *iris* está el *cristalino* o *lente cristatina, L,* que divide el ojo en dos partes o cámaras. La pared interna de la cámara posterior, que es la mayor de las dos, está cubierta con la *retina,* que realmente es una expansión del *nervio óptico, N.* Esta cámara posterior, *G,* está llena de una sustancia gelatinosa llamada *humor vítreo,* y la cámara anterior, *K,* que es la más pequeña, está llena del *humor acuoso.*

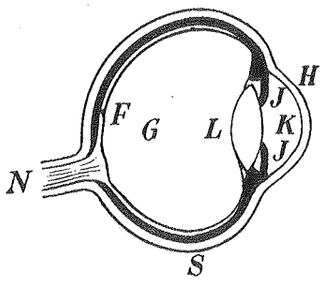


Fig. 264. — El ojo

El ojo es un sistema dióptrico en el cual los rayos luminosos se refractan, no sólo en la córnea y el cristalino, sino también a través de los humores acuoso y vítreo. La posición de los puntos principales y de los focos del sistema total está determinada por los siguientes datos numéricos:

Distancia focal anterior	f	= 17,0 mm
» » posterior	f'	= 22,8 mm
» entre los puntos principales	e	= 0,3 mm.

El punto principal anterior está aproximadamente a 1,5 mm por detrás de la córnea.

El mecanismo de la visión es bien sencillo: los rayos procedentes de un punto luminoso, que por la pupila penetran en el ojo, concurren, después de refractados, en un punto (imagen) de la retina, y la excitación que así se produce en el nervio óptico constituye la causa inmediata de la *visión.* La retina no es igualmente sensible en todos sus puntos; en la entrada o inserción del nervio óptico en la retina, es completamente insensible *(punto ciego);* en cambio presenta su máxima sensibilidad en la llamada *mancha* o *mácula amarilla,* y especialmente en la depresión *F* que hay en el centro de la misma *(fovea centralis).* Al mirar un punto se coloca el ojo de modo que la imagen de aquél caiga en la *fovea centralis.* Los alrededores del punto mirado forman su imagen alrededor de la *fovea centralis,* con intensidad rápidamente decreciente, por lo cual para ver bien (examinar u observar) un objeto se mueve el ojo con rapidez para que sucesivamente vayan formándose las imágenes de todos sus puntos en la *fovea centralis.*

Acomodación del ojo. Estando el ojo en reposo, la imagen de un punto situado a distancia infinita se forma a unos 24,4 mm por detrás de la córnea, sobre la retina. Al mirar y ver claramente objetos más cercanos entra en juego la *acomodación* del ojo, es decir, la facultad que éste tiene de variar la curvatura del cristalino por la acción de los llamados *procesos ciliares,* para que la imagen de los objetos se forme siempre sobre la retina. La acomodación tiene cierto límite, llamándose *punto próximo* al punto a partir del cual, si el objeto se acerca más aún al ojo, ya su imagen no puede formarse en la retina; este *punto próximo,* en la edad juvenil, está a unos 10 cm por delante del ojo, y en la edad madura está a unos 25 cm.

Se llama *distancia de la visión distinta* a la distancia a que empieza a verse sin cansancio y con toda claridad un objeto, como, por ejemplo, las letras de un libro; para un ojo normal esta distancia es de unos 25 cm.

Si se coloca un objeto a menor distancia que el punto próximo, no se ve ya con claridad, pues los rayos procedentes de aquél concurren en un punto-imagen situado por

detrás de la retina, y el cono luminoso correspondiente, en vez de tener su vértice en la retina, queda cortado por ésta según un pequeño círculo, resultando una imagen borrosa del objeto mirado.

En este caso puede también obtenerse una imagen clara, mirando al objeto a través de un pequeño orificio, pues de este modo el cono luminoso penetra en el ojo tan contraído que corta a la retina en un solo punto. Esta propiedad se aprovecha en las alidadas con hilos, en las cuales se ven al mismo tiempo un hilo colocado sólo a 10 ó 20 cm de distancia del ojo y un objeto situado a varios centenares de metros; para ello se dispone en el extremo ocular de la alidada un pequeño orificio o una rendija *(pínula),* con lo cual se ven igualmente claros el objeto y el hilo.

Todo lo dicho hasta ahora se refiere al ojo *normal* o *emétrope;* en un ojo *miope* o *braquimétrope,* la distancia entre la retina y la córnea es mayor que en el ojo normal, y, por consiguiente, cuando los músculos de la acomodación (procesos ciliares) están en reposo, la imagen de un punto situado en el infinito no se forma sobre la retina, sino por delante de la misma, y el ojo no ve con claridad un punto muy distante. En cambio, en un ojo *hipermétrope* la retina se encuentra más cerca de la córnea que en uno normal; por lo tanto, en este caso los rayos luminosos procedentes de un punto del infinito que pasan por el cristalino concurren en un punto situado por detrás de la retina, y no se ve clara su imagen.

En estos dos casos, en vez de un punto del infinito se tiene otro punto al cual corresponde su imagen en la retina, supuesto el ojo en reposo, es decir, sin esfuerzo de acomodación. Para un ojo miope o braquimétrope, dicho punto se encuentra a una distancia finita del mismo, y para uno hipermétrope, este punto debería estar por detrás del ojo. En ambos casos a dicho punto se le llama *punto remoto* del ojo.

Agudeza visual. Se llama así a la precisión con que a simple vista puede apreciarse la distancia angular entre dos puntos próximos entre sí. Esta precisión puede determinarse experimentalmente; ya en la página 32 vimos que el error medio de puntería es igual a 1′ ó 2′, determinado por ensayos repetidos.

Como primer experimento sobre agudeza visual hemos hecho con nuestros alumnos el siguiente: sobre una escala trazamos una señal con un lápiz, y con una alidada hicieron muchas y repetidas lecturas, a unos 10 m de distancia, un gran número de observadores, obteniendo de este modo un error medio de 1′ a 2′; hecho el experimento con gente no acostumbrada a esta clase de observaciones, resultó también el mismo error medio.

Este valor de la agudeza visual no es el máximo; un observador con buena vista, en buenas condiciones de iluminación, colocación, etc., puede aumentar la agudeza visual hasta unas diez veces el valor antes indicado.

Ya Stampfer escribía, en 1845, lo siguiente: «El error de una visual dirigida a simple vista (con una alidada), que hasta aquí ha sido establecido, por distintos autores, en 40″ a 60″, puede reducirse en circunstancias favorables y con una buena alidada a 10″, y para una gran agudeza visual, aun puede hacerse menor.»

Fisiología del ojo humano. Todas las propiedades del ojo aparecen perfectamente explicadas estudiando su constitución y funcionamiento, es decir, su fisiología propia.

La figura 265 representa esquemáticamente el ojo humano; *K* es un punto situado en el eje del cristalino, que puede considerarse como centro del ojo (por confusión o coincidencia de los dos puntos principales) para la formación de imágenes en la retina.

Si a una distancia de 206 mm por delante del ojo se supone colocado un segmento rec-

tilíneo de longitud $1\,\mu = 0{,}001$ mm, los rayos luminosos que procedentes del mismo penetran en el ojo forman una imagen a 15 mm por detrás del punto K, cuya longitud será:

$$1\,\mu \times \frac{15}{206} = 0{,}073\,\mu. \qquad (1)$$

El ángulo visual o diámetro aparente del segmento considerado es, en este caso:

$$\frac{1\,\mu}{206\text{ mm}}\rho'' = \frac{0{,}001\text{ mm}}{206\text{ mm}}\,206\,265'' = 1''. \qquad (2)$$

Inmediatamente se ocurre preguntar cuál debe ser la dimensión mínima de una imagen en la retina para que pueda percibirse con toda claridad. De experimentos hechos con este objeto resulta que el límite inferior de la agudeza visual es de 0,09 μ, al cual corresponde un ángulo visual de 1''.

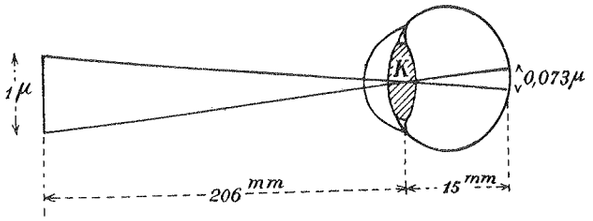


Fig. 265. — Representación esquemática de la visión

Así llegamos a definir el *poder separador* del ojo. En la página 247 hemos visto que el error en las visuales dirigidas por una alidada varía de 1' a 2', es decir, que podemos hacer coincidir el hilo de una alidada, con un error de 1' a 2', con un punto de mira cualquiera; si el ángulo visual entre el hilo y el punto de mira es menor de 1' a 2', aparecen a nuestra vista como coincidentes uno con otro. Si se tienen dos puntos claros (o dos rayas) sobre fondo oscuro (o dos puntos oscuros o rayas sobre fondo claro), únicamente se ven separados cuando el ángulo visual bajo el cual se ve la distancia que los separa, es por lo menos de 60'' (para la mayoría de las personas es de 40''), y en este caso la distancia entre las dos imágenes sobre la retina es de $60 \times 0{,}073\,\mu = 4{,}4\,\mu$. Este resultado sería de 3,0 μ para 40''.

Estas cifras referentes a la agudeza visual tienen su explicación también en la estructura misma del ojo. La retina está compuesta de gran número de células sensibles a la luz, las cuales constituyen a la vez la terminación del nervio óptico. Estas células forman dos grupos, llamándose respectivamente *bastoncitos* y *conos* las pertenecientes a uno u otro grupo. Los *conos* intervienen en la visión de objetos iluminados normalmente, mientras que los *bastoncitos* actúan cuando la iluminación es más débil. Al emplear anteojos en los instrumentos de medida, quedan sin acción estas últimas células.

La distancia de *conos* y *bastoncitos* no es uniforme en toda la retina; cerca de la *mácula amarilla* empiezan a escasear los bastoncitos y, en cambio, los conos van siendo más numerosos cuanto más cerca están de la *fovea centralis*, donde únicamente se encuentran conos, a lo cual se debe la gran sensibilidad de este punto.

Según ha demostrado L. Heine, los conos se encuentran dispuestos en la retina por polígonos, y su diámetro medio es de 4,5 μ.

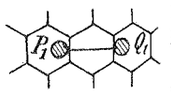


Fig. 266
Poder separador

La concordancia entre el valor del diámetro medio de los conos y el de la mínima distancia entre dos imágenes en la retina, antes hallada, nos da la explicación directa del límite del poder de separación del ojo. Dos objetos iguales muy próximos se ven separados solamente cuando entre los dos conos sobre los cuales se forman sus imágenes, hay otro cono sin imagen alguna, como se ve en la figura 266, donde P_1 y Q_1 son las imágenes correspondientes a dos objetos P y Q. Si las

imágenes se forman sobre un mismo cono o sobre dos conos inmediatos, se ven los objetos como si fueran uno solo, es decir, confundidos. Otro aspecto muy importante de esta cuestión lo tenemos en la facultad que tiene el ojo de apreciar una distancia lateral muy pequeña entre dos objetos próximos. La precisión con que podemos saber si las dos paralelas de la figura 267 están o no sobre una misma recta, está dada por el poder separador antes considerado; el autor de este libro ha encontrado que puede apreciarse la distancia entre las dos paralelas cuando el ángulo visual correspondiente es de 3''. En esta propiedad estriba la gran precisión de las lecturas hechas con los nonios.


Fig. 267
Separación lateral

Muy oportuno creemos citar aquí el experimento de Förster a que hace referencia la figura 268, referente a la precisión con que puedea preciarse la igualdad de las distancias b b entre el trazo (o hilo) central y los dos laterales, con objeto de poner aquél en el medio de estos dos. El mínimo de anchura de luz b necesaria para ver separado el trazo central, proyectado en la retina, es en ésta igual a 2,5 μ, o sea, aproximadamente, igual a la mitad de la anchura de un cono. Según Broun, para una línea oscura sobre fondo claro, esta distancia es igual a 0,09 μ.



Fig 268

En esta anchura mínima de 2,5 μ, para un aumento de 25 veces, se tiene como error probable de coincidencia o posición del hilo, $\varepsilon = \pm 0{,}25\,\mu$ (medido sobre la retina).

Por *aumento* de un microscopio entendemos la relación entre la longitud de un segmento rectilíneo sobre la retina, visto con un microscopio, y la correspondiente a la imagen a simple vista y en el caso de que dicho segmento se halle a 206 mm por delante del centro del cristalino (fig. 265). A la distancia mínima de 2,5 μ, medida sobre la retina, corresponde, a simple vista, una longitud del objeto $b = 2{,}5 \times \frac{206}{15} \leq 34\,\mu$, o sea, un ángulo visual o diámetro aparente de unos 34''. Para un error probable en la retina de $\pm 0{,}25\,\mu$ se tiene un error probable de coincidencia de $\pm 0{,}25 \times \frac{206}{15} = \pm 3{,}4\,\mu$ en el objeto, o sea $\pm 3{,}4''$ de ángulo visual. Para un aumento de 34 diámetros, se tiene en el objeto un error probable de 0,1 μ.

Para alcanzar la misma precisión con bandas luminosas más anchas entre los bordes del trazo central y los dos hilos, se necesitan aumentos mayores.

Si, por ejemplo, la anchura b de este intervalo blanco comprendido entre el hilo y el bordo del trazo central se hace tan grande que cubra ocho *conos* en la retina, hay que emplear para alcanzar la misma precisión (0,1 μ de error probable de puntería) un aumento de 85 diámetros, y si dicha anchura b llega a cubrir 15 *conos,* se emplea un aumento de 150 diámetros. De todo esto resulta, como consecuencia final, que las bandas luminosas b que se comparan deben ser todo lo más pequeñas que sea posible.

Gafas. Disponiendo delante del ojo unas gafas adecuadas, es decir, unas lentes convergentes o divergentes, se puede hacer que se forme en el punto remoto del ojo una imagen de un objeto situado a cualquier distancia, con lo cual, sin esfuerzo alguno de acomodación, se forma en la retina la imagen definitiva del mismo.

Por ejemplo, para que un ojo miope cuya distancia a su punto remoto es de 0,15 m, pueda ver con claridad un objeto situado a distancia infinita, es preciso emplear unas gafas que formen una imagen virtual del objeto a una distancia de 0,15 m delante del ojo. Si la distancia focal de las lentes necesarias para las gafas es f, se tiene:

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}15} = \frac{1}{f}, \qquad \text{de donde} \qquad f = -0{,}15\ \text{m},$$

es decir, que deben emplearse lentes divergentes de 0,15 m de distancia focal.

Para un ojo présbita de igual distancia de punto remoto, deben emplearse lentes que de un objeto infinitamente lejano formen una imagen real a una distancia de 0,15 m por detrás del ojo, es decir, lentes convergentes de 0,15 m de distancia focal.

En las personas jóvenes basta casi siempre con este alejamiento o traslación al infinito de su punto remoto, para corregir la vista de los anteriores defectos; por medio de la acomodación pueden también ver claramente los objetos más cercanos. A medida que la edad es más avanzada, va perdiendo el ojo su poder de acomodación, necesitándose unas gafas para ver a distancia y otras para ver de cerca; por ejemplo, para leer. Si para un ojo miope que carezca ya de acomodación, y cuya distancia del punto remoto sea de 0,50 m, hay que emplear gafas para leer a 0,25 m de distancia, se tendrá

$$\frac{1}{0{,}50} - \frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{f}, \qquad \text{de donde} \qquad f = -0{,}50\ \text{m},$$

es decir, que las lentes necesarias serán divergentes y de 0,50 m de distancia focal.

En la elección de gafas hay que tener además en cuenta otras circunstancias esenciales, cuyo estudio y aplicación corresponde a los médicos oculistas.

A la cantidad recíproca o inversa de la distancia focal de las lentes empleadas en las gafas, se llama *poder dióptrico,* y se expresa en *dioptrías*. Expresando las distancias focales en metros, se tiene que una lente convergente de 1 m de distancia focal tiene por poder dióptrico + 1 dioptría, mientras que una lente divergente de 0,25 m de distancia focal tiene un poder dióptrico igual a — 4 dioptrías.

§ 64. Lupas o lentes de aumento

Como primera aplicación de las lentes tenemos el microscopio simple, conocido vulgarmente con los nombres de *lente de aumento* y *lupa,* y que consiste, en su forma más sencilla, en una lente convergente de corta distancia focal, que sirve para formar una imagen muy aumentada de un objeto próximo.

En la figura 269 se ven una lente L (lupa) y un objeto P situado entre ella y su foco izquierdo F; por ser menor la distancia y del objeto que la distancia focal f, tenemos, según el cuadro (5) de la página 236, que la distancia d de la imagen a la lente será negativa, es decir, que la imagen será virtual. La construcción de esta imagen se hace como en las figuras 251 ó 253, aunque aquí se supone que los dos puntos principales coinciden en uno solo, que es el *centro óptico* de la lente. Trazando por P un rayo paralelo al eje principal de la lente, se refracta pasando por el foco F', y el rayo que pasa por el centro óptico no sufre desviación alguna. Estos dos rayos no se cortan, pero sí sus prolongaciones hacia atrás, en el punto P', a una distancia d de la lente.

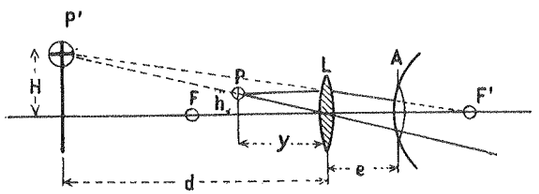


Fig. 269. — Lupa

Para ver la relación que hay entre las distancias y y d, se aplica la fórmula fundamental (1), de la página 235, teniendo en cuenta que el objeto y la imagen están a un mismo lado de la lente, correspondiendo así al caso sexto del cuadro (5) antes citado, por ser d negativa; en estas condiciones, dicha fórmula fundamental nos da:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

y resolviendo esta ecuación en y, se tiene:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{d+f}{df}, \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{df}{d+f}. \tag{2}$$

Si se resuelve la ecuación (1) en d, resulta:

$$d = \frac{fy}{f-y}. \tag{3}$$

Aumento. Mirando el objeto P a simple vista, se ve de tamaño mayor (máximo) cuando se encuentra a la distancia de la visión distinta, que designaremos con w; el ángulo visual correspondiente, o sea el diámetro aparente (fig. 269), será igual a $\frac{h}{w}$.

Si se mira el mismo objeto con la lente L, y suponiendo que el ojo se halle de ésta a una distancia e, tendremos que la imagen virtual P' del objeto se verá bajo un ángulo visual o diámetro aparente igual a $\frac{H}{d+e}$, y el aumento a obtenido con la lente será:

$$a = \frac{H}{d+e} : \frac{h}{w} \qquad \text{o sea} \qquad a = \frac{dw}{y(d+e)}. \tag{4}$$

Y según la fórmula (3),

$$\frac{d}{y} = \frac{f}{f-y} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{d+e} = \frac{f-y}{fy+e(f-y)}$$

y por consiguiente,

$$a = \frac{fw}{fy+e(f-y)}. \tag{5}$$

La posición de la lupa y del objeto respecto al ojo, es decir, las distancias e, y, deben tomarse de modo que la distancia de la imagen al ojo esté comprendida entre la de la visión distinta y la del punto remoto. Ahora bien, es un hecho comprobado que mientras el ojo no hace esfuerzo alguno, los procesos o músculos ciliares están en reposo y el ojo está *enfocado* en su punto remoto; por lo tanto, para un ojo normal no produce efecto alguno la lupa cuando su posición es tal que $y = f$, pues en este caso, según la fórmula (5) el aumento es

$$a = \frac{w}{f}. \tag{6}$$

La posición del ojo respecto a la lupa es indiferente, tratándose de un ojo normal.

Para ojos anormales no es aplicable la fórmula (6); si es miope, tiene su punto remoto más cercano, por lo cual la distancia y ha de hacerse algo menor que la f. En cambio, un ojo présbita tiene un punto remoto virtual por detrás del ojo mismo, y si la imagen debe coincidir con este punto, y debe ser más grande que f. En este caso se obtiene también una imagen real del objeto. Pero tanto para los ojos miopes como para los présbitas, debe diferenciarse muy poco la distancia y de la f, de modo que la sencilla expresión (6) da siempre con bastante aproximación el aumento de la lupa.

De esta fórmula (6) se deduce también que únicamente puede emplearse como lupa una lente convergente, cuando su distancia focal es menor que la distancia de la visión distinta del ojo de que se trate.

Diafragmas de las lupas. En la figura 270 se ve la marcha de los rayos y la limitación del cono luminoso en una lupa o microscopio simple L. Como diafragma de campo sirve ordinariamente la montura o anillo metálico en que va engastada la lente, y por no coincidir con el plano-imagen, no es posible obtener una gran nitidez en las imágenes.

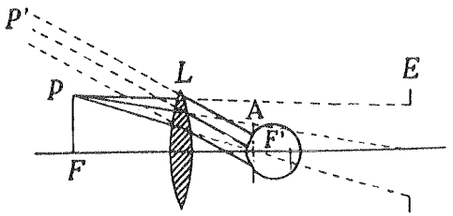


Fig. 270

Como diafragma de abertura sirve la pupila A del ojo, que obra al mismo tiempo de pupila de salida de la lente. La imagen virtual E de la pupila del ojo es la pupila de entrada de la lente. Si en el foco anterior F de esta última se coloca un objeto, los rayos luminosos procedentes del mismo llegan paralelos al ojo, por lo cual éste ve su imagen P' a distancia infinitamente grande. Para ojos anormales no son paralelos los rayos que procedentes de la lente llegan al ojo, sino que convergen hacia el punto remoto, situado delante o detrás del ojo.

En la figura 271 tenemos la misma construcción para un punto P situado a bastante distancia del eje de la lente, viéndose que del cono luminoso limitado por la pupila de entrada E, sólo la mitad pasa a través de la lente y penetra por la pupila del ojo. En este caso, la imagen P' aparece menos luminosa que en el representado en la figura 270. Si aumenta más aún la distancia del punto P al eje, disminuye también más la luminosidad o intensidad luminosa de la imagen, hasta el caso límite en que no llegue a la pupila del ojo ningún rayo procedente del punto P.

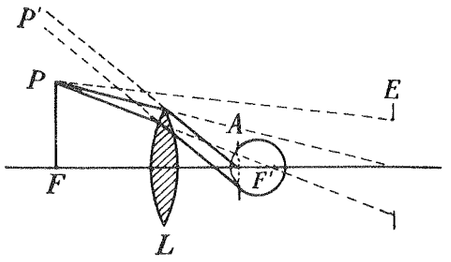
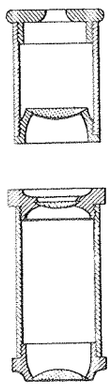


Fig. 271

Distintas formas de lupas. Los errores de aberración de que ya hemos tratado, pueden atenuarse considerablemente en las lupas con una selección acertada de sus radios o mediante la combinación de dos lentes. La figura 272 representa una lupa con una sola lente, que con una distancia focal de 25 mm da un aumento de diez diámetros. Las mejores lentes para este objeto son las planoconvexas o casi planoconvexas, cuya cara menos curvada mira hacia el ojo.


Figs. 272 y 273

En la figura 273 se ve una lupa con dos lentes, cuyas caras convexas están una frente a otra. La lente ocular tiene una distancia focal de unos 60 mm, y el objetivo, de 54 mm, siendo la distancia entre las lentes igual a 33 mm. La aberración esférica, a causa de las dos refracciones en las dos lentes, resulta mucho menor que en la lupa de la figura 272. La distorsión de las imágenes, que se nota muy bien en los bordes del campo visual de la lupa simple, no es perceptible con la lupa de doble lente. También la aberración cromática, que en la lupa de la figura 272 no se anula ni contrarresta de ningún modo, queda suprimida, por lo menos en parte, en la lupa doble de la figura 273. Según la fórmula (6) de la página 241, que da la condición de acromatismo de un sistema de lentes centrado, la distancia entre las dos lentes debe ser igual a 57 mm. El foco inferior del sistema debería estar sólo a 3 mm del objetivo, cosa que haría muy incómodo el uso de la lupa; por esta razón, en la lupa representada en la figura 273 se sacrifica el acromatismo completo, estando las dos lentes a menor distancia de la que sería necesaria para lograrlo y que hemos dicho era de 57 mm; en esta doble lupa, los focos del sistema están a 18 mm del objetivo y a 16 mm del ocular. La distancia focal equivalente es de 40 mm, con lo cual se tiene un aumento de seis diámetros.

En general puede decirse que en los instrumentos topográficos tienen poca influencia los errores de las lupas (microscopios lectores), pues siempre se aprovecha de ellas solamente el centro de su campo visual.

§ 65. Anteojo simple

Con la teoría de las lupas está ligada íntimamente la de los anteojos simples, constituídos, como se ve en la figura 274, por dos lentes convergentes, llamadas respectivamente *objetivo Ob* y ocular *Oc*, que tienen diferentes distancias focales f_1 y f_2. La distancia focal f_1 del objetivo es mayor que la f_2 del ocular.

El funcionamiento de estos anteojos es bien sencillo: el objetivo forma en P' la imagen de un punto P situado a distancia infinita, y esta imagen se mira con la lente ocular *Oc*, que actúa aquí de lupa. Esta lente se coloca de modo que para un ojo normal caiga dicha imagen en su plano focal, como ya dijimos anteriormente. Para un ojo anormal, la imagen P' debe caer cerca del plano focal del ocular, y en todos los casos el ocular se pone de manera que la imagen P' se vea en el punto remoto del ojo.

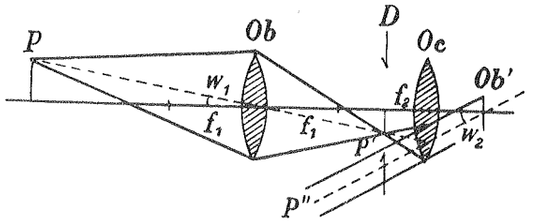


Fig. 274. — Marcha de los rayos en el anteojo simple

El cono luminoso procedente de P, que llega al objetivo, converge a la salida de éste en el punto-imagen P', y de éste incide sobre el ocular, de donde sale, para un ojo normal, formando un haz cilíndrico. El ojo, situado detrás del ocular, ve la imagen final o definitiva a distancia infinita y en dirección paralela a la recta que une la imagen P' con el centro del ocular.

Como diafragma de abertura sirve generalmente la montura del objetivo. A veces se limita el cono luminoso por medio de un diafragma situado dentro del anteojo, de modo que no se utiliza toda la abertura del objetivo. En este caso el objetivo da una imagen de este diafragma, que es la *pupila de entrada*.

La *pupila de salida* es la imagen real Ob', dada por el ocular, de la montura del objetivo o del diafragma de abertura situado en el interior del anteojo. Por la pupila de salida pasan al exterior del anteojo, como se ve en la figura 274, los rayos procedentes de todos los puntos situados a igual distancia que P. Si se coloca en Ob' la pupila del ojo, y su abertura es, por lo menos, igual a la de la pupila de salida, entra en el ojo todo el haz de rayos antes considerado.

En la figura 274 llega al ocular todo el haz cónico procedente de P. Para distancias mayores de P al eje, sucede como en la figura 271, que llega al ocular sólo una parte del

cono luminoso procedente de dicho punto, por lo cual el ojo ve este punto con muy poca intensidad. Para obviar este inconveniente y al mismo tiempo para que la imagen resulte clara y nítida, se dispone un diafragma de campo D en el sitio en que se forma la imagen real P'. El diámetro de este diafragma es tal que del cono luminoso llegue al ojo la mayor parte posible.

Al variar la distancia del punto P al objetivo, varía también la distancia de la imagen P' a esta misma lente, según la fórmula fundamental (1) de la página 235. Por lo tanto, el diafragma de campo, juntamente con el ocular, deben poderse correr en la dirección del eje del anteojo. Además, el ocular tiene otro pequeño movimiento de traslación para que cada observador pueda adaptarlo a la distancia de su punto remoto.



Fig. 275
Disposición esquemática del anteojo simple

En la figura 275 se ve, en esquema, el acoplamiento de las distintas partes que componen un anteojo simple: por dentro del tubo principal en el cual va montado el objetivo O, se mueve el tubo del ocular, en el que va fijo el diafragma de campo F; el ocular L se puede correr atrás o adelante dentro de este tubo, por medio de otro tubo más pequeño.

Aumento del anteojo. Para apreciar la llamada *potencia* de un anteojo, es decir, su aumento, es preciso conocer el valor aproximado de la distancia focal de su objetivo. Para ello se empieza por apuntar el anteojo hacia un objeto situado a distancia infinita y se corre el tubo del ocular hasta que aquél se vea lo más claro posible. Puesto que la imagen real del objeto se forma en el plano del diafragma, que coincide con el plano focal interior del objetivo, y la posición del diafragma se puede apreciar por fuera, queda por medir solamente la distancia del diafragma al objetivo para tener, con algunos milímetros de aproximación, la distancia focal f_1 del objetivo.

Una vez hallada esta distancia, estableceremos la relación entre los diámetros aparentes w_1 y w_2 del objeto y de la imagen final para el caso de estar el objeto P a distancia infinita; siendo f_1 la distancia del punto P' al objetivo, el aumento a del anteojo será:

$$a = \frac{w_2}{w_1} = \frac{f_1}{f_2}. \qquad (1)$$

La distancia focal f_2 del ocular es bastante difícil de determinar con la precisión necesaria; por esta razón se determina el aumento a de un modo directo que consiste en mirar con un ojo por el anteojo una mira o regla graduada, y con el otro ojo se mira a la vez

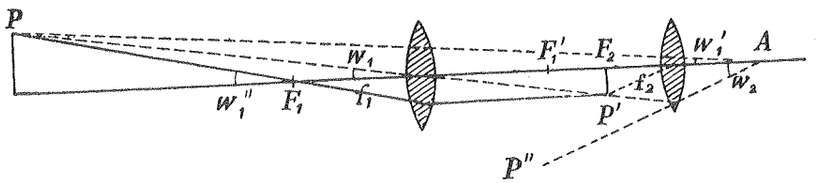


Fig. 276. - Aumento del anteojo

directamente la misma regla, y de tal manera que se haga coincidir la parte de mira vista por los dos ojos. El número de divisiones que se ven directamente, y que quedan cubiertas por la parte aumentada que se ve con el anteojo, se cuenta muy bien en cuanto se tiene alguna práctica; este número lo designaremos con a_0, y es la relación entre el ángulo visual

bajo el cual se ve la imagen de un objeto *cercano* con el anteojo y el correspondiente a la simple vista. En la figura 276 están representados estos dos ángulos por w_2 y w_1', estando el ojo en A. Sigamos el rayo que procedente de P pasa por el foco anterior F_1 del objetivo, y veremos que el rayo AP'' es paralelo al que pasa por P' y por el centro del ocular, por lo cual se tendrá:

$$\frac{w_2}{w_1''} = \frac{f_1}{f_2} = a \quad \text{y} \quad \frac{w_2}{w_1'} = a_0$$

o sea

$$a = a_0 \frac{w_1'}{w_1''}.$$

Ahora bien,

$$\frac{w_1'}{w_1''} = \frac{PF_1}{PA}$$

y por consiguiente:

$$a = a_0 \frac{PF_1}{PA}. \qquad (2)$$

En esta igualdad se tiene que PF_1 y PA pueden medirse directamente, y siendo ya conocido a_0, se deduce fácilmente el valor del aumento verdadero a.

Para cierto nivel con anteojo, se puso una mira de nivelación a unos 9 m de distancia del instrumento, y la lectura a_0 fué a_0=32,5. La distancia focal del objetivo era f_1=36 cm, y la distancia del ojo al objetivo resultó de 40 cm; por último, la distancia medida de la mira al objetivo fué de 910 cm, y con estos datos se calculó el aumento a con la fórmula siguiente:

$$a = 32{,}5\,\frac{910 - 36}{910 + 40} = 30.$$

Otro procedimiento para determinar el aumento de un anteojo, valiéndose de la *pupila de salida* Ob' (fig. 274), consiste en colocarse de modo que quede el ojo a una distancia de 25 a 30 cm del ocular, para ver la pupila de salida como un circulito bien recortado y brillante; también puede recogerse éste sobre una regla graduada y medir su diámetro. Se dirige entonces el anteojo hacia un objeto lejano, con lo cual, como se ve en la figura 277 (para un ojo normal), coincidirán el foco posterior del objetivo con el anterior del ocular, y se tendrá, llamando D y d respectivamente a los diámetros del objetivo y de la pupila de salida,

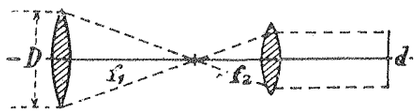


Fig. 277

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1}{f_2} = a. \qquad (3)$$

En el nivel antes citado se midieron D y d, que resultaron iguales respectivamente a 29 mm y 1,0 mm, y con estos valores se calculó el aumento a, que resultó igual a 29, cuyo valor se aproxima bastante al hallado por el anterior procedimiento.

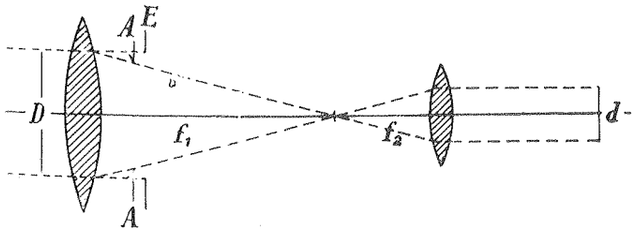


Fig. 278. — Diafragma objetivo y pupila de salida

Si detrás del objetivo se tiene un diafragma que actúe de diafragma de abertura, como el A de la figura 278, hay que sustituir la abertura del objetivo por la de la pu-

pila de entrada E, cuyo valor es difícil de determinar. En este caso conviene disponer delante del objetivo un diafragma cuyo diámetro pueda medirse con exactitud y que obra como pupila de entrada, y de este modo hay sólo que medir el diámetro de la pupila de salida o *anillo ocular*.

Campo visual de un anteojo. Los rayos principales del objetivo que, estando el anteojo enfocado a un punto infinitamente lejano, pasan por el borde mismo del diafragma de campo, forman un cono de sección recta circular, cuyo ángulo en el vértice γ se llama *campo visual* del anteojo.

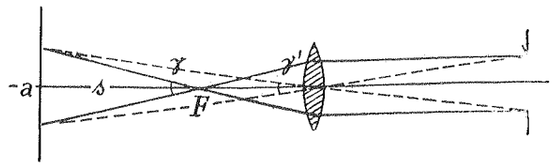


Fig. 279. — Campo visual del anteojo

Al mirar un objeto más cercano, resulta menor el ángulo γ' del cono luminoso, y el vértice del verdadero campo visual γ cae sobre el foco anterior F del objetivo, como se ve en la figura 279. Si a una distancia cualquiera, por delante del anteojo, se coloca una mira de nivelación y se leen sobre ésta las alturas correspondientes a los bordes superior e inferior del campo visual, se puede deducir de la diferencia de lecturas a el valor del ángulo visual γ, pues siendo s la distancia de la mira al foco anterior del objetivo, se tiene:

$$\gamma = \frac{a}{s}\rho. \tag{4}$$

Para los anteojos empleados en los instrumentos topográficos, el valor del ángulo γ varía de 1° a 1,5°.

Claridad. La *claridad* o brillo de un objeto luminoso es igual a la relación entre la cantidad de luz L que penetra en el ojo y la superficie N^2 de la parte de retina sobre que incide dicha cantidad de luz; es decir, llamando C a la claridad de la visión, se tiene:

$$C = \frac{L}{N^2}$$

o sea, que la claridad es la cantidad de luz que incide sobre la unidad de superficie de la retina.

Mirando el mismo objeto con un anteojo, tenemos análogamente:

$$C' = \frac{L'}{N'^2}$$

y la claridad c del anteojo está dada por la relación:

$$c = \frac{C'}{C} = \frac{L'}{L}\frac{N^2}{N'^2}. \tag{5}$$

Para determinar con cierta exactitud esta relación hay que conocer la abertura de la pupila del ojo, por la cual penetra la luz dentro de este último.

En la figura 280 se ve en O la abertura de la pupila, siendo o el diámetro del haz cilíndrico de rayos que sale del ocular, y que es también el diámetro de la pupila de salida o anillo ocular.

La cantidad de luz L que pasa por la pupila O, al mirar a simple vista, es proporcional a la superficie de esta abertura O, por lo cual se puede escribir:

$$L = \lambda O^2. \tag{6}$$

Del mismo modo, la cantidad de luz L' que incide sobre el objetivo al mirar con el anteojo, será:

$$L' = \lambda A^2.$$

Esta última cantidad de luz L' pasa por la pupila de salida del anteojo y penetra en el ojo. Dividiendo L' por L, se tiene:

$$\frac{L'}{L} = \frac{A^2}{O^2}. \tag{7}$$

El segundo factor $\frac{N^2}{N'^2}$ del segundo miembro de la igualdad (5) es

$$\frac{N^2}{N'^2} = \frac{1}{a^2}, \tag{8}$$

pues el aumento a es la relación lineal entre la imagen retiniana N' dada por el anteojo y la N obtenida directamente a simple vista. Sustituyendo los valores (7) y (8) en (5) resulta:

$$\text{Claridad} \quad c = \frac{A^2}{O^2 a^2}. \tag{9}$$

Podemos poner esta ecuación en la forma siguiente:

$$c = \frac{A^2}{o^2}\frac{o^2}{O^2}\frac{1}{a^2}$$

y por ser

$$\frac{A^2}{o^2} = \frac{F^2}{f^2} = a^2$$

se tiene:

$$c = \frac{o^2}{O^2}. \tag{10}$$

Suponiendo que $o = O$, resulta $c = 1$, es decir, que el objeto se ve con la misma claridad a través del anteojo que a simple vista. Además, ésta es la claridad máxima; en efecto, supongamos que o sea mayor que O: en este caso no es aplicable el cálculo anterior, pues una parte de la luz que sale del objetivo no llega al ojo. La claridad es, por consiguiente, la misma que para un objetivo menor, de diámetro $A' = Oa$, o sea, $c = 1$.

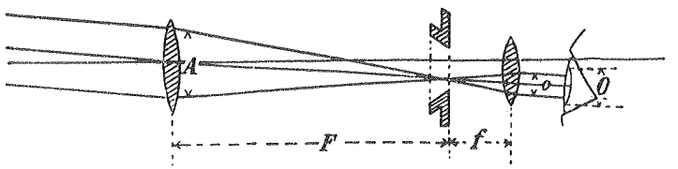


Fig. 280. — Determinación de la claridad de la imagen

Si o es menor que O, pueden aplicarse el cálculo anterior y la fórmula final (10), viéndose de este modo que c es menor que 1, es decir, que el objeto se ve con menos claridad o brillo con el anteojo que a simple vista.

Una excepción la tenemos en la observación de las estrellas fijas, las cuales se ven como puntos, tanto con anteojo como a simple vista, siendo por consiguiente el aumento $a = 1$. En este caso se tiene:

$$\frac{N^2}{N'^2} = 1$$

y según las fórmulas (5) y (7):

$$c = \frac{A^2}{O^2} \qquad \text{o sea} \qquad c = \frac{o^2}{O^2}a^2. \tag{11}$$

De aquí se deduce también que, en la observación de un objeto plano, la claridad disminuye en la proporción de $a^2 : 1$. En cambio, se ven con los anteojos estrellas fijas de muy baja magnitud, que son invisibles a simple vista.

De la fórmula (9) se desprende que la claridad máxima $c = 1$ se logrará cuando la pupila de salida del anteojo sea igual a la pupila del ojo, es decir, cuando el diámetro del objetivo sea:

$$A = a\,O.$$

Suponiendo que la pupila del ojo sea de 2 mm, se debe tener:

$$A \text{ mm} = 2\,a.$$

Por ejemplo, con un anteojo de 20 diámetros de aumento y objetivo de diámetro igual a 40 mm, se obtiene la misma claridad que a simple vista, pero de día, que es cuando el diámetro de nuestra pupila tiene aproximadamente 2 mm. En cambio, de noche, en que el diámetro de la pupila aumenta hasta 6 mm, la claridad del anteojo es igual solamente a la novena parte de la claridad a simple vista.

En todo lo expuesto hemos prescindido de la pérdida de luz que tiene lugar a través de las lentes y que puede alcanzar del 20 al 30 %.

Retículo y línea de mira o eje de colimación. Cuando se emplea el anteojo para determinar direcciones, hay que disponer en su campo visual una señal fija, consistente en dos hilos de araña perpendiculares entre sí, colocados en el diafragma de campo, y como éste, en el plano de la imagen dada por el objetivo. Esta combinación de dos hilos de araña se llama *retículo* o *cruz filar*. Para dirigir el anteojo a un punto dado, se hace que éste coincida con el centro del retículo.

En vez de los hilos de araña se emplea a veces una laminita de vidrio con dos rayas perpendiculares, grabadas con un diamante o fijadas fotográficamente.

El retículo determina en el anteojo una línea llamada *línea de mira, eje visual* o *eje de colimación,* que es la recta que une el punto de mira con el centro del retículo.

En los anteojos de los instrumentos astronómicos, el retículo está situado en el foco posterior del objetivo. Es decir, que el eje de colimación es en estos anteojos el rayo principal del objetivo que pasa por el centro del retículo.

En los anteojos de los instrumentos topográficos y geodésicos, por ser muy variable la distancia de mira, varía mucho también la posición del plano de la imagen objetiva, o sea la dada por el objetivo. En este caso es imposible conseguir que al correr el tubo

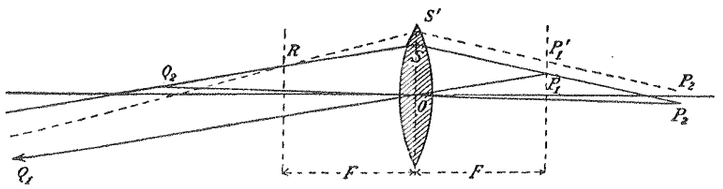


Fig. 281. — Eje de colimación

portaocular, se mueva el centro del retículo siempre sobre una misma recta o eje de colimación que a la vez pase por el centro óptico del objetivo; de esto se deduce, según la anterior definición, que a cada distancia de mira corresponderá un eje visual de diferente dirección.

En la figura 281, SP_1P_2 representa la recta sobre la cual se mueve el centro del retículo, y P_1Q_1 es el eje visual astronómico. Se comprende fácilmente que todos los puntos coincidentes con el centro del retículo, cualquiera que sea la distancia a que se hallen, han de estar sobre la recta SQ_2, que es paralela a la OQ_1. La recta SQ_2, que ocupa una posición fija en el anteojo, puede considerarse como el eje visual en los anteojos geodésicos. Es decir, que el eje visual geodésico es paralelo al eje visual astronómico.

De aquí podemos deducir otra definición del eje visual o de colimación: en efecto, vemos que los puntos P son imágenes de los objetos Q, y al contrario, se pueden considerar los puntos Q como imágenes de todos los puntos P; luego el eje visual geodésico es el lugar geométrico de todos los puntos sobre los cuales se forman las imágenes del centro del retículo a través del objetivo.

Hemos tratado esta cuestión con algún detenimiento, porque en la mayoría de los libros de Topografía se define simplemente el eje visual astronómico sin mencionar para nada su variación al mover el tubo portaocular. La anterior definición general del eje visual fué dada por primera vez por Helmert y discutida después por Vogler.

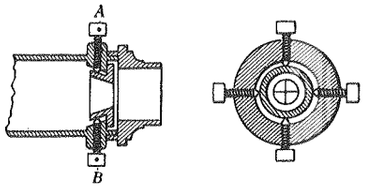


Fig. 282. — Cruz filar

En la figura 282 se ve el montaje del retículo en el anteojo; esta figura representa el extremo interior del tubo portaocular. La cruz filar está montada en un marco circular, que va unido a una pieza cónica y hueca. Sobre esta pieza actúan cuatro tornillos con los cuales se puede centrar la cruz filar. A la derecha de la figura se ve una sección del tubo portaocular normal al eje, según AB.

En muchos casos basta corregir el retículo lateralmente o en sentido vertical, por lo cual sólo lleva éste un par de tornillos, estando sustituído el otro par por un dispositivo de corredera.

Vamos ahora a ver cómo varía el eje visual geodésico antes definido, al variar la posición del retículo con sus tornillos de corrección. Al correrse el retículo se mueve sobre la recta $P'_1P'_2$ (fig. 281), paralela a la P_1P_2. Estos dos rayos paralelos, después de atravesar el objetivo, deben cortarse en un punto del plano focal anterior, teniéndose como nueva línea visual la recta $S'R$. De aquí se deduce una consecuencia muy importante, a saber, que para un corrimiento del retículo, el eje visual geodésico gira alrededor de un punto R del plano focal anterior del objetivo.

Para enfocar, es decir, para ver bien un objeto lejano, hay que hacer las operaciones siguientes:

1.ª Se corre el ocular en su tubo hasta que la distancia entre aquél y el retículo sea tal que este último se vea claramente: esta distancia depende de la distancia focal del ocular y de la distancia del punto remoto para el observador de que se trate (véase página 250).

2.ª Se mueve hacia adelante o hacia atrás el ocular con el retículo, es decir, todo el tubo portaocular, hasta que se vea claramente el objeto hacia el cual está apuntado el anteojo, y se hace que coincida un cierto punto del objeto con el centro de la cruz filar, quedando así hechas la puntería y el enfoque.

De estas dos operaciones, la primera se hace de una vez para siempre, mientras no haya de utilizar el anteojo ningún otro observador con vista diferente del primero; la segunda operación es necesario repetirla para cada nuevo punto de mira.

Un observador miope o présbite tiene que variar la posición relativa del ocular y del

retículo, aunque la diferencia alcanza a lo sumo 1 mm, como puede deducirse fácilmente de la teoría de las lupas (pág. 250).

Se llama *paralaje* del retículo a la desviación del plano del retículo con relación al plano de la imagen; se descubre la existencia de esta paralaje moviendo el ojo de arriba abajo y de izquierda a derecha y viendo si el centro del retículo se mueve respecto a la imagen enfocada. Si se ve que hay paralaje, se empieza por ajustar de nuevo el ocular, y si no se suprime así la paralaje, se corrige nuevamente la distancia entre el ocular y el retículo. Este error debe corregirse cuidadosamente y con todo esmero hasta lograr su completa desaparición.

El anteojo simple o de Kepler, que es el que hemos descrito, llamado también anteojo astronómico, fué inventado por Kepler en 1611.

El retículo apareció unos 30 años después del invento del anteojo, es decir, hacia el 1640, inventado por el inglés William Gascoigne.

§ 66. Anteojo de objetivo y ocular compuestos

El anteojo simple o de Kepler, a causa de las aberraciones esférica y cromática, sólo es utilizable para escaso aumento y pequeño campo visual. Además, la corta distancia focal del ocular hace que éste tenga una abertura muy pequeña, por lo cual no es posible que todo el cono luminoso que sale del objetivo penetre en el ojo. Para aumentar la potencia de los anteojos, se emplean objetivos y oculares compuestos, es decir, formado cada uno por dos lentes combinadas.

Objetivo. De todos los objetivos, el más empleado en los instrumentos topográficos es el de Fraunhofer, que consiste (fig. 283) en una lente biconvexa de *crown*, cuya cara más curvada mira hacia el objeto, y en una lente de *flint* cóncavoconvexa. Los dos radios interiores son casi iguales. Ambas lentes se mantienen unidas por su armadura o bien con interposición de un cemento o mástique especial.

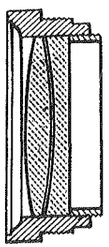


Fig 283
Objetivo de anteojo

El objetivo que representa la figura 283, perteneciente a un nivel, tiene 32 cm de distancia focal equivalente. Las distancias focales de las dos lentes están calculadas de modo que la aberración cromática quede anulada, por lo cual, del valor de los índices de refracción dados en la página 240 podemos deducir las dos distancias focales. En efecto, la condición de acromatismo dada por la fórmula (5) de la página 241, se reduce a la expresión siguiente, por estar las dos lentes en contacto:

$$\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\frac{1}{f_1} + \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1}\frac{1}{f_2} = 0. \qquad (1)$$

Según el cuadro de la página 240, tenemos para el rayo medio, $n_1 = 1{,}52$ y $n_2 = 1{,}62$, y para la dispersión media, $\Delta n_1 = 0{,}0086$ y $\Delta n_2 = 0{,}0171$; luego sustituyendo en la fórmula anterior, se tendrá:

$$\frac{0{,}0086}{0{,}52}\frac{1}{f_1} + \frac{0{,}0171}{0{,}62}\frac{1}{f_2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{f_1} + 1{,}67\frac{1}{f_2} = 0.$$

Por otra parte, según la fórmula (3) de la página 241, haciendo $e = 0$, la distancia focal equivalente será:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_2} \qquad (2)$$

De esta ecuación y la anterior resultan los siguientes valores:

$$f_2 = -21{,}5\text{ cm} \qquad f_1 = +12{,}9\text{ cm}.$$

Por medición directa se encontró $f_1 = 12{,}5$ cm, que con $f = 32$ cm, da para f_2 el valor $-20{,}5$ cm.

Teleobjetivo. De la fórmula que da el aumento de un anteojo $a = F : f$ (pág. 255) se desprende que para el aumento es de gran importancia que el objetivo tenga una distancia focal F lo más grande posible; pero esto tiene el inconveniente de aumentar extraordinariamente el tamaño del anteojo. Ahora bien, mediante una cierta combinación de lentes se puede conseguir una gran distancia focal en un espacio pequeño.

Si se combina una lente convergente de gran distancia focal con una divergente de distancia focal corta, de modo que la distancia entre ambas sea poco mayor que la diferencia entre sus distancias focales, se tiene una gran distancia focal equivalente del sistema. Por ejemplo, si la distancia focal de la lente divergente es $f_1 = -7$ cm, la de la convergente es $f_2 = 10$ cm, y la distancia entre ambas es $e = 5$ cm, tenemos, según la fórmula (13) de la página 238, la distancia focal equivalente f del sistema:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e} = \frac{10 \times 7}{3 - 5} = 35\text{ cm}.$$

Vamos ahora a ver que no solamente se ha conseguido una distancia focal larga, sino que se ha reducido el tamaño del anteojo, para lo cual determinaremos la posición de los dos focos del sistema; según la fórmula (14) de la página 238, la distancia del primer foco a la primera lente es (fig. 284):

$$F L_1 = \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1 + f_2 - e} = 17{,}5\text{ cm},$$

y la distancia del segundo foco a la segunda lente es:

$$L_2 F' = \frac{f_1 f_2 - e f_2}{f_1 + f_2 - e} = 60\text{ cm}.$$

Este sistema de lentes puede emplearse como objetivo de un anteojo, con la lente cóncava o divergente mirando hacia el ocular. El foco posterior F está a 17,5 cm de distancia de la lente cóncava, y si se emplea un ocular de 2,5 cm de distancia focal, se tiene un anteojo

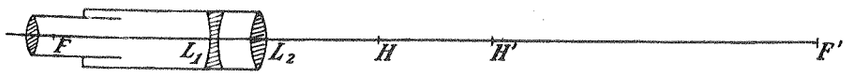


Fig. 284. — Anteojo con teleobjetivo

de 14 aumentos con una longitud total de 25 cm. Un anteojo con objetivo ordinario y de igual distancia focal, tendría 37,5 cm de longitud.

La figura 284 representa el anteojo correspondiente a los anteriores datos numéricos, siendo H y H' los dos puntos principales del objetivo.

Estos números son figurados y sirven solamente para aclarar con un ejemplo el significado de una fórmula. Vamos ahora a dar las dimensiones del anteojo de un teodolito construído por Hildebrand, de Freiberg, en parte medidas directamente, y en parte deducidas por el cálculo:

$$f_1 = -58\text{ mm}, \qquad f_2 = +165\text{ mm}, \qquad e = 125\text{ mm}$$
$$f = 532\text{ mm}, \qquad F L_1 = 130\text{ mm}, \qquad L_2 F' = 1670\text{ mm}.$$

Con un ocular de 15 mm de distancia focal tiene este anteojo unos 35 aumentos. Los ojos cortos tienen la ventaja de que para aumentos mayores no hay que acortar demasiado la distancia focal del ocular.

Lógicamente cabe suponer que el empleo de la lente cóncava produzca alguna pérdida de luminosidad en las imágenes, pero en la práctica no hemos podido aún comprobar esta suposición.

Ocular de Huygens. Según hemos visto en la figura 274, el ocular tiene por objeto recoger los rayos que a través del objetivo penetran en el anteojo, de modo que pasen por la pupila de salida o anillo ocular de este último.

Además, el ocular debe aumentar, al mismo tiempo, el ángulo visual bajo el cual se ve la imagen del objeto observado, es decir, que el ocular ha de funcionar como lupa.

Un ocular formado por una sola lente no puede cumplir plenamente estas dos condiciones. Para ello se emplean dos lentes, una llamada *colectora* y la otra *lente ocular;* la elección de estas lentes y la distancia a que deben montarse han de ser tales, que también queden suprimidas las aberraciones (pág. 239), de las cuales la más importante para el ocular es la cromática.

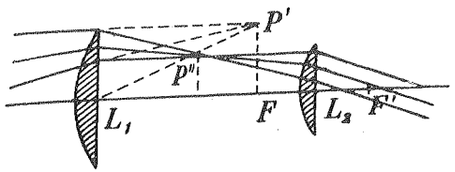


Fig. 285. — Ocular de Huygens

En 1670 ideó Huygens el ocular que representa la figura 285, en el cual la lente colectora L_1 está situada antes de la imagen real P' dada por el objetivo, es decir, cortando el haz de rayos procedente de este último, con lo cual este haz se refracta acercándose al eje del sistema y la imagen real del objeto pierde tamaño. La lente ocular L_2 hace de lupa y recibe la imagen bajo un ángulo visual aumentado y al mismo tiempo hace que los rayos salgan del anteojo, para un ojo normal, como un haz de rayos paralelos.

Llamemos f_1 y f_2 a las distancias focales de ambas lentes, y e a la distancia entre las mismas; la condición de acromatismo, dada por la fórmula (6) de la página 241, es la siguiente:

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2}. \tag{3}$$

La distancia focal equivalente f está dada por la fórmula (3) de la misma página:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} \tag{4}$$

donde una de las tres magnitudes f_1, f_2 y e, es variable. La distancia e entre las lentes puede tomarse de tal modo que la refracción se reparta uniformemente entre las dos, con objeto de reducir al mínimo la aberración esférica. Esta condición, como fácilmente puede demostrarse, queda satisfecha cuando

$$e = f_1 - f_2 \tag{5}$$

De las ecuaciones (3) y (5) se deduce:

$$f_1 = 3 f_2 \qquad \text{y} \qquad e = 2 f_2$$

o sea

$$f_1 = 2f \qquad f_2 = \frac{2}{3} f \qquad \text{y} \qquad e = \frac{4}{3} f. \tag{6}$$

Con una buena elección de los radios de ambas lentes puede disminuirse también la aberración esférica.

En la construcción práctica del ocular de Huygens se cumple la condición (6) de modo aproximado nada más. Generalmente consiste este ocular en dos lentes planoconvexas, cuyas caras planas miran hacia el ojo del observador.

Calculando, según las fórmulas (14) de la página 238, la posición de los dos focos del sistema ocular, resulta:

$$F L_1 = -f \qquad \text{y} \qquad L_2 F' = +\frac{1}{3} f.$$

Éstas son las distancias representadas en la figura 285, siendo los focos del sistema F y F'. El ocular debe colocarse de tal modo respecto del objetivo, que lo mismo que en un anteojo simple o astronómico, para un ojo normal caiga el foco F en el plano de la imagen dada por el objetivo.

Si P' (fig. 285) es la imagen de un punto P dada por el objetivo, el plano focal del ocular debe pasar precisamente por P'. La lente colectora hace trasladarse la imagen P' a P'', estando el retículo en el mismo plano vertical que este último punto.

Para distintos observadores debe poderse correr el ocular de modo que el plano focal caiga un poco por delante o por detrás de P', con lo cual se producen también pequeñas variaciones en la posición de P''. De aquí se deduce que para distintos observadores debe también poderse correr el retículo en el ocular.

El ocular de Huygens tiene el inconveniente de que el retículo sólo se ve con una lente, por lo cual el ocular, respecto al retículo, no está libre de la aberración cromática ni de la esférica. Pero aun es de más importancia el inconveniente de que para ojos distintos varía la distancia del punto P' a la lente colectora L_1, de modo que también variará el tamaño de la imagen P'', lo cual se traduce en un defecto esencial en la medición óptica o indirecta de las distancias. Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

A causa de estos defectos apenas se usa actualmente el ocular de Huygens en los instrumentos topográficos.

Anteriormente (pág. 258) hemos definido el eje visual del anteojo simple diciendo que es la recta sobre la cual se mueve el retículo, al apuntar a un objeto. Para el ocular de Huygens es preciso modificar esta definición, ya que en vez del retículo tenemos aquí en P', la imagen del mismo, pero no por ello varía la dirección de dicho eje visual.

Ocular de Ramsden. En el ocular construído por Ramsden en el año 1783 (fig. 286) están aún más delimitadas y claras las dos funciones que debe desempeñar el ocular, ya indicadas antes al describir el ocular de Huygens. Si la lente colectora L_1 estuviera en el sitio en que se forma la imagen P' dada por el objetivo, el haz de rayos sufrirá una sola desviación, dirigiéndose hacia la lente ocular L_2 que obra como una lupa. Esta última, para un ojo normal, da una imagen situada a distancia infinita. Mas para poder colocar el retículo en el plano de P', se pone la lente colectora un poco por detrás del plano de la imagen dada por el objetivo.

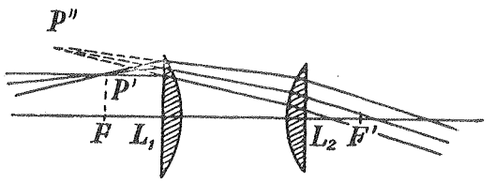


Fig. 286. — Ocular de Ramsden

Lo condición de acromatismo tantas veces citada $e = \frac{f_1 + f_2}{2}$, puede cumplirse en el

Con un ojos c… siado la … de …as, …también la

…n exactamente como en las lupas (pág. 252), pudiendo ser en aquél …o menor que en las lupas.

…hace $f_2 = f_1$ y $e = \frac{2}{3} f_1$, resultando $f = \frac{3}{4} f_1$, y los dos focos del …ancia igual a $\frac{1}{4} f_1$ por delante de la lente colectora el uno, y $\frac{1}{4} f_1$ …ular el otro. Las lentes del ocular de Ramsden son planoconvexas, …cidad vuelta una hacia otra, como en las lupas dobles.

Si en vez del sistema de las dos lentes consideramos la lente equivalente, todo lo expuesto sobre el anteojo simple o astronómico sirve para el anteojo de Ramsden.

Ocular ortoscópico de Kellner. La aberración esférica se atenúa o hace desaparecer tanto más completamente, cuanto mayor es el número de lentes entre que se reparte la refracción. El ocular ideado en 1851 por C. Kellner consta de tres lentes, dos de las cuales van pegadas una a otra con un mástique especial, constituyendo la lente ocular, y la tercera, que va aislada, corresponde a la lente colectora del ocular de Ramsden. Las dos lentes pegadas son de distinta clase de vidrio, resultando, por lo tanto, un sistema acromático, como el objetivo compuesto ya estudiado. La distancia de la lente colectora a la lente ocular es igual a la distancia focal equivalente de esta última.

De este modo resulta fácil estudiar la aberración cromática de todo el ocular, a la distancia focal equivalente. Llamemos f_1 y f_2 a las distancias focales respectivas de las dos lentes pegadas, f_3 a la de la lente colectora; n_1, n_2, n_3, a los índices de refracción de las tres lentes para un color medio, y Δn_1, Δn_2 y Δn_3, a su dispersión media.

Puesto que las dos primeras lentes constituyen un sistema acromático, tendremos, según la fórmula (5) de la página 241:

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1} \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

o si, para abreviar, hacemos

$$\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} = v_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta n_2}{n_2 - 1} = v_2 \tag{7}$$

se tendrá:

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f_1} \frac{v_1}{v_2}. \tag{8}$$

La distancia focal equivalente f de estas dos lentes está dada, según las fórmulas (13) de la página 238, por la siguiente condición:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

o sea, sustituyendo el valor de $\frac{1}{f_2}$ dado por (8),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1}\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right). \tag{9}$$

Para la distancia focal equivalente F de todo el sistema tenemos, según la fórmula (15) de la página 238, haciendo en ella $e_1 = 0$:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{e_2}{f_1 f_3} - \frac{e_2}{f_2 f_3}. \tag{10}$$

Si varían los tres índices de refracción en las cantidades Δn_1, Δn_2 y Δn_3, varían también las tres distancias focales, y con ellas, la distancia focal equivalente F.

Diferenciando la ecuación (10) y teniendo en cuenta la anterior ecuación (7) y la (2) de la página 240, resulta:

$$\frac{1}{F^2} \Delta F = \frac{1}{f_1} v_1 + \frac{1}{f_2} v_2 + \frac{1}{f_3} v_3 - \frac{e_2}{f_1 f_3} v_1 - \frac{e_2}{f_1 f_3} v_3 - \frac{e_2}{f_2 f_3} v_2 - \frac{e_2}{f_2 f_3} v_3$$

y sustituyendo el valor de $\frac{1}{f_2}$ dado en (8),

$$\frac{1}{F^2} \Delta F = \frac{1}{f_3} v_3 - \frac{e_2}{f_1 f_3}(v_1 + v_3) + \frac{e_2}{f_1 f_3} \frac{v_1}{v_2} v_2 + v_3).$$

Puesto que e_2 debe ser igual a f, tendremos, según (9):

$$e_2 = f_1 \frac{v_2}{v_2 - v_1}$$

y sustituído este valor en la última ecuación, se tendrá:

$$\frac{1}{F^2} \Delta F = \frac{1}{f_3} v_3 - \frac{1}{f_3} \frac{v_2 v_3}{v_2 - v_1} + \frac{1}{f_3} \frac{v_1 v_3}{v_2 - v_1}$$

o bien:

$$\frac{1}{F^2} \Delta F = 0. \tag{11}$$

Si la lente ocular es también acromática, y la distancia a la lente colectora es igual a la distancia focal de la primera, resulta todo el ocular acromático, cualquiera que sea la distancia focal de la lente colectora. Esta última distancia focal se puede elegir de tal modo que la posición del foco de todo el sistema sea la más conveniente.

El ocular de Kellner desempeña en el anteojo el mismo papel que el de Ramsden.

Actualmente se construyen oculares más perfeccionados, en los cuales la lente colectora se compone también de dos lentes unidas, con lo cual la aberración esférica queda aún más atenuada.

Ocular terrestre. En los instrumentos topográficos se emplean exclusivamente los oculares hasta aquí descritos, sobre todo el de Ramsden, ya que no constituye obstáculo alguno la inversión de las imágenes. En cambio, en los anteojos de observación, por ejemplo, para reconocer una red de triángulos, o un vértice, etc., conviene que la imagen se



Fig. 287. — Ocular terrestre

vea directa y no invertida. Se consigue que la imagen resulte del mismo sentido que el objeto empleando un *ocular terrestre,* en el cual, por intercalación de una o más lentes, se produce una segunda inversión de la imagen. En la figura 287 se ve un ocular terrestre compuesto de cuatro lentes convergentes dispuestas como lo hizo Fraunhofer, y que sigue empleándose actualmente en la misma forma. Las dos primeras lentes consti

tuyen el llamado *sistema inversor,* y las dos últimas forman un ocular de Huygens. En esta figura se ve también la marcha de los rayos a través del ocular: el haz de rayos procedente de un punto luminoso y que llega al objetivo, se refracta en éste y concurre a su salida en un punto P, imagen real del punto luminoso considerado; los rayos atraviesan después el sistema inversor, y antes de converger nuevamente para formar otra imagen real, llegan al segundo sistema de lentes, la primera de las cuales da en P' esta segunda imagen, que actúa como objeto para la segunda y última lente, la cual da una imagen virtual P'' a distancia infinita. El diafragma de campo D está situado, como en el ocular de Huygens, entre las dos lentes del segundo sistema; en el sistema inversor hay dispuesto un diafragma en el sitio en que el haz de rayos procedentes de todos los puntos de un objeto presenta una sección contraída. La pupila de salida o anillo ocular de todo el sistema cae en A.

A continuación damos las dimensiones de un ocular terrestre de Fraunhofer, según Prechtl:

	Distancia focal	Distancias entre las lentes
1.ª lente	31,4 mm	
		43,2 mm
2.ª »	39,8 »	
		73,2 »
3.ª »	45,8 »	
		50,5 »
4.ª »	31,4 »	

Supongamos que un haz de rayos paralelos al eje del sistema incida sobre la primera lente: según lo dicho en la página 238, tendremos $b_4 = 18{,}1$ mm, es decir, que el foco de la derecha de todo el sistema cae a 18,1 mm por detrás de la última lente. El cálculo inverso nos demuestra que el foco de la izquierda está a 12,4 mm por delante de la primera lente. Finalmente, según la fórmula (16) de la página 239, la distancia focal equivalente de todo el sistema será $f = 19{,}5$ mm, y siendo la distancia entre los dos focos igual a 197,4 mm, resulta que los dos puntos principales distarán entre sí 158,4 mm.

Con un objetivo de 418,5 mm de distancia focal, da este ocular un aumento de 21,4 diámetros. Estando enfocado al infinito, es decir, en condiciones telescópicas, se tiene la pupila de salida o anillo ocular a 19,0 mm por detrás de la última lente.

Anteojo holandés o de Galileo. Este anteojo da también la imagen directa del objeto observado, y consiste, en esencia, en una lente convergente, que es el objetivo (fig. 288), y en una divergente como ocular. Antes del punto en que convergen los rayos que han atravesado el objetivo, va colocado el ocular, que para un ojo normal da una imagen directa situada a distancia infinita Los focos interiores del objetivo y el ocular son casi coincidentes, y la longitud del anteojo es aproximadamente igual a la diferencia de las correspondientes distancias focales.

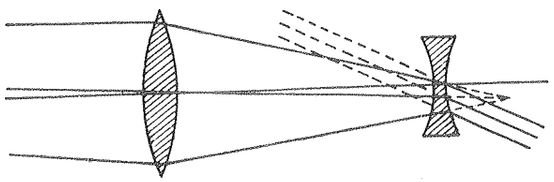


Fig. 288. — Anteojo holandés

En este anteojo la imagen obtenida es virtual, y no puede emplearse retículo alguno en el mismo, por lo cual no tiene aplicación en los instrumentos topográficos; en cambio, y a causa de su pequeña longitud, se emplea ventajosamente como anteojo terrestre y de teatro.

El anteojo holandés fué inventado en el año 1608, en Middelburg, por el constructor de anteojos Hans Lippershey. Al año siguiente construyó Galileo, según lo que había oído del invento holandés, un anteojo igual, que ordinariamente se conoce con el nombre de anteojo de Galileo.

Anteojo prismático. A mediados del siglo pasado indicó J. Porro que disponiendo un espejo angular entre el objetivo y el ocular de un anteojo de Kepler se conseguía la inversión de la primera imagen, de modo que resultaba un anteojo terrestre. Porro estudió diversas combinaciones sustituyendo después el espejo angular por un prisma de reflexión total.

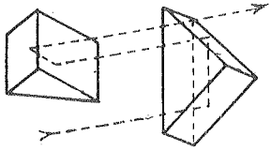


Fig. 289
Combinación de prismas

En la figura 289 se ve una de estas disposiciones, con la cual se reduce al mismo tiempo considerablemente la longitud del anteojo. Cerca del objetivo hay un prisma y cerca del ocular otro, con lo cual la distancia entre ambas lentes queda reducida casi al tercio de su valor primitivo.

§ 67. Anteojo con lente enfocadora móvil

El anteojo con teleobjetivo representado en la figura 284 ha conducido a la supresión del tubo portaocular, y la colocación de las imágenes en el plano fijo del retículo ha llevado consigo el que la lente divergente se pueda correr en la dirección del eje del anteojo. La supresión del tubo portaocular constituye un perfeccionamiento constructivo, pues el movimiento de dicho tubo nunca es rigurosamente rectilíneo, dando lugar a variaciones en el eje visual. Al mismo tiempo resulta un anteojo herméticamente cerrado al polvo, lo cual no puede decirse de los anteojos con tubo portaocular enchufado.

En la figura 290 se ve un anteojo moderno construído por la casa Otto Fennel Söhne, de Kassel, en el cual el retículo está fijo en el tubo principal y sólo para su ajuste y corrección puede moverse un poco lateralmente. La lente de enfoque puede correrse a lo largo

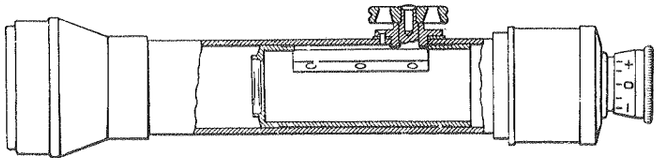


Fig. 290. — Anteojo con lente enfocadora móvil

del eje del anteojo accionada por un piñón, mientras que el ocular se puede mover un poco para llevar la imagen del retículo al punto remoto del ojo. Para facilitar este último enfoque va provisto el ocular de una rosca y unas divisiones numeradas en dioptrías. Por ejemplo, un observador que use lentes o gafas de —2 dioptrías, debe poner el ocular en la división —2, con lo cual verá el retículo en su punto remoto.

En otros modelos de anteojos se corre la lente de enfoque haciendo girar un anillo colocado sobre el tubo, cerca del ocular, el cual, por una rosca, comunica un movimiento de traslación a la lente enfocadora.

Las ventajas de estos anteojos son tales, que actualmente se aplican a la mayoría de los instrumentos topográficos.

Distancia focal del objetivo. La imagen real de un objeto enfocado con este anteojo se forma después de atravesar los rayos luminosos el objetivo propiamente dicho y la lente divergente de enfoque, por lo cual la distancia focal equivalente de las dos lentes es la que determina la posición y magnitud de la imagen. El movimiento de la lente de enfoque tiene el inconveniente de que la distancia focal equivalente varía con la distancia del objeto enfocado.

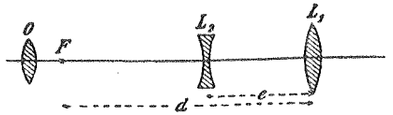


Fig. 291

En la figura 291, L_1 y L_2 son las dos lentes del objetivo, O el ocular y F el retículo; la distancia fija del retículo a la lente L_1 es d, y la distancia variable entre las dos lentes L_1 y L_2 es e.

Para hallar la distancia e entre las lentes del objetivo, correspondiente a una cierta distancia visual o de mira s, despreciaremos el espesor de las lentes y así podremos aplicar a las dos lentes la ecuación (1) de la página 235. Llamando b_1 a la distancia de la imagen a la primera lente L_1, tendremos:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}$$

de donde:

$$b_1=\frac{sf_1}{s-f_1} \tag{1}$$

y puesto que para la lente L_2 la distancia del objeto es igual a $e-b_1$, se tiene, para la segunda distancia b_2 de la imagen:

$$\frac{1}{e-b_1}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}. \tag{2}$$

Y como b_2 debe ser igual a $d-e$, resulta, sustituyendo en esta última igualdad el valor de b_1 dado por la fórmula (1), y el de $b_2=d-e$:

$$\frac{1}{e-\dfrac{sf_1}{s-f_1}}+\frac{1}{d-e}=\frac{1}{f_2}. \tag{3}$$

De donde resulta la siguiente ecuación de segundo grado en e:

$$e^2-\left(\frac{sf_1}{s-f_1}+d\right)e=\frac{sf_1(f_2-d)}{s-f_1}-df_2$$

o escrita en otra forma:

$$e^2-\left(\frac{\dfrac{f_1}{1-\dfrac{f_1}{s}}+d}\right)e=\frac{f_1}{1-\dfrac{f_1}{s}}(f_2-d)-df_2. \tag{4}$$

Para abreviar la expresión final, pongamos

$$\frac{f_1}{1-\dfrac{f_1}{s}}=q \tag{5}$$

y resolviendo la ecuación (4) tendremos:

$$e=\frac{q+d}{2}-\sqrt{q\left(f_2-\frac{d}{2}+\frac{q}{4}\right)+d\left(\frac{d}{4}-f_2\right)}. \tag{6}$$

En este caso se ha tomado para la raíz el signo negativo, porque para el signo positivo la lente divergente no estaría ya entre la convergente y el retículo.

Vamos a aplicar este cálculo a un anteojo descrito por Wild, en el cual se tienen los siguientes datos numéricos:

$$f_1=149\text{ mm},\quad f_2=-500\text{ mm},\quad d=165\text{ mm}.$$

Para un objeto situado, por ejemplo, a una distancia $s=100000$ mm, tendremos:

$$q=149{,}22\text{ mm}\qquad \frac{q+d}{2}=157{,}11\text{ mm}$$

$$q\left(f_2-\frac{d}{2}+\frac{q}{4}\right)=-81355{,}2$$

$$d\left(\frac{d}{4}-f_2\right)=+89306{,}2$$

$$+7951{,}0$$

$$e=157{,}11-\sqrt{7951{,}0}=157{,}11-89{,}17\text{ mm}$$

y finalmente:

$$e=67{,}94\text{ mm}.$$

De este modo se puede calcular el valor de e para diferentes distancias s. En el cuadro siguiente se ve el resumen de valores e correspondientes a s; también figuran en este cuadro las distancias focales equivalentes de las dos lentes L_1 y L_2, calculadas por las fórmulas (13) de la página 238. La posición del retículo nos da el valor límite para $e=d$, que corresponde a $s=1{,}537$ m. En la práctica no se da el caso de una amplitud de movimiento tan grande en la lente de enfoque.

s	e	f
m	mm	mm
∞	67,200	178,15
300	67,447	178,04
200	67,57	177,99
100	67,94	177,83
50	68,69	177,51
20	70,96	176,56
10	74,92	174,92
5	83,43	171,49
2	118,19	158,78
1,537	165,00	144,38

(7)

La distancia focal del objetivo oscila unos 6 mm, si se mira a distancias menores de 5 m. La consiguiente variación en el aumento es despreciable; en cambio, la variación de la distancia focal merece ser tenida en cuenta en la medición óptica o indirecta de distancias, por lo cual volveremos más adelante sobre esta cuestión.

Eje visual o de colimación. En el anteojo de lente enfocadora móvil hay que definir el eje visual como lugar geométrico de todos los puntos en que se forma la imagen del retículo a través del objetivo y de la lente de enfoque, cuando el anteojo se enfoca a objetos situados a cualquier distancia (véase pág. 258). Si el centro de la lente de enfoque L_2 se moviera siempre sobre la recta determinada por el centro del retículo y el de la lente convergente L_1, esta recta sería al mismo tiempo el eje de colimación del anteojo. Pero en general no sucede esto, siendo preciso que el retículo pueda correrse lateralmente para corregir o poner a punto el instrumento: es decir, que la imagen del centro del retículo no cae sobre la misma recta.

Supongamos que la lente de enfoque L_2 (fig. 292) se mueva sobre una recta AB, y que p y q sean respectivamente las distancias del centro del retículo y del centro de la lente convergente L_1 a esta recta. Un rayo procedente de F paralelo a la recta AB, se

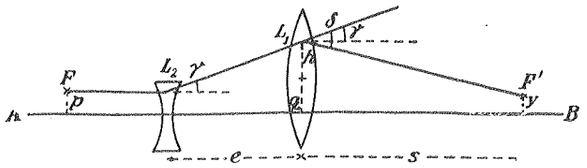


Fig. 292

desvía en un ángulo γ al atravesar la lente L_2, y llamando f_2 a la distancia focal negativa de esta lente, se tiene:

$$\gamma = -\frac{p}{f_2}. \tag{8}$$

Al encontrar este rayo a la lente L_1 a una distancia h de su centro, experimenta una nueva desviación δ, que será:

$$\delta = \frac{h}{f_1}. \tag{9}$$

Ahora bien, según se ve en la figura, tenemos:

$$h = p + e\gamma - q = p - q - \frac{p}{f_2}e$$

de donde:

$$h + q = p - \frac{p}{f_2}e \tag{10}$$

y sustituyendo en (9) resulta:

$$\delta = \frac{p-q}{f_1} - \frac{p}{f_1 f_2}e. \tag{11}$$

La imagen del retículo dada por las dos lentes, caerá en F', a una distancia s de la lente L_1.

Según la misma figura, tendremos para valor de la distancia y entre la imagen F' del centro del retículo, y la recta AB:

$$y = q + h - s(\delta - \gamma)$$

o bien:

$$y = p - \frac{p}{f_2}e - s\left(\frac{p-q}{f_1} - \frac{p}{f_1 f_2}e + \frac{p}{f_2}\right) \tag{12}$$

También podemos poner esta igualdad en la siguiente forma:

$$y = p - \frac{p}{f_2}e - s\left(\frac{f_1 + f_2 - e}{f_1 f_2}p - \frac{q}{f_1}\right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{f_1 + f_2 - e}{f_1 f_2} = f$$

donde f es la distancia focal equivalente de las dos lentes para la distancia e, se tiene

$$y = p - \frac{p}{f_2}e - \frac{p}{f}s + \frac{q}{f_1}s$$

y también

$$y = -\frac{p}{f}(s - f) - \frac{p}{f_2}e + \frac{q}{f_1}s. \tag{13}$$

Los dos primeros términos del segundo miembro pueden agruparse en uno solo, pues llamando u a la distancia entre el punto principal anterior del sistema y la lente L_1, tendremos, según las fórmulas (13) y (14) de la página 238:

$$u = \frac{e f_1}{f_1 + f_2 - e} = \frac{f}{f_2}e \tag{14}$$

por lo cual

$$y = -\frac{p}{f}(s + u - f) + \frac{q}{f_1}s. \tag{15}$$

Ahora bien, el factor $s + u - f$ es la distancia s' del punto F' al foco anterior del sistema; es decir:

$$s + u - f = s' \tag{16}$$

y sustituyendo este valor en (15), resulta:

$$y = -\frac{p}{f}s' + \frac{q}{f_1}s. \tag{17}$$

El segundo término de esta expresión aumenta proporcionalmente a la distancia s; la curvatura del eje visual está determinada por el primer término, correspondiente a un anteojo ordinario con distancia focal del objetivo constante.

Para poder determinar la forma del eje visual, tomemos como punto de comparación otro eje visual, dado por la ecuación:

$$y_0 = -\frac{p}{f_\infty}s' + \frac{q}{f_1}s \tag{18}$$

en la cual f_∞ es el valor constante de la distancia focal equivalente para $s = \infty$. Esta ecuación (18) representa una línea recta, que es al mismo tiempo el eje visual de un anteojo con tubo ocular enchufado y un teleobjetivo de distancia focal f_∞, en el cual la recta sobre que se mueve el retículo está a distancia p del centro de la lente divergente, y a distancia $q - p$ del centro de la convergente.

Para comparar el eje visual con esta recta, lo mejor es tomar la ecuación (12) y poner en ella e_∞ en vez de e, con lo cual se convierte en esta otra:

$$y_0 = p - \frac{p}{f_2}e_\infty - s\left(\frac{p-q}{f_1} - \frac{p}{f_1 f_2}e_\infty - \frac{p}{f_2}\right) \tag{19}$$

donde e_∞ es el valor constante de e para $s = \infty$. De las ecuaciones (12) y (19), restándolas ordenadamente, resulta:

$$y - y_0 = -\frac{p}{f_2}(e - e_\infty) + \frac{p}{f_1 f_2}(e - e_\infty)\, s$$

o bien:

$$y - y_0 = \frac{p\,(e - e_\infty)}{f_1 f_2}(s - f_1). \tag{20}$$

Si con esta fórmula, y utilizando los valores numéricos dados en la página 269, queremos calcular la diferencia $y - y_0$ para distintos valores de s, tenemos que empezar por hallar el valor correspondiente a $s = \infty$, y puesto que para este valor, $e - e_\infty$ es igual a 0, resulta que la ecuación (20) nos da el valor indeterminado $0 \times \infty$. Para eliminar esta indeterminación, volvamos a la fórmula (4), que para grandes valores de s puede ponerse en la siguiente forma:

$$e^2 - f_1\left(1 + \frac{f_1}{s}\right)e - d\,e = f_1\left(1 + \frac{f_1}{s}\right)(f_2 - d) - d f_2$$

se convierte en esta otra:

$$e^2{}_\infty - f_1 e_\infty - d e_\infty = f_1 (f_2 - d) - d f_2$$

nadamente estas dos ecuaciones se tiene:

$$e^2 - e^2{}_\infty - f_1 (e - e_\infty) - f_1{}^2 \frac{e}{s} - d (e - e_\infty) = \frac{f_1{}^2}{s} (f_2 - d)$$

o sea

$$(e - e_\infty) s - f_1 \frac{e - e_\infty}{e + e_\infty} s - \frac{f_1{}^2 e}{e + e_\infty} - d \frac{e - e_\infty}{e + e_\infty} s = f_1{}^2 \frac{f_2 - d}{e + e_\infty}$$

de donde:

$$(e - e_\infty) s = \frac{f_1{}^2 (e + f_2 - d) \dfrac{1}{(e + e_\infty)}}{1 - \dfrac{f_1 + d}{e + e_\infty}} = \frac{f_1{}^2 (e + f_2 - d)}{e + e_\infty - f_1 - d}$$

y para $s = \infty$, queda:

$$(e - e_\infty) s = \frac{f_1{}^2 (e_\infty + f_2 - d)}{2 e_\infty - f_1 - d}.$$

De aquí resulta también el valor de $y - y_0$ para $s = \infty$, a saber:

$$p \frac{f_1 (e_\infty + f_2 - d)}{f_2 (2 e_\infty - f_1 - d)} = - 0{,}9919\, p.$$

Con la fórmula (20) hemos calculado los resultados numéricos que se resumen en el cuadro siguiente:

s	$e - e_\infty$	$y - y_0$
m	mm	mm
∞	0	$- 0{,}99\, p$
300	0,247	$- 0{,}99\, p$
200	0,37	$- 0{,}99\, p$
100	0,74	$- 0{,}99\, p$
50	1,49	$- 1{,}00\, p$
20	3,76	$- 1{,}00\, p$
10	7,72	$- 1{,}02\, p$
5	16,23	$- 1{,}06\, p$
2	50,99	$- 1{,}27\, p$
1,537	97,80	$- 1{,}82\, p$

(21)

donde p se expresa en milímetros.

Se deduce de lo que antecede, que el eje visual es una línea ligeramente curva, cuya curvatura es tan pequeña que para pequeñas distancias puede considerarse el eje visual prácticamente como una línea recta, paralela a la recta sobre que se mueve el retículo y a distancia p de esta última.

De aquí resulta también claro el efecto que se consigue corriendo lateralmente el retículo con sus tornillos de corrección, con lo cual varía el valor de p, y según la fórmula (18) la recta sobre que se mueve el retículo gira alrededor de su punto de intersección con el primer plano focal del sistema de lentes enfocado al infinito, es decir, en condiciones telescópicas. El mismo ángulo describe, según lo que hemos expuesto, el verdadero eje visual del anteojo, y al mismo tiempo se corre paralelamente a sí mismo en una distancia igual a la corrección o traslación lateral del retículo.

§ 68. Microscopio compuesto

Así como el anteojo sirve para obtener imágenes aumentadas de objetos lejanos, el microscopio se emplea para aumentar las imágenes de los objetos cercanos, y especialmente, en Topografía, para leer divisiones muy finas.

Según se ve en la figura 293 el microscopio compuesto consiste en un objetivo O y en un ocular, que generalmente está formado por dos lentes A y B, como los oculares de los anteojos. También en los microscopios se emplean los oculares de Ramsden y de Huygens, de los cuales ya hemos tratado anteriormente.

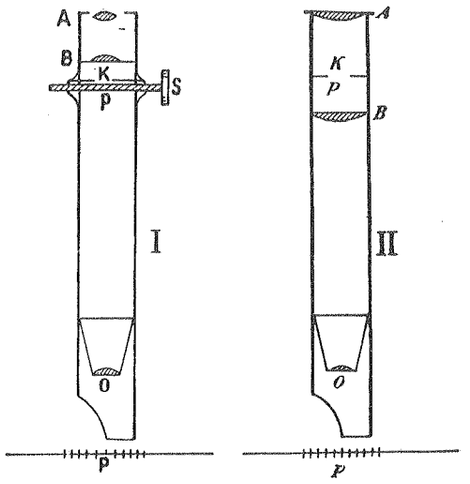


Fig. 293. — Microscopio:
I, con ocular de Ramsden; II, con ocular de Huygens

Los hilos tensos situados en K desempeñan aquí el mismo papel que el retículo en un anteojo.

En la figura 293, I, se ve además un tornillo S, cuyo uso veremos más adelante al hablar de los microscopios lectores para limbos graduados (§ 72).

El aumento de un microscopio puede determinarse de modo análogo a como se dijo en la página 254 para un anteojo, sobre todo si se tiene una escala de valor conocido en el campo visual del microscopio.

Vamos a detenernos un poco en una cuestión que, si bien de momento parece carecer de interés, tiene mucha importancia en la lectura de los limbos graduados de los teodolitos, a saber, la disposición o construcción del microscopio para leer una escala graduada (fig. 294).

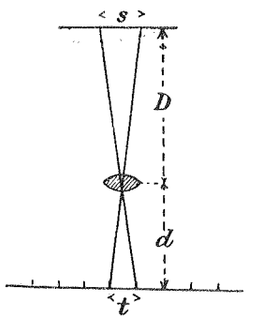


Fig. 294

En el campo visual de estos microscopios se tienen dos hilos K (fig. 293) a cierta distancia entre sí, s (fig. 294), que debe corresponder a la unidad t de la escala que se observa. En los microscopios de tornillo, la distancia s entre los hilos es igual a la traslación que éstos experimentan cuando se da una vuelta completa al tornillo (véase § 72).

En la figura 294 se ve un microscopio del cual sólo se representa el objetivo. Además del valor de la unidad de división t, y del de la distancia entre los hilos s, se dan las distancias d y D del objetivo a la escala y a los hilos. Si la distancia focal del objetivo es f, tenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \qquad \text{y} \qquad \frac{s}{D} = \frac{t}{d} \tag{1}$$

entre las cuales puede eliminarse D o d, resultando respectivamente:

$$D = f + \frac{s f}{t} \qquad d = f + \frac{t f}{s}. \tag{2}$$

CAPÍTULO VII

El teodolito

El teodolito fué construído hacia el año 1730, por el mecánico inglés Sisson, y tenía las mismas propiedades y características que los actuales teodolitos no repetidores. Hasta fines del siglo XVIII corresponde a los ingleses el perfeccionamiento de los teodolitos, distinguiéndose en primer lugar Short, Adams y Ramsden. En Alemania, debe el teodolito su forma actual a Reichenbach, que en 1804 construyó un teodolito repetidor con anteojo fijo; el sistema de construcción de Reichenbach fué adoptado en muchos talleres mecánicos en la primera mitad del siglo XIX.

La palabra teodolito parece provenir del árabe, con adición o fusión del artículo inglés *the*. Otra palabra originaria del árabe es alidada (hall-idhada), que significa *brazo*. En cambio, la palabra *limbo* es latina y significa *borde* u *orla*.

§ 69. Definición y descripción del teodolito

El teodolito es un instrumento que sirve para medir ángulos horizontales, o ángulos horizontales y ángulos verticales.

En este capítulo trataremos de la medición de ángulos horizontales con el teodolito.

Teodolito simple. La figura 295 representa un pequeño teodolito topográfico, tal como se construye en general actualmente. La base está compuesta por una plataforma de tres brazos D, terminados en tornillos nivelantes. El cubo B de donde parten estos brazos, lleva, formando cuerpo con el mismo, un disco horizontal K, en cuyo borde, de forma cónica, va aplicado un limbo de plata con la graduación acimutal.

En el hueco central del cubo B gira un muñón, apoyado por dos superficies cónicas, que sirve de soporte a toda la parte superior del instrumento. En primer lugar e inmediatamente por encima de este muñón V va fijada a éste una plataforma circular A, que constituye la alidada, cuyo borde tiene forma cónica, como prolongación del borde del círculo acimutal K. En dos puntos diametralmente opuestos NN de la alidada A, van dos nonios, para hacer las lecturas acimutales. La alidada lleva al mismo tiempo, para resguardar al limbo, una cubierta o chapa cónica TT que presenta dos aberturas, provistas de láminas de vidrio, en las partes correspondientes a los nonios. Los dos microscopios lectores van sobre brazos que pueden girar un poco alrededor del eje de la alidada, con objeto de facilitar las lecturas.

Sobre la alidada van fijos los dos soportes SS del anteojo, que en su parte superior van provistos de cojinetes para el eje horizontal HH, alrededor del cual gira el anteojo ZZ, dispuesto céntricamente.

Es decir, que los dos movimientos principales en el teodolito son, primero, el giro de la alidada, con toda la parte superior, alrededor del eje vertical, y segundo, la rotación del anteojo alrededor del eje horizontal.

La alidada lleva además encima un nivel L, que sirve para colocar verticalmente el eje general del teodolito.

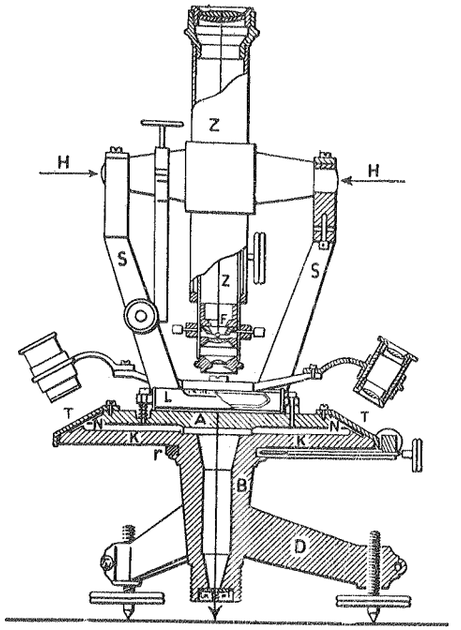


Fig. 295. — Teodolito simple

Tornillos de presión y coincidencia. Para inmovilizar la alidada y poderle dar después pequeños movimientos en uno u otro sentido, sirve el dispositivo representado en la figura 296. Alrededor del cubo central B de donde parten los tres pies del teodolito, pasa, por debajo de la alidada, un anillo r (figs. 295 y 296), que queda apretado contra el cubo al dar vueltas al tornillo de presión que acerca una pequeña pieza a dicho cubo. El anillo r se prolonga hacia fuera del círculo alidado, y sobre esta prolongación F va una especie de tope Z sobre el cual actúa un tornillo, llamado de coincidencia, dispuesto sobre un saliente especial de un bastidor circular R, que está fijado al círculo alidado A; en dirección contraria al tornillo de coincidencia, obra sobre el tope Z un muelle antagonista. Estando apretado el tornillo de presión, queda unida la alidada a la base o plataforma nivelante por medio del tope Z; dando vueltas al tornillo de coincidencia o llamada, se puede hacer girar un poco la alidada con gran lentitud.

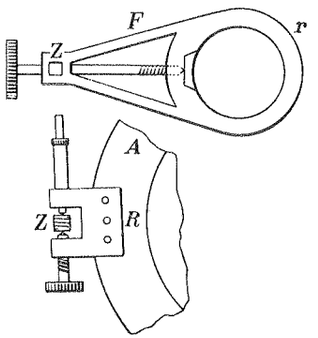


Fig. 296. — Tornillos de presión y de coincidencia de la alidada

Es muy frecuente también, en muchos teodolitos, que el bastidor circular R, con el tornillo de coincidencia y el muelle antagonista, vayan fijos a la horquilla F, mientras que el tope Z va unido por su extremo superior al disco de la alidada, entrando de arriba abajo en el bastidor R.

Teodolito repetidor. En las figuras 297 y 298 se ven otras dos disposiciones del eje vertical, en las cuales el círculo horizontal (acimutal) puede girar alrededor de dicho eje. En la figura 297, el gorrón o eje V de la alidada gira dentro de la caja o vaina B, la cual gira a su vez dentro del cubo D, que forma cuerpo con las tres patas del teodolito. Este sistema de ejes, que es de los más empleados en la actualidad, fué ideado por Reichenbach, a principios del siglo XIX.

La figura 298 representa otro sistema de ejes también muy empleado, debido al astrónomo francés Borda, en 1785; en este sistema, va por dentro del cubo D un eje fijo metálico M, alrededor del cual gira la vaina o caja B, y dentro del mismo gira el eje de la alidada V.

Los teodolitos provistos de este doble eje, con dos dispositivos de presión y coincidencia, se llaman repetidores; con dichos dispositivos se puede hacer solidario el círculo

acimutal con la plataforma nivelante, o con el círculo de los nonios (alidada). Esta última unión se hace, en los modelos representados en las figuras 297 y 298, del mismo modo que

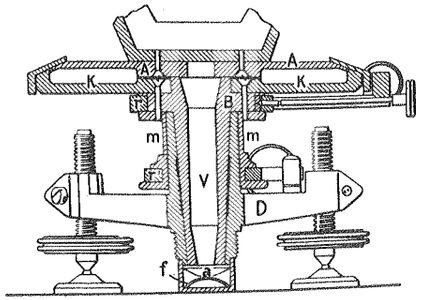


Fig. 297. — Teodolito repetidor de Reichenbach

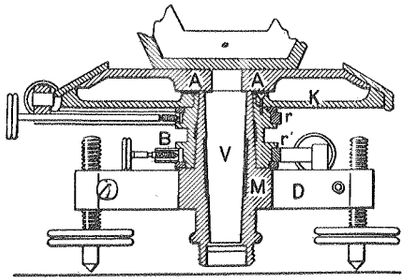


Fig. 298. — Teodolito repetidor de Borda

en el de la figura 295, es decir, con tornillos iguales al de la figura 296. Para hacer solidario el círculo acimutal con la plataforma nivelante, se ve en la figura 297, debajo de dicho círculo, un cilindro *mm* unido al mismo, alrededor del cual puede girar un anillo *r'* (fig. 299). Mediante un tornillo de presión se aprieta este tornillo contra el cilindro *mm*; el anillo se prolonga, en la parte opuesta a este tornillo, terminando en una pequeña horquilla, donde van el tornillo de coincidencia y el muelle antagonista. En esta horquilla entra un tope fijado perpendicularmente a uno de los pies de la plataforma nivelante, con lo cual queda hecha la unión entre el círculo acimutal y el soporte del teodolito.

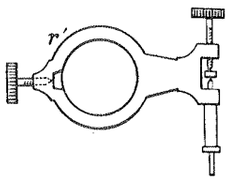


Fig. 299

En la figura 298, el anillo *r'* gira directamente sobre el cubo o eje hueco del círculo acimutal.

Dispositivo repetidor de Carl Zeiss. En un modelo nuevo de teodolito de Carl Zeiss (fig. 322) el círculo acimutal va dispuesto como indica la figura 298, pero no hay tornillo de presión ni de coincidencia para este círculo; en cambio, sobre la alidada va fijada una pequeña palanca, que al ser accionada hace que queden unidos entre sí el círculo y la alidada. En estas condiciones, el círculo acimutal gira a la vez que la alidada, solidariamente con ésta, y al soltar la palanca, gira la alidada permaneciendo inmóvil el círculo acimutal. Aparte de este dispositivo de embrague, hay solamente un tornillo de presión y otro de coincidencia.

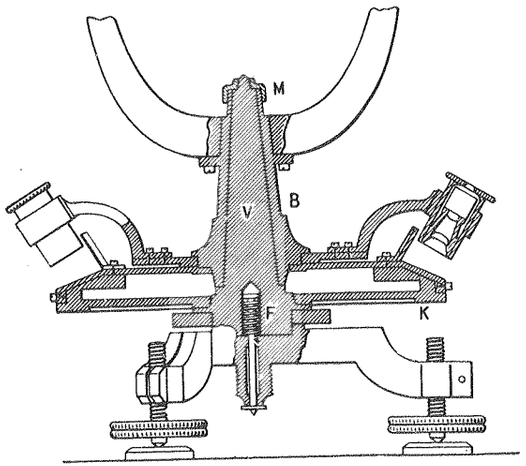


Fig. 300. — Sistema de ejes del teodolito reiterador de Repsold

Los dispositivos representados en las figuras 296 y 299 son los que más se emplean en la actualidad.

Teodolito simple con círculo acimutal giratorio (teodolito reiterador). La figura 300 representa el sistema de rotación ideado por el mecánico de Hamburgo J. G. Repsold (hacia 1825-1830), y adoptado en la actualidad para los teodolitos de gran tamaño. Un muñón muy fuerte *V* descansa sobre la plataforma nivelante y sostiene por su parte inferior cónica el círculo acimutal *K*. Alrededor de la parte superior, que también es cónica, gira una cubierta o vaina *B* que lleva los microscopios lectores y los montantes para el anteojo. Una tuerca de forma especial *M* mantiene unida la vaina *B* al muñón *V*.

Para utilizar este instrumento sobre pilar de piedra, lleva un dispositivo centrador que consiste en un vástago con muelle antagonista *F*, que se mueve sobre el centro del triángulo determinado por los tres tornillos nivelantes hasta tocar con su punta la cara superior del pilar.

El círculo acimutal no lleva tornillo de presión, ajustándose al eje sólo por frotamiento, y pudiéndose girar en cualquier sentido, según convenga.

Esta construcción se tiene en los teodolitos representados en las figuras 319 a 321.

Apoyo del eje vertical. Para disminuir el rozamiento en los teodolitos grandes, es necesario apoyar de algún modo el eje de la alidada, es decir, *descargarlo* de modo adecuado En la figura 297, el extremo inferior *a* de dicho eje descansa sobre un muelle laminar *f*.

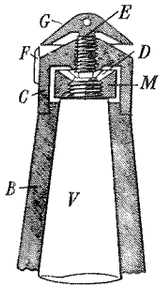


Fig. 301

La figura 301 representa otro sistema de apoyo del eje vertical, ideado por Max Hildebrand para los teodolitos con suspensión sistema Repsold. Sobre el eje *V* va la vaina o caja *B*, que lleva arriba el tapón o caperuza *C*; la tuerca *M* que impide que la vaina *B* pueda salirse del eje *V*, tiene vaciada su cara superior *D*; la caperuza *C* lleva practicado un agujero roscado por donde pasa el tornillo *E*, cuya cabeza *G* lleva una escala dividida, que se lee con el índice *F*. El vaciado *D* de la tuerca *M* y el espacio existente entre esta tuerca *M* y la caperuza *C* están llenos de aceite, con lo cual se tiene también una capa fina de aceite entre el eje *V* y la vaina *B*. Al montar el instrumento, se gira la cabeza *G* del tornillo, mediante un espeque, hasta que el tornillo *E* llegue al contacto con el eje *V*.

Eje horizontal o de giro del anteojo. El eje horizontal *HH* (fig. 295), alrededor del cual puede bascular y hasta dar la vuelta entera el anteojo, se apoya por sus dos muñones extremos en dos cojinetes en forma de Y (figs. 303, 305 y 306); los muñones son cilíndricos, por lo cual sólo tienen dos rectas de contacto con sus cojinetes respectivos.

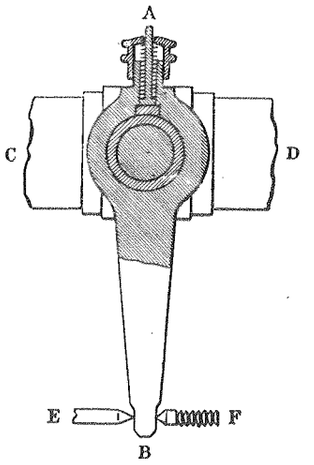


Fig. 302. — Sujeción del anteojo a rozamiento fuerte

En los teodolitos pequeños es frecuente ver los cojinetes de forma cilíndrica y cerrados, es decir, completos (figura 304), en los cuales evidentemente no es posible invertir el anteojo, o sea cambiarlo de posición, de modo que cada muñón vaya a alojarse en el cojinete que ocupaba el otro.

También el movimiento del anteojo en un plano vertical, es decir, alrededor del eje horizontal, va regulado por tornillos de presión y coincidencia (fig. 302). En los teodolitos sin círculo vertical o altimétrico, no es preciso que el anteojo quede unido rígidamente al eje horizontal al apretar el tornillo de presión, sino que ordinariamente se emplea el dispositivo representado en la figura 302, en el cual el

vástago A, accionado por un muelle helicoidal, mantiene apretada contra el eje una pieceta adecuada, regulándose la presión con la tuerca superior de tal modo que el movimiento lento del anteojo CD pueda lograrse con el tornillo de coincidencia E y muelle antagonista F, que actúan sobre el brazo B, y los movimientos de mucha amplitud pueden darse directamente sin aflojar la tuerca superior, que hace las veces de tornillo de presión.

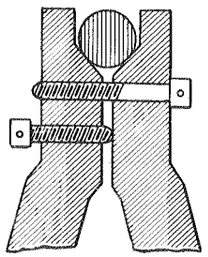


Fig. 303

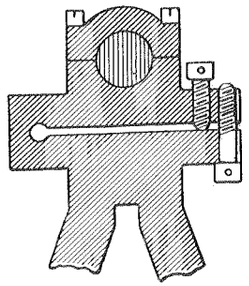


Fig. 304

Los cojinetes del eje horizontal van rígidamente unidos a la alidada mediante los montantes SS (fig. 295).

Puesto que el eje de giro del anteojo ha de ser siempre perpendicular al vertical o general del teodolito, uno de los cojinetes del primero va provisto de un dispositivo para regular su altura. Ordinariamente se hace esta regulación ensanchando o estrechando una rendija practicada en uno de los montantes del anteojo, por medio de dos tornillos, uno de presión y otro de llamada, como se ve en la figura 303. Cuando los cojinetes son cilíndricos y cerrados, la rendija es de ordinario horizontal, y va provista también de tornillos de presión y llamada (fig. 304).

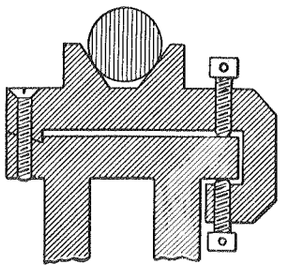


Fig. 305

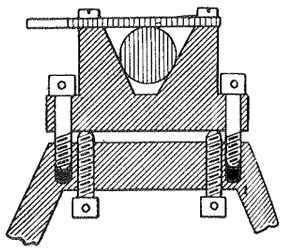


Fig. 306

En la figura 305 se ve un perfeccionamiento de esta última construcción, en la cual los tornillos actúan en dirección opuesta, sobre una misma recta, evitándose que pueda curvarse la parte superior del cojinete, lo cual puede ocurrir con facilidad en el representado en la figura 304. En la figura 306 se ve un dispositivo antiguo, adoptado sobre todo para teodolitos grandes.

Con los medios de que actualmente disponen las casas constructoras de esta clase de aparatos, no presenta dificultad alguna el montar el eje de giro del anteojo perpendicularmente al vertical, de modo que, por lo menos para los teodolitos pequeños, puede prescindirse del dispositivo regulador del eje horizontal (figs. 316 y 317).

El anteojo. De las dos formas de anteojo de que hemos tratado anteriormente (§§ 65 a 67), se emplea actualmente cada vez más, para los instrumentos pequeños, el anteojo con lente móvil de enfoque, mientras que para los grandes sigue aún empleándose el antiguo anteojo de ocular enchufado.

El aumento de los anteojos para instrumentos pequeños es de 15 a 20 diámetros; para los medianos, de 20 a 30 diámetros, y para los muy grandes alcanza de 50 a 60 diámetros; en los modelos más pequeños suelen emplearse anteojos con sólo 10 diámetros de aumento.

El eje visual Z del anteojo (fig. 295) debe tener una posición precisa, perpendicular al eje horizontal H, por lo cual el retículo debe poderse mover transversalmente, es decir,

en dirección normal a la dirección del anteojo. Esta corrección del retículo dentro del tubo ocular se consigue del modo indicado en la figura 307; este dispositivo es el mismo que estudiamos anteriormente (fig. 282) al tratar del eje visual.

El retículo (fig. 307) se encuentra en el anillo cónico del diafragma; si se quiere correr el retículo hacia la izquierda, se afloja el tornillo de la izquierda y se aprieta el de la derecha.

El anteojo de la figura 295 va provisto de un ocular de Ramsden, que puede correrse un poco hacia adentro y hacia afuera.

El retículo de los anteojos empleados en los teodolitos no consiste, generalmente, sólo en una cruz filar, como se ve en la figura 307, sino que el hilo vertical es doble, para lograr una mayor precisión en la puntería, de acuerdo con la teoría expuesta anteriormente (fig. 268).

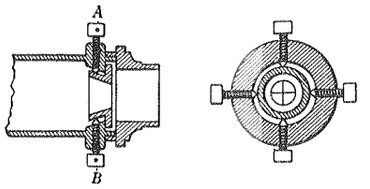


Fig. 307

Los movimientos del anteojo, en parte obligados por las observaciones, y en parte hechos para anular o compensar errores, reciben nombres particulares, a saber:

1. *Bascular* el anteojo es apuntar con el mismo hacia arriba o hacia abajo, girando alrededor del eje horizontal.

El anteojo debe estar en equilibrio para las posiciones corrientes del ocular, de tal modo que puedan medirse los ángulos horizontales o acimutes sin tener que emplear el tornillo de coincidencia para el movimiento vertical del anteojo.

2. *Dar la vuelta de campana* al anteojo es hacerle girar 180° alrededor del eje horizontal, de modo que el objetivo pase a ocupar el sitio del ocular, y éste el de aquél.

Para dar directamente la vuelta de campana al anteojo es preciso que los montantes de éste sean lo bastante altos y que el anteojo no sea demasiado largo. En los teodolitos muy grandes (figs. 319 y 321) no puede darse al anteojo la vuelta de campana directamente, sino de modo indirecto, que consiste en levantar el anteojo, sacando su eje horizontal de los cojinetes y volviéndolo a poner sobre éstos, pero después de haberle dado la vuelta de manera que el ocular caiga al lado donde antes estaba el objetivo, y al contrario. En cambio, en los teodolitos de anteojo excéntrico (figs. 320 y 330) puede darse la vuelta de campana al anteojo sin la menor dificultad.

La vuelta directa es, desde luego, la más conveniente. Si esta vuelta, para anteojos con ocular enchufado, se hace pasando por debajo el extremo ocular, debe haber espacio suficiente para que éste pueda pasar hasta cuando esté enfocado a una distancia de mira igual a 50 m.

3. *Invertir* el anteojo es levantarlo de sus cojinetes y dándole la vuelta alrededor de su eje de figura, volverlo a colocar de modo que el muñón que antes estaba a la izquierda caiga sobre el cojinete de la derecha, y al contrario. La inversión se dificulta muchas veces por la posición asimétrica de las piezas, como sucede con el círculo altimétrico, etc., y generalmente es imposible de efectuar en los aparatos más usuales.

Niveles. Con un solo nivel puede colocarse vertical el eje general o principal del teodolito, pero casi todos estos instrumentos tienen dos y a veces tres niveles.

Distinguiremos en el teodolito dos clases distintas de niveles: el nivel del eje horizontal (nivel caballero) y el nivel del eje vertical (nivel de plataforma). En el párrafo 56 se ha visto ya la teoría general del nivel.

Con un nivel fijado sobre el anteojo puede utilizarse el teodolito para nivelaciones:

pero para utilizar el teodolito como goniómetro, es decir, como instrumento que mide ángulos, no tiene valor alguno dicho nivel, por lo cual prescindiremos aquí de su empleo y utilización, pues tampoco para medir ángulos verticales resulta práctico el nivel sobre el anteojo. Por consiguiente, sólo nos ocuparemos de los dos niveles primeramente indicados.

1. *Nivel caballero.* El nivel caballero, que va sobre el eje de giro del anteojo, no es fijo, sino móvil, y puede colocarse sobre aquél en dos posiciones que difieren entre sí 180°.

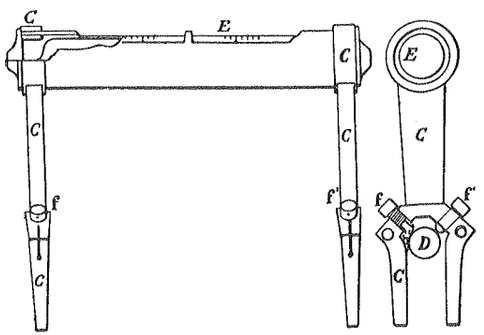


Fig. 308. — Nivel caballero

En la figura 241 vimos ya un nivel caballero, y en las figuras 318, 319 y 321 pueden verse niveles de esta clase montados en el eje horizontal del teodolito. En todas estas figuras asoman claramente las cabezas de los tornillos de corrección correspondientes. En la figura 308 se ve otro sistema de montaje de los tornillos de corrección *ff'*, debido a Tesdorpf.

El nivel del eje horizontal no tiene en los teodolitos topográficos la importancia que en los astronómicos, pues en Topografía son raras las visuales muy inclinadas, y para visuales casi horizontales no ejerce gran influencia la rigurosidad con que esté nivelado el eje horizontal.

2. *Nivel de plataforma.* Se llama así al nivel fijado sobre la alidada del círculo acimutal, ya sea en el centro o a un lado, y ya sea tubular y colocado en la dirección del anteojo (necesario para los ángulos de altura), o tubular y montado en la dirección del eje de giro del anteojo (como el *L*, en la figura 295), y tanto si es esférico (como el *D*, en la figura 316), como si está compuesto por un par de niveles en ángulo recto, como se ve en la figura 317.

En ningún teodolito debiera faltar un nivel esférico. En los pequeños teodolitos topográficos basta con uno de estos niveles, en general, cuando se trata de medir los ángulos horizontales. En los teodolitos grandes, que van provistos además de un nivel tubular de precisión, sirve el nivel esférico para una primera nivelación aproximada de la plataforma, lo cual por una parte ahorra trabajo y tiempo, y por otra evita muchas vueltas inútiles al eje general del teodolito.

Lo mejor es dotar al teodolito de un nivel esférico y uno caballero; el primero se empleará para las observaciones corrientes y el segundo, de modo excepcional, sólo para comprobaciones y rectificaciones.

Fijación del teodolito en el trípode. En el campo se emplea ordinariamente el teodolito montado sobre un trípode, como el representado en la figura 309, construído por

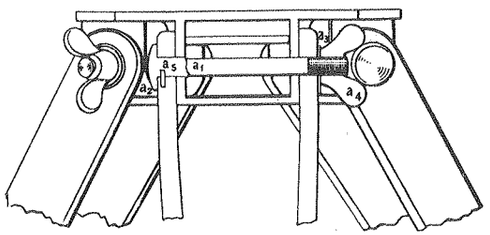
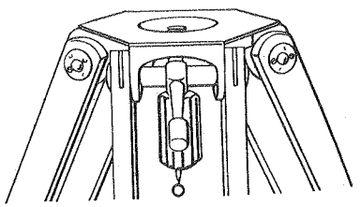
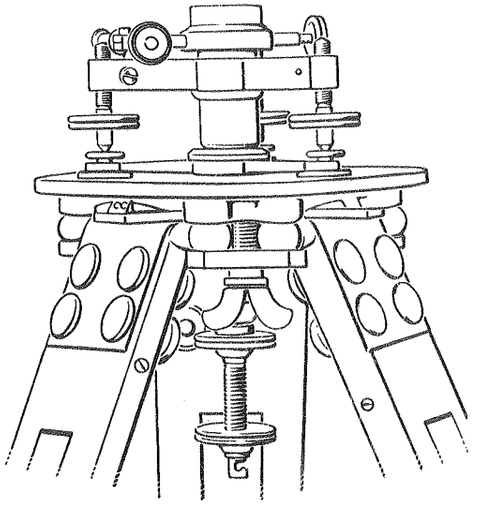


Fig. 309


Fig. 310

Otto Fennel, de Kassel. Las plataformas de los trípodes, generalmente metálicas, llevan en su cara inferior tres salientes, a los cuales se unen, mediante pernos con rosca, los dos brazos de madera de cada pata del trípode. Apretando las tuercas de orejetas se puede, una vez puesto el trípode del modo más conveniente, hacer solidarias las patas con la plataforma.


Fig. 311

En un nuevo trípode construído por Gustavo Heyde, de Dresden (fig. 310), los pernos de sujeción de las patas tienen sus dos extremos fileteados en sentido opuesto, pasando a rosca por dos placas metálicas colocadas en la parte de fuera de los dos brazos de cada pata del trípode. Girando un poco el perno de sujeción, mediante una palanca corta especial, se pueden apretar los brazos de cada pata contra el saliente de la plataforma en que va el perno correspondiente.

En la figura 311 se ve otro sistema de trípode muy empleado actualmente y construído por Rosenberg en Berlín; el representado en la figura 312, también del mismo sistema, está construído por Wolz, de Bonn. Los dos brazos de cada pata del trípode llevan, en su extremo superior, unas caperuzas de metal que van unidas a una varilla metálica *m*, terminada por ambos extremos en unas esferas *K*; estas esferas penetran un poco en unas cavidades poco profundas practicadas en la cara inferior de la plataforma, en las cuales se mantienen alojadas por la presión que sobre ellas ejercen unas placas metálicas *d*, gracias a los tornillos *S* con cabeza de orejetas. La gran distancia a que entre sí se encuentran las dos esferas de cada pata, hace que la unión de éstas con la plataforma sea muy rígida, dando una gran estabilidad al trípode. Por ser pequeño el rozamiento de las esferas en sus alojamientos, pueden apretarse los tornillos de orejetas de una vez para siempre.

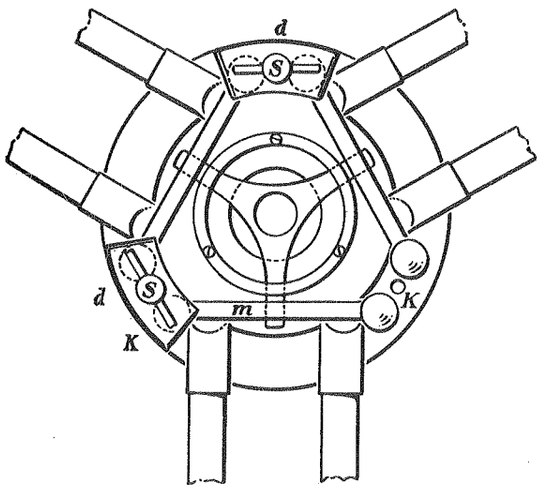


Fig. 312

Los trípodes de la casa Zeiss, de Jena, construídos según este sistema, llevan en la plataforma un dispositivo de tornillo y rosca, con el cual pueden apretarse a la vez los cojinetes de todas las esferas.

La figura 313 representa el dispositivo de unión más empleado para sujetar los teodolitos en sus trípodes. La plataforma *A* del trípode tiene en el centro un orificio de bastante diámetro, por el cual pasa un vástago que se atornilla en la caja o cubo de donde arrancan

los pies del teodolito; dicho orificio se tapa por debajo con una placa móvil *B*, en forma de trébol o estrella de tres brazos, apretada de abajo hacia arriba por un muelle helicoidal muy fuerte, que se tensa dando vueltas a la tuerca redonda *C*. De este modo queda el instrumento bien sujeto en el trípode, aunque después pueden moverse los tornillos nivelantes de aquél para colocar horizontal su plataforma acimutal. En el extremo inferior del vástago de unión va un gancho *D*, para colgar una plomada, cuando sea preciso centrar exactamente el teodolito en una estación. Antes de apretar la tuerca *C* se puede mover lateralmente un poco todo el instrumento, gracias al gran diámetro del orificio de la plataforma del trípode.

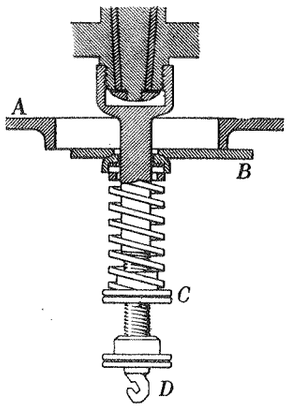
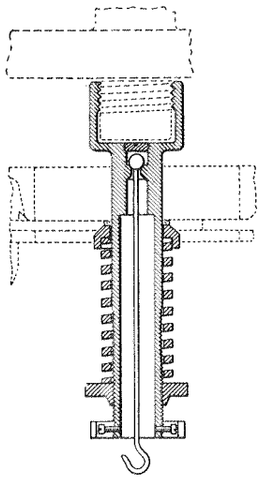


Fig. 313

En la figura 314 se ve una nueva forma de tornillo con muelle, para la fijación del teodolito en el trípode, construído por Fennel, para evitar el error de centrado que supone la excentricidad del gancho *D* a consecuencia de una posible deformación del vástago de sujeción del instrumento: con este objeto, este vástago es tubular y en su interior pende un largo gancho, cuyo punto de suspensión está precisamente debajo mismo del eje vertical del teodolito, por lo cual su posición es independiente de una deformación accidental del vástago de sujeción.

La figura 315 representa otro sistema de unión del teodolito con el trípode, adoptado por las casas Zeiss, de Jena, y H. Wild, de Heerbrugg (Suiza), para obviar el inconveniente de los sistemas de unión representados en las figuras 313 y 314, consistente en el exceso de carga sobre los tornillos nivelantes cuando se aprieta con fuerza el muelle de sujeción. En el nuevo sistema el instrumento descansa sobre una placa *A* en forma de trébol, la cual puede correrse sobre la plataforma del trípode; otra placa más delgada y elástica *B*, que rodea a los tres tornillos nivelantes del instrumento, va unida a la anterior *A*, en conexión floja, mediante los tornillos *C*. La punta de los tornillos nivelantes se aloja en pequeñas cavidades practicadas en la plataforma *A*. Contra la cara inferior de la


Fig. 314

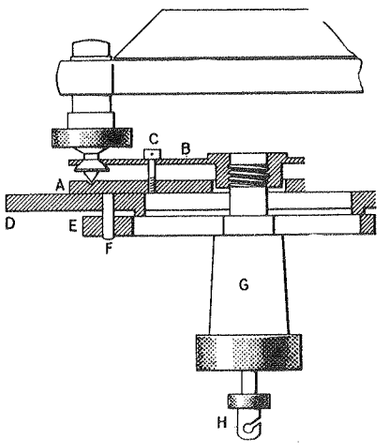


Fig. 315

plataforma *D* del trípode se apoya una traviesa metálica *E*, de unos 3 cm de anchura, que se une a la misma por el perno *F*, alrededor del cual puede girar, y que lleva en toda su longitud una hendidura de 1,5 cm de anchura aproximadamente. Por este corte pasa el cuello del tornillo de fijación *G*, que se rosca en la placa elástica *B*, de modo que al apretar aquél, se aprieta también la placa *A* contra la plataforma *D* del trípode. El tornillo *G* es hueco y en su interior pende un gancho *H*, suspendido superiormente por una bola, para colgar la plomada cuando sea necesario. Para pequeñas inclinaciones de la plataforma del trípode, no se producen errores en el centrado del instrumento sobre el punto-estación de que se trate.

Para centrar, estando aún flojo el tornillo *G*, se corre la plataforma *A* en la dirección conveniente, con lo cual se moverá el cuello del tornillo *G* a lo largo del corte de la traviesa *E*, mientras que esta última girará al mismo tiempo alrededor del perno *F*.

Este sistema de fijación es el empleado para los teodolitos representados en las figuras 325 y 329.

§ 70. Diversos modelos de teodolitos

Las figuras siguientes, con sus detalles anejos, representan los modelos de teodolitos más empleados en Topografía. En las figuras 316, 317 y 318 se ven pequeños teodolitos, el primero con nonios y microscopios lectores, el segundo con microscopios de nonios y anteojo de lente móvil (de enfoque), y el tercero con microscopios de escala para la lectura del círculo acimutal. Las figuras 319 y 320 representan teodolitos con micrómetros lectores, para triangulaciones de tercer orden y topográficas, y la figura 321, un teodolito grande para triangulaciones de segundo orden.

En las figuras 322 a 329 se ven teodolitos de construcción moderna, todos provistos de lente móvil de enfoque, y con dispositivo para la lectura simultánea de los círculos acimutal y altimétrico en un solo microscopio lector.

Por último, la figura 330 representa un instrumento antiguo con un dispositivo especial para las lecturas angulares, no muy extendido por cierto y que aun actualmente sigue aplicándolo a los teodolitos la casa constructora Heyde, de Dresden.

Teodolito topográfico pequeño, de Wolz. Este teodolito, representado en la figura 316, construído por Wolz, de Bonn, se emplea principalmente para poligonales y triangulaciones de lados cortos. El círculo acimutal *K* tiene 14 cm de diámetro; está dividido en tercios de grado, y los nonios aprecian 20″. El anteojo de Ramsden tiene 23 cm de largo, y el objetivo puede enchufarse, pero no invertirse. El aumento de este anteojo es de 20 diámetros.

Este teodolito tiene un solo nivel, *D*, de burbuja, situado entre los montantes del anteojo. El sistema de suspensión o giro de este instrumento es de doble eje, dispuesto como se vió en la figura 297. En *k* y *k′* se ven los dos tornillos de presión horizontales, con sus correspondientes de llamada o coincidencia *f* y *f′*; para el movimiento vertical del anteojo tiene el tornillo de presión *k″* con el de coincidencia *f″*. Los cojinetes del eje de giro del anteojo no tienen dispositivo de corrección.

El trípode tiene plataforma metálica y es del tipo representado en la figura 312.

Este instrumento es muy sencillo, pero de sólida construcción.

Para poligonales y trabajos análogos se emplean teodolitos de este tipo con eje verti-

cal simple, como el representado esquemáticamente en la figura 295, cuyo círculo acimutal está dividido en medios grados, y cuyos nonios aprecian el medio minuto.

Teodolito topográfico tipo pequeño, con microscopios lectores, de Otto Fennel Söhne, de Kassel (fig. 317). Este instrumento, que es un teodolito repetidor, tiene el círculo acimutal de 10,5 cm de diámetro, dividido de 5′ en 5′. La lectura se hace con microscopios de nonios, es decir, microscopios que en su plano-imagen llevan una lámina de vidrio con un nonio grabado, apreciándose con los mismos hasta los 30″. En el centro del campo visual llevan estos microscopios una sola raya bien destacada, con la cual se aprecia fácil y rápidamente el minuto. El anteojo tiene una longitud constante de 17,5 cm, y está provisto

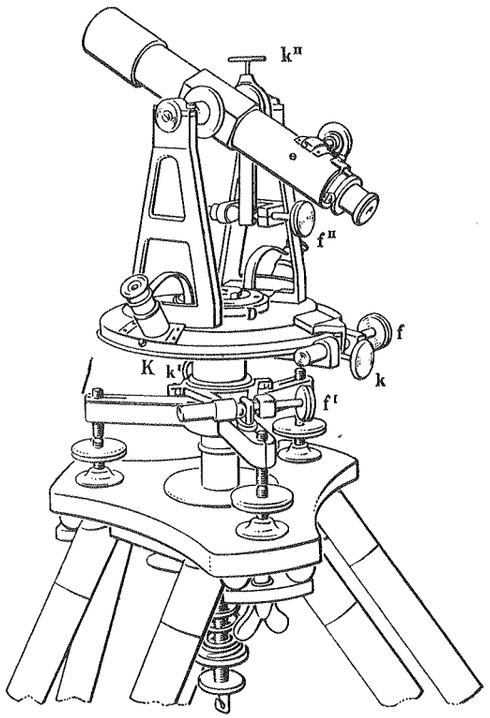


Fig. 316. — Teodolito topográfico de Wolz

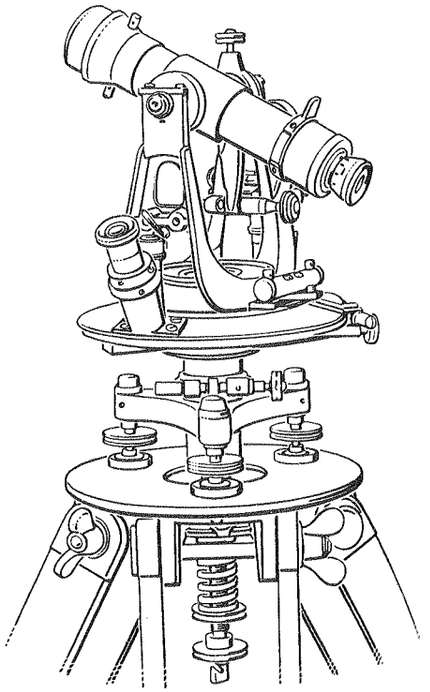


Fig. 317. — Teodolito topográfico de Fennel

de lente móvil de enfoque. Para una abertura de objetivo de 25 mm tiene este anteojo 16 aumentos. Para enfilar objetos muy cercanos, lleva el anteojo arriba y abajo un dispositivo de puntería (buscador). Para nivelar este teodolito, va un nivel en su círculo-alidada y otro, en cruz con el primero, en uno de los montantes del anteojo.

El eje horizontal o de giro del anteojo reposa en cojinetes no regulables, que se ajustan de una vez para siempre; estos cojinetes van tapados con unas placas gruesas atornilladas, con lo cual puede llevarse el teodolito en su caja sin desmontar el anteojo.

Teodolitos de Hildebrand. La figura 318 representa un teodolito repetidor con microscopios de escalas, de la casa Max Hildebrand, de Freiberg. El limbo del círculo acimutal tiene 14,5 cm de diámetro, está dividido de 15′ en 15′ y con el microscopio puede

leerse directamente 1′, con apreciación o aproximación de 0,1′. El aumento de los microscopios es de 25 diámetros.

El círculo altimétrico tiene 11 cm de diámetro y sus divisiones son de 20′; con sus nonios puede apreciarse el medio minuto.

El anteojo tiene 25 cm de longitud y 20 aumentos.

El instrumento lleva dos niveles en cruz, de 1′ de precisión, para los usos generales: un nivel de alidada para el círculo vertical y un nivel caballero para visuales muy inclinadas y para corrección del aparato.

El teodolito de la figura 319, construído también por Max Hildebrand, tiene su círculo acimutal de 16 cm de diámetro y dividido de 10′ en 10′: por medio de los microscopios lec-

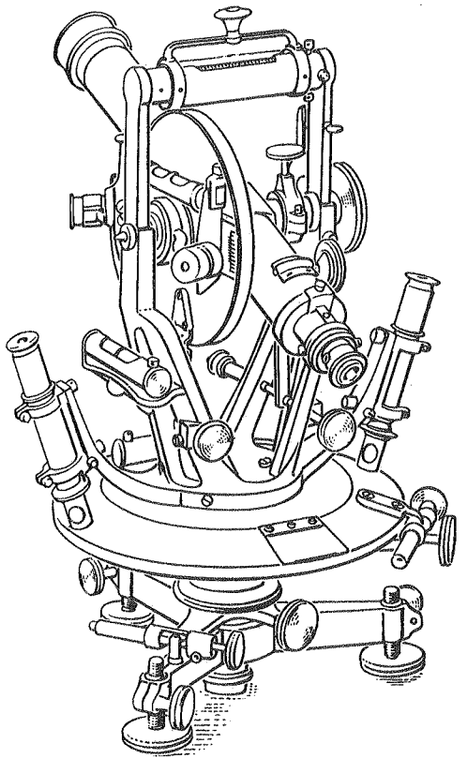


Fig. 318. — Teodolito repetidor de Hildebrand

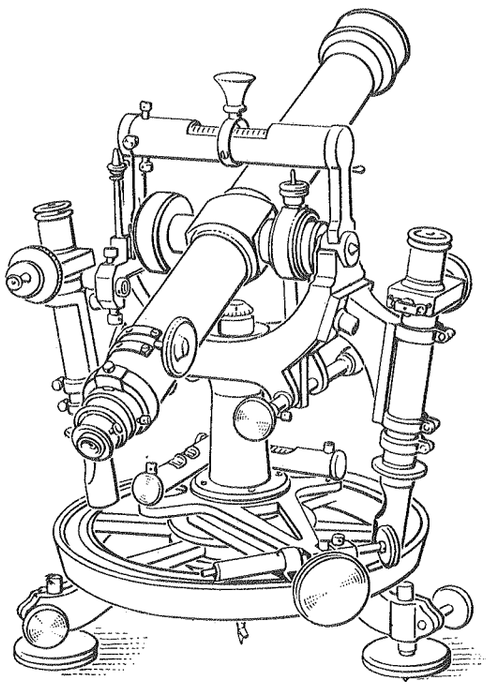


Fig. 319
Teodolito Hildebrand con microscopios micrométricos

tores, que son de tornillo micrométrico, pueden leerse directamente los 5″, con una apreciación de 0,5″.

El anteojo tiene 33 cm de largo, con una abertura de objetivo igual a 32 mm y un aumento de 30 diámetros.

Además de los dos niveles, normales entre sí, que se emplean de ordinario, lleva este teodolito un nivel caballero que aprecia los 10″.

El sistema de presión y coincidencia para el eje horizontal o de giro del anteojo es el que vimos anteriormente en la figura 302. En el extremo superior del eje vertical se ve la cabeza del tornillo de suspensión, representada en la figura 301. Este instrumento lleva la varilla de centrado ya vista en la figura 300.

Teodolitos de Bamberg. En la figura 320 se ve un teodolito con micrómetros lectores, construído por Bamberg, de Friedenau, empleado para las triangulaciones de tercer orden con nivelación trigonométrica. Es de anteojo excéntrico; el diámetro del limbo acimutal es de 130 mm; el del círculo altimétrico, de 120 mm, y el del objetivo, de 31 mm; el aumento del anteojo es de 18 a 30 diámetros; el de los microscopios lectores acimutales, de 15, y el de los microscopios altimétricos, de 17 diámetros; la sensibilidad del nivel es de 14,2″ por división.

El círculo acimutal está dividido de 10′ en 10′, con la numeración de grado en grado, y con los microscopios pueden leerse directamente los 2″. (En algunos modelos puede leerse el segundo.)

El anteojo excéntrico tiene dos objetos: en primer lugar, se le puede dar la vuelta de campana sin tener que desmontarlo, y en segundo lugar se puede disponer el círculo altimétrico y sus microscopios de modo que el centro del instrumento quede siempre libre, para

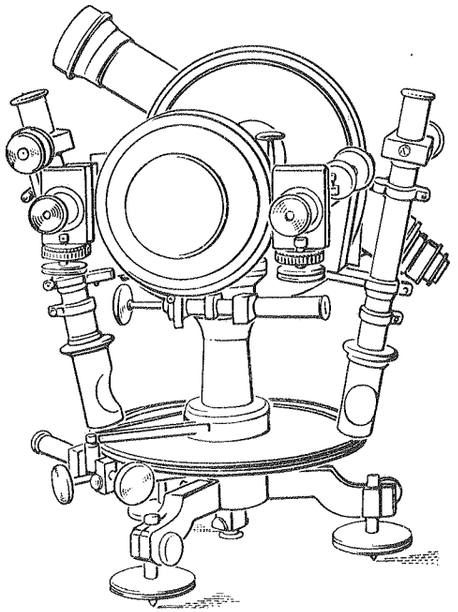


Fig. 320. — Teodolito excéntrico, con círculo altimétrico, de Bamberg

alojar o colocar en el mismo un nivel (no visible en la figura), que por estar en la dirección del anteojo sirve no sólo para la nivelación ordinaria del teodolito, sino también para medir ángulos cenitales, leyendo la posición de la burbuja sobre la escala graduada del nivel.

Para visuales muy inclinadas, como las dirigidas a torres próximas, etc., se puede colocar sobre el eje horizontal un nivel adicional.

La figura 321 representa otro teodolito construído por Bamberg, provisto de microscopios de tornillo micrométrico para las lecturas; el círculo acimutal K tiene 21 cm de diámetro, está dividido de 5′ en 5′ y se lee con dos microscopios de tornillo micrométrico M, M_1, de 17 aumentos cada uno (véase página 300). El anteojo tiene 44 cm de longitud y da, con dos oculares de Ramsden, 40 y 55 aumentos respectivamente. Este teodolito lleva un solo nivel L, caballero sobre el eje horizontal, con una sensibilidad de 5,6″.

Para dar la vuelta de campana al anteojo, se quita el nivel y se invierte el anteojo sobre sus cojinetes.

Este teodolito, que en su construcción recuerda, en parte, a los instrumentos de la antigua casa de Pistor y Martius, se construye actualmente en diversas fabricas de apa-

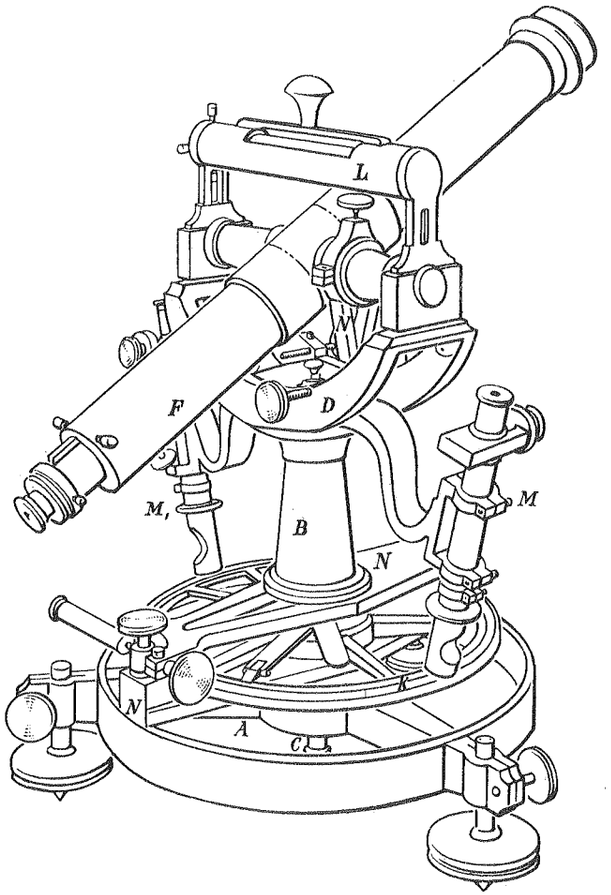


Fig. 321. — Teodolito con microscopios micrométricos, de Bamberg

ratos científicos, y aunque su principal aplicación es la triangulación topográfica, se emplea también para triangulaciones de segundo orden, y con un círculo acimutal de 27 y 35 cm para el primer orden.

Teodolito Zeiss, con microscopios de escala interior. En la figura 322 se ve un teodolito construído por Carl Zeiss, de Jena, cuyo anteojo tiene 170 mm de longitud, siendo la abertura de su objetivo de 40 mm, la distancia focal total de 251 mm, la distancia focal del ocular de 9,3 mm, y el aumento igual a 27 diámetros. Este teodolito es repetidor, y su dispositivo de repetición es el descrito en la página 278.

Los dos círculos (acimutal y altimétrico) son de vidrio, tienen 90 mm de diámetro y están divididos de 20′ en 20′ (minutos sexagesimales), o de 50 en 50^c (minutos centesimales). Por medio de los microscopios lectores, que son de escala interior, se pueden leer

directamente los dos minutos, de modo que la suma de las dos lecturas del círculo acimutal da la lectura media con una apreciación de 0,1′ o de 10cc. El círculo vertical lleva un solo microscopio lector, también de escala interior. La lectura de los dos círculos se hace por un tubo ocular situado a la izquierda del eje de giro del anteojo, como se ve en la figura, y al cual puede darse la vuelta de campana, lo mismo que al anteojo, de modo que el observador no tiene que moverse de delante del ocular de este último para hacer todas las lecturas. En el campo visual del ocular de lectura se ven tres ventanillas, dos para las dos lecturas del círculo acimutal y la tercera para la lectura altimétrica o cenital. Al instrumento puede adaptarse un dispositivo especial micrométrico, con el cual pueden apreciarse 2″ ó 5cc según sea la división sexagesimal o centesimal.

La sujeción de este instrumento en el trípode se hace con el dispositivo de placa elástica descrito en la página 284 (fig. 315). Destornillando el gancho portaplomada, se puede emplear un dispositivo óptico para centrar con más exactitud el instrumento.

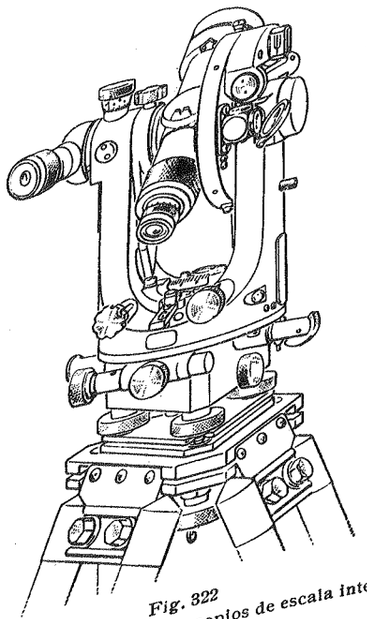


Fig. 322
Teodolito Zeiss, con microscopios de escala interior

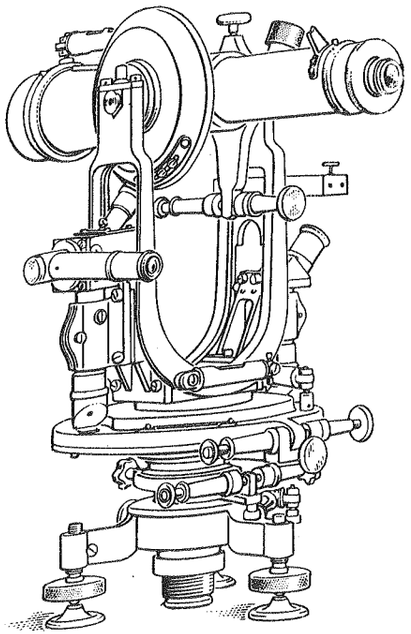


Fig. 323. — Teodolito Breithaupt

Teodolito Breithaupt. La figura 323 representa un teodolito construído por la casa F. W. Breithaupt & Sohn, de Kassel, especialmente adecuado para triangulaciones cortas y trazado de poligonales de mucha precisión. El anteojo, con lente móvil de enfoque, tiene una longitud constante de 26 cm, la abertura de su objetivo es de 41 mm, y su aumento, de 35 diámetros. El círculo acimutal tiene 13,5 cm de diámetro, está dividido de 10′ en 10′, y por medio de dos microscopios de escala interior puede leerse el minuto, con una apreciación de 6″. El círculo cenital, de 8,5 cm de diámetro, está dividido de 10′ en 10′, y con un microscopio lector de un solo hilo o trazo se puede leer hasta el minuto. El círculo cenital y el primer microscopio del acimutal pueden leerse a la vez con un microscopio basculante, cosa muy práctica en los levantamientos taquimétricos; el campo de este se ve en la figura 324. Para las operaciones taquimétricas,

lleva este teodolito en uno de los soportes del anteojo, una brújula. Además tiene dos niveles, perpendiculares entre sí, para colocar vertical el eje general del instrumento, y un tercer nivel sobre el anteojo.

Teodolitos Zeiss-Wild. El instrumento representado en la figura 325, construído por Zeiss (originario de H. Wild), se distingue por sus pequeñas dimensiones. El anteojo, con lente de enfoque, tiene 13,5 cm de longitud, una abertura de objetivo de 30 mm y 18 aumentos. Los círculos son de vidrio: el acimutal tiene 7,5 cm de diámetro y el cenital 5,5 cm, estando ambos divididos de 20′ en 20′. La lectura de ambos círculos se hace a la vez con el ocular basculante que se ve a la derecha. En la figura 326 se ve el campo del ocular lector para la primera posición del anteojo; las dos lecturas del círculo cenital (H_1) y las dos del cenital (S_1), se ve que son diametralmente opuestas, y el índice de debajo marca *cero*. Las lecturas, aproximadas, dadas por los índices superiores son: para H_1, 78° 40′, y para S_1, 90° 30′ (para la determinación de estas lecturas, véase la página 303). Para tener la lectura exacta de H_1 se mueve el botón grande que hay debajo del ocular lector hasta que, como se ve en la figura 327, coincidan

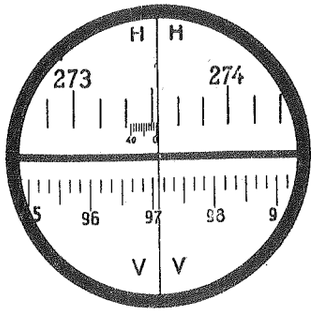


Fig. 324

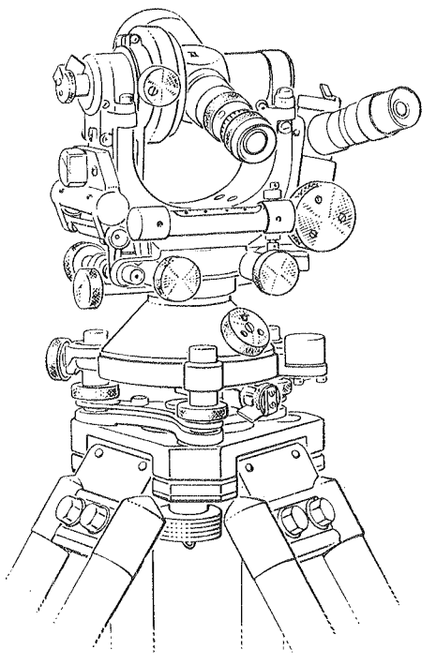


Fig. 325. — Teodolito Zeiss-Wild

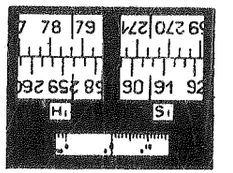


Fig. 326

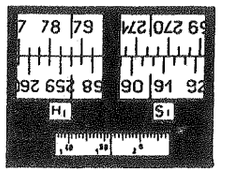


Fig 327

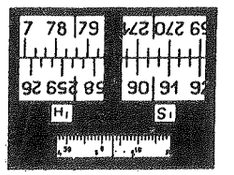


Fig. 328

las divisiones exactamente, leyéndose con el índice inferior 1′ 52″ sobre su escala correspondiente: es decir, que la lectura completa de H_1 es 78° 41′ 52″. Del mismo modo, en la figura 328 se han hecho coincidir las divisiones de S_1, marcando el índice inferior 5′ 3″, por lo cual la lectura exacta de S será 90° 35′ 3″. Las lecturas finales dan, pues, la media

aritmética de las dos lecturas correspondientes a las dos partes opuestas del limbo. La figura 329 representa un teodolito construído por H. Wild, de Heerbrugg (Suiza), fundado en el nuevo sistema de construcción del teodolito Zeiss, y especialmente adecuado a triangulaciones de primero y segundo orden. El objetivo tiene 60 mm de diámetro, y el anteojo, para una longitud de 260 mm y por medio de tres oculares, tiene respectivamente 24, 30 y 40 aumentos. El diámetro de los dos círculos, ambos de cristal, es de 140 mm el acimutal y de 95 mm el cenital. También en este teodolito se hacen las dos lecturas opuestas de los círculos con un solo microscopio, que da la media de ambas lecturas: el ocular de este microscopio lector está inmediato al del anteojo, cosa muy cómoda y práctica para hacer las lecturas.

Con el dispositivo micrométrico pueden leerse las 0,2″ con una aproximación o apreciación de 0,02″, con lo cual se obtiene la precisión necesaria para las triangulaciones de primero y segundo orden.

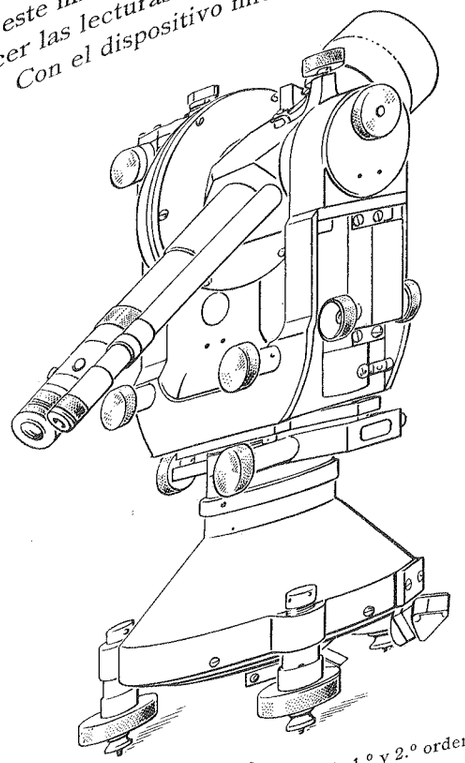


Fig. 329
Teodolito de Wild, para triangulaciones de 1.° y 2.° orden

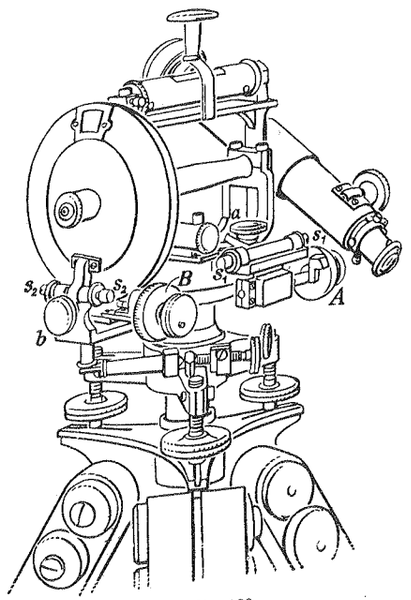


Fig. 330

Teodolito de círculos dentados, de Heyde. El mecánico Heyde, de Dresden, construyó por primera vez, en 1896, un teodolito fundado en un método especial de medición de ángulos, representado en las figuras 330 y 331.

Los dos círculos de este teodolito, en vez de llevar limbos graduados, tienen su llanta o borde dentado con 360 dientes rigurosamente iguales; este borde lleva, además, una división en grados, pudiéndose leer, con un simple índice, hasta 1°. Para hacer lecturas se hace uso del tornillo micrométrico tangencial (fig. 331), apretándolo contra el círculo, con el cual engrana en toda su longitud. El vástago o eje con dos collares o cojinetes cilíndricos, a un pequeño bastidor

tal). A los botones a y b van unidas unas excéntricas que al girar aquellos hacen salir el tornillo de la corona dentada del círculo, es decir, queda el tornillo micrométrico *desembragado* del círculo: de este modo se puede hacer girar libremente el instrumento alrededor del eje vertical, y el anteojo alrededor del horizontal. Una vez embragados los tornillos micrométricos, obran como tornillos de presión, mientras que los micrómetros A y B hacen de tornillos de coincidencia. Hay también un sistema corriente de tornillos de presión y coincidencia para el limbo acimutal, con objeto de poder emplear el teodolito como repetidor.

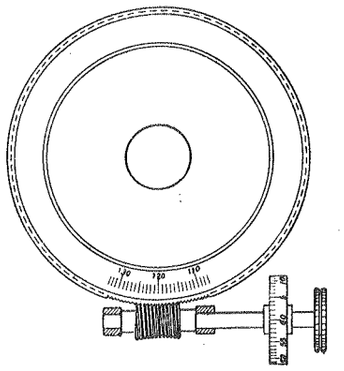


Fig. 331

El modo de operar con este instrumento es bien sencillo: estando desembragados los tornillos micrométricos, se enfila el anteojo aproximadamente y después de embragar aquéllos se giran los tambores A y B, como en los demás teodolitos, para calar exactamente la imagen en el retículo; se leen entonces los grados enteros con el índice, y con los micrómetros, cuyos tambores A y B están divididos en 60 partes, se leen los minutos directamente, pudiéndose apreciar, a ojo, las décimas de minuto. Según los experimentos y estudios hechos por Hugershoff con un instrumento de esta clase, provisto de círculo acimutal de 12 cm, su error medio de puntería es de $\pm 3{,}86''$.

§ 71. Nonio

El limbo de un teodolito corriente está dividido, de ordinario, en medios grados, o en tercios o sextos de grado; pero puede leerse hasta $^1/_{60}$ de estos valores con un dispositivo auxiliar, que es el *nonio*. En los limbos centesimales, las divisiones valen 0,5 g, 0,2 g, etc.

Para leer la posición de un índice sobre una escala hay que hacer siempre dos operaciones: primera, ver qué división es la inmediatamente anterior al índice; y segunda, medir la distancia entre dicha división y el índice. Esta última operación se hace a ojo cuando no se requiere precisión en la lectura; pero en los teodolitos se hace con el nonio o el microscopio micrométrico.

El nonio consiste, en general, en una escala de corta longitud, cuyas divisiones son casi iguales, pero algo menores, a las de la escala principal sobre la cual se trata de hacer la lectura.

Si L es el valor de la unidad de división del limbo, N el de la división del nonio y n un número entero, se tiene:

$$(n-1)\,L = n\,N, \qquad \text{siendo} \qquad L > N. \tag{1}$$

$$L - N = \frac{L}{n} = a. \tag{2}$$

Es decir, que se dividen $(n-1)$ divisiones del limbo en n divisiones del nonio; por ejemplo, 9 L en 10 N (fig. 332), ó 59 L en 60 N (fig. 333).

El valor $\frac{L}{n} = a$ (2) se llama *apreciación del nonio*. Si una división cualquiera del nonio coincide con otra de la escala principal, la siguiente a aquélla se diferencia en a de la que sigue a ésta; para la subsiguiente hay una diferencia de $2a$, etc.

Por ejemplo, en la figura 332 se ve que la tercera división del nonio coincide con un trazo de la escala principal, por lo cual el cero del nonio dista $3a$ de la división 22 de la

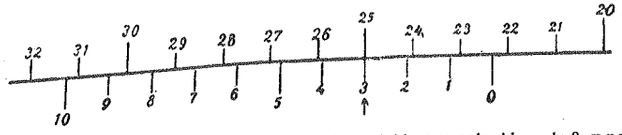


Fig. 332. — Nonio de 10 partes. De derecha a izquierda la división que coincide es la 3, y por consiguiente la lectura total es 22,3

escala, y como en este caso $n = 10$ y $a = 0{,}1\ L$, resulta que la posición del cero del nonio sobre la escala principal está dada por la siguiente lectura:

$$22 + 3 \times 0{,}1 = 22{,}3.$$

Si un limbo está dividido en sextos de grado, es decir, si $L = {}^1/_6{}^\circ = 10'$, y $n = 60$, se tiene $a = \dfrac{10'}{60} = 10''$. En este caso, el nonio no debe llevar esta numeración:

0 10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 60″ 70″ 80″ ...

sino esta otra

0 10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 1′ 1′ 10″ 1′ 20″ ...,

con objeto de abreviar la lectura final.

La regla general para hacer una lectura con nonio es la siguiente:

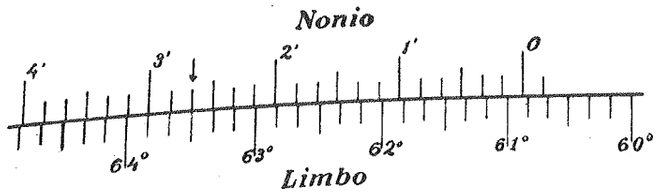


Fig. 333. — Nonio de 60 partes. La lectura es $60° + 50' + 2'\ 40'' = 60°\ 52'\ 40''$

1. Se considera el cero del nonio como índice y se ve qué división de la escala está inmediatamente antes de aquél (yendo de derecha a izquierda), que en el caso de la figura 333, es la de $60°\ 50'$.

2. Se busca en el nonio (siempre de derecha a izquierda) qué división coincide con una del limbo y se lee sobre aquél el número correspondiente, que como se ve en la figura es $2'\ 40''$.

3. Se suma esta segunda lectura a la primera, teniéndose:

$$60°\ 50' + 2'\ 40'' = 60°\ 52'\ 40''.$$

Si no hay división alguna del nonio que coincida exactamente con ninguna del limbo, se toma, a ojo, la media de las dos que más se aproximen a otras dos del limbo.

Las divisiones del nonio en los teodolitos corrientes corresponden a la siguiente disposición, siendo L el valor de la unidad de división del limbo, n el número de divisiones del nonio y a la apreciación de este último:

$L = {}^1/_2{}^\circ$	$n = 30$	$a = 1'$
${}^1/_2$	60	30″
${}^1/_3$	60	20″
${}^1/_3$	40	30″
${}^1/_3$	20	1′.

Las tres primeras combinaciones son las más usuales.

Divisiones adicionales o suplementarias. Los nonios llevan, de ordinario, al principio y al final, una o dos divisiones por fuera de los puntos extremos, como se ve en la figura 333, donde a la derecha del cero del nonio hay una división adicional. Estas divisiones sirven para indicar si se debe leer con el principio o con el final del nonio, es decir, si la coincidencia de un trazo del nonio con otro del limbo está hacia el principio o hacia el extremo del nonio, con lo cual se tiene, además, una comprobación de la bondad de la lectura. También pueden servir estas divisiones adicionales para comprobar el limbo.

El nonio graduado en el mismo sentido que el limbo, que es el descrito hasta ahora, correspondiente a las fórmulas (1) y (2), es el único empleado en los teodolitos; en estos nonios se hace la lectura en el sentido de la graduación del limbo. Pero hay otros nonios, aunque muy raros, como sucede en los barómetros, en que su graduación es contraria a la del limbo o escala principal, y en este caso se lee en sentido contrario al de ésta, siendo las fórmulas correspondientes estas otras:

$$(n+1)\,L = nN \qquad \text{y} \qquad N - L = \frac{L}{n} = a. \tag{3}$$

Precisión de las lecturas con nonios. De un gran número de observaciones hechas por el autor, resulta que la separación entre una raya del nonio y otra del limbo es apreciable, cuando el ángulo visual correspondiente a ambas rayas es mayor de 3,3″. En la lectura de los nonios de los teodolitos, el vértice del ángulo visual está, por término medio, a unos 50 mm de las divisiones, de modo que la coincidencia de una raya del nonio con otra del limbo puede apreciarse, según lo que acabamos de ver, con una precisión de 0,001 mm. Con estos datos hemos calculado la tabla siguiente, que da el error medio de una lectura de nonio para distintos valores del radio del limbo, suponiendo que los errores de división son despreciables y que el nonio está graduado del modo ordinario:

Diámetro del limbo	Error medio de una lectura con el nonio
22 cm	± 1,9″
16 »	2,6
14 »	3,0
12 »	3,5
10 »	4,1

Aquí se ve que la precisión que puede obtenerse es tanto menor cuanto menor es el instrumento, sacrificándose en éstos la precisión a la comodidad.

Datos históricos. De los estudios e investigaciones hechos por W. Lührs sobre la historia del nonio, tomamos las notas siguientes:

El medio auxiliar más antiguo para aumentar la precisión de las lecturas está fundado en el principio o teoría de las divisiones transversales (escala de mil partes), aplicado por primera vez por Levi ben-Gerson en el año 1300. Este procedimiento, muy extendido desde su aplicación por Tycho Brahe a fines del siglo XV, se ha venido empleando hasta el siglo XVIII.

En 1542 aplicó Pedro Núñez, a una brújula, un dispositivo original de lectura, consis-

tente en 46 círculos concéntricos, de los cuales el primero (exterior) estaba dividido en 90 partes iguales, el segundo en 89, el tercero en 88, y así sucesivamente hasta el último, que estaba dividido en 45 partes iguales. A causa de la desigualdad de las divisiones, el radio que hacía de índice, en cualquier posición que estuviera, coincidía siempre (por lo menos muy aproximadamente) con alguna división de los círculos, y la distancia de esta última al cero se determinaba mediante una tabla.

Un paso más en el progreso de las lecturas de limbos fué el dado en 1580, por Curtius, que ideó un sistema de lectura consistente en 60 círculos concéntricos, todos divididos en grados, pero con la particularidad de que la primera división del segundo círculo abarcaba de 1° 1′ y, por lo tanto, la última sólo valía 0° 59′; la primera división del tercer círculo era de 1° 2′, y por consiguiente la última, de 0° 58′; y así sucesivamente, de modo que las rayas de uno cualquiera de los círculos distaban 1′ de las del círculo anterior.

La teoría del nonio se debe al matemático Clavius, que la dió a conocer hacia el año 1593, y que empleaba un solo círculo graduado y otro auxiliar, estando las graduaciones de ambos en la relación $\frac{n}{n+1}$; como estos dos círculos eran independientes, había que emplear un compás para poderlos utilizar. A causa de esto, el dispositivo de Clavius sólo servía para tomar ángulos o longitudes dadas, pero no para hacer mediciones de estos elementos.

Ya sólo quedaba el unir la graduación o escala auxiliar con la alidada, para tener el dispositivo de lectura conocido actualmente con el nombre de nonio, y este paso fué dado en el año 1631 por Pierre Vernier. En resumen, que el nonio es el resultado de una serie de ensayos e inventos, empezada por Núñez y terminada por Vernier.

§ 72. Microscopios lectores

La teoría del microscopio ha sido ya expuesta en el § 68, página 273.

I. Microscopios de hilos o de estima. Con *un* solo hilo, fijo en el campo del microscopio, se pueden hacer las lecturas con bastante precisión, como se ve en la figura 334, que representa, muy aumentada, parte de un limbo dividido de 10′ en 10′; en el caso de la figura la lectura es 124° 36′. Esta disposición, con la cual puede apreciarse $^1/_{10}$ de 10′, es decir, 1′, es muy práctica y cómoda. Hay microscopios de estima con tres o más hilos, que se leen análogamente a como se hace con las miras.

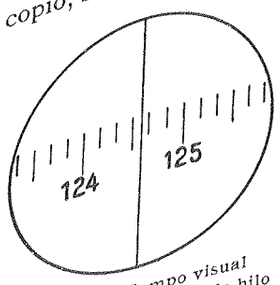


Fig. 334. — Campo visual del microscopio de un solo hilo

II. Microscopios de escala. Mayor precisión se obtiene en las lecturas, cuando el aumento del microscopio es aún mayor, con una escala auxiliar colocada en el plano focal de aquél. En la figura 335 se ve el campo de un microscopio lector de esta clase, de la casa Fennel Söhne, con once divisiones (0 al 10) grabadas en una lámina de vidrio colocada en el plano-imagen del microscopio (*K* de la figura 293) y fija en el mismo. La distancia entre las rayas 0 y 10 es igual a la anchura de una división del original. Las rayas del limbo se ven con el microscopio mucho más gruesas que las por lo cual, en la actualidad, para aumentar la precisión de las lectu-

ras, se hacen aquéllas terminadas en punta, siendo sus extremos puntiagudos los que sirven de referencia a las divisiones de la escala microscópica. Si el limbo está dividido en tercios de grado, es decir, de modo que cada división valga 20′, resulta que una división o intervalo de la escala del microscopio valdrá 2′, y la distancia del cero de esta escala a la raya precedente en el limbo será, en el caso de la figura 335, igual a 3,4 divisiones, o sea, a 6,8′. Es decir, que con toda facilidad se aprecia de este modo el doble minuto; en la figura 335 la lectura en dobles minutos será 23,4, y sumando las lecturas de los dos microscopios de cada limbo y dividiendo la suma por dos, se tiene la media aritmética en minutos.

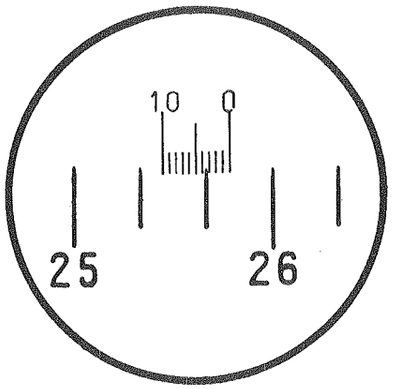


Fig. 335. — Campo visual de un microscopio de escala de la casa Fennel

Muchos limbos están divididos de 10′ en 10′, y en este caso con el microscopio de escala se lee directamente el minuto.

La lectura con el microscopio de escala resulta muy fácil y práctica para los limbos centesimales.

Las rayas extremas de la escalilla deben coincidir exactamente con las que limitan una división del limbo que se lee, siendo ésta una de las comprobaciones que siempre conviene hacer, tanto con este microscopio como con el micrométrico.

BIBLIOGRAFÍA. Sobre los microscopios de escala, véanse los trabajos siguientes: HENSOLDT (Zeitschr. f. Verm., 1879, págs. 497-505); SCHMIDT, 1879, págs. 505-507; HAHN, 1880, págs. 202-207; BREITHAUPT, 1880, págs. 207-210; SPINDLER, 1880, págs. 240-243.

III. Microscopio con nonio. En vez de escala, hay microscopios, construídos por Fennel, que llevan un nonio en su plano focal, como se ve en la figura 336; en el caso representado por esta figura, la lectura es 132° 10′ 15″. Por debajo del nonio hay un índice

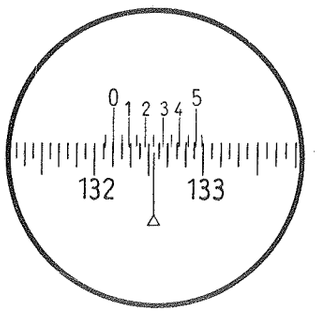


Fig. 336. — Campo visual del microscopio con nonio

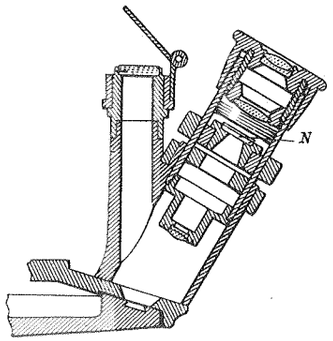


Fig. 337. — Microscopio con nonio, de Fennel

que sirve para apreciar el minuto análogamente a como se hace con el microscopio de la figura 334. El teodolito representado en la figura 317 está provisto de esta clase de microscopios lectores.

En la figura 337 tenemos un corte longitudinal del microscopio de nonio, de Fennel, en el cual se ve la lámina de vidrio *N* que lleva grabado el nonio, sobre el diafragma de

campo, por debajo de la lente colectora del ocular. El microscopio lleva unido un tubo de iluminación tapado superiormente con una plaquita de vidrio y provisto de un espejo metálico giratorio.

IV. Microscopio micrométrico. La figura 338 representa el interior de la caja de un microscopio, de los empleados en el teodolito de la figura 321. En la caja K hay una corredera A, que lleva dos hilos paralelos F sobre su cara superior; esta corredera, con los hilos, puede moverse por medio del tornillo S, el cual se mantiene con la punta apretada contra la placa fija P, por efecto de los muelles C, C, y de este modo puede llevarse el punto medio del espacio comprendido entre los dos hilos F a coincidir con una división cualquiera de las que aparecen en el campo del microscopio, de manera que la raya del limbo quede entre los dos hilos.

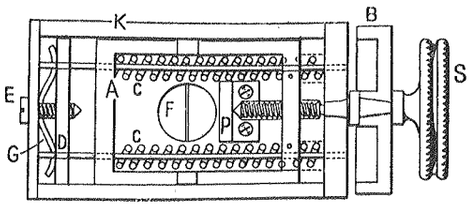


Fig. 338. — Microscopio micrométrico

La traslación de los hilos F es proporcional a la rotación del tornillo S; para mayor sencillez, supongamos que a una vuelta completa del tornillo S y del tambor B, corresponda una traslación de los hilos F igual a una división del limbo, es decir, que al dar una vuelta al tornillo pasen los hilos de una raya a la siguiente. El tambor B, montado sobre el eje del tornillo, va dividido en partes iguales, cuya suma corresponde a una división del limbo, de modo que con dicho tambor puede medirse cualquier fracción de esta división, leyéndose la misma con el índice I, como se ve en la figura 339.

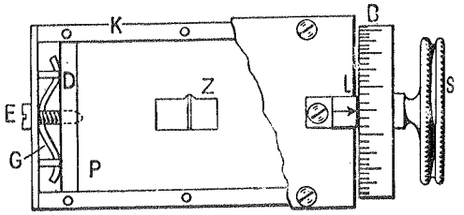


Fig. 339. — Platina con índice Z

Con los muelles C (fig. 338) se evitan los *tiempos muertos* del tornillo S.

Falta ahora un índice en el campo del microscopio, cuya posición sobre el limbo pueda leerse con facilidad; para ello se tiene, en la caja K del microscopio, un montante D (figura 339) al cual va unida una placa delgada P que pasa casi tocando a los hilos F. Con el tornillo E se puede correr un poco el montante D, y con éste, la placa P, para la corrección del micrómetro. En la placa P hay practicada una ventanilla rectangular cuyo borde superior lleva una pequeña escotadura o corte, que sirve de índice para leer la división anterior, es decir, para tener una primera lectura aproximada del ángulo que se esté midiendo, apreciándose con el tornillo micrométrico el pequeño ángulo comprendido entre dicha división y el índice Z. Para ello, el tambor B está fijado al eje del tornillo S de tal modo que marque cero cuando los hilos F coincidan con el índice Z (fig. 339).

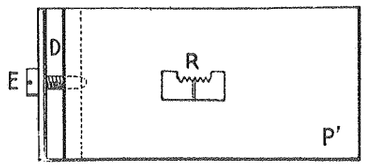


Fig. 340. — Platina con peine

Generalmente, a una vuelta del tornillo micrométrico no corresponde el paso de los hilos F de una división a la siguiente, sino que es preciso dar más vueltas al tornillo para conseguir esta traslación, por ejemplo, cinco. Si el limbo está dividido de 5′ en 5′, la placa P' (fig. 340) lleva un *peine* R, para leer el número de vueltas enteras del tornillo S, siendo igual a 1′ la

distancia entre la punta de cada diente y el medio del hueco que le sigue, o entre dos puntas sucesivas.

Con lo dicho basta para comprender el mecanismo y el funcionamiento de los microscopios micrométricos, pero daremos un ejemplo, referente al teodolito de la figura 321. El limbo de éste se halla dividido en $^1/_{12}$ de grados, es decir, que cada división vale 5′, y a cada vuelta completa del tambor avanzan los hilos del retículo de una división a la siguiente. Estando el tambor marcando cero (posición A de las figuras 341 y 342), se tiene el centro del espacio interfilar en la muesca-índice de la placa, y entre dos divisiones o rayas sucesivas del limbo, que en el caso de la figura 341 son:

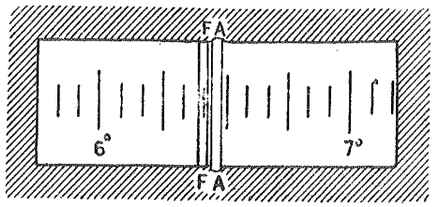


Fig. 341
Campo visual del microscopio micrométrico

Raya anterior	*Centro filar*	*Raya posterior*
6° 25′	A	6° 30′

Se gira entonces el tornillo micrométrico hasta que el medio de la distancia entre los hilos coincida con la raya anterior (6° 25′) y se lee sobre el tambor (posición F de la figura 342) lo que marque su índice correspondiente, que en este caso es 2′ 26″. Por lo tanto, la lectura definitiva será:

$$6° 25' + 2' 26' = 6° 27' 26''.$$

Corrección del tambor. Si, como indica la figura 341, cuando el tambor está en el cero (posición A de la figura 342), los hilos no coinciden con la muesca-índice (A de la figura 341), se puede hacer la corrección correspondiente girando el tambor alrededor del eje del tornillo, en el cual está montado a frotamiento; se llevan los hilos a coincidir con la muesca-índice, se sujeta bien el tornillo S (figs. 338 y 339) y se gira el tambor hasta que marque cero.

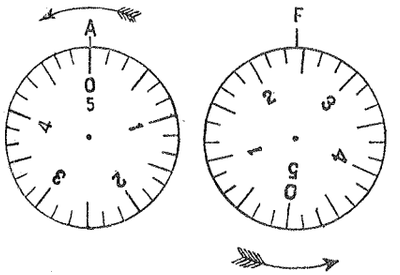


Fig. 342
A, posición en el cero; F, posición de lectura

Otra corrección es la referente a colocar los dos microscopios del teodolito exactamente a 180° uno de otro. Para ello se pone a cero el tambor de uno de los microscopios, de modo que sus hilos coincidan con la muesca-índice, y se gira la alidada hasta que estos hilos caigan sobre una división determinada, por ejemplo, sobre el 0° del limbo; si con el segundo microscopio no se lee exactamente 180° se lleva la muesca-índice a coincidir con esta división por medio del tornillo E (figs. 338 a 340), y entonces se corrige el tambor del modo antes indicado.

La posición de la muesca-índice en el campo del microscopio es indiferente; sin embargo, cuando en los teodolitos de primer orden se quiere hacer una comprobación exacta de los pocos pasos del tornillo que siempre se emplean en las mediciones, debe situarse la muesca-índice de tal modo que al mover los hilos en la parte correspondiente a dichos pasos, no se aparten demasiado de aquélla. Para conseguir esto, llevan muchos teodolitos un índice fijo en sus microscopios, que debe coincidir con la muesca-índice lo mejor posible. Este índice especial se ve en la figura 344, en D.

Acoplamiento del microscopio con el limbo. En la figura 343, tomada de unas instrucciones de Bamberg, se ve la disposición mecánica de un microscopio micrométrico del

teodolito representado en la figura 321. El objetivo es x, a el ocular de Ramsden, b el tornillo micrométrico, c el tubo exterior del microscopio, d el tubo del objetivo, enchufado en el tubo c, y e el proyector de luz. El microscopio va unido a los soportes del anteojo por medio de los collares f y g, en los cuales puede correrse a voluntad y, si se quiere, inmovilizarlo apretando los tornillos de presión. Enchufando más o menos el tubo portaobjetivo d en el c puede variarse el aumento en relación con la graduación del círculo y el paso del tornillo micrométrico.

Este movimiento de traslación del tubo portaobjetivo d en el c, y el de todo el microscopio en sus collares f y g, responde a la teoría anteriormente expuesta (pág. 273, figura 294). El resultado de estos movimientos ha de ser que al mover el centro del espacio interfilar de una raya del limbo a la siguiente, el tornillo micrométrico dé exactamente una vuelta o un número entero de vueltas completas, lo cual se comprueba midiendo con el tambor la distancia entre dos divisiones sucesivas del limbo en distintos sitios o regiones de este último.

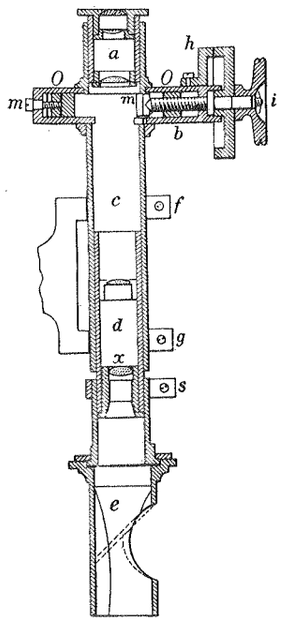


Fig. 343. — Sección longitudinal del microscopio micrométrico

Si las vueltas del tambor no se corresponden con las divisiones del limbo, se consigue esta correspondencia subiendo o bajando el microscopio hasta hallar, por ensayos repetidos, la posición adecuada del mismo (véase la teoría en las páginas 273 y 274). Para las triangulaciones de 2.° y 3.er orden, se acomoda el aumento del microscopio al limbo lo mejor posible, y el error remanente de acomodación se considera diluído entre los errores de división y lectura. Una parte del error de aumento, o *error del micrómetro,* se elimina llevando el centro del espacio interfilar sobre las dos rayas inmediatas, la anterior y la posterior, y tomando después la media de ambas lecturas.

Para todas las lecturas del micrómetro hay que tener en cuenta que siempre debe moverse el tornillo en un sentido determinado, por ejemplo, de derecha a izquierda, porque no se puede contar con que el tornillo carezca en absoluto de tiempos muertos, y cualquier tiempo muerto queda de este modo casi sin efecto alguno; la rotación final del tambor micrométrico, para hacer ya la lectura, se hace siempre hacia dentro, es decir, *atornillando* el tornillo micrométrico, o sea, girándolo hacia la derecha, lo mismo que se hace con el tornillo de llamada o coincidencia de la alidada.

No siempre puede leerse, en el pequeño campo del microscopio, el número entero de grados; el microscopio da, por ejemplo, una lectura de 27′ 26″, y el grado correspondiente hay que leerlo en un índice especial o de otro modo cualquiera. Este inconveniente queda salvado si todo el limbo está numerado de grado en grado, como sucede en el teodolito de Bamberg representado en la figura 320. De este modo, a primera vista se leen los grados y las decenas de minutos, por ejemplo, 46° 20′, y con el tambor micrométrico se lee el resto, 7′ 26″, resultando como lectura final 46° 27′ 26″.

Graduación del tambor en dobles segundos. En muchos instrumentos no está numerado el tambor en segundos, sino en dobles segundos, lo cual tiene por objeto el apreciar segundos en la media aritmética de las lecturas de los dos microscopios, como se ve en el ejemplo siguiente, en que los dobles segundos se anotan con el signo ″″:

	Numeración en segundos	Numeración en dobles segundos
Microscopio I . . .	50° 36′ + 3′ 6″	50° 36′ + 3′ 3,0″″
Microscopio II. . .	+ 3′ 41″	+ 3′ 20,5″″
Suma	+ 6′ 47″	+ 23,5″″
Media	+ 3′ 23,5″	+ 23,5″″
Lectura final . . .	50° 39′ 23,5″	50° 39′ 23,5″

Pero esta graduación en dobles segundos tiene también sus inconvenientes, por ejemplo, cuando se hacen lecturas o mediciones en un solo microscopio, como sucede al estudiar los errores de división de un limbo, etc., pues entonces la numeración en dobles segundos sólo sirve para entorpecer el trabajo.

Error del micrómetro. Para las triangulaciones de 2.° y 3.er orden se regula o acomoda el microscopio lo mejor posible con el limbo, y se hacen las lecturas, sobre uno o sobre dos trazos, según el caso. Cuando se llevan los hilos sobre las dos rayas, anterior y posterior, pueden anotarse las dos lecturas, o hallar mentalmente la media entre ambas, anotando únicamente esta media.

En cambio, en las triangulaciones de 1.er orden hay que tener en cuenta el error de aumento, o error del micrómetro. Para determinar este error se toma un cierto intervalo t del limbo, cuyo valor angular se conozca exactamente, después de corregido el error de división del limbo, y se enfilan diez veces, alternativamente, las dos rayas que limitan dicho intervalo. Designando con a y p las lecturas correspondientes a las rayas anterior y posterior, se tiene:

$$\delta = a - p - t$$

donde δ es el error del micrómetro. Es decir, que el tambor no da el número de segundos que comprende el arco observado, por ejemplo $5' = 300''$, sino $300'' + \delta$, o sea, en general, $t + \delta$. Por consiguiente, 1 división del tambor valdrá

$$\left(1 - \frac{\delta}{t}\right) \text{segundos.}$$

Leyendo el tambor, con los hilos sobre la raya anterior y después sobre la posterior, y aplicando esta corrección a las correspondientes lecturas a y p, tendremos:

$$\text{Lectura anterior corregida} = a\left(1 - \frac{\delta}{t}\right) = a - \frac{a\,\delta}{t}$$

$$\text{Lectura posterior corregida} = t - (t - p)\left(1 - \frac{\delta}{t}\right) = p + \frac{t - p}{t}\,\delta.$$

Y la media será:

$$\frac{a + p}{2} + \left(\frac{t}{2} - \frac{a + p}{2}\right)\frac{\delta}{t}, \qquad \text{o bien,} \qquad = m + \Delta.$$

Es decir, que a la media aritmética $m = \dfrac{a + p}{2}$ de las dos lecturas sobre las rayas anterior y posterior, hay que aplicar la corrección (muy pequeña)

$$\Delta = \left(\frac{t}{2} - m\right)\frac{\delta}{t}.$$

Puede formarse una tabla auxiliar para aplicar esta corrección en cada caso particular que se presente.

Lectura con dos pares de hilos. Para evitar las muchas vueltas que hay que dar al tornillo micrométrico cuando se quiere corregir el error del micrómetro, se emplean, en muchos teodolitos de 1.er orden, dos pares de hilos, cuyo punto medio debe coincidir con la muesca-índice cuando el tambor marca cero. El par de hilos de la derecha se pone sobre la raya o trazo de la derecha o posterior, y el de la izquierda sobre el de la izquierda o anterior.

Ordinariamente, el limbo está dividido de 5′ en 5′ y el tornillo de tal modo construído que dos vueltas y media del mismo corresponden a una división del limbo. Por otra parte, la distancia entre los dos pares de hilos es igual a 4′, o sea, a dos vueltas completas del tornillo micrométrico. La figura 344 representa el campo de un microscopio provisto de dos pares de hilos; en *D* se ve el índice antes mencionado (pág. 299). Además de los dos pares de hilos móviles, que se representan en la posición correspondiente al cero del tambor (líneas de trazos cortados) y en la de coincidencia con la raya anterior o de la izquierda (líneas de trazo lleno), se ven en la figura 344 dos hilos horizontales *A* y *B*, entre los cuales se hace la coincidencia de los hilos con las divisiones del limbo.

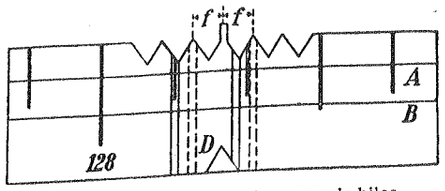


Fig. 344. — Lectura con dos pares de hilos

Vamos a ver cómo se tiene en cuenta el error del micrómetro empleando dos pares de hilos. Sean a y p las lecturas correspondientes a la coincidencia con las rayas anterior y posterior respectivamente, y llamemos $2f$ a la distancia entre los dos pares de hilos, medida con el tornillo micrométrico; es decir, que a un par de hilos imaginario situado en el medio de la distancia que separa a los otros dos pares, corresponden las lecturas $a+f$ y $p+f$, que corregidas del error micrométrico serían:

$$\text{anterior: } (a+f)\left(1-\frac{\delta}{t}\right) = a+f-a\frac{\delta}{t}-f\frac{\delta}{t}$$

$$\text{posterior: } t-[t-(p-f)]\left(1-\frac{\delta}{t}\right) = p-f+(t-p)\frac{\delta}{t}+f\frac{\delta}{t}$$

La media de estas dos lecturas corregidas es:

$$\frac{a+p}{2}+\left(\frac{t}{2}-\frac{a+p}{2}\right)\frac{\delta}{t}$$

que coincide con la hallada anteriormente para un solo par de hilos.

Microscopio lector de Zeiss-Wild. Para el teodolito construído por Zeiss en el año 1924, ideó H. Wild un nuevo dispositivo de lectura, cuyo fundamento representan las figuras 345 y 346. La alidada está provista de dos índices Z_1 y Z_2 (fig. 345) cuyas distancias respectivas a_1 y a_2 a los trazos que les preceden (en el limbo) se trata de medir. Por un sistema óptico adecuado se obtienen dos imágenes de las dos posiciones de los índices Z_1 y Z_2, que quedan una sobre otra y con las divisiones del limbo invertidas unas respecto a otras, como se ve en la figura 346, donde se ve que en vez de leer las dos distancias a_1 y a_2 para tomar después la media aritmética,

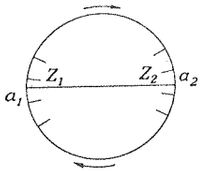


Fig. 345

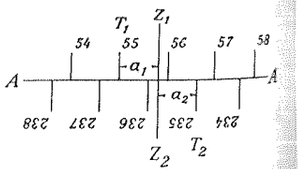


Fig. 346

es lo mismo leer la distancia entre los trazos T_1 y T_2 anteriores a los índices, uno en cada imagen del limbo, y cuyo promedio es igual a $\frac{a_1+a_2}{2}$.

La figura 347 representa esquemáticamente la aplicación de este sistema de lectura al teodolito de Zeiss de la figura 325. El círculo acimutal, *d*, es de vidrio, tiene forma de cilindro achatado, es hueco y su cara exterior está cubierta con un baño especular. Las divisiones están grabadas sobre el vidrio a través de este baño. El eje cilíndrico vertical b_1 que sirve de soporte y eje de giro a toda la parte superior del instrumento, arrastra consigo, en su parte baja, por dentro del círculo acimutal, una caja e_2 con dos prismas grandes *e* y otros de pequeños e_1 situados entre aquéllos. Por debajo de la plataforma nivelante, que se apoya sobre el trípode de sustentación con sus tres tornillos *a*, va fijado un prisma de iluminación e_3, con el cual, por medio de los prismas pequeños se iluminan las dos partes diametralmente opuestas d_1 del círculo acimutal. La luz reflejada por la capa especular de este último, va a parar, a través de los prismas grandes *e*, a una lente (objetivo) *f*, y de aquí incide sobre el prisma f_1, que la refleja sobre el *n*, el cual a su vez la refleja sobre el plano imagen *r*, donde se forman de este modo, una junto a otra, las dos imágenes de las partes opuestas del círculo acimutal. En este plano-imagen hay además una lámina de vidrio, con los dos índices Z_1 y Z_2 coincidentes, viéndose, al mirar por el ocular *z*, una imagen análoga a la representada en la figura 346.

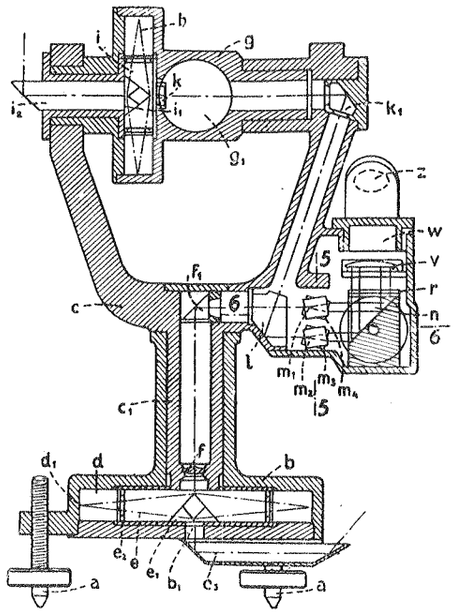


Fig. 347. — Teodolito Zeiss-Wild

La lectura primera es aproximada y se hace, como se dijo en la página 291, con los índices correspondientes; pero resulta más ventajoso hacerla del modo siguiente: se pone el micrómetro óptico a cero (fig. 326) y se busca, a la izquierda del índice, en la escala directa o no invertida, el trazo numerado más próximo, que da los grados enteros, y se anota el número; después se busca, en la escala invertida, el trazo correspondiente a la división que se diferencia 180° de la anteriormente anotada, se toma la distancia angular entre ambos trazos y se divide por dos. En la figura 326 se tienen, para el círculo altimétrico H_1, las dos lecturas en grados enteros 78 y 258, cuya distancia, tomada a estima, es igual a 84′. Es decir, que la lectura primera, aproximada, para H_1 es 78° 42′. Para el círculo acimutal S_1, las dos divisiones consideradas son 90 y 270, distantes entre sí 70′, siendo, por lo tanto, la lectura para S_1, 90° 35′.

Para el círculo altimétrico *h* (fig. 347) se emplea el mismo sistema de iluminación y formación de imágenes que para el acimutal, teniéndose el prisma de iluminación en i_2, y los prismas grandes y pequeños, en *i* e i_1; la lente objetiva es *k* y los prismas de reflexión total son k_1 y *l*. Al salir de este último prisma siguen los rayos el mismo camino que los procedentes del círculo acimutal. La parte giratoria del eje horizontal, que arrastra en su movimiento al círculo altimétrico, es la indicada con la letra *g*, y por g_1 pasa el anteojo.

De este modo se forman en el plano r dos imágenes análogas a la que se ve en la figura 346, correspondientes a los círculos acimutal y altimétrico respectivamente. Falta ahora ver cómo se mide la distancia entre los dos trazos T_1 y T_2 (fig. 346); para ello sirven dos pares de plaquitas de vidrio paralelas entre sí, m_1 y m_2, m_3 y m_4 (fig. 347). Las dos plaquitas m_1 y m_2 están de tal modo dispuestas que a través de una de ellas pasan los rayos procedentes de la parte de la izquierda del círculo acimutal, y por la otra los que provienen de la parte opuesta a aquélla, es decir, de la derecha. Girando estas plaquitas en sentido contrario una de otra, alrededor de un eje común que pasa por su centro (normal al plano de la figura), se mueven al mismo tiempo las imágenes de las dos divisiones opuestas en sentido contrario una de otra, pudiéndose así fácilmente llegar a hacer coincidir la T_1 con la T_2. El giro que hay que dar a las dos plaquitas m_1 y m_2 sirve de medida a la distancia angular $T_1\,T_2$.

El mismo procedimiento de medida se emplea, con las plaquitas m_3 y m_4, para la lectura del círculo altimétrico.

Las lecturas en el teodolito de Wild (fig. 329) se basan en el mismo principio, aunque la realización mecánica del mismo se diferencia algo de la anterior.

La desviación transversal que experimentan los rayos luminosos al atravesar una placa de vidrio de caras paralelas y giratoria, sin dejar de ser paralelos a sí mismos, ha sido utilizada por Hohenner en la construcción de una lupa micrométrica, que puede emplearse también como dispositivo de lectura para los círculos de los teodolitos.

§ 73. Accesorios para la puesta en estación de los teodolitos

Plomadas. Ordinariamente se ponen en estación los teodolitos valiéndose sólo de la plomada corriente de hilo, que se cuelga del gancho en que termina inferiormente el tornillo de sujeción del teodolito al trípode (fig. 313). Este procedimiento es suficiente cuando el aire está tranquilo, pero cuando hay viento o la puesta en estación debe ser muy precisa, ya no basta con la plomada ordinaria, teniendo que recurrir a otros dispositivos especiales.

Una plomada rígida muy sencilla es la de Löschner, que consiste en un tubo de acero que se suspende del gancho en que termina el tornillo de sujeción del teodolito, y que lleva unido lateralmente un nivel. De este tubo sale hacia abajo una varilla de acero, terminada en punta. Una vez puesto el trípode casi en estación se coloca la punta de esta varilla sobre el punto del suelo en que se haya de estacionar, y se mueve el teodolito sobre el trípode hasta que el nivel de la plomada quede calado.

Las figuras 348 y 349 representan la plomada rígida de Meissner; en la primera se ve, en S, la plataforma del trípode, que es de articulación de bolas, unida por la parte inferior con la plomada rígida KV y por la superior con una base de tres brazos F, con ranuras para las patas del instrumento; esta base lleva unido un nivel esférico L. Este nivel esférico tiene un radio de curvatura igual aproximadamente a la mitad de la altura del trípode. En la figura 349 se ve el manejo de esta plomada; el punto del suelo en que hay que centrar o estacionar el teodolito, se supone situado en C, y como por este punto debe pasar la vertical correspondiente al centro S del trípode, se ve claramente que para conseguirlo hay que mover hacia la izquierda A la plataforma del mismo. Cuando falte poco para tener centrada la plomada, se coloca su punta inferior s sobre la estación C y se sujeta en esta posición, ya sea valiéndose de un peón que con una mano sujete el saliente V (figura 348), o lo que es más sencillo aún, como se ve en la figura 349, poniendo el mismo

operador un pie sobre una chapa P articulada en V, con lo cual quedan inmóviles la chapa y la punta s de la plomada.

El cuerpo x de la plomada es tubular, y por dentro del mismo se puede correr a voluntad la varilla sy para llevar s al punto-estación de que se trate. Hecho esto, el operador mueve el trípode a un lado o a otro hasta que el nivel L quede calado.

Esta misma plomada rígida ha sido también construída, posteriormente por Sprenger.

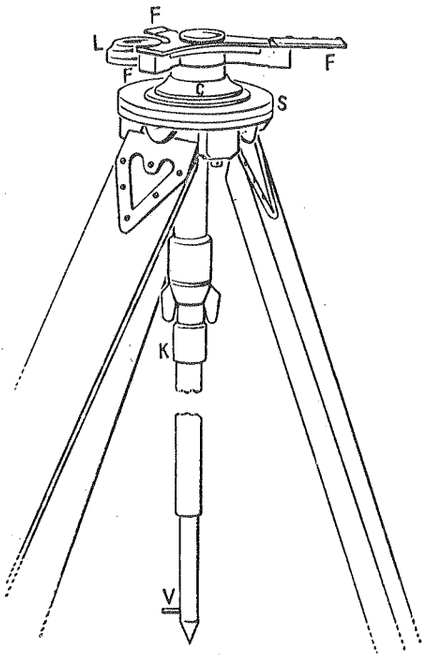


Fig. 348. — Plomada rígida de Meissner

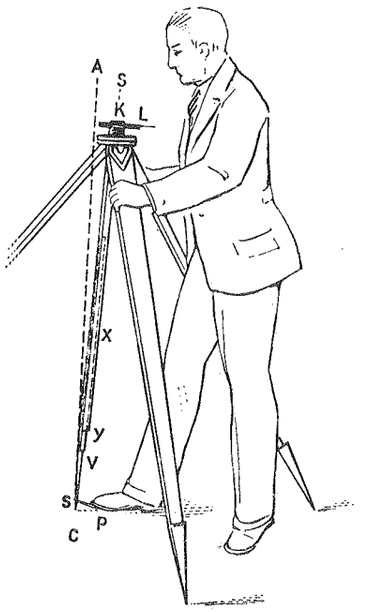


Fig. 349. — Manejo de la plomada rígida

Centrado exacto del teodolito. En poligonales de lados cortos y en otros trabajos de precisión, es de la mayor importancia evitar los errores de excentricidad procedentes de la falta de exactitud en la puesta en estación del teodolito y de las miras. Para conseguir este objeto construye Hildebrand, de Freiberg, un dispositivo especial, consistente en una pequeña plancha de latón en forma de trébol que se fija sobre el trípode, como se ve en la figura 352; esta plancha lleva en su centro un orificio al cual se aplica un tubo corto, que pasa por la plataforma del trípode y cuyo diámetro interior es igual al de dicho orificio. Este tubo tiene su extremo roscado para poderlo sujetar al trípode mediante una tuerca de orejetas y una arandela.

El teodolito lleva, en vez de gancho para la plomada, una bola, que pasa sin juego alguno por el orificio de la plancha de centrar.

Para poner en estación el teodolito, se centra la plancha horadada sobre el punto-estación de que se trate, ya sea con una plomada de hilo u ópticamente, como veremos después, y se atornilla sobre la plataforma del trípode para que quede bien sujeta; el teodolito se coloca sobre la plancha con la bola en el orificio central de ésta, con lo cual queda exactamente centrado sobre el punto-estación. Si en vez del teodolito se trata de una mira u otra señal análoga, se dispone ésta sobre el trípode del mismo modo, estando provista de una bola igual a la del teodolito.

En Kassel construye la casa Fennel un dispositivo semejante al que acabamos de describir.

En la figura 350 se ve una plomada especial para el centrado exacto del instrumento sobre el punto-estación; consiste esta plomada en una barra de *quita y pon* terminada por abajo en punta y por arriba en forma de estribo de suspensión, con una bola en la prolongación del eje de la parte inferior; además, en la parte superior del estribo va un nivel esférico, que queda calado cuando el eje de la plomada está vertical. Para centrar la plancha antes indicada, se suspende esta barra, por su bola superior, del centro de aquélla y se mantiene su punta inferior sobre el punto-estación del terreno, sosteniéndola en esta posición con un pedal, como se vió en la figura 349; después se corre la plancha sobre la plataforma del trípode hasta que quede calado el nivel del estribo de suspensión, y entonces se aprieta la tuerca contra dicha plataforma. De los ensayos e investigaciones hechos con esta plomada resulta que con la misma se obtiene el centrado sobre el punto-estación con una precisión de 0,2 mm aproximadamente.

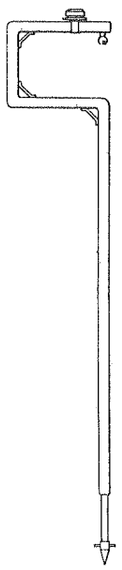


Fig. 350
Plomada rígida de estribo

Como mira para la puesta en estación, da excelentes resultados una barra de madera de carpe, terminada inferiormente en una esfera, cuyo diámetro es algo mayor que el del orificio de la plancha de centrar (fig. 352), de modo que al poner aquélla sobre éste, queda la barra perfectamente centrada; en la esfera va atornillado, por debajo, un ganchito, de donde se suspende una plomada de hilo, para poner la barra en posición vertical.

Centrado con la base nivelante de los teodolitos Breithaupt. En vez de emplear una plancha de centrar se utiliza la base misma nivelante del teodolito (fig. 351, *A*), bastando para ello sacar la parte superior del instrumento, con el eje vertical de apoyo del mismo (fig. 351, *C*). El centrado se hace como con la plancha de

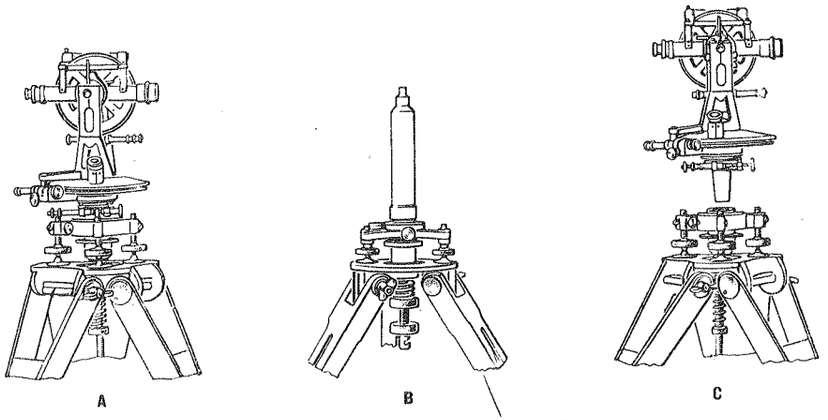


Fig. 351. — Centrado con la base nivelante de Breithaupt

centrar, empleando una plomada ordinaria o rígida, o el centrador óptico (fig. 353). El teodolito puede sustituirse por una mira circular o de barra (fig. 351, *B*), provista interiormente de un gorrón exactamente igual al eje vertical del teodolito, que se introduce en el alojamiento de la base nivelante.

Para aplicar este sistema de centrado a las poligonales debe disponerse, por lo menos,

de tres planchas de centrar, o de tres bases nivelantes con sus tornillos, y de otros tantos trípodes.

Este sistema de centrado de Breithaupt se aplicó por primera vez a los niveles de precisión, según descripción de estos instrumentos, hecha por su constructor en 1846, y en 1840 se aplicó a la medición de ángulos.

Centrado óptico. En la figura 352 se ve el centrador óptico de Nagel y Hildebrand, montado sobre una plancha de centrar, en un trípode corriente. Consiste este centrador en un pequeño anteojo, giratorio alrededor de un eje vertical y dispuesto sobre una base con tres tornillos nivelantes, para colocarlo verticalmente. El extremo inferior del anteojo presenta un ensanchamiento esférico que pasa sin juego alguno por el orificio central de la plancha *P*, del mismo modo que lo hace la bola del teodolito (pág. 305).

La plancha *P* se puede correr sobre la plataforma del trípode hasta que el punto-estación *C* coincida con la cruz filar del anteojo; se vuelve a nivelar con los dos niveles *L* y L_1, y después de rectificar nuevamente la posición de *P*, se sujeta ésta, con el tornillo correspondiente, al trípode, quedando así perfectamente centrada sobre el punto *C*.

En el mismo principio está fundado otro centrador óptico construído por Fennel.

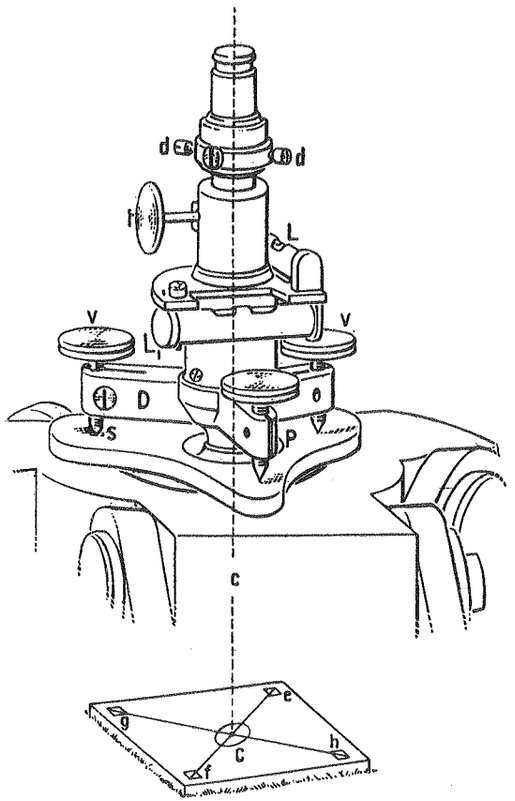


Fig. 352. — Centrador óptico de Nagel-Hildebrand

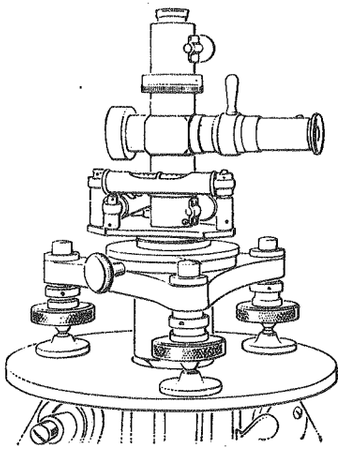


Fig. 353. — Centrador óptico de Breithaupt

La figura 353 representa un centrador óptico de Breithaupt, empleado para la puesta en estación del teodolito por el método Breithaupt antes descrito; con este centrador se puede poner el teodolito en estación tanto sobre un punto del suelo, como bajo un punto de una galería (minas, etc.). Consta este centrador de una parte vertical, en la que va un objetivo que puede subirse o bajarse a voluntad con un tornillo engranado a una cremallera, y de una parte horizontal, donde va el ocular. Frente al ocular hay, en el tubo prin-

cipal, un prisma de reflexión, con el cual pueden dirigirse visuales hacia arriba y hacia abajo con sólo hacer girar la pequeña empuñadura que se ve por encima del ocular.

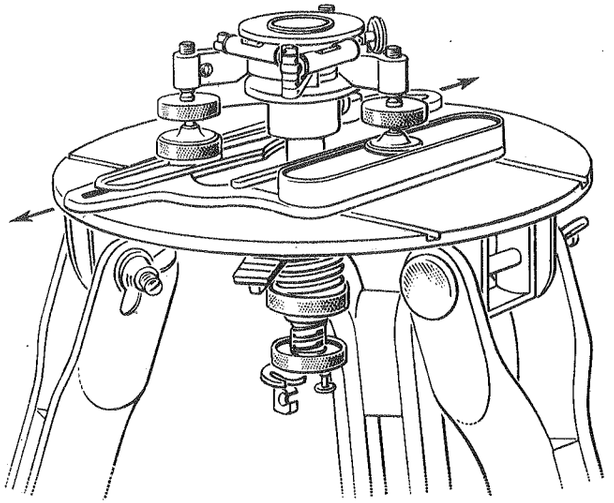


Fig. 354. — Trípode con carro centrador cruzado, de Breithaupt

Para simplificar las operaciones de centrado del teodolito, construye la casa Breithaupt un trípode especial (fig. 354) con un carro cruzado, sobre el cual se monta la plataforma nivelante del teodolito del modo ordinario, pero sin apretar al principio el muelle de fijación contra el trípode. Para mirar hacia abajo se separa a un lado la plaquita que forma

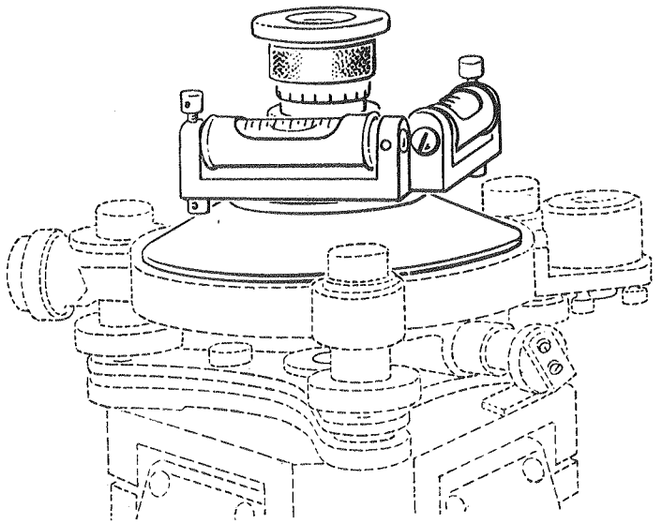


Fig. 355. — Centrador óptico de Zeiss

cuerpo con el gancho de la plomada. Si el eje de la plataforma nivelante del teodolito se dispone verticalmente por medio de los dos niveles unidos a la misma, se puede mover a aquélla en cualquier sentido sobre el carro cruzado sin que el eje pierda su verticalidad.

En el mismo principio del centrador óptico de la figura 353 se funda el dispositivo adicional que para centrar se emplea en los teodolitos Zeiss (fig. 355). En las figuras 355 y 356 se ve el centrador óptico de Zeiss en dos formas diferentes; la primera para centrar sobre puntos del terreno, y la segunda para centrar bajo puntos de una galería, etc. En los dos casos se coloca el centrador sobre la plataforma nivelante del teodolito.

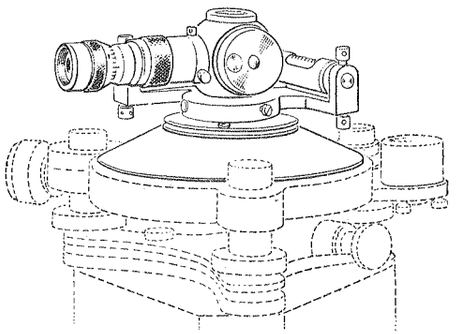


Fig. 356. — Centrador óptico de Zeiss

También el teodolito de Wild (fig. 329) está provisto de centrador óptico, pero en este instrumento dicho dispositivo va fijado de modo estable y permanente a la base nivelante del mismo.

Al tratar de la medición de poligonales volveremos sobre estos sistemas perfeccionados de centrado, cosa de gran importancia en los trabajos de aquella índole.

Datos históricos. Como reseña histórica sobre los centradores ópticos citaremos la descripción que en la revista «Zeitsch. für Verm.» del año 1890 se hace de un teodolito pequeño con dispositivo centrador vertical y concéntrico, siendo desde luego excéntrico el anteojo del teodolito; en la misma revista, y en el mismo año, se describe un dispositivo análogo, patentado por Fennel, también concéntrico y de reflexión, pero inclinado; y por último, en el centrador de Dennert y Pape descrito en la misma revista (1890), el anteojo mismo del instrumento puede ponerse verticalmente, sobre el punto-estación, pasando la visual por un orificio a propósito practicado en la parte inferior del teodolito.

§ 74. Telémetros de doble imagen

La medición de distancias con el teodolito supone, en muchos casos, una gran simplificación, comparada con las mediciones hechas con reglas y cintas métricas. Aquí sólo nos ocuparemos de los métodos que, por la precisión de sus resultados, son más indicados para sustituir a la medición directa de distancias.

El fundamento de la medición de distancias con el teodolito es el siguiente: si en el punto de mira se coloca una regla horizontal y se mide el ángulo que determinan dos señales hechas sobre la misma y cuya mutua distancia sea conocida (ángulo paraláctico), se puede calcular, por Trigonometría, la distancia del instrumento a la regla, en función de dicho ángulo y de la distancia entre las señales.

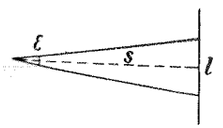


Fig. 357

Si la distancia entre estas señales se puede considerar libre de errores, la precisión de la determinación de distancias depende, en primer lugar, de la precisión con que se mide el ángulo paraláctico o diastimométrico. Si llamamos l a la distancia entre las señales de la regla (fig. 357), ε al ángulo paraláctico y s a la distancia entre el teodolito y la regla, tendremos:

$$s = \frac{l}{\varepsilon}, \tag{1}$$

y diferenciando,

$$ds = -\frac{l}{\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{s^2}{l} d\varepsilon, \tag{2}$$

o bien, si $d\varepsilon$ se expresa en segundos y en vez de las diferenciales consideramos los errores medios,

$$m_s = \pm \frac{s^2}{l\rho} m_\varepsilon. \quad (3)$$

Es decir, que el error medio aumenta, para la constante l, como el cuadrado de la distancia; por ejemplo, si para $l = 2$ m se supone $m_\varepsilon = \pm 1''$, tenemos los siguientes valores para el error medio de la distancia:

s	50	100	200	300	400	500 m
m_s	0,006	0,024	0,10	0,22	0,39	0,61 m

Vamos a suponer ahora constante el ángulo ε, de modo que para cada distancia s se tenga un espacio distinto l en la regla. De las fórmulas (1) y (2) se deduce esta otra:

$$m_s = \pm \frac{s}{\varepsilon} m_\varepsilon. \quad (4)$$

En este caso, el error medio aumenta proporcionalmente a la distancia.

Para llegar a valores numéricos, supongamos que la relación $\frac{s}{l}$ es igual a 100, y pongamos $m_\varepsilon = \pm 1''$. Sustituyendo en (3) se tiene:

$$m_s = \pm \frac{100\, s}{\rho} m_\varepsilon$$

de donde se deducen los siguientes valores de m_s para los correspondientes de s:

s	50	100	200	300	400	500 m
m_s	0,024	0,05	0,10	0,15	0,19	0,24 m

En la práctica se presentan pocos casos en que aplicar directamente esta teoría, y en ellos hay que disponer de teodolitos que permitan medir con gran exactitud los ángulos.

En cambio, tiene mucha aplicación práctica el *telémetro de doble imagen,* que consiste en un teodolito, delante de cuyo objetivo se pone un prisma óptico, que da dos imágenes de la regla o mira, separadas entre sí por un ángulo constante, por lo cual bastará medir la separación lineal entre ambas para poder calcular la distancia entre el instrumento y la regla.

Este principio fué aplicado por primera vez por el americano Richards.

A continuación se describen con detalle algunos modelos de estadímetros o distanciómetros de doble imagen, basados en el mismo principio.

Telémetro de doble imagen de Kern-Aregger. Las figuras 358 y 359 representan el telémetro ideado por el geómetra del Catastro Aregger y construído por la casa suiza Kern. Sobre la montura del objetivo del anteojo del teodolito, se sujeta, a rosca, un aro al cual va articulado un segundo aro, y éste lleva un prisma de pequeño ángulo refringente que cubre aproximadamente la mitad del objetivo. Cuando se quiere emplear el teodolito como distanciómetro se adapta el aro móvil sobre el roscado al objetivo del teodolito, y cuando se emplea el instrumento como goniómetro, es decir, para medir ángulos, se gira afuera el aro móvil, quedando libre el objetivo. Si se quiere se puede desenroscar todo el dispositivo telemétrico.

Para medir distancias hay que disponer de una regla o mira especial, que sobre un trípode sencillo (fig. 360) pueda colocarse sobre el punto de mira horizontalmente y en ángulo recto con la visual dirigida sobre la misma con el teodolito. Para asegurar esta última condición lleva la regla una alidada, que se dirige hacia el anteojo; cuando la regla está bien colocada, se ve con el anteojo una cruz luminosa en la alidada, con lo cual puede el observador comprobar la colocación de la regla.

En el anteojo se forman dos imágenes de la regla: una, dada directamente por el objetivo, y otra, desviada en un pequeño ángulo por el prisma, apareciendo ambas corridas un

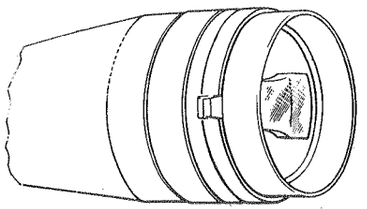


Fig. 358. — Telémetro de doble imagen, de Kern

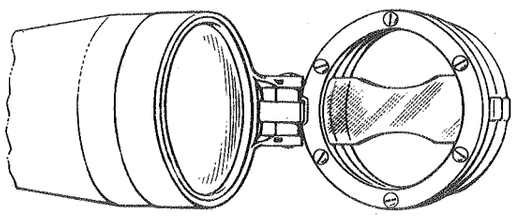


Fig. 359. — Telémetro de doble imagen, de Kern

poco lateralmente entre sí, siendo tal el ángulo de refringencia del prisma, que dicho corrimiento o separación es igual a la centésima parte de la distancia entre el instrumento y la regla. En la página 244 hemos considerado ya, como ejemplo, un prisma de esta clase. Además, si el ángulo de refringencia del prisma no cumple exactamente esta condición, puede aumentarse o disminuirse un poco el valor de las divisiones de la regla.

La desviación entre las dos imágenes puede leerse sobre la misma regla, pues el cero de una de las imágenes se emplea como índice para leer en la otra imagen.

La regla está graduada en centímetros (fig. 360), y para medir con exactitud la desviación de las dos imágenes, las 20 primeras divisiones están sustituídas por un nonio, con el cual puede leerse hasta el medio milímetro. La figura 361 representa la doble imagen que se ve en el anteojo, siendo la lectura correspondiente 41,45 cm, es decir, que la distancia entre el teodolito y la regla es de 41,45 m.

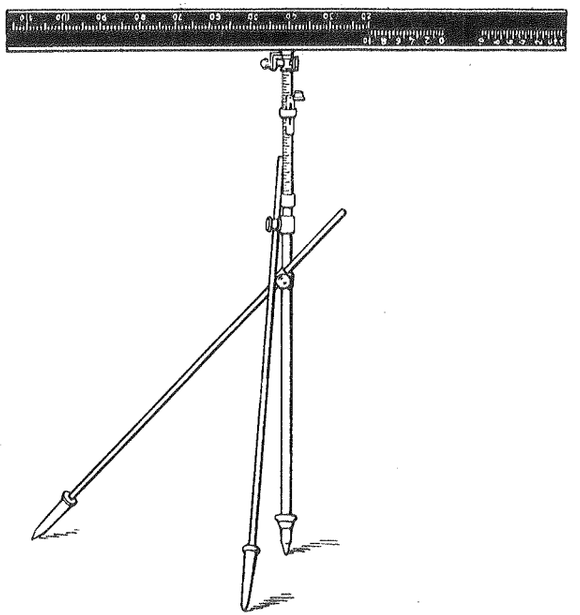


Fig. 360. — Mira telemétrica de Kern

Para desviaciones inferiores a 20 cm no cae el cero del nonio sobre la graduación principal, como se deduce de la figura 360, por lo cual no pueden leerse con aquél estas desviaciones pequeñas. Para hacer una lectura aproximada, en este caso se emplea como índice el tracito que se ve a la derecha de la última división del nonio (figuras 361 y 362), el cual dista 20 cm del cero de este último, por ser de 19 cm la distancia del 0 a la última división del nonio. Por lo tanto, cuando se emplea este tracito como índice, hay que restar 20 cm de la lectura hecha con el mismo. Para hacer la lectura con

precisión, se lee el nonio como de ordinario, siempre que sea posible. En el caso de que la primera parte del nonio caiga fuera de la escala principal, se recurre a un procedimiento auxiliar consistente en prescindir de la coincidencia de trazos, buscando en cambio cuál es

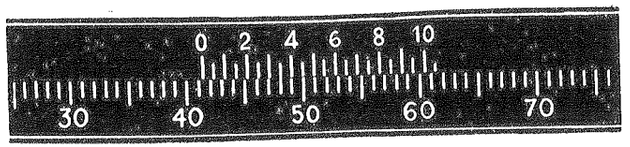


Fig. 361. — Lectura del telémetro de Kern

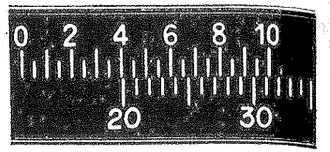


Fig. 362. — Lectura del telémetro de Kern

el trazo del nonio que divide en dos partes iguales a alguna división de la escala principal. Esta lectura resulta con 0,5 cm de exceso, como se ve en la figura 332, por lo cual, en el caso de la figura 362, la lectura final será:

$$32 - 20 + 0{,}75 - 0{,}50\ \text{cm} = 12{,}25\ \text{cm},$$

es decir, que la distancia es de 12,25 m.

Para grandes distancias, de algo más de 100 m, hay en la regla otro nonio (fig. 360) cuyo cero dista 30 cm del cero de la escala principal. A las lecturas hechas con este nonio, hay que agregar, por consiguiente, 30 cm, lo cual se indica en la misma regla con el número + 30 puesto al principio de dicho nonio.

Para distancias comprendidas entre 50 m y 100 m, pueden emplearse ambos nonios, cosa ventajosa en determinadas circunstancias, por la posible interposición de algún obstáculo en la visual, etc.

Según una memoria de Aregger (1927) sobre la precisión que se consigue con este dispositivo en la medición de las distancias, resulta que no pasa de 3 cm la diferencia entre el valor obtenido de este modo para distancias de hasta 100 m y el hallado por medición directa con reglas. Leixner encontró para este dispositivo telemétrico un error medio de ± 1,6 cm en 100 m, y Lüdemann, de ± 2,0 cm para igual distancia.

Este accesorio es construído también por la casa Max Hildebrand, de Freiberg (Sajonia).

Telémetro de Fennel. En el mismo principio que el anterior se funda el telémetro construído por la casa Otto Fennel Söhne, de Kassel, consistente en un prisma que se coloca delante del objetivo de modo que tapa la mitad del campo visual del anteojo; este prisma tiene un dispositivo de ajuste o corrección mediante el cual puede hacerse la constante de multiplicación (equivalente al coeficiente diastimométrico) exactamente igual a 100.

Telémetro de Wild. El principio del estadímetro de doble imagen ha sido utilizado de modo distinto al anterior por el ingeniero suizo H. Wild. El dispositivo representado en la figura 363 se adapta al objetivo del teodolito Wild (fig. 329), fijándose al mismo con un tornillo de presión; en el interior de este dispositivo (fig. 364) van dos prismas dispuestos en dirección contraria uno al otro, cada uno de los cuales tapa una mitad del objetivo, obteniéndose así dos imágenes de la mira, simétricas y separadas, una a la izquierda y otra a la derecha. La separación angular de las dos imágenes es $\varepsilon = \frac{\rho}{100}$.

Otra parte muy importante de este dispositivo la constituye un par de placas de vidrio,

de caras planas y paralelas, que pueden girar alrededor de un eje perpendicular al eje de giro del anteojo del teodolito. Las dos placas giran a la vez, pero en sentidos contrarios, por medio del tambor micrométrico que se ve en las figuras 363 y 364.

Los dos prismas determinan dos visuales, que son simétricas respecto a la principal o central del anteojo y forman entre sí el ángulo ε. Al girar las placas de vidrio se

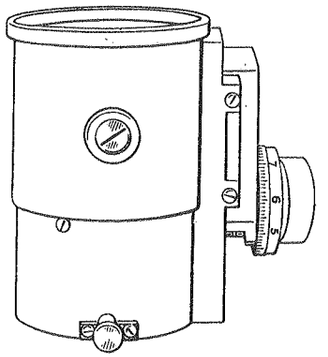


Fig. 363. — Telémetro de Wild

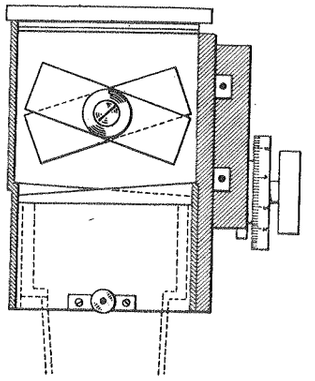


Fig. 364. — Telémetro de Wild

corren paralelamente a sí mismas las dos visuales, sin que varíe el ángulo ε, y la graduación del tambor micrométrico está hecha de tal modo, que da directamente la suma de los corrimientos de las dos visuales.

En la figura 365, las rectas OA y OB representan la posición de las dos visuales cuando las placas están colocadas de modo que el tambor marca cero. Si en estas condiciones se mide el segmento $AB = l$ por la separación de las dos imágenes de la regla, se tiene la distancia del punto O a la regla, que será igual a $100\,l$. Esta separación l puede determinarse de modo que el cero de una de las imágenes de la regla sirva para leer sobre la otra imagen; claro está que procediendo así, sólo pueden apreciarse milímetros sobre la división en centímetros de la regla. Ahora bien, se consigue una precisión mucho mayor en la medición del segmento l, si después de hecha la lectura en centímetros, se corren ambas imágenes, por medio del tambor micrométrico, hasta que el cero de una de ellas coincida con el trazo anterior (de la división en centímetros) de la otra imagen, con lo cual coincidirán todas las divisiones principales de las dos imágenes. El corrimiento $a + b$ (fig. 365) que para esta coincidencia tienen que experimentar las dos imágenes, se mide directamente con el tambor micrométrico.

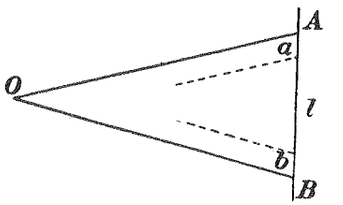


Fig. 365

En la figura 366 se ve la regla o mira correspondiente al telémetro de Wild, con su correspondiente trípode. Esta regla es de 1,5 m de longitud y tiene la mitad dividida en decímetros y la otra mitad en centímetros. Como índice para la lectura se toma el cero de la escala de centímetros en la imagen dada por uno de los prismas. La lectura se hace del modo indicado en las figuras 367 y 368, donde se ven las dos imágenes tales como aparecen en el anteojo del teodolito: a la izquierda se ve la posición de ambas imágenes estando en cero el tambor micrométrico, y a la derecha, la posición correspon-

diente a la coincidencia de los trazos principales, lograda haciendo girar el tambor, como antes se ha indicado.

En la figura 367 se lee, a la izquierda, como primera aproximación 0,36 m, y al hacer la coincidencia, representada a la derecha, la lectura del tambor habrá sido 0,38 cm, de modo que el corrimiento total de imágenes resulta ser de 0,3638 m, es decir, que la distancia a la regla es de 36,38 m.

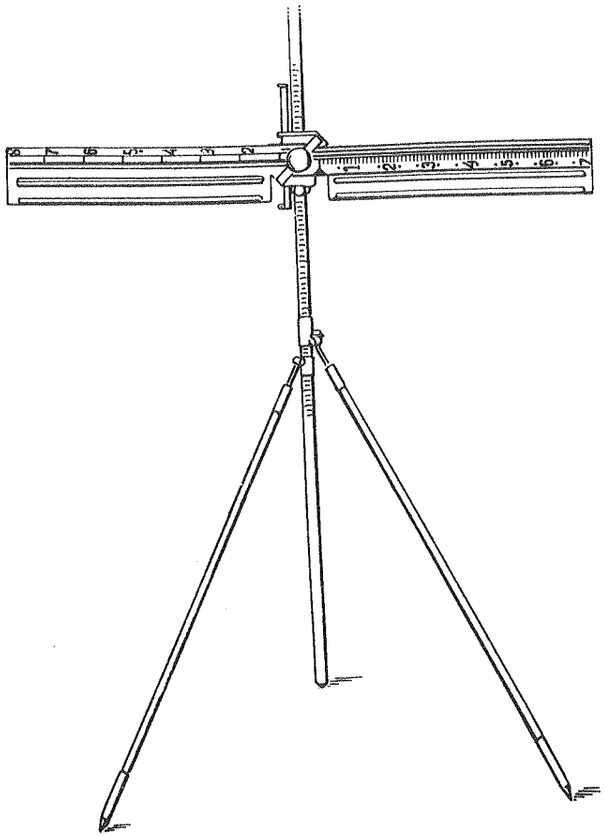
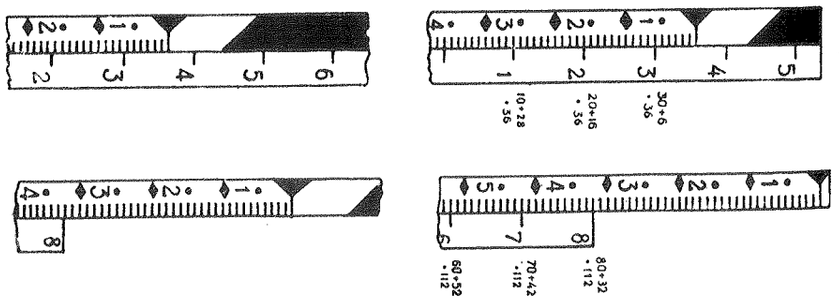


Fig. 366. — Mira telemétrica de Wild

La figura 368 corresponde a una distancia más grande, para la cual el índice de lectura cae fuera de la escala de decímetros; en este caso se lee sobre la escala de los centímetros el punto a que llega un decímetro contado a partir de donde termina el 8, teniéndose así esta lectura aproximada: $0{,}8 + 0{,}37 = 1{,}17$, y si la lectura del tambor micrométrico al hacer la coincidencia que se ve a la derecha, ha sido igual a 0,65 cm, resulta que el corrimiento de las imágenes es de 1,1765 m y la distancia a la regla es igual a 117,65 m.

En cuanto al punto O (figura 365), desde el cual se calcula la distancia, hay que tener en cuenta que en el teodolito Wild cae a 0,428 m por detrás del eje de giro del anteojo, por lo cual a todas las distancias medidas hay que restar la cantidad 0,428 m, o también, a todas las lecturas de mira hay que restar 0,428 cm, para referir unas y otras al centro del instrumento. Esta corrección puede hacerse de modo automático, colocando el cero de la escala de decímetros a 0,428 cm de distancia del índice de lectura, que es el cero de la escala de centímetros.



Figs. 367 y 368. — Lectura del telémetro de Wild

Además, si el ángulo estadimétrico difiriera algo del valor $\frac{\rho}{100}$, se podría compensar, en la mira de Wild, variando el valor de la unidad de división.

Telémetro de Breithaupt. En los telémetros anteriores, la desviación de las visuales es producida por refracción a través de prismas convenientemente dispuestos. La casa F. W. Breithaupt, de Kassel, construye un telémetro de doble imagen, cuyo ángulo paraláctico lo determinan dos prismas de reflexión total colocados delante del objetivo

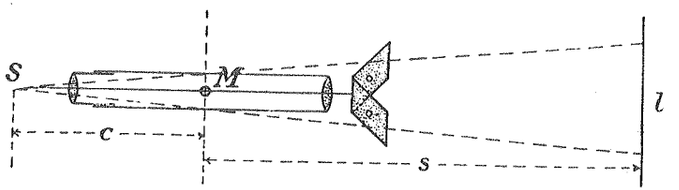


Fig. 369. — Principio del telémetro de Breithaupt

del anteojo, como se ve en la figura 369, los cuales dan dos imágenes de una regla horizontal, siendo la distancia del instrumento a la regla, igual a cien veces la separación entre ambas imágenes.

En esta figura 369 se ve que el punto analático no está en el centro M del teodolito, sino que cae en S, por detrás del anteojo. Si s es la distancia del centro del teodolito a la regla, l la lectura sobre la regla y c la distancia entre M y S, se tiene:

$$s = 100\,l - c$$

o sea

$$s = 100\left(l - \frac{c}{100}\right).$$

Para evitar esta corrección, se corre el cero de la regla en una longitud igual a $\frac{c}{100}$.

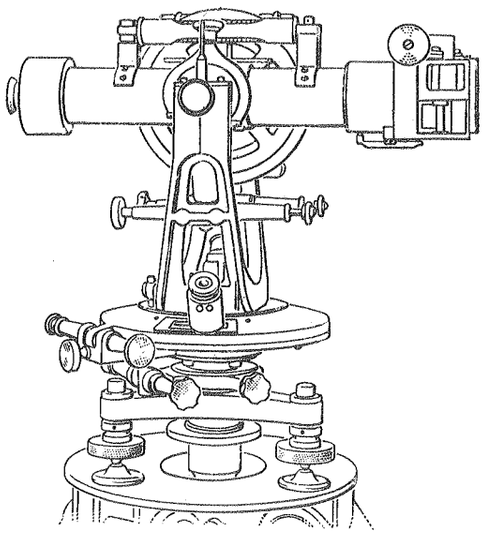


Fig 370. — Teodolito telemétrico de Breithaupt

La regla es de nonio, como la representada en la figura 360, pudiéndose leer con un milímetro de aproximación la separación entre las dos imágenes, de modo que la distancia se obtiene con un decímetro de aproximación. Como en general no coincide ningún trazo del nonio con otro de la regla, puede apreciarse el centímetro. Se obtiene un resultado más preciso mediante un pequeño giro de ambos prismas, de igual amplitud pero de sentido contrario en uno y otro, con lo cual se logra la coincidencia exacta del nonio con la escala principal; este giro de los prismas produce un corrimiento paralelo de ambas visuales, que da lugar a una variación del punto de intersección S y del valor de

la constante c. Para girar los prismas se hace uso de un tornillo con tambor micrométrico (figura 370), en el cual se lee, en milímetros, la variación de c. La lectura del tambor se agrega a la hecha sobre la regla.

§ 75. Telémetro de Zeiss-Bosshardt

En los instrumentos descritos en el párrafo anterior se obtiene la distancia en una visual inclinada correspondiente a la inclinación del anteojo, la cual hay que reducir al horizonte por medio de la lectura que se haga en el círculo altimétrico o vertical del teodolito. Pero el estadímetro inventado por el geómetra del Catastro suizo Bosshardt y construído por la casa Zeiss, de Jena, va provisto de un dispositivo autorreductor, que da directamente la lectura de la distancia horizontal.

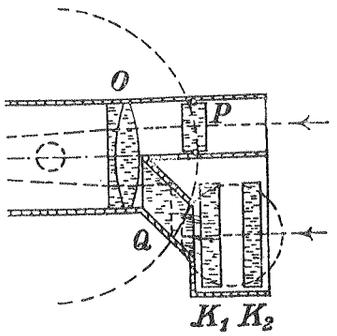


Fig. 371

En la figura 371 se ve, en esquema, una sección vertical del objetivo del anteojo de Zeiss-Bosshardt. Los rayos luminosos que forman las dos imágenes de la regla, llegan al objetivo O por caminos completamente distintos. La imagen directa se forma a través de la parte superior del objetivo, después de pasar los rayos por una placa de vidrio P de caras paralelas, mientras que la segunda imagen, desviada de la primera en una cierta cantidad angular (ángulo paraláctico), se forma a través de los dos prismas K_1 y K_2, pasando los rayos correspondientes por la parte inferior del objetivo, después de atravesar el prisma rómbico Q.

La figura 372 representa un corte horizontal del extremo objetivo del anteojo, mirando de abajo hacia arriba, viéndose en él los dos prismas simétricamente dispuestos K_1 y K_2, que producen una desviación angular ε de los rayos, respecto a la visual directa que pasa por encima.

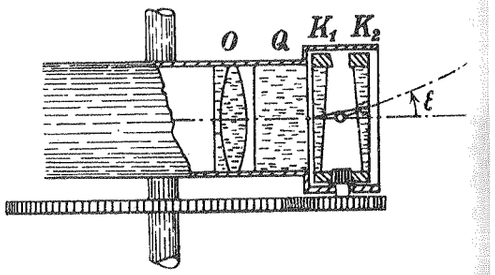


Fig. 372

La regla está dividida en centímetros, y en un extremo lleva un nonio que aprecia 1 mm. La figura 373 representa el campo del anteojo con las dos imágenes de la regla: la parte comprendida entre los dos puntos negros mayores es el nonio, y la lectura, en el caso de esta figura, es 71,5 cm, que corresponde a una distancia de 71,5 m. A 50 cm de distancia del origen de la regla hay otro nonio, entre dos puntos rojos, al cual corresponde una numeración distinta, también en rojo, indicada en la figura 373 con cifras más pequeñas. Los dos nonios dan, con sus correspondientes escalas o numeraciones, idéntica lectura; para distancias cortas conviene emplear el segundo nonio, cuya lectura se hace siempre hacia el medio de la regla; de este modo puede leerse a la vez el acimut sin tener que girar el anteojo.

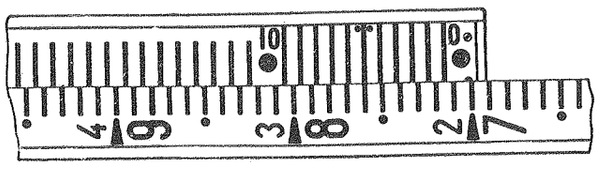


Fig. 373

En el caso de no verificarse coincidencia exacta de ningún trazo del nonio con otro de la escala principal, se hace esta coincidencia girando la placa de caras paralelas P (figura 374) por medio del tornillo micrométrico T cuyo tambor está dividido en 25 partes iguales, cada una de las cuales corresponde a un corrimiento lateral de 0,1 mm de la imagen de la regla, de modo que con el tambor puede leerse hasta el centímetro la distancia del instrumento a la regla.

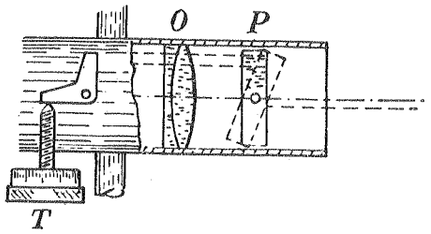


Fig. 374

De este modo se obtiene la distancia con la inclinación que tenga el anteojo, a lo cual queda limitado el alcance de los telémetros hasta aquí descritos; pero el instrumento de Zeiss-Bosshardt lleva un dispositivo para reducir automáticamente al horizonte las distancias inclinadas, que consiste en los dos prismas K_1, K_2 (figs. 371 y 372), de forma circular, encerrados en una montura metálica y giratorios alrededor del eje geométrico del anteojo, dando vueltas cada uno en sentido contrario al otro. Si partiendo de la posición representada en la figura 372 se da un giro de 90° a los prismas, quedan éstos funcionando como una placa de caras paralelas, por lo cual la desviación de los rayos que los atraviesan es nula. Para giros menores, varía la desviación entre el valor máximo ε y cero.

La figura 375 nos ayudará a comprender mejor el efecto de la rotación de los dos prismas. Sea O el punto del campo del anteojo correspondiente a la visual directa; consideremos ahora solamente el prisma K_1, que supondremos, en primer lugar, en su posición normal, de modo que el punto O estará desviado del A, correspondiente al prisma K_1, en una cantidad angular igual a $\frac{\varepsilon}{2}$. Si se da a este prisma una rotación completa (360°), el punto A describirá una circunferencia alrededor de O, cuyo radio corresponderá al ángulo ε, y para un giro parcial igual a un ángulo φ, el punto A se encontrará en A'. Supongamos detenido en esta posición al prisma K_1, y consideremos ahora el segundo prisma K_2, primeramente en su posición normal, para la cual el punto A' estará separado del B, visual de K_2, por una distancia $A'B$ igual a r; al girar este segundo prisma, el punto B describirá una circunferencia de radio r alrededor del punto A', y si el ángulo de giro es también igual a φ, pero de sentido contrario, el punto B caerá en B'.

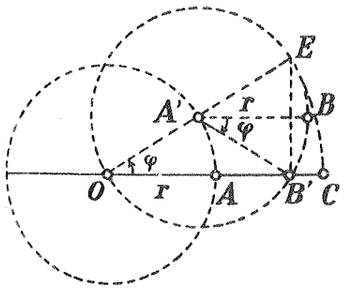


Fig. 375

Para rotaciones iguales y de sentido contrario de los prismas, no hay variación o desviación alguna *en altura* de las imágenes, sino sólo una desviación lateral, y si $OC = OE$ es esta desviación para la posición normal de los prismas, la correspondiente a un ángulo de giro igual a φ será $OB' = OC\cos\varphi$.

La rotación de los dos prismas se verifica, como se ve en la figura 372, por medio de dos ruedas dentadas, de las cuales la mayor está montada sobre el eje de giro del anteojo, pero sin tomar parte en el movimiento de rotación de este último. Al inclinar el anteojo gira la rueda más pequeña, que por medio de un piñón engranado en una corona

dentada, pone en movimiento a los dos prismas. Las dos ruedas dentadas están calculadas de tal modo, que el ángulo de giro φ sea igual a la inclinación de la visual, para lo cual puede afinarse la posición de la rueda grande mediante el nivel del círculo altimétrico.

Es fácil ver que con el dispositivo autorreductor, el corrimiento o separación de las imágenes de la regla al inclinarse el anteojo disminuye proporcionalmente al coseno del ángulo de pendiente, y que para cualquier posición, multiplicando por ciento la separación de las imágenes, se tiene la distancia horizontal entre instrumento y regla.

El instrumento completo, representado en la figura 376, es un teodolito cuyo círculo acimutal tiene 10,5 cm de diámetro y el altimétrico 8 cm. La lectura del acimut se hace con un solo microscopio de escala y la de la altura con dos, aunque hay un solo ocular para los

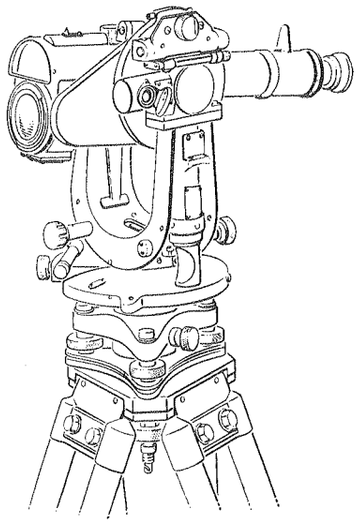


Fig. 376. — Teodolito telemétrico de Zeiss-Bossbardt

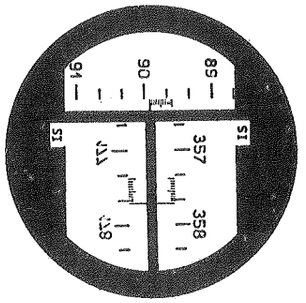


Fig. 377

tres microscopios; en la figura 377 se ve el campo de este ocular. En los últimos modelos lleva el círculo altimétrico una segunda división para leer la cotangente de la distancia cenital con tres cifras decimales.

Para la medida del acimut se utiliza únicamente la mitad superior del campo visual, habiendo para este objeto un hilo vertical en el plano-imagen. Para la medición de los ángulos verticales se emplea la línea que limita las dos imágenes.

La regla o mira horizontal es parecida a las descritas en el párrafo anterior, y está provista de una alidada para situarla perpendicularmente a la visual. Además, la regla lleva un pequeño dispositivo de colimación, mediante el cual se ve desde el anteojo, estando la regla bien colocada, una rendija iluminada por un reflector.

Se han hecho bastantes estudios sobre la precisión del estadímetro Zeiss-Bosshardt. Sin entrar en pormenores, diremos solamente que el error medio de una simple medición, para una distancia de 100 m, puede tomarse igual a 2-3 cm en números redondos.

Con este aparato, de gran rendimiento, es posible medir, en las poligonales, los lados o ejes y los ángulos al mismo tiempo, lo cual supone un gran ahorro de trabajo, especialmente en terrenos muy accidentados, como el de Suiza, por ejemplo.

Además, con este teodolito pueden hacerse los levantamientos de poca extensión por coordenadas polares, en vez de hacerlos por rectangulares (§ 24), tomando como

estaciones los vértices de la poligonal u otros puntos auxiliares, que se refieren a dichos vértices. En los terrenos montañosos se emplea ya con éxito este sistema de levantamiento. Lo que todavía no está muy claro es la ventaja que pueda reportar este instrumento para levantamientos en terreno llano. Pero, por lo menos, resulta práctico su empleo para comprobaciones o rectificaciones de los lados o ejes de las poligonales. Una de las ventajas del levantamiento por coordenadas polares consiste en que el cálculo de las coordenadas rectangulares de los puntos levantados, en función de las coordenadas de los puntos de estación, es mucho más sencillo que en los levantamientos por coordenadas rectangulares respecto a una red de ejes.

Para los trabajos de gabinete correspondientes a los levantamientos en coordenadas polares, véase § 27 (pág. 94).

BIBLIOGRAFÍA:

R. BOSSHARDT, Das neue Reduktionstachymeter (Schweiz. Zeitschr. f. Verm., 1927, páginas 1 y 25).

JÜTTNER, Über die bei optischen Distanzmessungen mittels Bosshardt-Zeiss auftretenden Fehler, unter besonderer Berücksichtigung der Refraktion. Ratibor, O.S., 1928.

ACKERL, Versuchsmessungen mit dem selbstreduzierenden Distanzmesser von Bosshardt-Zeiss (Zeitschr. f. Instr., 1929, págs. 64-71).

BERTSCHMANN, Die optische Distanzmessung und ihre Anwendung bei der schweizerischen Grundbuchvermessung. Zurich, 1925.

BALTENSPERGER, Die Polarkoordinatenmethode mittels optischer Distanzmessung als Aufnahmeverfahren für Katastervermessungen (Zeitschr. f. Verm , 1926, págs. 449-456, 481-492).

Anleitung für die Anwendung der Polarkoordinatenmethode mit optischer Distanzmessung bei Grundbuchvermessungen (Eidgenöss. Justiz- und Polizeidepartement, 18 Octubre 1927; Ref. Zeitschr f. Verm., 1929, págs. 571-573).

OBERARZBACHER, Orthogonale oder polare Messungsmethode im unbebauten Gelände (Zeitschr. f. Verm., 1927, págs. 696-703).

LÜDEMANN, Die Katastermessung nach der Polarkoordinatenmethode und das neue Doppelbildtachymeter (Allgem. Verm.-Nachr., 1928, fascículos 11 y 12).

BOSSHARDT, Optische Distanzmessung und Polarkoordinatenmethode. Stuttgart, 1930.

SCHERMERHORN, Eenige opmerkingen over dubbelbeeldafstandsmeting (Tijdschr. voor Kad. en Landmeetkunde, 1930, págs. 77-97).

§ 76. Errores de los ejes en el teodolito

En el teodolito podemos considerar tres ejes propiamente dichos y un eje de nivel, en total cuatro ejes, que son los siguientes, representados esquemáticamente en las figuras 378 y 379:

1. El eje vertical o principal, V.
2. El eje horizontal o de giro del anteojo, H.
3. El eje visual o de colimación, Z.
4. Un eje de nivel, L.

La figura 378 se refiere al nivel del eje horizontal (nivel caballero), y la figura 379, al nivel de plataforma (nivel de alidada).

Entre estos cuatro ejes deben verificarse las siguientes relaciones:

Condiciones generales

[1] $Z \perp H$; el eje de colimación perpendicular al eje horizontal.
[2] $L \perp V$; el eje del nivel perpendicular al eje vertical.
[3] $H \perp V$; el eje horizontal perpendicular al eje vertical.

I. Nivel del eje horizontal
(Nivel caballero)

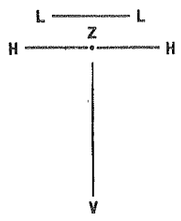


Fig. 378

II. Nivel de la alidada
(Nivel de plataforma)

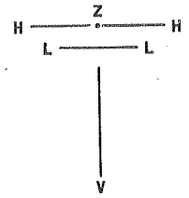


Fig. 379

1. $Z \perp H$ (la condición 1 es común a I y II)
2. L paralelo a H
3. $L \perp V$

1. $Z \perp H$
2. $L \perp V$
3. $H \perp V$

Como se ve, las tres condiciones generales toman forma distinta según la disposición del nivel.

Estudiaremos las dos disposiciones del nivel, de las cuales ya tratamos anteriormente en la página 281, ateniéndonos a los esquemas de las figuras 378 y 379.

1. La condición de perpendicularidad entre el eje de colimación y el eje horizontal es común a las dos disposiciones y debe cumplirse rigurosamente en ambos casos. Esta condición se puede comprobar de las cuatro maneras siguientes:

a) (fig. 380, *a*). En una posición cualquiera del teodolito T se enfila un punto A, se invierte el anteojo levantando el eje y poniéndolo de nuevo de modo que cada muñón caiga en el cojinete en que antes estaba el otro muñón; haciéndolo bascular alrededor de su eje de rotación o eje horizontal, debe enfilarse nuevamente el mismo punto A. Si en vez de este punto se ve otro A', el ángulo ATA' es igual al doble del error de colimación, y la mitad de la variación ATA' se corrige corriendo lateralmente la cruz filar en la dirección en que a simple vista se vea que debe correrse (fig. 307).

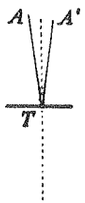


Fig. 380 *a*

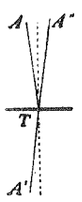


Fig. 380 *b*

b) (fig. 380, *b*). Muchas veces sucede que no es posible invertir el eje del anteojo, impidiéndolo también el círculo altimétrico en muchos teodolitos, y en este caso lo que se hace es dar la vuelta de campana al anteojo y girarlo después 180° alrededor del eje vertical o general del instrumento, procediéndose para comprobar el eje de colimación del modo siguiente: se enfila un punto A y se da la vuelta de campana al anteojo, de modo que quedará enfilado hacia otro punto A'; se da entonces un giro de 180° a la alidada y con ella al anteojo, quedando éste enfilado hacia A'', opuesto a A'. Si este punto A'' no coincide con el A, el error de colimación será la mitad de ATA'', que se corregirá del modo antes indicado.

A veces resulta más fácil, después de dar la vuelta de campana al anteojo, volver a enfilar el punto A, y ver, en el círculo acimutal, si el giro ha sido exactamente de 180°. Por ejemplo, al enfilar primeramente con el anteojo el punto A, se lee el círculo acimutal con uno solo de los nonios. Supongamos que la lectura sea 127° 16′ 0″; se da la vuelta al anteojo, se vuelve a mirar el punto A y se lee de nuevo el círculo acimutal con el mismo nonio: si la lectura fuera de 307° 19′ 0″, quiere decir que el doble del error de colimación es 3′ 0″, que se corrige poniendo el nonio en el punto 307° 17′ 30″ y corriendo lateralmente la cruz filar hasta enfilar otra vez el punto A.

Hemos dicho que sólo se lee uno de los nonios (o microscopios); si se lee con los dos nonios y se obtienen resultados diferentes, se toma la media de ambos; de todos modos hay que tener en cuenta que no tiene importancia, para la corrección, una diferencia de 10″ a 20″ en el valor absoluto del ángulo.

Esta comprobación debe hacerse siempre al hacer mediciones de ángulos, anotando en la libreta de campo si el instrumento presenta error apreciable de colimación, lo cual se ve inmediatamente haciendo dos enfilaciones a un mismo punto después de dar la vuelta al anteojo y viendo si las lecturas hechas con el mismo nonio o las medias de las hechas con los dos nonios difieren entre sí 180°.

Estos dos métodos *a)* y *b)* son siempre suficientes para determinar el error de colimación y tienen la ventaja de que pueden aplicarse sin salir al campo, colocando el instrumento sobre una base firme, como el antepecho de una ventana o terraza, balaustrada, etc. Pero además de éstos, tenemos aún otros dos procedimientos, a saber:

c) (fig. 381, *a*). Se mira con el teodolito T un punto A, se le da la vuelta de campana al anteojo y se enfila otro punto B. Si los tres puntos A, T y B no están en línea recta, lo cual se puede observar desde A o B, el ángulo BTB' es el doble del error de colimación. Esta comprobación no da buenos resultados si no se hace en el campo, con jalones.

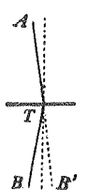


Fig. 381 *a*

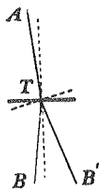


Fig. 381 *b*

d) (fig. 381, *b*). Se enfila un punto A, se da la vuelta de campana al anteojo y se enfila un segundo punto B; estando invertido el anteojo se vuelve a mirar al punto A y se invierte otra vez; si en vez del punto B aparece otro punto B', el ángulo BTB' es igual a cuatro veces el error de colimación.

El punto A puede ser cualquiera, pero los B y B' deben estar dados por jalones o por las lecturas sobre una regla o mira horizontal.

Una vez terminada la corrección del error de colimación, se procede a las otras comprobaciones, referentes a las figuras 378 y 379, que corresponden a las dos disposiciones distintas del nivel.

Disposición I. Nivel del eje horizontal (nivel caballero). 1. La corrección de colimación se hace como acabamos de ver.

2. El eje del nivel debe ser paralelo al eje horizontal, o de giro del anteojo (figura 378).

El modo de corregir el nivel caballero lo hemos estudiado ya en las páginas 223 y 224.

Después de verificar y corregir el cruzamiento de los ejes del nivel y de giro del anteojo, del modo indicado en la página 223, se coloca el nivel sobre el eje horizontal y se cala su burbuja moviendo convenientemente los tornillos de la base del teodolito; se levanta el nivel, y se vuelve a colocar, en sentido contrario al anterior, sobre el mismo eje, corrigiendo la mitad de la variación que se produzca, con los tornillos verticales de corrección del nivel, y la otra mitad con los tornillos nivelantes del teodolito.

También se puede determinar, como se dijo en la página 223, el punto de calado del nivel respecto al eje de rotación del anteojo, y llevar la burbuja a dicho punto con los tornillos nivelantes del teodolito, y calar después el nivel con sus tornillos de corrección.

3. El eje del nivel debe ser perpendicular al eje vertical o general del teodolito.

En primer lugar se intenta colocar verticalmente el eje general del instrumento, valiéndose del nivel caballero y de los tornillos nivelantes del teodolito; si no es posible conseguir que el nivel caballero quede calado, es señal de que su eje no es perpendicular

al eje general. La corrección se hace del modo indicado en la página 223, pero empleando los tornillos de ajuste de los cojinetes del eje horizontal o de giro del anteojo, en vez de usar los de corrección del nivel. Se pone el eje de rotación del anteojo paralelo a la línea que determinan dos de los tornillos de la base del teodolito y con estos dos se cala la burbuja del nivel caballero; se da a la alidada un giro de 180° aproximadamente y se corrige la mitad de lo que se haya corrido la burbuja con los tornillos nivelantes del teodolito; la otra mitad de la variación de la burbuja se corrige haciendo subir o bajar uno de los cojinetes del eje de giro del anteojo (figs. 303 a 306). Se gira después 90° la alidada con el anteojo y con el tercer tornillo de la base del teodolito se corrige toda la desviación experimentada por la burbuja.

También se puede proceder de otro modo, consistente en determinar primero el punto de calado como se ha dicho en la página 223, poner después verticalmente el eje general del instrumento y calar a contituación el nivel actuando sobre los tornillos de los cojinetes del eje horizontal.

Finalmente, puede también aplicarse el último método que dimos al tratar del nivel caballero (pág. 223): para ello se cala aproximadamente el nivel con los tornillos nivelantes del teodolito y se lee la posición de la burbuja; se levanta el nivel, se da un giro de 180° al teodolito, y sin volver el nivel se coloca de nuevo en su sitio y se lee otra vez la posición de la burbuja. Por medio de los tornillos de corrección de los cojinetes del eje horizontal, se lleva la burbuja a la posición media de las dos lecturas anteriores, con lo cual quedan formando entre sí ángulo recto el eje horizontal y el vertical.

Es evidente que para este método no es preciso corregir de antemano el nivel.

Disposición II. Nivel de la alidada (nivel de plataforma) (fig. 379). 1. El eje de colimación debe ser perpendicular al eje horizontal o de giro del anteojo. Esta verificación, que es igual para las dos disposiciones *I* y *II*, la hemos estudiado ya anteriormente (figuras 380 y 381).

2. El eje del nivel debe ser perpendicular al eje vertical o general del instrumento. Esta comprobación se hace de modo análogo a la indicada para la disposición *I* (en el apartado 3), aplicando directamente los procedimientos dados al tratar del nivel caballero (página 224).

Se intenta poner verticalmente el eje general del teodolito, y si no es posible conseguir que quede calado el nivel en todas las direcciones, se coloca éste paralelo a la línea de unión de dos tornillos nivelantes y con éstos se cala el nivel. Se gira la alidada, y con ella el nivel, 180°, y la mitad del corrimiento de la burbuja experimentado en este giro se corrige con el tornillo de corrección del nivel.

De este modo queda el eje del nivel perpendicular al eje general. Para que al mismo tiempo quede este eje exactamente vertical, se corrige la otra mitad del corrimiento de la burbuja con los tornillos nivelantes del teodolito. Se gira después 90° la alidada, con el nivel, y se corrige toda la desviación de la burbuja con el tercer tornillo nivelante.

También pueden aplicarse los demás métodos dados en las páginas 224 y 225.

Si la alidada no tiene nivel tubular sino sólo uno esférico fijo, se cala éste con los tornillos nivelantes del instrumento, se gira después la alidada con el nivel y se corrige, en la posición en que es mayor la desviación, la mitad de ésta con los tornillos de corrección del nivel esférico; para que al mismo tiempo quede vertical el eje general, se corrige la otra mitad con los tornillos nivelantes, con lo cual quedará calado el nivel para todas las posiciones de la alidada.

3. El eje horizontal o de rotación del anteojo debe ser perpendicular al eje vertical o general del instrumento.

Después de colocado verticalmente el eje general del teodolito, por el procedimiento que acabamos de indicar, hay que comprobar que el eje de rotación del anteojo se mantiene horizontal en todas sus posiciones.

Si se tienen dos puntos, contenidos en un plano vertical que pase por el centro del teodolito, y estando fija la alidada se enfila con el anteojo a uno de ellos, al bascular aquél, debe aparecer el segundo punto en la cruz filar.

Dos puntos están siempre en un plano vertical con el centro del teodolito si ambos se encuentran sobre una misma vertical, lo cual nos lleva a los siguientes procedimientos de comprobación:

a) Se suspende una plomada de hilo largo y se ve si al bascular el anteojo coincide siempre la cruz filar con el hilo de aquélla. Las oscilaciones de la plomada se pueden hacer desaparecer introduciendo el peso de ésta en un recipiente con agua. Para saber solamente si hay variación sensible, se puede mirar a la esquina de un edificio, en vez de hacerlo a una plomada.

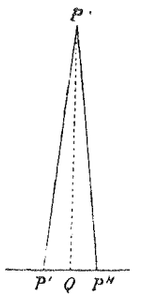


Fig. 382

b) Proyección sobre una regla horizontal P'QP'' (fig. 382). Se determina una línea vertical con el mismo instrumento con la condición de ser el eje general del mismo perfectamente vertical. Para ello se fijan dos puntos, que no es preciso que estén en una misma vertical, sino que estén en un mismo plano vertical con el centro del teodolito. Estos dos puntos se determinan del modo siguiente: se mira a un punto alto *P* (fig. 382), y basculando hacia abajo el anteojo, se proyecta aquél sobre una escala horizontal, regla, mira, etc.; se da la vuelta de campana al anteojo y se vuelve a mirar al punto *P*, y si al proyectarlo sobre la regla no se obtiene el mismo punto *P'* de la primera vez, sino otro *P''*, el punto medio *Q* del segmento *P'P''* será la verdadera proyección ortogonal de *P*, de modo que la recta *PQ* desempeña el mismo papel que una plomada suspendida del punto *P*.

c) Horizonte artificial (fig. 383). Se dispone delante del teodolito un espejo horizontal *AB*, en el cual se verá, hacia abajo, la imagen *P'* de un punto alto *P*. En el caso de la figura, el punto *P* está a distancia infinita, pero el razonamiento es válido para cualquier distancia.

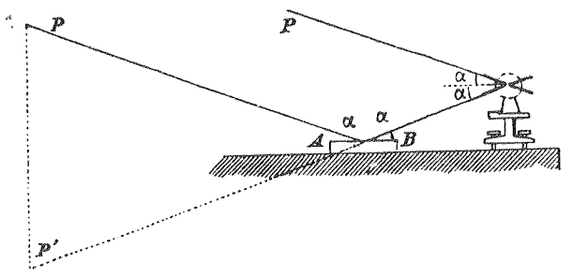
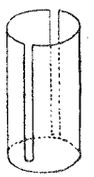


Fig. 383. — Horizonte artificial


Fig. 384. — Pantalla protectora

Se coloca el teodolito de modo que basculando su anteojo aparezcan en el campo visual del mismo, ora el punto *P*, ora su imagen *P'*. Se enfila entonces con todo cuidado el punto *P* y se ve si al bascular hacia abajo el anteojo, queda también exactamente enfilado el punto *P'*.

Como espejo horizontal, se emplea una cubeta llena de líquido, que puede ser mercurio, agua coloreada, etc.; si el aire está encalmado, basta con la cubeta, pero si hay viento, se le aplica el tubo protector que se ve en la figura 384.

La cubeta o el espejo AB se ponen cerca del teodolito; de este modo, la posición de enfoque del ocular es la misma para P y P', ya que la distancia que realmente hay que considerar no es la que hay entre el espejo AB y el anteojo, sino la aparente entre éste y la imagen P' del punto P.

El error que puede descubrirse por cualquiera de los tres métodos *a)*, *b)* y *c)*, puede corregirse subiendo o bajando uno de los cojinetes del eje de giro del anteojo; si al bascular hacia abajo el anteojo se ve que la cruz filar se desvía a la derecha, debe levantarse el cojinete de la derecha o bajarse el de la izquierda, ya que con el anteojo se ven los objetos invertidos.

Por el método *c)* se corrige la *mitad* del error descubierto, y lo mismo se hace con los *a)* y *b)* si las visuales a los puntos extremos están igualmente inclinadas, de modo aproximado, por encima y por debajo de la horizontal que pasa por el centro del anteojo. Cuando estas visuales no tienen igual inclinación, hay que hacer la corrección teniendo en cuenta que para la visual horizontal es despreciable el error del eje de giro del anteojo. Por ejemplo, si en el método *b)* (fig. 382), Q está a la misma altura que el teodolito, se mira primero a Q, se bascula hacia arriba el anteojo y se corrige todo el error indicado por P, mediante los tornillos de los cojinetes del eje horizontal; ahora bien, si la visual a P tuviera doble inclinación sobre la horizontal que la que tenga la visual a Q bajo esta última, se miraría primero a Q, y al mirar a P se corregirían sólo los $^2/_3$ del error total observado. En el § 78 demostraremos que la variación o la desviación de las visuales son proporcionales a las tangentes de los ángulos de altura.

§ 77. Notas sobre los errores axiales de los teodolitos

Eliminación de estos errores. De los tres errores axiales se pueden eliminar dos, dando la vuelta de campana al anteojo, que son el error de colimación y el del eje horizontal o de giro del anteojo. Se comprende fácilmente la posibilidad de esta eliminación con sólo pensar que haciendo las mediciones y lecturas en las dos posiciones del anteojo, y tomando la media aritmética de cada par de valores, resulta un valor final exento del error de los ejes de colimación y de giro del anteojo. Las figuras 380, *a* y 382 ayudarán a comprender cómo se efectúa esta eliminación o compensación.

Se supone, desde luego, que la falta de horizontalidad del eje de giro del anteojo depende de no ser exactamente perpendicular al eje general, que se supone rigurosamente vertical. Si este último no es vertical, se tiene un error en la medición de ángulos acimutales, el cual no puede eliminarse ni dando la vuelta de campana al anteojo ni invirtiendo este último sobre sus cojinetes.

En el párrafo siguiente (§ 78) veremos la influencia que ejerce el error de verticalidad del eje general del teodolito juntamente con el error, eliminable, de horizontalidad del eje de giro del anteojo.

Orden de sucesión de verificaciones y correcciones. No siempre es necesario repetir las verificaciones y correcciones en la forma indicada en el párrafo anterior (§ 76).

Para la disposición *I* (nivel caballero), por ser independientes entre sí las correcciones

de colimación y de horizontalidad, no hay necesidad de establecer prelación entre ellas; sólo es preciso, previamente, hacer que el nivel sea paralelo al eje horizontal, antes de investigar su perpendicularidad con el eje vertical.

En cambio, para la disposición *II* (nivel de plataforma), la corrección de colimación debe preceder a la investigación de perpendicularidad entre los ejes vertical y horizontal.

Teodolito con varios niveles. Cuando el teodolito tiene más de un nivel, uno caballero y otro de plataforma, se pueden combinar como mejor parezca los procedimientos antes descritos para las disposiciones *I* y *II*; por ejemplo, se puede probar primero con el nivel caballero, y después terminar la prueba con el horizonte artificial. En la exposición teórica era necesario considerar separadamente ambas disposiciones y sus respectivas verificaciones.

Precisión excesiva o inútil. El error de colimación es relativamente poco perjudicial para los trabajos topográficos, por lo cual no creemos necesario estudiar aquí los medios auxiliares (colimadores) empleados en Astronomía para determinar con toda exactitud el error de colimación, tan importante en los trabajos astronómicos.

Lo mismo sucede con el error referente a la falta de igualdad absoluta entre los diámetros de los muñones del eje horizontal (§ 56, página 223). Para los trabajos topográficos puede siempre suponerse cierta esta igualdad.

Manejando siempre con cuidado el teodolito no es preciso repetir las verificaciones y correcciones con frecuencia, en lo que respecta a los errores de sus ejes. Si los niveles adolecen de algún error, esto se pone de manifiesto en el uso mismo del instrumento, y del mismo modo, el error de colimación se deduce directamente de las lecturas correspondientes a las dos posiciones del anteojo.

En los casos en que se haga la observación o medida en una sola posición del anteojo, resulta aquélla con menor precisión, por lo cual conviene corregir los errores axiales con los procedimientos dados anteriormente (§ 76), que son suficientes para no tener que preocuparse de dichos errores, una vez corregidos.

En los trabajos topográficos no desempeñan los errores de los ejes del teodolito el papel tan importante como el que cabría esperar de la extensión y detalle con que se estudia su teoría. Cuando las observaciones o mediciones hechas con teodolitos resultan defectuosas, reconocen, en su mayor parte, como causa otra distinta de los errores axiales.

A pesar de ello, es indispensable conocer la teoría de estos errores, porque sólo de este modo puede saberse cómo y en qué cantidad pueden tolerarse las diferencias entre las condiciones efectivas de los instrumentos y las correspondientes a la exactitud más rigurosa.

§ 78. Cálculo del efecto de los errores axiales del teodolito

Los cálculos siguientes corresponden más bien a la Geodesia superior, pero pueden también tener aplicación en Topografía y en las triangulaciones geodésicas de segundo y tercer orden.

Fórmulas diferenciales de trigonometría esférica. La figura 385 representa un triángulo infinitesimal con un ángulo muy agudo γ y el lado opuesto c muy pequeño. Trazando

por B una perpendicular BB' al lado b, se forma un triángulo rectángulo $AB'B$, que puede considerarse como rectilíneo.

En el triángulo CBB', también rectángulo, se tiene·

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} a}$$

y por la pequeñez de γ e y resulta:

$$\gamma = \frac{y}{\operatorname{sen} a} \qquad y = \gamma \operatorname{sen} a. \tag{1}$$

Con igual aproximación se puede poner, siendo $AC = b$,

$$y = \gamma \operatorname{sen} b. \tag{2}$$

Además se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}. \tag{3}$$

Y por ser aproximadamente iguales β y α, puede ponerse:

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha) \qquad b = a + x$$

con lo cual, desarrollando los senos correspondientes, tendremos:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha + (\beta - \alpha)\cos\alpha \qquad \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a + x\cos a,$$

de donde, teniendo en cuenta la igualdad [3], resulta:

$$1 + (\beta - \alpha)\cot\alpha = 1 + x\cot a \qquad \text{o bien} \qquad \beta - \alpha = x\cot a \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$

Pero según la figura 385,

$$x \operatorname{tg}\alpha = y \qquad y = c\operatorname{sen}\alpha$$

y de estas igualdades y de la [1] se deduce, sustituyendo valores en [4]:

$$\beta - \alpha = \gamma\cos a \qquad \text{o bien} \qquad \beta - \alpha = c\operatorname{sen}\alpha\cot a. \tag{5}$$

En Geodesia, la fórmula [1] corresponde a los arcos de paralelo, y la [5] a la convergencia de los meridianos sobre la esfera terrestre.

Después de lo expuesto, pasemos a calcular el error que se comete en la medición de un acimut, suponiendo conocidos los tres errores axiales del teodolito, que son los siguientes:

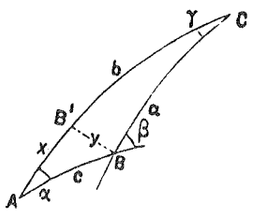


Fig. 385

1. El eje de colimación no es perpendicular al eje de giro del anteojo, sino que forma con éste un ángulo $90^\circ - c$, siendo c la desviación del eje de colimación de su posición correcta, es decir, que c es el error de colimación.

2. El eje horizontal o de giro del anteojo no es perpendicular al eje vertical o general del teodolito, sino que ambos forman entre sí un ángulo $90^\circ - i$, donde i es la desviación del eje horizontal de su posición normal. Suponiendo el eje general exactamente vertical, el ángulo i es la inclinación del eje de giro del anteojo sobre la horizontal.

3. El eje general del instrumento no es exactamente vertical, es decir, el teodolito no está bien puesto en estación; sea v la desviación del eje general respecto a la vertical.

En primer lugar, no consideraremos juntamente los tres errores de los ejes, c, i, v, sino aisladamente, en el supuesto siempre de tratarse de ángulos muy pequeños, y representaremos por (c), (i), (v) los errores de la proyección horizontal de una visual, debidos a los primeros c, i, v.

Imaginemos ahora una esfera de radio cualquiera, que tenga por centro el del teodolito, o sea el punto ideal de intersección de sus tres ejes, y sobre aquélla supongamos situados todos los elementos angulares a estudiar, como lados y ángulos de triángulos esféricos.

En las figuras 386, 387 y 388, el círculo AB, de centro I, representa el círculo horizontal, de diámetro AB, trazado en el plano horizontal que pasa por el eje de giro AB del anteojo, siendo I a la vez el centro del instrumento; el cero del limbo de este círculo horizontal se supone en un punto cualquiera, con tal que el índice esté invariablemente unido al eje AB, para todas las posiciones que éste pueda tomar. Veamos de averiguar la influencia que los errores axiales del teodolito ejercen sobre la lectura correspondiente a una cierta posición de aquél.

1. **Error de colimación.** Sean AB el eje horizontal (fig. 386), IZ el vertical, e IZ', IP, ID' las tres posiciones erróneas del eje de colimación contenidas en el mismo plano vertical $Z'PD'$ que forman el ángulo $ZIZ' = QIP = CID' = c$ con las tres posiciones correctas correspondientes IZ, IQ, IC de dicho eje, de modo que el arco $Z'PD'$ es paralelo al ZQC.

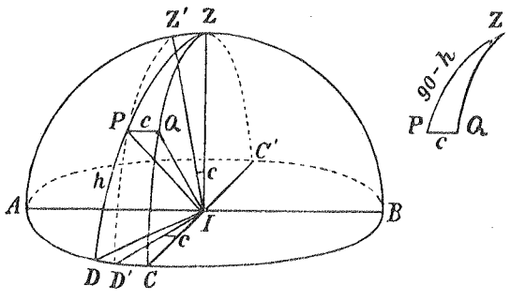


Fig. 386

Sea P un punto visado, cuyo ángulo de altura es $DIP = h$; si el eje de colimación no estuviera afectado de error alguno, se confundiría el plano ZPD con el ZQC, normal al eje de giro AB en I; pero a causa del error c, este plano queda desviado en un ángulo CID. Este ángulo, que es también el que debe girar la alidada, mide, por consiguiente, el efecto producido por el error de colimación. Sea PQ una parte del círculo máximo que pasa por A, P y B, el cual corta perpendicularmente al ZC.

En el triángulo rectángulo ZPQ, representado aparte en la figura 386, se tiene, según la fórmula [1] antes considerada:

$$c = Z\operatorname{sen}(90^\circ - h) \qquad \text{o sea} \qquad c = Z\cos h. \tag{1}$$

El ángulo Z es idéntico al arco DC o al ángulo CID, que según lo dicho representa el efecto (c) producido por el error de colimación; por lo tanto, resulta:

$$(c) = \frac{c}{\cos h}. \tag{2}$$

Para tener idea de la magnitud que puede tener el error de colimación, supongamos un anteojo cuya distancia focal sea de 30 cm; si la cruz filar está desviada de su posición normal en 0,1 mm, resulta $c = \frac{0{,}1}{300}\rho' = 1{,}15'$. Para la posición horizontal del eje de colimación, se tiene $(c) = c$. Para ver cómo varía (c) al variar el ángulo de altura del eje de colimación, se tiene en la tabla siguiente el valor de $(c) - c$ para distintos valores de c, calculada según la fórmula (2):

I. Influencia del ángulo de altura sobre el error de colimación

c	Ángulo de altura h							
	1°	2°	3°	4°	5°	10°	20°	45°
10″	0,00″	0,01″	0,01″	0,02″	0,04″	0,15″	0,6″	4″
1′	0,01	0,04	0,08	0,15	0,23	0,93	3,9	25
2′	0,02	0,07	0,16	0,29	0,46	1,85	7,7	50
5′	0,05	0,18	0,41	0,73	1,15	4,63	19,3	2′ 04″
10′	0,09	0,37	0,82	1,46	2,29	9,26	38,5	4 09

2. **Error del eje horizontal, o de giro del anteojo.** En la figura 387, AB es la posición normal o correcta del eje horizontal, y $A'B'$ la errónea, que forma con aquélla un ángulo i. Al bascular el anteojo, se mueve el eje de colimación en el plano CPZ', en vez de hacerlo en el CQZ, que es donde debiera moverse.

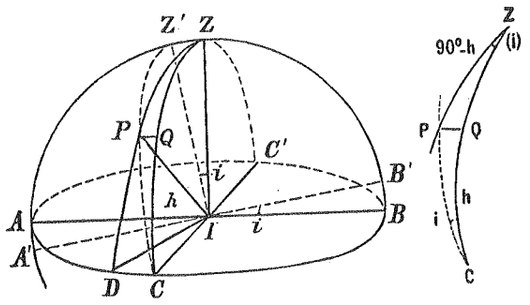


Fig. 387

Si se mira a un punto P, se proyectará éste, erróneamente en C, en vez de proyectarse en D, según el arco de círculo máximo que pasa por el cenit Z, siendo $(i) = DC$ el error de proyección que se trata de hallar.

Este valor (i) corresponde también al ángulo PZQ, representado aparte en la figura 387, viéndose también en esta figura auxiliar el ángulo $i = PCQ$ y la altura $h = CQ$, cuyo complemento es $90° - h = QZ$; de los dos triángulos PQZ y PQC se deduce, aplicando las fórmulas [1]:

$$PQ = (i) \operatorname{sen} (90° - h) \qquad PQ = i \operatorname{sen} h,$$

de donde:

$$(i) \cos h = i \operatorname{sen} h, \quad (i) = i \operatorname{tg} h. \tag{3}$$

La tabla siguiente, calculada con esta fórmula, da el valor de (i) para diferentes valores de i y h.

II. Influencia del error del eje horizontal

i	Ángulo de altura h							
	1°	2°	3°	4°	5°	10°	20°	45°
10″	0,17″	0,35″	0,52″	0,70″	0,87″	1,8″	3,6″	10″
1′	1,05	2,10	3,14	4,20	5,25	10,6	21,8	1′ 0
2′	2,09	4,19	6,29	8,39	10,50	21,2	43,7	2 0
5′	5,24	10,48	15,72	20,98	26,25	52,9	1′ 49″	5 0
10′	10,47	20,95	31,44	41,96	52,49	1′ 46″	3 38	10 0

3. **Error del eje vertical.** Supongamos que el eje vertical o general del teodolito está en IZ' (fig. 388), formando un ángulo v con la verdadera vertical IZ. El plano perpendicular a este eje ocupará la posición $F'KC'$, en vez de la horizontal FKC, y el ángulo $F'LF$ entre estos dos planos o posiciones será igual también al error v del eje

vertical. Si se mira a un punto P, quedará éste proyectado desde Z' en E, mientras que debiera proyectarse, desde el verdadero cenit Z, sobre D.

El error de la proyección, que tratamos de hallar, es la diferencia siguiente (sin tener en cuenta, de momento, su signo):

$$FD - F'E = (v) \qquad \text{o sea} \qquad u - u' = (v). \tag{4}$$

Los ángulos u y u', que aparecen aquí como arcos, pueden considerarse también como ángulos en el cenit Z y Z', como se ve en el detalle aparte de la figura 388. Aplicando las fórmulas [5], tenemos:

$$u - u' = v \operatorname{sen} u' \operatorname{cot} (90° - h)$$

o bien, por poderse cambiar u' por u,

$$u - u' = v \operatorname{sen} u \operatorname{tg} h = (v). \tag{5}$$

También se puede llegar a este resultado (5) del modo siguiente: si se visa el punto P (figura 388), el eje horizontal ocupará la posición $A'B'$, perpendicular a IE, en vez de

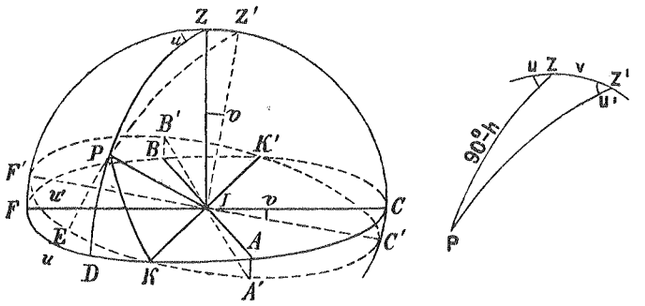


Fig. 388

ocupar la AB, perpendicular a ID, resultando que el ángulo formado por ambas posiciones, que mide la inclinación de $A'B'$ sobre el verdadero plano horizontal, será $AIA' = i'$. Ahora bien, el triángulo KAA' es rectángulo en A y su cateto KA es igual a u, por ser $FD + DK = 90°$ y $DK + KA = 90°$, teniéndose:

$$AA' = K \operatorname{sen} KA \qquad \text{o sea} \qquad i' = v \operatorname{sen} u. \tag{6}$$

Una inclinación i' del eje horizontal da lugar, según (3), a un error:

$$(i') = i' \operatorname{tg} h = v \operatorname{sen} u \operatorname{tg} h.$$

Esta fórmula coincide con la anterior (5), y las fórmulas (5) y (6) nos dicen que el error v del eje vertical da, en primer lugar, una componente v sen u sobre el eje horizontal, y esta componente v sen u, como error del eje horizontal, produce, según las leyes (3), un error en la proyección igual a (v sen u) tg h. En el cálculo que precede, el ángulo acimutal u se cuenta a partir de la dirección IF, en la cual se tiene la máxima inclinación del círculo acimutal.

Acción o efecto combinado de los tres errores. Si se opera con un teodolito cuyo eje de colimación tenga un error c, cuyo eje horizontal tenga un error i, y cuyo eje general esté inclinado respecto a la vertical en un ángulo v, se combinan los tres efectos (c), (i), (v), y se tiene un error total resultante

$$(s) = (c) + (i) + (v). \tag{7}$$

La interpretación de esta suma es la siguiente: el error total (s) es una función de c, i y v, que se anula cuando estas tres variables son, por separado, iguales a cero. Si suponemos desarrollada esta función por la serie de Taylor según las potencias de c, i, v, tenemos que los tres primeros términos de la serie serán (c), (i), (v), por lo cual la fórmula (7) da un valor aproximado del error total de la proyección, por la misma razón que (c), (i) y (v), aisladamente, y despreciando las potencias superiores c^2, i^2, etc., son valores suficientemente aproximados de las respectivas variables.

Si en las expresiones de (c), (i) o (v) se llega a los términos de segundo orden, la simple adición (7) no basta para tener el error total de la proyección, ya que faltarían los productos cv, ci, iv.

Fórmulas de los errores para un ángulo observado. Las consideraciones anteriores se refieren siempre a un solo punto visado P, y dan el error de la proyección correspondiente al mismo. Para medir un ángulo hay que visar un segundo punto P', y el error angular es la diferencia entre los errores de las proyecciones correspondientes a los rayos visuales de izquierda y derecha. Si h y h' son los dos ángulos de altura, y u, u' los dos acimutales, contados a partir de la dirección de máxima inclinación, se tiene la siguiente fórmula para el error total angular Δ:

$$\Delta = c\,(\sec h' - \sec h) + i\,(\operatorname{tg} h' - \operatorname{tg} h) + v\,(\operatorname{tg} h' \operatorname{sen} u' - \operatorname{tg} h \operatorname{sen} u). \qquad (8)$$

Si h es igual a h' quedan eliminados los dos primeros términos; también se eliminan cuando se hace la medición en dos posiciones distintas del anteojo, pues al dar a éste la vuelta de campana, cambian los signos de c y de i. Para mediciones con vuelta de campana del anteojo se tiene, pues, simplemente:

$$\Delta' = v\,(\operatorname{tg} h' \operatorname{sen} u' - \operatorname{tg} h \operatorname{sen} u). \qquad (9)$$

Para valores iguales de h y h', este valor Δ' alcanza su máximo respecto a u y u' cuando sen $u' = -$ sen u, o sea, cuando

$$u' - u = \pm 180°.$$

El valor $u' - u$ es el ángulo que se mide, por lo cual, para $h = h'$, el error Δ' alcanza su máximo cuando el ángulo que se trata de medir es igual o casi igual a 180°, que es el caso de las poligonales. Haciendo en la fórmula (9) $h' = h$ y $u' - u = 180°$, se tiene:

$$\Delta_{máx} = 2v \operatorname{tg} h$$

para cuyo valor numérico se emplea la tabla II (pág. 328).

§ 79. Anteojo excéntrico

Hay teodolitos que en vez de llevar el anteojo en el centro lo llevan montado lateralmente, sobre un extremo del eje de giro, como se vió en las figuras 320 y 330.

Las ventajas principales que presenta esta disposición excéntrica del anteojo son las siguientes: puede darse la vuelta de campana al anteojo con toda facilidad, sin que el teodolito tenga los soportes del eje de giro muy altos; se pueden visar puntos con ángulos de altura de 60° y más, y se dispone de espacio suficiente para montar los microscopios lectores del círculo vertical, de manera que su uso y manejo resulta muy fácil y cómodo (figura 320).

El efecto de la excentricidad del anteojo sobre la dirección horizontal y el ángulo acimutal correspondiente, se elimina haciendo la medida u observación dos veces, la primera con el anteojo en su posición ordinaria, y la segunda después de haberle dado la vuelta de campana, y tomando la media aritmética de las dos lecturas resultantes. En efecto: si el eje de colimación del anteojo presenta, respecto al centro L del círculo horizontal (fig. 389) una excentricidad e, al girar la alidada tendremos que el eje de colimación, en todas sus posiciones, será tangente a un círculo de radio e y de centro L. Si A es un punto de mira, AL es la dirección céntrica del mismo, y las tangentes de A al círculo de centro L y radio e son las visuales dirigidas al punto A con el anteojo excéntrico, antes y después de darle la vuelta de campana. Los ángulos φ son iguales y de sentido contrario, por lo cual se ve que la media aritmética de ambas posiciones da la dirección exacta o verdadera del punto A. Lo mismo sucede para cualquier otro punto B, y para los ángulos comprendidos entre las direcciones o visuales correspondientes. Para los dos puntos de mira A y B, el ángulo que se quiere medir es:

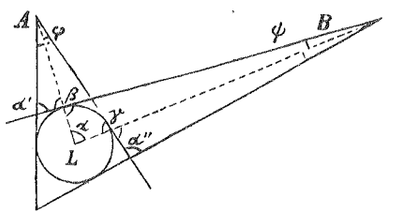


Fig. 389

$$A\,L\,B = \alpha.$$

Pero a causa de la excentricidad del anteojo, se mide en la primera posición el ángulo α' y en la segunda el ángulo α''. Ahora bien, en la figura 389 se tiene:

$$\alpha' + \beta + \varphi = 180° \qquad \alpha'' + \gamma + \psi = 180° \qquad (1)$$

$$\alpha + \gamma + \varphi = 180° \qquad \alpha + \beta + \psi = 180° \qquad (2)$$

De estas cuatro igualdades resulta:

$$\alpha' + \alpha'' = 2\alpha \qquad \text{o sea} \qquad \alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \qquad (3)$$

es decir, que el valor verdadero del ángulo es la media aritmética de los ángulos medidos en las dos posiciones del anteojo, como se quería demostrar.

De estas cuatro igualdades (1) y (2) se obtienen también las diferencias entre α, α' y α'', a saber:

$$\alpha - \alpha' = \varphi - \psi \qquad \alpha - \alpha'' = \psi - \varphi \qquad (4)$$

$$\alpha'' - \alpha' = 2\,(\varphi - \psi). \qquad (5)$$

Los ángulos paralácticos φ y ψ dependen de la excentricidad e y de la distancia de los puntos visados A y B. Llamando a estas distancias respectivamente a y b, se tiene:

$$\varphi = \frac{e}{a}\rho \qquad \text{y} \qquad \psi = \frac{e}{b}\rho. \qquad (6)$$

Por ejemplo:

$$\text{para} \quad e = 0{,}1\ \text{m} \quad \text{y} \quad a = 1000\ \text{m}, \quad \text{resulta} \quad \varphi = 21''. \qquad (7)$$

La verificación y corrección de los errores axiales en teodolitos de anteojo excéntrico difiere un poco, en parte, de las consignadas en el § 76.

La investigación de errores axiales del modo representado en la figura 380 b, dando la vuelta de campana al anteojo y girándolo 180°, puede aplicarse también a los teodolitos de anteojo excéntrico, cuando la distancia de mira es muy grande.

Si no se tiene ningún punto de mira a distancia bastante grande, o se quiere hacer la prueba o verificación con más exactitud, se toman dos puntos separados entre sí por una

distancia igual a $2e$, o se emplean los métodos dados en el § 76, con las modificaciones que en cada caso aconseje introducir el estudio de las condiciones de la verificación.

§ 80. Excentricidad de la alidada

En la figura 390, L es el centro del limbo, que al mismo tiempo debe ser centro de rotación de la alidada, de modo que para todo giro de ésta alrededor de L, el arco leído sobre el limbo, por ejemplo, el CPQ, corresponda al ángulo en el centro L que lo comprende.

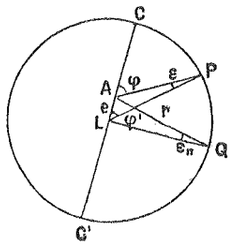


Fig. 390

Ahora bien, si la alidada no gira alrededor del centro L del limbo, sino alrededor de otro punto A, los arcos leídos sobre el limbo no serán los ángulos de rotación efectiva alrededor de A, bastando una pequeña excentricidad $LA = e$, para que la medida de los ángulos resulte falsa, como vamos a ver a continuación.

Sea CC' el diámetro del limbo que pasa por el centro A de rotación de la alidada y supongamos que aquél gira alrededor de A, tomando la dirección AP; este giro $CAP = \varphi$ es también el ángulo descrito por el anteojo, cuyo sostén está invariablemente unido a la alidada, es decir, que es el ángulo que en el campo se trata de medir.

Pero sobre el limbo se lee un arco CP, que corresponde a otro ángulo $\varphi' = CLP$, y la diferencia $\varphi - \varphi' = \varepsilon$ es el error que se comete al tomar la lectura CP como buena, a causa de la excentricidad e. El valor de ε se deduce fácilmente del triángulo LAP, en el cual se tiene, llamando r al radio LP:

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{e\operatorname{sen}\varphi}{r} \qquad \text{o bien} \qquad \varepsilon = \frac{e}{r}\rho\operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$

Este valor es tanto mayor, cuanto más grande es la rotación con relación a la línea de los centros LA, y alcanza el máximo para $\varphi = 90^\circ$, es decir, cuando LP es perpendicular a LA, como ocurre en el punto Q, para el cual, el ángulo ε_n tiene un valor:

$$\varepsilon_n = \frac{e}{r}\rho. \tag{2}$$

Supongamos que la excentricidad sea $e = 0\ 1$ mm y que el radio del círculo acimutal sea $r = 100$ mm; el valor de ε_n será:

$$\varepsilon_n = \frac{0{,}1}{100}206265'' = 206'' = 3'\,26''.$$

Se ve de este modo el efecto tan considerable que produce una pequeña excentricidad e, y que la alidada no debe estar centrada con 0,1 mm de aproximación, sino con 0,01 mm, si se quiere que los ángulos puedan medirse con precisión de 10″ a 20″.

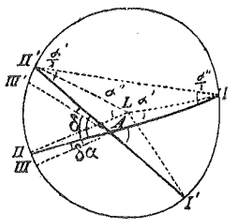


Fig. 391
$II\,A\,II' = \alpha = III\,A\,III'$
$II'\,A\,III' = \delta = II\,A\,III$

Todo lo expuesto se refiere al caso de alidadas AP de un solo brazo, como sucede en la figura 390, pero si la alidada es de doble brazo, como se ve en la figura 391, en $IAII$, puede eliminarse el error de excentricidad leyendo los ángulos en los extremos diametralmente opuestos de la alidada.

En efecto, supongamos la alidada, también en este caso, como una línea recta, que no

gire alrededor del centro L del limbo, sino alrededor de otro punto A. Esta alidada, de doble brazo, lleva en los extremos de los dos brazos los nonios o microscopios I y II, siendo $IAII$ una línea recta. Cuando la alidada gira un cierto ángulo α, toma la posición $I'AII''$.

Como al medir un ángulo, la alidada describe el mismo ángulo que el anteojo, resulta que el ángulo $IAI' = \alpha$ comprendido entre las dos posiciones de la alidada es el ángulo que se trata de medir con el teodolito. Sobre el limbo se leen los dos arcos $I\text{-}I'$ y $II\text{-}II'$, a los cuales corresponden ángulos diferentes en el centro α' y α''. Pero α es la media aritmética de α' y α'', es decir,

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \tag{3}$$

pues siendo α' el ángulo en el centro correspondiente al arco $I\text{-}I'$, $\frac{\alpha'}{2}$ el ángulo inscrito que comprende el mismo arco, y α'' y $\frac{\alpha''}{2}$ los ángulos en el centro e inscrito correspondientes al arco $II\text{-}II'$, se tiene que el ángulo α, que es un ángulo externo del triángulo $A\text{-}I\text{-}II''$, será:

$$\alpha = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha''}{2}$$

con lo cual queda demostrada la igualdad (3).

Vamos ahora a suponer que los dos brazos I y II de la alidada no estén en prolongación uno del otro, sino que formen entre sí un pequeño ángulo δ, en A; es decir, que ahora los extremos de la alidada son I y III, los cuales al girar aquélla un ángulo α ocupan las posiciones I' y III'.

Se ve claramente en la figura, que el ángulo $III\text{-}A\text{-}III'$ comprendido entre las dos posiciones del brazo $AIII$, es igual a $\alpha = II\text{-}A\text{-}II'$, y que los dos arcos $III\text{-}II$ y $III'\text{-}II'$, correspondientes a los dos pequeños ángulos δ, son iguales entre sí, aunque rigurosamente no sea esto cierto, ya que el punto A es excéntrico, por lo cual los dos ángulos δ no son ángulos en el centro; ahora bien, para la excentricidad e, la diferencia entre los dos arcos pequeños $III\text{-}II$ y $III'\text{-}II'$ alcanza su máximo cuando el brazo de la alidada pasa por el centro del limbo; es decir,

$$(III\text{-}II - III'\text{-}II')_{\text{máx}} = (r \pm e\ \delta - r\,\delta = \pm e\,\delta \tag{4}$$

y este valor (4) es despreciable, dados los valores ordinarios de δ y e.

Así tenemos demostrada la ley (3) para la excentricidad de la alidada, pudiendo decir que el efecto de esta excentricidad queda eliminado leyendo con nonios o microscopios dispuestos en los dos extremos de la alidada y montados con toda exactitud o todo lo más aproximadamente posible a 180° uno de otro.

Sin alterar nada de lo dicho, podemos hacer una observación oportuna sobre la flexión δ de la alidada, que puede concebirse como resultado o efecto de una excentricidad. En la figura 391, δ es el pequeño ángulo en que los brazos AI y $AIII$ se apartan de la línea recta, cosa que puede considerarse simplemente como una torcedura de la línea recta $AIII$ en el punto A, centro de rotación de la alidada y punto medio de la misma. Este punto es, de ordinario, el centro de rotación de la alidada, pero no su punto medio exacto, es decir, que no pasa por el mismo la recta $I\text{-}II$. Si esta recta pasa por otro punto A', que no coincide con el centro de rotación A, la distancia AA' es la excentricidad del punto medio A' de la alidada respecto al centro de rotación A, y el ángulo δ se debe a que desde el punto A (en vez del A') parten dos brazos, uno hacia I y el otro hacia el punto diametralmente opuesto a I.

Esto responde realmente a la construcción del instrumento, pues la alidada consiste en un disco metálico, con su centro de rotación A y los índices marginales I y II, o I y III, mientras que los radios AI, AII, etc., son líneas ideales.

Como quiera que se considere el ángulo δ, el resultado principal (3) no experimenta alteración alguna. Esta ley (3) puede ampliarse siempre para anular el efecto de la excentricidad de la alidada, haciendo la lectura con dos o más nonios o microscopios, distribuidos simétricamente sobre todo el limbo. En los Estados Unidos se emplean mucho los teodolitos con tres nonios o microscopios dispuestos a 120° uno de otro.

Variabilidad de la excentricidad. En el sistema de ejes representado en la figura 298 se ve que además del eje de rotación de la alidada hay un segundo eje, alrededor del cual gira el limbo, y en general, estos dos ejes no coinciden exactamente. Además, el eje de rotación del limbo no pasa con exactitud por el centro del círculo graduado, de modo que al girar el limbo, varía la posición de su centro, por lo cual, a cada nueva posición del limbo corresponde un valor distinto de la excentricidad.

Eliminación de la excentricidad dando la vuelta de campana al anteojo. Aun cuando sólo se tenga un nonio o microscopio de lectura, puede hacerse desaparecer el error de excentricidad de la alidada en la observación de acimutes, dando la vuelta de campana al anteojo y haciendo la lectura en las dos posiciones de este último, como se hace también para otros fines. Se comprende fácilmente esta eliminación suponiendo, en la figura 391, que I y I' sean las lecturas para la primera posición del anteojo, y II y II' las lecturas para la segunda; también se comprueba mediante las fórmulas (1) de la página 332, las cuales sirven para los ángulos φ y $\varphi + 180°$.

Influencia de la excentricidad sobre los nonios. Mientras el valor de la excentricidad e sea pequeño, no ejerce efecto apreciable sobre la lectura de los nonios; pero cuando sobrepasa los límites ordinarios, influye sobre éstos del modo que vamos a considerar seguidamente.

En la figura 391 se ha supuesto que la alidada es una línea recta geométrica, o mejor dicho, ideal, siendo en realidad un disco metálico que gira dentro del limbo circular correspondiente, por lo cual la excentricidad sólo puede tener un pequeño valor, de 0,01 mm a 0,05 mm, pues de no ser así, al girar la alidada, se apretaría por un lado contra el limbo, y por otro habría un juego excesivo entre aquélla y éste. Solamente empleando nonios de los llamados volantes (como se hace a veces en el círculo vertical), que se mueven sobre el plano del limbo, puede tener la excentricidad un valor relativamente grande sin que se manifieste por el frotamiento en unos puntos o el juego excesivo en otros.

Ahora se ocurre, naturalmente, preguntar si los nonios giratorios excéntricos cubren exactamente la parte de limbo que les corresponde. Si el nonio se retira demasiado, aparece dicha parte demasiado pequeña, y si se acerca mucho, se ve aquélla demasiado grande. Por ejemplo, para un limbo sexagesimal, cada una de cuyas divisiones valga 10′, y cuyos nonios aprecien 10″, suponiendo $r = 100$ mm y $e = 0{,}01$ mm, se deduce, por un sencillo cálculo, que el error de lectura del nonio es de 3,5″.

Resumen. Una excentricidad no exagerada, entre el limbo y la alidada, no produce errores en el teodolito, ya que éstos quedan eliminados haciendo las lecturas con dos nonios o microscopios diametralmente opuestos, o haciendo la observación en las dos posiciones del anteojo.

Unicamente tiene un interés especial la excentricidad de la alidada en los instrumentos que no tienen limbo o círculo completo, sino sólo un sector circular, como, por ejemplo, en algunos altímetros y en los sextantes de reflexión, raramente empleados en Topografía.

Para la práctica ordinaria, basta con lo expuesto. Si se quiere profundizar más en esta teoría, puede estudiarse la ampliación que damos en el párrafo siguiente.

§ 81. Cálculo de la excentricidad de la alidada

Aunque ya hemos visto que el efecto de la excentricidad de la alidada se elimina con toda facilidad en los teodolitos y que por lo mismo prácticamente resulta despreciable, vamos a calcularla, como primer paso para averiguar la bondad de la división o graduación de los limbos (§ 82).

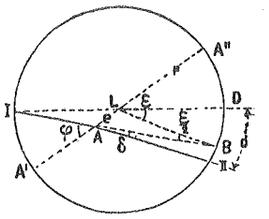


Fig. 392

En la figura 392, L es el centro del círculo graduado, A el centro de rotación de la alidada, y AI y AII los dos brazos de esta última, que no están exactamente en prolongación uno de otro, es decir, formando entre sí un ángulo de 180°, sino con una desviación δ de uno respecto a la prolongación del otro.

$A'A''$ es el diámetro del limbo que pasa por los dos puntos A y L, y φ es el ángulo que en cualquier posición de la alidada forma el brazo AI con el diámetro $A'A''$.

El ángulo $\varepsilon = DLB$ es la desviación que presenta el radio LB sobre la prolongación del radio LI, es decir, lo que falta al ángulo formado por estos dos radios para valer 180° Por estar los tres puntos B, A, I en línea recta, se tiene, en el triángulo LAB, donde $LA = e$, y $LB = r$:

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2} : e = \operatorname{sen}\varphi : r \qquad \text{o bien} \qquad \varepsilon = \frac{2e}{r}\rho \operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$

Haciendo en esta fórmula $2\,\frac{e}{r}\,\rho = \varepsilon_m$, resulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi. \tag{2}$$

El valor ε_m es el máximo de ε, correspondiente a $\varphi = 90°$, esto es, a la posición de la alidada perpendicular al diámetro $A'A''$. Es decir, que $\varepsilon_m = 2\,\varepsilon_n$, siendo ε_n el valor representado en la figura 390.

El arco d expresa la cantidad en que la diferencia entre las lecturas $II - I$ de los dos nonios o microscopios excede de 180°, es decir:

$$d = II - I - 180° = \delta + \varepsilon. \tag{3}$$

En esta expresión δ es constante, mientras que ε varía según la fórmula (2), por lo cual resulta que d es función de φ. Llamando d_1 al valor de d correspondiente a un cierto valor de φ, y d_2 al valor de d que corresponde a $\varphi + 180°$, o sea, a una determinada posición de la alidada, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \delta + \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi &&= \delta + \varepsilon \\ d_2 &= \delta + \varepsilon_m \operatorname{sen}(\varphi \pm 180°) &&= \delta - \varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Tomando la semisuma y la semidiferencia de estas dos expresiones, resulta:

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \delta \qquad \frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi. \tag{5}$$

Para determinar δ basta, pues, tomar dos valores correspondientes d_1 y d_2, sin que intervenga para nada el valor de la excentricidad. Ahora bien, tomando otros dos valores correspondientes d'_1 y d'_2, para los cuales la alidada sea perpendicular a su primera posición, se tiene:

$$\frac{d_1' + d_2'}{2} = \delta \qquad \frac{d_1' - d_2'}{2} = \varepsilon' = \varepsilon_m \operatorname{sen}(90^\circ + \varphi)$$

o sea

$$\frac{d_1' - d_2'}{2} = \varepsilon' = \varepsilon_m \cos\varphi. \tag{5 a}$$

Entre las ecuaciones (5) y (5 a) podemos despejar ε_m y φ, y sustituyendo los valores resultantes en (2) se halla el valor de e.

Se obtiene un valor más exacto de la excentricidad distribuyendo con regularidad las observaciones sobre todo el limbo.

Vamos a suponer un caso práctico sencillo: sea un teodolito con un círculo graduado de 10 cm de diámetro solamente, y supongamos que leyendo con los dos nonios en posiciones sucesivas distantes entre sí 20°, es decir, corriendo la alidada de 20° en 20°, se obtengan los resultados resumidos en este cuadro:

Nonio *I*	Nonio *II*	Nonio *I*	Nonio *II*	d_1	d_2	$2\delta = d_1 + d_2$	$2\varepsilon = d_1 - d_2$	δ	ε
0°	180° 1,0′	180°	0° 1,5′	+1,0′	+1,5′	+2,5′	−0,5′	+1,25′	−0,25′
20	200 1,5	200	20 1,0	+1,5	+1,0	+2,5	+0,5	+1,25	+0,25
40	220 2,0	220	40 0,5	+2,0	+0,5	+2,5	+1,5	+1,25	+0,75
60	240 2,0	240	60 0,5	+2,0	+0,5	+2,5	+1,5	+1,25	+0,75
80	260 2,0	260	80 0,0	+2,0	0,0	+2,0	+2,0	+1,00	+1,00
100	280 2,5	280	100 0,0	+2,5	0,0	+2,5	+2,5	+1,25	+1,25
120	300 2,0	300	120 0,0	+2,0	0,0	+2,0	+2,0	+1,00	+1,00
140	320 2,0	320	140 1,0	+2,0	+1,0	+3,0	+1,0	+1,50	+0,50
160	340 1,5	340	160 0,5	+1,5	+0,5	+2,0	+1,0	+1,00	+0,50
$n = 9$							Media	+1,19′	

(6)

Es decir, que el valor suficientemente aproximado de δ es +1,19′.

En cuanto a ε, hay que tener en cuenta que la serie de sus valores, en función de I en la tabla (6), sólo corresponden a la mitad de éstos, es decir, desde $I = 0^\circ$ hasta $I = 160^\circ$; la otra mitad, correspondiente a los valores de I comprendidos entre 180° y 340°, se obtiene con sólo cambiar de signo a los primeros, es decir, poniendo +0,25, −0,25, −0,75, etc., por lo cual no es necesario consignarlos en la tabla anterior.

Tomemos ahora ε como función de ε_m y de φ, según la fórmula (5), para lo cual pondremos:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi = \varepsilon_m \operatorname{sen}(I - \varphi_0) \tag{7}$$

donde I representa, como anteriormente, la lectura del nonio I, y φ_0 el valor de I correspondiente al diámetro $A'A''$ (fig. 392), es decir, aquel para el cual $\varepsilon = 0$.

Con dos valores de ε es suficiente para determinar las constantes ε_m y φ_0 de la ecuación (7), y ya que tenemos nueve valores observados ε, podemos hacer una compensación, siendo las correspondientes ecuaciones de errores, según (7):

$$v = \varepsilon_m \operatorname{sen}(I - \varphi_0) - \varepsilon \tag{8}$$

donde

$$\operatorname{sen}(I - \varphi_0) = \operatorname{sen} I \cos\varphi_0 - \cos I \operatorname{sen}\varphi_0$$

Es decir, que se puede escribir:

$$v = ax + by - \varepsilon \tag{9}$$

siendo los coeficientes:

$$a = \operatorname{sen} I \qquad b = -\cos I \tag{10}$$

y las incógnitas:

$$x = \varepsilon_m \cos\varphi_0 \qquad y = \varepsilon_m \operatorname{sen}\varphi_0. \tag{11}$$

Una vez calculadas estas variables auxiliares x, y, se hallan las primeras φ_0 y ε_m por medio de las ecuaciones:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y}{x} \qquad \varepsilon_m = \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi_0} = \frac{x}{\cos\varphi_0} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{12}$$

De las ecuaciones de errores (9) resultan las ecuaciones normales, a saber:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y - [a\varepsilon] &= 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y - [b\varepsilon] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dada la simplicidad de los coeficientes a y b (10), resulta muy fácil calcular las sumas $[aa]$, $[ab]$, etc.; si n es el número de observaciones distribuídas de modo uniforme sobre medio círculo o limbo (en nuestro ejemplo $n = 9$), se tiene:

$$[aa] = \frac{n}{2} \qquad [ab] = 0 \qquad [bb] = \frac{n}{2}. \tag{14}$$

Estas igualdades resultan casi evidentes, pues al distribuir de modo regular las lecturas I, corresponde a cada valor $a^2 = \operatorname{sen}^2 I$ otro valor $\operatorname{sen}^2(90^\circ + I) = \cos^2 I$, y lo mismo ocurre con b^2; y en cuanto a los productos $ab = -\operatorname{sen} I \cos I$, se obtendrá *cero* como resultado de la suma de sus valores simétricos.

Sustituyendo los valores (14) en las ecuaciones normales (13) resulta:

$$\frac{n}{2}x - [\varepsilon \operatorname{sen} I] = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{n}{2}y + [\varepsilon \cos I] = 0 \tag{15}$$

y de las ecuaciones (12) y (15) se deduce:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-[\varepsilon \cos I]}{[\varepsilon \operatorname{sen} I]} \tag{16}$$

y

$$\varepsilon_m = \frac{2}{n}\frac{[-\varepsilon \cos I]}{\operatorname{sen}\varphi_0} = \frac{2}{n}\frac{[\varepsilon \operatorname{sen} I]}{\cos\varphi_0}. \tag{17}$$

Es fácil formular ahora la suma de cuadrados $[vv]$, obteniéndose:

$$[vv] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}. \tag{18}$$

En nuestro ejemplo, según la fórmula (14), $[ab] = 0$, y puesto que $[bl\cdot 1] = [bl]$, y $[bb\cdot 1] = [bb]$, se tendrá, sustituyendo los valores (9) y (10) en (18):

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{2}{n}[\varepsilon \operatorname{sen} I]^2 - \frac{2}{n}[\varepsilon \cos I]^2$$

y según (17):

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{n}{2}\varepsilon_m^2. \tag{19}$$

El error medio de un valor observado ε será:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}. \tag{20}$$

Las ecuaciones (16), (17), (19) y (20) resuelven la cuestión propuesta. En el cuadro siguiente se resumen los cálculos correspondientes al ejemplo anterior:

I	Antes de la compensación				Después de la compensación			
	ε	$\varepsilon \operatorname{sen} I$	$\varepsilon \cos I$	ε^2	$I - 5^\circ 30' = \varphi$	$1{,}070 \operatorname{sen} \varphi = \varepsilon'$	$\varepsilon' - \varepsilon = v$	v^2
0°	− 0,25′	− 0,000	− 0,250	0,0625	− 5° 30′	− 0,10′	+ 0,15′	0,0225
20	+ 0,25	+ 0,086	+ 0,235	0,0625	+ 14 30	+ 0,27	+ 0,02	0,0004
40	+ 0,75	0,482	0,575	0,5625	34 30	+ 0,61	− 0,14	0,0196
60	+ 0,75	0,650	0,375	0,5625	54 30	+ 0,87	+ 0,12	0,0144
80	+ 1,00	0,985	0,174	1,0000	74 30	+ 1,03	+ 0,03	0,0009
100	+ 1,25	1,231	− 0,217	1,5625	94 30	+ 1,07	− 0,18	0,0324
120	+ 1,00	0,866	0,500	1,0000	114 30	+ 0,97	− 0,03	0,0009
140	+ 0,50	0,321	0,383	0,2500	134 30	+ 0,76	+ 0,26	0,0676
160	+ 0,50	0,171	0,470	0,2500	154 30	+ 0,46	− 0,04	0,0016
$n = 9$		+ 4,792	− 0,461	5,3125				0,1603

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{+0{,}461}{+4{,}792} \qquad \varphi_0 = 5^\circ 30' \tag{21}$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{4{,}5} \frac{0.461}{\operatorname{sen} \varphi_0} = \frac{1}{4{,}5} \frac{4.792}{\cos \varphi_0} = 1{,}070 \tag{22}$$

y sustituyendo en la ecuación de compensación (7), se tiene:

$$\varepsilon = 1{,}070 \operatorname{sen} (I - 5^\circ 30'). \tag{23}$$

Los valores ε así calculados están consignados en el cuadro anterior con el símbolo ε' para distinguirlos de los valores observados ε. De su comparación con estas observaciones resultan los valores de v, y por consiguiente, de $[vv]$.

Como comprobación, sustituyamos valores en la fórmula (19), y tendremos:

$$[vv] = 5{,}3125 - 4{,}5\,(1{,}070)^2 = 0{,}1605. \tag{24}$$

El error medio de un valor observado ε será:

$$m = \sqrt{\frac{0.16}{9-2}} = \pm 0{,}15' = \pm 9''. \tag{25}$$

En la figura 393 están representados los valores de ε, observados y compensados, teniéndose así la curva de excentricidad $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen} (I - \varphi_0)$: la escala para las ordenadas es de 1 cm = 1′.

Los valores observados ε están dados sólo de 0° a 180°: si se quisiera tomarlos para los ángulos comprendidos entre 180° y 360°, bastaría cambiar de signo a los anteriores.

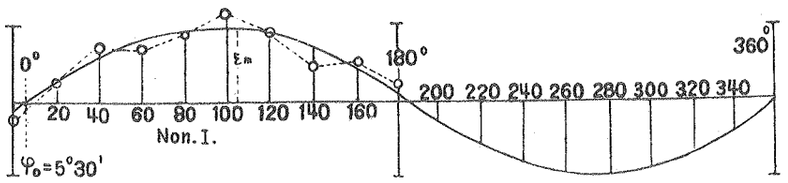


Fig. 393. — Curva de excentricidad $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen} (I - \varphi_0)$

Los valores compensados de ε, que son los ε' de la tabla anterior, están tomados para todos los ángulos de 0° a 360°, resultando así la sinusoide completa y de trazo lleno que se

ve en la figura. El valor $\varphi_0 = 5^\circ 30'$ corresponde a la intersección de la curva con el eje de las abscisas, y la máxima ordenada $\varepsilon_m = 1{,}07'$ corresponde a la abscisa 95° 30′.

El punto excéntrico de rotación A está sobre el radio LA, que corresponde a la división 5° 30′, y siendo $r = 50$ mm, podemos ya calcular el valor de la excentricidad lineal e, según la fórmula (2):

$$2\frac{e}{r}\rho = \varepsilon_m = 1{,}070' \qquad \text{de donde} \qquad e = \frac{\varepsilon_m}{2\rho} r = 0{,}0078 \text{ mm}. \tag{26}$$

§ 82. Errores de división de los círculos

La división de los limbos está sujeta a los errores inherentes a toda operación mecánica. Estos errores de división se clasifican, como de ordinario, en dos grupos: los irregulares o accidentales, que en cualquier punto pueden ser positivos o negativos, y los regulares o sistemáticos, que en determinadas partes del círculo son positivos y en otras negativos.

Se puede comprender fácilmente la distribución regular de los errores considerando que la reproducción de un limbo original, que se supone sin errores, sobre un nuevo círculo, se efectúa con una especie de alidada que pasa por las divisiones del limbo original, mientras que un buril unido a aquélla va marcando divisiones sobre el círculo nuevo; basta con que se ejerza una presión lateral sobre el buril, o que la luz llegue muy inclinada, etc., para que se produzca un error en la nueva división. Tales causas obran, de ordinario, durante un tiempo bastante largo, variando poco a poco, por lo cual van variando también progresivamente las desviaciones laterales de los trazos. También las variaciones de temperatura y, por consiguiente, la diferente dilatación del círculo y del brazo porta-herramienta, pueden dar lugar a errores variables de división.

Al hacer mediciones de ángulos se procura atenuar y hasta casi eliminar por completo el efecto de los errores de división, y a este objeto, para cada visual o punto de mira se hacen las lecturas en sitios distintos del círculo, pero distribuídos regularmente sobre éste, para que, obrando los errores de división de un modo irregular, queden anulados o compensados en la media de las lecturas.

Examen de un círculo graduado. Por ser cerrada la graduación de los limbos puede suponerse libre de error cualquiera de sus divisiones, por ejemplo el cero, asignando todo error observado a las demás divisiones; si se dice, por ejemplo, que la división 30° 10′ tiene un error +1″, podría también decirse que la división o trazo cero tiene el error −1″.

El modo más sencillo de examinar con los nonios un círculo graduado consiste en llevar sucesivamente la longitud del nonio sobre todo el limbo y por medio de las rayas o divisiones adicionales o suplementarias del nonio ver si la longitud de éste cubre siempre exactamente un espacio igual del limbo. Si se observan desigualdades, no pueden atribuirse desde luego a errores de división, ya que pueden deberse, total o parcialmente, a la excentricidad (§ 80). En todo caso, este examen con los nonios da una primera idea sobre la exactitud del círculo graduado, poniendo de manifiesto las irregularidades groseras que pueda presentar.

Al hacer este examen con un teodolito de Ertel, de división centesimal, corriendo dos veces el nonio I y su opuesto III de 10ᵍ en 10ᵍ sobre todo el limbo, encontramos, como

ya era de esperar, que éste no presentaba error grosero de división; en cambio, los dos nonios resultaban demasiado grandes, el *I* en 4,9cc y el *III* en 18,8cc.

Por repetición determinamos el error medio de una lectura de nonio, que era:

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm 6{,}03 \text{ segundos centesimales} \\ &= \pm 1{,}95 \text{ segundos sexagesimales} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Esto prueba que las lecturas de los nonios son capaces de mayor precisión de la que ordinariamente se les atribuye, sobre todo después de la aplicación de los micrómetros lectores (microscopio con tambor micrométrico).

Error de división en los trazos diametralmente opuestos. Cuando se hace una compensación de las lecturas diametrales distribuídas regularmente sobre todo el limbo, como en el ejemplo de la página 336, todo error residual v puede considerarse como originado por errores de división, siempre que no se vea, desde luego, que es un error de lectura.

Para separar los errores de división de los de lectura, volveremos a las fórmulas (3), (4) y (5) de la página 335, referentes al error ε, y pondremos:

$$d_1 = II_1 - I_1 - 180^\circ \qquad d_2 = II_2 - I_2 - 180^\circ. \quad (2)$$

En estas igualdades no se tienen en cuenta los errores de división. Para introducir éstos en el cálculo, indicaremos con la letra t el error de división, o mejor dicho, el efecto del error de división; en este supuesto, las igualdades (2) se convierten en estas otras:

$$\left.\begin{aligned} d_1 + t\,d_1 &= (II_1 + t\,II_1) - (I_1 + t\,I_1) - 180^\circ \\ d_2 + t\,d_2 &= (II_2 + t\,II_2) - (I_2 + t\,I_2) - 180^\circ \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pero como d_1 y d_2 deben encontrarse en puntos de la alidada diametralmente opuestos, resulta que la lectura II_2 estará muy próxima al punto I_1, y la I_2 muy próxima al II_1, por lo cual se tendrá:

$$t\,II_2 = t\,I_1 \qquad \text{y} \qquad t\,I_2 = t\,II_1. \quad (4)$$

Sustituyendo estos valores en (3) y (2) y hallando la semidiferencia de las igualdades (3), resulta:

$$\frac{t\,d_1 - t\,d_2}{2} = t\,II_1 - t\,I_1. \quad (5)$$

Pero como según la fórmula (5) de la página 335

$$\frac{d_1 - d_2}{2} = \varepsilon, \quad (6)$$

se puede poner en vez de la fórmula (5) esta otra, dando el mismo significado a la letra t:

$$t\,\varepsilon = t\,II - t\,I \quad (7)$$

que nos dice que el valor ε contiene la diferencia de los errores de división para los dos trazos diametralmente opuestos correspondientes a ε.

Por otra parte, cada valor de ε encierra en sí el efecto de cuatro errores de lectura, según las igualdades (2) y (6):

$$\varepsilon = \frac{(II_1 - I_1) - (II_2 - I_2)}{2} \qquad m_\varepsilon = \frac{\sqrt{2\,a^2 + 2\,a^2}}{2} = a. \quad (8)$$

Después de lo que antecede, puede ya escribirse la siguiente igualdad:

$$m^2 = 2\,t^2 + a^2 \qquad \text{o sea} \qquad t = \sqrt{\frac{m^2 - a^2}{2}} \quad (9)$$

donde m es el error medio, según la fórmula de compensación (20) de la página 337, t el error medio de división de un trazo y a el error medio de lectura con un nonio o microscopio. Para admitir como buena la fórmula (9) hay que tener en cuenta el doble signo del error de división t.

Para aplicar la fórmula (9) al teodolito de Ertel antes citado, basta hacer una compensación de excentricidad del modo indicado en el ejemplo de las páginas 337 a 339, la cual para los trazos 0g, 10g, 20g, 190g, da los siguientes errores residuales, expresados en segundos centesimales:

−2,6	−3,4	+5,7	+2,0	+5,0	−0,5	−0,5	−12,8	−7,0	−4,2
+2,4	+7,2	+4,6	+0,9	+2,3	+1,9	−1,6	+7,0	−3,1	−10,5.

La suma de los cuadrados de estos valores es 570,68, y el error medio será, por consiguiente:

$$m = \sqrt{\frac{570{,}68}{20 - 2}} = \pm 5{,}63 \text{ segundos centesimales.} \quad (10)$$

Para la aplicación de la igualdad (9), tomaremos el error medio de lectura, que según (1) es $a = \pm 6{,}03$ segundos centesimales; pero este valor no puede tomarse directamente, porque las lecturas que entran en la compensación son las medias de cuatro lecturas independientes, hechas con los trazos inicial y final del nonio, repetidas ambas; por lo tanto, habrá que tomar:

$$a = \frac{6{,}03}{\sqrt{4}} = 3{,}015 \text{ segundos centesimales.} \quad (11)$$

Sustituyendo estos valores (10) y (11) en (9), se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{5{,}63^2 - 3{,}015^2}{2}} = \pm 3{,}36 \text{ seg. cent.} = \pm 1{,}1 \text{ seg. sexag.} \quad (12)$$

es decir, que el error medio de división del teodolito de Ertel en cuestión es sólo de unos tres segundos centesimales, o de uno sexagesimal.

Determinación de los errores sistemáticos de división por mediciones reiteradas (véase § 83). Cuando se mide un mismo ángulo, por ejemplo de 45° o de 60°, varias veces sobre todo el círculo graduado, se puede determinar el error de división en las partes del limbo empleadas.

Supongamos que se mide seis veces un ángulo de 60° (o muy próximo a 60°):

Medición de	0° a 60°	$\alpha_1 + t\cdot 60 \quad -t\cdot 0$
»	» 60° a 120°	$\alpha_2 + t\cdot 120 - t\cdot 60$
»	» 120° a 180°	$\alpha_3 + t\cdot 180 - t\cdot 120$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
»	» 300° a 360°	$\alpha_6 + t\cdot 0 \quad -t\cdot 300$
	Media	$\alpha + \quad 0 - 0$

La media aritmética no padece error alguno; si se resta esta media de las seis medidas parciales, se tiene, puesto que $t\,0 = 0$, el error de división para los cinco trazos 60°, 120°, 180°, 240° y 300°.

Claro está que sólo es necesario recorrer medio círculo, de 0° a 180°, pues siempre se hacen las lecturas con dos nonios o microscopios diametralmente opuestos, y el error de división que así se obtiene se refiere a la media entre dos trazos diametralmente opuestos.

Del estudio y determinación de los errores de división hecho por Helmert para un

teodolito de Starke y Kammerer con círculo acimutal de 16 cm dividido de 10′ en 10′, y dos microscopios de 50 aumentos, resultaron los siguientes valores numéricos:

I. Error medio accidental de posición y lectura de un microscopio $= \pm 1{,}61''$.
II. Error accidental de división de los trazos del círculo acimutal $= \pm 0\,33''$.
III. Error de división de dos trazos diametralmente opuestos $= \pm 2{,}71''$.
IV. El error sistemático de división fué determinado por medida reiterada de ángulos de 45,9° y de 47,2°; para la media de dos trazos opuestos resultó el error medio $= \pm 3''$.

Un estudio e investigación de errores de división verdaderamente notable fué el llevado a cabo por el general Schreiber, con dos teodolitos, en los que sólo apreció errores de división de muy poca monta y de carácter sistemático, por lo cual no resultaba ventajoso corregir las observaciones aisladas, siendo mejor considerar los errores de división como simples errores accidentales. El error medio de una observación angular, leyendo cada posición con cada microscopio sobre dos trazos, resultó ser para los dos teodolitos de $\pm 0{,}80''$ y $\pm 0{,}64''$ respectivamente, con $\pm 0{,}06''$ de inseguridad en la determinación.

§ 83. Medición de un ángulo horizontal o acimutal

Método de reiteración. Se pone el teodolito en estación sobre el vértice del ángulo que se trata de medir, enfocando el anteojo y el ocular de los microscopios o las lupas de lectura, y se nivela perfectamente el instrumento.

Se enfila primero el punto L de la izquierda y después el de la derecha R; se leen las dos veces los dos nonios o microscopios, y el ángulo medido es igual a la diferencia entre las lecturas de derecha e izquierda. Se da la vuelta de campana al anteojo, se repiten las lecturas y se toma la media de los dos resultados.

Se repiten las operaciones anteriores, después de haber dado cierto giro al círculo graduado, y se hacen nuevas lecturas que darán un segundo resultado para la medida del ángulo, con la variación inevitable, inherente a toda medición.

En el cuadro siguiente se resume un ejemplo de medida de un ángulo horizontal por el método de reiteración:

Punto visado	Posición I del anteojo		Posición II del anteojo		Promedio de todas las lecturas
	Nonio 1	Nonio 2	Nonio 1	Nonio 2	
L	20° 44′ 50″	44′ 50″	200° 44′ 50″	45′ 10″	20° 44′ 55″
R	197° 07′ 00″	07′ 20″	17° 07′ 30″	07′ 20″	197° 07′ 17″
Ángulo $= R - L$	176° 22′ 10″	22′ 30″	176° 22′ 40″	22′ 10″	176° 22′ 22″

Más adelante (§ 88) volveremos a tratar de la medición de ángulos horizontales para más de dos puntos visados.

Método de repetición. Si el teodolito tiene doble sistema de ejes (§ 69) se puede seguir el llamado método de repetición, que consiste en hacer uso del doble giro de ejes en cada repetición, de modo que cada ángulo se suma mecánicamente a la lectura anterior. Las operaciones son las siguientes:

1. Estando fijo el círculo acimutal se enfila con el anteojo el punto L de la izquierda, y se hace la lectura a_0.
2. Se enfila a continuación el punto R de la derecha y se lee el valor a_1.
3. Se gira el círculo acimutal, firmemente unido a la alidada, de modo que se enfile nuevamente el punto L, para lo cual se hace uso de los tornillos de presión y llamada del círculo.
4. Estando fijo este último, se suelta la alidada y se enfila con el anteojo nuevamente el punto R, y se hace la correspondiente lectura a_2. Se repite la operación n veces, obteniéndose las lecturas $a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}\, a_n$, y restando cada una de la siguiente, se obtendrá un valor del ángulo para cada par de lecturas, a saber:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= A_1 \\ a_2 - a_1 &= A_2 \\ a_3 - a_2 &= A_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= A_n. \end{aligned}$$

Al sumar ordenadamente desaparecen los valores intermedios $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$, como sucede en la adición mecánica de las lecturas, obteniéndose para la media aritmética el siguiente valor:

$$\frac{a_n - a_0}{n} = A. \qquad (1)$$

Se procura colocar el nonio I en el punto 0° 0′ 0″, y entonces la medida resulta del modo indicado en el ejemplo que sigue:

	N.°	Nonio I	Nonio II
Medida de un ángulo horizontal en cinco repeticiones	0	0° 0′ 0″	179° 59′ 50″
	1	130 41 20	
	2	(261 23 40)	
	3	(32 5 20)	
	4	(162 47 20)	
	5	293 28 20	113° 28′ 0″
quíntuplo (293° + 360°),		653° 28′ 20″	653° 28′ 10″
		décuplo: 1306° 56′ 30″	
		Resultado: 130° 41′ 39″	

Las lecturas intermedias 1, 2, 3, 4, de uno de los nonios, no se emplean en el cálculo, por lo cual no son necesarias. Pero la primera lectura intermedia (1. = 130° 41′ 20″) debe hacerse, por lo menos con uno de los nonios, para saber si el nonio pasa de los 360° durante las repeticiones, y si hay que agregar, al final, 360°, ó 720°, etc. También conviene hacer la primera lectura intermedia, u otra cualquiera de éstas, pues por comparación con el resultado final se ve si se ha cometido algún error grosero en la práctica del método.

Después de cada enfilación con el anteojo se puede soltar o desembragar el círculo acimutal (no la alidada) y girarlo hacia el observador para facilitar la lectura; de este modo se evita que el operador tenga que dar vueltas alrededor del teodolito, cosa molesta y peligrosa para el instrumento y hasta para el operador cuando aquél está situado en sitios reducidos, como mojones de triangulación, terrazas sin barandas, salientes, etc..

Se combina la repetición con la vuelta de campana del anteojo, por lo cual se hace un

número par de repeticiones; después de la primera mitad de éstas, se da la vuelta de campana al anteojo y se sigue observando como antes, o bien se mide, con el anteojo suelto, el ángulo que falta para completar los 360°.

Para la observación en la segunda posición del anteojo, se puede partir directamente de la última lectura hecha con el anteojo en la primera posición, de modo que sólo se necesiten en total tres lecturas. En la tabla siguiente puede verse un ejemplo de aplicación de este último método, con cuatro repeticiones en cada posición del anteojo, midiendo en la segunda posición el ángulo que falta para los 360°.

Repeticiones		Nonio 1	Nonio 2	Media	Ángulo cuádruplo	Ángulo medido
		106° 51′ 40″	52′ 00″	51′ 50″		
Primera posición del anteojo	(1)	(174 50 00)			271° 51′ 10″	67° 57′ 50″
	4	18 43 00	43 00	43 00	271 51 30	
Segunda posición del anteojo	8	106 51 20	54 40	51 30	271 51 20	

Al hacer el cálculo lo mejor es restar la primera y la última lectura de la lectura media, es decir, de la que ocupa el lugar medio, con lo cual se obtiene dos veces el cuádruplo del ángulo que se mide.

Errores en el método de repetición. Sea α el error medio de puntería del anteojo y β el error medio de lectura sobre el limbo para el promedio de dos nonios. Si se mide un ángulo enfilando primero el punto de la izquierda, después el de la derecha y leyendo las dos veces, se tienen dos errores de puntería α independientes, y dos errores independientes de lectura β, por lo cual el error medio del ángulo será:

$$M_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2} = \sqrt{2\,(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Si se repite la medición n veces independientes por el método de reiteración y se toma la media de los n resultados parciales, se halla el error medio de esta media, dividiendo por $\sqrt{n}$, es decir:

(n veces por reiteración):
$$M_s = \frac{M_1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}\,(\alpha^2 + \beta^2)}. \qquad (2)$$

En cambio, si se mide el mismo ángulo n veces por repetición, sin hacer las lecturas intermedias, la diferencia $a_n - a_0$ entre la última lectura y la primera, carga con los errores de $2n$ enfilaciones, pero sólo con los de dos lecturas. Por consiguiente el error medio de la diferencia $a_n - a_0$ será:

$$M' = \sqrt{2\,n\,\alpha^2 + \beta^2}.$$

De la diferencia $a_n - a_0$ se puede deducir el valor del ángulo, dividiéndola por n, y el error medio M_r de la medida por repetición resultará de dividir por n el error M', es decir:

(n veces por repetición):
$$M_r = \frac{M'}{n} = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}\right)}. \qquad (3)$$

La comparación de las dos expresiones (2) y (3) nos dice que el error M_s del resultado obtenido por reiteración (2) es más grande que el error M_r por repetición (3), y tanto más grande será la diferencia cuanto mayor sea el error de lectura β en comparación con el de enfilación o puntería α. Además, con el método de repetición se evita el trabajo de hacer las lecturas intermedias, por todo lo cual resulta ventajoso este método sobre el de reiteración.

Para aplicaciones numéricas sólo es preciso hallar el valor total $\alpha^2 + \beta^2$ si se trata del método de reiteración (2), pero hay que tomar estos errores separadamente cuando se trata del método de repetición (3). Para hacer una comparación sumaria entre la precisión de las medidas de ángulos por los sistemas de reiteración y repetición, supongamos que el error medio de puntería sea en números redondos $\alpha = \pm 1''$ y que el error medio de lectura sea $\beta = \pm 2''$. Las fórmulas (2) y (3) nos dan:

		Por reiteración	Por repetición
$\alpha = 1''$	$n = 1$	$\sqrt{\frac{10}{n}} = \pm 3{,}2''$	$\sqrt{\frac{2}{n}\left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \pm 3{,}2''$
$\beta = 2$	$n = 5$	» = 1,4	» = 0,9
	$n = 10$	» = 1,0	» = 0,5

(4)

Como se ve, el error por reiteración es mayor que el error por repetición, y aun se hace más patente esta diferencia dando a α y β otros valores, por ejemplo, suponiendo para un pequeño teodolito con nonios $\alpha = 1''$ y $\beta = 5''$, pues entonces se tiene:

$\alpha = 1''$	$n = 1$	$\pm 7{,}2''$	$\pm 7{,}2''$
$\beta = 5$	5	3,2	1,5
	10	2,3	0,8

(5)

Aquí se ve más palpablemente la ventaja del método de repetición, ventaja que se acrecienta en ciertas circunstancias adversas, como veremos después.

La fórmula (3) corresponde a n repeticiones sin lecturas intermedias, en una sola posición del anteojo, como en el ejemplo de la página 343. Para observaciones en las dos posiciones del anteojo hay que modificar dicha fórmula con arreglo a la nueva sucesión de mediciones. Vamos a calcular el error medio para el ejemplo de la página 344. Para ello, designemos con a_1, a_2 y a_3 las lecturas y con x el valor definitivo o final del ángulo medido, y tendremos:

$$x = \frac{a_2 - a_1 + a_2 - a_3}{n} = \frac{2a_2}{n} - \frac{a_1}{n} - \frac{a_3}{n},$$

donde $n = 8$, como en el citado ejemplo. En los errores de estas lecturas intervienen también los errores de enfilación, cuyo número es igual a $2n$, teniéndose así:

$$M_r^2 = \frac{4}{n^2}\beta^2 + \frac{1}{n^2}\beta^2 + \frac{1}{n^2}\beta^2 + \frac{1}{n^2}2n\alpha^2$$

o sea

$$M_r^2 = \frac{6}{n^2}\beta^2 + \frac{2}{n}\alpha^2.$$

de donde:

(n veces por repetición):
$$M_r = \sqrt{\frac{2}{n}\left(\alpha^2 + 3\frac{\beta^2}{n}\right)}. \qquad (6)$$

Si suponemos $\alpha = 1''$ y $\beta = 5''$ el valor de M_r para $n = 8$ será:

$$M_r = \pm 1{,}6''.$$

Errores inherentes al método de repetición. Se ha comprobado que las mediciones por repetición llevan siempre consigo pequeños errores en un solo sentido, perfectamente explicables si se tiene en cuenta el frotamiento de los ejes giratorios y otras causas análogas.

En el año 1824 llamaba Struve la atención sobre el hecho de haber hallado, operando por repetición en el sentido de la graduación y en el contrario, una diferencia de unos 2″ en los resultados respectivos.

En la triangulación de Baden hemos hecho este estudio para numerosos resultados de mediciones por repetición, comprobando que todas éstas acarreaban un error propio que para distintos instrumentos y diferentes observadores oscilaba entre $-1''$ y $+1''$.

El método de repetición, ideado por Tobías Mayer, de Göttingen, en el siglo XVIII, ha prevalecido casi un siglo en los trabajos geodésicos; por ejemplo, en la triangulación de Alemania del Sur, en la primera mitad del siglo pasado; en la medida clásica del grado, hecha por Gauss, de Hannover, etc. Con el perfeccionamiento de las graduaciones y de los microscopios perdió el método de repetición la mayor parte de su eficacia; pero, para los teodolitos pequeños, con lectura por nonios, constituye todavía este método un medio muy valioso (mal apreciado, de ordinario), para hacer mediciones aisladas, de gran precisión.

Todavía hemos de insistir sobre una ventaja del método de repetición: la de poderse operar cómodamente en sitios reducidos, donde sería imposible, o muy difícil, el observar por otro método, como, por ejemplo, en ventanas o campanarios de torres, balaustradas, mojones de fábrica, etc.

Son muchos los estudios hechos sobre los errores inherentes a la repetición, pudiendo citar, entre los más importantes, los de Friebe, Benzenberg, Struve, Bohnenberger, Méchain, Gauss, Bessel, Jordan, etc.

Si estando fijo el círculo acimutal se gira la alidada 360° y se enfila cada vez el mismo punto, se observa un error de arrastre del círculo, que no es proporcional al número de giros o vueltas de la alidada, sino que es relativamente grande para la primera vuelta, disminuyendo después rápidamente en las vueltas sucesivas; es decir, que la primera impulsión es la que produce la desviación del círculo. Sobre este punto se han hecho también interesantes experimentos, llegándose al siguiente resultado: el arrastre o desviación del círculo es independiente del número de repeticiones y llega a valer unos segundos; haciendo las mediciones de izquierda a derecha y después de derecha a izquierda, queda eliminado el error correspondiente a este arrastre del círculo.

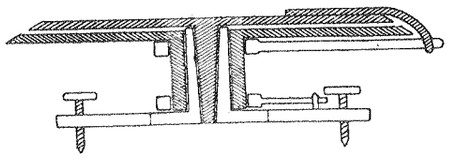


Fig. 394

Otra serie de observaciones hechas por el método de repetición fué la de Nippa, con un teodolito francés (fig. 394), en el cual el eje del círculo acimutal y el de la alidada no giran el uno dentro del otro, sino que el de la alidada va alojado en el cubo de donde parten los tres pies nivelantes, y el del círculo va alrededor de dicho cubo, sin contacto con el primer eje (véase figura 298, página 278); una serie de 200 repeticiones hacia la derecha con este instrumento dió como error medio $-1{,}66''$ y hacia la izquierda $+0{,}12''$ para cada repetición, valores que, como se ve, son entre sí muy diferentes.

§ 84. Cuidados en el manejo del teodolito

Por ser de gran interés y utilidad damos a continuación las instrucciones alemanas para el cuidado y manejo del teodolito en los levantamientos generales.

1. Antes de la campaña anual deben limpiarse y repasarse todos los teodolitos, por instrumentistas acreditados, de modo que los operadores los encuentren en perfectas condiciones de funcionamiento.

2. El transporte de los teodolitos requiere cuidados especiales: sobre todo hay que evitar en absoluto los golpes o sacudidas violentas, la inversión brusca de la caja, etc. La subida a torres o terrazas y el descenso de las mismas deben ser vigilados personalmente por el operador.

3. El modo más seguro de subir un instrumento a un sitio alto (terraza, torre, etc.) consiste en tirar desde arriba de la caja, por medio de una cuerda bien atada a la misma; la caja lleva atada otra cuerda que sirve de guía para evitar que en la subida pueda chocar contra la pared, cornisas, salientes, etc.

4. Durante todo transporte deben ir inmovilizados los tambores de los micrómetros lectores.

5. El teodolito debe sacarse de la caja y meterse en la misma con los tornillos de presión flojos; una vez introducido en la caja, se aprietan éstos.

6. Antes y después de la observación se quita el polvo al teodolito con un pincel o una gamuza. Antes de colocar la funda de tela, se debe ésta enjuagar y sacudir muy bien, porque a ella se debe, en parte, el polvo que puede depositarse sobre el instrumento.

7. El aceite espeso que aparece debajo del cubo de latón, en la base nivelante del teodolito, debe quitarse con un poco de petróleo y una gamuza.

8. Los cojinetes y muñones del eje de giro del anteojo deben limpiarse con frecuencia, cubriendo las partes frotantes con una ligera capa de aceite.

9. Mientras se puedan leer bien los limbos no deben tocarse; pero si presentan manchas que entorpezcan las lecturas, se limpian pasándoles el dedo humedecido, después de soplar y pasar el pincel para quitarles el polvo.

10. Los tornillos nivelantes y los de presión y coincidencia se limpian con un cepillo de dientes blando.

11. Los tornillos nivelantes no deben estar demasiado flojos: sólo lo justo para facilitar su movimiento al nivelar; antes de empezar la observación deben apretarse sus correspondientes tornillos de presión.

12. El movimiento de los ejes debe ser más bien un poco pesado que no demasiado ligero.

13. Hay que tener mucho cuidado con no doblar la varilla de centrar (plomada rígida) al quitar el teodolito, estando aquélla todavía dispuesta sobre el punto-estación.

14. Debe resguardarse el teodolito de la lluvia y de la acción directa de los rayos del sol; por esta razón debe siempre tenerse a mano la funda o cubierta, ya sea de tela o de hule o goma. Antes de cubrir el instrumento con el paño (que deberá dejarse caer de arriba abajo y no desde un lado pasarlo por encima del teodolito), hay que inmovilizar el anteojo por medio del tornillo de presión del círculo vertical.

15. Si de un día a otro tiene que quedar el teodolito en la misma estación, se pone la caja sobre ladrillos, tablas o listones, cubierta con la tela o el hule, y atada a un poste, pilar o estaca.

16. Si estando observando en lugares bajos se presentan remolinos de polvo o arena fina, o si en cualquier ocasión se sospecha que haya penetrado polvo o humedad en las partes internas del teodolito, se desmonta éste, se limpia, se engrasa y se vuelve a montar, haciendo las verificaciones necesarias con todo cuidado.

17. Todo error que se observe en un instrumento que requiera una ulterior investigación o reparación, así como toda particularidad digna de atención que revele el teodolito, debe anotarse en el cuaderno de campo, para que al acabar el trabajo se tenga un índice completo de las verificaciones o reparaciones a que haya de someterse el instrumento.

CAPÍTULO VIII

Triangulación

§ 85. Generalidades

Cuando en un triángulo ABP (fig. 398) se conoce un lado $AB = c$ y los ángulos α, β, γ, o por lo menos dos de estos ángulos, se pueden calcular los otros dos lados mediante las fórmulas siguientes:

$$a = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\alpha \qquad b = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta.$$

Si sobre los lados a o b como bases se construyen otros triángulos, se puede aplicar a estos últimos el mismo método.

De idéntico modo, si se tienen varios puntos en un plano unidos entre sí por rectas formando una red de triángulos, de los cuales cada uno esté unido al siguiente por un lado común, se puede hallar la forma de toda la red conociendo o midiendo sus ángulos, y basta conocer o medir un solo lado, que se llama *base,* para poder determinar o deducir todas las dimensiones de la red. Éste es el fundamento de la *triangulación.*

La triangulación se clasifica en *órdenes,* según la longitud media de los lados de la red. En España se llaman triangulaciones geodésicas aquellas cuyos lados no son inferiores a 5 Km, y topográfica a aquella cuyos lados están comprendidos entre 2 y 5 Km. Los órdenes de las triangulaciones geodésicas son tres, a saber.

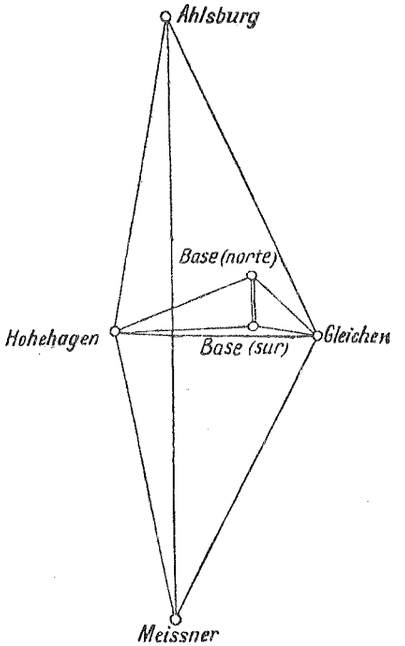


Fig. 395. – Base de Göttingen (Escala 1: 670000)

1.er orden. Los lados de los triángulos son de 25 Km a 50 Km o más,
2.º » » » » » » » 10 » » 25 »
3.er » » » » » » » 5 » » 10 »

Aun cuando no vamos a ocuparnos de las triangulaciones geodésicas de 1.º ni 2.º orden, damos a continuación un ejemplo para tener una primera idea de esta clase de triangulaciones; este ejemplo, ilustrado con las figuras 395 (a escala 1 : 670000) y 396 (a escala 1 : 3130000), se refiere a la triangulación de la provincia de Hannover.

En la figura 395 se ve la base de Göttingen, de 5193 m de longitud, medida en el año 1880.

Las bases pueden medirse, dados los medios de que se dispone actualmente, con toda precisión, con error de 1:200000 de su longitud, y si es necesario con mayor precisión aún, como sucedió con la base de Göttingen, que fué medida con 1 cm de aproximación (*).

La medición exacta de una base es un trabajo largo y fatigoso; por ejemplo, en la doble medición de la base de Göttingen (en uno y otro sentido), con las operaciones auxiliares o accesorias, se invirtieron más de tres semanas. Comparando las figuras 395 y 396

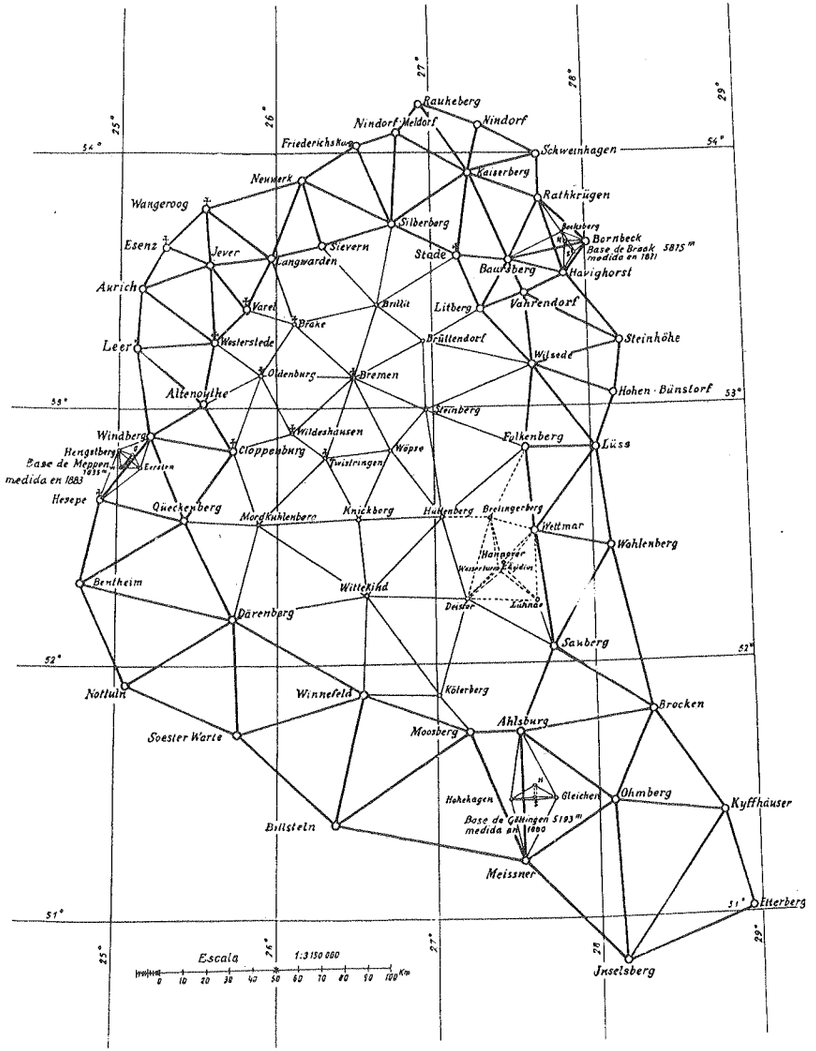


Fig. 396. — Triangulación de la provincia de Hannover (Escala 1 : 3 130000)

se ve la ventaja enorme que supone la triangulación sobre la medición directa de todas las líneas que se ven en las mismas. Con un solo lado medido directamente, de pocos

(*) El error probable de la base central de la triangulación de España, de cerca de 15 Km de longitud, es de $\frac{1}{5\,850\,000}$ de la longitud medida. — N. del T.

kilómetros de longitud, y la observación de ángulos, que se miden manera mucho más rápida y fácil que las longitudes, se puede calc mente toda una red de lados o distancias, en extensiones de muchos kilo

De este modo, con pocos triángulos, partiendo de la base de Göttingen, longitud, se deduce la longitud unas once veces mayor, de 57507 m, del lad Meissner, el cual, con el vértice Ohmberg, determina un triángulo de 1.er orden, ve en la figura 396.

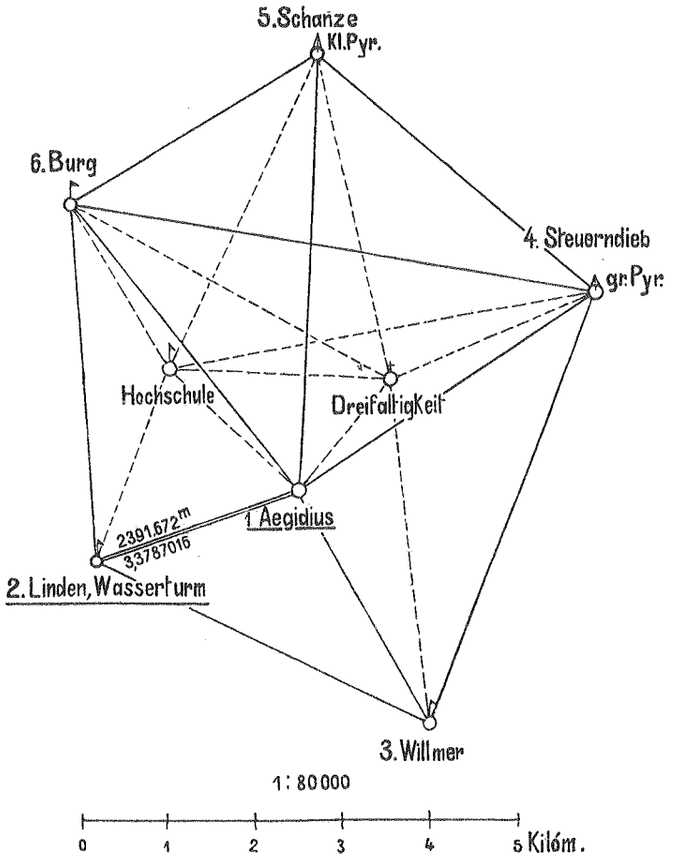


Fig. 397. — Red trigonométrica de tercer orden, de la ciudad de Hannover

En la provincia de Hannover (fig. 396) se tienen tres bases: la de Braak, en Holstein, de 5875 m, medida en el año 1871; la de Göttingen, de 5193 m, medida en el año 1880, y la de Meppen, de 7039 m, medida en 1883.

La distancia en línea recta entre estas bases es, por término medio, de unos 230 Km, y la unión trigonométrica de unas con otras está constituída por tres cadenas de triángulos consecutivas. La cadena cerrada resultante, después de compensada, sirve de arranque a la red interior, que cubre toda la zona abrazada por aquélla.

Intercalando más triángulos se hace la red cada vez más espesa, como se ve en la figura 396 para los alrededores de la ciudad de Hannover, con los dos puntos Ägidius y Wasserturm, representados también en la figura 397, construída a escala mucho mayor (1 : 80000).

La línea Ägidius-Wasserturm es la base, sobre la cual fué construído en el año 1891 el pentágono de contorno de la triangulación de la ciudad de Hannover (fig. 397).

Dentro de la triangulación de la provincia de Hannover están los orígenes de dos sistemas de coordenadas rectangulares, a saber: Göttingen para el antiguo sistema de Gauss y Celle para las del Catastro. Estos dos puntos no están representados en la figura 396, pero pueden situarse con facilidad, sabiendo que el punto cero de Göttingen está muy cerca del punto N de la base de este nombre, y que el de Celle cae a 23 Km al este y 28 Km al norte de Hannover.

Con esto podemos tratar ya de las triangulaciones de un orden menor (de 3.er orden y topográfica), suponiendo que se tienen por lo menos dos puntos de la triangulación inmediata superior, dados por coordenadas rectangulares planas.

En determinadas circunstancias puede darse el caso de triangulaciones aisladas, de lados cortos, midiendo para ello cuidadosamente una base con regla o cinta (§§ 18-21), y si es preciso se intercalan algunos triángulos para relacionar o unir la base con el lado más próximo de un gran triángulo, como se ve en la figura 395.

§ 86. Principios fundamentales para el cálculo de una triangulación

Antes de entrar en los detalles de las triangulaciones (mediciones de ángulos, señalamiento de vértices, cálculo, compensación, etc.), expondremos los principios matemáticos cuya aplicación repetida sirve para resolver todas las redes de triángulos, es decir, para calcular las triangulaciones.

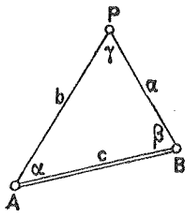


Fig. 398

Sean A y B (fig. 398) dos puntos dados por sus coordenadas, y supongamos construído, sobre el segmento AB, un triángulo APB del cual se conozcan los tres ángulos α, β, γ, o por lo menos dos de ellos. Se trata de calcular, en estos datos, las coordenadas x, y del vértice P.

Si se miden o conocen los tres ángulos y su suma $\alpha+\beta+\gamma$ no es exactamente igual a 180°, se reparte la diferencia por igual entre los tres ángulos (§ 8).

El cálculo trigonométrico se empieza calculando el acimut y la longitud de la base AB, que según las fórmulas (15) y (16) de la página 135, serán:

$$\operatorname{tg}(AB)=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a} \tag{1}$$

$$AB=c=\frac{y_b-y_a}{\operatorname{sen}(AB)} \qquad \text{o bien} \qquad AB=c=\frac{x_b-x_a}{\cos(AB)}. \tag{2}$$

Por la ley de proporcionalidad de senos y lados se tiene, para los otros dos lados b y a:

$$AP=b=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta, \qquad BP=a=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\alpha. \tag{3}$$

Del acimut (AB) de la base AB y de los ángulos α y β se deduce también el acimut de los otros dos lados, a saber:

$$(AP)=(AB)-\alpha \qquad (BP)=(BA)+\beta=(AB)\pm 180^\circ+\beta. \tag{4}$$

Las coordenadas de P se hallan, conforme a las ecuaciones fundamentales (5) o (6) (página 133), del modo siguiente:

$$\text{Para } A: \quad y=y_a+AP\operatorname{sen}(AP) \qquad x=x_a+AP\cos(AP) \tag{5}$$

$$\text{» } B: \quad y=y_b+BP\operatorname{sen}(BP) \qquad x=x_b+BP\cos(BP). \tag{6}$$

Pongamos un ejemplo numérico, correspondiente a la figura 398, suponiendo que el origen de coordenadas cae al sudeste de la figura:

Ángulos observados		*Ángulos compensados*
$(\alpha)=40^\circ\,27'\,23''$	Vértice A	$\alpha=40^\circ\,27'\,19''$
$(\beta)=68^\circ\,56'\,25''$	» B	$\beta=68^\circ\,56'\,21''$
$(\gamma)=70^\circ\,36'\,24''$	» P	$\gamma=70^\circ\,36'\,20''$
$180^\circ\;0'\;12''$		$180^\circ\;0'\;0''$

Coordenadas dadas

Vértice B	$y_b=-4519{,}74$ m	$x_b=+36156{,}78$ m
» A	$y_a=-6581.55$	$x_a=+35475{,}06$
Diferencia de coordenadas	$y_b-y_a=+2061{,}81$ m	$x_b-x_a=+681{,}72$ m

	$\log(y_b-y_a)$	3.314249	
	$\log\begin{Bmatrix}\operatorname{sen}(AB)\\ \text{ó } \cos(AB)\end{Bmatrix}$	9.977471	Origen a la derecha del cateto mayor
$(AB)=71^\circ\,42'\,14''$	$\log(x_b-x_a)$	2.833606	$(BA)=251^\circ\,42'\,14''$
$-\alpha=40^\circ\,27'\,19''$	$\log\operatorname{tg}(AB)$	0.480643	$+\beta=+68^\circ\,56'\,21''$
$(AP)=31^\circ\,14'\,55''$	$\log AB$	3.336778	$(BP)=320^\circ\,38'\,35''$
	$\log\operatorname{sen}\gamma$	9 974629	
	$\log(AB:\operatorname{sen}\gamma)$	3.362149	

$\log(AB:\operatorname{sen}\gamma)$	3.362149		$\log(AB:\operatorname{sen}\gamma)$	3.362149	
$\log\operatorname{sen}\beta$	9.969975		$\log\operatorname{sen}\alpha$	9 812147	
$\log AP$	3,332124		$\log BP$	3.174296	

$\log AP$	3.332124	$\log AP$	3.332124	$\log BP$	3 174296	$\log(BP)$	3 174296
$\log\operatorname{sen}(AP)$	9.714960	$\log\cos(AP)$	9.931928	$\log\operatorname{sen}(BP)$	9.802192$_n$	$\log\cos(BP)$	9.888298
$AP\operatorname{sen}(AP)$	3 047084	$AP\cos(AP)$	3.264052	$BP\operatorname{sen}(BP)$	2.976488$_n$	$BP\cos(BP)$	3.062594

	$+1114{,}51$		$+1836{,}76$		$-947{,}30$		$+1155{,}03$
A:	$y_a=-6581\,55$		$x_a=+35475.06$	B:	$y_b=-4519{,}74$		$x_b=+36156{,}78$
P:	$y=-5467{,}04$		$x=+37311{,}82$	P:	$y=-5467{,}04$		$x=+37311{,}81$

Es decir, que se tiene para valores definitivos de x e y los siguientes:

Vértice P: $\quad y=-5467{,}04$ m $\qquad x=+37311{,}81$ m.

Las fórmulas antes deducidas, y aplicadas después al anterior ejemplo numérico, sirven para todos los casos, con tal de designar siempre del mismo modo y con la misma posición relativa los vértices A, B, P, del triángulo y sus ángulos α, β y γ; es decir, que se supone la base situada de manera que el tercer vértice, que hay que determinar, caiga delante de aquélla; se llama A al extremo de la izquierda de la base, y B al de la derecha, y análogamente se llama α al ángulo de la izquierda y β al de la derecha. Al tercer vértice se le llama P y al ángulo respectivo γ. La figura 399 está anotada con arreglo a esta regla, así como las figuras 145 y 146 (pág. 138), que pueden servir de ejemplo para la aplicación de los cálculos anteriores; la figura 145 tiene idéntica notación que la 398, con la única diferencia de llevar indicado el acimut o ángulo de orientación de la base $(AB)=\varphi_0$.

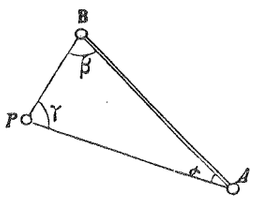


Fig. 399

Si se prescinde de los errores de observación, o mejor aún, si se suponen compensados y sin que quede exceso alguno en los ángulos (diferencia entre la suma de los ángu-

La línea ...ULACIÓN ...iendo que el
el pentágor ...cular una red de triángulos con las sencillas fórmulas (1) a (6), ...s que en la figura 397 se dan las coordenadas de los vértices ...rm y que se hayan medido los ángulos de todos los triángulos ...o en la suma de éstos. De las fórmulas (1) y (2) se deducen
Dent ...
temas ...
y Ce' ... la base de esta red. De la proporcionalidad entre senos y
pe ...ores de los lados de todos los triángulos; del acimut de la base ...ulos se deducen, según la fórmula (4), los acimutes de todos ...s formulas (5) y (6), de las coordenadas de los extremos de la base ...as coordenadas de todos los demás vértices de la red. En la misma figura se ...e el gran número de comprobaciones de cálculo que pueden hacerse.

Después de esta idea general sobre la formación y cálculo de una pequeña triangulación, vamos a tratar con algún detenimiento de las operaciones inherentes a esta clase de trabajos.

§ 87. Señalamiento de vértices

Los vértices de las triangulaciones de tercer orden y topográficas pueden señalarse con jalones o palos de 5 a 10 cm de diámetro; pintando estos palos de rojo y blanco y poniendo en su extremo superior tablillas de mira o una banderola se pueden ver bien a distancias de 5 a 10 Km. Tanto las tablillas como la banderola sirven solamente para buscar la señal y no como punto de mira.

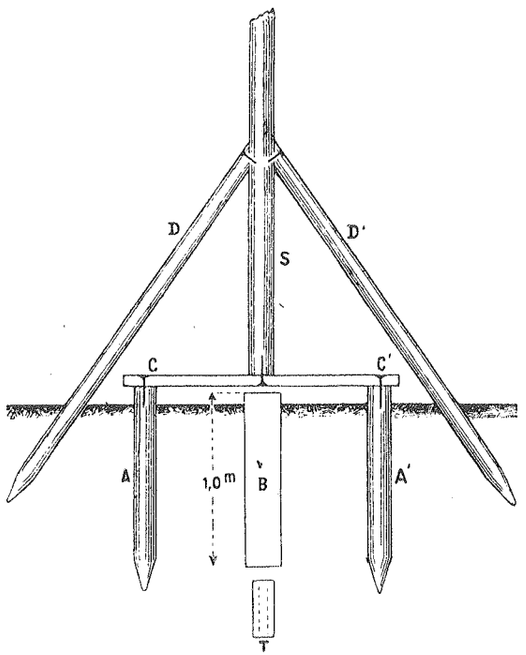


Fig. 400
Manera de centrar un jalón sobre una señal de piedra

Si hay que colocar un jalón centrado sobre un mojón, después de fijado éste, se tropieza siempre con dificultades, que pueden vencerse con ciertos dispositivos, como el que se ve en la figura 400, que representa una señal del Catastro renano; B es una pilastra de basalto de 1 m de longitud, que sobresale muy poco del suelo y que lleva en el centro de su cabeza una cruz (signo +). Para más seguridad, se dispone por debajo de esta pilastra un tubo T de barro cocido. Alrededor de B van clavadas cuatro estacas grandes A, A', unidas entre sí por tablas CC', sobre las cuales se fija, centrado respecto al pilar B, el jalón S, que se mantiene bien derecho y firme con cuatro puntales D, D'. Esta figura está a escala 1:40 del natural.

En la figura 401 se ve una señal en forma de pirámide, de las empleadas en la triangulación de Württemberg para los vértices de 2.° y 3.er orden. Debajo de la pirámide está el hito o mojón que sirve de señal permanente. Este hito señala el vértice, según el

sistema empleado en Württemberg, clavando en el suelo, a un lado del mismo, un jalón de grosor corriente (unos 7 cm de diámetro) cuyo centro indica el vértice de la triangulación. El hito lleva grabada una señal en forma de triángulo.

Actualmente no se emplea este sistema de señales; en las nuevas instrucciones se ordena que los vértices que no coincidan con señales permanentes se señalen con un hito prismático, de cuatro caras, que tenga por lo menos 50 cm de longitud por 15 cm de grueso, marcado en su cara superior con una señal grabada en forma de triángulo equilátero, centrado en dicha cara.

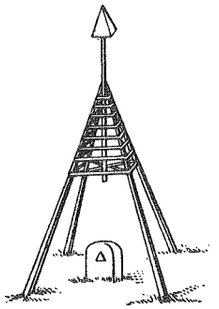


Fig. 401
Vértice de Württemberg

En el sistema empleado en Baden, las señales son análogas a las usadas antiguamente en Württemberg, es decir, constituídas por un hito y un jalón al lado. El verdadero vértice o punto permanente donde va clavado el jalón, y sobre el cual hay que estacionar el teodolito, se halla a 30 cm al norte del hito, que lleva grabada la señal △.

Análoga disposición presentan las señales empleadas antes en Hessen; el mojón o hito (fig. 402) lleva un hueco a un lado, de forma semicilíndrica, por el cual pasa el jalón B de modo que el eje de este último coincide con el eje del cilindro; el vértice está dado por la intersección del eje del jalón con el terreno.

Comparada con las señales empleadas primeramente en Württemberg (fig. 401) y con las empleadas en Baden (jalón a 30 cm del hito), presenta la de Hessen (fig. 402) la ventaja

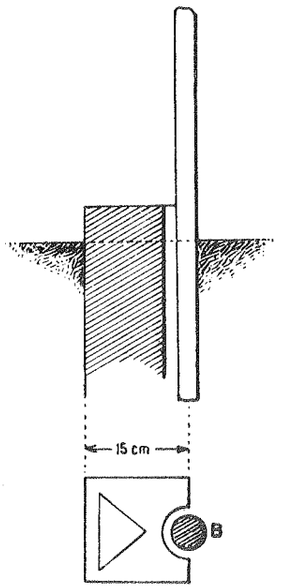


Fig. 402
Señal de la triangulación de Hessen

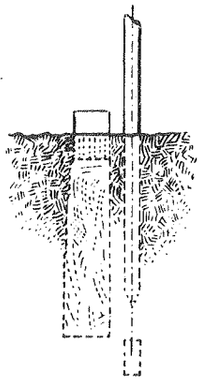


Fig. 403

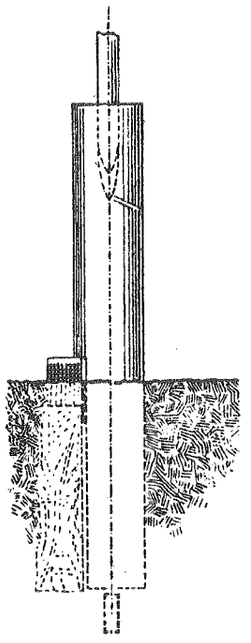


Fig. 404
Pilar de observación, de madera

de una mayor precisión, ya que se puede apreciar perfectamente la coincidencia del eje del jalón con el de la cavidad cilíndrica del hito.

También en Baviera se señalan los vértices de 2.° y 3.er orden y de la triangulación

topográfica, salvo casos excepcionales; con hitos o mojones, pero colocados de tal modo que el verdadero vértice se encuentra a 10 cm de distancia del vértice de la señal Δ grabada en el hito, contada perpendicularmente a las caras de éste que son paralelas a la base de dicha señal. Para los puntos más importantes se emplea además una señal enterrada (fig. 403), que consiste en un tubo de barro cocido de 15 cm de largo por 6 cm de diámetro exterior, 2 cm de luz y 2 cm de grueso.

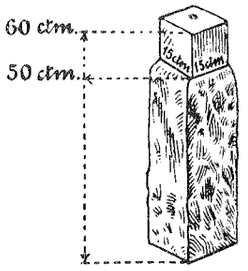


Fig. 405
Mojón bávaro, para vértices auxiliares y de poligonales

En la figura 404 se ve un pilar indicador, de madera. Para muchos vértices de 2.° y 3.er orden es insuficiente el señalamiento con un simple jalón, y las señales piramidales son demasiado costosas, por lo cual se emplean bastante estos pilares (figura 404), que se pintan de blanco y en cuya cara superior se clava un jalón corto; de este modo es fácil encontrar el jalón y observarlo desde distancias grandes. Estos pilares indicadores tienen también la ventaja de que permiten aumentar el rendimiento del trabajo en número de vértices, pues la puesta en estación del teodolito se hace más pronto y de modo más seguro que empleando el trípode. Aparte del pilar, se señala el vértice, como de ordinario, con mojón y tubo enterrado.

La figura 405 representa el mojón de piedra empleado en Baviera para los vértices auxiliares de la triangulación topográfica y para los vértices de las poligonales. El agujero practicado en el centro de la cara superior tiene de 1 a 2 cm de diámetro por 5 a 6 cm de profundidad. El jalón se sujeta de ordinario con un ligero trípode (pata de araña), bastando a veces para mantener firme el jalón, el empleo de estaquillas o de barro húmedo. Los mojones o hitos son, ordinariamente, de granito. Todos los vértices de poligonales, salvo casos especiales, se señalan con hitos.

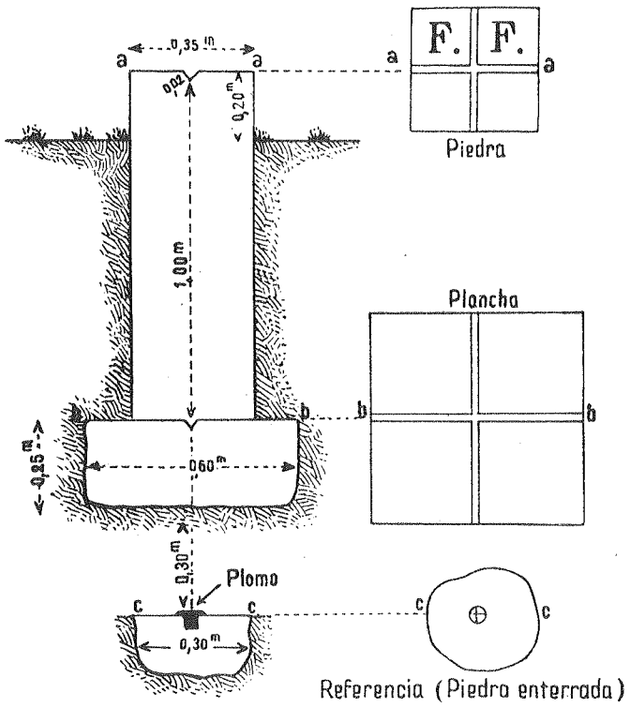


Fig. 406. — Mojón de Mecklenburg

En la figura 406 se ve otra señal para vértices de triangulación, empleada en Mecklenburg; en la cara superior del mójon van grabadas las iniciales F. F. (cifras del estado de Mecklenburg, correspondientes a *Friedrich Franz*).

Son muy útiles la orientación de estos hitos y sus referencias hacia los puntos cardinales. Los hitos empleados en Hannover (fig. 407, a escala 1 : 10) están colocados de modo que las aristas de la cara superior están orientadas de norte a sur y de este a oeste, cosa fácil de conseguir con una brújula, conociendo, como es natural, la declinación de ésta en el lugar de que se trate. También en Württemberg se orientan actualmente las señales con arreglo a los puntos cardinales.

Las instrucciones oficiales de Württemberg ordenan que los vértices de triangulación y de poligonales coincidan con mojones de término o de lindes bien marcados, y donde esto no sea posible, deben escogerse dichos puntos de tal modo que sea menos fácil su pérdida o deterioro, por ejemplo, sobre lindes o líneas de término.

También en Baden se utilizan como vértices puntos permanentes (objetos naturales o mojones de término, etc.), sobre todo en regiones en que las líneas de separación de parcelas o términos están bien amojonadas.

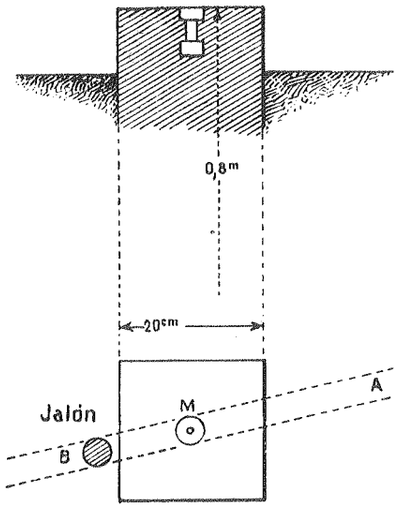


Fig. 407.— Hito de la triangulación de Hannover

En España las señales para los vértices de la triangulación de 2.° orden consisten, según las Instrucciones del Instituto Geográfico, «en uno o varios cuerpos prismáticos, de base cuadrada, de 1 m de altura cada uno. El superior deberá tener 1,50 m de lado, aumentado cada uno de los demás en 0,50 m, y sobre él se construirá el pilar de observación, que es un prisma de 1 m de alto y sección cuadrada de 0,40 m. Toda la construcción irá sobre un cimiento, en el cual se establecerá una referencia, consistente en un taladro de 5 cm de diámetro, cuyo eje coincida con el de la señal y referido a tres puntos elegidos en la proximidad. En la construcción de las señales debe hacerse uso de mampostería ordinaria, con mortero de cal y arena, y se enlucen y blanquean después de hechas».

Los vértices de la triangulación topográfica en España se señalan sobre el terreno con un taladro de 6 a 8 cm de diámetro y de 40 a 50 cm de profundidad, en cuyo fondo se clava una estaca, llenándolo después completamente de polvo de carbón y cubriéndolo todo con un mojón piramidal de tierra o piedras, de 50 cm de altura y que tenga por base un triángulo de 1 m de lado. Cuando los vértices se sitúan en roca, el taladro se hace del mismo tamaño, pero con 10 cm de profundidad solamente, quedando colocado en el centro de un triángulo cuyos lados, grabados a cincel en la misma roca, tengan 20 cm de longitud. Estas señales se refieren a tres objetos cercanos y fijos, como árboles, cercas, rocas, etc., los cuales se señalan grabando las iniciales T. T. Cuando no haya objetos próximos a qué referir un vértice, se clavarán tres estacas a menos de 20 m de él, que servirán de referencias.

Las señales de 3.er orden, en España, se hacen enterrando, en parte, piedras de la localidad, con un taladro en el centro, para introducir el regatón de la banderola. Antes de colocar la piedra en el hoyo practicado al efecto, se extenderá una capa de carbón molido, que cubra precisamente el terreno que ha de ocupar la base de aquélla, en cuyo centro se debe clavar además un piquete de madera, o bien un clavo para que sea más difícil la pérdida del vértice si desaparece la piedra. Ésta debe sobresalir unos 0,30 m del terreno. Cuando el vértice esté sobre roca, se hará en ella un taladro, de 5 cm de diámetro, que fijará el vértice; este taladro ocupará el centro de un cuadrado grabado a cincel. Los hitos de 3.er orden se deben referir a tres marcas en objetos exteriores.

Los vértices de 1.er orden se señalan, en España, con mojones de varios cuerpos cilíndricos, y altura total media de 5 m, sobre los cuales se coloca el pilar de observación.

Los puntos permanentes en los trabajos topográficos de Catastro Parcelario, en España, se marcan con señales de hormigón, cemento, terracota, etc., enterradas a profundidad no menor de 1 metro si el terreno es blando o grabadas en roca y referidas a otras tres señales, también grabadas en la roca, si de ésta es el suelo; los vértices de las poligonales se marcan con estacas clavadas en el suelo, con su número de orden marcado con pintura de aceite. (Véanse en el Apéndice las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral.)

Instrucciones oficiales para el señalamiento de vértices en Alemania. Los vértices topográficos se señalan con un hito o mojón y una losa enterrada debajo, como se ve en la figura 408 (a escala 1 : 40); el vértice está en el eje del hito perpendicular a la losa, en cuyo centro hay grabada una cruz +. La altura de la cara superior del hito sobre la losa enterrada debe medirse y anotarse para cada vértice.

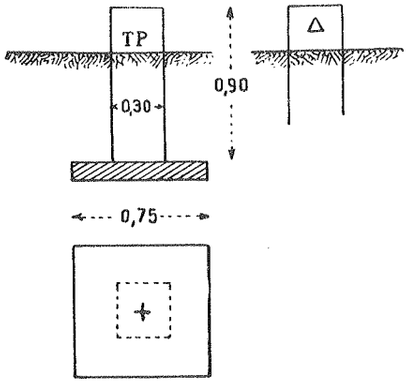


Fig. 408. — Hito y losa para el señalamiento de vértices en Alemania (Escala 1 : 40)

Cuando las condiciones del terreno no son favorables, se aseguran aun más los vértices de 1.er orden con una referencia, consistente en un cubo de piedra de 0,20 m de lado, al cual va pegado con cemento un cono de barro cocido. Este cubo se entierra por debajo de la losa, y se cubre con trozos de ladrillo (cascotes), que se bañan de cemento, para que se unan entre sí. En este caso se refiere el vértice a tres señales.

Para puntos de importancia especial, como los extremos de bases, etc., y en los casos en que el vértice no quede señalado con suficiente seguridad, se recurre al empleo de señales excéntricas enterradas, consistentes en cuatro cubos de piedra con clavos incrustados, situados a igual distancia (10 a 20 m) del vértice y enterrados a unos 70 cm de profundidad.

La figura 408 representa una señal de 1.er orden; para el 2.° y 3.er orden se emplean señales semejantes, pero de distintas dimensiones según indica el cuadro siguiente:

Orden	Grosor del hito	Altura del hito	Anchura de la losa	Espesor de la losa
I.	0,30 m	0,90 m	0,75 m	0,10 m
II.	0,16	0,90	0,60	0,10
III.	0,16	0,90	0,30	0,10

Además se emplean también hitos más pequeños, de 0,15 m de grosor por 0,5 m de altura, sin losa enterrada, aunque con el clavo incrustado.

Los hitos se orientan de modo que la inscripción *TP* que llevan grabada mire hacia el Sur.

Las figuras 409 y 410 representan, a escala 1 : 10, las señales piramidales para los vértices de 3.er orden; en estas pirámides, la altura es doble del lado de la base ($h = 2a$), y actualmente se hacen más agudas ($h = 3a$), con objeto de reducir la extensión del

terreno ocupado por ellas, con lo cual se obtiene la economía correspondiente en la adquisición o expropiación del mismo.

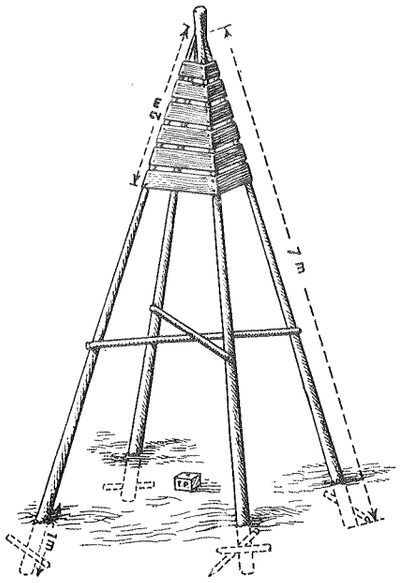


Fig. 409 (1 : 10)
Altura total, 6 m sobre el suelo. La cruceta diagonal dista de 2,0 a 2,5 m del suelo

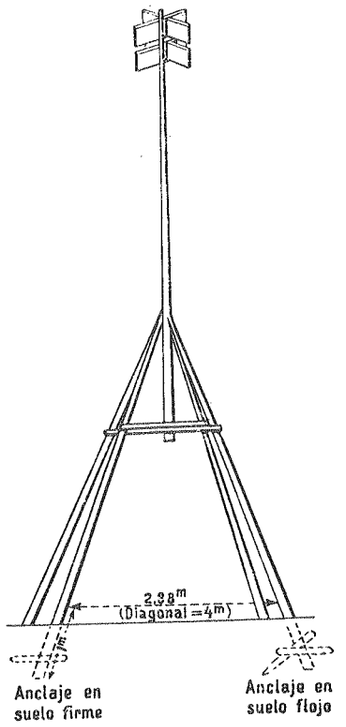


Fig. 410 (1 : 10)

La altura de la pirámide representada en la figura 409 es de 6 m sobre el suelo, y la longitud de la diagonal de su base (sobre el suelo) es de 2,0 m. En la figura 410, la diagonal de la base de la pirámide es de 4 m: en esta señal se ve, en la parte anterior de la izquierda, el modo de sujetarla en terreno compacto o duro, y en la de la derecha, la sujeción necesaria cuando el terreno es suelto o blando.

En la figura 411 se ve el modo de centrar y nivelar estas señales piramidales, de manera que el vértice (centro de la piedra o mojón) caiga verticalmente bajo el extremo *P* de la señal; lo mejor es centrar la señal antes de poner el mojón o hito, y para ello se toman dos direcciones, que, como indica la figura, deben coincidir con las norte-sur y este-oeste. Se empieza por fijar la NS; hecho esto, se clavan, en dirección transversal a la NS, dos reglas *AA'* y *BB'* (por medio de puntas, tornillos, etc.), se pone en estación el teodolito, en la dirección sur y a distancia igual a dos o tres veces la altura PC_0, y se refiere verticalmente el punto *P* sobre las dos

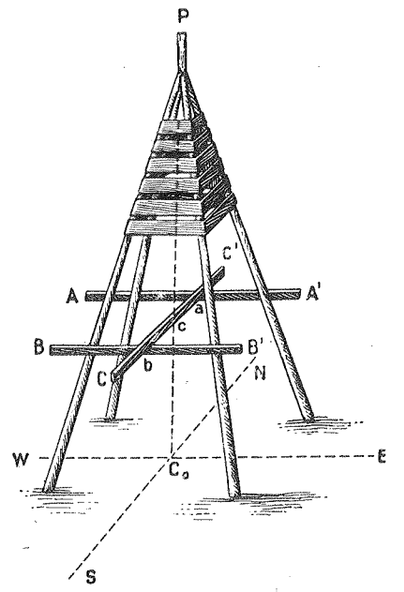


Fig. 411

reglas AA' y BB', marcando los puntos de proyección a y b (en las dos posiciones del anteojo). Se coloca entonces, sobre ab, una tercera regla perfectamente derecha CC', se pone el teodolito en dirección oeste, y se proyecta el punto P en c, y finalmente, desde c, con una plomada, se determina el punto C_0 donde ha de colocarse el mojón.

Este procedimiento, en el cual las tres reglas A, B, C deben colocarse horizontales, es muy recomendable, pero supone el llevar siempre las tres reglas, de las cuales la tercera, CC', debe ser perfectamente derecha; en vez de ellas, pueden emplearse dos estacas

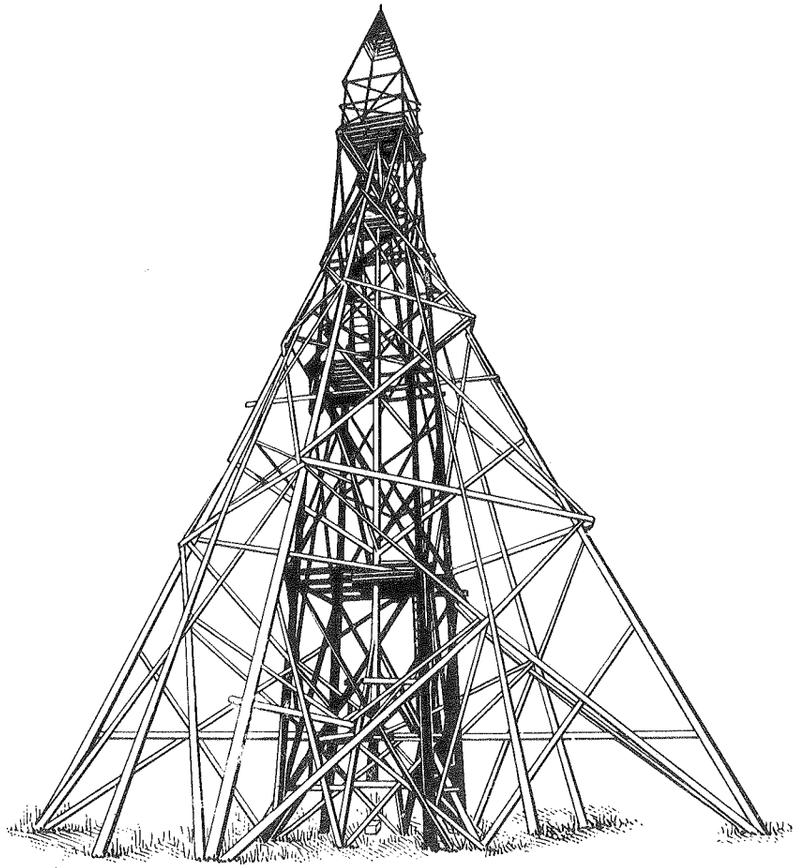


Fig. 412. — Señal y torre de observación construída en 1891 por Otto

que se clavan en el suelo y sobre las cuales se coloca una cuerda bien tensa (sistema empleado en Mecklenburg) o recurrir a los medios auxiliares que se crean más convenientes según los casos.

En la figura 412 se ven la señal y torre de observación de un vértice de primer orden de la red de Hannover, correspondiente al número 4 de la figura 397. La altura del vértice de esta torre es de 31,0 m, y la plataforma de instalación del teodolito está a 25,7 m sobre el suelo.

En los levantamientos topográficos alemanes se emplean también, oficialmente, los mojones con losa enterrada (fig. 408) y otros medios auxiliares para referir los vértices, como el clavo de pared representado en la figura 413, a escala 1 : 4, que se clava horizontalmente en el zócalo de las construcciones, como se hace con las señales de nivelación. El vértice es el centro de una varilla S que puede entrar en la cabeza saliente del clavo.

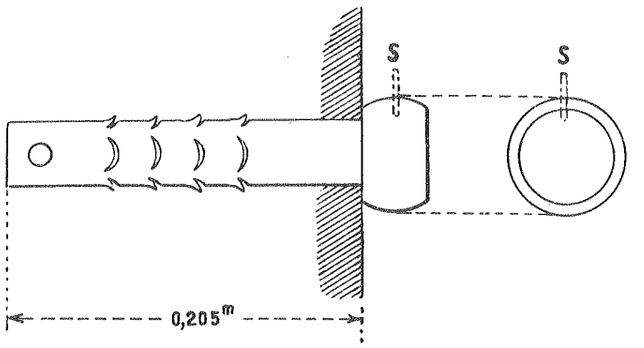


Fig. 413. — Clavo empotrado en una fachada (1 : 4)

Los clavos son señales excéntricas que se refieren al vértice superior de la torre o edificio en que se encuentran, por medio de proyecciones o de las mediciones necesarias en cada caso.

Expropiación de la zona de defensa de los vértices. En Prusia, cada vértice lleva una zona de expropiación alrededor, igual, por lo menos, a dos metros cuadrados, en forma de un círculo de 0,79 m de radio.

Referencias bajo tierra. La losa debajo del mojón (fig. 408), la piedra con el plomo empleada en Mecklenburg (fig. 406), el tubo de barro cocido T por debajo del hito de basalto (fig. 400), sirven de referencias para el caso de pérdida de la señal exterior, pero estas referencias no deben emplearse solas, sino siempre en combinación con señales bien visibles y fácilmente accesibles.

Equipo del observador. El equipo de un operador de campo, para el señalamiento y observación de vértices de 3.er orden, es el siguiente:

1. Un teodolito (fig. 320) con caja corriente y otra caja más grande, enguatada interiormente, para los transportes largos; un trípode con caperuza de cuero, un nivel, una plomada, etc.
2. Instrumento de proyección o centrado (especie de teodolito pequeño, con caja).
3. Útiles de protección: una tela de goma para proteger el instrumento de la lluvia; uno o dos quitasoles; dos paños grandes de tela fuerte, de unos tres metros cuadrados cada uno, para resguardarse del sol y del viento.
4. Reglas: dos reglas de a metro, una cinta metálica y varias reglas y miras.
5. Material de gabinete: bolso de cuero con el cuaderno de campo, transportador, papel, tinta, pluma, lápices, etc.
6. Herramientas, en un saco de cuero: clavos, serrucho, hacha, escoplo, mordazas de torno, limas, grapas, barrenas, puntas en un saquito de cuero.

Los dos paños grandes indicados anteriormente se sujetan en la pirámide y sirven para resguardarse del sol y del viento.

§ 88. Medición de ángulos

Para las triangulaciones de 1.er orden, debe colocarse el teodolito sobre un pilar de observación; en cambio, para los demás órdenes se emplea un trípode corriente. La plataforma del trípode se pone aproximadamente horizontal, haciendo uso para ello de un nivel esférico; de este modo se evita que en el curso de la observación pueda resbalar el teodolito sobre la plataforma. Cuando hace sol, se resguarda el aparato con una sombrilla.

El procedimiento corriente para observar los ángulos en todas las triangulaciones, excepción hecha de la de 1.er orden, consiste en lo siguiente: se miran los vértices de que se trate, yendo de izquierda a derecha, y se leen, para cada uno de los vértices visados, los dos nonios o microscopios del teodolito; a continuación se da la vuelta de campana al anteojo y se repiten las visuales y las lecturas dobles, pero dando la vuelta en sentido contrario, es decir, de derecha a izquierda. De este modo se tienen cuatro lecturas para cada visual, de las cuales se halla el promedio. La serie de observaciones hechas en el mismo sentido se llama una *vuelta de horizonte,* es decir, que para obtener el promedio anterior, se dan dos vueltas de horizonte. Generalmente se dan más de dos vueltas (cuatro, seis, ocho, etc.), pero variando a cada par de vueltas el punto del limbo sobre que se empiezan a contar los ángulos, de modo que los acimutes resulten medidos en partes diferentes del limbo.

Si sólo se van a hacer dos recorridos de dos vueltas de horizonte cada uno, se varía el limbo al terminar la segunda vuelta, en $180° : 2 = 90°$, y si se han de hacer cuatro recorridos, se varía el limbo en $180° : 4 = 45°$, de modo que el punto inicial, sobre el limbo, variará a cada par de vueltas de la manera siguiente: 0°, 45°, 90°, 135°. Así, mientras un nonio recorre de 0° a 135°, el otro pasa de 180° a 315°. También se puede variar el limbo al pasar de una vuelta de horizonte a la siguiente, para conseguir mejor aún la eliminación de los errores de división: esto se hace cuando sólo se dan dos vueltas de horizonte, para evitar errores groseros de lectura.

Estas mediciones se llaman «observaciones de acimutes», para distinguirlas de las «observaciones de ángulos» que se refieren a la medición de un solo ángulo determinado por dos visuales.

En la página siguiente damos un ejemplo numérico de medición de acimutes correspondiente a dos series de dos vueltas de horizonte cada una. Con relación a este problema conviene tener en cuenta las observaciones siguientes:

Columna (1). En las dos series entra, como punto observado, el centro de estación (banderola); en el párrafo 89 veremos el modo de hacer el cálculo para reducir al centro. Por estar tan próximo éste del teodolito (distancia = 0,799 m) no se puede mirar con el anteojo, sino sólo a simple vista por encima del mismo, siguiendo la dirección de su eje, o haciendo la puntería con el dispositivo-alidada (placa con agujero y botón) que ordinariamente llevan los anteojos, análogo al de las armas de fuego (fig. 317). En estas lecturas puede haber desviaciones o diferencias de 5′, cosa sin importancia tratándose de tan cortas distancias. Si se puede enfocar el centro sacando todo lo posible el ocular, se deja la observación del mismo para el final de cada vuelta de horizonte (antes de dar la vuelta de campana al anteojo), como se ve en el ejemplo propuesto, con objeto de no entorpecer la observación de los demás puntos, que se hace con el ocular en posición normal.

Columna (2). La primera lectura 62° 40′ 40″ de la primera serie es arbitraria, es

Estación: Wasserturm, 25 agosto 1891, sobre pilar de observación

Vértices visados	Anteojo a la derecha		Anteojo a la izquierda		Suma	Promedio	Media reducida	Observaciones
	Nonio I	Nonio II	Nonio I	Nonio II				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Vuelta I (origen en 0°)								
Burg.	62° 40′ 40″	242° 40′ 30″	242° 41′ 00″	62° 41′ 00″	3′ 10″	62° 40′ 47,5″	0° 00′ 00,0″	Situación de la estación Wasserturm. en la figura 416
Hochschule	87 32 20	267 32 40	267 33 00	87 32 40	10 40	87 32 40,0	24 51 52,5	
Ägidius.	138 20 10	318 20 10	318 20 50	138 20 30	1 40	138 20 25,0	75 39 37,5	
Willmer	183 26 10	3 26 00	3 26 30	183 26 20	25 00	183 26 15,0	120 45 27,5	
Banderola (izquierda)	299 55 20	119 55 40	119 58 40	299 58 00	27 40	299 56 55,0	237 16 07,5	$e = 0{,}799$ m, ver figura 416
id. (derecha)	310 49 20	130 49 30	130 46 10	310 45 40	30 40	310 47 40,0	248 6 52,5	
Comprobación	4 00	4 30	6 10	4 10	8 50	4 42,5	9 57,5	
						−6×0 47,5		
Vuelta II (origen en 90°)								
Burg.	152 40 50	40 40	332 41 10	41 00	3 40	152 40 55,0	0 0 00,0	Promedio de las dos vueltas: 0° 0′ 0,00″
Hochschule	177 32 30	32 30	357 33 0	32 50	10 50	177 32 42,5	24 51 47,5	
Ägidius.	228 20 20	20 10	48 20 50	20 40	2 00	228 20 30,0	75 39 35,0	24 51 50,00
Willmer	273 26 10	26 10	93 26 30	26 30	25 20	273 26 20,0	120 45 25,0	75 39 36,25
Banderola (izquierda)	29 50 0	56 20	209 54 10	53 40	14 10	29 53 32,5	237 12 37,5	120 45 26,25
id. (derecha)	40 44 0	43 10	220 47 20	47 30	22 00	40 45 30,0	248 4 35,0	237 14 22 } 242° 40′ 3″
								248 5 44 }
Comprobación	3 50	9 00	3 00	2 10	8 00	9 30,0	4 00,0	
						−6×0 55,0		

decir, en una posición cualquiera del limbo; pero la primera lectura de la segunda serie debe corresponder ya al cambio de sitio del limbo, o sea que, en nuestro caso, como sólo se hacen dos series de dos vueltas cada una, este cambio ha de ser de unos 90°, por lo cual esta lectura será de $62^c\ 40' + 90^\circ = 152^\circ 40'$ aproximadamente.

Columna (3). Generalmente no se anotan los grados correspondientes a las lecturas hechas con el nonio II, que se encuentran en las columnas (2) y (4). En el ejemplo propuesto hemos registrado también los grados en las lecturas del nonio II en la primera vuelta de horizonte; pero los hemos suprimido en la segunda vuelta.

Columnas (4) y (5). Estos números corresponden a la primera media vuelta, con el anteojo en posición invertida, y observando en sentido de rotación contrario al de aquélla.

Columnas (6) y (7). Puede obtenerse la media de maneras distintas: o hallando la media correspondiente a cada media vuelta y después obtener el promedio de estas medias, o bien hallando la suma de todas las lecturas, como se ve en las columnas (6) y (7), pero prescindiendo de los grados y decenas de minutos y sumando solamente los minutos sobrantes, como se ve, por ejemplo, 3′ 10″, en la primera línea; la división por 4 se hace con toda facilidad mentalmente, obteniéndose $\frac{3'\,10''}{4} = 0'47{,}5''$; para hacer más fácil y segura esta división se emplean tablas auxiliares, como la tabla V del Apéndice de este tomo, siendo muy útil llevar un ejemplar de las mismas en la libreta de campo.

Columna (8). El primer valor de las medias reducidas es más o menos arbitrario; ordinariamente se toma igual a 0° 0′ 0″ y después se resta el primer valor de la columna (7) de todos los siguientes, para ir obteniendo los de la columna (8); en el ejemplo actual se han calculado las medias de las dos vueltas, partiendo del valor inicial 0° 0′ 0″ para el vértice Burg.

Columna (9). En «Observaciones» se reseñan los vértices observados, representando sus señales, y se dibuja un croquis, orientado con una brújula de bolsillo, para después hacerlo con más precisión. Cuando hay que hacer el croquis más detallado, no basta la columna de «Observaciones» del registro de campo y entonces se hace un croquis más grande (fig. 416) empleando un transportador adecuado. En caso necesario se anotan la temperatura, visibilidad y cuantos detalles se crean precisos.

Advertencia general. El teodolito a que corresponden los datos numéricos de la página anterior es del tipo del representado en la figura 316 (pág. 286), es decir, de nonios, por lo cual las lecturas se hacen con una aproximación de 10″.

Después de la observación a que se refiere el cuadro anterior, se hizo otra con un teodolito provisto de microscopios lectores (fig. 321), obteniéndose los siguientes resultados:

Kunst	266°	52′	4,79″
Burg	284	20	25,08
Hochschule	309	12	11,96
Christus	322	8	13,06
Kreuz	345	1	27,67
Markt	351	23	44,50
Hoftheater	351	57	50,50
Ägidius	0	0	0,00
Waterloo	2	1	49,50
Zion	23	32	31,80
Willmer	45	5	44,21

				Distancias
Ägidius	0°	0′	0″	
Referencia SE	92	4	16	1,623 m
» W	188	13	10	2,366
» N	258	42	16	1,400
Centro C	167	0	24	0,799

Mediante la comprobación de sumas, se ve si están bien hechas las sumas de las columnas (6) y (7). Para calcular las medias reducidas, se resta, de cada número de

la columna (7) la lectura inicial, con lo cual, restando de la suma de esta columna seis veces la lectura inicial, se tiene la suma de la columna (8).

Si se dan más de dos vueltas, se toma el acimut de la banderola (centro) sólo en las dos primeras, y la media reducida correspondiente se toma como media definitiva.

Cuando sólo se dan dos vueltas, se calculan, en la misma libreta de campo, las medias reducidas; para más de dos, se escribe aparte cada vuelta y se halla su correspondiente media.

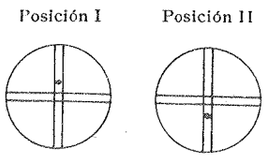
El esquema anterior sirve también para las lecturas hechas con microscopios. Si se emplean tornillos micrométricos, no sólo se lee la división de la izquierda, sino también la de la derecha, con lo cual se tienen dos líneas o renglones para cada enfilación, o bien se consignan los segundos arriba y abajo de una sola línea, cuando no se calcula mentalmente el promedio de las dos enfilaciones y se anota como *una* sola lectura.

Cuando hay que tener en cuenta el error de aumento de los microscopios (pág. 301), hay que introducir la oportuna variación en el registro de campo, y lo mismo para la lectura del doble segundo.

Número de visuales y hora mejor para la observación. No deben visarse muchos puntos desde cada vértice, seis como máximo, y si la observación se hace desde torres altas, no debe pasarse de cuatro visuales, por la imposibilidad de conservar perfectamente inmóvil el instrumento durante mucho tiempo. Para acoplar diferentes vueltas se eligen uno o dos puntos principales, que se observan en todas ellas. Como en las triangulaciones de tercer orden y en las topográficas hay que observar generalmente desde cada estación de diez a veinte vértices, se acoplan las diferentes vueltas tomando un mismo punto de mira como punto principal para todas ellas.

Las horas más adecuadas para la observación varían de unos climas a otros; en general, las horas mejores son las primeras de la mañana y las últimas de la tarde; en el centro del día, sobre todo, en tiempo caluroso, las imágenes carecen de la quietud necesaria y el movimiento ascensional del aire caliente dificulta y falsea las observaciones.

Verticalidad de los hilos del retículo. El retículo debe estar de modo que su línea media vertical pase por el punto de mira, antes y después de dar la vuelta de campana al anteojo, lo cual se consigue haciendo girar el tubo portaocular y moviendo éste en el sentido conveniente. El punto de mira no debe enfilarse de modo que coincida con el centro de la cruz filar, sino que quede un poco por encima o por debajo de este centro. Las instrucciones topográficas alemanas dan la siguiente regla (figs. 414 y 415): en la posición I del anteojo se enfila el objeto de modo que quede a cierta altura sobre el centro de la cruz filar, y en la posición II, el punto se lleva a igual distancia por debajo de dicho centro. A primera vista parece excesiva esta precaución, pues si los hilos no son exactamente verticales y se mantiene el punto siempre encima del centro de la cruz filar, se tiene en las posiciones I y II una variación en sentido acimutal, que por ser causa de una diferencia constante entre I y II puede considerarse como despreciable. Ahora bien, esta regla tiene su justificación teórica, que consiste en que para las visuales muy inclinadas, el efecto del error de colimación (según lo expuesto en el § 78) no es el mismo para la dos posiciones del anteojo, si no se sigue la regla indicada en las figuras 414 y 415 cuando los hilos del retículo no son exactamente verticales; también sirve esta regla para compensar el error constante de colimación.



Figs. 414 y 415
Campo visual con cruz filar

Orientación de las visuales. En el ejemplo de la página 363 hemos calculado la reducida media tomando para un vértice 0° 0′ 00″, lo cual, realmente, no es necesario. Lo más sencillo es, para cada estación, tomar un punto de referencia cuya orientación se hace igual a 0° 0′ 00″; pero reporta más ventajas aún tomar para el punto de referencia una orientación aproximada a la suya verdadera, cosa fácil de conseguir disponiendo de un mapa de la región en que se opere. También puede emplearse una brújula, siendo suficiente que dé la orientación o rumbo con 1° de aproximación. También puede hacerse uso de la orientación de los mojones de los vértices, cuando éstos tienen sus caras dirigidas respectivamente a los cuatro puntos cardinales.

El pequeño trabajo que supone la orientación aproximada de las visuales, queda más que compensado con la claridad que después se obtiene en todos los estados y croquis.

Método de repetición. Puede aplicarse también el método de repetición, que ha de reportar ciertas ventajas en las triangulaciones de lados cortos (§ 83, pág. 346); los ángulos pueden medirse, para todos los vértices, referidos a un punto principal, o ir midiendo los ángulos adyacentes, cuya suma total ha de ser igual a 360°, descubriéndose así cualquier error de cierre (§ 8). También pueden tomarse los ángulos formados por las visuales dirigidas a ciertos puntos, de modo que su suma sea igual al ángulo formado por dos direcciones fijas que sirven de enlace.

§ 89. Reducción de los ángulos al centro de la estación

Sucede con frecuencia que no es posible poner en estación el teodolito en el vértice mismo desde donde se debería observar, y en este caso, esta posición excéntrica del teodolito se llama estación fuera de centro; en la figura 416 tenemos un ejemplo de esta clase, donde el verdadero vértice es el centro de la torre *C*, en el cual hay clavada una banderola para servir de punto de mira desde los demás vértices, haciéndose la estación correspondiente a *C* en otro punto *P*, materializado en este ejemplo por un pilar cilíndrico de 0,4 m de diámetro, sobre el cual se monta el teodolito para observar los vértices indicados por sus respectivas visuales en la figura 416.

Como *centro de estación* se toma el punto *C* en que el eje de la banderola corta a la superficie en que está clavada, y hay que calcular los ángulos formados por las rectas que unen el punto *C* con los demás vértices, teniendo como dato los ángulos medidos desde *P* correspondientes a los mismos vértices. A esta operación se llama *reducción al centro de la estación.*

Para resolver este problema se visan, desde *P*, todos los vértices, y además, la banderola *C*, anotando los ángulos respectivos. Por tener el asta de la banderola 138 mm de diámetro, se enfilan sus dos bordes, el derecho y el izquierdo, y se toma el promedio de las dos lecturas: claro está que cuando la distancia entre *P* y *C* es muy pequeña (menor de 1 m) no puede mirarse con el anteojo, sino que se visa con el puntero que hay sobre éste; la distancia entre el centro del pilar, o sea, entre el centro *P* del teodolito y el eje de la banderola *C*, resulta, en nuestro caso, igual a 0,799 m, medida directamente con una regla.

Por presentarse muchas veces el caso de estacionar fuera de centro, consideraremos con algún detenimiento esta operación estudiando primero los dos casos que pueden ocurrir ($\varepsilon < 180°$ y $\varepsilon > 180°$) correspondientes a las figuras 417 y 418, para llegar después a una fórmula general que comprenda a ambos.

En estas figuras, *S* es el punto sobre que está centrado el teodolito (correspondiente al pilar *P* de la figura 416), *C* es el centro al cual hay que reducir las observaciones, *M* es

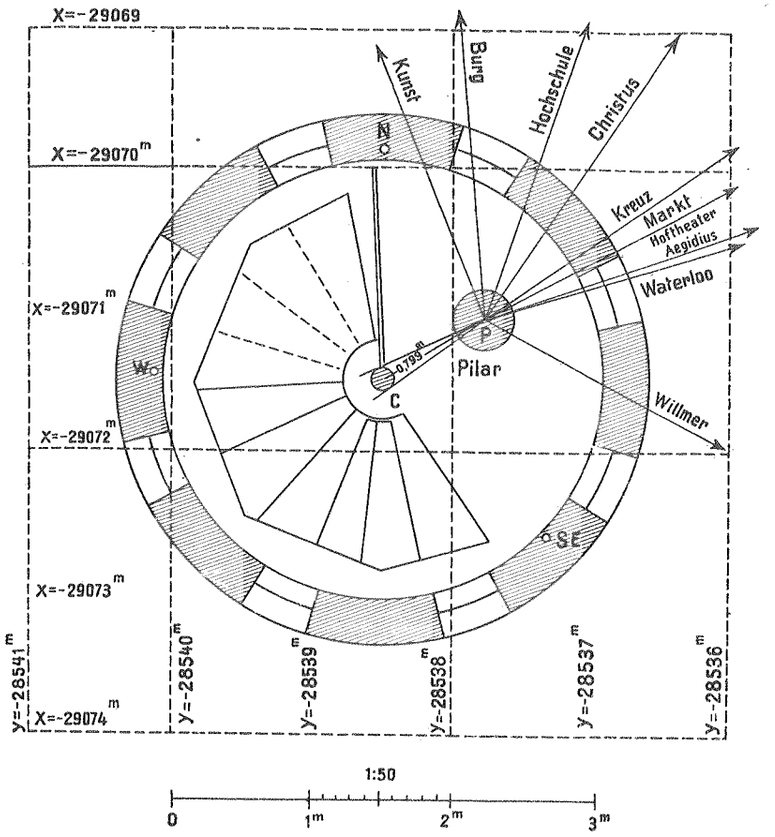


Fig. 416. — Croquis de la estación hecha en el vértice «Wasserturm» (Escala 1 : 50)

un punto de mira, $SC = e$ es la excentricidad, $MC = s$ es la distancia del punto de mira al centro, y ε es el acimut del punto *M*, contado desde el centro.

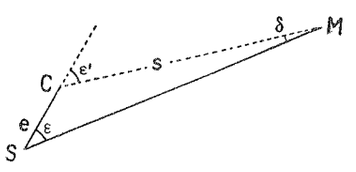


Fig. 417. — Reducción al centro de estación: $\varepsilon < 180°$

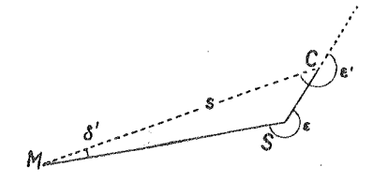


Fig. 418. — Reducción al centro de estación: $\varepsilon > 180°$

En la figura 417 se tiene:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \delta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{e}{s}\operatorname{sen}\varepsilon$$

y en la figura 418:

$$(360° - \varepsilon') = (360° - \varepsilon) + \delta' \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\delta' = \frac{e}{s}\operatorname{sen}(360° - \varepsilon).$$

Ahora bien, por ser e muy pequeño comparado con s, resulta:

$$\delta = \frac{e}{s}\rho \operatorname{sen}\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \delta' = -\frac{e}{s}\rho \operatorname{sen}\varepsilon,$$

y para los dos casos se tiene, en general:

$$\varepsilon' \quad \varepsilon = \frac{e}{s}\rho \operatorname{sen}\varepsilon. \tag{1}$$

Los elementos e y ε pueden, con frecuencia, medirse directamente, como en el ejemplo anterior (fig. 416), y en estos casos la reducción se llama directa, habiendo otros en que no es posible proceder del mismo modo (§ 90). La distancia s puede calcularse de antemano, ya que para estas reducciones no es necesario obtenerla con gran precisión.

En la tabla de la página 369 resumimos todas las operaciones y cálculos referentes a una reducción al centro. Como «ángulos observados» figuran los promedios del ejemplo anterior (pág. 363), tomando como origen (acimut 0° 0′ 0″) el vértice Ägidius. Esta tabla corresponde a las instrucciones oficiales alemanas sobre levantamientos topográficos y catastrales.

Para calcular las coordenadas de la estación excéntrica, hay que determinar el valor de $\alpha + \delta$ para la visual dirigida al centro: en nuestro caso, el rumbo del rayo visual dirigido del teodolito al centro es 238° 24′ 19″, y, por lo tanto, el rumbo del centro hacia el teodolito será este mismo sumándole o restándole 180°, es decir, $\alpha_0 = 58°\ 24'\ 19''$, que con la excentricidad e dará los valores de $e \operatorname{sen}\alpha_0$ y $e\cos\alpha_0$ que servirán para hallar las coordenadas de la estación excéntrica en función de las del centro C.

Centro C	$y_c = -25538{,}488$	$x_c = -29071{,}474$
$e = 0.799$ con $\alpha_0 = 58°\ 24'\ 19''$ da	$+\ 0{,}681$	$+\ 0{,}419$
Pilar de observación P	$y = -25537{,}807$	$x = -29071{,}055$

Del mismo modo se pueden también calcular las coordenadas de las tres referencias SE, W y N (fig. 416), en función de sus acimutes y distancias referidos a P, tales como se consignaron en la página 363:

Referencia SE	$-25537{,}346$ m	$-29072{,}614$ m
» W	$-25540{,}135$ »	$-29071{,}484$ »
» N	$-25538{,}506$ »	$-29069{,}845$ »

Con las coordenadas calculadas para los puntos C, P, SE, W y N se puede ya dibujar el croquis completo, tal como está representado en la figura 416.

En el ejemplo numérico de la página 369 sólo se han reducido al centro cuatro visuales, que son las que se ven en la figura 397, partiendo del vértice 2 (Wasserturm), mientras que en la página 364 se tienen otras siete visuales más. Puede ser necesario reducir al centro todas estas visuales, aunque no siempre es preciso hacerlo así, pues, por ejemplo, en las triangulaciones para planos de población se puede prescindir de reducir al centro las visuales que sólo sirven, por intersección directa, para fijar torres, etc., refiriendo aquéllas al pilar de observación (fuera de centro) como si se tratara de un vértice independiente, para el cual se hace un croquis aparte. De este modo se puede ahorrar mucho trabajo, en los planos de población, pues sólo el hallar las distancias para la reducción al centro (cosa no siempre fácil de deducir de planos antiguos) da tanto trabajo como el cálculo de las coordenadas de las torres, etc., determinadas por intersección, con sus acimutes no reducidos al centro.

Reducción al centro. Estación Wasserturm, Linden

Puntos observados Distancia Ángulos observados $-\alpha_0 \quad \delta \quad +(360° - \alpha_0)$	P_0 = Centro $e = 0{,}799$ m $\alpha_0 = 167°\ 0'\ 24''$ $+\ 192°\ 59'\ 36''$	P_1 = Ägidius ($s_1 = 2392$ m) $\alpha_1 = 0°\ 0'\ 0{,}00''$ $+\ 192°\ 59'\ 36''$	P_2 = Willmer ($s_2 = 4202$ m) $\alpha_2 = 45°\ 5'\ 44{,}21''$ $+\ 192°\ 59'\ 36''$	P_3 = Burg ($s_3 = 4105$ m) $\alpha_3 = 284°\ 20'\ 25{,}08''$ $+\ 192°\ 59'\ 36''$	P_4 = Hochschule ($s_4 = 2354$ m) $\alpha_4 = 309°\ 12'\ 11{,}96''$ $+\ 192°\ 59'\ 36''$
$\varepsilon = \alpha - \alpha_0$		$192°\ 59'\ 36''$	$238°\ 5'\ 20''$	$117°\ 20'\ 1''$	$142°\ 11'\ 48''$
$\log \operatorname{sen}\varepsilon$		9.35186_n	9.92884_n	$9\ 94858$	9.78742
$\log s$		3.37870	3.62344	$3\ 61335$	$3\ 37178$
$\log \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{s}$		5.97316_n	6.30540_n	6.33523	6.41564
$\log e$	9.90255				
$\log \rho$	5.31443	5.21698	5.21698	5.21698	5.21698
$\log \delta = \log \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{s} e\rho$		1.19014_n	1.52238_n	1.55221	$1\ 63262$
δ en segundos $\pm$		$-\ 15{,}49''$	$-\ 33{,}30''$	$+\ 35{,}66''$	$+\ 42{,}92''$
Ángulos observados α (arriba)	$167°\ 0'\ 24''$	$0°\ 0'\ 0{,}00''$	$45°\ 5'\ 44{,}21''$	$284°\ 20'\ 25{,}08''$	$309°\ 12'\ 11{,}96''$
Corrección $\delta \pm$		$-\ 15{,}49$	$-\ 33{,}30$	$+\ 35{,}66$	$+\ 42{,}92$
Acimut del centro $\alpha + \delta$	$167\ \ 0\ 24$	$359\ 59\ 44{,}51$	$45\ \ 5\ 10{,}91$	$284\ 21\ \ 0{,}74$	$309\ 12\ 54{,}88$
Corrección constante γ	$+\ 15$	$+\ 15{,}49$	$+\ 15{,}49$	$+\ 15{,}49$	$+\ 15{,}49$
Resultado $\alpha + \delta + \gamma$	$167\ \ 0\ 39$	$0\ \ 0\ \ 0{,}00$	$45\ \ 5\ 26{,}40$	$284\ 21\ 16{,}23$	$309\ 13\ 10{,}37$
Rumbo	$71\ 23\ 40$	$71\ 23\ 39{,}74$	$71\ 23\ 39{,}74$	$71\ 23\ 39{,}74$	$71\ 23\ 39{,}74$
Acimut	$238\ 24\ 19$	$71\ 23\ 39{,}74$	$116\ 29\ \ 6{,}14$	$355\ 44\ 55{,}97$	$20\ 36\ 50{,}11$

Estas dos últimas líneas (Rumbo y Acimut) no pertenecen a la reducción al centro propiamente dicha.

Cuando sólo se trata de dos visuales, se suele hacer la reducción al centro empleando una fórmula especial, deducida de la figura 419, en que l, I corresponden a la izquierda y d, D, a la derecha. Por ser siempre un ángulo igual a la diferencia entre dos acimutes, aplicando dos veces la fórmula (1) de reducción al centro, se tiene la fórmula de reducción de dicho ángulo. El ángulo observado α' (fig. 419) se puede escribir del siguiente modo: $\alpha' = D - I$, y aplicando a D y a I la fórmula de reducción al centro (1), tenemos, para reducción del ángulo α:

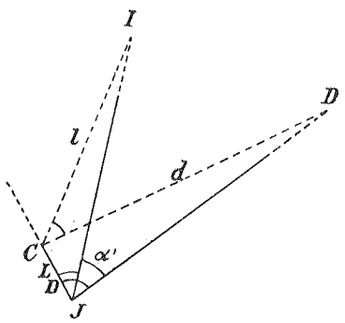


Fig. 419

$$\alpha - \alpha' = -\frac{e\rho}{l}\operatorname{sen} l + \frac{e\rho}{d}\operatorname{sen} D. \qquad (2)$$

Reducción al centro de un punto de mira. También para los puntos visados es frecuente hacer la reducción al centro.

En la figura 420, P' es un punto visado en la determinación de ángulos, y P un punto próximo, al cual hay que referir después la observación de estos ángulos.

Si llamamos e a la distancia PP', que en este caso es la excentricidad, s a la distancia entre P' y el vértice o estación S, y ε al ángulo en P, el pequeño ángulo en S será:

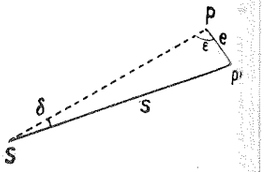


Fig. 420

$$\delta = \frac{e}{s}\rho \operatorname{sen} \varepsilon. \qquad (3)$$

Este ángulo δ se resta del acimut de SP' para tener el de SP, cuando P' cae a la derecha de SP, y se suma en el caso contrario.

Si la distancia que se conoce no es la SP', sino la SP, y no puede tomarse $SP = SP'$, se tiene:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{e \operatorname{sen} \varepsilon}{PS - e\cos\varepsilon}, \qquad \text{o sea} \qquad \delta = \frac{e \operatorname{sen} \varepsilon}{PS - e\cos\varepsilon}\rho. \qquad (4)$$

La reducción al centro de los puntos visados se puede calcular con arreglo al mismo formulario que para la reducción al centro de las estaciones (pág. 369), pues sólo difieren en un cambio de signo.

Comprobación de los cálculos. La reducción al centro debe comprobarse, siendo el mejor procedimiento el consistente en repetir nuevamente los cálculos; muy ventajoso es el empleo de tablas especiales, como las de Seiffert, que dan el logaritmo de la función $Z = \rho \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon$, escribiéndose la fórmula (1) de la página 368 del modo siguiente:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{e}{s}\frac{Z}{\cos\varepsilon}. \qquad (5)$$

Aquí queda sin comprobación el cociente $\frac{e}{s}$. Las tablas de Eggert dan el valor de $\frac{\rho}{s}\operatorname{sen}\varepsilon$, que basta multiplicar por la excentricidad e para tener $\varepsilon' - \varepsilon$.

También resulta muy fácil la determinación gráfica del producto $e \operatorname{sen} \varepsilon$, para lo cual basta dibujar el croquis a gran escala, y la distancia del extremo de e a la visual del punto observado da el valor del producto $e \operatorname{sen} \varepsilon$.

Si se toma la excentricidad $e = PC$ (fig. 416) como diámetro y se describe el círculo que pasa por sus extremos, el valor $e \operatorname{sen} \varepsilon$ lo da directamente la distancia de C al punto de intersección de cada visual con el círculo.

§ 90. Casos particulares de reducción al centro

La reducción al centro desempeña un papel muy importante en las triangulaciones, y en muchas estaciones la reducción al centro se lleva más trabajo que la observación misma de los ángulos. No siempre es posible, como antes se ha supuesto, medir directamente los elementos e y ε, siendo muchos los casos en que por razones muy diversas no se pueden determinar de modo directo estos dos valores. Hay veces en que ε puede medirse directamente, pero, en cambio, hay que determinar e indirectamente, como sucede en el caso representado en la figura 426, si se supone que (1) es el punto en que se hace estación y C el centro; en cambio, habrá que medir de modo indirecto tanto ε como e, si se supone que B sea el punto en que se hace estación y C el centro. Vamos, a continuación, a estudiar varios casos particulares que pueden servir de norma para todos los análogos.

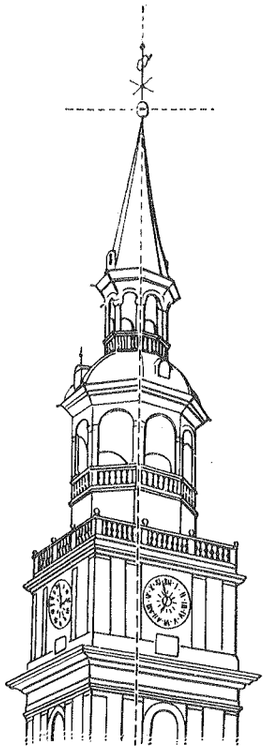


Fig. 421
Torre de Ägidius, en Hannover

Proyecciones. En las torres y construcciones semejantes tiene especial importancia la reducción al centro, porque casi nunca es posible observar directamente en la proyección del pico (veleta, remate de cúpula, etc.) de la torre, o medir directamente, en lo alto de la torre, los elementos e y ε. De todos los vértices de esta clase se debe hacer un croquis a gran escala (1 : 50) donde se representen todas las estaciones del teodolito, señales, etc., y de todas las torres o edificios de que se trate hay que procurarse dibujos o fotografías (como se ve en las figuras 421, 424 y 425).

La proyección (hacia arriba o hacia abajo) se puede hacer de muchos modos: aquí prescindiremos de la proyección directa hecha con plomada, y sólo consideraremos algunos casos en que se hace la proyección con el teodolito o con un instrumento especial parecido a los teodolitos, desde dos puntos, situados a ser posible de modo que las rectas que los unen con la torre o edificio sean entre sí perpendiculares.

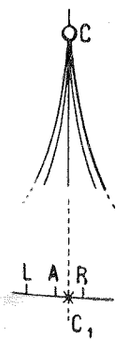


Fig. 422

Lo mejor es hacer esta proyección desde dos referencias, de modo parecido a como se hizo al tratar de las señales piramidales de vértices (fig. 411).

La proyección directa a voces y señales con la mano, etc., puede hacerse en distancias no superiores a 100 m y para alturas de hasta 50 m (como se hizo con la torre de Ägidius, en Hannover, figura 421); la punta C de la torre (fig. 422) se proyecta primero de modo aproximado sobre una regla colocada bajo la cúpula de la torre, obteniéndose así un punto A; pero no es posible situar el punto A exactamente en la vertical de C con *una* sola posición del anteojo, hallándose siempre al medir con exactitud el ángulo hori-

La línea Ägidi... mate C, una corrección AC_1, que se convierte de angular en ... a que está el teodolito. Esta distancia puede obtenerse con gran aproximación en la mayoría de los casos, pero también puede prescindirse de ella mediante cierto artificio, que consiste en colocar en el punto A, y en otros dos más (uno a su derecha y otro a su izquierda), tres plomadas rígidas L, A y R, a distancias conocidas unas de otras ($LA = AR = 10$ cm) y en hallar no sólo el ángulo horizontal entre C y A, sino también el ángulo entre L y R, con lo cual se puede deducir el segmento AC_1, mediante una simple proporción. La regla LAR sirve aquí de mira.

el pentágono de ...

Dentro de ... temas de co... y Celle pa... pero pr... cerca ... 28 ...

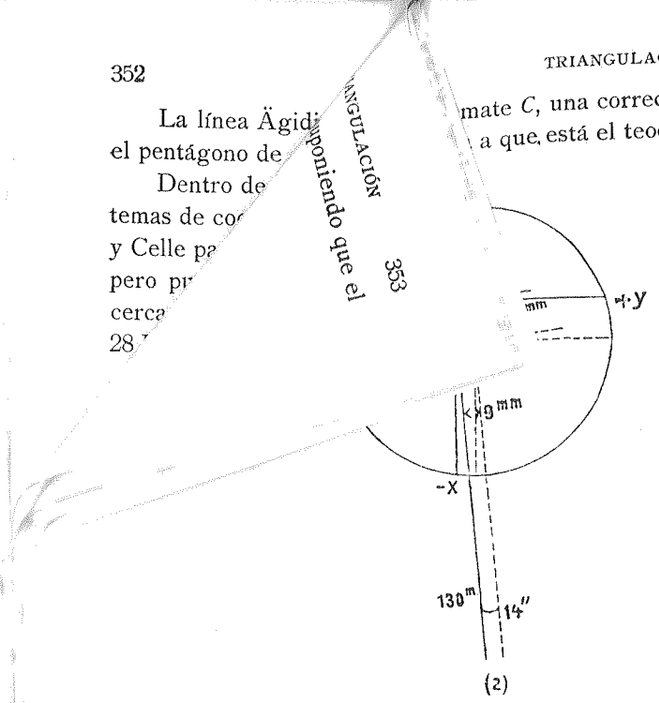


Fig. 423. — Detalle de la figura 426

Para puntos menos altos se puede hacer la proyección directamente con un teodolito bien nivelado (con sólo mover el anteojo de arriba hacia abajo), o leyendo sobre una mira o regla horizontal.

Como ejemplo de esta clase de proyecciones para situar la estación en la vertical del punto observado, consideraremos lo hecho por el autor en la Hochschule (Escuela Superior) de Hannover. La figura 424 es un dibujo de la torre hecho a mano, la figura 425 es una fotografía de la misma y la 426 es el croquis, a escala 1 : 2000. En el piso superior de la torre se fijó una plancha de hierro de 40 cm de diámetro, como base para el teodolito, representado en la figura 423 por su centro T; el problema consistía en proyectar verticalmente sobre esta plancha la punta C de la torre. Para ello se colocó en T una regla vertical, que se observaba, a través de las ventanas F (fig. 425) desde dos puntos del suelo (1) y (2) (fig. 426), situados respectivamente a 105 m y 130 m de distancia de T. Colocando el teodolito en estos puntos determinamos los pequeños ángulos horizontales entre el remate C y la mira T, resultando ser los siguientes:

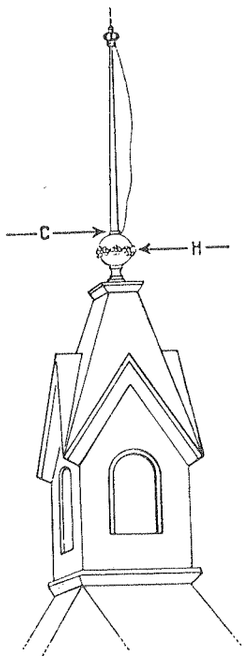


Fig. 424. — Dibujo, a mano, de la parte superior de la figura 425

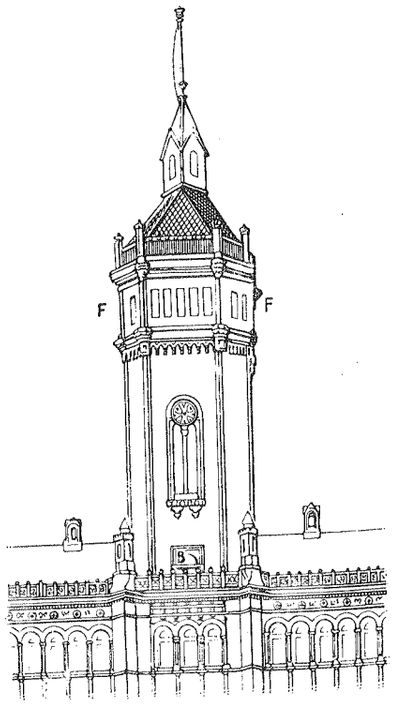


Fig. 425. — Vértice de la triangulación «Hochschule», según una fotografía

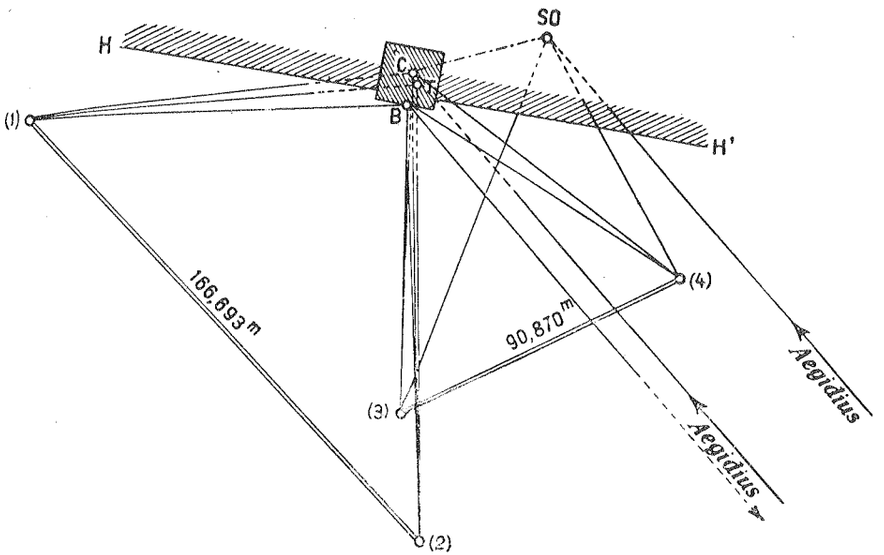


Fig. 426. — Plano de los contornos de la estación «Hochschule», a escala 1 : 2000

$$C\,(1)\ T = 1'\ 7''$$
$$C\,(2)\ T = 0'\ 14''.$$

Con las distancias (1) $T = 105$ m y (2) $T = 130$ m, se calcularon las correcciones lineales:

$$\frac{67''}{\rho}\,105\text{ m} = 0{,}034\text{ m} \qquad \frac{14''}{\rho}\,130\text{ m} = 0{,}009\text{ m}.$$

Hecho esto, y mirando desde T, con una alidada, hacia los puntos (1) y (2), se tomó, con una regla, perpendicularmente a las direcciones correspondientes, el valor de dichas correcciones lineales, o sea, 34 mm y 9 mm (fig. 423), a izquierda o a derecha según la posición del ángulo de corrección; a estas distancias, 34 mm y 9 mm, se trazaron paralelas a las direcciones $T\,(1)$ y $T\,(2)$ respectivamente, obteniendo, por intersección de estas paralelas, el punto deseado C, proyección de la punta o remate de la torre. Para más seguridad, se hizo también la proyección desde un tercer punto. El punto C quedó señalado de manera permanente sobre la plancha por medio de un taladro hecho en la misma.

Las distancias $(1)\,T$ y $(2)\,T$ pueden deducirse, aproximadamente, de otros planos o mapas, o determinarse por medio de un triángulo (1) (2) T, midiendo una base (1) (2), como en la figura 426, en la cual las distancias $(1)\,T$ y $(2)\,T$ se han calculado trigonométricamente.

Se ocurre preguntar si desde fuera se ve bien el interior de una torre oscura: en el caso que estamos considerando (fig. 425), con cielo despejado se veía bien, pero con cielo nublado había que emplear una bujía de estearina, que servía de punto de mira. También se puede iluminar el interior de la torre con un espejo (heliógrafo) colocado en una de sus ventanas, o emplear señales constituídas por discos transparentes provistos de lámparas situadas por detrás.

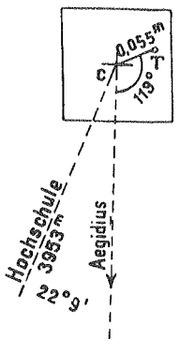


Fig. 427

La figura 427 representa otro caso muy frecuente, que corresponde a la proyección de la señal de la figura 410. La tablilla superior de esta señal, situada a 11,5 m sobre el suelo, se centraba y proyectaba desde dos lados, dando el punto T (fig. 427), al nordeste del centro C del hito o mojón, distante de éste 0,055 m en una dirección CT, que formaba con la dirección o visual a Ägidius un ángulo de 113°, de donde resultaba que la excentricidad $CT = 0{,}055$ m formaba un ángulo de $113° + 22° 9' = 135° 9'$ con la visual a la Hochschule (véase figura 397), y puesto que este vértice está a 3953 m de distancia de C, se tiene como valor de la paralaje para la Hochschule el siguiente:

$$\varepsilon = \frac{0{,}055}{3953}\,\rho \operatorname{sen} 135° 9' = 2{,}02'',$$

es decir, que del acimut de la Hochschule medido desde T hay que restar 2,02″ para reducirlo al centro C de estación.

Medición de triángulos auxiliares. Vamos ahora a ocuparnos de la determinación indirecta de los elementos e y ε, para lo cual nos referiremos a lo hecho en la reducción al centro en el vértice de la Hochschule en la triangulación para el plano de población de Hannover, hecha por nosotros en el año 1891.

La torre principal de la Escuela Superior Técnica es un vértice de dicha triangulación, cuyo centro de estación está sobre la cubierta, en el polo superior de la bola de arranque del asta terminal. Como puntos de observación en esta torre se tienen una placa de hierro T situada en el piso más alto de la torre (fig. 425), desde la cual puede observarse a través de las ventanas F, que tienen 30 cm de anchura, y además otra placa de hierro B empotrada en la balaustrada de un balcón que mira al Sur, situado a media altura de la torre. Se trata de reducir estos dos puntos B y T al centro de estación C. Aquí se presenta otra cuestión, pues la torre de Ägidius no se ve desde la torre de la Hochschule, aunque desde aquélla se ve otra (la SO) de las cinco torres de la Escuela Superior, por lo cual también hay que reducir al centro C el punto SO (figura 426). Estas tres reducciones se hicieron con auxilio de las dos bases que se ven en la figura 426.

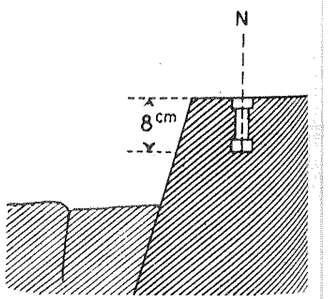


Fig. 428. — Perno empotrado en una acera para señalar un punto en el suelo

La base (1)(2) está tomada de tal modo que desde (1) y (2), a través de las ventanas estrechas de la torre, se ve el centro de ésta, y la bola C puede proyectarse directamente hacia abajo, del modo indicado en la figura 423, aunque ahora lo haremos de manera diferente. También la plancha B se ve desde los puntos (1) y (2); pero la torre SO no es visible desde el punto (1),

por lo cual se necesita una segunda base (3)(4) que enlace SO con C, y que sirva para determinar o fijar por su parte los puntos B y C.

Los puntos en el suelo se señalaron por medio de las referencias ordinarias (fig. 428), consistentes en un perno de hierro que lleva un taladro vertical para alojar una aguja N con una banderola de papel. Por lo demás, se emplean las mismas miras de precisión, trípodes para centrar y nivelar, etc., que en las poligonales, que ya veremos más adelante.

A continuación damos el resultado final de la medición de los ángulos (promedio de cuatro vueltas de horizonte):

Estación B

Ägidius	0° 0′ 0,0″		
Extremo de la base	(4) 343 3 24,8	} 59° 5′ 28,3″	
»	(3) 42 8 53,1		
»	(2) 39 16 35,5	} 91° 41′ 48,1″	
»	(1) 130 58 23,6		

Estación (1)		Estación (2)		Estación (3)		Estación (4)	
C	0° 0′ 0,0″	C	0° 0′ 0,0″	(4)	0° 0′ 0,0″	(3)	0° 0′ 0,0″
T	0 1 6,8	T	0 0 13,8	C	297 25 30,5	B	58 8 25,5
B	1 55 28,5	(1)	320 51 39,5	B	297 14 9,8	C	60 2 56,2
(2)	51 18 5,0	B	359 47 6,8	SO	319 22 4,5	SO	87 57 56,8

(1)

Se calculan primero los dos triángulos 1, 2, B y 3, 4, B, que cierran, respectivamente con 8″ y 16″ de error, y con las dos bases, de 166,693 y 90,870 m, se obtienen los demás lados, a saber:

$$1\text{-}B = 104{,}780\text{ m}, \quad 2\text{-}B = 126{,}579\text{ m}, \quad 3\text{-}B = 89{,}955\text{ m}, \quad 4\text{-}B = 94{,}168\text{ m}. \tag{2}$$

Vamos ahora a hacer el cálculo de coordenadas referidas al vértice B; la dirección de B hacia Ägidius se toma como eje positivo de las abscisas; las coordenadas del punto B y de Ägidius son

$$\text{Ägidius } y = -23271{,}813 \qquad x = -28308{,}395 \tag{3}$$
$$\text{Placa } B \text{ en el balcón } y = -24709{,}910 \qquad x = -26871{,}891 \tag{4}$$

De estos valores se deduce, por Trigonometría, el acimut de la línea B-Ägidius:

$$(B\text{-Ägidius}) = 134° 58' 5{,}7''. \tag{5}$$

Llevando este valor a los ángulos medidos desde B, según el cuadro (1), se tiene, para la resolución de los dos triángulos 1, 2, B y 3, 4, B, los siguientes valores de dichos ángulos en B y los logaritmos de las distancias correspondientes:

Ägidius	134° 58′ 5,7″	
(4)	118 1 27,9	$\log B\text{-}4 = 1{,}973904$
(3)	177 7 1,5	» $B\text{-}3 = 1{,}954025$
(2)	174 14 39,9	» $B\text{-}2 = 2{,}102360$
(1)	265 56 30,7	» $B\text{-}1 = 2{,}020278$

Las coordenadas de los cuatro extremos de las bases resultan así ser:

	y	x		y	x
(1)	−24814,427	−26879,306	(3)	−24705,386	−26961,732
(2)	−24697,216	−26997,831	(4)	−24626,783	−26916,136

Estas coordenadas dan, de conformidad con la figura 426, los siguientes acimutes y distancias:

$(1, 2) = 135° 19' 9{,}5''$	$\log 1, 2 = 2{,}221918$
$(3, 4) = 59\ 52\ 28{,}2$	$\log 3, 4 = 1{,}958422$

Para los cuatro triángulos de bases 1-2 y 3-4 y de vértices C, T y SO, se tienen los siguientes logaritmos de sus lados, deducidos de los ángulos adyacentes a la base:

1-C 2,022101	3-C 1,970736	1-T 2,021136	3-SO 2,065195
2-C 2,114273	4-C 1,981215	2-T 2,114160	4-SO 1,879182

Así se pueden ya calcular las coordenadas de los tres vértices C, T y SO, obteniendo las de C dos veces, como perteneciente a dos triángulos:

	y	x		y	x
C, para 1-2	— 24709,780	— 26868,340	T	— 24709,768	— 26868,373
C » 3-4	— 24709,776	— 26868,352	SO	— 24667,075	— 26853,032
Promedio para C	— 24709,778	— 26868,346			

De aquí resultan las siguientes diferencias:

$$yC - yT = -0{,}010\text{ m}, \qquad xC - xT = +0{,}027\text{ m}. \tag{6}$$

Con estas diferencias se puede referir el punto C al T (fig. 423), aunque estos valores no responden exactamente a la figura 423, pues están determinados con referencia a los puntos (1) y (2), cosa que no ocurre en dicha figura. Pero prácticamente la coincidencia es bastante exacta.

De las coordenadas de B y C se puede deducir también la distancia entre estos puntos y el acimut de B a C:

$$BC = 3{,}547\text{ m} \qquad (BC) = 2^\circ\ 8'$$

y como, según (5),

$$(B\text{-Ägid.}) = 134^\circ\ 58'$$

resulta:

$$\text{ángulo } CB\text{-Ägid.}, \ \varepsilon = 132^\circ\ 50', \qquad \text{con} \qquad e = 3{,}547\text{ m}. \tag{7}$$

Con esto quedan reducidos a C todos los acimutes observados desde C, según el esquema de cálculo de la página 369.

Para aclarar el significado del vértice auxiliar SO, volvamos a la figura 397 relacionándola con la 426, teniendo en cuenta que desde Ägidius se ve el vértice SO, pero no el centro C. Para reducir al centro las direcciones Ägid. - SO y Ägid. - C, se parte de las coordenadas de Ägidius, de SO y de C antes halladas, obteniéndose:

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Ägid.} - SO) = 316^\circ\ 13'\ 38{,}90'' \\ (\text{Ägid.} - C) \ = 315^\circ\ 2'\ 29{,}36''\end{array}\right\} \quad \text{Diferencia} = 1^\circ\ 11'\ 9{,}54''. \tag{8}$$

Este valor hay que restarlo del acimut de SO observado desde Ägidius, para reducirlo al centro C.

A continuación damos las coordenadas calculadas para todos los puntos excéntricos de la figura 426, además de las definitivas del centro C:

	y	x		y	x
Ägidius	— 23271,813	— 28308,395	Hochschule E	— 24655,712	— 26879,772
Hochschule C	— 24709,769	— 26868,278	» (1)	— 24814,419	— 26879,236
» SO	— 24667,066	— 26851,965	» (2)	— 24697,210	— 26977,764
» B	— 24709,901	— 26871,823	» (3)	— 24705,379	— 26061,664
» S'	— 24709,920	— 26871,922	» (4)	— 24626,775	— 26916,070

(9)

Reducción al centro mediante puntos auxiliares. Otro procedimiento indirecto para determinar los elementos de reducción al centro, consiste en valerse de puntos auxiliares,

como se ve en la figura 429. La torre C tiene alrededor una galería estrecha en la cual se fijan cuatro puntos; estos puntos están designados en la figura 429 con los cuatro puntos cardinales N, E, S y W. Sobre estos puntos puede disponerse una plancha fuerte para colocar el teodolito en los pilares de la balaustrada. En el caso particular representado por esta figura, no se veía la punta de la torre desde estos cuatro puntos, a causa de la forma de su remate.

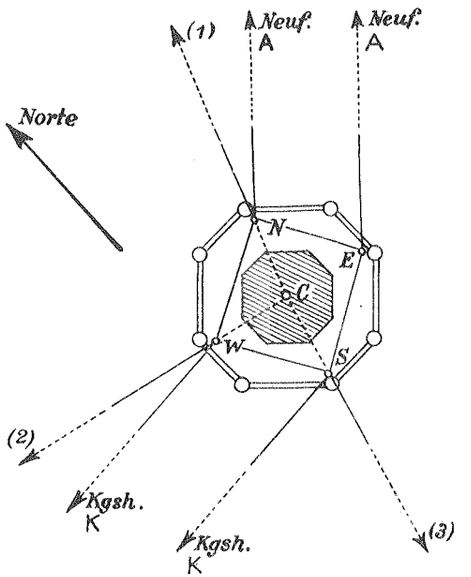


Fig. 429

Para relacionar entre sí estos puntos auxiliares se empezó por medir al milímetro, con una cinta metálica, las cuatro distancias (lados del cuadrilátero determinado por los cuatro puntos). Para medir los cuatro ángulos de este cuadrilátero se empleó, para todos los puntos, un centrador óptico (§ 73), marcando éstos con agujas, que se hacían coincidir con la cruz filar de un teodolito pequeño, con anteojo de 10 aumentos.

De este modo quedó determinada la posición relativa de estos cuatro puntos excéntricos, quedando solamente el unirlos o referirlos al centro, para lo cual fué preciso medir una base auxiliar, como se hizo para el vértice «Hochschule» de que antes nos hemos ocupado. Como comprobación se hizo otra determinación de los elementos e y ε, consistente en hacer estaciones auxiliares (1), (2) y (3) en las rectas de unión del centro con las estaciones anteriores N, W y S (fig. 429); dichas estaciones auxiliares se establecieron primero haciendo uso de jalones; después, desde estos puntos provisionales se midió el ángulo determinado por la estación excéntrica correspondiente y el centro, conociéndose así la corrección necesaria para poner en la alineación el punto auxiliar. Volviendo a medir los ángulos se ve si es preciso variar otra vez el punto auxiliar, deduciendo el lugar exacto de su emplazamiento, del valor de los dos ángulos y de la distancia entre sus dos posiciones primeras.

De este modo se determinaron y señalaron los tres puntos (1), (2) y (3). La dirección CE no se marcó en el suelo por haber obstáculos que lo impedían.

Los tres puntos auxiliares permiten medir directamente los acimutes del centro C desde las estaciones excéntricas, y los de los vértices K y A (fig. 429).

A continuación damos los resultados obtenidos en esta medición:

Acimutes observados

Estación N	Estación E	Estación S	Estación W
(1) 0° 00′ 00″	S 0° 00′ 00″	(3) 0° 00′ 00″	K 0° 00′ 00″
A 25 05 44	N 90 50 19	K 68 19 06	(2) 14 56 21
E 134 11 23	A 161 43 41	W 132 26 15	N 154 52 42
W 220 48 32		E 225 39 60	S 244 16 12

(10)

Distancias medidas

$NE = 2{,}294$ m	$SW = 2{,}188$ m
$WS = 2{,}297$	$WN = 2{,}455$

(11)

Para hallar las coordenadas de una de las cuatro estaciones excéntricas, se parte de los acimutes observados desde el punto E, de los cuales pueden emplearse tres, correspondientes a puntos dados, para determinar E por intersección inversa. De este modo resultaron las siguientes coordenadas, redondeadas al decímetro:

$$E: \quad y = -48834{,}000\ \text{m} \qquad x = +35245{,}200\ \text{m}. \tag{12}$$

Las coordenadas del vértice A son:

$$A: \quad y = -46071{,}525\ \text{m} \qquad x = +39073{,}785\ \text{m}$$

y el acimut E - A resulta:

$$(E - A) = 35^\circ\ 48'\ 43''.$$

Ya así se tienen todos los datos necesarios para calcular las coordenadas de las cuatro estaciones excéntricas (véase § 107), obteniéndose los siguientes valores numéricos:

	y	x
E	$-48834{,}000$ m	$+35245{,}200$ m
S	$-48835{,}860$	$+35243{,}853$
W	$-48837{,}240$	$+35245{,}550$
N	$-48835{,}319$	$+35247{,}078$

(13)

El error angular de cierre de este cuadrilátero fué de $3'\,43''$, que después de repartido dió lugar a un error de cierre, en las coordenadas, de 1 mm y 2 mm. A causa de la pequeñez de las distancias, el error angular no tiene importancia alguna.

El centro C puede fijarse dos veces por intersección directa desde los tres puntos S, W, N, para lo cual se toman como alineaciones las obtenidas directamente para los vértices auxiliares (1), (2) y (3).

Desde los puntos S y W se obtiene:

$$C: \quad y = -48835{,}615\ \text{m} \qquad x = +35245{,}506\ \text{m}$$

y desde los puntos N y W, las coordenadas del centro C, en completo acuerdo con las anteriores, resultan ser:

$$C: \quad y = -48835{,}616\ \text{m} \qquad x = +35245{,}506\ \text{m}. \tag{14}$$

Las distancias entre los tres puntos S, W y N y el centro C se deducen de las coordenadas de los mismos, y la EC de las coordenadas de E y de C:

$$\begin{array}{ll} NC = 1{,}600\ \text{m} & SC = 1{,}672\ \text{m} \\ EC = 1{,}644 & WC = 1{,}626 \end{array} \tag{15}$$

Los acimutes del centro, tomados desde las estaciones excéntricas N, S y W se deducen directamente de los acimutes de los vértices auxiliares (1), (2) y (3). El acimut de C desde E, se deduce de las coordenadas (13) y (14):

$$(EC) = 280^\circ\ 43'\ 32'',$$

con lo cual quedan determinados los elementos de reducción al centro para las cuatro estaciones excéntricas.

Precisión en la reducción al centro. La reducción al centro debe hacerse con tal precisión que los errores que puedan atribuírsele resulten despreciables en comparación con los de medición o lectura de los ángulos, para lo cual, la excentricidad e se medirá con 1 mm de aproximación y el ángulo ε se determinará con toda exactitud.

Para las triangulaciones topográficas, con lados de unos 2 Km, a 1 mm corresponde un ángulo de $0{,}1''$, y en las triangulaciones geodésicas de 1.º y 2.º orden, a 1 mm corresponde sólo $0{,}01''$. Por esta razón no es preciso, en la práctica, tratándose de triangulaciones de lados largos, calcular la excentricidad con más de 1 cm de aproximación. De todos modos resulta pueril el pretender obtener mediciones con más de 1 mm de aproximación, y los errores inevitables no se eliminan con tomarse un trabajo excesivo y completamente inútil.

Empleo de las miras. Al reducir al centro sucede con frecuencia que a causa de la dificultad que se encuentra para proyectar o nivelar el punto de mira, no se puede medir directamente la distancia, y en estos casos se emplea con éxito una mira, como se ve en la figura 430. Si $PC = s$ es la distancia pedida, se coloca en C una regla o mira bien dividida $AB = a + b$, normalmente (a ojo) a CP, y se miden en P los ángulos α y β con toda exactitud: hecho esto se puede calcular la distancia s por el procedimiento de la intersección inversa (véase § 94), es decir, haciendo intervenir el ángulo auxiliar μ:

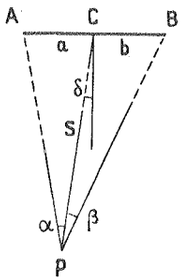


Fig. 430

$$s = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen} A = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen} B$$

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \left(\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\right) : \left(\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\right) = \operatorname{tg}\mu$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\cot(\mu + 45^\circ),$$

y por ser $A + B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cot(\mu + 45^\circ),$$

con lo cual se tienen ya $A + B$ y $A - B$, y por lo tanto A y B, y puede obtenerse nuevamente s como comprobación.

Ahora bien, cuando las dos partes AC y BC son iguales ($a = b$) y si la mira AB es aproximadamente perpendicular a CP se puede escribir con gran aproximación:

$$s = a\cot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

El cálculo exacto de s conduciría a la siguiente expresión:

$$s = a\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \frac{(\alpha-\beta)^2\cos 2\alpha}{8\rho^2\operatorname{sen}^4\alpha}\right).$$

Por ejemplo, si $a = b = 1$ m, $\alpha = 18^\circ\ 10'$, y $\beta = 17^\circ\ 50'$, es decir, $\alpha - \beta = 20'$, se tiene:

$$s = 3{,}0777\ \text{m} - 0{,}0012\ \text{m} = 3{,}0765\ \text{m}.$$

Según el estudio de los errores de estas determinaciones de distancias hecho por Krüger, si los dos ángulos α y β se miden con un error angular m, el error medio m_s de la distancia s estará dado por la siguiente fórmula:

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m}{\rho}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\sqrt{\operatorname{sen}^2 2A + \operatorname{sen}^2 2B},$$

donde $A = 90^\circ - (\alpha - \delta)$; $\quad B = 90^\circ - (\beta + \delta)$; $\quad \delta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} : \operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Una fórmula análoga sirve para el caso en que se tomen los acimutes de PA, PC y PB en una vuelta de horizonte. Krüger ha encontrado, al calcular una tabla correspondiente a este último caso, que la falta de simetría, expresada por el ángulo δ o por la diferencia $\alpha - \beta$, produce un rápido aumento del error medio de s para grandes valores de s. La determinación de acimutes está en condiciones más desfavorable que la de distancias, tratándose de bases cortas.

§ 91. Ejemplo de una triangulación

Como ejemplo de triangulación, en la cual se resuelven los distintos problemas enunciados, daremos el resultado de la triangulación hecha en el verano de 1887 en Linden.

Red principal. La red principal, que sirve de base a la de relleno, consiste en un hexágono, con un vértice central Wasserturm y la base Wasserturm-Ägidius, como se ve en la figura 431, a escala 1 : 80000.

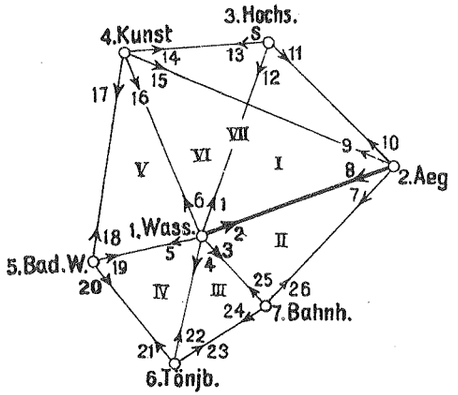


Fig. 431. — Triangulación de Linden (1887); red principal. Escala 1 : 80000

Los dos puntos Ägidius y Wasserturm, extremos de la base, tienen las siguientes coordenadas, en el sistema antiguo de Gauss, cuyo origen está en Göttingen:

	y	x	
Ägidius	− 13879,790 m	+ 93575,890 m	(1)
Wasserturm	− 16145,760	+ 92808,280	(2)
Distancia Ägidius-Wasserturm =	2392,456 m (log = 3,3788439)		(3)
Acimut » » =	251° 17′ 9,25″		(4)
o bien » Wasserturm-Ägidius =	71 17 9,25		

La observación de ángulos se hizo con el teodolito representado en la figura 320, de microscopios lectores, y en parte, con un teodolito repetidor, de nonios lectores. Después de hechas todas las reducciones al centro, resultaron los siguientes ángulos, referidos en cada vértice a una visual que se tomaba como origen, como se ve a continuación:

1. Wasserturm			
1. Hochschule . .	0°	0′	0,0″
2. Ägidius	50	46	49,1
3. Bahnhof . . .	114	33	55,4
4. Tönjesberg . .	171	50	12,6
5. Badenstedter Weg	239	14	13,7
6. Kunst . . .	317	40	15,8

2. Ägidius			
7. Bahnhof . . .	0°	0′	0,0″
8. Wasserturm . .	27	55	59,5
9. Kunst	70	37	5,4
10. Hochschule . .	91	34	51,4

3. Hochschule			
11. Ägidius	0°	0′	0,0″
12. Wasserturm . .	65	34	17,5
13. Kunst	133	30	53,7

4. Kunst			
14. Hochschule . .	0°	0′	0,0″
15 Ägidius	25	31	22,7
16. Wasserturm . .	69	43	46,7
17. Badenstedter Weg	101	31	53,8

5. Badenstedter Weg			
18. Kunst	0°	0′	0,0″
19. Wasserturm . .	69	45	48,8
20. Tönjesberg . .	130	44	39,8

6. Tönjesberg			
21. Badenstedter Weg	0°	0′	0,0″
22. Wasserturm . .	51	37	3,0
23. Bahnhof . . .	99	35	25,4

7. Bahnhof			
24. Tönjesberg . .	0°	0′	0,0″
25. Wasserturm . .	74	55	21,4
26 Ägidius	163	2	12,7

Por sustracciones sucesivas se van obteniendo los ángulos de todos los ocho triángulos (I a VIII) resultando los siguientes valores:

Cierres antes de compensar

I			
(1,2) =	50°	46′	49,1″
(8,10) =	63	38	51,9
(11,12) =	65	34	17.5
=	179°	59′	58,5″

II			
(2,3) =	63°	57′	6,3″
(7,8) =	27	55	59,5
(25,26) =	88	6	51,3
=	179°	59′	57,1″

III			
(3,4) =	57°	6′	17,2″
(22,23) =	47	58	22,4
(24,25) =	74	55	21,4
=	180°	0′	1,0″

IV			
(4,5) =	67°	24′	1,1″
(19,20) =	60	58	51,0
(21.22) =	51	37	3,0
=	179°	59′	55,1″

V			
(5,6) =	78°	26′	2.1″
(16,17) =	31	48	7,1
(18,19) =	69	45	48 8
=	179°	59′	58,0″

VI			
(6,1) =	42°	19′	44,2″
(12,13) =	67	56	36,2
(14,16) =	69	43	46,7
=	180°	0′	7,1″

VII			
(6,2) =	93°	6′	33,3″
(8,9) =	42	41	5,9
(15,16) =	44	12	24,0
=	180°	0′	3,2″

VIII			
(9,10) =	20°	57′	46,0″
(11,13) =	133	30	53,7
(14,15) =	25	31	22,7
=	180°	0′	2,4″

Además de estas ocho comprobaciones (de las cuales sólo siete son independientes entre sí) se tienen otras dos: la de suma de ángulos alrededor del vértice y la que proporcionan las diagonales del cuadrilátero I-VI-VII-VIII. En vez de considerar todos los triángulos con todos sus vértices, nos limitaremos a dar para la estación «Wasserturm» las correcciones y las direcciones corregidas, ya reducidas o referidas a la dirección *cero*.

Estación o vértice Wasserturm. Centro

	Direcciones observadas	Correcciones v	Correcciones $v - v_1$	Direcciones corregidas
1. Hochschule . .	0° 0′ 0,00″	− 0,67″	0,00″	0° 0′ 0,00″
2. Ägidius	50 46 49,10	− 0,72	− 0,05	50 46 49,05
3. Bahnhof	114 33 55,40	+ 0,26	+ 0,93	114 33 56,33
4 Tönjesberg . . .	171 50 12,60	− 0,61	+ 0,06	171 50 12,66
5. Badenstedter Weg	239 14 13,70	+ 0,73	+ 1.40	239 14 15,10
6. Kunst	317 40 15,80	+ 1,01	+ 1,68	317 40 17,48

las direcciones compensadas o corregidas, se obtienen los ángulos
ndose así la siguiente tabla de ángulos compensados, en un todo
mente dada para estos mismos ángulos sin compensar:

s triángulos después de hecha la compensación

	II		
(2,3) =	63°	57′	7,28″
(7,8) =	27	56	0,48
(25,26) =	88	6	52,25
	180°	0′	0,01″
	III		
(3,4) =	57°	6′	16,33″
(22,23) =	47	58	22,02
(24,25) =	74	55	21,65
	180°	0′	0,00″
	IV		
(4,5) =	67°	24′	2,44″
(19,20) =	60	58	52,67
(21,22) =	51	37	4,90
	180°	0′	0,01″
	V		
(5,6) =	78°	26′	2,38″
(16,17) =	31	48	9,07
(18,19) =	69	45	48 52
	179°	59′	59,97″
	VI		
(6,1) =	42°	19′	42,52″
(12,13) =	67	56	32,80
(14,16) =	69	43	44,67
	179°	59′	59,99″
	VII		
(6,2) =	93°	6′	31,57″
(8,9) =	42	41	7,49
(15,16) =	44	12	20.91
	179°	59′	59′97″
	VIII		
(9,10) =	20°	57′	43,43″
(11,13) =	133	30	52,81
(14,15) =	25	31	23,76
	180°	0′	0,00″

A continuación se calcula la conversión de las direcciones ya compensadas en acimutes, que se resumen en un cuadro para cada vértice, una vez conocido uno o más acimutes. Por ejemplo, para el vértice Wasserturm, cuya visual hacia Ägidius tiene el acimut conocido 71° 17′ 9,25″, se forma el siguiente estado:

Vértice Wasserturm. Centro

	Direcciones corregidas	Acimut conocido	Rumbo	Acimutes
1. Hochschule	0° 00′ 0,00″			20° 30′ 20,20″
2. Ägidius	50 46 49,05	71° 17′ 9,25″	20° 30′ 20,20″	71 17 9,25
3. Bahnhof	114 33 56,33			135 04 16,53
4. Tönjesberg	171 50 12,66			192 20 32,86
5. Badenstedter Weg	239 14 15,10			259 44 35,30
6. Kunst	317 40 17,48			338 10 37,68

El cálculo, para el segundo vértice, Ägidius, se hace con el acimut de partida Ägidius - Wasserturm; para el tercer punto, Hochschule, se conocen, por lo tanto, los acimutes de sus visuales a Wasserturm y a Ägidius.

Partiendo de las coordenadas de los dos extremos de la base (Wasserturm - Ägidius), se calculan por coordenadas todos los lados de la triangulación. Las coordenadas, en el sistema cuyo origen está en Göttingen, son las siguientes:

1. Wasserturm	$y = -16145{,}760$ m	$x = +92808{,}280$ m
2. Ägidius	$-13879{,}790$	$+93575{,}890$
3. Hochschule	$-15320{,}943$	$+95013{,}695$
4. Kunst	$-17010{,}553$	$+94967{,}919$
5. Badenstedter Weg	$-17431{,}505$	$+92575{,}620$
6. Tönjesberg	$-16457{,}328$	$+91384{,}373$
7. Bahnhof	$-15356{,}150$	$+92012{,}085$

En el cuadro de la página 384 damos el resumen definitivo de la triangulación, donde constan los acimutes observados, las correcciones, los acimutes definitivos y los logaritmos de las distancias. Los acimutes observados se dan ya orientados, de modo que con la corrección v dan directamente los acimutes definitivos. Por ejemplo, para el vértice Wasserturm, todos los acimutes observados van aumentados en el ángulo 20° 30′ 20,87″.

Las anteriores coordenadas y el cuadro de la página 384 dan el resultado final de la triangulación.

Fijación de puntos o vértices auxiliares. Partiendo de los ángulos y coordenadas de los siete vértices principales, se pueden fijar todos los puntos de relleno necesarios, como se ve en la figura 432 (a escala 1 : 40000), donde figuran los siete vértices principales y los secundarios o auxiliares: diez fijados por intersección directa y diez por intersección inversa. El estado de ángulos para cada vértice se hace como el siguiente, formado para el vértice Ägidius:

Ángulos en el vértice Ägidius

Vértice observado	Direcciones observadas	Acimut de origen	Rumbos	Acimut definitivo
Zuckerfabrik	0° 00′ 0,00″			221° 25′ 52,76″
Bahnhof	1 55 16,90	223° 21′ 08,77″	221° 25′ 51,87″	(223 21 09,66)
Zion	15 40 33,09			237 06 25,85
Waterloo	26 06 32,00			247 32 24,76
Kath Kirche	27 39 08,06			249 05 00,82
Wasserturm	29 51 16,40	251 17 09,25	221 25 52,85	(251 17 09,16)
Rathaus	32 26 48,25			253 52 41,01
Martin	37 05 35,72			258 31 28,48
Neustädter	63 13 09,44			284 39 02,20
Kunst	72 32 22,30	293 58 16,74	221 25 54,44	(293 58 15,06)
Marktturm	92 08 44,33			313 34 37,09
Techn. Hochschule S.	93 30 08,30	314 56 00,17	221 25 51 87	(314 56 01,06)
Christus	104 33 01,73			325 58 54,49
		Media:	221° 25′ 52,76″	

Los acimutes de origen están tomados del resumen definitivo (pág. 384), y de éstos y de las cuatro direcciones observadas correspondientes se deducen los cuatro rumbos, que a causa de los errores de los ángulos observados, no coinciden exactamente, por lo cual se halla el promedio, que sirve para calcular los acimutes definitivos.

Los cuatro acimutes entre paréntesis se diferencian de los correspondientes acimutes de origen, respectivamente en $-0{,}89''$, $+0{,}09''$, $+1{,}68''$ y $-0{,}89''$, que son las correcciones v que figuran en el cuadro de la página 384.

Es evidente que los acimutes calculados serán tanto más exactos cuanto mayor sea el número de acimutes de origen; efectivamente, designando con $\pm m$ el error medio de un ángulo observado, y suponiendo que el acimut de origen no tiene error alguno, tendremos que el error medio del promedio de los cuatro rumbos será (fórmula (6), pág. 12) $\pm \frac{m}{2}$, y para el error medio m_1 de un acimut calculado se tendrá, según la fórmula (10) de la página 11, la expresión:

$$m_1^2 = \frac{m^2}{4} + m^2 = \frac{5}{4} m^2.$$

Resultado definitivo de la triangulación (fig. 431)

	Angulos observados y orientados	Corrección	Acimutes compensados	Logaritmo de la distancia, log s
		1. Wasserturm		
1. Höchschule	20° 30′ 20,87″	− 0,67″	20° 30′ 20,20″	3.3719186
2. Ägidius	71 17 9,97	− 0,72	71 17 9,25	3.3788439
3. Bahnhof	135 10 16,27	+ 0,26	135 14 16,53	3.0497386
4. Tönjesberg	192 20 33,47	− 0,61	192 20 32,86	3.1636373
5. Badenstedter Weg	259 44 34,57	+ 0,73	259 44 35,30	3.1161512
6. Kunst	338 10 36,67	+ 1,01	338 10 37,68	3 3666752
		0,00		
		2. Ägidius		
7. Bahnhof	223° 21′ 9,66″	− 0,89″	223° 21′ 8,77″	3.3325617
8. Wasserturm	251 17 9,16	+ 0,09	251 17 9,25	3.3788439
9. Kunst	293 58 15,06	+ 1,68	293 58 16,74	3.5348234
10. Hochschule	314 56 1,06	− 0,89	314 56 0,17	3.3087206
		− 0,01		
		3. Hochschule		
11. Ägidius	134° 56′ 0,72″	− 0,54″	134° 56′ 0,18″	3.3087206
12. Wasserturm	200 30 18,22	+ 1,97	200 30 20,19	3.3719186
13. Kunst	268 26 54,42	− 1,43	268 26 52,99	3.2279460
		0,00		
		4. Kunst		
14. Hochschule	88° 26′ 52,75″	+ 0,26″	88° 26′ 53,01″	3 2279460
15. Ägidius	113 58 15,45	+ 1,32	113 58 16,77	3.5348234
16. Wasserturm	158 10 39,45	− 1,77	158 10 37,68	3 3666752
17. Badenstedter Weg	189 58 46,55	+ 0,20	189 58 46,75	3.3854369
		+ 0,01		
		5. Badenstedter Weg		
18. Kunst	9° 58′ 47,15″	− 0,37″	9° 58′ 46,78″	3.3854369
19. Wasserturm	79 44 35,95	− 0,65	79 44 35,30	3.1161512
20. Tönjesberg	140 43 26,95	+ 1.02	140 43 27,97	3.1871994
		0,00		
		6. Tönjesberg		
21. Badenstedter Weg	320° 43′ 29,10″	− 1,14″	220° 43′ 27,96″	3.1871994
22. Wasserturm	12 20 32,10	+ 0,76	12 20 32,86	3.1636373
23. Bahnhof	60 18 54,50	+ 0,38	60 18 54,88	3.1029559
		0,00		
		7. Bahnhof		
24. Tönjesberg	240° 18′ 55,36″	− 0,48″	240° 18′ 54,88″	3.1029559
25. Wasserturm	315 14 16,76	− 0,23	315 14 16,53	3.0497386
26. Ägidius	43 21 8,06	+ 0,72	43 21 8,78	3.3325617
		+ 0,01		

Si el peso de un ángulo observado se hace igual a la unidad, el peso de un acimut definitivo será $p_1 = \frac{4}{5}$.

Si se tienen r acimutes de origen, resultará:

$$p_1 = \frac{r}{r+1}.$$

Para un solo acimut de origen, los acimutes calculados tendrán el peso 0,5.

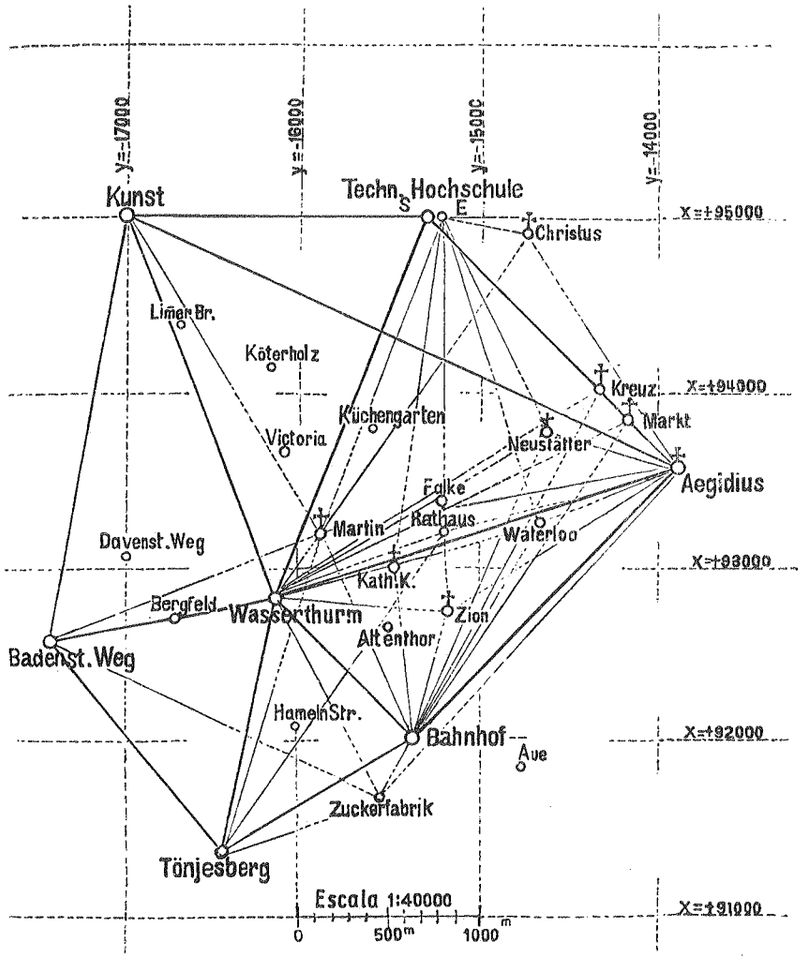


Fig. 432. — Triangulación de Linden, a escala 1 : 40000. La red principal tiene siete vértices; la de relleno diez vértices determinados por intersección directa y diez por intersección inversa. El sistema de coordenadas tiene su origen en Göttingen

En la figura 432 están representadas las visuales necesarias para la fijación de puntos por intersección directa; además hay diez puntos que se fijan por intersección inversa, cuyas visuales no están dibujadas. Para que se vea el método de cálculo correspondiente, resumiremos, sin entrar en detalles, la determinación de tres puntos: Zion, Viktoriastrasse Hochschule.

Resultado definitivo de la triangulación (fig. 431)

	Angulos observados y orientados	Corrección	Acimutes compensados	Logaritmo de la distancia, log s
		1. Wasserturm		
1. Höchschule	20° 30′ 20,87″	− 0,67″	20° 30′ 20,20″	3.3719186
2. Ägidius	71 17 9,97	− 0,72	71 17 9,25	3.3788439
3. Bahnhof	135 10 16,27	+ 0,26	135 14 16,53	3.0497386
4. Tönjesberg	192 20 33,47	− 0,61	192 20 32,86	3.1636373
5. Badenstedter Weg	259 44 34,57	+ 0,73	259 44 35,30	3.1161512
6. Kunst	338 10 36,67	+ 1,01	338 10 37,68	3 3666752
		0,00		
		2. Ägidius		
7. Bahnhof	223° 21′ 9,66″	− 0,89″	223° 21′ 8,77″	3.3325617
8. Wasserturm	251 17 9,16	+ 0,09	251 17 9,25	3.3788439
9. Kunst	293 58 15,06	+ 1,68	293 58 16,74	3.5348234
10. Hochschule	314 56 1,06	− 0,89	314 56 0,17	3.3087205
		− 0,01		
		3. Hochschule		
11. Ägidius	134° 56′ 0,72″	− 0,54″	134° 56′ 0,18″	3.3087206
12. Wasserturm	200 30 18,22	+ 1,97	200 30 20,19	3.3719186
13. Kunst	268 26 54,42	− 1,43	268 26 52,99	3.2279460
		0,00		
		4. Kunst		
14. Hochschule	88° 26′ 52,75″	+ 0,26″	88° 26′ 53,01″	3 2279460
15. Ägidius	113 58 15,45	+ 1,32	113 58 16,77	3.5348234
16. Wasserturm	158 10 39,45	− 1,77	158 10 37,68	3 3666752
17. Badenstedter Weg	189 58 46,55	+ 0,20	189 58 46,75	3.3854369
		+ 0,01		
		5. Badenstedter Weg		
18. Kunst	9° 58′ 47,15″	− 0,37″	9° 58′ 46,78″	3.3854369
19. Wasserturm	79 44 35,95	− 0,65	79 44 35,30	3.1161512
20. Tönjesberg	140 43 26,95	+ 1.02	140 43 27,97	3.1871994
		0,00		
		6. Tönjesberg		
21. Badenstedter Weg	320° 43′ 29,10″	− 1,14″	220° 43′ 27,96″	3.1871994
22. Wasserturm	12 20 32,10	+ 0,76	12 20 32,86	3.1636373
23. Bahnhof	60 18 54,50	+ 0,38	60 18 54,88	3.1029559
		0,00		
		7. Bahnhof		
24. Tönjesberg	240° 18′ 55,36″	− 0,48″	240° 18′ 54,88″	3.1029559
25. Wasserturm	315 14 16,76	− 0,23	315 14 16,53	3.0497386
26. Ägidius	43 21 8,06	+ 0,72	43 21 8,78	3.3325617
		+ 0,01		

Si el peso de un ángulo observado se hace igual a la unidad, el peso de un acimut definitivo será $p_1 = \frac{4}{5}$.

Si se tienen r acimutes de origen, resultará:

$$p_1 = \frac{r}{r+1}.$$

Para un solo acimut de origen, los acimutes calculados tendrán el peso 0,5.

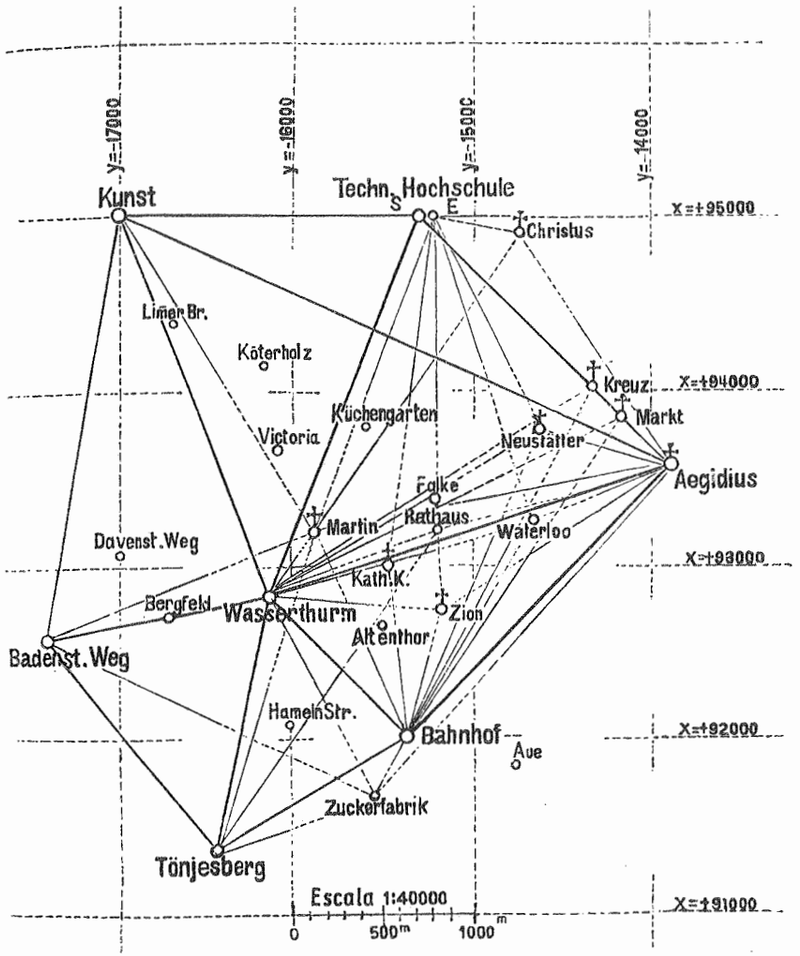


Fig. 432. — Triangulación de Linden, a escala 1 : 40000. La red principal tiene siete vértices; la de relleno diez vértices determinados por intersección directa y diez por intersección inversa. El sistema de coordenadas tiene su origen en Göttingen

En la figura 432 están representadas las visuales necesarias para la fijación de puntos por intersección directa; además hay diez puntos que se fijan por intersección inversa, cuyas visuales no están dibujadas. Para que se vea el método de cálculo correspondiente, resumiremos, sin entrar en detalles, la determinación de tres puntos: Zion, Viktoriastrasse Hochschule.

Intersección directa con compensación. El punto Zion (figs. 432 y 433) se determina por intersección, desde los cuatro vértices principales Bahnhof, Wasserturm, Hochschule y Ägidius, siendo los cuatro acimutes respectivos los siguientes:

1.	Desde	Bahnhof	=	13° 0′	22,2″
2.	»	Wasserturm	=	94 49	56,3
3.	»	Hochschule	=	178 5	0,8
4.	»	Ägidius	=	237 6	25,8

Con *dos* de estos acimutes se calculan las coordenadas de Zion (del modo que se verá en el párrafo siguiente, § 92), y de los cuatro acimutes se obtiene una compensación que se lleva a dicho cálculo.

En el § 102 veremos el modo de obtener gráficamente esta compensación.

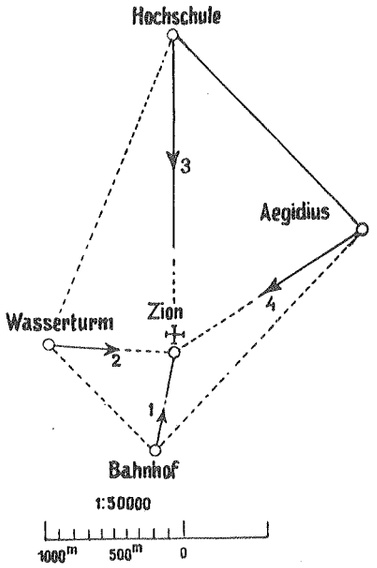


Fig. 433

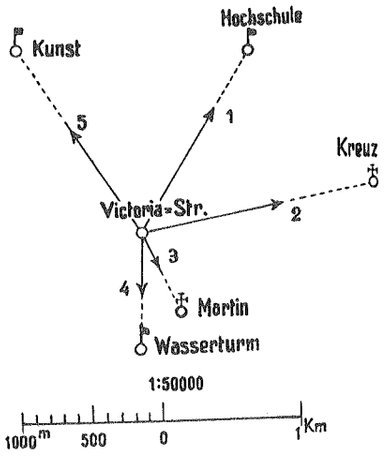


Fig. 434

Intersección inversa con compensación. El punto Viktoriastrasse (figs. 432 y 434) se determina, por intersección inversa, visando desde el mismo los cinco vértices siguientes, cuyos acimutes respectivos son los que siguen:

Hacia	Hochschule	0°	0′	0,0″
»	Kreuzturm	49	42	6,8
»	Martinturm	131	8	23,5
»	Wasserturm	156	40	42,8
»	Kunstturm	295	5	52,0

Las visuales representadas en la figura 434 son de dirección contraria a las de la figura 433.

De *tres* de estas direcciones, o de dos ángulos entre estas tres visuales a vértices conocidos, se pueden deducir las coordenadas de la estación, como veremos en el § 95, y para más de tres visuales puede ya hacerse una compensación y aplicar el método de los mínimos cuadrados. En el § 103 veremos el estudio gráfico de esta clase de fijación de puntos.

Aplicando los métodos de intersección directa e inversa se pueden ir determinando todos los puntos de relleno, como se ve en la figura 432. Una vez determinado un punto, se forma para éste el cuadro correspondiente de ángulos (pág. 383) y ya pueden orientarse los acimutes observados, utilizándose las visuales para otras intersecciones inversas.

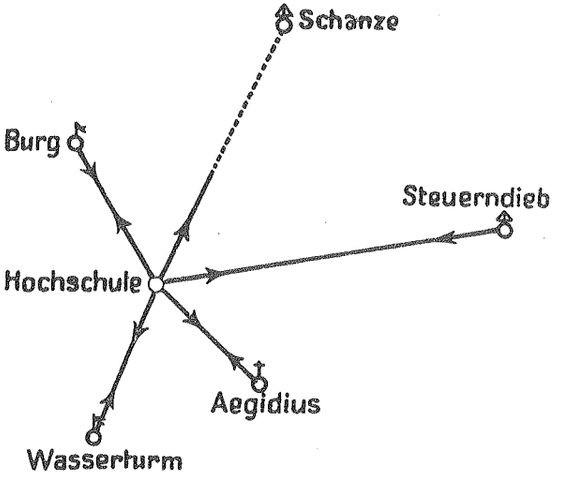


Fig. 435

Intersección mixta. También puede determinarse un punto por intersección directa e inversa. Como ejemplo, tomemos el vértice Hochschule en la red topográfica de la figura 397. Las visuales (del punto a los vértices y de los vértices al punto) son las indicadas en la figura 435, y los ángulos son los siguientes:

Hacia el punto:					Desde el punto:				
. . . . .					Hacia	Schanze	24°	15′	19,4″
Desde	Steuerndieb	259°	14′	15,1″	»	Steuerndieb	79	14	15,1
»	Ägidius	315	02	32,6	»	Ägidius	135	02	30,0
»	Wasserturm	20	36	50,0	»	Wasserturm	200	36	48,8
»	Burg	149	04	12,3	»	Burg	329	01	05,2

Con estos datos puede hacerse la compensación correspondiente, según el método de los mínimos cuadrados, y también gráficamente, como veremos en el § 103.

No entramos en detalles de cálculo, porque éste se reduce, o a una aplicación del método de los mínimos cuadrados, o a cálculos trigonométricos, que veremos más adelante; el objeto principal que nos hemos propuesto, a saber, dar una idea general sobre la observación y cálculo de una triangulación de lados cortos, ya está conseguido con lo hasta aquí expuesto.

§ 92. Intersección directa con dos visuales

Vamos ahora a ocuparnos de algunos problemas relacionados con las triangulaciones, ya esbozados en el § 86 y en el § 91, necesarios en muchos casos y para diversas aplicaciones.

Supongamos que se conozcan las coordenadas de los puntos A y B (fig. 436) y que haya que determinar las del punto P. Si de los tres ángulos α, β, γ, se pueden medir directamente siquiera dos, estamos en el caso estudiado en el § 86.

Supongamos además que no pueden medirse directamente los ángulos α y β, porque no se vean entre sí los puntos A y B; o bien que, aun cuando B se vea desde A y A desde B, no sea esto suficiente, sino que convenga apoyarse en otras visuales, AC, AD, BE, etc. Supongamos que los puntos C, D, E, etc., estén dados también por sus coordenadas, como los A y B; así pueden calcularse los acimutes de AC, AD, AB, BE, etc. y formar para los puntos A y B el cuadro de ángulos (véase página 383), del cual se deduce el acimut de AP y BP. De este modo queda planteado el problema en los términos siguientes: conocidas las coordenadas x_a y_a del punto A, las x_b y_b del punto B, y los acimutes de (AP) y (BP) hallar las coordenadas xy del punto P.

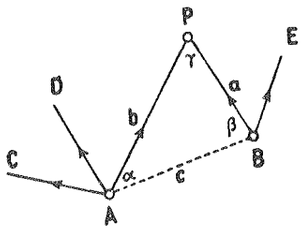


Fig. 436

Para resolver este problema se hace uso de las mismas ecuaciones empleadas en el problema fundamental (§ 86, pág. 352), es decir, se ordena el cálculo del modo siguiente, con referencia a la figura 437.

Datos:

$$x_a\, y_a, \quad x_b\, y_b \quad \text{y} \quad (AP), \quad (BP)$$

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad AB = c = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen}(AB)} \qquad \text{y también} \qquad c = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)}$$

$$(AB) - (AP) = \alpha, \quad (AP) - (BP) = \gamma, \quad (BP) - (BA) = \beta.$$

Comprobación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ley de los senos:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta = b \qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\alpha = a.$$

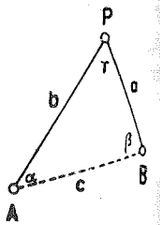


Fig. 437

Cálculo de las coordenadas:

$$y = y_a + b\operatorname{sen}(AP) \qquad y = y_b + a\operatorname{sen}(BP)$$
$$x = x_a + b\cos(AP) \qquad x = x_b + a\cos(BP)$$

Si sólo se tiene un acimut orientado en uno de los puntos, por ejemplo en el A (fig. 436), o sólo se ha medido en este punto el ángulo α, como segundo ángulo necesario para resolver el triángulo APB, no se toma el ángulo β, medido en el otro punto dado B, sino el ángulo γ en el punto P que se trata de fijar, con lo cual, ya se conoce también β y la solución del problema es la misma. Este sistema de fijación de puntos se llama de *intersección lateral*.

Tomemos, como ejemplo, la determinación del punto Zion desde Wasserturm y Bahnhof (figs. 432 y 433). Los acimutes de Zion, observados desde estos dos vértices, son, según se ha visto en la página 386:

Wasserturm · Zion $= 94°\,49'\,56{,}3''$
Bahnhof · Zion $= 13°\;\;0'\,22{,}2''$

Estos valores los tomamos con 1″ de aproximación, desapareciendo por lo tanto las décimas de segundo, y las coordenadas las aproximamos al centímetro, como se ve en el cálculo completo y detallado resumido en el cuadro siguiente:

P = Zion

A = Wasserturm, pilar		B = Bahnhof	
B Bahnhof	$y_b = -15356{,}15$		$x_b = +92012{,}08$
A Wasserturm	$y_a = -16145{,}08$		$x_a = +92808{,}70$
Diferencias	$y_b - y_a = +\;788{,}93$	x_b	$x_a = -\;796{,}62$

$\log(y_b - y_a)$	2.897038	$y_b - y_a$	2.897038	$x_b - x_a$	2.901251
$\log(x_b - x_a)$	2.901251 n	$\operatorname{sen}(AB)$	9.847368	$\cos(AB)$	9.851581
$\log\operatorname{tg}(AB)$	9.995787 n	AB	3.049670	AB	3.049670
$(AB) = 135°\,16'\,40\,5''$		$\log AB = \log c = 3.049670$			

(AB)	$135°\,16'\,40''$	(AP)	$94°\,49'\,56''$	(BP)	$13°\;\;0'\,22''$
(AP)	$94\;\;49\;\;56$	(BP)	$13\;\;0\;\;22$	(BA)	$315\;\;16\;\;40$
α	$40°\,26'\,44''$	γ	$81°\,49'\,34''$	β	$57°\,43'\,42''$

				Comprobación de los ángulos	
$\log c$	3.049670			α	$40°\,26'\,44''$
$\log\operatorname{sen}\gamma$	9.995565			γ	$81\;\;49\;\;34$
$\log(c:\operatorname{sen}\gamma)$	3.054105	$\log(c:\operatorname{sen}\gamma)$	3.054105	β	$57\;\;43\;\;42$
$\log\operatorname{sen}\beta$	9.927127	$\log\operatorname{sen}\alpha$	9.812061		$180°\;\;0'\;\;0''$
$\log b$	2.981232	$\log a$	2.866166		

$\log b$	2.981232	$\log b$	2.981232	$\log a$	2.866166	$\log a$	2.866166
$\log\operatorname{sen}(AP)$	9.998454	$\cos(AP)$	8.925509 n	$\operatorname{sen}(BP)$	9.352288	$\cos(BP)$	9.988713
$\log\Delta y_a$	2.979686	Δx_a	1.906741 n	Δy_b	2.218454	Δx_b	2.854879
$A\,y_a = -16145{,}08$		$x_a = +92808{,}70$		$B\,y_b = -15356{,}15$		$x_b = +92012{,}08$	
$\Delta y_a = +\;954{,}30$		$\Delta x_a = -\;80{,}68$		$\Delta y_b = +\;165{,}37$		$\Delta x_b = +\;715{,}94$	
$Py = -15190{,}78$		$x = +92728{,}02$		$y = -15190{,}78$		$x = +92728{,}02$	

Zion $y = -\mathbf{15190{,}78}$ m $\qquad x = +\mathbf{92728{,}02}$ m.

En este cuadro está consignado el cálculo con todo detalle. Un operador experto puede simplificarlo bastante: por ejemplo, la distancia $AB = c$ puede calcularse una sola vez, en lugar de hacerlo dos veces, es decir, con la columna de la derecha (véase § 35, pág. 136), que corresponde al mayor de los dos valores $y_b - y_a$ y $x_b - x_a$:

$\log(y_b - y_a)$	2.897038	
$\log\operatorname{sen}$ ó $\cos(AB)$	9.851581	para el mayor
$\log(x_b - x_a)$	2.901251 n	
$\log\operatorname{tg}(AB)$	9.995787 n	$(AB) = 135°\,16'\,40{,}5''$
$\log AB = \log c$	3.049670	

Cálculo de las coordenadas por intersección de dos visuales, según el Catastro prusiano. En el cuadro siguiente damos, para que sirva de comparación, el cálculo de las coordenadas de P según el formulario del Catastro prusiano. Este procedimiento es más corto, pero menos fácil que el anterior. Los lados del triángulo no se calculan directamente por la ley de proporcionalidad entre los lados y los senos de los ángulos opuestos, sino de modo indirecto, por medio de la cantidad m, que es el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

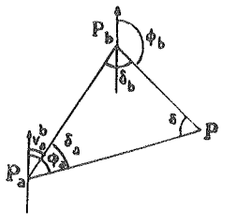


Fig. 438

$$m = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\operatorname{sen}\delta \cos\nu_a^b}$$

$$\Delta y_a = m \operatorname{sen}\delta_b \operatorname{sen}\varphi_a \qquad \Delta x_a = m \operatorname{sen}\delta_b \cos\varphi_a$$

$$\Delta y_b = m \operatorname{sen}\delta_a \operatorname{sen}\varphi_b \qquad \Delta x_b = m \operatorname{sen}\delta_a \cos\varphi_b$$

$$\mathbf{y} = y_a + \Delta y_a = y_b + \Delta y_b \qquad \mathbf{x} = x_a + \Delta x_a = x_b + \Delta x_b$$

Comprobación: $\Delta y_a - \Delta y_b = y_b - y_a$

$\Delta x_a - \Delta x_b = x_b - x_a$

	P_a: Bahnhof		P: Zion		P_b: Wasserturm			
φ_a	13° 0′ 22″	log sen φ_a	9.352288	y_a	− 15356,15	x_a	+ 92012,08
φ_b	94 49 56	log m	3.054105	y_b	− 16145,08	x_b	+ 92808,70
ν_a^b	315 16 40	log sen δ_b	9.812061				
				$y_b - y_a$	− 788,93	$x_b - x_a$	+ 796,62
$\delta_a = \varphi_a - \nu_a^b$	57 43 42	log cos φ_a	9 988713				
$\delta_b = \nu_a^b - \varphi_b \pm \pi$	40 26 44			Δy_a	+ 165,37	Δx_a	+ 715,94
$\delta = \varphi_b - \varphi_a$	81 49 34	log Δy_a	2.218454	Δy_b	+ 954,30	Δx_b	− 80,68
$\delta_a + \delta_b + \delta$	180 0 0	log Δx_a	2 851879	$\mathbf{y}$	− 15190,78	$\mathbf{x}$	+ 92728,02
log $(y_b - y_a)$	2.897038$_n$	log sen φ_b	9.998454				
colog sen ν_a^b	0.152631$_n$	log m	3.054105				
colog sen δ	0.004435	log sen δ_a	9.927127				
colog cos ν_a^b	0 148420	log cos φ_b	8.925509 n				
log $(x_b - x_a)$	2 901251						
	3 054104	log Δy_b	2.979685				
log m	3.054106	log Δx_b	1.906741 n				

A nuestro juicio, en los formularios debe prescindirse de todo artificio de cálculo, siendo mejor escribir un logaritmo de más, para facilitar las operaciones, que el ahorro aparente de tiempo que se logra con su supresión. En todo formulario debe ir, como base fundamental, el cálculo completo de $s \operatorname{sen}\alpha$ y $s\cos\alpha$, cosa que puede hacerse de los dos modos siguientes:

I

log	
s	2.981232
sen α	9.998454
s sen α	2.979686

$s \operatorname{sen}\alpha = +954{,}30$

log	
s	2.981232
cos α	8 925509 n
$s\cos\alpha$	1 906741 n

$s\cos\alpha = -80{,}68$

II

s sen α	2 979686	+ 954,30
sen α	9.998454	
s	2.981232	
cos α	8.925509 n	
$s\cos\alpha$	1.906741 n	− 80,68

En el procedimiento I hay un logaritmo más que en el II, que es el logaritmo s, repetido en I; pero este *derroche* de escritura hace más fácil y claro el cálculo I en comparación con el II, aparte la simetría del primero, cosa importante cuando $s \operatorname{sen}\alpha$ y $s\cos\alpha$ han de sumarse a y y x.

Empleo de las máquinas de calcular. Con las fórmulas de las páginas 389 y 390 se puede hacer el cálculo directamente, aunque éste resulte incómodo, por el empleo de las tablas; ahora bien, si además de las coordenadas de A y B se conocen los acimutes $(AP) = \varphi$ y $(BP) = \psi$, las fórmulas (11) y (12) de la página 150 se prestan admirablemente al empleo de las máquinas de calcular; estas fórmulas son las que siguen:

$$x - x_a = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi} \qquad y - y_a = (x - x_a)\operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

$$x - x_b = \frac{(y_b - y_a) - (x_b - x_a)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi} \qquad y - y_b = (x - x_b)\operatorname{tg}\psi. \tag{2}$$

Las fórmulas correspondientes a $y - y_a$ e $y - y_b$ dan resultados inexactos o poco precisos cuando $\operatorname{tg}\varphi$ ó $\operatorname{tg}\psi$ son muy grandes. En este caso, se obtienen fórmulas mejores sustituyendo en las ecuaciones de la derecha los valores de $x - x_a$ y $x - x_b$, resultando así:

$$y - y_a = \frac{(x_b - x_a) - (y_b - y_a)\cot\psi}{\cot\varphi - \cot\psi}$$

$$y - y_b = \frac{(x_b - x_a) - (y_b - y_a)\cot\varphi}{\cot\varphi - \cot\psi}.$$

En el cuadro de la página 392 damos un ejemplo de este cálculo con máquina de calcular, empleando las fórmulas (1) y (2), y con referencia a la figura 439; las tangentes de los acimutes se han tomado de las tablas de cinco cifras de F. G. Gauss, citadas en la página 140.

Si en vez de conocer los acimutes φ y ψ, se dan los ángulos α y β (fig. 437), se pueden emplear otras fórmulas en las que entren estos dos ángulos. En efecto, de la figura 437 se deduce:

$$x - x_a = a\cos[(AB) - \alpha] = a\cos(AB)\cos\alpha + a\operatorname{sen}(AB)\operatorname{sen}\alpha$$

y por ser

$$\cos(AB) = \frac{x_b - x_a}{c}$$

se tiene:

$$x - x_a = \frac{a}{c}(x_b - x_a)\cos\alpha + \frac{a}{c}y_b - y_a\operatorname{sen}\alpha$$

o bien:

$$x - x_a = \frac{a}{c}\operatorname{sen}\alpha[(x_b - x_a)\cot\alpha + (y_b - y_a)].$$

Ahora bien, en el triángulo ABP se tiene:

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

y por consiguiente:

$$x - x_a = \frac{(x_b - x_a)\cot\alpha + (y_b - y_a)}{\cot\alpha + \cot\beta}. \tag{3}$$

Del mismo modo se obtiene para $y - y_a$:

$$y - y_a = \frac{(y_b - y_a)\cot\alpha - (x_b - x_a)}{\cot\alpha + \cot\beta} \tag{4}$$

Para el cálculo del punto B se tienen las fórmulas correspondientes que siguen:

$$x - x_b = \frac{-(x_b - x_a)\cot\beta + (y_b - y_a)}{\cot\alpha + \cot\beta} \tag{5}$$

$$y - y_b = \frac{-(y_b - y_a)\cot\beta - (x_b - x_a)}{\cot\alpha + \cot\beta}. \tag{6}$$

Cálculo con máquina de calcular de las coordenadas de un punto P fijado por intersección directa desde otros dos dados AB

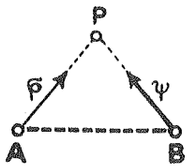


Fig. 439

Datos: x_a, y_a; x_b, y_b $\varphi = (AP)$, $\psi = (BP)$.

P = Zion

A = Wasserturm, pilar B = Bahnhof

$y_b = -15356{,}15$	$x_b = +92012{,}08$	$\varphi = 94^\circ\,49'\,56''$
$y_a = -16145{,}08$	$x_a = +92808{,}70$	$\psi = 13\;\;00\;\;22$
$y_b - y_a = +\;\;788{,}93$	$x_b - x_a = -\;\;796{,}62$	

1. Según las fórmulas (1) y (2) de la página 391.

$$\operatorname{tg}\varphi = -11{,}828_{80}$$
$$\operatorname{tg}\psi = +\;0{,}23098$$
$$\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi = -12{,}05978$$

$y_b - y_a = +\;\;788{,}93$	$y_b - y_a = +\;\;788{,}93$
$-(x_b - x_a)\operatorname{tg}\psi = +\;\;184{,}00_3$	$-(x_b - x_a)\operatorname{tg}\varphi = -\;9423{,}05_9$
Suma $= +\;\;972{,}93_3$	Suma $= -\;8634{,}12_9$
$x_a = +92808{,}70$	$x_b = +92012{,}08$
$x - x_a = -\;\;80{,}67_6$	$x - x_b = +\;\;715{,}94_4$
$x = +92728{,}02_4$	$x = +92728{,}02_4$
$y_a = -16145{,}08$	$y_b = -15356{,}15$
$(x - x_a)\operatorname{tg}\varphi = y - y_a = +\;\;954{,}30_0$	$(x - x_b)\operatorname{tg}\psi = y - y_b = +\;\;165{,}36_9$
$y = -15190{,}78_0$	$y = -15190{,}78_1$

2. Según las fórmulas (3) a (6) de la página 391.

$\alpha = 40^\circ\,26'\,44''$ $\quad\cot\alpha = 1{,}17311$

$\beta = 57\;\;43\;\;42$ $\quad\cot\beta = 0{,}63148$

$$\cot\alpha + \cot\beta = 1{,}80459$$

$+(x_b - x_a)\cot\alpha = -\;\;934{,}52$	$-(x_b - x_a)\cot\beta = +\;\;503{,}05$
$+(y_b - y_a) = +\;\;788{,}93$	$+(y_b - y_a) = +\;\;788{,}93$
Suma $= -\;\;145{,}59$	Suma $= +\;1291{,}98$
$x_a = +92808{,}70$	$x_b = +92012{,}08$
$x - x_a = -\;\;80{,}68$	$x - x_b = +\;\;715{,}94$
$x = +92728{,}02$	$x = +92728{,}02$
$+(y_b - y_a)\cot\alpha = +\;\;925{,}50$	$-(y_b - y_a)\cot\beta = -\;\;498{,}19$
$-(x_b - x_a) = +\;\;796{,}62$	$-(x_b - x_a) = +\;\;796{,}62$
Suma $= +\;1722{,}12$	Suma $= +\;\;298{,}43$
$y_a = -16145{,}08$	$y_b = -15356{,}15$
$y - y_a = +\;\;954{,}30$	$y - y_b = +\;\;165{,}37$
$y = -15190{,}78$	$y = -15190{,}78$

En la parte inferior de este cuadro se ha hecho el cálculo de nuevo con arreglo a las fórmulas (3) a (6).

Estas fórmulas (3) a (6) son más convenientes que las (1) y (2), pues no se encuentra en ellas la dificultad antes señalada (pág. 391) para éstas, ya que los valores de α y β nunca son muy pequeños.

§ 93. Precisión en los métodos de intersección

Vamos a considerar, en primer lugar, el caso más sencillo de determinación de un punto P desde otros dos puntos A y B, por medición de los ángulos α y β. Si suponemos sin error las coordenadas de los puntos dados, es evidente que la precisión con que se determine la posición del punto P dependerá, en primer término, de la precisión con que se midan los ángulos, y en segundo lugar de la forma o figura del triángulo ABP (figura 440).

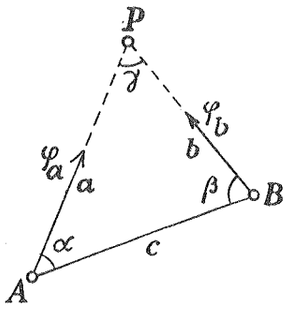


Fig. 440

Para conocer la influencia de esta última en la determinación de P, se calculan los errores medios m_x y m_y de las coordenadas x, y, de este punto; de este modo se ve que este error medio depende de la dirección de los ejes de coordenadas, aunque para indicar la precisión con que se determinan los puntos empleamos una cantidad cuyo valor permanece inalterable, cualquiera que sea la posición de los ejes coordenados.

Si suponemos calculados los errores medios m_x, m_y para un cierto sistema de coordenadas, se pueden deducir fácilmente los errores medios $m_{x'}$ $m_{y'}$ referidos a otro sistema de coordenadas x' y'.

Según las ecuaciones (2) de la página 142, teniendo en cuenta la ley de propagación de los errores, resulta (fórmula (10) de la página 11):

$$m_{x'}^2 = m_x^2\cos^2\varepsilon + m_y^2\operatorname{sen}^2\varepsilon$$
$$m_{y'}^2 = m_x^2\operatorname{sen}^2\varepsilon + m_y^2\cos^2\varepsilon$$
$$m_{x'}^2 + m_{y'}^2 = m_x^2 + m_y^2$$

Así se ve que la suma de los cuadrados de los errores medios es constante para todos los sistemas de coordenadas; por consiguiente, podemos decir que la cantidad constante representativa del error medio correspondiente a la determinación del punto P, es la siguiente:

$$M = \pm\sqrt{m_x^2 + m_y^2}. \tag{1}$$

Por consiguiente, para determinar M no hay que hallar el error medio de x e y, sino que basta calcular el error medio del punto en dos direcciones cualesquiera, pero perpendiculares entre sí.

Una vez sentado esto, vamos a determinar M para el caso de intersección directa y simple (fig. 440); para ello calculemos la distancia $AP = a$ en función de los ángulos observados α y β, a saber:

$$a = c\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \tag{2}$$

y llamemos φ_a al acimut correspondiente, es decir:

$$\varphi_a = (AB) - \alpha. \tag{3}$$

Puesto que la distancia c y el ángulo (AB) deben considerarse exentos de error, tenemos, que a una pequeña variación de los ángulos α y β, es decir, a $d\alpha$ y $d\beta$, corresponderán las siguientes variaciones diferenciales de a y φ_a:

$$d\,a = \frac{c}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta\,d\,\beta - \operatorname{sen}\beta\cos(\alpha+\beta)\,(d\,\alpha + d\,\beta)]$$

o sea

$$d\,a = c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\,d\,\beta - c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\,d\,\alpha \qquad (4)$$

y

$$d\,\varphi_a = -\,d\,\alpha. \qquad (5)$$

Formando ahora el producto $a \cdot d\,\varphi_a$, se tienen las dos variaciones elementales d_a y $a \cdot d\,\varphi_a$ de la posición del punto P, las cuales son perpendiculares entre sí y originadas por las variaciones angulares $d\,\alpha$ y $d\,\beta$. El error medio se deduce de las ecuaciones (4) y (5) (pág. 9), por la ley de propagación de errores:

$$m_a^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}\,m_\beta^2 + c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\beta\cos^2(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}\,m_\alpha^2$$

$$a^2\,m_\alpha^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}\,m_\alpha^2$$

y la suma de estas dos expresiones da:

$$M^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}\,m_\alpha^2 + c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\,m_\beta^2.$$

Introduciendo aquí los valores de los lados a y b (fig. 440), y al mismo tiempo el valor ρ, resulta:

$$M^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\,\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\,\frac{m_\beta^2}{\rho^2} \qquad (6)$$

o también

$$M^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,\frac{m_\beta^2}{\rho^2}. \qquad (7)$$

En vez de los errores medios m_α y m_β, vamos a poner m en función de los pesos p_α y p_β de los ángulos observados. Si $\pm m$ es el error medio de la unidad de peso, se tendrá, según la fórmula (9) de la página 17:

$$m_\alpha^2 = \frac{m^2}{p_\alpha} \qquad m_\beta^2 = \frac{m^2}{p_\beta}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (7) resultará:

$$M^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\left(\frac{a^2}{p_\alpha} + \frac{b^2}{p_\beta}\right)\frac{m^2}{\rho^2}. \qquad (8)$$

Si los dos ángulos se miden con el mismo aparato, los pesos p_α y p_β son proporcionales al número de mediciones de los ángulos hechas desde ambos puntos.

Se ocurre aún preguntar qué número de veces debe medirse cada ángulo para que el error medio M resulte lo menor posible, si para los dos ángulos se ha fijado de antemano, en total, un cierto número de observaciones, es decir, que se da $p_\alpha + p_\beta = Q$. Es fácil deducir que la expresión

$$\frac{a^2}{p_\alpha} + \frac{b^2}{p_\beta}$$

pasa por un mínimo, cuando

$$p_\alpha : p_\beta = a : b. \qquad (9)$$

Sin necesidad de razonamientos teóricos se comprende fácilmente que la visual más larga requiere mayor precisión angular para que en el punto de intersección ambas visuales presenten la misma desviación media transversal.

Intersección directa con medición de acimutes. Si no se observan los dos ángulos α y β, sino los acimutes φ_a y φ_b, referidos a puntos dados, como vimos en el cuadro de la página 383, hay que sustituir, en la ecuación (4), $d\,\alpha$ por $-\,d\,\varphi_a$, y $d\,\beta$ por $+\,d\,\varphi_b$. El desarrollo de esta fórmula no varía por esta sustitución, llegándose a la misma ecuación final (8), con la única variación de figurar en ella, en vez de los pesos p_α y p_β, los pesos p_a y p_b de los dos acimutes. Llamando r_a y r_b respectivamente al número de observaciones de acimutes hechas en los dos puntos, y n_a y n_b al número de series de observaciones (de doble vuelta de horizonte) correspondientes, tendremos (véase página 385):

$$p_a = \frac{r_a}{r_a+1}\,n_a \qquad p_b = \frac{r_b}{r_b+1}\,n_b$$

siendo igual a la unidad el peso de un acimut observado.

La discusión que sobre la distribución de observaciones en los dos puntos nos llevó a la ecuación (9), nos dice, aplicada aquí, que n_a y n_b deben elegirse de modo que se cumpla la siguiente condición:

$$p_a : p_b = a : b.$$

Intersección lateral. Supongamos ahora que en el triángulo ABP (fig. 440) se midan los dos ángulos α y γ, fijándose el punto por el procedimiento ya visto en la página 388, llamado de *intersección lateral*. En este caso tenemos:

$$d\,\varphi_a = -\,d\,\alpha.$$

Además, en el triángulo ABP se tiene:

$$a = c\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}$$

y diferenciando resulta:

$$d\,a = c\,\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,(d\,\alpha + d\,\gamma) - c\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)\cos\gamma}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,d\,\gamma$$

o sea

$$d\,a = c\,\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,d\,\alpha + c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,d\,\gamma.$$

Siendo $d\,a$ la desviación del punto P en la dirección AP, la desviación perpendicular a ésta será $-\,a\,d\,\alpha$, y el error medio se hallará como sigue:

$$m_a^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\cos^2(\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}^4\gamma}\,m_\alpha^2 + c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^4\gamma}\,m_\gamma^2$$

$$a^2\,m_\alpha^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2(\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}^4\gamma}\,m_\alpha^2$$

y, por lo tanto,

$$M^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}^4\gamma}\,m_\alpha^2 + c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^4\gamma}\,m_\gamma^2$$

o sea

$$M^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2\gamma}\,\frac{m_\gamma^2}{\rho^2}. \qquad (10)$$

Comparando la ecuación (10) con la (7) se ve que los métodos de intersección directa y lateral, coincidentes geométricamente, presentan una cierta divergencia, desde el punto de vista de la teoría de errores, debida a la forma del triángulo ABP.

También se presenta otra diferencia cuando en vez de observar desde el punto A el ángulo α, se deduce el acimut (AP) por medio de un estado análogo al de la página 383.

Si en este caso se hace igual a la unidad el peso de un acimut observado, tendremos (véase pág. 385) que el peso del acimut (AP) será igual a $\frac{r}{r+1}$, siendo r el número de observaciones hechas. Por otra parte, el peso del ángulo γ observado desde P es igual a 0,5.

§ 94. Problemas de intersección inversa

A la intersección inversa se llama también método o problema de los tres puntos y de la pirámide, y consiste, en esencia, en lo siguiente:

Supongamos que se tienen tres puntos A, M, B rígidamente unidos entre sí (fig. 441), estando dada su posición relativa por las dos distancias $AM = a$ y $BM = b$ y por el ángulo $BMA = \gamma$: se trata de fijar otro punto P, respecto a A, B, M, con sólo medir los dos ángulos $APM = \alpha$ y $MPB = \beta$; para ello hay que calcular las distancias $AP = s_a$ $MP = s$ y $BP = s_b$, así como los ángulos φ y ψ.

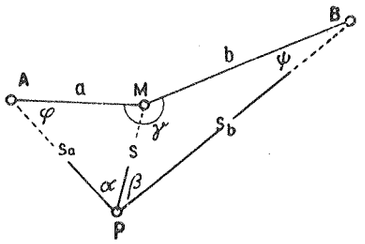


Fig. 441

Geométricamente se resuelve el problema con la mayor facilidad: basta describir sobre AM un arco de círculo capaz del ángulo α, y sobre MB otro arco capaz del ángulo β; la intersección de estos dos arcos da el punto P.

Esta construcción nos da a entender que la solución geométrica del problema falla cuando los cuatro puntos $AMBP$ están sobre un mismo círculo, es decir, cuando el cuadrilátero $AMBP$ es inscriptible.

Pasemos ahora de la construcción al cálculo, teniendo en cuenta que en ninguno de los dos triángulos AMP y BMP se conocen dos ángulos, por lo cual no puede aplicarse la ley de los senos para determinar s_a, s y s_b.

Solución de J. T. Mayer. Consideraremos los dos ángulos φ y ψ como incógnitas, pues una vez conocidos es inmediata la deducción de los demás elementos desconocidos. Para hallar φ y ψ, tenemos las dos ecuaciones siguientes. Primera: la que da la suma de todos los ángulos del cuadrilátero $AMBP$, que como se sabe es

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

de donde:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma). \tag{1}$$

Segunda: la que resulta de aplicar la ley de proporcionalidad de senos y lados en los dos triángulos:

$$s = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\psi \tag{2}$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} : \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \tag{3}$$

o también:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta}. \tag{4}$$

Para resolver en φ y ψ las dos ecuaciones (1) y (4), empezaremos por poner:

$$\varphi = (\varphi + \psi) - \psi$$

con lo cual

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}(\varphi+\psi)\cos\psi - \cos(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\psi.$$

Dividiendo por sen ψ y sustituyendo en (4), resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \operatorname{sen}(\varphi+\psi)\cot\psi - \cos(\varphi+\psi) = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta}$$

y dividiendo por sen $(\varphi + \psi)$, tenemos la siguiente ecuación, de la cual se despeja el valor de cot ψ, y por lo tanto nos da el valor del ángulo ψ:

$$\cot\psi = \cot(\varphi+\psi) + \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}. \tag{5}$$

Esta ecuación no se presta al cálculo logarítmico, y para prepararla conviene introducir un ángulo auxiliar λ, del modo siguiente:

$$\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\varphi+\psi)} = \cot\lambda, \tag{6}$$

pudiendo calcularse así el valor de este ángulo λ. Hecho esto y sustituyendo en (5), se tiene:

$$\cot\psi = \cot(\varphi+\psi) + \cot\lambda = \frac{\cos(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}(\varphi+\psi)\cos\lambda}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\lambda}$$

o sea

$$\cot\psi = \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\psi+\lambda)}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\lambda}. \tag{7}$$

Una vez calculado el valor de ψ, se deduce el de φ de la suma $\varphi + \psi$ (1), y ya puede calcularse la distancia s, con comprobación, con la fórmula (2). Del mismo modo se deducen s_a y s_b aplicando la ley de los senos, a saber:

$$s_a = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}(\varphi+\alpha) \qquad s_b = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}(\psi+\beta). \tag{8}$$

Ejemplo numérico: Datos: $a = 841{,}561$, $b = 1553{,}664$, $\gamma = 174^\circ\,13'\,37''$, $\alpha = 24\ 58\ 47$, $\beta = 41\ 02\ 58$

$\gamma + \alpha + \beta = 240^\circ\,15'\,22''$

$360^\circ - (\gamma + \alpha + \beta) = \varphi + \psi = 119^\circ\,44'\,38''$ } 360°

log a	2.925086	log b	3.191357
log sen α	9.625618	log sen β	9.817374
log $(a : \operatorname{sen}\alpha)$	3.299468	log $(b : \operatorname{sen}\beta)$	3.373983
log $(b : \operatorname{sen}\beta)$	3 373983	$\lambda =$	36° 10′ 49″
	0 074515	$\varphi + \psi =$	119 44 38
log sen $(\varphi + \psi)$	9.938645	$\varphi + \psi + \lambda =$	155 55 27
log cot λ	0 135870		
log sen $(\varphi + \psi + \lambda)$	9 610602		
log $[1 : \operatorname{sen}(\varphi + \psi)]$	0.061355		
log $(1 : \operatorname{sen}\lambda)$	0 228907		
		$\psi =$	51° 29′ 00″
log cot ψ	9.900864	$\varphi =$	68° 15′ 38″

El cálculo de las distancias según las fórmulas (2) y (8) no ofrece ya dificultad alguna.

Solución de Kästner. Se parte de la misma figura 441 y de las fórmulas (1) y (3), puestas en la siguiente forma:

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=\frac{360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \tag{9}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}:\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{10}$$

También se emplea un ángulo auxiliar μ, dado por la ecuación:

$$\frac{\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}}=\operatorname{tg}\mu, \tag{11}$$

Sustituyendo en (10) se tiene:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\mu}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}$$

y de aquí resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi}=\frac{1-\operatorname{tg}\mu}{1+\operatorname{tg}\mu}. \tag{12}$$

Ahora bien:

$$\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\psi=2\operatorname{sen}\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi=2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi+\psi}{2}$$

y también:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\mu}{1+\operatorname{tg}\mu}=\cot(45^\circ+\mu).$$

Sustituyendo estos valores en (12) se obtiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot(\mu+45^\circ). \tag{13}$$

De aquí se halla el valor de $\frac{\varphi-\psi}{2}$, que combinado con el de $\frac{\varphi+\psi}{2}$ (9), nos da los valores de φ y ψ, a saber:

$$\frac{\varphi+\psi}{2}+\frac{\varphi-\psi}{2}=\varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{\varphi+\psi}{2}-\frac{\varphi-\psi}{2}=\psi. \tag{14}$$

El cálculo de las distancias s, s_a, s_b se hace con las mismas fórmulas (2) y (8).

Ejemplo numérico. Aplicando las fórmulas (9) y (14) al mismo ejemplo anterior, tenemos:

Datos: $a = 841{,}561$, $b = 1553{,}664$

$\gamma = 174^\circ\ 13'\ 37''$
$\alpha = 24\ 58\ 47$
$\beta = 41\ 2\ 58$
$\gamma+\alpha+\beta = 240^\circ\ 15'\ 22''$ } 360°
$360^\circ-(\gamma+\alpha+\beta) = \varphi+\psi = 119\ 44\ 38$
$\frac{\varphi+\psi}{2} = 59\ 52\ 19$

$\log a$	2.925086	$\log b$	3.191357
$\log\operatorname{sen}\alpha$	9.625618	$\log\operatorname{sen}\beta$	9.817374
$\log(a:\operatorname{sen}\alpha)$	3.299468	$\log(b:\operatorname{sen}\beta)$	3.373983
$\log(b:\operatorname{sen}\beta)$	3.373983	$\mu = 40^\circ\ 6'\ 31''$	
$\log\operatorname{tg}\mu$	9.925485	$\mu+45^\circ = 85\ 6\ 31$	
$\log\cot(\mu+45^\circ)$	8.932366	$\frac{\varphi+\psi}{2} = 59\ 52\ 19$	
$\log\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}$	0.236322	$\frac{\varphi-\psi}{2} = 8\ 23\ 19$	
$\log\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$	9.168688	$\varphi = 68^\circ\ 15'\ 38''$	$\psi = 51^\circ\ 29'\ 0''$

Elección de los ángulos α y β. Se pueden elegir los ángulos α y β formados por las tres visuales sin tener en cuenta los ángulos realmente medidos. Es conveniente hacer la elección de modo que los ángulos α y β sumen menos de 180°, resultando en conjunto una figura análoga a la 441.

El ángulo auxiliar μ, dado por la ecuación (11), queda indeterminado, pues esta ecuación queda satisfecha por un valor de μ y por el valor $\mu \pm 180^\circ$ (prescindiendo de los valores que resultan de sumar 360° o un múltiplo cualquiera de 360). Del mismo modo queda indeterminado el segundo miembro de la ecuación (13), ya que $\cot(\mu \pm 45^\circ)$ es igual a $\cot(\mu \pm 180^\circ + 45^\circ)$. Como ya se ha dicho, α y β son menores de 180°, de modo que tanto $\operatorname{sen}\alpha$ como $\operatorname{sen}\beta$ son positivos, y puesto que las distancias AM y MB son positivas, resulta que la ecuación (11) da un solo valor positivo para $\operatorname{cot}\mu$, correspondiente al ángulo μ agudo. Por comodidad, se toma siempre el ángulo μ como agudo y positivo.

Ahora bien: si en la ecuación (13) consideramos el segundo miembro como determinado, el primero resulta aún indeterminado, pues para un valor cualquiera de $\frac{\varphi-\psi}{2}$ que satisfaga dicha ecuación, hay también otro valor $\frac{\varphi-\psi}{2}\pm 180^\circ$ que la satisface; pero como φ y ψ son ángulos de un triángulo, evidentemente son menores de 180°, y por consiguiente, $\frac{\varphi}{2}$ y $\frac{\psi}{2}$ son menores de 90, es decir, son ángulos agudos positivos, y $\frac{\varphi-\psi}{2}$ debe ser un ángulo agudo, positivo o negativo, o sea, que debe estar en el primer cuadrante o en el cuarto.

En resumen, de las ecuaciones (11) y (13) se deduce la siguiente regla: en la ecuación (11) se toma el ángulo auxiliar μ como agudo y positivo, y en la ecuación (13) se toma el ángulo $\frac{\varphi-\psi}{2}$ como agudo, positivo o negativo según que $\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$ sea positiva o negativa.

Punto auxiliar de Collins. Según la solución dada por Collins, se traza el círculo que pasa por los dos puntos A y B y por el punto buscado P (fig. 442); se une P con M y se prolonga la recta PM hasta su intersección Q con el círculo. En el triángulo ABQ se tienen los ángulos α y β con su suplemento δ. De este modo se conocen los dos triángulos ABQ y ABM, y por lo tanto, quedan también determinados los otros dos AQM y BMQ; es decir, que ya pueden hallarse los ángulos de los triángulos AQP y BPQ.

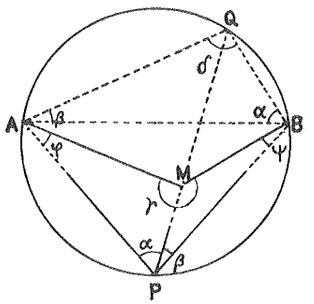


Fig. 442

Este procedimiento no tiene aplicación práctica, por lo cual no damos las fórmulas correspondientes. El punto de Collins tiene su importancia principal en el cálculo por coordenadas de la intersección inversa, como veremos en el § 95.

Esta solución del problema fué utilizada anteriormente en la plancheta, con la cual se tomaban los ángulos α y β respectivamente contados desde AB y BA, de modo que por intersección se obtenía el punto Q (a veces se salía este punto del papel), y después, en P se orientaba la plancheta según PMQ.

Solución gráfica de Cassini. En la figura 443 tenemos trazados los dos círculos indicados anteriormente (pág. 396), circunscritos a los triángulos AMP y BMP, y trazando

las dos diagonales MC y MD, tenemos que la línea CD resultará perpendicular a la cuerda común MP.

En esto se funda la siguiente determinación del punto P, partiendo de los ángulos α y β. Se toma sobre AM un ángulo de 90° y otro de 90° — α, y sobre BM se toman los ángulos 90° y 90° — β, obteniéndose así los puntos auxiliares C y D: se traza por M la perpendicular a CD, que por intersección con ésta da el punto P.

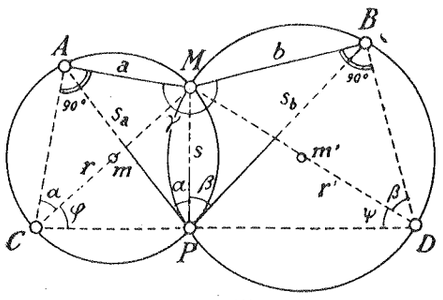


Fig. 443

La solución trigonométrica del problema así planteado nos conduce a las fórmulas de Kästner (págs. 398 y 399). En efecto, en la figura 443 se ve que los ángulos φ y ψ son los mismos que en la figura 441, teniéndose en el triángulo CMD, según la ley de las tangentes:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}=\frac{MD-MC}{MD+MC}=\frac{r'-r}{r'+r}$$

o sea

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}=\frac{1-\frac{r}{r'}}{1+\frac{r}{r'}} \tag{15}$$

y haciendo

$$\frac{r}{r'}=\operatorname{tg}\mu \tag{16}$$

resulta, sustituyendo en (15):

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot(45^\circ+\mu). \tag{17}$$

El ángulo auxiliar μ se calcula fácilmente, pues se tiene:

$$2r=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\qquad 2r'=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

y por consiguiente:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{r'}=\frac{a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha}. \tag{18}$$

Por otra parte, en la figura 443 vemos que

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=\frac{360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}, \tag{19}$$

con lo cual, una vez hallado μ, pueden calcularse los valores de φ y ψ.

Como se ve, las ecuaciones fundamentales (18), (17) y (19) son idénticas a las (11), (13) y (9) del cálculo de Kästner.

La construcción gráfica anterior se debe a J. D. Cassini, que por primera vez la aplicó a la resolución de un problema astronómico («Le Journal des Sçavans de l'an 1669», Amsterdam, 1679). Posteriormente fué aplicada esta construcción por C. F. Gauss a la solución del problema de intersección inversa con la plancheta (Obras de Carlos Federico Gauss, tomo IX, 1903).

En el § 96 volveremos sobre la construcción de Cassini, al tratar del empleo de la máquina de calcular en la solución del problema de intersección inversa.

Reducción de la intersección inversa a la directa. Sean A, M, B (fig. 444) los tres puntos fijos y α y β los ángulos medidos desde el punto P que se quiere determinar. Tomemos, a partir de M, sobre las tres rectas MA, MP y MB los valores recíprocos de las mismas, obteniéndose así los tres puntos A', P' y B', con arreglo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{matrix} MA\times MA'=1\\ MP\times MP'=1\\ MB\times MB'=1\end{matrix}\qquad\text{o bien}\qquad\begin{matrix} MA:MP=MP':MA'\\ MB:MP=MP':MB'\end{matrix}$$

lo cual nos dice que el triángulo AMP es semejante al $P'MA'$, y el BMP, semejante al $P'MB'$, deduciéndose de aquí una construcción muy sencilla del punto P, que consiste en trazar en A' y B' los ángulos α y β para obtener el punto P', y tomar desde M hacia P' el valor inverso o recíproco de MP' para hallar el punto P.

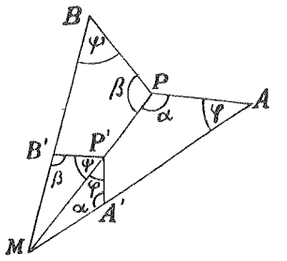


Fig. 444

De este modo se reduce el problema de la intersección inversa del punto P al de intersección directa del punto P'.

Este procedimiento de las distancias recíprocas fué aplicado por primera vez por C. F. Gauss.

§ 95. Resolución por coordenadas del problema de intersección inversa

De ordinario no se dan directamente las distancias $AM=a$, $BM=b$ y el ángulo $BMA=\gamma$ (que en el § 94 hemos considerado como datos), sino que se dan las coordenadas de los puntos. El problema de la intersección inversa se resuelve en este caso del modo siguiente:

Sean los tres puntos A, M y B, dados por sus coordenadas (figs. 445 y 446), a saber:

Punto A y_a, x_a
» M y_m, x_m
» B y_b, x_b.

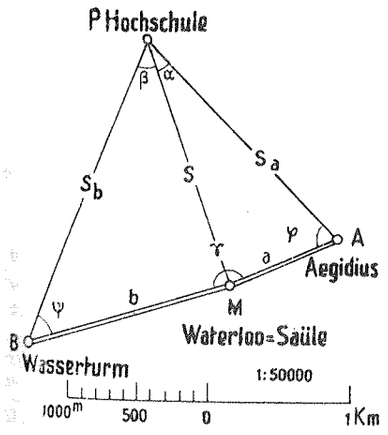


Fig. 445

Desde un cuarto punto P se miden los dos ángulos siguientes:

Angulo $APM=\alpha$
» $MPB=\beta$

y se trata de calcular las coordenadas y y x del punto P.

Según lo dicho en el párrafo anterior (§ 94), para resolver este problema se emplean las fórmulas generales del cálculo de coordenadas y de acimutes dadas en el § 35 (págs. 132 a 139). Con objeto de facilitar la comprensión del procedimiento pondremos un ejemplo numérico (figura 445) correspondiente al estudiado en el § 35 (fig. 144): el cuadro que damos a

continuación se refiere a esta misma figura, simplificada para poder seguir fácilmente la marcha del cálculo. Cuando no se tiene mucha práctica de cálculo conviene dibujar una figura análoga a la 445, para poder comprobar a primera vista las distancias y ángulos; pero cuando se tiene soltura en el cálculo, basta con hacer una figura esquemática, como la 446.

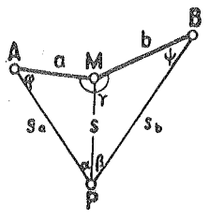


Fig. 446

Intersección inversa

1. *P* Hochschule

	Direcciones observadas		
A Ägidius	136°	53′	5″
M Waterloo	161	51	52
B Wasserturm	202	54	50

Ángulos

$\alpha = 24° 58' 47''$
$\beta = 41\ 2\ 58$
$\alpha + \beta = 66° 1' 45''$

2.

	y	x
M Waterloo	−14657,52	+93254 39
A Ägidius	−13879,79	+93575 89
Diferencia $(M-A)$	− 777,73	− 321,50
	$y_m - y_a$	$x_m - x_a$

	y	x
M Waterloo	−14657,52	+93254,39
B Wasserturm	−16145,76	+92808,28
Diferencia $(M-B)$	+ 1488,24	+ 446,11
	$y_m - y_b$	$x_m - x_b$

Comprobación: $(y_m - y_a) - (y_m - y_b) = y_b - y_a$ y $(x_m - x_a) - (x_m - x_b) = x_b - x_a$.

3.

$(y_m - y_a)$	2 890829 *n*
sen ó cos (AM)	9.965743 *n*
$(x_m - x_a)$	2 507181 *n*
tg (AM)	0.383648
a	2.925086
sen α	9 625618
$(a : \text{sen } \alpha)$	3.299468
$(b : \text{sen } \beta)$	3.373983
tg μ	9 925485
cot $(\mu + 45°)$	8.932366
tg $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	0 236322
6. tg $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	9.168688

4.

$(AM) = 247° 32' 26''$
$(BM) = 73\ 18\ 49$
$\gamma = 174° 13' 37''$
$\alpha + \beta = 66\ 1\ 45$
$\gamma + \alpha + \beta = 240° 15' 22''$ } 360° 0′ 00″
$\varphi + \psi = 119\ 44\ 38$

$\mu = 40° 6' 31''$
$\mu + 45° = 85\ 6\ 31$
$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 59\ 52\ 19$
$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 8\ 23\ 19$
$\varphi = 68° 15' 8''$
$\alpha = 24\ 58\ 47$
$\varphi + \alpha = 93° 14' 25''$

$(y_m - y_b)$	3.172673
sen ó cos (BM)	9.981316
$(x_m - x_b)$	2.649442
tg (BM)	0.523231
b	3.191357
sen β	9 817374
$b : \text{sen } \beta)$	3,373983

Comprobación de los ángulos
$(\varphi + \alpha) + (\psi + \beta) + \gamma = 360°$

$\psi = 51° 29' 0''$
$\beta = 41\ 2\ 58$
$\psi + \beta = 92° 31' 58''$

7.

$(a : \text{sen } \alpha)$	3.299468	$(a : \text{sen } \alpha)$	3.299468	$(b : \text{sen } \beta)$	3 373983
sen $(\varphi + \alpha)$	9.999305	sen φ	9 967958	sen ψ	9.893444
s_a	3 298773	s	3 267426	s	3.267427

$b : \text{sen } \beta$	3.373983
sen $(\psi + \beta)$	9.999575
s_b	3.373558

Comprobaciones:

8.

$(AM) =$	247° 32′ 26″	$(BM) =$	73° 18′ 49″
$+\varphi =$	+68 15 38	$-\psi =$	− 51 29 0
$(AP) =$	315° 48′ 4″	$(BP) =$	21° 49′ 49″
ó $(PA) =$	135 48 4	$(PB) =$	201 49 49

$(AP) =$	315° 48′ 4″	$(BP) =$	21° 49′ 49″
$+\alpha =$	+24 58 47	$-\beta =$	−41 2 58
$(MP) =$	340° 46′ 51″	$(MP) =$	340° 46′ 51″
	$(PM) = 160° 46' 51''$		

9.

s_a	3 298773	s_a	3 298773	s_b	3 373558
sen (AP)	9,843327 *n*	cos (AP)	9 855473	sen (BP)	9.570378
Δy_a	3 142100 *n*	Δx_a	3.154246	Δy_b	2.943936

s_b	3.373558
cos (BP)	9.967684
Δx_b	3 341242

10.

A	$y_a = -13879,79$		$x_a = +93575,89$	*B*	$y_b = -16145,76$
	$\Delta y_a = -1387,08$		$\Delta x_a = +1426,42$		$\Delta y_b = +878,90$
P	$y = -15266,87$		$x = +95002\ 31$		$y = -15266,86$

	$x_b = +92808,28$
	$\Delta x_b = +2194,03$
	$x = +95002,31$

Resultado final, *Hochschule*: $y = -15266{,}86$ m $\quad x = +95002{,}31$ m.

La marcha seguida en el cálculo resumido en este cuadro, se ajusta a las siguientes reglas generales:

1. Se escriben primero las direcciones observadas, y por sustracción se deducen los ángulos α, β y $\alpha + \beta$. Sus acimutes observados se consignan de ordinario ya orientados, aproximadamente, lo cual es indiferente para el valor de los ángulos α y β.

2. Se escriben las coordenadas de los tres puntos A, M, B y se hallan sus diferencias. Para estas diferencias se hacen las comprobaciones correspondientes, a saber:

$$\begin{aligned}(y_m - y_a) - (y_m - y_b) &= y_b - y_a \\ (x_m - x_a) - (x_m - x_b) &= x_b - x_a\end{aligned} \qquad (1)$$

Esta prueba puede suprimirse cuando el cálculo merezca la suficiente confianza.

3. Se calculan los acimutes (AM) y (BM), y las distancias $AM = a$ y $BM = b$, del modo ya sabido (§ 35), es decir, aplicando las fórmulas:

$$\text{tg } (AM) = \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \qquad \text{tg } (BM) = \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b}$$

$$AM = a = \frac{y_m - y_a}{\text{sen } (AM)} \text{ ó } = \frac{x_m - x_a}{\cos (AM)} \qquad BM = b = \frac{y_m - y_b}{\text{sen } (BM)} \text{ ó } = \frac{x_m - x_b}{\cos (BM)}$$

Las distancias a y b se calculan en función del seno o del coseno, teniendo en cuenta que siempre una de estas funciones, la correspondiente al cateto mayor, es más sencilla y más exacta que la otra (§§ 35 y 92).

4. Los acimutes (AM) y (BM) dan la diferencia γ, que con el valor de $\alpha + \beta$ antes hallado, da la suma $\gamma + \alpha + \beta$, y, por consiguiente, $360° - (\alpha + \beta + \gamma) = \varphi + \psi$, y de aquí $\frac{\varphi + \psi}{2}$.

5 y 6. Se hallan los valores de los dos ángulos φ y ψ mediante el ángulo auxiliar μ, como ya hemos visto anteriormente (§ 94). Los cocientes $(a : \text{sen } \alpha)$ y $(b : \text{sen } \beta)$ se consignan por separado y en esta forma, porque así hay que utilizarlos en 7.

6. Una vez deducidos φ y ψ de $\frac{\varphi + \psi}{2}$ y $\frac{\varphi - \psi}{2}$, se les suman respectivamente α y β, para tener $\varphi + \alpha$ y $\psi + \beta$. Tomando el valor de γ hallado en 4, se tiene una comprobación tan sencilla como definitiva para los ángulos, a saber:

$$(\varphi + \alpha) + (\psi + \beta) + \gamma = 360°.$$

7. Cálculo de los lados. Se halla primero, en el medio, el valor del lado s,

$$s = \frac{a}{\text{sen } \alpha} \text{ sen } \varphi = \frac{b}{\text{sen } \beta} \text{ sen } \psi.$$

Esta comprobación con s sirve para comprobar también los cocientes $(a \,.\, \text{sen } \alpha)$ y $(b : \text{sen } \beta)$.

Hecho esto, se escribe a la izquierda log. sen $(\varphi + \alpha)$ y a la derecha log. sen $(\psi + \beta)$, y se obtiene:

$$s_a = \frac{a}{\text{sen } \alpha} \text{ sen } (\alpha + \varphi) \qquad \text{y} \qquad s_b = \frac{b}{\text{sen } \beta} \text{ sen } (\beta + \psi).$$

8. Se escribe a la izquierda el valor del acimut (AM) y a la derecha el de (BM) obtenidos en 4, y debajo de éstos se ponen, respectivamente, los valores de φ y ψ hallados en 6, resultando a la izquierda $(AM) + \varphi = (AP)$ y a la derecha $(BM) - \psi = (BP)$. Se escriben estos valores de (AP) y (BP) en el medio, y debajo de los mismos se escriben

respectivamente los de α y β hallados en 1, con lo cual se obtiene, comprobado, el valor de $(MP) = (AP) + \alpha = (BP) - \beta$. Los tres acimutes (AP), (MP) y (BP) pueden transformarse en los (PA), (PM) y (PB) con sólo sumarles 180°, lo cual carece, de momento, de importancia y utilidad, ya que al principio sólo se usan los valores (AP), (MP) y (BP).

9 y 10. Cálculo de las coordenadas del punto P en función de las de los puntos A y B:

$$y = y_a + s_a \operatorname{sen}(AP) \qquad y = y_b + s_b \operatorname{sen}(BP)$$
$$x = x_a + s_a \cos(AP) \qquad x = x_b + s_b \cos(BP).$$

Cuando coinciden los valores de y, x en función de las coordenadas de A con los mismos valores en función de las de B, se puede dar por bueno el cálculo hecho con las coordenadas dadas y las direcciones observadas.

Cuando no concuerdan los dos pares de valores de x, y, se calculan también estas coordenadas con el lado central s:

$$y = y_m + s \operatorname{sen}(MP). \qquad x = x_m + s \cos(MP).$$

En el cuadro de operaciones que estamos considerando no figura el cálculo de las coordenadas de P empleando el lado medio s. Si la comprobación hecha en 10 no da resultado satisfactorio, se repite el cálculo con el lado MP, aunque en tal caso hay que investigar en qué consiste el error, y debe tenerse en cuenta que por tener comprobación todas las operaciones de cálculo, desde 5, habrá que buscar el error en las operaciones 2 a 4.

Formación de un estado de acimutes. Obteniendo, como se ve en 8, los acimutes inversos $(AP) \pm 180° = (PA)$, etc., ya sea escribiendo las cifras o haciendo la operación mentalmente, y tomando los tres logaritmos de las distancias, se puede formar el siguiente estado, con los datos del cuadro anterior (1, 8, 7):

Estación: Hochschule (placa de hierro E) (2)

Punto visado	Direcciones observadas	Acimutes	Diferencias	log s
Ägidius	136° 53′ 5″	135° 48′ 4″	1° 5′ 1″	3.298773
Waterloosäule	161 51 52	160 46 51	1 5 1	3.267426
Wasserturm	202 54 50	201 49 49	1 5 1	3.373558

Un estado de esta clase tiene su máxima importancia cuando después hay que ir agregando más direcciones observadas (§ 91).

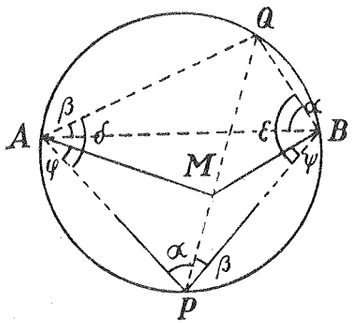


Fig. 447

Punto auxiliar de Collins. Para el empleo del punto de Collins (véase página 399) en el problema de intersección inversa con coordenadas, se deduce directamente de la figura 447 el siguiente método operatorio: De las coordenadas de los puntos dados A y B se deduce el acimut (AB) y la distancia AB, según las fórmulas:

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$AB = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen}(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)}.$$

Para determinar las coordenadas del punto auxiliar Q, hay que hallar las distancias AQ y BQ, así como los correspondientes acimutes (AQ) y (BQ):

$$AQ = AB \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \qquad BQ = AB \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$
$$(AQ) = (AB) - \beta \qquad (BQ) = (BA) + \alpha.$$

Para las coordenadas y_q y x_q se tiene:

$$y_q = y_a + AQ \operatorname{sen}(AQ) \qquad y_q = y_b + BQ \operatorname{sen}(BQ)$$
$$x_q = x_a + AQ \cos(AQ) \qquad x_q = x_b + BQ \cos(BQ).$$

Para cálculos ulteriores se halla también el acimut $(QM) = (QP)$:

$$\operatorname{tg}(QM) = \operatorname{tg}(QP) = \frac{y_m - y_q}{x_m - x_q}.$$

Por otra parte, en los triángulos AQP y BQP se tiene:

$$\delta = 180° - [(QA) - (QM) + \alpha] \qquad \varepsilon = 180° - [(QM) - (QB) + \beta]$$

con lo cual se pueden resolver perfectamente ambos triángulos:

$$AP = AQ \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta)}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad BP = BQ \frac{\operatorname{sen}(\beta+\varepsilon)}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$QP = AQ \frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\alpha} = BQ \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Puesto que el acimut (QP), igual al (QM), es ya conocido, se pueden hallar los otros dos (AP) y (BP):

$$(AP) = (AQ) + \delta \qquad \text{y} \qquad (BP) = (BQ) - \varepsilon$$

y, por consiguiente, ya pueden calcularse las coordenadas del punto P en función de las de los tres puntos A, B y Q.

Formulario del Catastro prusiano. Las Instrucciones técnicas del Catastro prusiano de 1870 dan el método de Mayer para el cálculo de la intersección inversa (véase página 396); el cálculo por coordenadas se consideraba entonces independiente del cálculo de la intersección inversa. Las Instrucciones de 1881 señalan un método operatorio, conforme a la figura 448 y al formulario 11, igual en el fondo al procedimiento que hemos dado en el cuadro de la página 402. La notación es la misma para los lados a, b, y para los ángulos α, β, φ y ψ, y basta sustituir el símbolo (AM) por v_a^m, y (AP) por v_a, etc., para que toda la notación sea idéntica a la empleada en dicho cuadro. En lo único que se diferencia este formulario 11 de nuestro cuadro operatorio de la página 402 es que en éste figuran los logaritmos de los lados ($\log s_a$, $\log s$, $\log s_b$) y en aquél no. En la segunda edición (1894) de las citadas Instrucciones aparece un nuevo formulario 11, fundado en la teoría del punto auxiliar de Collins que ya hemos estudiado.

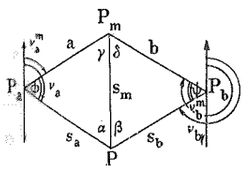


Fig. 448

El cuadro siguiente, que resume el método operatorio según el formulario 11 del Catastro prusiano, aplicado al mismo ejemplo numérico de la página 402, es lo suficiente claro para hacer innecesaria toda explicación.

Intersección inversa, según el formulario 11 de las Instrucciones del Catastro prusiano

Punto auxiliar de Collins Q | Punto buscado P

$$\operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad \operatorname{tg} \nu_m^q = \frac{y_q - y_m}{x_q - x_m}$$

$$m = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\operatorname{sen} \delta \cos \nu_a^b}.$$

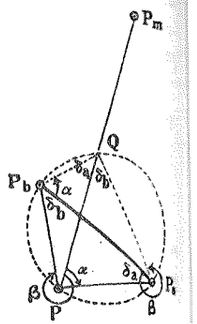


Fig. 449

$\Delta y_a^q = m \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \nu_a^q$	$y_q = y_a + \Delta y_a^q$	$\Delta y_a = m \operatorname{sen} \delta_b \operatorname{sen} \nu_a$	$\mathbf{y} = y_a + \Delta y_a$
$\Delta x_a^q = m \operatorname{sen} \alpha \cos \nu_a^q$	$x_q = x_a + \Delta x_a^q$	$\Delta x_a = m \operatorname{sen} \delta_b \cos \nu_a$	$\mathbf{x} = x_a + \Delta x_a$
	Comprobación del cálculo:		
$\Delta y_b^q = m \operatorname{sen} (2\pi - \beta) \operatorname{sen} \nu_b^q$	$y_q = y_b + \Delta y_b^q$	$\Delta y_b = m \operatorname{sen} \delta_a \operatorname{sen} \nu_b$	$\mathbf{y} = y_b + \Delta y_b$
$\Delta x_b^q = m \operatorname{sen} (2\pi - \beta) \cos \nu_b^q$	$x_q = x_b + \Delta x_b^q$	$\Delta x_b = m \operatorname{sen} \delta_a \cos \nu_b$	$\mathbf{x} = x_b + \Delta x_b$

	±	±	
P_a: Wasserturm	y_a — 16145,76	x_a + 92808,28	α 41° 2′ 58″
P_b: Ägidius	y_b — 13879,79	x_b + 93575,89	β 335 1 13
			$2\pi - \beta$ 24 58 47
	$y_b - y_a$ + 2265,97	$x_b - x_a$ + 767,61	ν_a^b 71 17 9
	Δy_a^q + 1709,18	Δx_a^q — 187,66	$\nu_a^q = \nu_a^b - \beta$ 96° 15′ 56″
	Δy_b^q — 556,79	Δx_b^q — 955,27	$\nu_b^q = \nu_a^b - \alpha \pm \pi$ 210 14 11
Q	y_q — 14436,58	x_q + 92620,62	ν_m^q 160 46 51
P_m: Waterloo	y_m — 14657,52	x_m + 93254,39	$\nu_a = \nu_m^q + \alpha$ 201 49 49
			$\nu_b = \nu_m^q + \beta$ 135 48 4
	$y_q - y_m$ + 220,94	$x_q - x_m$ — 633,77	
	Δy_a + 878,90	Δx_a + 2194,03	$\delta_a = \nu_a^b - \nu_a$ 229 27 20
	Δy_b — 1387,07	Δx_b + 1426,42	$\delta_b = \nu_b - \nu_a^b \pm \pi$ 244 30 55
			$\delta = \beta - \alpha + \pi$ 113 58 15
P: Hochschule	$\mathbf{y}$ — 15266,86	$\mathbf{x}$ + 95002,31	$= \delta_a + \delta_b$ 113 58 15

$\log (y_b - y_a)$	3 355254	$\log \operatorname{sen} \nu_a^q$	9.997398	$\log \operatorname{sen} \nu_a$	9.570378 n
$\log (x_b - x_a)$	2 885141	$\log m$	3 418015	$\log m$	3.418015
$\log \operatorname{tg} \nu_a^b$	0.470113	$\log \operatorname{sen} \alpha$	9 817374	$\log \operatorname{sen} \delta_b$	9.955543 n
		$\log \cos \nu_a^q$	9.037971 n	$\log \cos \nu_a$	9.967684
$\log (y_b - y_a)$	3 355254	$\log \Delta y_a^q$	3.232787	$\log \Delta y_a$	2.943936
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} \nu_a^b$	0.023590	$\log \Delta x_a^q$	2 273360 n	$\log \Delta x_a$	3 341242
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} \delta$	0.039171				
$\operatorname{colog} \cos \nu_a^b$	0.493702	$\log \operatorname{sen} \nu_b^q$	9.702059 n	$\log \operatorname{sen} \nu_b$	9 843327 n
$\log (x_b - x_a)$	2 885141	$\log m$	3.418015	$\log m$	3 418015
		$\log \operatorname{sen} (2\pi - \beta)$	9.625618	$\log \operatorname{sen} \delta_a$	9.880758 n
$\log m$	3 418015	$\log \cos \nu_b^q$	9.936491 n	$\log \cos \nu_b$	9.855473 n
$\log (y_q - y_m)$	2.344274	$\log \Delta y_b^q$	2.745692 n	$\log \Delta y_b$	3.142100 n
$\log (x_q - x_m)$	2.801932 n	$\log \Delta x_b^q$	2.980124 n	$\log \Delta x_b$	3.154246
$\log \operatorname{tg} \nu_m^q$	9.542342 n				

§ 96. Cálculo de la intersección inversa con máquina de calcular

Para el empleo de la máquina de calcular no resulta práctico el método indicado en la página 402, por tener que estar utilizando continuamente las tablas trigonométricas: para la máquina de calcular conviene emplear lo menos posible estas tablas, no constituyendo, en cambio, inconveniente alguno las sumas o restas de productos y cocientes. Para este efecto, resulta mucho mejor el método operatorio indicado en la página 406, valiéndose del punto auxiliar de Collins, para el cual hay que resolver una doble intersección directa, correspondiente a los puntos Q y P desde los A y B, con deducción de los acimutes $(A\,B)$ y $(Q\,M)$ (fig. 447). Este cálculo con el punto de Collins se puede realizar siguiendo el método expuesto en la página 392.

El siguiente procedimiento operatorio, basado en la construcción de Cassini (fig. 450), se presta muy bien al empleo de la máquina de calcular: de las coordenadas conocidas y de los ángulos α y β, se deducen las de los puntos auxiliares C y D, pues se sabe que

$$y_c - y_a = A\,C \operatorname{sen} (A\,C),$$

y por ser

$$A\,C = A\,M \cot \alpha \qquad \text{y} \qquad (A\,C) = (A\,M) + 90^\circ$$

resulta:

$$y_c - y_a = A\,M \cos (A\,M) \cot \alpha \qquad y_c - y_a = (x_m - x_a) \cot \alpha \tag{1}$$

Análogamente se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_c - x_a &= -(y_m - y_a) \cot \alpha \\ y_d - y_b &= -(x_m - x_b) \cot \beta \\ x_d - x_b &= (y_m - y_b) \cot \beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De aquí se despejan las coordenadas de C y D y ya puede determinarse el punto P, por intersección de los dos rayos $M\,P$ y $C\,D$, según las fórmulas (11) y (12) de la página 150:

$$\operatorname{tg} (C\,D) = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \qquad \operatorname{tg} (M\,P) = -\cot (C\,D) = -\frac{x_d - x_c}{y_d - y_c} \tag{3}$$

y también:

$$x - x_m = \frac{(y_m - y_c) - (x_m - x_c) \operatorname{tg} (C\,D)}{\operatorname{tg} (C\,D) - \operatorname{tg} (M\,P)} \qquad y - y_m = (x - x_m) \operatorname{tg} (M\,P) \tag{4}$$

Sustituyendo en estas fórmulas los valores (3), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x - x_m &= +\frac{(y_m - y_c)(x_d - x_c) - (x_m - x_c)(y_d - y_c)}{(y_d - y_c)^2 + (x_d - x_c)^2} (y_d - y_c) \\ y - y_m &= -\frac{(y_m - y_c)(x_d - x_c) - (x_m - x_c)(y_d - y_c)}{(y_d - y_c)^2 + (x_d - x_c)^2} (x_d - x_c) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

o empleando una notación más sencilla:

$$x - x_m = A\,(y_d - y_c) \qquad y - y_m = -A\,(x_d - x_c). \tag{6}$$

Para el cálculo numérico no es preciso hallar las coordenadas de C y D; las diferencias que figuran en las ecuaciones (5) y (6) se pueden deducir directamente de las (1) y (2):

$$\left.\begin{aligned} y_m - y_c &= (y_m - y_a) - (x_m - x_a) \cot \alpha \\ x_m - x_c &= (x_m - x_a) + (y_m - y_a) \cot \alpha \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

y de modo análogo:

$$\left.\begin{aligned} y_m - y_d &= (y_m - y_b) + (x_m - x_b) \cot \beta \\ x_m - x_d &= (x_m - x_b) - (y_m - y_b) \cot \beta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Las ecuaciones (13) y (14) pueden escribirse en esta otra forma:

$$\left.\begin{aligned}(x_m - x)\,[\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega-\alpha)] &= -(y_a - y_m) + (x_a - x_m)\operatorname{tg}(\omega-\alpha)\\ (x_m - x)\,[\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega+\beta)] &= -(y_b - y_m) + (x_b - x_m)\operatorname{tg}(\omega+\beta)\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Ahora bien, es fácil ver que:

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega-\alpha) = +\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\omega\cos(\omega-\alpha)}$$

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega+\beta) = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\omega\cos(\omega+\beta)};$$

luego, sustituyendo en (15), se tiene:

$$(x_m - x) = -(y_a - y_m)\frac{\cos\omega\cos(\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} + (x_a - x_m)\frac{\cos\omega\operatorname{sen}(\omega-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$-(x_m - x) = -(y_b - y_m)\frac{\cos\omega\cos(\omega+\beta)}{\operatorname{sen}\beta} + (x_b - x_m)\frac{\cos\omega\operatorname{sen}(\omega+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

y sumando estas dos ecuaciones, resulta:

$$(y_a - y_m)(\cos^2\omega\cot\alpha + \cos\omega\operatorname{sen}\omega) - (x_a - x_m)(\cos\omega\operatorname{sen}\omega\cot\alpha - \cos^2\omega) +$$
$$+ (y_b - y_m)(\cos^2\omega\cot\beta - \cos\omega\operatorname{sen}\omega) - (x_b - x_m)(\cos\omega\operatorname{sen}\omega\cot\beta + \cos^2\omega) = 0.$$

Y dividiendo por $\cos^2\omega$:

$$(y_a - y_m)(\cot\alpha + \operatorname{tg}\omega) - (x_a - x_m)(\operatorname{tg}\omega\cot\alpha - 1) +$$
$$+ (y_b - y_m)(\cot\beta - \operatorname{tg}\omega) - (x_b - x_m)(\operatorname{tg}\omega\cot\beta + 1) = 0.$$

Esta ecuación puede resolverse en tg ω, resultando:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{(y_a - y_m)\cot\alpha + (y_b - y_m)\cot\beta - (x_b - x_a)}{(x_a - x_m)\cot\alpha + (x_b - x_m)\cot\beta + (y_b - y_a)}. \quad (16)$$

Una vez calculado de este modo el acimut $\omega = (PM)$, se puede hallar la abscisa x, deducida de las dos ecuaciones (15), obteniéndose así dos valores para x:

$$\left.\begin{aligned}x - x_m &= \frac{(y_a - y_m) - (x_a - x_m)\operatorname{tg}(\omega-\alpha)}{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega-\alpha)}\\ x - x_m &= \frac{(y_b - y_m) - (x_b - x_m)\operatorname{tg}(\omega+\beta)}{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega+\beta)}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

De las ecuaciones segunda y tercera (11) se deduce también un par de valores para la ordenada y:

$$\left.\begin{aligned}y - y_a &= (x - x_a)\operatorname{tg}(\omega-\alpha)\\ y - y_b &= (x - x_b)\operatorname{tg}(\omega+\beta)\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Con las fórmulas (16) a (18) se resuelve el problema de modo sencillo y muy apropiado al empleo de la máquina de calcular.

En el cuadro de la página 411 repetimos el mismo ejemplo anterior, con arreglo al método de Delambre, no creyendo necesaria ninguna aclaración después de lo expuesto.

BIBLIOGRAFÍA:

Sobre el uso de la regla de cálculo en la intersección inversa, pueden consultarse:

RUNGE, Das Rückwärtseinschneiden mit Koordinaten (Zeitschr. f. Verm., 1894, páginas 204-207).

SOSSNA, Auflösung des einfachen Rückwärtseinschnittes mittels Rechenmaschine und numerischtrigonometrischer Tafel (Zeitschr. f. Verm., 1896, págs. 269-272; fórmulas en la página 288 y ejemplo en las páginas 471-472).

Intersección inversa con el empleo de la máquina de calcular

A Ägidius
P Hochschule *M* Waterloo
B Wasserturm

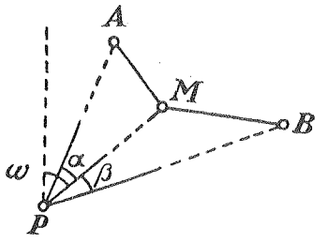


Fig. 452

Angulos observados:

$\alpha = 24^\circ\ 58'\ 47''$ $\quad \cot\alpha = 2{,}14649$
$\beta = 41\ \ 02\ \ 58$ $\quad \cot\beta = 1{,}14837$

	y	x
B	−16145,76	+92808,28
A	−13879,79	+93575,89
B − A	− 2265,97	− 767,61

	y	x
A	−13879,79	+93575,89
M	−14657,52	+93254,39
A − M	+ 777,73	+ 321,50

	y	x
B	−16145,76	+92808,28
M	−14657,52	+93254,39
B − M	− 1488,24	− 446,11

$+(y_a - y_m)\cot\alpha$	+ 1669,39
$+(y_b - y_m)\cot\beta$	− 1709,05
	− 39,66
$-(x_b - x_a)$	+ 767 61
Numerador Z	+ 727,95
$Z : N = \operatorname{tg}\omega$	− 0,34861
$\operatorname{tg}(\omega-\alpha)$	− 0,97241
$\operatorname{tg}(\omega+\beta)$	+ 0,40059
$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega-\alpha)$	+ 0,62380 = N_1
$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(\omega+\beta)$	− 0,74920 = N_2

$+(x_a - x_m)\cot\alpha$	+ 690,10
$+(x_b - x_m)\cot\beta$	− 512,30
	+ 177,80
$+(y_b - y_a)$	− 2265,97
Denominador N	− 2088,17

$\omega = 160^\circ\ 46'\ 52''$
$\alpha = \ \ 24\ \ 58\ \ 47$
$\omega - \alpha = 135^\circ\ 48'\ 05''$

$\omega = 160^\circ\ 46'\ 52''$
$\beta = \ \ 41\ \ 02\ \ 58$
$\omega + \beta = 201^\circ\ 49'\ 50''$

$y_a - y_m$	+ 777,73
$-(x_a - x_m)\operatorname{tg}(\omega-\alpha)$	+ 312,63
Z_1	+ 1090,36
$Z_1 : N_1 = x - x_m$	+ 1747,92
x_m	+ 93254,39
x	+ 95002,31
x_a	+ 93575,89
$x - x_a$	+ 1426,42
$(x - x_a)\operatorname{tg}(\omega-\alpha)$	− 1387,07
y_a	− 13879,79
y	− 15266,86

$y_b - y_m$	− 1488,24
$-(x_b - x_m)\operatorname{tg}(\omega+\beta)$	+ 178,71
Z_2	− 1309,53
$Z_2 : N_2 = (x - x_m)$	+ 1747,91
x_m	+ 93254,39
x	+ 95002,30
x_b	+ 92808,28
$x - x_b$	+ 2194,02
$(x - x_b)\operatorname{tg}(\omega+\beta)$	+ 878,91
y_b	− 16145,76
y	− 15266,85

ANSERMET, Le problème de Snellius, Vevey, 1912.

JUNG, Om inskäring (tirada aparte de Svensk Lantmäteritidskrift, 1928).

HÖCKNER, Einschaltung von Punkten in ein durch Koordinaten gegebenes trigonometrisches Netz mit ausgiebiger Verwendung der Rechenmaschine. Leipzig, 1891 (Zeitschr. f. Verm., 1892, pág. 377).

§ 97. Precisión en la intersección inversa

Círculo peligroso. Ya dijimos en la página 396, que la determinación por intersección inversa cae en defecto cuando los cuatro puntos están sobre un mismo círculo (llamado *peligroso*), cosa que también debe resultar, analíticamente, de las fórmulas anteriores; en efecto, en este caso se tiene:

$$\varphi + \psi = 180^\circ \qquad \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\psi$$

y también, según vimos en la página 398,

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{1}{\operatorname{tg}\mu}\qquad \mu=45°.$$

Es decir, que $45°+\mu=90°$, y según la fórmula (13) de la página 398 se tiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot(\mu+45°)=\infty\cdot 0$$

lo cual nos indica la indeterminación.

Aunque es muy raro que en la práctica se tenga el caso de ser $\varphi+\psi$ exactamente igual a 180° 0′ 00″, debemos considerar el caso en que $\varphi+\psi$, sin ser este valor exacto, se acerque al mismo, pues entonces la solución no es imposible, pero sí poco precisa y prácticamente quizá inaprovechable.

Para saber de antemano a qué atenerse, conviene ver si es o no posible que pueda pasar un círculo por los cuatro puntos A, M, B, P; cuando no puede ser así, como representan las figuras 453 y 454, la determinación del punto P no sólo es posible sino precisa.

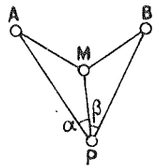


Fig. 453

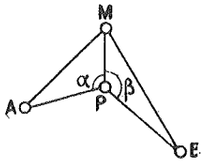


Fig. 454

Para hacer esta distinción previa, basta observar las dos reglas siguientes:

1.ª Cuando el triángulo AMB (fig. 453) presenta un vértice M *apuntando* hacia P, es decir, cuando el cuadrilátero $AMBP$ presenta en M una concavidad (que vista desde P es convexidad), es evidente que el círculo determinado por los tres puntos A, M, B tiene su centro hacia fuera del punto M, es decir, dentro del ángulo AMB, por lo cual es imposible que la otra parte del círculo pase por el punto P.

2.ª Si el punto P está dentro del triángulo dado AMB, es imposible que caiga sobre el círculo determinado por los tres puntos A, M, B, ya que éste no entra en el triángulo, tocándolo sólo en sus vértices.

Cuando se trata de alguno de estos casos, puede darse como buena la determinación por intersección inversa.

Error medio en la determinación de P. Como mejor vemos el efecto de los errores que se pueden cometer en la medición de los ángulos α y β, es partiendo de las ecuaciones (15) de la página 135:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y_a-y}{x_a-x}\qquad \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{y_m-y}{x_m-x}\qquad \operatorname{tg}\varphi_3=\frac{y_b-y}{x_b-x}.$$

Diferenciando la primera tenemos:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_1}d\varphi_1=\frac{y_a-y}{(x_a-x)^2}dx-\frac{1}{x_a-x}dy.$$

O bien, por medio de la ecuación (16) de la página 135, designando con s_1, s_2, s_3 las distancias PA, PM y PB, y diferenciando se tiene:

$$d\varphi_1=\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{s_1}dx-\frac{\cos\varphi_1}{s_1}dy$$

y de modo análogo:

$$d\varphi_2=\frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{s_2}dx-\frac{\cos\varphi_2}{s_2}dy$$

$$d\varphi_3=\frac{\operatorname{sen}\varphi_3}{s_3}dx-\frac{\cos\varphi_3}{s_3}dy$$

Y puesto que

$$d\varphi_2-d\varphi_1=d\alpha$$
$$d\varphi_3-d\varphi_2=d\beta$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned}d\alpha&=\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{s_2}-\frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{s_1}\right)dx-\left(\frac{\cos\varphi_2}{s_2}-\frac{\cos\varphi_1}{s_1}\right)dy\\ d\beta&=\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi_3}{s_3}-\frac{\operatorname{sen}\varphi_2}{s_2}\right)dx-\left(\frac{\cos\varphi_3}{s_3}-\frac{\cos\varphi_2}{s_2}\right)dy\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

El cálculo subsiguiente se simplifica mucho tomando las inversas de las distancias (véase pág. 401), es decir, haciendo:

$$\frac{1}{s_1}=r_1\qquad\frac{1}{s_2}=r_2\qquad\frac{1}{s_3}=r_3\qquad(2)$$

y sustituyendo estos valores en (1) resulta:

$$\left.\begin{aligned}d\alpha&=(r_2\operatorname{sen}\varphi_2-r_1\operatorname{sen}\varphi_1)\,dx-(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)\,dy\\ d\beta&=(r_3\operatorname{sen}\varphi_3-r_2\operatorname{sen}\varphi_2)\,dx-(r_3\cos\varphi_3-r_2\cos\varphi_2)\,dy\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Si despejamos en estas ecuaciones dx y dy, en función de $d\alpha$ y $d\beta$, tendremos en primer lugar como determinante denominador el siguiente:

$$D=-(r_2\operatorname{sen}\varphi_2-r_1\operatorname{sen}\varphi_1)(r_3\cos\varphi_3-r_2\cos\varphi_2)+(r_3\operatorname{sen}\varphi_3-r_2\operatorname{sen}\varphi_2)(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)\qquad(4)$$

y por tanto,

$$\left.\begin{aligned}dx&=\frac{1}{D}\left[-(r_3\cos\varphi_3-r_2\cos\varphi_2)\,d\alpha+(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)\,d\beta\right]\\ dy&=\frac{1}{D}\left[-(r_3\operatorname{sen}\varphi_3-r_2\operatorname{sen}\varphi_2)\,d\alpha+(r_2\operatorname{sen}\varphi_2-r_1\operatorname{sen}\varphi_1)\,d\beta\right]\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Estas ecuaciones (4) y (5) tienen una sencilla interpretación y deducción geométrica: en efecto, tomando desde el punto P (fig. 455), sobre las tres direcciones PA, PM y PB los tres valores r_1, r_2 y r_3 recíprocos de las distancias, se obtiene el triángulo $A'M'B'$. Ahora bien, efectuando operaciones en la ecuación (4) y teniendo en cuenta que

$$\varphi_2-\varphi_1=\alpha\qquad\text{y}\qquad\varphi_3-\varphi_2=\beta,$$

se tiene:

$$D=r_1r_2\operatorname{sen}\alpha+r_2r_3\operatorname{sen}\beta-r_1r_3\operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

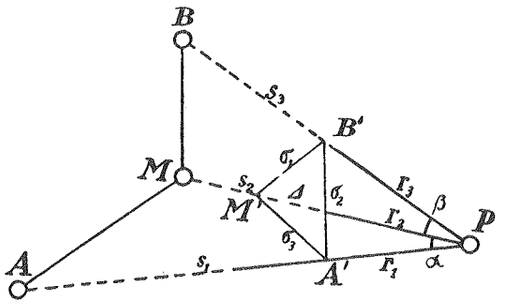


Fig. 455

Pero en la figura se ve que cada uno de estos términos representa respectivamente el doble de la superficie de los triángulos $PA'M'$, $PM'B'$ y $PA'B'$; luego representando con el signo Δ el área del triángulo $A'M'B'$ tendremos:

$$D=2\Delta.\qquad(6)$$

Pasemos ahora de las diferenciales dx, dy, $d\alpha$ y $d\beta$, consideradas como errores verdaderos, a los errores medios, para lo cual, según la ley de acumulación de los errores, escribiremos [fórmula (10) de la página 11]:

$$\left.\begin{aligned}m_x^2&=\frac{1}{4\Delta^2}\left[(r_3\cos\varphi_3-r_2\operatorname{sen}\varphi_2)^2m_\alpha^2+(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)^2m_\beta^2\right]\\ m_y^2&=\frac{1}{4\Delta^2}\left[(r_3\operatorname{sen}\varphi_3-r_2\operatorname{sen}\varphi_2)^2m_\alpha^2+(r_2\operatorname{sen}\varphi_2-r_1\operatorname{sen}\varphi_1)^2m_\beta^2\right]\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

y según la fórmula (1) de la página 393, tendremos para el error medio del punto P:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

Sustituyendo en esta expresión los valores dados en (7) resultará:

$$M^2 = \frac{1}{4\,\Delta^2}\left\{ [(r_2^2 + r_3^2 - 2\,r_2\,r_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2)]\,m_\alpha^2 + [\,r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\,]\,m_\beta^2 \right\} \quad (8)$$

En la figura 455 se ve que los coeficientes de m_α^2 y m_β^2 son precisamente σ_1^2 y σ_3^2, siendo σ_1 y σ_3 dos lados del triángulo $A'M'B'$. Haciendo la sustitución en (8) se tiene:

$$M^2 = \frac{\sigma_3^2}{4\,\Delta^2}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{\sigma_1^2}{4\,\Delta^2}\frac{m_\beta^2}{\rho^2} \quad (9)$$

que es el cuadrado del error medio del punto P.

Esta expresión nos dice que para que el error medio del punto P sea lo menor posible, hay que tomar, de los ángulos formados por los tres rayos PA, PM y PB, aquellos dos a que se opongan los lados menores σ del triángulo $A'M'B'$.

Consideremos ahora, como para la intersección directa (pág. 394) el caso en que los dos ángulos α y β se hayan medido con precisión desigual. Si $\pm m$ es el error medio de la unidad de peso, y p_α, p_β son los pesos de ambos ángulos, tendremos, en vez de la fórmula (9) esta otra:

$$M^2 = \frac{1}{4\,\Delta^2}\left(\frac{\sigma_3^2}{p_\alpha} + \frac{\sigma_1^2}{p_\beta}\right)\frac{m^2}{\rho^2}. \quad (10)$$

También podemos aplicar a esta ecuación el criterio representado por la fórmula (8) de la página 394; si los dos ángulos se han medido con el mismo teodolito y el número total de mediciones es igual a Q, se toma el número de mediciones de α y de β proporcional a p_α y p_β, y se hace

$$p_\alpha : p_\beta = \sigma_3 : \sigma_1$$

para que el error medio del punto P sea el menor posible.

Error medio del punto P *determinado por acimutes.* Cuando en vez de los dos ángulos α y β, se miden los acimutes correspondientes a los tres puntos, hay que sustituir en el desarrollo anterior aquellos ángulos por las diferencias entre estos acimutes. Llamando a éstos l_1, l_2 y l_3 habrá que poner, en las ecuaciones (3) de la página 413, los siguientes valores de $d\alpha$ y $d\beta$:

$$d\alpha = dl_2 - dl_1 \qquad d\beta = dl_3 - dl_2$$

resultando así:

$$\left.\begin{aligned} dl_2 - dl_1 &= (r_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 - r_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)\,dx - (r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)\,dy \\ dl_3 - dl_2 &= (r_3\,\mathrm{sen}\,\varphi_3 - r_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)\,dx - (r_3\cos\varphi_3 - r_2\cos\varphi_2)\,dy \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

y de aquí se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{D}\left\{(r_3\cos\varphi_3 - r_2\cos\varphi_2)\,dl_1 + (r_1\cos\varphi_1 - r_3\cos\varphi_3)\,dl_2 + (r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)\,dl_3\right\} \\ dy &= \frac{1}{D}\left\{(r_3\,\mathrm{sen}\,\varphi_3 - r_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)\,dl_1 + (r_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 - r_3\,\mathrm{sen}\,\varphi_3)\,dl_2 + (r_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 - r_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)\,dl_3\right\} \end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

donde D significa lo mismo que antes (6), a saber,

$$D = 2\,\Delta$$

Designando con m_1 el error medio de un acimut observado, tenemos, según (12) para el error medio del punto P, la expresión:

$$M^2 = \frac{1}{D^2}\left\{2\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 2\,r_1\,r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\,r_2\,r_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2) - 2\,r_3\,r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_3)\right\} m_1^2 \quad (13)$$

Ahora bien, en la figura 455 se ve que:

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) &= \sigma_1^2 \\ r_2^2 + r_3^2 - 2\,r_2\,r_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2) &= \sigma_2^2 \\ r_1^2 + r_3^2 - 2\,r_3\,r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_3) &= \sigma_3^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en (13) resulta:

$$M^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4\,\Delta^2}\frac{m_1^2}{\rho^2}. \quad (14)$$

Comparando esta expresión (14) con la (9) se ve que m_1^2 no puede considerarse igual a m_α^2 ni a m_β^2, debiendo tomar $m_1^2 = \frac{m_\alpha^2}{2} = \frac{m_\beta^2}{2}$ si, empleando el mismo teodolito, el número de obervaciones para cada uno de los dos ángulos es igual al número de dobles vueltas de horizonte.

El *círculo peligroso* se pone también de manifiesto en las fórmulas (9) y (14); en efecto, cuando los cuatro puntos A, M, B y P están sobre un mismo círculo, los tres puntos A', M', B' están en línea recta y por consiguiente $\Delta = 0$, y el error medio dado por ambas fórmulas resulta infinitamente grande.

BIBLIOGRAFÍA:

Sobre los errores en la determinación de un punto por intersección inversa, pueden consultarse los trabajos siguientes:

HELMERT, Zeitschr. f. Math. und Phys., 1868.

JORDAN, Zeitschr. f. Math. und Phys , 1871.

EGGERT, Bestimmung des mittleren Punktfehlers mit Hilfe der reziproken Entfernungen (Zeitschr. f. Math. und Phys., 1903, págs. 154-163, y Einführung in die Geodäsie, Leipzig, 1907, páginas 135-139).

EGGERT, Differentialformeln für das Rückwärtseinschneiden (Zeitschr. f. Verm., 1920, páginas 273-276).

MC CAW, Differentialformeln für das Rückwärtseinschneiden (Zeitschr. f. Verm., 1922, página 710).

Reseña histórica del problema de la intersección inversa. La solución geométrica del problema de la pirámide, como así se llama también, es decir, el conocimiento de la ley de la igualdad de los ángulos inscritos en arcos iguales, data de más de 2000 años, encontrándose esta ley, con el número 21 de orden, en el tercer libro de Euclides (unos 300 años antes de Jesucristo). A Hiparco (160-125 años antes de J. C.) se debe una aplicación astronómica de esta ley, y otra a Ptolomeo (unos 125 años después de J. C.). En cambio, la primera aplicación geodésica de dicha ley es mucho más reciente, de principios del siglo XVII. El neerlandés Willebrord Snellius resolvió por primera vez el problema geodésico de la intersección inversa, no sólo geométrica o gráficamente, sino por cálculo trigonométrico, en su obra «Eratosthenes Batavus», y muy poco tiempo después, el suabo Schickhardt trató el mismo problema. Snellius y Schickhardt son considerados también como los fundadores de la triangulación.

En el año 1671 fué tratado este problema por John Collins (1624-1683), librero de Oxford, que lo daba como «a chorographical problem» de Richard Townley, quien sin

duda alguna lo había resuelto de modo distinto. Así consta en las «Philosophical Transactions» del 25 de marzo de 1671 (volumen 6, pág. 2093). Collins distinguía cinco casos; cuando los tres puntos dados están en línea recta, etc.; pero no consideraba el caso indeterminado. A Collins sigue Laurent Pothenot, que ha dado nombre al problema de la intersección inversa, aunque indebidamente, ya que no aportó nada nuevo a su solución. El trabajo de Pothenot «Problème de géométrie pratique: trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux lieux d'où l'on observe» fué presentado a la Sesión de la Academia de Ciencias de París del 31 de diciembre de 1692, y publicado en las Memorias del Instituto (Amsterdam, 1723 y París, 1730).

De entre lo mucho que en Alemania se ha escrito sobre este asunto, citaremos únicamente la Memoria titulada «Estudio sobre la historia de las soluciones geométricas del llamado problema de Pothenot», original de Weyer, en los Anales de Hidrografía y Meteorología Marítima de 1882. Pero el estudio histórico más detallado del problema de la intersección inversa se encuentra en la colección neerlandesa de «Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, jaargang V 1889»: Overzicht van de graadmetingen in Nederland door doktor J. D. van der Plaats, Hoofdstuk I. De Triangulatie van Snellius.

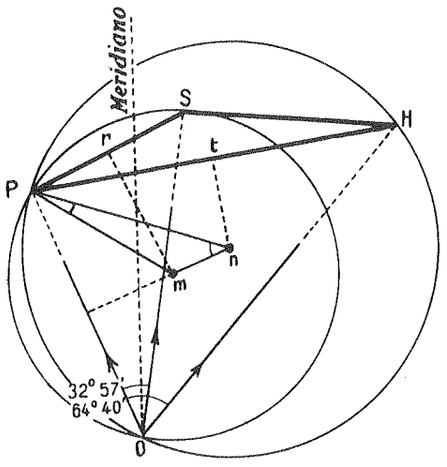


Fig. 456. — O = Punto de observación de Snellius

En la revista alemana «Zeitschr. für Verm., 1892» se encuentra un extracto de este trabajo, con las figuras y cálculos de Snellius y Schickhardt. Snellius había determinado en su casa O (fig. 456) la altura del polo y el acimut hacia La Haya y hacia el punto S y trataba de averiguar la distancia OS para lo cual medía los ángulos POS y POH. En primer lugar daba Snellius la construcción con dos círculos que pasaban respectivamente por POS y por POH (centros m y n). El cálculo de Snellius partía de esta construcción. Trazando desde los centros m y n las perpendiculares respectivas a PS y PH, y resultando el ángulo Pmr igual al POS, se tiene:

$$Pm = \frac{PS}{2 \operatorname{sen} POS} \qquad \text{y del mismo modo} \qquad Pn = \frac{PH}{2 \operatorname{sen} POH}$$

$$\text{Ángulo } mPn = POH - POS - SPH$$

donde el ángulo SPH se deduce del triángulo dado PSH. En el triángulo mPn se conocen dos lados Pm y Pn y el ángulo comprendido mPn, y por consiguiente puede ya deducirse el ángulo Pnm, y $PO = 2Pn \operatorname{sen} Pnm$. Después se halla OH, conociendo PH y los ángulos OPH y POH; OS se deduce de PS y de los ángulos SPO y POS.

En una carta de Schickhardt a Kepler, en 6 de junio de 1624, se lee («Zeitschr. f. Verm., 1892): «Plurimum negotii facessunt loca in convallibus sita, inobservabilia ex alto. Pro iis utor tali modo: Attendo, quos angulos faciant contiguos cum tribus jam notis locis A, B, C eosque ad lineam mediam BG utcumque sumptam utrimque adjungo, velut F et E. Mox per tria semper puncta AFB vel BEC circulos duco, et ubi se ambo secant, ut in H, locum quæsitum repono, quia angulos per totam circumferentiam omnes ad eandem chordam æquales esse docet Euclides.»

De los estudios sobre esta materia hechos en el siglo XVIII podemos citar, además de los ya referidos, los realizados por Lambert (1765), Cagnoli (1786) y Van Swinden (1790).

En el siglo XIX se escribió mucho sobre el problema de la pirámide, pero nos limitaremos a citar los trabajos de Bessel (1813), Gauss (1823) y Gerling (1840).

§ 98. Método de intersección inversa aplicado a tres puntos

Sean los puntos dados por sus coordenadas A, M y B (fig. 457). Desde otros tres puntos P_1, P_2 y P_3 se observan los cuatro ángulos δ, ε, ξ y η y se miden además las distancias $P_1P_2 = p$ y $P_2P_3 = q$. Se trata de calcular, con estos datos, las coordenadas de los tres puntos P_1, P_2 y P_3.

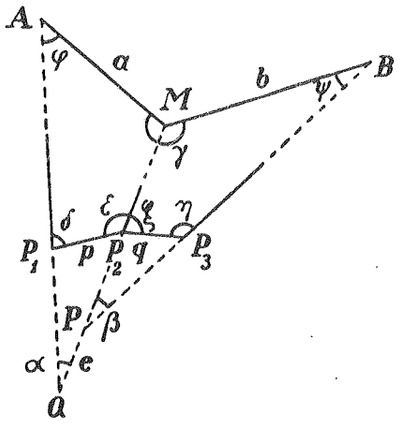


Fig. 457

De las coordenadas dadas se pueden deducir, en primer lugar, los acimutes (MA) y (MB), y las dos distancias a y b. Para la resolución del problema, nos valdremos de los dos puntos auxiliares P y Q, dados por la intersección de MP_2 con BP_3 y AP_1 respectivamente.

De la figura se deduce directamente:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \delta + \varepsilon - 180° \\ \beta &= \xi + \eta - 180° \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y

$$P_2Q = p\frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad P_2P = q\frac{\operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}\beta} \qquad e = P_2Q - P_2P. \qquad (2)$$

Los dos ángulos auxiliares φ y ψ se hallan fácilmente, ya que en la figura se ve que:

$$\varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$$

o sea

$$\varphi + \psi = \omega \qquad (3)$$

haciendo

$$360° - (\alpha + \beta + \gamma) = \omega. \qquad (4)$$

En los triángulos AMQ y MBP se tiene:

$$MQ = a\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad MP = b\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\beta}$$

y de aquí:

$$a\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} - b\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\beta} = e. \qquad (5)$$

Poniendo ψ en función de φ, según la fórmula (3), tenemos:

$$a\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} - b\frac{\operatorname{sen}(\omega - \varphi)}{\operatorname{sen}\beta} = e$$

y desarrollando el sen $(\omega - \varphi)$:

$$a\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} - b\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{\operatorname{sen}\beta} + b\frac{\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\beta} = e$$

o bien

$$\left(\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{b\cos\omega}{\operatorname{sen}\beta}\right)\operatorname{sen}\varphi - \frac{b\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\beta}\cos\varphi = e. \qquad (6)$$

Para resolver esta ecuación en φ, empleamos otro ángulo auxiliar λ, dado por la igualdad siguiente:

$$\frac{\frac{b \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \beta}}{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{b \cos \omega}{\operatorname{sen} \beta}} = \operatorname{tg} \lambda \tag{7}$$

o bien

$$\frac{b \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta + b \operatorname{sen} \alpha \cos \omega} = \operatorname{tg} \lambda. \tag{8}$$

Introduciendo este ángulo auxiliar en la ecuación (6), se convierte ésta en la que sigue:

$$\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \lambda = \frac{e}{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{b \cos \omega}{\operatorname{sen} \beta}}$$

o bien

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \lambda - \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda = \frac{e \cos \lambda}{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{b \cos \omega}{\operatorname{sen} \beta}}$$

y ya tenemos la siguiente ecuación para hallar φ:

$$\operatorname{sen} (\varphi - \lambda) = \frac{e \cos \lambda}{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{b \cos \omega}{\operatorname{sen} \beta}}.$$

Esta ecuación puede ponerse en otra forma más sencilla, teniendo en cuenta la igualdad (7), a saber:

$$\operatorname{sen} (\varphi - \lambda) = \frac{e}{b} \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \omega}. \tag{9}$$

EJEMPLO. El problema anterior no tiene gran aplicación práctica, pero hay casos en que su conocimiento puede reportar indudables ventajas. Por ejemplo, al hacer el plano de población de Hannover, al llegar a la Königsworther Platz, no encontramos punto alguno que reuniera buenas condiciones para su fijación o determinación trigonométrica; pero, en cambio, desde cinco puntos de la plaza se veían varios vértices de triangulación, como representa la figura 458. Estos cinco puntos quedaron unidos por una pequeña red poligonal, de modo que su posición relativa quedó determinada con bastante exactitud, y finalmente se tomó desde cada punto el ángulo formado por los lados de la poligonal con las visuales a los vértices.

Como ejemplo para la aplicación de las anteriores fórmulas, consideremos los puntos B, D y E, con sus visuales respectivas a Wasserturm, Christus y Palmenhaus, según se ve en la figura 459, a escala arbitraria y con la notación ya empleada anteriormente en la figura 457.

Las coordenadas de los tres vértices conocidos Wasserturm (*Wa*), Christus (*Ch*) y Palmenhaus (*Pa*) son las siguientes:

	y	x
Wasserturm. . .	— 25538,488	— 29071,474
Christus	— 24158,271	— 26989,625
Palmenhaus. . .	— 25977,983	— 28706,108

De aquí se deducen en primer lugar los acimutes y las distancias necesarios para el cálculo, y que son:

$$\begin{array}{ll} (Pa\ Wa) = 172^\circ\,33'\,34{,}8'' & \log Pa\ Wa = \log a = 3.530705 \\ (Pa\ Ch) = 125\ \ 11\ \ 48{,}2 & \log Pa\ Ch = \log b = 3.347686 \\ \hline \gamma = \ 47^\circ\,21'\,46{,}6'' & \end{array}$$

Los ángulos observados fueron los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \delta = 111^\circ\,02'\,26{,}9'' & \xi = \ 24^\circ\,38'\,39{,}5'' \\ \varepsilon = 169\ \ 52\ \ 00{,}0 & \eta = 239\ \ 33\ \ 18{,}2 \end{array}$$

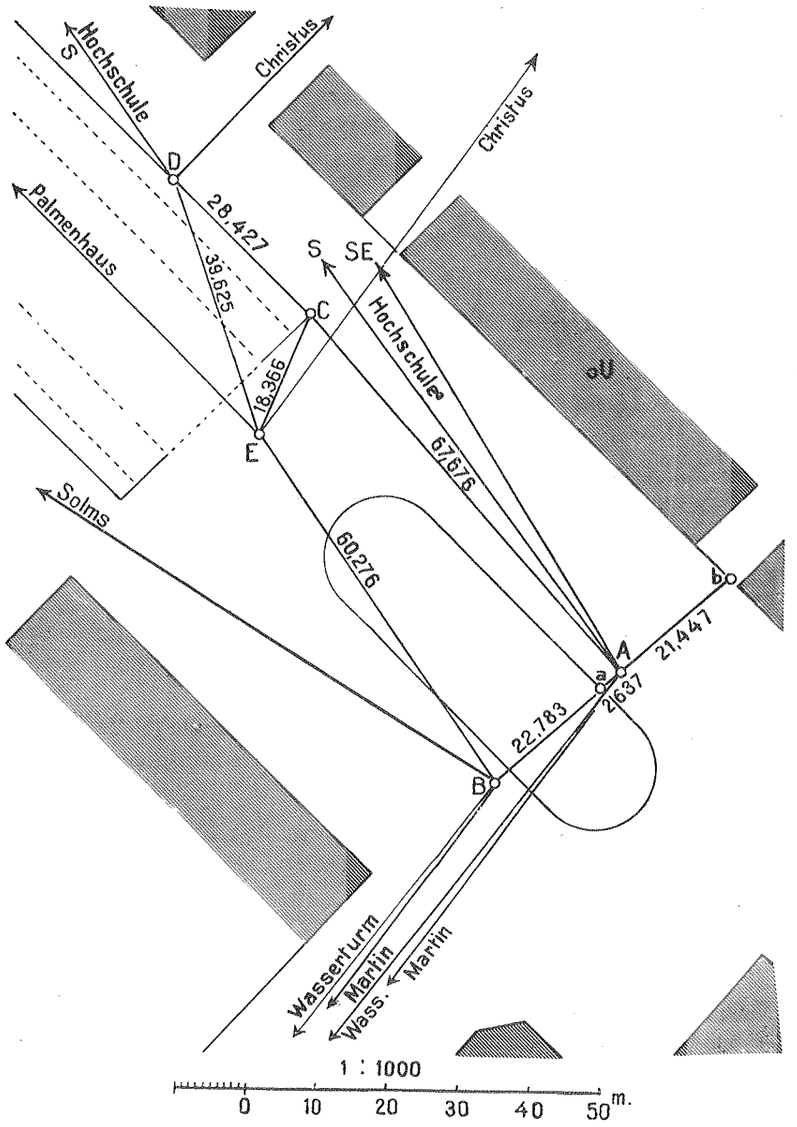


Fig. 458. — La Königsworther Platz de Hannover

y las distancias medidas, como se indica en la figura 458, fueron:

$$p = 60{,}276 \qquad q = 39{,}625$$

Aplicando a estos datos la fórmula (1) de la página 417, se obtienen los dos ángulos α y β:

$$\alpha = 100^\circ\,54'\,26{,}9'' \qquad \beta = 84^\circ\,11'\,57{,}7''$$

y según la fórmula (2) de la misma página, se tiene el cálculo siguiente:

p	1.780144	q	1.597969	$EQ = +57{,}292$
sen δ	9.970033	sen η	9.935566 n	$-EP = +34{,}337$
	1.750177		1.533535 n	$e = +91{,}629$
sen α	9.992082	sen β	9 997771	
EQ	1.758095	EP	1 535764 n	

Y la fórmula (4) nos da:

$$\omega = 127^\circ\,31'\,48{,}8''.$$

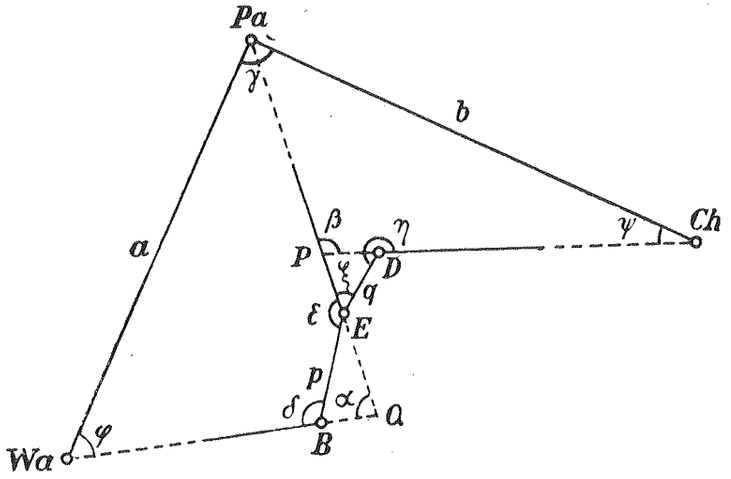


Fig. 459

Vamos ahora a calcular el ángulo auxiliar λ según la fórmula (8) de la página 418, y los ángulos φ y ψ según la (9) de la misma página y la (3) de la página 417.

	b	3.347686				b	3.347686
	sen ω	9.899291	a	3.530705		cos ω	9.784746 n
	sen α	9.992082	sen β	9.997771		sen α	9.992082
Numerador		3.239059		3.528476			3.124514 n
				+ 3376,569			− 1332,030

Denominador = 2044,539

Numerador	3.239059	e	1.962033	$\varphi - \lambda =$	1° 54′ 48,4″
Denominador	3.310595	$1:b$	6.652314	$\lambda =$	40° 18′ 08,6″
tg λ	9.928464	sen β	9.997771	$\varphi =$	42° 12′ 57,0″
$\lambda = 40^\circ\,18'\,08{,}6''$		sen λ	9.810784	$\omega =$	127° 31′ 48,8″
		$1:$sen ω	0.100709	$\psi =$	85° 18′ 51,8″
		sen $(\varphi-\lambda)$	8.523611		

Ya podemos calcular las distancias $Pa\,Q$ y $Pa\,P$, por la ley de los senos:

a	3.530705	b	3.347686
sen φ	9.827321	sen ψ	9.998546
$1:$sen α	0.007918	$1:$sen β	0.002229
$Pa\,Q$	3.365944	$Pa\,P$	3.348461
$Pa\,Q = 2322{,}437$		$Pa\,P = 2230{,}800$	

Como comprobación, obtengamos la distancia e, por diferencia entre $Pa\,Q$ y $Pa\,P$, que resulta ser $Pa\,Q - Pa\,P = e = 91{,}637$, valor que concuerda, con bastante exactitud, con el antes hallado directamente.

Tomemos ahora las distancias antes calculadas

$$EQ = 57{,}292 \qquad \text{y} \qquad EP = -34{,}337$$

y tendremos:

$$Pa\,E = 2265{,}145 \qquad \text{y} \qquad Pa\,E = 2265{,}137$$

Para calcular el acimut $(Pa\,E)$, tenemos:

$(Pa\,Wa) = 172^\circ\,33'\,34{,}8''$	$(Pa\,Ch) = 125^\circ\,11'\,48{,}2''$
$\omega + \xi + \varepsilon = 323\ 07\ 23.9$	$\psi + \xi + \eta = 349\ 30\ 49{,}5$
$(Pa\,E) = 135^\circ\,40'\,58{,}7''$	$(Pa\,E) = 135^\circ\,40'\,58{,}7''$

Con estos valores numéricos pueden ya calcularse las coordenadas del punto E, y tomando el promedio de los dos valores de $Pa\,E$, resulta:

$Pa\,E$	3.355094	$Pa\,E$	3 355094
sen $(Pa\,E)$	9.844 46	cos $(Pa\,E)$	9.854600 n
$y_e - y_{p_a}$	3.199340	$x_e \quad x_{p_a}$	3.209694 n
$y_e \cdots y_{p_a} = +1582{,}486$		$x_e - x_{p_a} = -1620{,}667$	
$y_{p_a} = -25977{,}983$		$x_{p_a} = -25706{,}108$	
$y_e = -24395{,}497$		$x_e = -27326{,}775$	

Una vez determinado el punto E, se calculan las coordenadas de los puntos B y D, en función de las de aquél, del modo siguiente:

$(E\,Pa) = 315^\circ\,40'\,58{,}7''$	$(E\,Pa) = 315^\circ\,40'\,58{,}7''$
$-\varepsilon = -169\ 52\ 00{,}0$	$+\xi = +\ 24\ 38\ 39{,}5$
$(E\,B) = 145^\circ\,48'\,58{,}7''$	$(E\,D) = 340^\circ\,19'\,38{,}2''$
$p = E\,B = 60{,}276$	$q = E\,D = 39{,}625$

$E\,B$	1.780144	$E\,B$	1.780144	$E\,D$	1.597969	$E\,D$	1.597969
sen $(E\,B)$	9.749619	cos $(E\,B)$	9.917632 n	sen $(E\,D)$	9.527175 n	cos $(E\,D)$	9.973881
$y_b - y_e$	1 529763	$x_b - x_e$	1.697776 n	$y_d - y_e$	1.125144 n	$x_d - x_e$	1.571850
$y_b - y_e = +\ 33{,}886$		$x_b - x_e = -\ 49{,}863$		$y_d \quad y_e = -\ 13{,}340$		$x_d - x_e = +\ 37.312$	
$y_e = -24395{,}497$		$x_e = -27326{,}775$		$y_e = +24395{,}497$		$x_e = -27326{,}775$	
$y_b = -24361{,}631$		$x_b = -27376{,}638$		$y_d = -24408{,}837$		$x_d = -27289{,}463$	

Como comprobación final, calculemos los acimutes $(B\,Wa)$ y $(D\,Ch)$ en función de las coordenadas de los puntos B y D, y tendremos:

$$(B\,Wa) = 214^\circ\,46'\,31{,}1'' \qquad (D\,Ch) = 39^\circ\,53'\,01{,}2''.$$

Por otra parte, tenemos también:

$$\begin{array}{rr|rr} (BE) = & 325^\circ\,48'\,58{,}7'' & (DE) = & 160^\circ\,19'\,38{,}2'' \\ -\delta = & -111\;\;02\;\;26{,}9 & +\eta = & +239\;\;33\;\;18{,}2 \\ \hline (B\,Wa) = & 215^\circ\,46'\,31\;8'' & (D\,Ch) = & 39^\circ\,52'\,56{,}4'' \end{array}$$

valores que, para las distancias tan cortas BE y DE, concuerdan bastante bien con los anteriores.

§ 99. Método de intersección recíproca

Supongamos que se dan tres puntos A, B, C (fig. 460); se trata de determinar un cuarto punto P, midiendo el ángulo $APB = \alpha$ y fijando la dirección CP por medio del ángulo β, valiéndose de otros puntos dados, con ayuda de los acimutes de los lados que los unen (véase el estado de ángulos de la página 383).

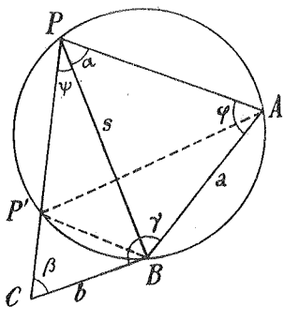


Fig. 460

Como se ve, este caso es una generalización del método de intersección lateral o mixta de que ya nos hemos ocupado anteriormente (págs. 388 y 395). En el círculo determinado por el ángulo α y la cuerda AB, debe encontrarse el punto P, y la recta CP corta a este círculo en P'.

Vamos a prescindir de la parte práctica, por así decirlo, del problema, es decir, de las condiciones en que haya que aplicarlo en operaciones de campo (por ejemplo, cuando no se disponga de la visual PC, etc.), y vamos a estudiarlo desde el punto de vista teórico o matemático. Supongamos dados los puntos A, B, C por sus coordenadas y medidos los ángulos α y β, o bien, medido el primero y el acimut (CP). Se trata de calcular, con estos datos, las coordenadas del punto P.

De las coordenadas de los tres puntos A, B, C se deducen los acimutes (BA) y (BC) y los lados a y b, con lo cual queda también determinado el ángulo γ.

Para resolver el cuadrilátero $ABCP$ consideremos los ángulos φ y ψ (fig. 460). Es evidente que tendremos:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma). \tag{1}$$

De los dos triángulos ABP y BCP se deduce:

$$s = a\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha} = b\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\psi} \tag{2}$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = k, \tag{3}$$

pudiéndose así calcular la constante k.

Ahora bien, se sabe que:

$$\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi = \frac{1}{2}\cos(\varphi-\psi) - \frac{1}{2}\cos(\varphi+\psi)$$

y de aquí resulta:

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos(\varphi+\psi) + 2k. \tag{4}$$

Aunque ya pueden calcularse los ángulos φ y ψ con las ecuaciones (1) y (4), vamos

a poner esta última en forma logarítmica; para ello, tenemos un ángulo auxiliar λ, dado por la condición siguiente:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}{2k} \tag{5}$$

y sustituyendo el valor de $2k$ deducido de esta ecuación en la (4), tendremos:

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos(\varphi+\psi) + \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tg}\lambda}$$

o sea

$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{\cos(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sen}(\varphi+\psi)\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$$

o lo que es igual:

$$\cos(\varphi-\psi) = \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\psi+\lambda)}{\operatorname{sen}\lambda}. \tag{6}$$

Una vez calculados los ángulos φ y ψ, deducidos de las ecuaciones (1) y (6), se deduce de (2) el valor de s, y se tiene:

$$(BP) = (BC) + 180^\circ - (\beta+\psi) = (BA) - 180^\circ + (\alpha+\psi)$$

y ya puede procederse al cálculo de las coordenadas de P.

Como comprobación, se pueden deducir los acimutes (PA), (PB) y (PC) en función de las coordenadas halladas, y ver si $(PB)-(PA)$ resulta igual a α y $(CB)-(CP)$ igual a β.

Apliquemos lo expuesto al siguiente ejemplo numérico:

$$\text{Coordenadas dadas} \left\{ \begin{array}{c|cc} & y & x \\ A & -12933{,}28 & +34028{,}32 \\ B & -17464{,}12 & +33001{,}92 \\ C & -16500{,}84 & +31547{,}88 \end{array} \right\} \tag{7}$$

Sea, además, el ángulo medido en P:

$$APB = \alpha = 69^\circ\,33'\,42''. \tag{8}$$

y supongamos determinado el acimut (CP),

$$(CP) = 3^\circ\,17'\,36''. \tag{9}$$

De las coordenadas de A, B y C se deduce:

$$\left.\begin{array}{ll} (BA) = & 77^\circ\,14'\,09'' \quad \log a = 3.667046 \\ (BC) = & 146\;\;28\;\;34 \quad\;\; \log b = 3.241590 \end{array}\right\} \tag{10}$$

De las fórmulas (9) y (10) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = (CB) - (CP) = 323^\circ\,10'\,58'' \\ \gamma = (BA) - (BC) = 290\;\;45\;\;35 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para aplicar las fórmulas anteriores. La fórmula (1) nos da:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma) = 360^\circ - 683^\circ\,30'\,15''$$

y agregando 360°, para evitar el ángulo negativo, se tiene:

$$\varphi + \psi = 36^\circ\,29'\,45''. \tag{12}$$

La fórmula (3) nos da:

$$\log k = 9.323925\,n$$

y de las (5) y (6) resulta:

$$\lambda = 125^\circ\,20'\,04'', \quad \varphi - \psi = 67^\circ\,31'\,38'' \tag{13}$$

y de las (12) y (13) se deducen los valores de φ y ψ:

$$\varphi = 52^\circ\,00'\,42'' \qquad \psi = 344^\circ\,29'\,03''.$$

Para el cálculo de las coordenadas empezaremos por hallar el acimut (BP) en función de los (BC) y (BA):

$$\left.\begin{aligned}(BP) &= (BC) + 180^\circ - (\beta + \psi) = 18^\circ\,48'\,33'' \\ (BP) &= (BA) - 180^\circ + (\alpha + \varphi) = 18\ \ 48\ \ 33\ \ \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

y el logaritmo de s:

$$\log s = \log \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} = \log \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \psi} = 3.591\,885 \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} s \operatorname{sen} (BP) &= +\ 1259{,}80 \\ s \cos (BP) &= +\ 3698{,}72 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Las coordenadas del punto P serán:

$$\begin{array}{lll} B: & y_b = -\ 17464{,}12 & x_b = +\ 33001{,}92 \\ & +\ \ 1259{,}80 & +\ \ 3698{,}72 \\ \hline P: & y_p = -\ 16204{,}32 & x_p = +\ 36700{,}64 \end{array} \quad (17)$$

Comprobación: De las coordenadas (7) y (17) se deduce:

$$(PA) = 129^\circ\,14'\,51'' \qquad (PB) = 198^\circ\,48'\,33'' \qquad (PC) = 183^\circ\,17'\,37''$$

$$\begin{aligned}(PB) - (PA) &= \ \ 69^\circ\,33'\,42'' = \alpha \\ (CB) - (CP) &= 323\ \ 10\ \ 57\ \ = \beta\end{aligned}$$

valores que coinciden con los hallados en (8) y (11).

La figura correspondiente a este ejemplo numérico no es precisamente la 460; la solución dada en las fórmulas (1) a (6) sirve para una disposición cualquiera de los puntos, con tal que los ángulos sigan exactamente la notación de dicha figura, es decir, que el ángulo α se cuente de izquierda a derecha, yendo de la dirección PA a la PB, etc.

Nos queda sólo que hacer una observación sobre el cálculo de λ en la ecuación (5) y el de $\varphi - \psi$ en la (6). Para λ resultan de (5) dos valores que se diferencian entre sí 180°; a estos dos valores corresponden también dos valores de $\varphi + \psi + \lambda$, de modo que cos $(\varphi - \psi)$, en la ecuación (6), sólo tiene un significado; ahora bien, a este valor cos $(\varphi - \psi)$ corresponden dos valores de $\varphi - \psi$, pues se sabe que cos $(+x) =$ cos $(-x)$, como se ve en la figura 460, en la cual no sólo P sino también P', resuelven el problema propuesto. Para hacer desaparecer esta indeterminación y saber cuál es el punto buscado, basta tener a la vista el croquis del sistema de puntos en cuestión, pero esto no es suficiente cuando los dos puntos P y P' caen próximos entre sí; ahora bien, este caso no tiene importancia práctica alguna, pues la recta CP corta al círculo formando con el mismo un ángulo muy agudo, y el punto queda indeterminado, mejor dicho, determinado de modo inaprovechable.

Aunque, como ya hemos dicho, es poco frecuente la aplicación de este problema, hay que reconocer su importancia práctica. Una, la primera, de las objeciones opuestas a este problema, es la siguiente: si desde C es posible ver a P, ¿por qué no ha de poderse ver C desde P? Todo el que haya trabajado en Topografía sabe con cuánta frecuencia falla esta reciprocidad de visuales, especialmente al hacer triangulaciones.

La solución que acabamos de exponer fué dada por Klingatsch en Zeitschr. f. Verm., 1911, y puesta en forma logarítmica por Eggert mediante las fórmulas (5) y (6).

§ 100. Fijación de dos puntos (problema de Hansen)

Supongamos que se dan las coordenadas de dos puntos A y B (fig. 461) y que en otros dos puntos P_1 y P_2 se miden los cuatro ángulos α, β, α' y β'; se trata de hallar las coordenadas de los dos puntos P_1 y P_2.

Conociendo las coordenadas de A y B, se puede deducir inmediatamente la distancia $AB = a$; pero la resolución de los triángulos AP_1B y AP_2B no es tan fácil como a primera vista puede parecer.

La posición de los cuatro puntos no ha de ser forzosamente la representada en la figura 461, sino que puede ser otra cualquiera, como, por ejemplo, la que se ve en la figura 462 o en la 463. Sin embargo, vamos a tomar la figura 461 como fundamental, y después generalizaremos las fórmulas para cualquier posición de los puntos.

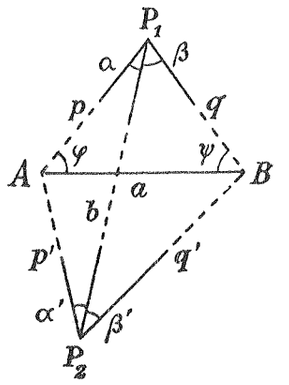


Fig. 461

Solución indirecta del problema. En la obra «Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, Paris 1799», da Delambre una solución indirecta para los triángulos de la figura 461, que consiste, en síntesis, en lo siguiente: se toma, para la longitud desconocida $P_1P_2 = b$, un valor aproximado o un valor cualquiera b_0; aplicando la ley de los senos y conociendo los ángulos medidos, se pueden resolver los triángulos AP_1P_2 y P_2P_1B, obteniendo para sus lados los valores p_0, q_0, etc. De este modo se conocen, para el cálculo del triángulo AP_1B, dos lados y el ángulo comprendido y, además, se tiene:

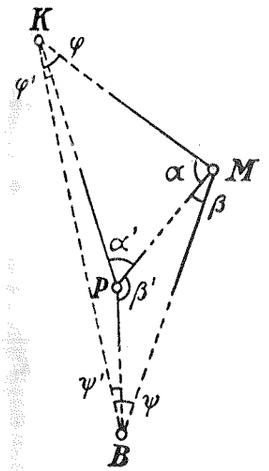


Fig. 462

$$\varphi + \psi = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (1)$$

y según la ley de las tangentes:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{q_0 - p_0}{q_0 + p_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}. \quad (2)$$

Despejando φ y ψ entre las ecuaciones (1) y (2), se puede calcular el tercer lado AB del triángulo AP_1B, para el cual se obtiene el valor a_0.

De esta manera queda resuelta toda la figura 461, aunque todas las longitudes resultan tanto más grandes o más pequeñas que las verdaderas, como la P_1P_2 lo es en relación con su valor supuesto b_0. Ahora bien, como la longitud a de AB, calculada por coordenadas, es la verdadera, bastará, para obtener el verdadero valor de las demás longitudes, multiplicarlas respectivamente por el cociente $\frac{a}{a_0}$. O bien, en el cálculo logarítmico, bastará sumar a los valores de $\log p_0$ y $\log q_0$ hallados, la corrección $\log \frac{a}{a_0}$.

Vamos a aplicar este procedimiento de cálculo a la figura 462, con datos numéricos. Sean los puntos K y B dados por sus coordenadas:

$$\begin{array}{lll} & y & x \\ K & +37855{,}30 & +6620{,}10 \\ B & +39082{,}60 & +1551{,}00 \end{array} \quad (3)$$

y sean los cuatro ángulos medidos u observados:

$$\begin{array}{ll|ll} \alpha = & 89^\circ 58' 34'' & \alpha' = & 54^\circ 35' 57'' \\ \beta = & 17\ 13\ 03 & \beta' = & 144\ 24\ 18 \\ \hline \alpha+\beta = & 107^\circ 11' 37'' & \alpha'+\beta' = & 199^\circ 00' 15'' \\ \varphi+\psi = & 72\ 48\ 23 & \varphi'+\psi' = & 19\ 00\ 15 \end{array} \quad (4)$$

Ahora podemos tomar para la distancia PM un valor cualquiera, por ejemplo, $PM = 1$; pero en el caso particular que estamos tratando, habíamos hallado, de antemano, sobre un plano, el valor aproximado

$$\log PM = 3.296665 \qquad PM = 1980{,}00. \quad (5)$$

Con este valor aproximado y con los ángulos medidos (4), podemos resolver ya los triángulos PMK y PMB aplicando la ley de los senos, obteniéndose, siempre aproximadamente:

$$\begin{array}{ll} \log PK = 3.533512 & \log MK = 3.444733 \\ PK = 3415{,}95 & MK = 2784{,}41 \\ \log PB = 3.269264 & \log MB = 3.562935 \\ PB = 1858{,}94 & MB = 3655{,}40 \end{array} \quad (6)$$

y según la ley de las tangentes tendremos:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{MB-MK}{MB+MK}\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2} \qquad \frac{\varphi-\psi}{2} = 5^\circ 41' 42{,}4''.$$

Este valor, en unión del $\dfrac{\varphi+\psi}{2} = 36^\circ 24' 11{,}5''$ sacado de (4) nos da:

$$\varphi = 42^\circ 5' 54'' \qquad \psi = 30^\circ 42' 29''.$$

Después se hallan φ' y ψ' del siguiente modo:

$$\varphi' = \varphi - [180^\circ - (\alpha+\alpha')] \qquad \psi' = \psi - [180^\circ - (\beta+\beta')]$$

es decir:

$$\begin{array}{ll} \varphi' = & 6^\circ 40' 15'' \\ \psi' = & 12\ 19\ 50 \end{array}$$

y la comprobación la tenemos en la igualdad:

$$\varphi' + \psi' = \alpha' + \beta' - 180^\circ.$$

Ahora se puede ya calcular la distancia BK en los dos triángulos BMK y BPK, por la ley de los senos, obteniéndose el valor aproximado:

$$\log BK = 3.716743. \quad (7)$$

Por otra parte, de las coordenadas de B y K (3) se deduce el valor definitivo y exacto de BK, a saber:

$$\log BK = 3.717301 \qquad \text{y} \qquad (BK) = 346^\circ 23' 23''. \quad (8)$$

Comparando los resultados (7) y (8) se ve que la corrección Δ del $\log BK$ es la que sigue:

$$\Delta \log BK = +0{,}000558. \quad (9)$$

Esta corrección debe aplicarse a todos los logaritmos anteriores, y puesto que combinando todos los ángulos con el acimut orientado (BK) dado en (8), resultan todos los ángulos orientados, se tiene, en resumen:

Tabla de distancias y orientaciones

$$\begin{array}{ll|ll} \log KB = 3.717301, & (KB) = 166^\circ 23' 23'' & \log BP = 3.269822, & (BP) = 358^\circ 43' 13'' \\ \log KM = 3.445291, & (KM) = 124\ 17\ 29 & \log BM = 3.563493, & (BM) = 17\ 5\ 52 \\ \log KP = 3.534070, & (KP) = 159\ 42\ 58 & \log PM = 3.297223, & (PM) = 34\ 18\ 55 \end{array} \quad (10)$$

Ya así pueden calcularse las coordenadas de los puntos P y M, que coinciden con las deducidas en función de las de K y B:

$$\begin{array}{lll} P: & y = +39041{,}04 & x = +3411{,}86 \\ M: & y = +40158{,}69 & x = +5049{,}34 \end{array} \quad (11)$$

Solución directa. Para resolver directamente los triángulos en cuestión, vamos a seguir un procedimiento análogo al aplicado por J. T. Mayer al problema de intersección inversa (véase página 396).

Partiendo de la figura 461, pongamos la identidad:

$$\frac{p}{b}\frac{b}{q}\frac{q}{p} = 1$$

y sustituyamos estos tres cocientes por los de los respectivos senos de los ángulos opuestos a los lados que los forman, con lo cual tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}\frac{\operatorname{sen}(\beta+\beta')}{\operatorname{sen}\beta'}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = 1. \quad (12)$$

Ahora bien, según (1),

$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}(\varphi+\alpha+\beta)$$

y sustituyendo en (12) para despejar el último cociente, invertido, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}(\varphi+\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\beta')\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\operatorname{sen}\beta'}$$

o sea

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos(\alpha+\beta)+\cos\varphi\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\beta')\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\operatorname{sen}\beta'}$$

de donde:

$$\cot\varphi = -\cot(\alpha+\beta) + \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\frac{\operatorname{sen}(\beta+\beta')\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\operatorname{sen}\beta'}. \quad (13)$$

Esta ecuación corresponde a la (5) de la página 397.

También podemos llegar a otra ecuación que nos dé $\cot\varphi$, partiendo de la expresión:

$$\frac{q}{a}\frac{a}{q'}\frac{q'}{q} = 1$$

que se convierte en esta otra, haciendo sustitución análoga a la anterior:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\frac{\operatorname{sen}(\alpha'+\beta')}{\operatorname{sen}(\varphi+\alpha+\alpha')}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta'} = 1 \quad (14)$$

y del mismo modo llegamos a esta otra:

$$\cot\varphi = -\cot(\alpha+\alpha') + \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}\frac{\operatorname{sen}(\alpha'+\beta')\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta'}. \quad (15)$$

Estas ecuaciones, y las análogas para el ángulo ψ, fueron halladas por Lindemann y Firmenich en 1879.

Una vez calculado el ángulo φ, pueden ya resolverse los triángulos de la figura 461, con sólo aplicar la ley de la proporcionalidad de senos y lados.

Esta solución no sólo sirve para el caso de la figura 461, sino que es aplicable a cualquier disposición de los puntos, con tal de conservar la misma notación que en aquélla; por ejemplo, en la figura 462. En la figura 463 se ve otra disposición completamente distinta, pero conservando los ángulos la misma notación que en la figura 461: también en este caso son aplicables directamente las fórmulas (13) y (15).

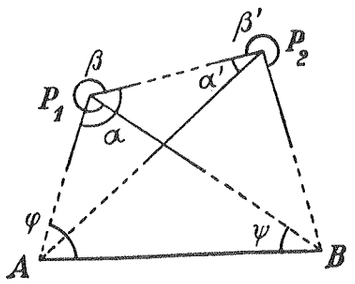


Fig. 463

También aquí puede aplicarse el artificio de cálculo empleado en la página 398 para poner las dos ecuaciones (13) y (15) en forma logarítmica. Para ello se procede del modo siguiente:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\,\frac{\operatorname{sen}\,\beta+\beta')\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\operatorname{sen}\beta'}=\cot\lambda_1 \qquad (16)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha'+\beta')\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta'}=\cot\lambda_2 \qquad (17)$$

y sustituyendo valores en las ecuaciones (13) y (15) se convierten estas últimas en las siguientes:

$$\cot\varphi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\lambda_1)}{\operatorname{sen}\,\alpha+\beta)\operatorname{sen}\lambda_1} \qquad (18)$$

$$\cot\varphi=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha'-\lambda_2)}{\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')\operatorname{sen}\lambda_2}. \qquad (19)$$

Aplicando estas fórmulas al ejemplo numérico de la página 426, tendremos, para sustituir en las ecuaciones (16) y (18) y en las (17) y (19), los siguientes valores:

$\alpha+\beta=107°\,11'\,37''$	$\alpha+\alpha'=144°\,34'\,31''$
$\beta+\beta'=161\;\;37\;\;21$	$\alpha'+\beta'=199\;\;00\;\;15$
$\alpha+\alpha'=144\;\;34\;\;31$	$\alpha+\lambda=107\;\;11\;\;37$

y, por consiguiente:

$\log\cot\lambda_1=9.901652$	$\log\cot\lambda_2=9.475765\,n$
$\lambda_1=51°\,25'\,58''$	$\lambda_2=-73°\,21'\,00''$
$\alpha+\beta-\lambda_1=55\;\;45\;\;39$	$\alpha+\alpha'-\lambda_2=\;\;217\;\;55\;\;31$

y finalmente:

$\log\cot\varphi=0.044062$	$\log\cot\varphi=0.044064$
$\varphi=42°\,05'\,54''$	$\varphi=42°\,05'\,54''$

valor que, como se ve, coincide con el hallado en la página 426.

Solución de Delambre. Además de la solución indirecta que hemos estudiado anteriormente (pág. 425), dió Delambre otra solución directa, valiéndose de un ángulo auxiliar, la cual corresponde a la solución dada por Kästner al problema de intersección inversa (página 398).

En la figura 461 tenemos, entre los dos ángulos desconocidos φ y ψ, las siguientes relaciones:

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=90°-\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{q}{p}=\frac{\operatorname{sen}\beta'\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}{\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}(\beta+\beta')}$$

Ahora se introduce un ángulo auxiliar μ dado por la igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta'\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')}{\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}(\beta+\beta')}=\cot\mu. \qquad (20)$$

Y lo mismo que para la intersección inversa (pág. 398) pongamos:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot(45°+\mu). \qquad (21)$$

Conociendo $\frac{\varphi+\psi}{2}$ y $\frac{\varphi-\psi}{2}$ podemos deducir los valores de φ y ψ, y ya puede resolverse todo el cuadrilátero, con sólo aplicar la ley de los senos.

Para el ángulo auxiliar μ resultan de la igualdad (20) dos valores, que se diferencian en 180°; pero esto no tiene influencia alguna en la ecuación (21), ya que los dos valores de μ dan el mismo valor para $\cot(45°+\mu)$.

Del mismo modo resultan, en (21), dos valores para $\frac{\varphi-\psi}{2}$, diferentes 180° uno de otro; ahora bien, en la figura 461 y en la 463 se ve que $\varphi-\psi$ está comprendido entre 0° y ± 180°, y, por lo tanto, $\frac{\varphi-\psi}{2}$ estará comprendido entre 0° y ± 90°. Es decir, que $\frac{\varphi-\psi}{2}$ estará en el primero o en el cuarto cuadrante, según que $\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$ sea positiva o negativa.

La aplicación a nuestro ejemplo numérico de la página 426 nos da:

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=90°-\frac{\alpha+\beta}{2}=36°\,24'\,12''.$$

Y la ecuación (20) da:

$$\log\cot\mu=0.118203 \qquad \mu=37°\,17'\,50''$$

y según la (21):

$$\log\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=8.998828 \qquad \text{y} \qquad \frac{\varphi-\psi}{2}=5°\,41'\,43''$$

resultando finalmente:

$$\varphi=42°\,05'\,55'' \qquad \psi=30°\,42'\,29''$$

valores que coinciden con los obtenidos en la página 426.

Una vez conocidos los ángulos φ y ψ, pueden ya calcularse todos los lados y ángulos de los triángulos, y, por consiguiente, las coordenadas de los dos puntos en cuestión.

Punto auxiliar de Collins. Lo mismo que para la intersección inversa (pág. 404), tenemos también una sencilla solución para la fijación de dos puntos, empleando dos puntos auxiliares, como se ve en la figura 464.

Sean P_1 y P_2 los dos puntos que hay que fijar A, y B los dos puntos dados. Circunscribiendo un círculo al triángulo ABP_1 y otro al ABP_2, se ve que los dos círculos cortan a la línea de unión P_1P_2 en los puntos Q_1 y Q_2, que desempeñan aquí el mismo papel que el punto auxiliar de Collins en la intersección inversa (página 404). En los dos triángulos ABQ_1 y ABQ_2, tenemos los ángulos α, β, α' y β', iguales a los observados en P_1 y en P_2, por lo cual pueden calcularse las coordenadas de Q_1 y Q_2 por el método de intersección directa. Después se halla el acimut $(Q_1Q_2)=(P_1P_2)$ y con la diferencia $(P_2P_1)-(BA)$, que es igual al ángulo formado por las dos diagonales del cuadrilátero P_1BP_2A, se pueden resolver todos los triángulos, con

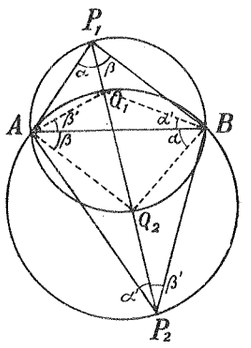


Fig. 464

lo cual la fijación de los puntos P_1 y P_2 se hace por intersección directa desde A y B.

Creemos innecesario y superfluo el deducir y detallar todas las fórmulas trigonométricas correspondientes a este cálculo.

La aplicación del punto de Collins al problema anterior está descrita y estudiada en la revista inglesa «Philosophical Transactions», vol. XV, 1685, por un miembro desconocido de la «Philosophical Society» de Oxford. En «The South African Survey Journal», volumen III, 1928, dice E. T. Mc Caw que este autor desconocido era el entonces profesor de Astronomía de la Universidad de Oxford, John Caswell.

Precisión en la fijación de dos puntos. Considerando la figura 464, podemos desde luego decir, en cuanto a la precisión en la determinación de los puntos, que los cuatro puntos A, B, P_1, P_2, no deben estar en línea recta.

También se deduce de la misma figura que otra posición inutilizable de los cuatro puntos es aquélla en que los dos que se trata de determinar son tales que la recta que los une pasa por uno de los puntos dados, pues en este caso los dos puntos de Collins Q_1 y Q_2 coinciden con este último, y los dos P_1 y P_2 pueden caer en cualquier sitio de los dos círculos. Esta figura corresponde, pues, al *círculo peligroso* de la intersección inversa.

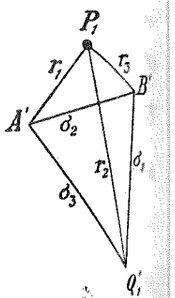


Fig. 465

De primera intención no puede decirse cuál es más ventajosa de las dos disposiciones de los cuatro puntos, si la representada en la figura 461, o la que se ve en la figura 463.

Acerca de la precisión en la determinación de un par de puntos, hicimos un estudio técnico detallado en 1911, del cual entresacamos las siguientes observaciones. Si partimos de la figura 464, podemos dividir la determinación del punto P_1 en dos partes o problemas separados; en efecto, en primer lugar podemos fijar el punto auxiliar Q_1 por intersección directa desde A y B, mediante los ángulos α' y β', y en segundo lugar, podemos determinar el punto P_1 por medio de los ángulos α y β (o sus suplementarios), por intersección inversa, con los puntos A, B y Q_1. Suponiendo sin error alguno los puntos A y B, y tomando para los cuatro ángulos observados el error medio $\pm m$, se puede hallar el error medio del punto Q_1 y también el del punto P_1. No vamos a desarrollar todo el cálculo, sino sólo remitirnos al resultado del estudio citado, diciendo únicamente que empleamos, como para las fórmulas de la intersección inversa (pág. 413), las recíprocas o inversas de las distancias, y utilizamos también dos figuras análogas a aquéllas, como se ve en las 465 y 466.

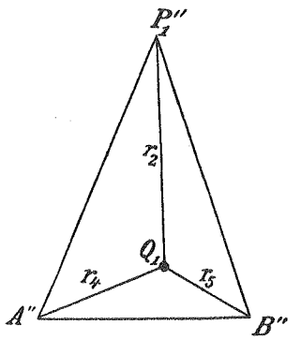


Fig. 466

En la figura 465 están tomadas, desde P_1, las recíprocas de las longitudes reales, a saber, $r_1 = \frac{1}{P_1 A}$, $r_2 = \frac{1}{P_1 Q_1}$ y $r_3 = \frac{1}{P_1 B}$, contadas sobre las respectivas direcciones de aquéllas, de modo que se forma el triángulo $A'B'Q'_1$, de lados σ_1, σ_2 y σ_3, y cuya superficie representamos por Δ.

Por otra parte, en la figura 466 tenemos tomadas, a partir de Q_1, las longitudes recíprocas $r_2 = \frac{1}{P_1 Q_1}$, $r_4 = \frac{1}{Q_1 A}$ y $r_5 = \frac{1}{Q_1 B}$. Designemos con los signos Δ_{24}, Δ_{25} y Δ_{45} respectivamente, las superficies de los triángulos cuyos lados concurrentes en el vértice común Q_1 son r_2 y r_4, r_2 y r_5, y r_4 y r_5, y en este supuesto, el error medio del punto P_1 estará dado por la siguiente expresión:

$$M^2 = \frac{1}{4\,\Delta^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \frac{\Delta_{24}^2 + \Delta_{25}^2}{\Delta_{45}^2}\right] m^2. \qquad (22)$$

Resulta interesante la confrontación de estas fórmulas con la (10) de la página 414, que da el error medio en la intersección inversa con tres puntos dados. Siendo las coordenadas de Q_1 exactas (es decir, sin error), se tiene para P_1, según dicha fórmula (10), a igualdad de pesos, el siguiente error medio:

$$M^2 = \frac{1}{4\,\Delta^2}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)\, m^2. \qquad (2\ )$$

El último término del segundo miembro de la fórmula (22) se debe a que el punto Q_1 no es un punto fijo dado, sino que está determinado por intersección directa desde A y B.

En el trabajo antes aludido, hemos discutido la ecuación (22) y trazado curvas para el error.

§ 101. Casos particulares del problema de Hansen

Además del caso corriente de determinar un par de puntos, conocidos que sean otros dos dados, hemos de considerar el caso general en que desde los dos puntos que se trata de fijar no sean visibles los puntos dados; y dentro de este caso general debemos distinguir dos particulares, según que se empleen tres o cuatro puntos conocidos.

I. **Determinación de un par de puntos con tres puntos dados.** Sean los tres puntos A, M y B (fig. 467), dados por sus respectivas coordenadas rectangulares, con lo cual se pueden conocer también todas las distancias entre unos y otros y los acimutes correspondientes.

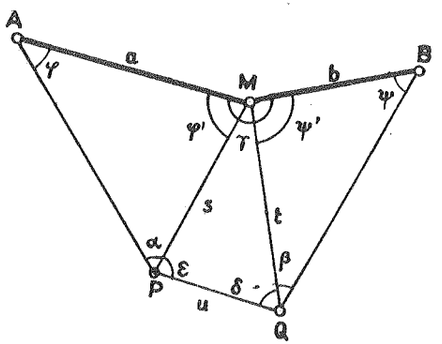


Fig. 467

Se supone que no ha sido posible encontrar *un* punto (en las cercanías de P y Q), desde el cual se vean los tres puntos dados A, M y B, pues de ser así, podría fijarse por intersección inversa, empleando estos últimos; únicamente se han encontrado dos puntos P y Q, visibles el uno del otro, y desde uno de los cuales el P, se ven los puntos dados A y M, y desde el otro, el B, se ven los M y B, pudiéndose, por consiguiente, medir los ángulos α, ε, δ y β.

Es evidente que los puntos P y Q pueden fijarse geométricamente respecto a los A, B y M, y la determinación trigonométrica puede hacerse siguiendo un método análogo al de intersección inversa simple.

De las coordenadas de A, M y B se tiene, como cálculo previo:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(AM) &= \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a}, \quad a = \frac{y_m - y_a}{\operatorname{sen}(AM)} = \frac{x_m - x_a}{\cos(AM)} \\ \operatorname{tg}(BM) &= \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b}, \quad b = \frac{y_m - y_b}{\operatorname{sen}(BM)} = \frac{x_m - x_b}{\cos(BM)} \\ \gamma &= (AM) - (BM). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La suma de los dos ángulos desconocidos φ y ψ es:

$$\varphi + \psi = 540^\circ - (\gamma + \alpha + \delta + \varepsilon + \beta)$$

y aplicando la ley de los senos en los tres triángulos formados:

$$s = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\varphi \qquad t = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\psi$$

$$\frac{s}{t} = \frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

Poniendo

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta}{a\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varepsilon} = \cot\mu,$$

por el método de intersección inversa ordinaria se tiene (pág. 398):

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot(\mu+45^\circ)$$

con lo cual ya pueden deducirse φ y ψ de las ecuaciones (2) y (6) y ya se tienen determinados todos los elementos de los tres triángulos. En las ecuaciones (3) se pueden calcular s y t, teniéndose como comprobación:

$$u = \frac{s}{\operatorname{sen}\delta}\operatorname{sen}(\delta+\varepsilon) = \frac{t}{\operatorname{sen}\varepsilon}\operatorname{sen}(\delta+\varepsilon)$$

Los ángulos en M serán:

$$\varphi' = 180^\circ - (\alpha+\varphi) \qquad \psi' = 180^\circ - (\beta+\psi)$$

los acimutes:

$$(MP) = (MA) - \varphi \qquad (MQ) = (MB) + \psi'$$
$$(PQ) = (PM) + \varepsilon \qquad (QP) = (QM) - \delta$$

y las coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= y_m + s\operatorname{sen}(MP), & y_q &= y_m + t\operatorname{sen}(MQ)\\ x_p &= x_m + s\cos(MP) & x_q &= x_m + t\cos(MQ)\\ y_q &= y_p + u\operatorname{sen}(PQ)\\ x_q &= x_p + u\cos(PQ) \end{aligned}\right\}$$

Además se pueden calcular las coordenadas en función de las de A y B, teniéndose así otra comprobación.

A continuación damos un ejemplo numérico, correspondiente a la figura 467:

	y	x
M	− 43432,68	+ 74370,26
A	− 46703,92	+ 75273,97
	+ 3271,24	− 903,71

	y	x
M	− 43432,68	+ 74370,26
B	41062.82	+ 75002 83
	− 2369,86	− 632,57

$\log a = 3.530683$ $\quad (AM) = 105^\circ\ 26'\ 36''$

$(BM) = 255^\circ\ 3'\ 18''$ $\quad \log b = 3.389668$

$\gamma = 210^\circ\ 23'\ 18''$

Supongamos que los ángulos medidos sean:

$\alpha = 58^\circ\ 17'\ 40''$

$\varepsilon = 81^\circ\ 2'\ 34''$

$\alpha + \varepsilon = 139^\circ\ 20'\ 14''$

$\varepsilon + \delta = 143^\circ\ 14'\ 47''$

$\beta = 37^\circ\ 16'\ 47''$

$\delta = 62^\circ\ 12'\ 13''$

$\beta + \delta = 99^\circ\ 29'\ 0''$

$\gamma + \alpha + \delta + \beta + \varepsilon = 449^\circ\ 12'\ 32''$

$\varphi + \psi = 90^\circ\ 47'\ 28''$

y según las fórmulas (5) y (6):

$$\mu = 47^\circ\ 43'\ 34'' \qquad \frac{\varphi-\psi}{2} = -2^\circ\ 45'\ 50''$$

$$\varphi = 42^\circ\ 37'\ 54'' \qquad \psi = 48^\circ\ 9'\ 34''$$

Aplicando las fórmulas (3), (7) y siguientes, resulta:

$$\log s = 3{,}431646 \qquad \log u = 3.261866 \qquad \log t = 2\ 479564$$

y finalmente:

$$y_p = -44632{,}69 \qquad x_p = +71949{,}63 \qquad y_q = -42888{,}89 \qquad x_q = +71402{,}75.$$

Desde el punto de vista práctico, ocurre muchas veces, sobre todo en planos de población, que desde cierto paraje se ven tres torres A, B, M, pero sin que se pueda hallar un punto desde el cual se vean las tres a la vez, a causa de obstáculos insuperables. En este caso hay que recurrir al método expuesto. Pero es evidente que no se tiene ninguna comprobación para dar como bueno el punto final; lo que entonces se puede hacer es buscar cerca de A otra torre o sitio alto A', bien visible, aun cuando por su situación no pueda determinarse el punto P con bastante seguridad con A', A y M. Una vez determinado el par de puntos P, Q, puede aprovecharse para la comprobación el punto A' (u otros análogos M', B').

Otra particularidad que se presenta con frecuencia consiste en que la distancia PQ es tan pequeña, que puede medirse directamente con la regla como un eje de poligonal. En este caso pueden resultar afectados los ángulos δ y ε, de error de excentricidad; pero si el centrado se hace con precisión (al milímetro), la medición puede darse como buena, y si después de determinados los puntos P y Q por el método antes expuesto, es decir, trigonométricamente, se ve que el resultado está de acuerdo con la comprobación que supone la medida directa de PQ, puede aceptarse la determinación como bien hecha, cosa que de otro modo no sería lícito admitir. Ahora bien, después de fijar trigonométricamente los puntos P, Q, sin tener en cuenta la distancia PQ (es decir, por intersección inversa respecto a A, M, B), quedan conocidas las distancias QM y QB, y puede centrarse perfectamente sobre P el ángulo β de Q, con lo cual se puede fijar nuevamente el punto P por intersección inversa respecto a A, M y B del modo ordinario.

Hay muchos casos en que el problema tratado encuentra aplicación práctica muy provechosa.

II. **Determinación de un par de puntos con cuatro puntos dados.** Sean A, B, A' y B' los cuatro puntos dados (fig. 468), y sean P y Q dos puntos visibles entre sí, tales, que desde uno de ellos, P, se vean dos de los puntos dados A y B, y desde el otro, Q, los otros dos dados A' y B'.

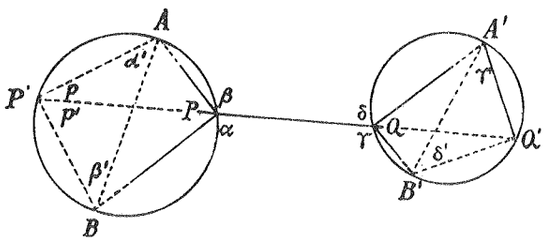


Fig. 468

Se miden en P los dos ángulos $APQ = \beta$ y $QPB = \alpha$; y en Q, los otros dos $BQP = \gamma$ y $PQA' = \delta$.

Se trata de determinar la posición de los dos puntos P y Q.

Para resolver gráficamente el problema, se circunscribe un círculo al triángulo ABP

y otro al $A'B'Q$; estos dos círculos cortan a la recta PQ en los puntos P' y Q'. Por estar P' sobre el círculo circunscrito a APB, se tiene:

$$\alpha' = 180° - \alpha \qquad \beta' = 180° - \beta \tag{9}$$

y del mismo modo para Q:

$$\gamma' = 180° - \gamma \qquad \delta' = 180° - \delta \tag{10}$$

El cálculo de las coordenadas de P y Q se hace como sigue. Se empieza por calcular las coordenadas de P' en función de las de A y B y de los ángulos α' y β', según el problema fundamental de la triangulación (§ 86); del mismo modo se calculan las coordenadas de Q'. De las coordenadas de P' y Q' se deduce el acimut $(P'Q')$, quedando resueltos los triángulos $AP'P$ y $BP'P$, y ya pueden calcularse las coordenadas de P.

De manera análoga se determina Q.

El ejemplo numérico siguiente corresponde a la figura 468:

Coordenadas dadas:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Punto } A & y_a = -1902{,}42 & x_a = +6782{,}72 \\ \text{» } B & y_b = -2917{,}44 & x_b = +4362{,}81 \\ \text{» } A' & y_a' = +2814{,}33 & x_a' = +6428{,}78 \\ \text{» } B' & y_b' = +1627{,}49 & x_b' = +4702{,}81 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Ángulos medidos:

$$\left.\begin{array}{ll} \beta = 132° 17' 8'' & \delta = 138° 9' 12'' \\ \alpha = 138° 9' 42'' & \gamma = 134° 7' 32'' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Según las fórmulas (9) y (10) se tiene:

de donde:

$$\left.\begin{array}{ll} \beta' = 47° 42' 52'' & \delta' = 41° 50' 48'' \\ \alpha' = 41\ 50\ 18 & \gamma' = 45\ 52\ 28 \\ P' = 90\ 26\ 50 & Q' = 92\ 16\ 44 \\ \hline 180° 00' 00'' & 180° 00' 00'' \end{array}\right\} \tag{13}$$

De las coordenadas (11) se deduce:

$$\left.\begin{array}{ll} \log BA = 3\,418990 & \log A'B' = 3.321112 \\ (BA) = 22° 45' 19'' & (A'B') = 214° 30' 50'' \end{array}\right\} \tag{14}$$

Con los elementos dados en (13) y (14) se pueden resolver los triángulos ABP' y $A'B'Q'$, llegando a hallar las coordenadas de P' y Q':

$$y_p' = -3656{,}08 \qquad x_p' = +5949{,}78 \qquad y_q' = +3089{,}82 \qquad x_q' = +5057{,}65.$$

Y de estas coordenadas se deduce el acimut y la distancia de P' a Q':

$$\begin{array}{lll} (P'Q') = (PQ) = 97° 32' 1'' & & \log P'Q' = 3.382805 \\ \text{Ángulo de dirección } (P'A) = 64° 35' 36'' & & \\ \text{» } \quad \text{» } \quad (P'P) = 97° 32' 1'' & \text{Ángulo } p = 32° 56' 25'' & \\ \text{» } \quad \text{» } \quad (P'B) = 155° 2' 27'' & \text{» } \quad p' = 57° 30' 26'' & \end{array}$$

El cálculo final da, sin la menor dificultad, las coordenadas de P y Q:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Punto } P & y_p = -1089{,}03 & x_p = +5610{,}29 \\ \text{» } Q & y_q = +1176{,}12 & x_q = +5310{,}73 \end{array}\right.$$

BIBLIOGRAFÍA. Sobre este problema se pueden consultar:

J. MAREK, Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, im Auftrage des königl. ungarischen Finanzministeriums, Budapest, 1875, pág. 269.

HAMMER (Zeitschr. f. Verm., 1895, págs. 610-611).

§ 102. Intersección con figura de errores

En los párrafos 98 a 101 hemos estudiado diferentes problemas de determinación trigonométrica de puntos, que en la práctica raramente se presentan; en general hay que resolver únicamente los problemas de intersección directa (§§ 92 y 93) y de intersección inversa (§§ 94 a 97) para fijar por coordenadas un punto, sin mediciones excesivas.

Ahora bien, este cálculo de las coordenadas de un punto, cuando es función de más acimutes de los necesarios (§ 91, figuras 432 a 435), entraña en la práctica otro problema, el de la compensación de las mediciones trigonométricas.

Para este objeto no tiene rival el método de los mínimos cuadrados, y en Topografía se emplea mucho, valiéndose de formularios, tablas, etc.

Sin embargo, vamos a ocuparnos de otro procedimiento que utiliza por igual todas las mediciones y que reporta indiscutibles ventajas; este método es el llamado de la *figura de errores* y se emplea mucho en las determinaciones trigonométricas, sobre todo cuando no se trata de compensar escrupulosamente todas las mediciones para obtener la mayor coincidencia entre los acimutes observados y los deducidos de las coordenadas del nuevo punto y deducir de las observaciones el sitio más probable donde deba hallarse éste, sino de hallar un punto lo bastante aproximado para que caiga dentro de los límites de error tolerables para todas las observaciones. Este caso es, por ejemplo, el de las determinaciones trigonométricas con taquímetro, que no requieren una medición tan exacta como en los planos de población.

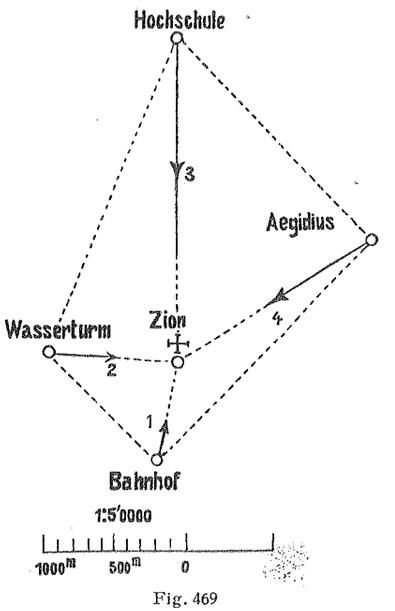


Fig. 469

Figura de errores para la intersección directa.

I. *Diferencia de coordenadas.* En la figura 469 (repetición de la 433), tenemos los cuatro puntos siguientes, dados por sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{lll} & y & x \\ \text{Bahnhof} & -15356{,}150 & +92012{,}085 \\ \text{Wasserturm} & -16145{,}080 & +92808{,}697 \\ \text{Hochschule, } E & -15266{,}847 & +95002{,}299 \\ \text{Ägidius} & -13879{,}790 & +93575{,}890 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Desde estos cuatro puntos se determina, por intersección directa, midiendo los acimutes correspondientes, el nuevo punto Zion, para lo cual hay que formar para cada punto un cuadro de direcciones, con objeto de conocer el acimut de la visual a Zion. El cuadro para Ägidius lo formamos ya en el § 91 (pág. 383), pudiéndose deducir los acimutes de sus visuales a los demás puntos.

De este modo se tienen los siguientes acimutes de las visuales hacia el punto Zion:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Estación Bahnhof} & \textit{Estación Hochschule, } E \\ \varphi_b = 13° 00' 22'' \quad BZ = 734{,}9\,\text{m} & \varphi_h = 178° 05' 01'' \quad HZ = 2275{,}4\,\text{m} \\ \textit{Estación Wasserturm} & \textit{Estación Ägidius} \\ \varphi_w = 94° 49' 56'' \quad WZ = 957{,}5\,\text{m} & \varphi_a = 237° 06' 26'' \quad AZ = 1561{,}4\,\text{m} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Con dos visuales es suficiente para calcular las coordenadas del nuevo punto Z, obteniéndose los siguientes valores:

$$y_o = -15191{,}000 \qquad x_o = +92728{,}200. \tag{3}$$

Consideremos ahora, en la figura 470, los alrededores del punto P que se trata de determinar, y sea O el lugar aproximado correspondiente a las coordenadas x_0, y_0. Si AP es el rayo visual dirigido desde el punto permanente A al punto P, para el cual resulta el acimut φ, este rayo pasará a corta distancia de O, y podemos determinar sus puntos de intersección R y S con los ejes de coordenadas cuyo origen es O. Estos puntos R y S tienen las siguientes coordenadas:

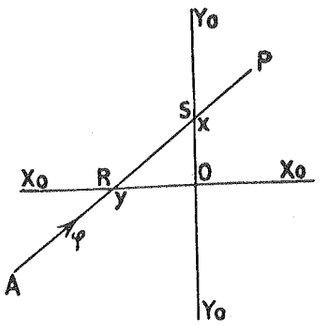


Fig. 470

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Punto } R. \ . \ . \ . \ . & y,\ x_0 \\ \text{» } S. \ . \ . \ . \ . & y_0,\ x \end{array}\right\} \tag{4}$$

Si x_a, y_a son las coordenadas de A, se tienen, según la figura 470, para y, x las siguientes ecuaciones:

$$y = y_a + (x_o - x_a)\operatorname{tg}\varphi_a \qquad x = x_a + (y_o - y_a)\cot\varphi_a. \tag{5}$$

Vamos a aplicar este razonamiento a la visual Bahnhof-Zion, de la figura 469. Con las coordenadas (1) y (3) y el acimut φ_b (2), tenemos:

$y_o =$	$-15191{,}000$	$x_o =$	$+92728{,}200$
$y_b =$	$15356{,}150$	$x_b =$	$+92012{,}085$
$y_o - y_b =$	$+165.150$	$x_o - x_b =$	$+716{,}115$
$\log(y_o - y_b)$	2.217879	$\log(x_o - x_b)$	2 854983
$\log\cot\varphi_b$	0.636425	$\log\operatorname{tg}\varphi_b$	9.363575
$\log(y_o - y_b)\cot\varphi_b$	2.854304	$\log(x_o - x_b)\operatorname{tg}\varphi_b$	2.218558
$(y_o - y_o)\cot\varphi_b =$	$+714{,}997$	$(x_o - x_b)\operatorname{tg}\varphi_b =$	$+165{,}408$
$x_a =$	$+92012{,}085$	$y_a =$	$15356{,}150$
Visual BZ $x =$	$+92727{,}082$	$y =$	$-15190{,}742$

(6)

De modo análogo se procede con las demás visuales, resultando finalmente:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Visual } BZ & x = +92727{,}082 & y = -15190{,}742 \\ \text{» } WZ & x = +92728{,}040 & y = -15192{,}890 \\ \text{» } HZ & x = +92735{,}488 & y = -15190{,}756 \\ \text{» } AZ & x = +92727{,}866 & y = -15190{,}484 \end{array}\right\} \tag{7}$$

En la figura 471 se ven las intersecciones de las visuales; por ejemplo, el rayo AA' está determinado por su intersección R_a y S_a con los ejes coordenados, estando dados estos puntos R_a y S_a por el último par de coordenadas (7), a saber: para el punto S_a, $x = +92727{,}866$, y para el punto R_a, $y = -15190{,}484$.

Para el rayo BB' tenemos sólo R_b, con $y = -15190{,}742$, pues S_b cae fuera del dibujo. Ahora bien, se puede emplear el acimut $\varphi_b = 13^\circ\,00'$, para lo cual sirve la graduación que va en el borde de la figura; uniendo el punto 13° con el 193° resulta una recta que pasa por O, a la cual basta trazar una paralela por R_b para obtener el rayo BB'.

Del mismo modo se trazan las visuales WW' y HH', teniéndose así en la figura 471 (a escala 1 : 10), la marcha de las visuales en las proximidades del nuevo punto Z.

Para mayor seguridad en las visuales, se puede, según las fórmulas (5), calcular los puntos de intersección con otros ejes de coordenadas, del mismo modo que se ha hecho

para el sistema de origen O; por ejemplo, se puede considerar la intersección con los bordes derecho e izquierdo, y superior e inferior, de la figura 471.

En la figura de errores correspondiente a las cuatro visuales (fig. 471), escojamos, a voluntad, un punto adecuado Z; tendremos:

$$Z: \qquad y = -15190{,}77 \qquad x = +92728{,}03. \tag{8}$$

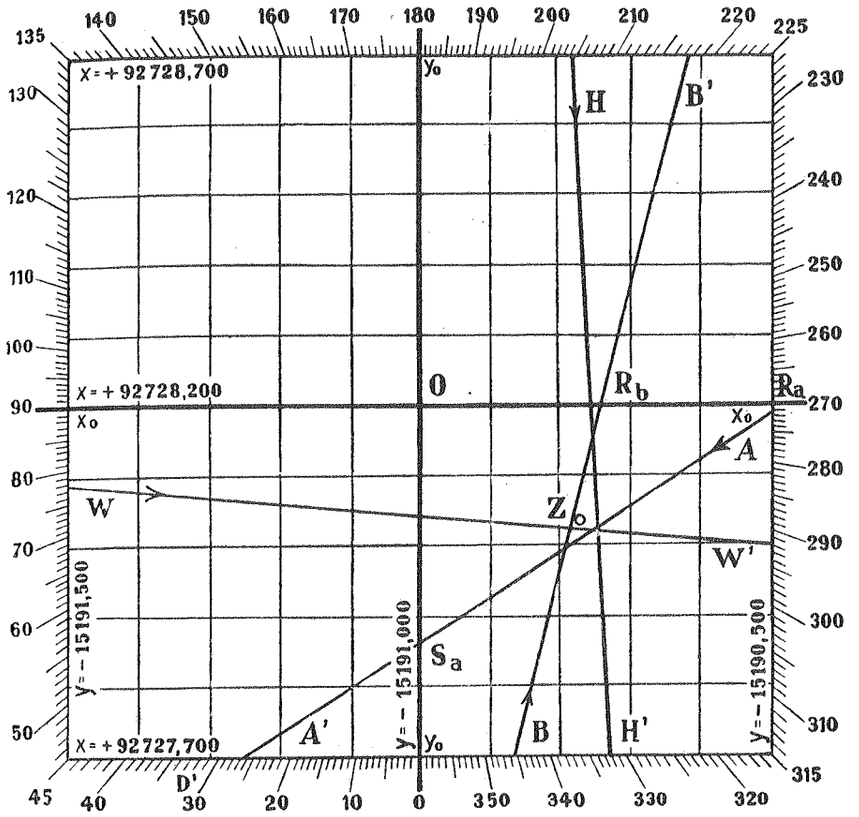


Fig. 471. — Figura de errores correspondiente a la intersección directa de la figura 469 (Escala 1 : 10)

Con esto queda resuelto el problema, y con las coordenadas definitivas (8) y las dadas (1) se pueden calcular los acimutes finales y compararlos con los dados por la observación (2), debiendo coincidir ambos, dentro, claro está, de ciertos límites de error tolerables, como se ve a continuación:

Compensados	Observados	v
$(BZ) =$ 13° 00′ 25″	13° 00′ 22″	+3″
$(WZ) =$ 94 49 55	94 49 56	−1
$(HZ) =$ 178 05 02	178 05 01	+1
$(AZ) =$ 237 06 28	237 06 26	+2

(9)

Las pequeñas correcciones v nos dicen que el punto P no puede elegirse mejor de lo hecho en la figura 471. Compensando la posición de este punto por el método de los mínimos cuadrados, se han hallado los siguientes valores para sus coordenadas:

$$y = -15190{,}778 \qquad x = +92728{,}019.$$

La compensación gráfica hecha mediante la figura 471 tiene una aproximación de $\pm$ 1 cm.

II. *Desviación lateral o transversal de las visuales.* Otro procedimiento, basado también en las figuras de errores, consiste en calcular las distancias del punto provisional O a los diferentes rayos visuales, con lo cual, y con ayuda de sus acimutes, se pueden representar éstos en la figura de errores.

Es decir, que lo primero que hay que hacer es hallar los acimutes de las visuales dirigidas de los puntos dados al O, en función de las coordenadas, y sus diferencias δ con los acimutes observados darán las distancias angulares del punto O a dichas visuales. Llamando s a las distancias de los puntos dados al O, las distancias e del punto provisional O a los rayos visuales, es decir, las desviaciones transversales de estos rayos se calcularán con la fórmula siguiente:

$$e = s\frac{\delta}{\rho}. \tag{10}$$

A continuación damos un cuadro resumen de este cálculo aplicado al ejemplo numérico ya considerado. De las coordenadas (1) y (3) se deducen los acimutes aproximados, que combinados con los observados (2) dan las diferencias δ: con las distancias dadas en (2) se calculan las desviaciones laterales con la regla de cálculo, según la fórmula (10):

	Acimutes aproximados	Acimutes observados	Diferencias δ	Distancias s	Desviaciones laterales e
B	12° 59′ 11″	13° 00′ 22″	+ 71″	735 m	+ 0,253 m
W	94 49 22	94 49 56	+ 34	958	+ 0,158
H	178 05 23	178 05 01	— 22	2275	— 0,242
A	237 07 03	237 06 26	— 37	1561	— 0,280

(11)

Para dibujar la figura de errores correspondiente, se emplea el mismo esquema, con igual red de coordenadas y borde graduado que en la figura 471. Se empieza por situar las cuatro visuales, valiéndose de los bordes graduados; por ejemplo, para B, uniendo el punto 13° 00′ de abajo con el 193° 00′ de arriba. De este modo se tienen cuatro rayos centrales, es decir, que pasan por O, a los cuales se trazan paralelas a distancia e, dada por el cuadro (11). El lado hacia el cual hay que trazar estas paralelas, lo dan el signo de δ y el de e; por ejemplo, para el punto B, para el cual e es positiva, se traza la paralela a la derecha del centro O.

Se comprende claramente que con este procedimiento se llega, en la figura 471, a las mismas visuales que con el método de las diferencias de coordenadas, por lo cual no creemos necesario hacer nueva figura. La elección del punto definitivo y todo lo demás se hace exactamente como en el primer procedimiento.

III. *Método fundado en la teoría del polo y la polar.* Se obtiene otra figura de errores por un procedimiento distinto, con ayuda de la teoría del polo y la polar de un círculo.

Si se da un círculo de radio r y un punto cualquiera P_0, existe una recta que se llama *polar* del punto P_0 (*polo*) respecto al círculo. Por otra parte, si se toma sobre esta recta un punto cualquiera y se construye la polar respecto al círculo dado, ésta pasará por el

punto P_0. A todos los puntos de la recta corresponden polares que se cortan entre sí en el punto P_0.

Esta ley puede expresarse de este otro modo: si por el punto P_0 se hace pasar un haz de rayos, los polos de estos rayos están todos en una misma recta.

En Geometría analítica se expresan el polo y la polar del modo siguiente. Si el círculo dado tiene por ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y la recta dada es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, las coordenadas del polo de esta recta son:

$$\xi = \frac{r^2}{a} \qquad \eta = \frac{r^2}{b}. \tag{12}$$

Para la intersección directa tenemos una serie de rayos que determinan el nuevo punto; tomando un círculo conveniente podemos determinar el polo de cada rayo. En el caso de que todos los rayos se corten casi exactamente en el nuevo punto, sus polos caerán sobre una recta, que es la polar de dicho punto. En realidad los rayos se cortan sólo aproximadamente en un punto, y por lo tanto, sus polos caen también aproximadamente sobre una recta.

La mejor compensación consistirá, pues, en trazar una recta que pase lo mejor posible por todos los polos. Se determina después el polo de esta recta, y éste será el lugar definitivo del nuevo punto.

Vamos a aplicar este método a nuestro ejemplo numérico. Tomemos para ello, como origen de coordenadas, el punto provisional O, cuyas coordenadas se dan en (3): de este modo se determinan los cuatro rayos por sus abscisas y ordenadas en el origen, calculadas en (7). De los valores (3) y (7) se deducen los coeficientes a y b para las ecuaciones de los rayos, a saber:

	a	b
Rayo BZ	— 1,118 m	+ 0,258 m
» WZ	— 0,160	— 1,890
» HZ	+ 7,288	+ 0,244
» AZ	— 0,334	+ 0,516

(13)

Tomando el radio r del círculo auxiliar igual a 1 m, tendremos, según las fórmulas (12) para las coordenadas del polo de los rayos los siguientes valores:

	ξ	η
Rayo BZ	— 0,895 m	+ 3,875 m
» WZ	— 6,250	— 0,529
» HZ	+ 0,137	+ 4,098
» AZ	— 2,994	+ 1,938

(14)

En la figura 472, dibujada a escala 1 : 100, están representados estos cuatro puntos, unidos por una recta compensada.

Para la recta tenemos como abscisa y ordenada en el origen los valores:

$$a = -5{,}55 \text{ m} \qquad b = +4{,}38 \text{ m}$$

y con $r = 1$, resultan para coordenadas del polo de la recta las siguientes:

$$\xi = -0{,}180 \text{ m} \qquad \eta = +0{,}228 \text{ m}.$$

Con las coordenadas aproximadas (3), tenemos para el nuevo punto Z las coordenadas definitivas:

$$y = -15190{,}772 \qquad x = +92728{,}020.$$

El método de compensación que acabamos de exponer fué publicado por Gast en 1914 y tiene sobre el de intersección de los rayos (fig. 471) la ventaja de que la elección del nuevo punto es mucho menos pesada y más fácil que en este último. Para evitar que

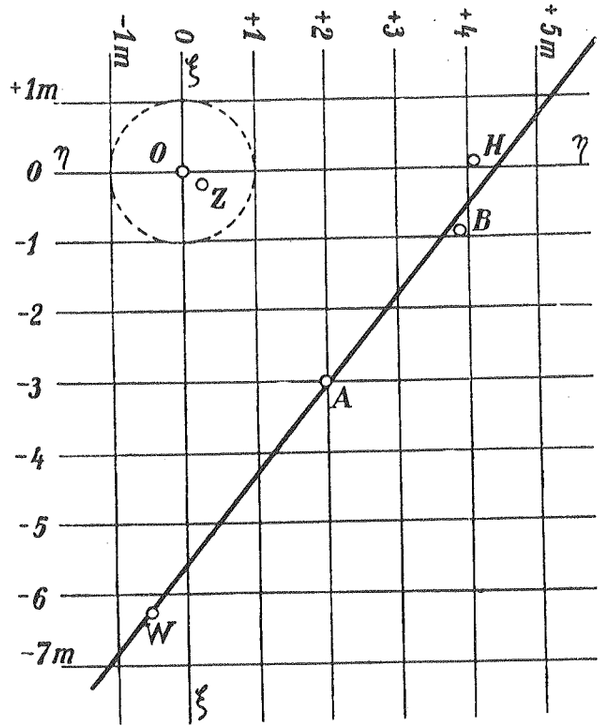


Fig. 472. — Compensación gráfica por medio de una alineación de puntos (Escala 1:100)

algunos de los puntos de la figura 472 puedan caer a distancia indefinidamente grande, se debe tomar el punto provisional O fuera de los puntos de intersección de los rayos (figura 471), lo cual es siempre fácil conseguir redondeando convenientemente las coordenadas aproximadas.

§ 103. Figura de errores para la intersección inversa

En el método de intersección inversa se determina el nuevo punto por intersección de círculos (véase página 396); en la figura de errores se representan, no los rayos, sino los círculos determinativos del punto. La construcción no es tan sencilla como para la intersección directa; pero, en cambio, tiene este método la ventaja de que la figura resultante da idea bien clara de la precisión con que se determina el punto buscado. En este método debemos distinguir las mediciones de ángulos de las mediciones de acimutes. Empezaremos por el primer caso, que es el más sencillo.

I. *Intersección inversa con medición de ángulos.* Si el punto P (fig. 473) debe fijarse desde AB por intersección inversa midiendo el ángulo $\varphi = BPA$, es evidente

que el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen con esta condición es el círculo ABP, capaz del ángulo φ, es decir, que el punto P tiene que estar sobre este círculo. Si suponemos ahora que el ángulo en P es φ', el círculo será AQB, y si PT es la tangente al círculo en el primer caso, ahora será QT', y para una diferencia muy pequeña $\varphi - \varphi' = d\varphi$ pueden considerarse las dos tangentes PT y QT' como paralelas. Se trata de hallar la distancia e entre estas paralelas.

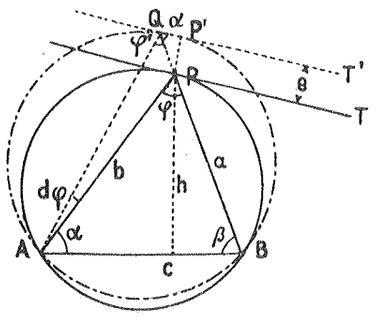


Fig. 473

De los dos triángulos diferenciales APQ y PQP' se deduce:

$$PQ = \frac{b \operatorname{sen} d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi'} \qquad \text{y} \qquad e = PP' = PQ \operatorname{sen} \alpha. \tag{1}$$

Y como puede ponerse $\operatorname{sen} \varphi' = \operatorname{sen} \varphi$ y $\operatorname{sen} d\varphi = d\varphi$, resulta:

$$e = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi, \tag{2}$$

y sustituyendo $b \operatorname{sen} \alpha$ por su igual h, como se ve en el triángulo ABP, se tiene:

$$e = \frac{h}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi \qquad \text{o bien} \qquad e = \frac{ab}{c} d\varphi. \tag{3}$$

II. *Intersección inversa con medición de direcciones.* Si desde el punto que se ha de determinar se da una vuelta de horizonte, se descompone ésta en los ángulos parciales correspondientes para construir una figura de errores y poder aplicar la teoría anterior. Ahora bien, la figura sólo resulta correcta cuando las direcciones se combinan de todos los modos posibles con los ángulos; para cinco direcciones, comprende la figura de errores diez líneas de fijación.

Pero hay otro método según el cual sólo hay que construir una línea de fijación para cada dirección observada. En este método se hallan las coordenadas aproximadas x_0, y_0, del nuevo punto y se calculan los acimutes aproximados φ_0 para todos los rayos, resultando para la dirección cero de la vuelta de horizonte el acimut ε_0. A una pequeña variación del nuevo punto dada por los valores δx, δy, corresponde la variación $\delta\varphi$ de los acimutes que, según se sabe, estará dada, para un rayo cualquiera, por la siguiente ecuación:

$$\delta\varphi = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{s} \rho \delta x - \frac{\cos \varphi}{s} \rho \delta y. \tag{4}$$

Pero $\delta\varphi$ resulta de la suma de la variación δl de la dirección medida y la $\delta\varepsilon$ de ε_0, es decir,

$$\delta l = -\delta\varepsilon + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{s} \rho \delta x - \frac{\cos \varphi}{s} \rho \delta y. \tag{5}$$

Tomemos ahora sobre los rayos P_0P_1, P_0P_2, ... (fig. 474) las recíprocas de las longitudes s_1, s_2, ... , a saber: $\frac{1}{s_1} = r_1$, $\frac{1}{s_2} = r_2$, ..., obteniéndose así los puntos p_1, p_2... Ahora bien, las cantidades

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{s} = r \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{\cos \varphi}{s} = r \cos \varphi$$

son las coordenadas de los puntos p respecto a P_0 como origen; llamando a y b a estas coordenadas, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \delta l_1 &= -\delta\varepsilon + a_1 \rho \delta x - b_1 \rho \delta y \\ \delta l_2 &= -\delta\varepsilon + a_2 \rho \delta x - b_2 \rho \delta y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

y $\frac{s}{\rho}$ 415

edia aritmética de todas las n ecuaciones para cada punto, se obtienen e la forma siguiente:

$$\delta l - \frac{[\delta l]}{n} = \left(a - \frac{[a]}{n}\right)\rho\,\delta x - \left(b - \frac{[b]}{n}\right)\rho\,\delta y,$$

más sencilla:

$$\delta l' = a'\rho\,\delta x - b'\rho\,\delta y, \tag{7}$$

es decir, que las cantidades a' y b' son las coordenadas de los puntos p respecto a su centro de gravedad S como origen.

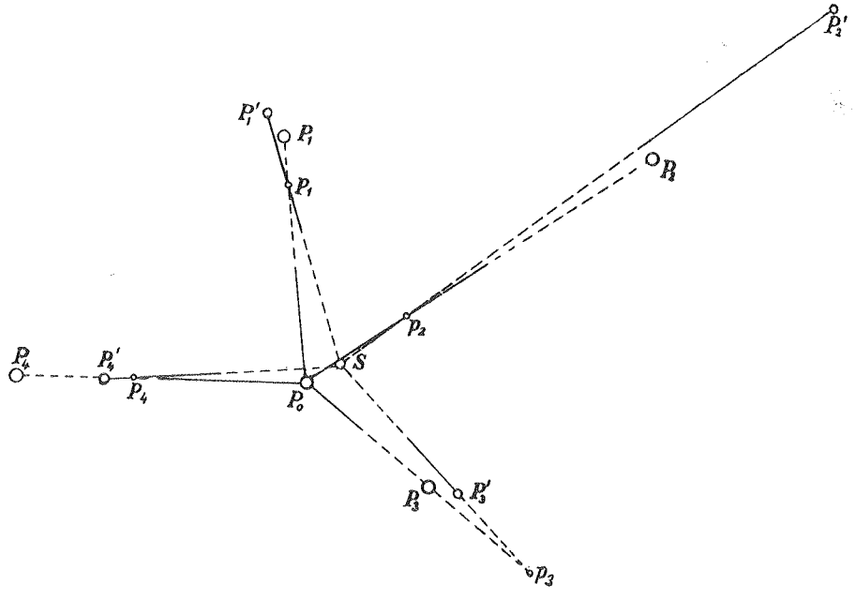


Fig. 474

Representando los segmentos Sp_1, Sp_2, ... con los símbolos r'_1, r'_2, ... y sus acimutes con φ'_1, φ'_2, ... tendremos:

$$a' = r'\operatorname{sen}\varphi', \qquad b' = r'\cos\varphi',$$

y si tomamos la recíproca de r', $\frac{1}{r'} = s'$:

$$a' = \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{s'}, \qquad b' = \frac{\cos\varphi'}{s'}.$$

Es decir, que así como los puntos P_1, P_2, ... se relacionan con el P_0 por medio de s y φ, también los puntos P'_1, P'_2, ... se pueden fijar con respecto a S, por medio de s' y φ'.

Las ecuaciones (7) toman así esta forma:

$$\delta l = \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{s'}\rho\,\delta x - \frac{\cos\varphi'}{s'}\rho\,\delta y. \tag{8}$$

Estas ecuaciones nos dicen que la intersección inversa observando desde el nuevo punto los P_1, P_2 ..., conduce al mismo resultado que la intersección directa observando el nuevo punto desde los P'_1, P'_2... Por consiguiente, se puede construir la figura de errores como en el caso de intersección directa, obteniéndose así los puntos S y los P'_1, P'_2...

Vamos a aplicar este método a un ejemplo numérico.

Sea P (fig. 475) el punto determinado por intersección inversa observando, por vuelta de horizonte, las direcciones de los puntos P_1, ..., P_4. Las direcciones observadas l y los acimutes aproximados tienen los valores siguientes:

	l	φ_0	$\varphi_0 - l$	δl
P_1	0° 00′ 00″	83° 37′ 02″	83° 37′ 02″	− 4
P_2	74 04 30	157 41 48	83 37 18	+ 12
P_3	123 06 07	206 42 46	83 36 39	− 27
P_4	259 40 42	343 18 07	83 37 25	+ 19

$\varphi_0 = 83°\ 37'\ 06''$.

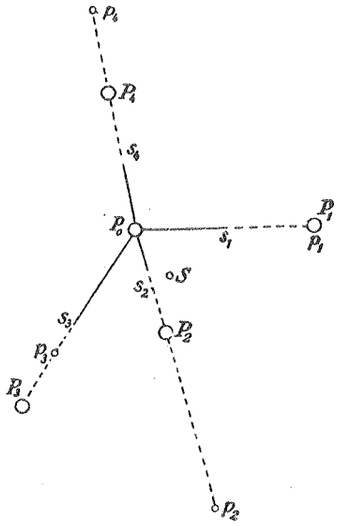


Fig. 475

Como ángulo de orientación tomamos la media aritmética de los cuatro valores de $\varphi_0 - l$, y así se deducen los valores de δl. Hallemos en primer lugar las inversas de las distancias s (fig. 475) y tomémoslas, en escala arbitraria, sobre los cuatro rayos, con lo cual obtendremos los puntos p. Mediante una sencilla construcción gráfica se obtiene el centro de gravedad S, que juntamente con los p_1, ..., p_2 reproducimos en la figura 476, y midiendo en ésta los segmentos Sp_1, Sp_2, ..., hallamos sus inversas s'_1, ..., s'_4 y las tomamos sobre los rayos, resultando así los puntos P'_1, ..., P'_4, con lo cual ya tenemos hecha la transformación necesaria.

Las diferencias $\delta l'$, que se precisan para construir la figura de errores, son idénticas, en este caso, a las δl, de modo que podemos calcular las desviaciones transversales e (véase página 438) y tomar después en la figura 476 las distancias s'. De este modo resulta:

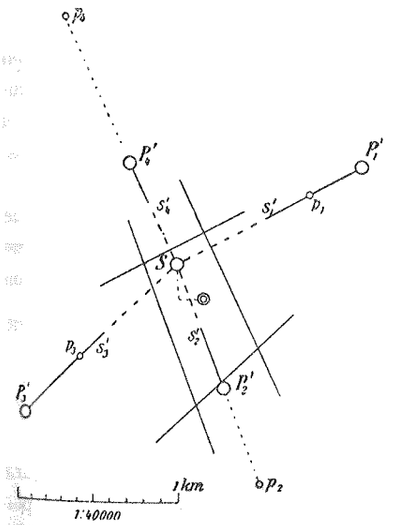


Fig. 476

$\delta l'$	s'	e
− 4″	1,18 Km	− 0,023 m
+ 12	0,75	+ 0,044
− 27	1,28	− 0,165
+ 19	0,64	+ 0,059

Con ayuda de estas desviaciones transversales e (tomadas a escala 1 : 10 en la figura 476), podemos ya trazar las cuatro líneas o rayos de fijación, hallándose para los puntos tomados en la figura las siguientes correcciones de sus coordenadas: $\delta x = -0{,}06$ m y $\delta y = +0{,}04$ m.

Otro procedimiento para la aplicación gráfica de la intersección inversa partiendo de la observación de direcciones, fué el expuesto por el sueco Jung en 1900.

Aun podemos considerar otros dos casos especiales. Supongamos, por ejemplo, que se tengan sólo dos direcciones interiores observadas, las cuales nos darán, según la construc-

ción anterior, dos rectas coincidentes, que determinarán *un* lugar geométrico para el punto como así debe suceder; esta recta es la misma que se obtendría con la construcción de la figura 473 partiendo de la medición de ángulos. Supongamos, en segundo lugar, que se observan tres direcciones interiores, de modo que se obtengan tres rectas, que, como es natural, se cortan en *un* punto; tampoco en este caso está en contradicción la construcción anterior con la deducción directa.

En la figura construída partiendo de las direcciones interiores, se pueden llevar también las exteriores, de modo que puede elegirse el punto con relación a todos los rayos. Así se obtiene una figura, aunque muy poco correcta, para las dos intersecciones, directa e inversa, en la cual las direcciones interiores se orientan por medio de las exteriores, tomándose un valor medio de los dos acimutes para cada dirección. Las direcciones interiores se consideran en este caso como si fueran exteriores, cosa inadmisible en teoría.

Este procedimiento para la construcción de la figura de errores por intersección inversa, con observación de direcciones, es muy sencillo, pues la determinación de los puntos auxiliares p_1, p_2, ... , del centro de gravedad S y de los puntos P'_1, P'_2, ..., se hace con toda rapidez disponiendo de un mapa con red de triangulación. Este sistema fué expuesto por primera vez en 1900, por Runge.

Este método falla por completo cuando se observan dos direcciones exteriores y las correspondientes interiores, pues después de orientar y promediar los rayos interiores, sólo quedan dos rectas en la figura, por lo cual resulta imposible toda compensación. En cambio, el procedimiento correcto que antes se ha estudiado da una figura de errores con sólo tres rectas.

§ 104. Elección precisa de puntos en las figuras de errores

En los dos párrafos anteriores, 102 y 103, hemos visto que se elegía el punto directamente en la figura, con objeto de obtener el punto definitivo por corrección del aproximado. Esta elección puede hacerse, en general, con bastante exactitud y es muy fácil llevarla a cabo cuando los rayos son aproximadamente paralelos a un rayo medio, reduciéndose la figura a un cuadrilátero o a un triángulo, en el cual se obtiene directamente el punto buscado. Mediante combinaciones semejantes de los rayos, se puede, en pocos instantes, reducir a una pequeña superficie el lugar donde ha de encontrarse el punto que se busca, con un error de un centímetro, en números redondos. La diversidad de longitud de los rayos se considera como cosa incidental, o bien se les aplica la ley de los pesos, como se ve en la compensación hecha en las figuras 471 y 476. El error medio de la intersección de los rayos es proporcional a las distancias s, ya que $p = \frac{1}{s^2}$, como se ve en la serie siguiente con $p = 10$, para 1 Km:

$p = 40$	30	20	15	10	8	6	4	2	1	0,5
$s = 0{,}5$	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,3	1,5	2,2	3,0	4,5 Km.

Más fácil que tener en cuenta los pesos es el empleo de líneas auxiliares en la figura de errores, correspondientes a un giro de los rayos de un número entero de segundos, por ejemplo, de 10″. Para la construcción de la figura de errores por el método II (pág. 438), se calculan con la regla de cálculo las desviaciones e, y además, para cada rayo, el valor $e' = \frac{s \cdot 10}{\rho}$ y se trazan paralelas a los rayos, a las distancias e'. De este modo, para cada

punto que se elija se pueden hallar las correcciones de dirección y formar la suma de sus cuadrados: así se obtiene una base para corregir el primer punto elegido.

Si sólo se tienen tres rayos para la intersección directa, se puede determinar con toda exactitud y fácilmente el punto verdadero, correspondiente a los mínimos cuadrados de las correcciones de dirección, como se ve en la figura 477: de los puntos A, B, C parten los tres rayos de fijación, dados por sus direcciones observadas, que forman un triángulo de errores $A'B'C'$, y se tiene, a causa de las variaciones de dirección v_1, v_2, v_3, que para que los tres rayos concurran en un punto, la suma de los cuadrados de estas variaciones debe ser un mínimo, es decir:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \text{mínimo.} \qquad (1)$$

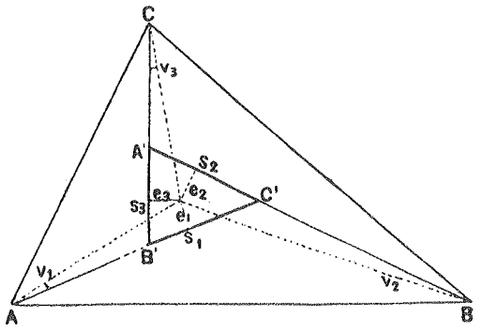


Fig. 477

Si e_1, e_2, e_3 son las distancias del punto verdadero a los lados s_1, s_2, s_3, del triángulo $A'B'C'$, y designamos con A, B, C, respectivamente, las longitudes de los rayos que parten de los vértices de igual denominación, tendremos:

$$v_1 = \frac{e_1}{A} \qquad v_2 = \frac{e_2}{B} \qquad v_3 = \frac{e_3}{C} \qquad (2)$$

y entre los valores e_1, e_2 y e_3 se cumple la siguiente condición:

$$e_1 s_1 + e_2 s_2 + e_3 s_3 = 2\Delta \text{ (doble del área del triángulo)} \qquad (3)$$

y sustituyendo aquí los valores (2) resulta:

$$\left.\begin{aligned} A s_1 v_1 + B s_2 v_2 + C s_3 v_3 - 2\Delta = 0 \\ \text{o sea} \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w = 0 \\ \text{donde} \qquad a_1 = A s_1 \quad a_2 = B s_2 \quad a_3 = C s_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ahora bien, según la teoría de las observaciones condicionadas [§ 11, página 27, ecuaciones (2)], se tiene una ecuación normal que hay que resolver:

$$[a\,a]\,k + w = 0, \quad \text{es decir,} \quad (A^2 s_1^2 + B^2 s_2^2 + C^2 s_3^2)\,k - 2\Delta = 0, \qquad (5)$$

pues en la teoría general, cuando sólo hay *un* parámetro, es decir, cuando

$$v_1 = a_1 k \qquad v_2 = a_2 k \qquad v_3 = a_3 k,$$

se tiene:

$$v_1 : v_2 : v_3 = a_1 : a_2 : a_3,$$

o sea, según (4):

$$v_1 : v_2 : v_3 = A s_1 : B s_2 : C s_3$$

y según (2):

$$e_1 : e_2 : e_3 = A^2 s_1 : B^2 s_2 : C^2 s_3. \qquad (6)$$

Las direcciones de los rayos se suponen aquí medidas u observadas con igual peso; si estas observaciones tuvieran pesos desiguales, p_1, p_2, p_3, se convertiría la ecuación (6) en esta otra:

$$e_1 : e_2 : e_3 = \frac{A^2 s_1}{p_1} : \frac{B^2 s_2}{p_2} : \frac{C^2 s_3}{p_3}. \qquad (7)$$

Esta relación $e_1 : e_2 : e_3$ es suficiente para determinar gráficamente el punto dentro del triángulo de errores, como se ve en el ejemplo numérico representado en la figura 478. En esta figura, $P_1P_2P_3$ es un triángulo de errores, dibujado a escala 1 : 10, en el cual $s_1 = 0{,}21$ m, $s_2 = 0{,}14$ m y $s_3 = 0{,}26$ m. Ahora bien, puesto que no se trata de cantidades absolutas, sino sólo de la construcción en escala reducida del triángulo de errores, podemos poner:

$$s_1 = 2{,}1 \text{ cm} \qquad s_2 = 1{,}4 \text{ cm} \qquad s_3 = 2{,}6 \text{ cm} \tag{8}$$

Las longitudes de los rayos, en escala natural, son:

$$A = 3{,}5 \text{ Km} \qquad B = 3{,}3 \text{ Km} \qquad C = 3{,}4 \text{ Km}$$

de donde

$$A^2 = 12{,}2 \qquad B^2 = 10{,}9 \qquad C^2 = 11{,}6$$

y

$$A^2 s_1 = 25{,}6 \qquad B^2 s_2 = 15{,}3 \qquad C^2 s_3 = 30{,}2$$

$$e_1 : e_2 : e_3 = 25{,}6 : 15{,}3 : 30{,}2.$$

Los números así relacionados pueden variarse a voluntad, siempre que guarden entre sí la misma relación; por ejemplo:

$$e_1 : e_2 : e_3 = 13 : 8 : 15.$$

Para determinar gráficamente, con estos datos, el punto P (cosa que no se hace en la figura 478), se trazan paralelas a los lados s_1, s_2, s_3, por dentro o por fuera del triángulo, de modo que la paralela a s_1 diste de este lado 13 mm, la de s_2, 8 mm, y la de s_3, 15 mm. Las tres paralelas formarán a su vez un triángulo que llamaremos $1'2'3'$; se une después el vértice $1'$ con el P_1, el $2'$ con el P_2, y el $3'$ con el P_3, y estas tres rectas de unión se cortarán en un punto, que es el P de la figura 478. Conviene que el lector haga esta construcción en un papel aparte, ya que no está hecha en esta figura.

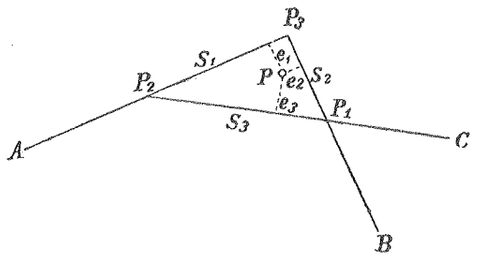


Fig. 478

Las coordenadas del punto P son las medias aritméticas de las coordenadas de los pies de las perpendiculares e bajadas desde P a los tres lados del triángulo. El cálculo de esta media aritmética proporciona una comprobación del punto P, por comparación con las coordenadas deducidas gráficamente; esta prueba nos da también, en la elección del sitio en que ha de estar el punto, un buen elemento de juicio para la seguridad de la elección.

Fuera ya del sencillo caso de tres rayos en la fijación por intersección directa, resulta difícil la compensación gráfica exacta.

En 1876 expuso Bertot, en los «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences», un procedimiento para la determinación del punto compensado, fundado en el principio de los mínimos cuadrados, en el cual Bertot empezaba fijando la posición de un barco por alturas solares y de estrellas, problema que guarda estrecha analogía con el nuestro de intersección y en el cual siempre se llega a ecuaciones lineales de errores.

Reseña histórica sobre la compensación gráfica de la posición de un punto. Ante todo debemos hacer constar que ya en 1820, el coronel Tulla, en Baden, empleaba métodos en que utilizaba como figura de errores la deducida de las diferencias de lados,

pudiendo, por lo tanto, tomar un punto a voluntad. Después viene la construcción de la figura de errores basada en las diferencias de coordenadas, debida a F. G. Gauss (en 1876).

Un tercer procedimiento, el de la figura de errores en función de las desviaciones transversales $e = \frac{s\delta}{\rho}$, se debe a Franke (1875 y 1876).

Estos métodos se refieren todos a las figuras de errores con elección libre del punto definitivo; la construcción exacta, fundada en la teoría de los mínimos cuadrados aplicada a las correcciones o variaciones de las direcciones, fué expuesta por primera vez por Helmert (1868).

Después han sido muchos los trabajos que han ido apareciendo sobre compensación gráfica, como, por ejemplo, para no citar muchos: los de Genge (1886), de Klingatsch (1894), de Puller (1895), de Hammer (1896), etc.

Después de los métodos puramente gráficos, vinieron los ensayos gráfico-mecánicos, en los cuales se representaban los rayos visuales por varillas elásticas. Para una longitud exacta de las varillas puede compararse este método de compensación con el de los mínimos cuadrados. Dichos métodos mixtos fueron tratados por Fischer en 1899, y después por Hohenner (1904).

Actualmente, la compensación gráfica, aunque de gran interés teórico, no tiene mucha aplicación práctica; en cambio, es de uso corriente por su sencillez y facilidad el método analítico de los mínimos cuadrados, aplicado con la regla de cálculo, o con tablas auxiliares.

Sin embargo, los métodos simples que hemos expuesto en los párrafos 102 y 103, tienen aplicación práctica para los numerosos puntos de la última categoría, es decir, para los puntos auxiliares que en realidad no pertenecen a la red de triangulación; con estos métodos se facilita la incorporación de las pequeñas mediciones a una red calculada con aplicación del método de los mínimos cuadrados.

§ 105. Ejecución de una triangulación topográfica

Ya hemos dicho anteriormente (§§ 85 y 91) que se llama triangulación topográfica la que se hace a base de la geodésica de último orden, para rellenar ésta con triángulos cuyos lados sean menores de 5 Km. La triangulación topográfica debe apoyarse por lo menos en una base de la geodésica, es decir, que de esta última deben darse, por lo menos, dos vértices por sus coordenadas rectangulares, pues se considera, para este caso, la superficie terrestre como si fuera plana, y los vértices topográficos se dan en coordenadas rectangulares planas. También, tratándose de una pequeña extensión de terreno, puede hacerse una triangulación topográfica sin apoyarse en ninguna geodésica, estableciendo para ello una base que se mide cuidadosamente con regla o cinta, como ya se dijo en el § 85 (página 352).

Para intercalar puntos en una red de orden superior, se siguen los procedimientos indicados en el § 91, es decir, por intersección directa, inversa o mixta, como se ve en las figuras 433, 434 y 435. Si los vértices de orden superior que se observan forman un triángulo, o un cuadrilátero, o un pentágono, o un hexágono, habrá que determinar un número correspondiente de direcciones. El mínimo necesario será de tres direcciones exteriores o cuatro interiores para la intersección directa o inversa; la determinación siguiente requeriría seis direcciones opuestas, es decir, seis interiores y seis exteriores. Entre estos límí-

tes oscila, en general, el número de direcciones que hay que observar. La observación de un gran número de vértices lejanos no aporta ventaja alguna a la determinación de los puntos, como se deduce de la construcción gráfica (página 14, donde n = número de direcciones); también la fórmula que da el peso de una intersección de rayos, $p = \frac{1}{s^2}$ (página 444) nos dice lo poco que influye la dirección de un vértice lejano en comparación con uno próximo.

En los párrafos 87 a 90 nos hemos ocupado de las señales, de la observación de ángulos y del centrado; sobre este último punto conviene notar que una desviación de 1 cm entre la señal y el punto da lugar, en 1000 m de distancia, a un error angular de 2″ Por consiguiente, hay que vigilar con todo cuidado la colocación de las señales.

En la figura 479 se ve la disposición de una triangulación topográfica, hecha por intercalación de puntos, en una pequeña extensión de terreno. Los cuatro puntos dados de la red geodésica de tercer orden son Au., Lintz., Schütt y Sand., unidos en la figura por

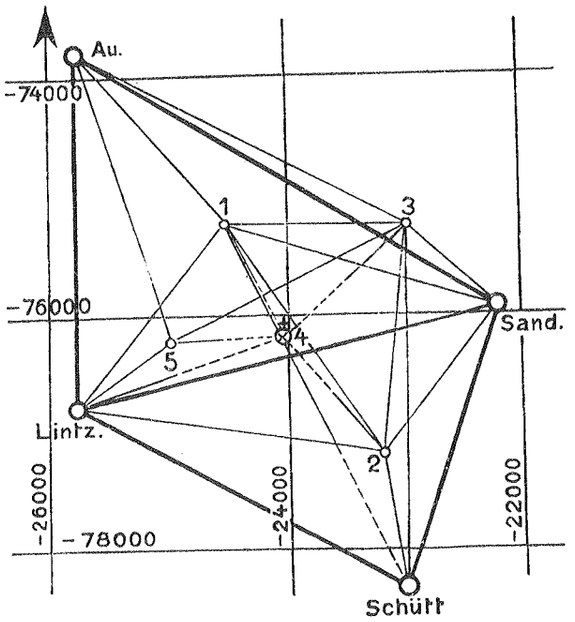


Fig. 479

líneas de trazo grueso, que forman dos triángulos sobre los cuales se apoya la triangulación topográfica. En esta última no se utiliza la base Au.-Schütt. por no haber sido posible establecer esta visual. El orden en que se van fijando los vértices de la triangulación topográfica es el de los números con que éstos van señalados del 1 al 5.

El vértice 1 está fijado sobre el triángulo Lintz.-Au.-Sand.; mediante la dirección de la visual hacia el vértice Schütt., observado desde el 1, queda éste unido a los cuatro vértices geodésicos dados. Sigue después el vértice 2, determinado respecto al triángulo Lintz.-Sand.-Schütt.; los vértices que lo fijan son, pues, los cuatro siguientes: Lintz., 1, Sand y Schütt. Para el vértice 3 (situado en la vertiente de una montaña poblada de árboles) no se tiene ningún enlace hacia el Norte, estando fijado respecto a los vértices Schütt.

2, 1, Au. y al más cercano Sand. El vértice 4 está fijado por intersección directa desde los vértices Lintz., 1, 3, 2; y, finalmente, el vértice 5, cuya fijación adolece del defecto de no poderse visar desde el mismo el vértice 1.

El cuadro siguiente indica el plan para el cálculo y el consiguiente para la observación de esta pequeña red de triángulos.

I. Plan de cálculo de la triangulación de la figura 479

N.°	Direcciones a determinar exters.	Direcciones a determinar inters.	Observaciones
1	Au. Sand. — Lintz.	Au. Sand. Schütt. Lintz.	Si la compensación se va a hacer por el método de los mínimos cuadrados o gráficamente
2	Lintz. 1 Sand. Schütt.	Lintz. 1 Sand. Schütt.	
3	Au. Sand. Schütt. 2 1	Au. Sand. Schütt. 2 1	
4	1 3 2 Lintz.	— — — —	
5	Au. 3 — Lintz.	Au. 3 4 Lintz.	

II. Plan de observación de la triangulación de la figura 479

A. Vértices dados

Estación Au.
Puntos a visar:
Lintz.
3
Sand.
1
5

Estación Sand.
Puntos a visar:
Schütt.
2
Lintz.
1
Au.
3

Estación Schütt.
Puntos a visar:
Lintz.
2
3
Sand.

Estación Lintz.
Puntos a visar:
Au.
1
5
4
Sand.
2
Schütt.

B. Puntos nuevos

Estación 1
Puntos a visar:
Au.
3
Sand.
2
4
Schütt.
Lintz.

Estación 2
Puntos a visar:
1
3
Sand.
Schütt.
Lintz.
4

Estación 3
Puntos a visar:
Au.
Sand.
Schütt.
2
4
5
1

Punto a visar: 4

Estación 5
Puntos a visar:
Au.
3
4
Lintz.

A este plan o esquema de cálculo y observación se sujeta después el trabajo de observación y cálculo de la red considerada. Cuanto mejor se estudia y plantea el proyecto, más fácilmente se hace después el trabajo correspondiente.

La figura 480 representa un ejemplo más complicado de esta intercalación de puntos. Los vértices dados A, B, C, ... están unidos por líneas de trazo grueso, y siempre se van fijando los puntos uno a uno, en relación con los anteriores. Los números indican el orden seguido. El punto (1) está determinado por su unión con $CDKJE$; el punto (4) se fija por su unión con $JKDC(1)$, considerándose ya este punto (1) como un vértice dado de la misma clase que los $JKDC$... ; el punto (13) se determina con los K (1) (4) y también con el D si así se quiere.

La intercalación y compensación de los puntos puede hacerse por el método de los mínimos cuadrados, por el de las figuras de errores, o por otro cualquiera.

La figura 481 representa otra triangulación, hecha por una red apoyada en la principal, en vez de serlo por puntos intercalados. Los vértices dados A, B, C, ... están unidos

con líneas de trazo grueso; la red topográfica (intercalada), hecha a base de la geodésica puede compensarse como de costumbre, y con poco trabajo de observación angular se puede conseguir la misma precisión que con el método de puntos intercalados.

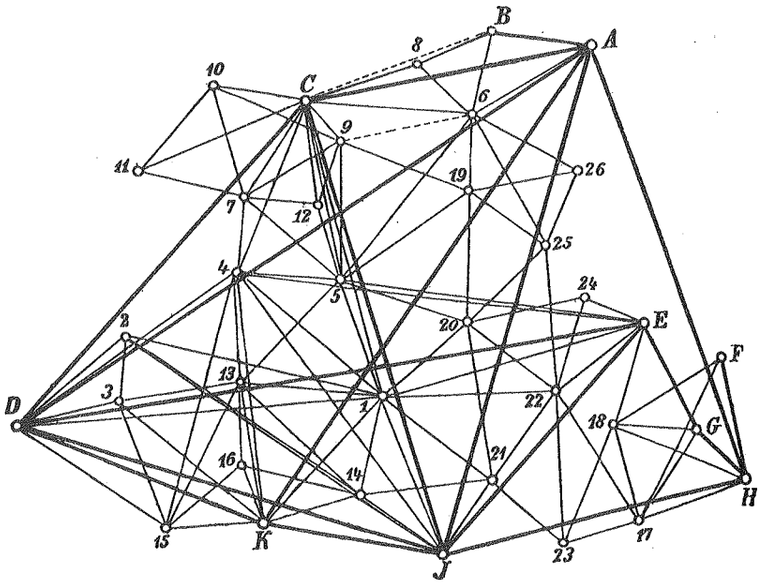


Fig. 480. — Triangulación topográfica por intercalación de puntos

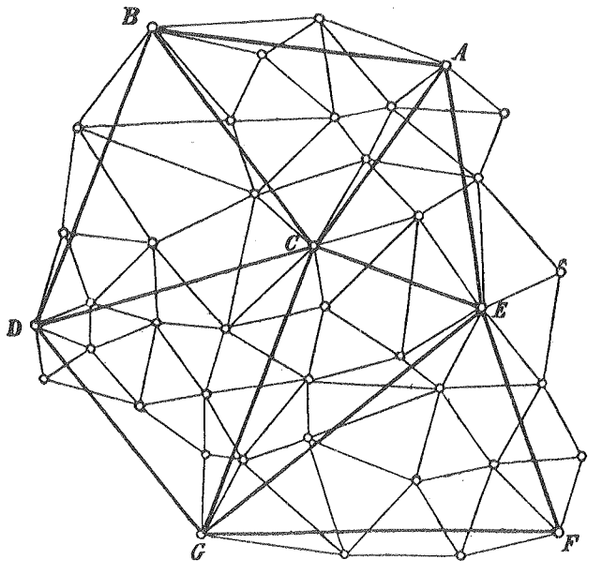


Fig. 481. — Triangulacion topográfica por intercalación de redes

La intercalación de puntos sueltos (figs. 479 y 480) se hace a voluntad del operador, el cual tiene que observar y que calcular, pero sin dar un paso antes de tener bien asegurado el trabajo anterior. En esto procede el geógrafo como el buen comerciante: poca ganancia, pero garantizada.

En cambio, al intercalar una red (fig. 481), es indudable que el trabajo de observación es menor que en la intercalación de puntos sueltos, pero el trabajo de cálculo para la compensación es mucho mayor.

El paso de la intercalación de puntos a la de redes constituye la doble intercalación, de la cual hemos dado un ejemplo en la figura 397. Allí, después de compensados los cinco vértices principales de la red, se relacionaron con todos ellos los dos vértices intercalados Hochschule y Dreifaltigkeit, mediante las visuales punteadas en la figura, y se compensaron por el método de los mínimos cuadrados. Este principio, antes aplicado a dos puntos, puede extenderse a toda una red. Un buen ejemplo lo tenemos en la red representada en la figura 396, donde la red de trazo fino, de 15 vértices, compensada por coordenadas, está intercalada en la red principal externa, de 18 vértices.

Véanse, en el Apéndice, las Instrucciones Topográficas del Instituto Geográfico y Catastral de España.

§ 106. Triangulación de poblaciones

Aunque los principios fundamentales de la triangulación son los mismos para el trabajo en el campo que en una ciudad, hay, sin embargo, ciertas particularidades en la triangulación urbana, de que vamos a ocuparnos a continuación, refiriéndonos, como ejemplo, a la triangulación de Hannover, hecha por el autor en 1887.

En primer lugar, se presenta la cuestión de la red principal: en nuestros ejemplos antes estudiados (§ 91, página 380, y § 85, figura 397) se ha tomado una base (Ägidius-Wasserturm) y a ésta se han referido los demás puntos necesarios. Tomaremos también aquí como ejemplo la triangulación de Hannover (fig. 397), por estar hecha de modo que satisface todos los principios en que deben basarse los trabajos de esta clase.

La red principal de la figura 397 no es precisamente la ideal, pues los dos puntos extremos de base están demasiado cerca uno del otro; mejor hubiera sido tomar como base la Wasserturm-Steuerndieb, o la Willmer-Burg. La causa de no haberlo hecho así consiste en que ya antes (en 1887 y en 1891) se tomaron estos mismos puntos como extremos de base y en ellos se apoyaron las correspondientes observaciones.

En la página 452 veremos un ejemplo de triangulación para plano de población.

Todas las observaciones hechas en la triangulación representada en la figura 397, lo fueron con teodolito de microscopios lectores de tamaño pequeño (fig. 320), en doce vueltas de horizonte. La compensación de la red principal (de cinco vértices) dió para error medio de una dirección $\pm 1{,}04''$, y en la intercalación de los dos puntos, hecha con las direcciones exteriores, el error fué de $\pm 1{,}9''$.

Después de cerrada y compensada la red principal se intercalan vértices de menor categoría, como las torres de iglesias y puntos altos semejantes, por intersección directa, y los restantes, sobre el suelo, se determinan por intersección inversa y mixta.

Hemos visto (§ 105) que en las triangulaciones de campo se reconocen y eligen previamente los vértices, es decir, se hace el proyecto de la triangulación, que sirve para hacer después la observación; pero en los planos de población no siempre es posible hacer el proyecto para los vértices de última categoría (torres, etc.). Claro está que en poblaciones pequeñas pueden escogerse y hasta proyectarse los puntos, pero en grandes ciudades en que no hay puntos que las dominen por completo, sólo pueden irse eligiendo aquéllos a medida que se va avanzando en el trabajo.

El trabajo de selección en un plano con todas las visuales y puntos tomados se lleva gran cantidad de tiempo, sobre todo para los puntos dudosos cuyo lugar y nombre se determinan después de hecha toda la observación, por los acimutes correspondientes.

Mejor que perder mucho tiempo en ver si pueden o no resultar útiles dichos puntos, cuando se dispone de un número suficiente de visuales, resulta hacer la observación completa en doble vuelta de horizonte, aun corriendo el riesgo de hacer algunas lecturas de más. En una vuelta doble de horizonte, la observación de un ángulo o acimut, es decir, dos posiciones de anteojo y cuatro lecturas, se lleva, por término medio, minuto y medio de tiempo.

Los vértices de la red interior (vértices de poligonación) se señalan, en España, a cincel sobre las aceras, si las hay, con una *P* de 10 cm de longitud y un punto en su parte inferior derecha, que es el que marca el vértice; o bien clavando estacas en el suelo y relacionándolas, por la medición de tres o más distancias, con las esquinas de las casas u otros puntos que reúnan condiciones de permanencia.

Las chimeneas, a pesar de las variaciones que pueden experimentar, constituyen unos vértices excelentes para la triangulación; su principal inconveniente consiste en las oscilaciones que produce el viento en toda clase de chimeneas. Estas oscilaciones, que hemos medido en experimentos adecuados, pueden ser de 10 cm y más, por lo cual hay que tener en cuenta que las chimeneas son muy buenos vértices, pero que no deben observarse en días de viento.

También conviene decir dos palabras sobre la elección del punto de mira en las chimeneas. Las Instrucciones dicen que debe tomarse el punto de mira en el eje de la chimenea; ahora bien, en los planos de población no resulta fácil tomar dicho eje, porque a pequeñas distancias sólo puede conseguirse esto, y no siempre, mirando a izquierda y a derecha. Por esta razón debe mirarse al pararrayos, aunque la mayoría de las veces éste está montado excéntricamente. Los pararrayos suelen durar de diez a veinte años. Otros muchos puntos altos, dentro de población, como cúpulas, lanzas de banderas o veletas, etc., adolecen también del mismo defecto de duración limitada: si sólo han de servir como vértices de poligonación y para mediciones auxiliares, cumplen perfectamente con su cometido, en cuanto a permanencia y estabilidad, y hasta en la triangulación, cuando ésta no ha de servir de base a trabajos ulteriores que hayan de tardar mucho tiempo en comenzarse.

En el cálculo de la triangulación urbana se aprecia hasta el 0,1″ y el 0,001 m, aunque el error medio pase de 1″ y 0,01 m respectivamente.

Ejemplo. Triangulación de la ciudad de Charlottenburgo. En la figura 482 vemos otra clase de triangulación, hecha para la ciudad de Charlottenburgo, en 1897, por el profesor Hegemann. En esta triangulación se ven seis vértices unidos a otros seis de la triangulación de segundo orden, que son los que en la figura aparecen con el nombre subrayado; además se ven otros tres vértices, sin nombre, que no pertenecen a la red principal.

Esta disposición presenta la gran ventaja de estar la red urbana unida directamente a la general topográfica o geodésica.

La observación se hizo con un teodolito de microscopios lectores de Hildebrand (figura 319) en ocho vueltas de horizonte (pág. 362).

El cálculo de coordenadas se hizo vértice por vértice. La disposición de los puntos intercalados, con acimutes a los seis vértices dados, reduce a un mínimo todo el trabajo de observación (véase también la figura 481).

Para la compensación por coordenadas, se consideran como incógnitas los doce valores de las coordenadas de los vértices nuevos y la orientación para todos los puntos de estación, que, como se ve en la figura 482, son nueve. En primer lugar se establecen las ecuaciones de errores, estación por estación, para todas las direcciones observadas; estas

ecuaciones contienen las correcciones de las coordenadas de cada estación y del punto visado (siendo éste un vértice nuevo), y las orientaciones desconocidas de la estación. Para eliminar estas últimas, se introduce, para cada estación, una ecuación de errores hipotética de peso negativo. Después se forman las ecuaciones normales para cada estación, y por adición se deducen las doce ecuaciones normales para los seis pares de coordenadas.

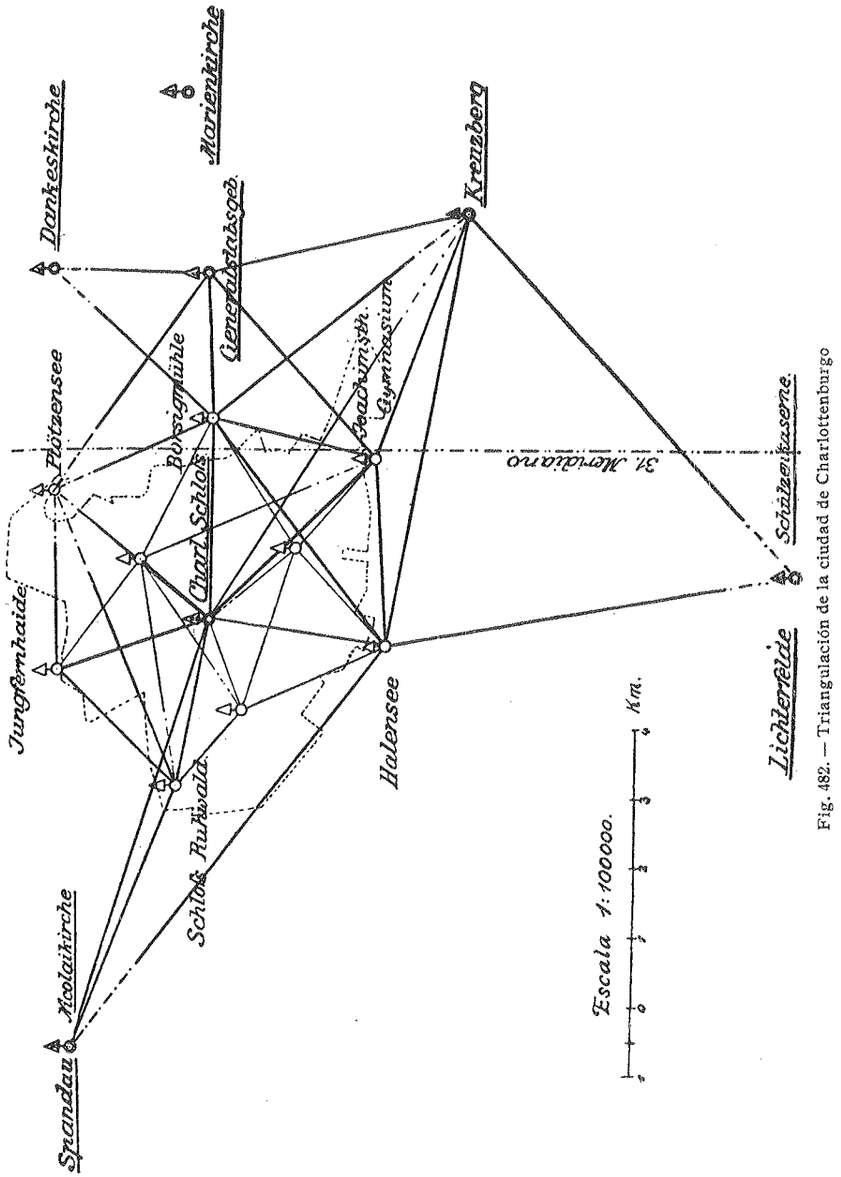


Fig. 482. — Triangulación de la ciudad de Charlottenburgo

En el extracto de las Instrucciones oficiales para los trabajos topográficos del Instituto Geográfico de España, insertas en el Apéndice, puede verse el método seguido en nuestro país para los levantamientos de planos de población.

CAPÍTULO IX

Poligonales

§ 107. Fórmulas fundamentales

Cuando se unen por rectas varios puntos (0), (1), (2), . . . (*n*) de un plano, en este mismo orden se obtiene una línea quebrada, que en Topografía se llama *poligonal abierta*, como se ve en la figura 483.

En primer lugar vamos a considerar las poligonales abiertas independientes, y después estudiaremos el enlace con un sistema dado de coordenadas.

I. Poligonal independiente. Un itinerario poligonal independiente, es decir, sin enlace con una triangulación o un sistema de coordenadas, queda determinado midiendo sus lados o ejes y los ángulos formados por cada dos lados consecutivos.

Para $n+1$ puntos [del (0) al (*n*)], se tienen n lados y $n-1$ ángulos; la notación que emplearemos en este estudio es la que se ve en la figura 483, con arreglo a la cual se tiene:

$$\text{Lados:} \qquad 0,1 = s_0 \qquad 1,2 = s_1 \;.\;.\;.\;. \quad n-1,\, n = s_{n-1} \tag{1}$$

$$\text{Ángulos:} \qquad 0,1,2 = \beta_1 \qquad 1,2,3 = \beta_2 \;.\;.\;. \; n-2,\, n-1,\, n = \beta_{n-1}. \tag{2}$$

Los dos lados que concurren en cada vértice o estación determinan siempre dos ángulos β que se diferencian entre sí 360°; para evitar toda duda tomaremos siempre como ángulo de la poligonal en cada punto el formado por los lados que unen a éste con el punto anterior y con el siguiente, contado en sentido positivo o normal (de izquierda a derecha). La elección del ángulo depende del sentido en que se haga la poligonal; si se invirtiera este sentido, cada ángulo β se convertiría en el correspondiente 360° − β. Es decir, que si en la figura 483 se recorre la poligonal en el sentido (0), (1), (2) . . . (*n*) se tienen los ángulos β_1, β_2, β_3 . . . a la izquierda de aquélla; y al contrario, si se recorriera la poligonal en sentido inverso, de (*n*) a (4), (3), (2), (1) y (0), habría que tomar en vez del ángulo β_4 el $360° - \beta_4$, en vez del β_3 el $360° - \beta_3$, y así sucesivamente.

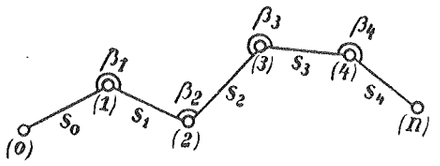


Fig. 483

II. Enlace de una poligonal por su punto de partida con un sistema de coordenadas dado. La poligonal (fig. 484) debe enlazarse por su punto de arranque (0) a un sistema de coordenadas dado, para lo cual son necesarias las coordenadas $x_0\ y_0$ de este punto y las $x_p\ y_p$ de un punto cualquiera *P*, visible desde (0), de modo que en (0) se pueda observar el ángulo $P, 0,1 = \beta_0$, que se agrega a la serie (2) de los ángulos medidos.

Esto sentado, pasemos ya al cálculo de la poligonal. Se empieza por deducir, de las coordenadas de los puntos (0) y *P*, el acimut de (0) hacia *P*, por medio de la fórmula siguiente:

$$\operatorname{tg}\,(0,P) = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0}. \tag{3}$$

Del acimut (0, *P*) y del ángulo β_0 resulta, por adición, el acimut (0, 1), a saber:

$$(0,1) = (0,P) + \beta_0. \tag{4}$$

Si en vez de (0, *P*) en la fórmula (3), se calcula el acimut inverso (*P*, 0), o sea

$$\operatorname{tg}\,(P,0) = \frac{y_0 - y_p}{x_0 - x_p}, \tag{5}$$

se tiene, entre (0, *P*) y (*P*, 0), la relación ya conocida [pág. 133, fórmula (3)]:

$$(0,P) = (P,0) \pm 180° \qquad \text{o bien} \qquad (P,0) = (0,P) \pm 180°$$

y por lo tanto, sustituyendo en (4) resulta:

$$(0,1) = (P,0) + \beta_0 \pm 180°. \tag{6}$$

Del mismo modo podemos deducir los demás acimutes (1, 2), (2, 3), etc., es decir:

$$\beta_1 = (1,2) - (1,0) \qquad \text{y} \qquad (1,0) = (0,1) \pm 180°$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned}(1,2) &= (0,1) + \beta_1 \pm 180° \\ (2,3) &= (1,2) + \beta_2 \pm 180°\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Estos acimutes (0,1), (1,2), etc., podemos designarlos abreviadamente de este otro modo:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Acimut} \quad (0,1) = \alpha_0 \\ &\quad\ » \quad\ (1,2) = \alpha_1 \\ &\quad\ . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &\quad\ » \quad (n-1,\, n) = \alpha_{n-1}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

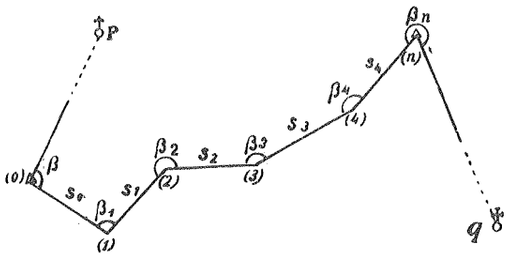


Fig. 484

Así se tienen ya todos los acimutes α y todos los lados *s*, según (1), por lo cual sólo hay que aplicar las ecuaciones fundamentales del cálculo de coordenadas [fórmulas (5) o (6) de la página 133], para tener también las coordenadas de todos los puntos o estaciones de la poligonal, como se ve a continuación:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + s_0 \operatorname{sen}\alpha_0 && x_1 = x_0 + s_0 \cos\alpha_0 \\
&y_2 = y_1 + s_1 \operatorname{sen}\alpha_1 && x_2 = x_1 + s_1 \cos\alpha_1 \\
&y_3 = y_2 + s_2 \operatorname{sen}\alpha_2 && x_3 = x_2 + s_2 \cos\alpha_2 \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. && \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
&y_n = y_{n-1} + s_{n-1} \operatorname{sen}\alpha_{n-1} && x_n = x_{n-1} + s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \\
\text{Sumas:}\quad &y_n = y_0 + [s \operatorname{sen}\alpha] && x_n = x_0 + [s\cos\alpha]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

De este modo queda enlazada toda la poligonal al sistema de coordenadas, por sólo su punto de partida (0); las sumas que acabamos de ver no tienen aplicación práctica y sólo sirven como comprobación del cálculo, no importando absolutamente nada que en el cálculo anterior se cometieran algunos errores en la adición correspondiente a los valores parciales de las coordenadas.

III. Enlace de una poligonal con un sistema de coordenadas por sus dos puntos extremos (origen y final). Si también se dan las coordenadas del vértice final y_n, x_n, de la poligonal, las sumas (9) del caso anterior no son ya meras comprobaciones de cálculo, sino que constituyen también una comprobación de las operaciones de campo, por cuanto $[s \operatorname{sen} \alpha]$ debe ser igual a $y_n - y_0$, y $[s \cos \alpha]$ lo ha de ser a $x_n - x_0$.

Además de esta comprobación de coordenadas en los cierres, se puede hacer una comprobación de los acimutes, si se mira desde el último vértice (n) (fig. 484) a otro punto conocido Q, y en este caso se agrega el ángulo final β_n a la serie de ángulos β ya medidos (2).

El cálculo se efectúa de la manera siguiente. Sean los cuatro puntos dados por sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{ll} P \text{ de coordenadas } y_p,\ x_p & (n) \text{ de coordenadas } y_n,\ x_n \\ (0) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad y_0,\ x_0 & Q \quad \text{»} \quad \text{»} \quad y_q,\ x_q \end{array}\right\} \tag{10}$$

Se calculan primero los dos acimutes $(P, 0)$ y (n, Q), que designaremos abreviadamente con α_i y α_f:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{tg}(P,0) = \operatorname{tg}\alpha_i = \dfrac{y_0 - y_p}{x_0 - x_p} & \text{para el punto inicial} \\ \operatorname{tg}(n,Q) = \operatorname{tg}\alpha_f = \dfrac{y_q - y_n}{x_q - x_n} & \text{» \quad » \quad final} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Si se aplica esta notación α a las ecuaciones (7) que dan los acimutes de todos los lados o ejes de la poligonal, tendremos:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_0 = \alpha_i + \beta_0 \pm 180^\circ \\ \alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 \pm 180^\circ \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \beta_2 \pm 180^\circ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + \beta_{n-1} \pm 180^\circ \\ \alpha_f = \alpha_{n-1} + \beta_n \pm 180^\circ \\ \hline \text{Sumas:} \quad \alpha_f = \alpha_i + [\beta] \pm t\cdot 180^\circ \end{array}\right\} \tag{12}$$

En esta fórmula, el término $t \cdot 180^\circ$ representa un múltiplo indeterminado de 180°, cuyo valor no nos interesa conocer, ya que todo acimut podemos suponerlo, a placer, aumentado o disminuído en 360° [fórmulas (3) y (4), pág. 133].

Prescindiendo de este término $\pm t \cdot 180^\circ$, la fórmula (12) nos da:

$$[\beta] = \alpha_f - \alpha_i,$$

es decir, que la suma algebraica $[\beta]$ de todos los ángulos medidos en la poligonal, debe ser igual a la diferencia entre el acimut final α_f y el acimut inicial α_i.

A causa de los errores de observación no se cumple nunca exactamente esta condición, sino que hay una cierta diferencia, que llamaremos e_β, de modo que se tiene en realidad:

$$(\alpha_f - \alpha_i) - [\beta] = e_\beta. \tag{13}$$

Cuando este *error de cierre* e_β no pasa de ciertos límites, se reparte por igual entre todos los ángulos β de la poligonal, y se calculan después por las fórmulas (12) todos los acimutes α.

Una vez obtenidos todos los acimutes α, y con los lados o ejes s, se calculan las coordenadas del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{llll} y_1 - y_0 = s_0 \operatorname{sen}\alpha_0 & & x_1 - x_0 = s_0 \cos\alpha_0 \\ y_2 - y_1 = s_1 \operatorname{sen}\alpha_1 & & x_2 - x_1 = s_1 \cos\alpha_1 \\ y_3 - y_2 = s_2 \operatorname{sen}\alpha_2 & & x_3 - x_2 = s_2 \cos\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ y_n - y_{n-1} = s_{n-1} \operatorname{sen}\alpha_{n-1} & & x_n - x_{n-1} = s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \\ \hline \text{Sumas:} \quad y_n - y_0 = [s \operatorname{sen}\alpha] & & x_n - x_0 = [s\cos\alpha] \end{array}\right\} \tag{14}$$

Así tenemos dos comprobaciones, como sucedía en (12).

En general, se obtienen muy pequeñas diferencias o errores de cierre, que son:

$$(y_n - y_0) - [s \operatorname{sen}\alpha] = e_y \qquad \text{y} \qquad (x_n - x_0) - [s\cos\alpha] = e_x. \tag{15}$$

Mientras estas variaciones e_y y e_x se mantengan dentro de ciertos límites, se distribuyen entre los valores parciales de $s \operatorname{sen}\alpha$ y $s\cos\alpha$, proporcionalmente a los lados s, y se suman después las coordenadas, según las fórmulas (14).

En el párrafo siguiente (§ 108) veremos todos estos detalles en un ejemplo numérico.

Si todos los ángulos de la poligonal fueran iguales, uno a uno, a 180°, tendríamos que aquélla se convertiría en una línea recta, entre los puntos extremos de la misma, es decir, estaríamos en el caso anteriormente estudiado [pág. 148, fórmulas (1) y (2)], y los puntos o vértices auxiliares se intercalarían por una simple medición de distancias, es decir, como si se tratara de una alineación.

La suma de todos los ángulos de una poligonal cerrada, de n vértices, cuando los lados no se cortan más que en éstos, es decir, la suma de los ángulos de un polígono de n lados sin más puntos de intersección de sus lados que sus n vértices, es la siguiente:

$$[\beta] = (n-2)\cdot 180^\circ$$

o también

$$[\beta] = (n+2)\cdot 180^\circ,$$

según que se recorra el polígono de derecha a izquierda (fig. 485) o de izquierda a derecha (fig. 486). Por ejemplo, en un cuadrilátero cuyos lados no adyacentes no se corten y cuyo perímetro se recorra en el sentido primero (figura 485), la suma de sus ángulos interiores será:

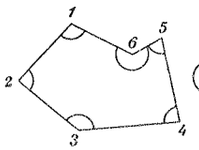


Fig. 485

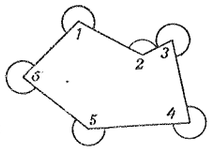


Fig. 486

$$[\beta] = (n-2)\cdot 180^\circ = (4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

En cambio, si se recorre su perímetro en el segundo sentido (fig. 486), la suma de sus ángulos exteriores será:

$$[\beta] = (n+2)\cdot 180^\circ = (4+2)\cdot 180^\circ = 1080^\circ.$$

Pero si se cortan dos lados no adyacentes del cuadrilátero, la suma de sus ángulos es siempre igual a 720°, como fácilmente puede verse construyendo la figura.

Los polígonos cerrados (p. ej. poligonal cerrada de cuatro lados) tienen poca aplicación práctica. Sólo para levantamientos de pequeños terrenos o parcelas cerradas, se utilizan en vez de la simple red de alineaciones (fig. 154), no siendo, con frecuencia, factible el hacer el enlace con las coordenadas de la triangulación topográfica o geodésica, por lo cual se emplea un sistema de coordenadas particular, como, por ejemplo, en la figura 485, tomando el lado 1-2 como eje de las x.

§ 108. Ejemplo de cálculo de una poligonal

La poligonal representada en la figura 487 une los vértices topográficos II y V, y sirve para determinar los siete puntos o vértices de poligonación (1) a (7). Para medir los acimutes de entrada y salida, se emplean también otros dos vértices topográficos, el III y el IV.

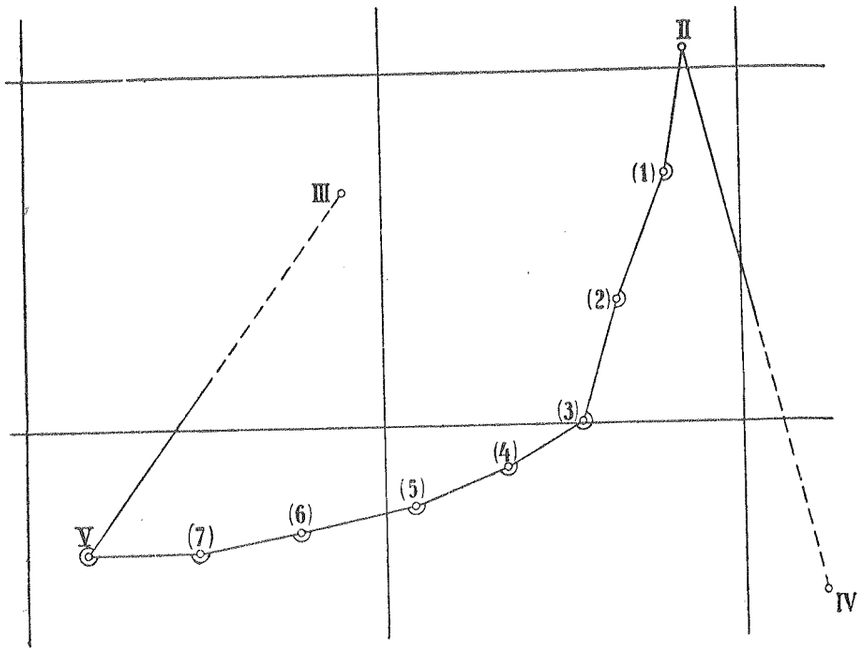


Fig. 487

Los cuatro vértices de enlace están dados por sus coordenadas, a saber:

	y	x	
IV	+ 87115,48	+ 14759,00	(1)
II	+ 86924,61	+ 15529,15	
III	+ 86447,19	+ 15329,81	
V	+ 86083,20	+ 14825,64	

En primer lugar deben calcularse los acimutes de entrada y salida, o sea el inicial α_i y el final α_f:

	y	x		
II	+ 86924,61	+ 15529,15	log — 190,87	2.280738 n
IV	+ 87115,48	+ 14759,00	log + 770,15	2.886575
	— 190,87	+ 770,15	log tg α_i	9 394163 n

(2) Acimut (IV, II) $= \alpha_i = 346°\ 04'\ 50''$

	y	x		
III	+ 86447,19	+ 15529,81	log + 363,99	2.561089
V	+ 86083,20	+ 14825,64	log + 504,17	2.702577
	+ 363,99	+ 504,17	log tg α_f	9 858512

(3) Acimut (V, III) $= \alpha_f = 35°\ 49'\ 40''$.

Hecho esto, se hace un cuadro con los ángulos de la poligonal observados y los lados o ejes de la misma:

	Ángulos	Lados
II	$\beta_0 =$ 23° 26' 40"	
(1)	$\beta_1 =$ 191 02 15	$s_0 =$ 178,43 m
(2)	$\beta_2 =$ 175 19 14	$s_1 =$ 190,74
(3)	$\beta_3 =$ 223 49 18	$s_2 =$ 178,73
(4)	$\beta_4 =$ 188 39 43	$s_3 =$ 123,20
(5)	$\beta_5 =$ 191 18 48	$s_4 =$ 140,79
(6)	$\beta_6 =$ 176 59 26	$s_5 =$ 165,04
(7)	$\beta_7 =$ 193 12 58	$s_6 =$ 143,16
V	$\beta_8 =$ 305 56 17	$s_7 =$ 157,09
	$[\beta] =$ 1669° 44' 39"	$[s] =$ 1277,18 m

Los lados medidos, antes de aplicarse el cálculo de la poligonal, se deben reducir al sistema de coordenadas planas, según las fórmulas siguientes:

$$s - S = S\,(m-1) \qquad \text{y} \qquad m - 1 = \frac{y^2}{2\,r^2},$$

donde S representa la longitud medida sobre la superficie de la Tierra, s la correspondiente sobre el plano horizontal; m es la relación entre ambas; y es la ordenada media de la poligonal y r es el radio medio de la Tierra. Con la ordenada media 86500 y con $\log\,(1 : r^2) = 6{,}38996$, se obtiene

$$m - 1 = 0{,}0000918$$

y, por consiguiente, los lados de la poligonal, referidos al sistema de coordenadas planas, serán:

$s_0 =$	178,45 m
$s_1 =$	190 76
$s_2 =$	178,75
$s_3 =$	123,21
$s_4 =$	140,80
$s_5 =$	165,06
$s_6 =$	143,17
$s_7 =$	157,11
$[s] =$	1277,31 m

El resto del cálculo se hace ya en el formulario siguiente, acerca del cual conviene hacer algunas aclaraciones:

Columna 1. Esta columna sirve sólo de guía.

Columnas 2 y 3. En estas columnas van anotados respectivamente los números, nombres o signos de los puntos y los ángulos de la poligonal observados; al mismo tiempo, en la parte inferior se hace la suma $[\beta] = 1669°\ 44'\ 39''$ y se deduce la corrección.

Columna 4. En esta columna van arriba y abajo respectivamente los acimutes de entrada y salida α_i y α_f previamente calculados en las fórmulas (2) y (3) de la página 458, $\alpha_i = 346°\,04'\,50''$ y $\alpha_f = 35°\,49'\,40''$. Al final de esta columna se calcula la diferencia $\alpha_f - \alpha_i = 49°\,44'\,50''$. Esta misma diferencia se escribe también en la parte inferior de la columna 3 poniendo: *Debe ser* 49° 44' 50"; así se comprueba que $1669° - 49° = 1620°$ es un número entero de veces 180°, es decir, es un múltiplo de 180°, a saber, $9 \times 180°$.

Columna 3. La diferencia $\alpha_f - \alpha_i = 49°\,44'\,50''$ y la suma $[\beta] = 49°\,44'\,39''$ dan $\alpha_f - \alpha_i - [\beta] = +\,11'' = e_\beta$. Esta diferencia 11" se reparte por igual entre los ángulos de

Cálculo de coordenadas de una poligonal con tabla de logaritmos

Núm. de la poligonal	Punto	Ángulo de la poligonal β	Acimutes α	Lados	$\log s$ / $\log \operatorname{sen} \alpha$ / $\log s \operatorname{sen} \alpha$	$\log s$ / $\log \cos \alpha$ / $\log s \cos \alpha$
1	2	3	4	5	6	7
	IV	+2	**346° 04′ 50″**			
	II	23° 26′ 40″		m	2.251517	2.251517
			189° 31′ 32″	178,45	9 218765 *n*	9.993970 *n*
					1.470282 *n*	2.245487 *n*
		+1			2.280487	2 280487
	(1)	191° 02′ 15″			9.545607 *n*	9.971408 *n*
			200° 33′ 48″	190,76		
					1.826094 *n*	2.251895 *n*
		+1			2.252246	2.252246
	(2)	175° 19′ 14″			9.437264 *n*	9.983092 *n*
			195° 53′ 03″	178,75		
					1 689510 *n*	2.235338 *n*
		+1			2 090646	2.090646
	(3)	223° 49′ 18″			9.936237 *n*	9.702806 *n*
			239° 42′ 22″	123,21		
					2.026883 *n*	1.793452 *n*
		+1			2.148603	2.148603
	(4)	188° 39′ 43″			9.968283 *n*	9.566600 *n*
			248° 22′ 06″	140,80		
					2 116886 *n*	1.715203 *n*
		+1			2.217642	2.217642
	(5)	191° 18′ 48″			9.992920 *n*	9.253125 *n*
			259° 40′ 55″	165,06		
					2.210562 *n*	1.470767 *n*
		+1			2.155852	2.155852
	(6)	176° 59′ 26″			9.988144 *n*	9.362694 *n*
			256° 40′ 22″	143,17		
					2.143996 *n*	1.518546 *n*
		+1			2.196204	2.196204
	(7)	193° 12′ 58″			9.999999 *n*	7.286548 *n*
			269° 53′ 21″	157,11		
		+2				
	V	305° 56′ 17″		1277,31	2.196203 *n*	9.482752 *n*
	Suma	1669° 44′ 39″		= [*s*]		
	$9 \times 180° =$	1620°	**35° 49′ 40″**			
		49° 44′ 39″	49° 44′ 50″			
	Debe ser	49 44 50	$= \alpha_f - \alpha_i$			
	Corrección					
	$c_\beta =$	+ 11″				
		$+\frac{11}{9} = +1''$				

Diferencia de ordenadas $s \operatorname{sen} \alpha$		Diferencia de abscisas $s \cos \alpha$		Diferencia de ordenadas Δy, corregida, y **ordenadas** y	Diferencia de abscisas Δx, corregida, y **abscisas** x	Punto
8		9		10	11	12
+	−	+	−	m	m	
m	m	m	m	+ **86924,61**	+ **15529,15**	II
	+2		−1			
	− 29,53		− 175,99	− 29,51	− 176,00	
				+ **86895,10**	+ **15858,15**	(1)
	+2		−1			
	− 67,00		− 178,61	− 66,98	− 178,62	
				+ **86828,12**	+ **15174,53**	(2)
	+2		−1			
	− 48,92		− 171,92	− 48,90	− 171,93	
				+ **86779,22**	+ **15002,60**	(3)
	+1		−1			
	− 106,39		− 62,15	− 106,38	− 62,16	
				+ **86672,84**	+ **14940,44**	(4)
	+1		−1			
	− 130,88		− 51,90	− 130,87	− 51,91	
				+ **86541,97**	+ **14888,53**	(5)
	+2		−1			
	− 162,39		− 29,56	− 162,37	− 29,57	
				+ **86379,60**	+ **14858,96**	(6)
	+1		−1			
	− 139,31		− 33,00	− 139,30	− 33,01	
				+ **86240,30**	+ **14825,95**	(7)
	+1		−1			
	− 157,11		− 0,30	− 157,10	− 0,31	
				+ **86083,20**	+ **14825,64**	V
0,00	− 841,53	0,00	− 703,43	− 841,41	− 703,51	
	− 841,53		− 703,43	$= y_n - y_0$	$= x_n - x_0$	
Debe ser	− 841,41	Debe ser	− 703,51			
Corrección		Corrección				
$e_y = +0,12$		$e_x = -0,08$				

$$\sqrt{e_y^2 + e_x^2} = e_s = 0{,}14 \text{ m}$$

la columna 3, correspondiendo muy aproximadamente a cada uno 1″, por lo cual se escribe sobre cada ángulo 1″, menos para el primero y el último, sobre los cuales se escribe 2″, para tener exactamente los 11″ en total. En vez de esto, se puede también poner el acimut de entrada o inicial $\alpha_i = 346^\circ\,04'\,50''$ en la parte superior de la columna 4, y después hacer la suma, que resultaría ser $2015^\circ\,49'\,29''$, o sea (dado que $2015^\circ = 11 \times 180^\circ + 35^\circ$), $35^\circ\,49'\,29''$, que da, respecto al acimut de salida o final, el mismo error $+\,11''$.

Columnas 3 y 4. Ahora viene el cálculo progresivo o gradual de los acimutes, según las fórmulas (12) de la página 456, que se hace como sigue:

$\alpha_i =$	$346^\circ\,04'\,50''$	$\alpha_0 =$	$189^\circ\,31'\,32''$
	$+\,2$		$+\,1$
	$+\;23^\circ\,26'\,40''$		$+\;191^\circ\,02'\,15''$
	$369^\circ\,31'\,32''$		$380^\circ\,33'\,48''$
	$-\;180^\circ$		$-\;180^\circ$
$\alpha_0 =$	$189^\circ\,31'\,32''$	$\alpha_1 =$	$200^\circ\,33'\,48''$
	. . . . .		. . . . .

y al final debe encontrarse, como comprobación, el acimut de salida o final $\alpha_f = 35^\circ\,49'\,40''$.

Columnas 6 y 7. Con los acimutes α de la columna 4 y los lados s de la columna 5 pueden ya calcularse los logaritmos *log* (*s sen* α) y *log* (*s cos* α), con cinco o seis cifras (siguiendo el método *I* de la página 390).

Columnas 8 y 9. En estas columnas van respectivamente los productos $s \operatorname{sen} \alpha$ y $s \cos \alpha$, con dos subdivisiones cada una, para los valores positivos o negativos de estos productos; las sumas de las dos columnas, consignadas en la parte inferior de las mismas, son respectivamente:

$$[s \operatorname{sen} \alpha] = -\,841{,}53 \qquad \text{y} \qquad [s \cos \alpha] = -\,703{,}43.$$

Columnas 10 y 11. Arriba y abajo van las coordenadas dadas, y al final se forman las diferencias siguientes:

$y_0 = +\,86924{,}61$	$x_0 = +\,15529{,}15$	II
. . . . .	. . . . .	
$y_n = +\,86083{,}20$	$x_n = +\,14825{,}64$	V
$y_n - y_0 = -\;\;841{,}41,$	$x_n - x_0 = -\;\;703{,}51$	

Columnas 8 y 9. Las diferencias de coordenadas calculadas en las columnas 10 y 11 se llevan a las 8 y 9 como valores teóricos, donde dice *Debe ser*, y así se obtienen las variaciones o correcciones:

$$e_y = +\,0{,}12\ \text{m} \qquad e_x = -\,0{,}08\ \text{m}.$$

Estas variaciones, errores o correcciones, se reparten proporcionalmente a las longitudes s de los lados, para lo cual, en la columna 5, se ha hecho anteriormente la suma $[s] = 1277{,}31$. Esta distribución se hace del modo más sencillo con la regla de cálculo; por ejemplo, para y se pone la regla en la posición fija $\frac{12}{1277}$ y basta después leer con el cursor las cantidades correspondientes a la serie de números 2, 2, 2, 1, etc., que se encuentran en la columna 8. Análogamente se procede con la serie de números 1, 1, 1, etc., de la columna 9. Los signos de las correcciones son los mismos que los de e_y y e_x, que se ven al final de las columnas 8 y 9.

Columnas 10 y 11. Los valores de $s \operatorname{sen} \alpha$ y $s \cos \alpha$ (columnas 8 y 9) ya corregidos se pasan a estas columnas 10 y 11; por ejemplo,

$$s \operatorname{sen} \alpha = -\,29{,}53 \qquad \overset{+\;0{,}02}{\Delta y = -\,29{,}53 = -\,29{,}51}, \text{ etc.}$$

Después de sumar en cada columna estos nuevos valores (cifras de trazo fino), las sumas deben ser iguales a las diferencias entre las coordenadas de los puntos extremos.

El método que acabamos de detallar, según el cual se reparte primero la variación o error angular en partes iguales entre todos los ángulos de la poligonal y después la variación o error de coordenadas se distribuye entre los valores $s \operatorname{sen} \alpha$ y $s \cos \alpha$ proporcionalmente a las longitudes s, es un método muy sencillo que no requiere absolutamente ninguna compensación especial y cumple de modo perfecto todas las exigencias prácticas de una poligonación ordinaria. Más adelante (§ 110) nos ocuparemos de algunas consideraciones teóricas sobre este particular.

Precisión de los cálculos. Las poligonales se calculan de ordinario, como en el ejemplo anterior, con una aproximación de un centímetro. Ahora bien, en los planos de población y en otros casos análogos se aproxima hasta el milímetro, para evitar la acumulación de errores.

En el ejemplo anterior hemos tomado los logaritmos con seis cifras; para cálculos muy largos se emplean ordinariamente cinco o seis cifras. En general, para poligonales secundarias de lados cortos, se emplean los logaritmos con cinco cifras, aunque también basta con cuatro.

Tablas de coordenadas. Puesto que con el cálculo logarítmico quedan sin comprobación los productos $s \operatorname{sen} \alpha$ y $s \cos \alpha$, se someten a un segundo cálculo para el cual son de valor inestimable las tablas de coordenadas, como ya se dijo en la página 139.

Máquinas de calcular. De las tablas indicadas en las páginas 140 y 141 para sen α y cos α, figuran en primer lugar, para el cálculo de poligonales, las de cinco cifras, de F. G. Gauss, y para división centesimal, las de Balzer y Dettwiler y las de Steinbrenner (*). Para comprobar los valores de $s \operatorname{sen} \alpha$ y $s \cos \alpha$ calculados con la máquina y las tablas, se calculan nuevamente, aplicando las fórmulas que siguen:

$$s \operatorname{sen} \alpha = \frac{s}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} (\alpha + 45^\circ) - \frac{s}{\sqrt{2}} \cos (\alpha + 45^\circ)$$

$$s \cos \alpha = \frac{s}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} (\alpha + 45^\circ) + \frac{s}{\sqrt{2}} \cos (\alpha + 45^\circ)$$

Las tablas de cuatro cifras (división sexagesimal) de Seiffert, citadas en la página 140, contienen, además de los valores de sen α y cos α, los de $\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha$ y $\sqrt{2} \cos \alpha$, que han de multiplicarse por $\frac{s}{2}$ al aplicar las fórmulas anteriores en el cálculo de comprobación.

En el formulario siguiente repetimos el mismo ejemplo numérico anterior, pero calculado con máquina de calcular, no siendo necesario detallar las operaciones practicadas, porque la marcha del cálculo indica claramente el proceso operatorio seguido.

(*) Véase «Tablas taquimétricas sexagesimales y centesimales, con aplicación a los levantamientos topográficos y al trazado de curvas en el terreno», por H. Gorría, ingeniero. — Gustavo Gili, Barcelona.

Cálculo de coordenadas de una poligonal con empleo de la máquina de calcular

Núm. de la poligonal	Punto	Ángulos de la poligonal β	Acimutes α	Lados s	sen α / cos α	s sen α	s cos α	sen $(\alpha+45°)$ / 0,70711 s / cos $(\alpha+45°)$	0,70711 $s \times$ sen $(\alpha+45°) = S$ / 0,70711 $s \times$ cos $(\alpha+45°) = C$	Diferencia entre las ordenadas $S-C$	Diferencia entre las abscisas $S+C$	Diferencia de ordenadas corregida Δy y **ordenadas** y	Diferencia de abscisas corregida Δx y **abscisas** x	Punto
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
						+ / −	+ / −							
1	IV		346° 04′ 50″									+ 86924,61	+ 15529,15	II
	II	+2 23° 26′ 40″						−0,81437	− 102,76					
			189° 31′ 32″	178,45	−0,16549	+2	−1	126,18	− 73,23	− 29,53	− 175,99	− 29,51	− 176,00	
					−0,98621	29,53	175,99	−0,58034						
	(1)	+1 191° 02′ 15″										+ 86895,10	+ 15353,15	(1)
			200° 33′ 48″	190,76	−0,35124	+2	−1	−0,91042	− 122,81					
					−0,93628	67,00	178,60	134,89	− 55,80	− 67,01	− 178,61	− 66,98	− 178,61	
								−0,41369						
	(2)	+1 175° 19′ 14″										+ 86828,12	+ 15174,54	(2)
			195° 53′ 03″	178,75	−0,27369	+2	−1	−0,87364	− 110,43					
					−0,96182	48,92	171,93	126,40	− 61,50	− 48,93	− 171,93	− 48,90	− 171,94	
								−0,48638						
	(3)	+1 223° 49′ 18″										+ 86779,22	+ 15002,60	(3)
			239° 42′ 22″	123,21	−0,86345	+1	−1	−0,96724	− 84,27					
					−0,50444	106,39	62,15	87,12	+ 22,12	− 106,39	− 62,15	− 106,38	− 62,16	
								+0,25386						
	(4)	+1 188° 39′ 43″										+ 86672,84	+ 14940,44	(4)
			248° 22′ 06″	140,80	−0,92957	+1	−1	−0,91797	− 91,39					
					−0,36864	130,88	51,90	99,56	+ 39,49	− 130,88	− 51,90	− 130,87	− 51,91	
								+0,39664						
	(5)	+1 191° 18′ 48″										+ 86541,97	+ 14888,53	(5)
			259° 40′ 55″	165,06	−0,98383	+2	−1	−0,82232	− 95,98					
					−0,17911	162,39	29,56	116,72	+ 66,42	− 162,40	− 29,56	− 162,37	− 29,57	
								+0,56902						
	(6)	+1 176° 59′ 26″										+ 86379,60	+ 14858,96	(6)
			256° 40′ 22″	143,17	−0,97307	+1	−1	−0,85106	− 86,16					
					−0,23051	139,31	33,00	101,24	+ 53,16	− 139,32	− 33,00	− 139,30	− 33,01	
								+0,52307						
	(7)	+1 193° 12′ 58″										+ 86240,30	+ 14825,95	(7)
			269° 53′ 21″	157,11	−1,00000	+1	−1	−0,70847	− 78,70					
					−0,00193	157,11	0,30	111,09	+ 78,40	− 157,10	− 0,30	− 157,10	− 0,31	
								+0,70574						
	V	+2 305° 56′ 17″										+ 86083,20	+ 14825,64	V
	Suma $9 \times 180° =$	1669° 44′ 39″ 1620	35° 49′ 40″	1277,31		0,00 841,53	0,00 703,43					− 841,41	− 703,51	
			49° 44′ 50″	= [s]		− 841,53	− 703,43					$= y_n - y_o$	$= x_n - x_o$	
	Debe ser	49° 44′ 39″ 49 44 50	$= \alpha_f - \alpha_i$			Debe ser − 841,41	Debe ser − 703,51							
	Corrección $e_\beta =$	+ 11″ $+\frac{11}{9} = +1''$				Corrección $e_y = +0,12$	Corrección $e_x = -0,08$							

Regla de cálculo. Para poligonales secundarias se puede emplear en muchos casos la regla de cálculo en vez de la máquina de calcular; la regla mejor es la de 50 cm de longitud, cuya escala inferior corresponde en el cálculo, aproximadamente, a los logaritmos con cuatro cifras. La regla representada en la figura 117 fué empleada por Lallemand en el Catastro Parcelario francés.

Reseña histórica. Después de la triangulación, la poligonación es hoy el principal elemento en los trabajos topográficos y catastrales, habiendo llegado a esta altura después de un desarrollo bien lento por cierto.

En algunos casos aislados se han aplicado los levantamientos por poligonales, aun en épocas muy anteriores; por ejemplo, en el levantamiento topográfico de Württemberg (1820-1840), donde era imposible triangular a través de la Selva Negra, se hicieron en total 383 Km de poligonales con teodolito y reglas de 15 pies de longitud (4,3 m) con nivel, utilizando en el cálculo una tabla de *senoversos* (1 — cos α). En Westfalia y Hessen, según Hammer, se hicieron mediciones de esta clase en 1803-1816.

En la obra de F. G. Gauss titulada «Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst» (*), aparecen las primeras instrucciones oficiales sobre poligonales (4.ª edición, 1822).

§ 109. Error longitudinal y transversal. Límites tolerables

Supongamos que de un punto A (fig. 488) parte una poligonal que según las mediciones va a parar al punto B', siendo B el punto final, dado de antemano. El segmento $BB' = e_s$ mide, pues, en magnitud y sentido, el error lineal de cierre del itinerario; este error está determinado por sus componentes e_x y e_y, que son los errores de cierre de las coordenadas.

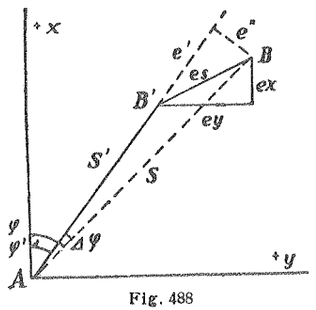


Fig. 488

Vamos a descomponer de otro modo el error de cierre e_s, para lo cual lo proyectamos sobre la línea AB', que une los dos extremos de la poligonal recorrida. A las dos componentes e' y e'' que así resultan, las llamaremos respectivamente error longitudinal y error transversal.

Estas dos componentes e' y e'' pueden calcularse directamente por trigonometría. En efecto, en la figura 488 se tiene:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{[s\operatorname{sen}\alpha]}{[s\cos\alpha]} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \tag{1}$$

$$S' = \frac{[s\operatorname{sen}\alpha]}{\operatorname{sen}\varphi'} = \frac{[s\cos\alpha]}{\cos\varphi'} \qquad S = \frac{y_b - y_a}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{x_b - x_a}{\cos\varphi} \tag{2}$$

$$e' = S - S' \qquad e'' = S\frac{\Delta\varphi}{\rho}. \tag{3}$$

Más fácil es expresar e' y e'' en función de los errores de cierre e_y y e_x de las coordenadas, pues como se ve en la figura:

$$\left.\begin{aligned} e' &= e_y\operatorname{sen}\varphi' + e_x\cos\varphi' \\ e'' &= e_y\cos\varphi' - e_x\operatorname{sen}\varphi' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) «Cálculos trigonométricos y poligonométricos en Topografía».

Ahora bien, según (2), poniendo $[s\operatorname{sen}\alpha] = [\Delta y]$ y $[s\cos\alpha] = [\Delta x]$, resulta:

$$\operatorname{sen}\varphi' = \frac{[\Delta y]}{S'} \qquad \cos\varphi' = \frac{[\Delta x]}{S'}, \tag{5}$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} e' &= \frac{1}{S'}(e_y[\Delta y] + e_x[\Delta x]) \\ e'' &= \frac{1}{S'}(e_y[\Delta x] - e_x[\Delta y]) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Para aplicar estas fórmulas, volvamos a nuestro ejemplo anterior (pág. 458), en el cual se tiene:

$$e_y = +0{,}12\text{ m} \qquad e_x = -0{,}08\text{ m} \qquad [\Delta y] = -841{,}53\text{ m} \qquad [\Delta x] = -703{,}43\text{ m}$$

y poniendo estos valores en las fórmulas (5), se deduce:

$$S' = \sqrt{841{,}53^2 + 703{,}43^2} = 1096{,}8\text{ m}.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (6) se obtiene:

$$e' = \frac{-0{,}12\times 841{,}53 + 0{,}08\times 703{,}43}{1096{,}8} = -0{,}041\text{ m}$$

$$e'' = \frac{-0{,}12\times 703{,}43 - 0{,}08\times 841{,}53}{1096{,}8} = -0{,}138\text{ m}.$$

El cálculo numérico puede ahorrarse tomando los valores de e_y y e_x de la figura 488 a escala grande, y deduciendo los valores de e' y e''. Haciendo esto en la figura 487, se obtiene: $e' = -0{,}040$ m y $e'' = -0{,}138$ m.

En las fórmulas (3) y (6) se ve que el error lineal de cierre e_s desaparece o se anula multiplicando todos los lados de la poligonal por el factor $\frac{S}{S'} = 1 + \frac{e'}{S'}$ y girando toda la poligonal en un ángulo $\Delta\varphi$ alrededor del punto de partida A.

Haciendo $\frac{S}{S'} = q$, se tiene:

$$q - 1 = \frac{e_y\operatorname{sen}\varphi' + e_x\cos\varphi'}{S'} \qquad \Delta\varphi = \frac{e_y\cos\varphi' - e_x\operatorname{sen}\varphi'}{S'}$$

o bien, según (5), sustituyendo S'^2 por $[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2$

$$\left.\begin{aligned} q - 1 &= \frac{e_y[\Delta y] + e_x[\Delta x]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2} = \frac{e'}{S'} \\ \Delta\varphi &= \frac{e_y[\Delta x] - e_x[\Delta y]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}\rho = \frac{e''}{S'}\rho \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aplicadas estas fórmulas al ejemplo numérico, resulta:

$$q - 1 = \frac{-0{,}12\times 841{,}53 + 0{,}08\times 703{,}43}{841{,}53^2 + 703{,}43^2} = -0{,}0000372,$$

$$\Delta\varphi = \frac{-0{,}12\times 703{,}43 - 0{,}08\times 841{,}53}{841{,}53^2 + 703{,}43^2}\rho = -26{,}1''.$$

Estos valores coinciden con bastante exactitud con los calculados a base de los deducidos gráficamente para e' y e'', a saber:

$$q - 1 = -0{,}000039 \qquad \Delta\varphi = -28''.$$

La distancia entre los puntos extremos de la poligonal, deducida de la figura 487, es igual a 1102 metros.

Reducción longitudinal de la red de poligonación. El factor q, o la cantidad $q-1$, tiene aún otra significación muy importante, para estudiar la cual volveremos a nuestro ejemplo de la poligonación de la ciudad de Hannover. Con las fórmulas anteriores hemos calculado la tabla siguiente para 19 itinerarios.

Número del itinerario	S deducida de las coordenadas	S' deducida de la poligonal	$S'-S$	$\frac{S'-S}{S'}=q-1$	$\varphi'-\varphi$
1	973,195 m	973,410 m	+ 0,215 m	+ 0,00022	− 6″
2	597,821	597,945	+ 0,124	+ 0,00021	+ 10
3	831,355	831,541	+ 0,186	+ 0,00022	+ 3
4	565,870	566,892	+ 0,022	+ 0,00004	− 5
5	380,493	380,611	+ 0 118	+ 0,00031	+ 21
6	620,929	621,077	+ 0,148	+ 0,00024	0
7	1018,528	1018,621	+ 0,093	+ 0,00009	+ 39
8	416,234	416,287	+ 0,053	+ 0,00013	0
9	559,190	559,237	+ 0,047	+ 0,00008	− 13
10	531,875	531,880	+ 0,005	+ 0,00001	+ 36
11	994,547	994,567	+ 0,020	+ 0,00002	+ 5
12	1257,788	1257,737	− 0,051	− 0,00004	− 11
13	732,400	732,590	+ 0,190	+ 0,00026	+ 6
14	588,227	588,310	+ 0,083	+ 0,00014	− 1
15	843,608	843,660	+ 0,052	+ 0,00062	+ 28
16	538,600	538,770	+ 0,170	+ 0,00032	− 6
17	434,399	434,462	+ 0,063	+ 0,00015	− 6
18	1188,403	1188,409	+ 0,006	+ 0,00001	− 5
19	1186,713	1186,700	− 0,013	− 0,00001	− 5
19	Sumas: 14261,175	14262,706	+ 1,531	+ 0,00302	± 206
	Promedio: 750,588	750,669	+ 0,081	+ 0,00016	± 11″

Valor medio: $\frac{S'-S}{S'}=q-1=\frac{+1{,}531}{14263}=+0{,}00011.$

El valor medio $q-1$ puede considerarse como resultado de alguno de los casos siguientes, a saber:

En primer lugar, las reglas empleadas, a pesar de su confrontación y compensación, eran erróneas por defecto, en 0,11 mm por 1 m por término medio, y daban en el campo un exceso de 0,11 m por 1000 m, o lo que es lo mismo, la medición de longitudes con las reglas, en el campo, tenía un error constante de + 0,11 m por 1000 m, es decir, que las reglas daban en el campo medidas demasiado grandes.

En segundo lugar, los lados de la triangulación en los alrededores de Hannover tienen un error, por defecto, de 0,11 m por 1000 m, y por lo tanto, el lado Ägidius-Wasserturm 2392,456 m, es realmente 0,263 mayor que lo que resulta de las mediciones de 1887, es decir, que su valor exacto es 2392,456 + 0,263 = 2392,719 m.

Estas dos causas obran siempre conjuntamente y nunca se presenta una sin la otra.

Si, aparte estas consideraciones, se tiene en cuenta que la longitud dada por el levantamiento topográfico Ägidius-Wasserturm = 2392,456 puede ser errónea en 0,287 m, se ve que cada determinación presenta una inseguridad o incertidumbre de 0,1 m ó 0,04 m por 1000 m, y podemos en consecuencia decir que una poligonación, medida con regla, puede servir para comprobar una triangulación topográfica. En el caso particular que hemos considerado es digno de observar que las mediciones se hicieron sin medios auxiliares de gran precisión, sino solamente por los procedimientos corrientes, aunque, naturalmente, seguidos con el mayor esmero (véanse §§ 18 a 21).

También se deduce de lo expuesto que, para poligonales exactamente medidas en el interior de poblaciones, donde la triangulación sería muy pesada y difícil, no es preciso hacer una triangulación de lados cortos en que apoyar aquéllas.

Error de cierre tolerable. Aunque en los distintos países son diferentes los límites del error de cierre tolerable para las poligonales, hay poca variación de unos a otros, y siempre son dependientes de la clase de terreno en que se opera. A continuación damos los límites de error tolerable en Alemania, que pueden servir de norma para los demás límites tolerables en otras naciones (*).

Llamemos e_w el error tolerable para el cierre angular de una poligonal, y sea n el número de ángulos o de vértices de aquélla; los límites adoptados son:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Para poligonales principales:} & e_w = 1{,}0'\sqrt{n} & \text{ó} \quad e_w = 2{,}0^c\sqrt{n} \\ \text{» » secundarias:} & e_w = 1{,}0'\sqrt{n}+1{,}0' & \text{ó} \quad e_w = 2{,}0^c\sqrt{n}+2{,}0^c \end{array}\right\} \quad (8)$$

Con estas fórmulas se ha calculado la tabla siguiente:

	$n=$ 2	4	6	8	10	15	20
Poligonal principal:	$e_w=$ 1,4′	2,0′	2,4′	2,8′	3,2′	3,9′	4,5′
» secundaria:	$e_w=$ 2,4′	3,0′	3,4′	3,8′	4,2′	4,9′	5,5′

y para división centesimal:

Poligonal principal:	$e_w=$ 2,8c	4,0c	4,8c	5,6c	6,4c	7,8c	9,0c
» secundaria:	$e_w=$ 4,8c	6,0c	6,8c	7,6c	8,4c	9,8c	11,0c

El error tolerable longitudinal Δ_l de la poligonal, según sean las circunstancias en que se haga el levantamiento (terreno, visibilidad, etc.), es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & \text{Terreno bueno} & \Delta_l = 0{,}002\sqrt{[s]} + 0{,}0003\,[s] + 0{,}05\text{ m} \\ \text{II.} & \text{» regular} & \Delta_l = 0{,}003\sqrt{[s]} + 0{,}0004\,[s] + 0{,}05\text{ m} \\ \text{III.} & \text{» malo} & \Delta_l = 0{,}004\sqrt{[s]} + 0{,}0005\,[s] + 0{,}05\text{ m} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Aplicando estas fórmulas se ha calculado la tabla que sigue:

$[s]$	I. Bueno	II. Regular	III. Malo
200 m	0,14 m	0,17 m	0,21 m
400	0,17	0,27	0,33
600	0,22	0,36	0,45
800	0,27	0,45	0,56
1000	0,31	0,55	0,68
1200	0,36	0,63	0,79
1400	0,40	0,72	0,90
1600	0,45	0,81	1,01
1800	0,49	0,90	1,12
2000	0,54	0,98	1,23
2500	0,65	1,20	1,50
3000	0,76	1,41	1,77

(*) En España, el error de cierre en las operaciones del Catastro Parcelario llevadas a cabo por el Instituto Geográfico y Catastral, depende de la categoría del terreno (en valor agrícola y en forma, según sea llano, quebrado o accidentado); a las categorías que se establecen corresponden como errores tolerables respectivamente: 0,0025 L, 0,0033 L y 0,004 L, siendo L la longitud en metros del itinerario (véanse en el Apéndice las Instrucciones del I. G. y C.).

Para el error transversal Δ_t tenemos la fórmula:

$$\Delta_t = [s]\, W + 0{,}05 \text{ m}, \qquad (10)$$

donde

$$W = \frac{1'}{\rho'}\sqrt{\frac{n\,(n+1)}{12\,(n-1)}} \quad \text{o bien} \quad W = \frac{1{,}85^c}{\rho^c}\sqrt{\frac{n\,(n+1)}{12\,(n-1)}}. \qquad (11)$$

Si $[s]$ se expresa en metros, el valor de W para distintos valores de n es el consignado en la tabla siguiente:

n	W
3	0,000206
5	0,000230
7	0,000256
9	0,000282
11	0,000305
13	0,000327
15	0,000348
20	0,000395

Conforme a estos valores hemos calculado la tabla siguiente para el valor del error tolerable transversal de cierre Δq, en función de $[s]$ y de n:

$[s]$	$n =$ 3	5	7	9	11	13	15	20
200 m	0,09 m	0,10 m	0,10 m	0,11 m	0,11 m	0,12 m	0,12 m	0,13 m
400	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,21
600	0,17	0,19	0,20	0,22	0,23	0,25	0,26	0,29
800	0,21	0,23	0,25	0,28	0,29	0,31	0,33	0,37
1000	0,26	0,28	0,31	0,33	0,35	0,38	0,40	0,45
1200	0,30	0,33	0,36	0,39	0,42	0,44	0,47	0,52
1400	0,34	0,37	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,60
1600	0,38	0,42	0,46	0,50	0,54	0,57	0,61	0,68
1800	0,42	0,46	0,51	0,56	0,60	0,64	0,68	0,76
2000	0,46	0,51	0,56	0,61	0,66	0,70	0,75	0,84
2500	0,56	0,62	0,69	0,75	0,81	0,87	0,92	1,04
3000	0,67	0,74	0,82	0,80	0,96	1,03	1,10	1,23

En el ejemplo numérico de la página 458 tenemos $n = 9$, para el cual se tolera un error angular de cierre de 3,0′; el error de 11″ resultante para la poligonal, cae sobradamente dentro de este límite de tolerancia.

Para el error longitudinal encontramos el valor 0,041 m (pág. 467), mientras que a la longitud $[s] = 1277$ m corresponde como error tolerable, en terreno bueno, 0,38 m.

Finalmente, para el error transversal, que era de 0,14 m (pág. 467), el límite tolerable es de 0,41 m para $[s] = 1277$ m y $n = 9$. Es decir, que el error de cierre de la poligonal considerada en nuestro ejemplo numérico, cae dentro de los límites tolerables.

Para determinar el error longitudinal y el transversal, al calcular las coordenadas de la poligonal (en los formularios de la página 461 o en el de la 465), se utilizan estos mismos formularios, habiendo sitio suficiente en la última columna de éstos para que vaya una graduación como la de la figura 489.

La determinación de los errores longitudinal y transversal se hace del modo siguiente:

De $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{[\Delta y]}{[\Delta x]}$ (véase fórmula (1) de la página 466) se deduce el acimut φ de la línea que une el punto inicial con el final de la poligonal, por medio de la regla de cálculo y una tabla de líneas trigonométricas; este ángulo, expresado en grados enteros, se anota en la graduación antedicha. A partir del centro O de ésta (fig. 489), se toman los errores de cierre de las coordenadas e_y, e_x, en escala 1 : 10 ó 1 : 5, con sus signos correspondientes, y desde el punto A resultante se traza una perpendicular AB a la recta correspondiente al acimut φ. La distancia del centro al pie B de esta perpendicular es el error longitudinal e', y la longitud de la perpendicular AB es el error trasversal e'' de la poligonal.

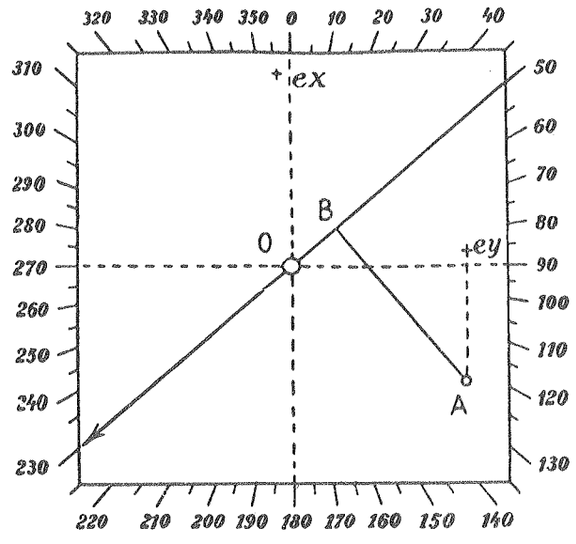


Fig. 489

Esta figura corresponde al ejemplo numérico de las páginas 460 y 464, en el cual $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-842}{-703} = +1{,}20$, o sea, $\varphi = 230°$. Para $e_y = +0{,}12$ y $e_x = -0{,}08$ resulta, como se ve en la figura, $e' = -0{,}04$ y $e'' = -0{,}14$, valores que coinciden con los deducidos por el cálculo (pág. 467).

§ 110. Compensación de las poligonales

Para anular o suprimir el error de cierre de coordenadas hemos seguido, en nuestro ejemplo de las páginas 460 y 464, el sencillo procedimiento de repartir los errores e_y y e_x proporcionalmente a las longitudes de los lados de la poligonal. Después de haber estudiado en el párrafo anterior la relación entre los errores de cierre de coordenadas y los lineales, longitudinal y transversal, vamos a hacer algunas consideraciones teóricas sobre el particular.

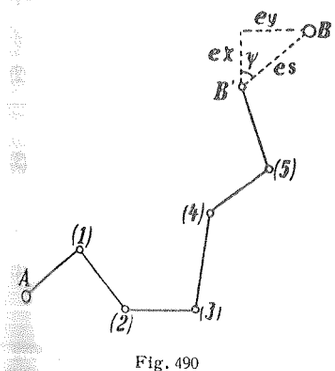


Fig. 490

En la poligonal representada en la figura 490, vemos los errores de cierre de coordenadas e_x y e_y, de los cuales resulta el error lineal de cierre e_s. Mediante la compensación de la poligonal desaparecen estos errores, trasladándose el punto final B' dado por el cálculo de las coordenadas, al punto dado B.

En vez de corregir las longitudes y los ángulos observados, vamos a limitarnos a corregir los lados y los acimutes, lo cual nos conducirá, naturalmente, a una compensación aproximada, y no a una exacta como la que se consigue del primer modo.

Acerca del reparto o distribución de las correcciones entre todos los acimutes y lados,

debe tenerse en cuenta que evidentemente se consigue el objeto propuesto (hacer coincidir B' con B) con las menores correcciones cuando se aplican éstas donde pueden surtir su máxima eficacia; por ejemplo, una corrección aplicada al lado (1)-(2) no puede dar lugar a que el punto B' se traslade adonde está el B, que es el objeto de la compensación; lo mismo sucede si se corrigen los acimutes $(A, 1)$ ó (4, 5), etc. En cambio, son muy eficaces las correcciones de los lados A-(1) y (4)-(5), así como la del acimut (1, 2). En los restantes lados de la poligonal (2)-(3), (3)-(4) y (5)-B', son también eficaces las correcciones de longitud y acimut, aunque el efecto sea dependiente del ángulo que forme cada lado con la dirección del cierre B'-B. En la figura se ve claramente que la corrección de los lados tiene su máxima eficacia cuando éstos son paralelos al segmento de cierre $B'B$, y por lo tanto éstos son los lados que deben preferirse para la compensación. Por otra parte, los acimutes que más hay que corregir son los de los lados perpendiculares a la dirección $B'B$. Llamemos ψ al acimut del segmento o línea de cierre; después de las consideraciones anteriores se ve que las correcciones de los lados deben ser proporcionales a las magnitudes $\cos(\alpha_1 - \psi)$, $\cos(\alpha_2 - \psi)\ldots$, y las de los acimutes han de ser proporcionales a $\operatorname{sen}(\alpha_1 - \psi)$, $\operatorname{sen}(\alpha_2 - \psi), \ldots$. Para hacer intervenir en el cálculo las diferentes longitudes s de los lados de la poligonal, supondremos su error medio proporcional a $\sqrt{s}$, y su peso proporcional a $\frac{1}{s}$. En cambio, para los acimutes no se tiene en cuenta la diferencia de pesos, con lo cual se facilita grandemente su compensación aproximada. Llamando k al coeficiente de proporcionalidad se tiene:

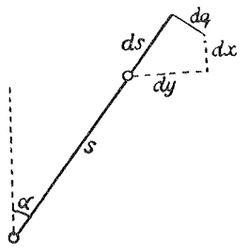


Fig. 491

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Corrección de los lados:} & k\,s_1\cos(\alpha_1-\psi) \\ & k\,s_2\cos(\alpha_2-\psi) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \text{Corrección de los acimutes:} & -k\operatorname{sen}(\alpha_1-\psi) \\ & -k\operatorname{sen}(\alpha_2-\psi) \\ & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Este signo *menos* es necesario, pues indica que las correcciones para cualquier valor de $\alpha - \psi$ se hacen en el sentido de una prolongación de la poligonal.

Vamos ahora a ver cómo puede hacerse la compensación de la poligonal, partiendo de las bases expuestas. En la figura 491, el lado s de la poligonal ha experimentado la corrección ds, y mediante la corrección del acimut α se ha producido una variación transversal dq. Según lo antes dicho se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} ds = \quad ks\cos(\alpha-\psi) \\ dq = -ks\operatorname{sen}(\alpha-\psi) \end{array}\right\} \quad (2)$$

o sea

$$\left.\begin{array}{l} ds = \quad ks(\cos\alpha\cos\psi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\psi) \\ dq = -ks(\operatorname{sen}\alpha\cos\psi - \cos\alpha\operatorname{sen}\psi) \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ahora bien, en la figura 490 se tiene:

$$\cos\psi = \frac{e_x}{e_s} \qquad \operatorname{sen}\psi = \frac{e_y}{e_s} \quad (4)$$

y por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} ds = \dfrac{ks}{e_s}(e_x\cos\alpha + e_y\operatorname{sen}\alpha) \\ dq = \dfrac{ks}{e_s}(e_y\cos\alpha - e_x\operatorname{sen}\alpha) \end{array}\right\} \quad (5)$$

Por otra parte, si llamamos dx y dy a las variaciones de la diferencia de coordenadas del lado s, debidas a las correcciones ds y dq (fig. 491), tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} ds = dy\operatorname{sen}\alpha + dx\cos\alpha \\ dq = dy\cos\alpha - dx\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad (6)$$

y de los dos sistemas de ecuaciones (5) y (6) resulta:

$$dy = \frac{ks}{e_s}e_y \qquad dx = \frac{ks}{e_s}e_x.$$

Siendo éstas las correcciones de las diferencias de coordenadas para toda la poligonal, su suma debe ser igual respectivamente a e_y y e_x, es decir:

$$\frac{k\,[s]}{e_s}e_y = e_y \qquad \frac{k\,[s]}{e_s}e_x = e_x$$

Y de aquí se deduce inmediatamente, que

$$k = \frac{e_s}{[s]}. \quad (7)$$

Una vez hallado el coeficiente de proporcionalidad k, podemos calcular las correcciones de las diferencias de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{ll} dy_1 = \dfrac{s_1}{[s]}e_y & dx_1 = \dfrac{s_1}{[s]}e_x \\ dy_2 = \dfrac{s_2}{[s]}e_y & dx_2 = \dfrac{s_2}{[s]}e_x \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (8)$$

de donde se deduce que los errores de cierre e_y y e_x se distribuyen entre las diferencias de coordenadas de cada lado, proporcionalmente a la longitud del mismo. Así se ve justificado el procedimiento tan simple empleado de modo empírico en nuestro ejemplo de la página 463.

También se pueden ya deducir las correcciones de los lados y de los acimutes, pues según las fórmulas (1), sustituyendo k por su valor (7), se tendrá:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Correcciones de los lados:} & \dfrac{e_s}{[s]}s_1\cos(\alpha_1-\psi) \\ & \dfrac{e_s}{[s]}s_2\cos(\alpha_2-\psi) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ \text{Correcciones de los acimutes:} & -\dfrac{e_s}{[s]}\rho\operatorname{sen}(\alpha_1-\psi) \\ & -\dfrac{e_s}{[s]}\rho\operatorname{sen}(\alpha_2-\psi) \\ & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (9)$$

Estas correcciones casi nunca son necesarias en la práctica.

Errores groseros en una poligonal. Cuando en una poligonal se comete un error grosero, salta en seguida a la vista en el cierre; un error de esta clase en la longitud de los lados aparece palpablemente en el cierre de las coordenadas. Hay procedimientos para localizar el error, tanto si se trata de error de acimut como de longitud de lados.

1. Un error angular grande puede localizarse desarrollando y calculando la poligonal

en sentido contrario: en el punto en que se cortan los dos itinerarios resultantes se encuentra el error cometido.

Pero también se puede hallar el punto en que se ha cometido el error angular, calculando una sola vez la poligonal. Supongamos, en efecto, que el punto final de ésta dado por el desarrollo, sea el B' (fig. 492), de coordenadas x'_n, y'_n, siendo realmente el extremo de la poligonal el punto dado B, de coordenadas x_n, y_n. Las coordenadas del punto M serán $y_m = \frac{y_n + y'_n}{2}$, $x_m = \frac{x_n + x'_n}{2}$. Llamando δ al error angular, tendremos:

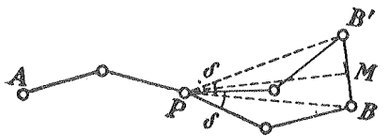


Fig. 492

$$PM = \frac{B'B}{2} \cot \frac{\delta}{2}. \qquad (10)$$

En la figura 493 están representados, para mayor claridad, estos mismos puntos P, B, M, B'. Las coordenadas x, y, del punto P en que está el error se deducirán de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{y_m - y}{x'_n - x_m} = \frac{PM}{B'M} \qquad \frac{x_m - x}{y_m - y'_n} = \frac{PM}{B'M}$$

y sustituyendo el valor de PM (10), resulta:

$$y = y_m - (x'_n - x_m) \cot \frac{\delta}{2} = x_m + (y'_n - y_m) \cot \frac{\delta}{2}$$

y sustituyendo aquí los valores de y_m y x_m dados anteriormente, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{y'_n + y_n}{2} - \frac{x'_n - x_n}{2} \cot \frac{\delta}{2} \\ x &= \frac{x'_n + x_n}{2} + \frac{y'_n - y_n}{2} \cot \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

2. Un error grosero de longitud que se cometa en una poligonal, por ejemplo, de 5 m en uno de sus lados, tiene por efecto el que toda la poligonal, a partir del sitio en que se comete el error, está corrida en 5 m, en la dirección del lado erróneo. Cuando al llegar al cierre se observa que hay dos errores grandes e_x y e_y en las coordenadas, se ve primero si $\sqrt{e_y^2 + e_x^2}$ es aproximadamente igual a 5 m o a otro número entero cualquiera, y, en segundo lugar, se ve si $e_y : e_x = \text{tg } \alpha$ (calculado con la regla de cálculo) da un ángulo que coincida aproximadamente con el acimut de alguno de los lados de la poligonal. En este caso, se corrige el error en el lado s así determinado. Claro está que cuando la poligonal es casi rectilínea, se consigue poco con este procedimiento.

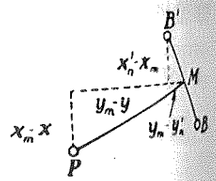


Fig. 493

§ 111. Red de poligonación

Las poligonaciones nunca son independientes, sino que siempre van unidas a una triangulación, y constituyen el principal lazo de unión entre ésta y el levantamiento de los detalles de un terreno o población.

Como ejemplo de red de poligonación tomemos el representado en las figuras 494 y 495 correspondientes a un plano de población, la primera dibujada a escala 1 : 20000 y la segunda a escala 1 : 37000; en la primera hay 123 puntos en 3 Km², y en la sègunda 203 puntos en 6 Km².

Esta poligonación va directamente unida a la triangulación, como ya se vió en la figura 432. Sus diez vértices topográficos son los puntos de enlace, o nudos, de la red

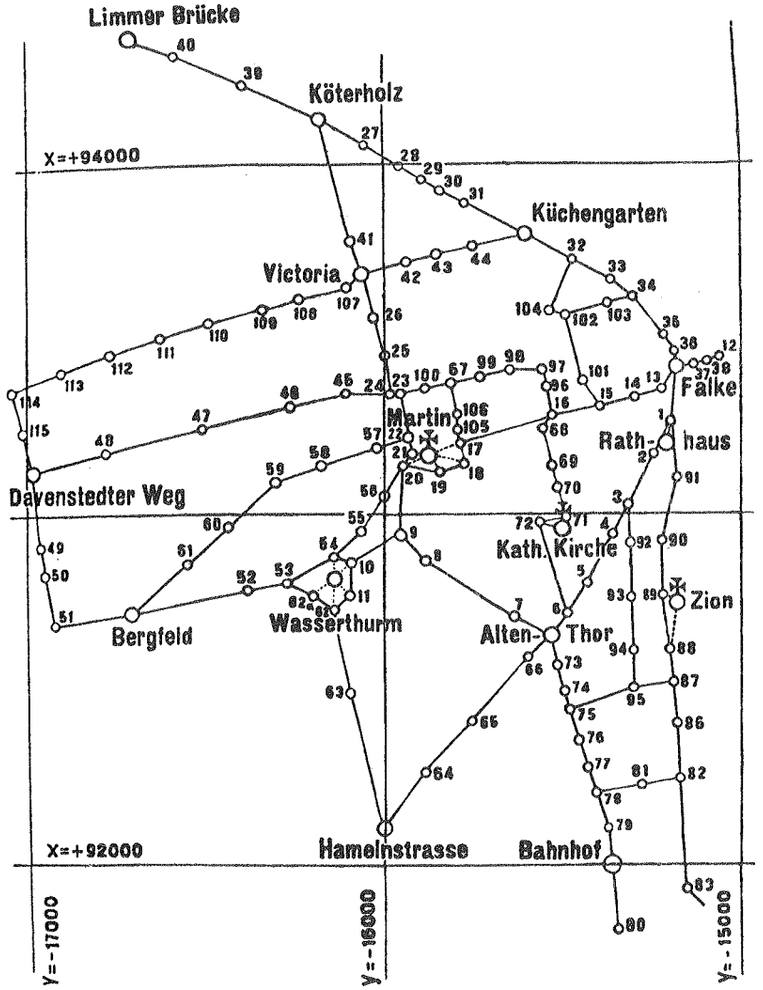


Fig. 494. — Red poligonométrica de la ciudad de Linden, cerca de Hannover
Sistema de coordenadas de Göttingen. — Escala 1 : 20000. — 123 puntos en 3 Km²

de poligonales. La distancia entre los vértices topográficos, y, por lo tanto, la longitud de una poligonal principal es, en este caso, sólo de 700 a 800 m, pues se trata de un plano de población, donde debe procederse con toda la precisión posible.

En la figura 496 (a escala 1 : 15000, con 115 puntos en 1,64 Km²), correspondiente a

un barrio, se ven seis vértices topográficos, de los cuales cuatro *A*, *D*, *N*, *H* se suponen accesibles, y los otros dos *C*, *B*, inaccesibles. Además de los puntos de las poligonales se ven en esta figura otros, de los llamados *destacados* o *radiados,* que son los puntos determinados desde las estaciones por un ángulo y una distancia, y que carecen, por consiguiente, de comprobación.

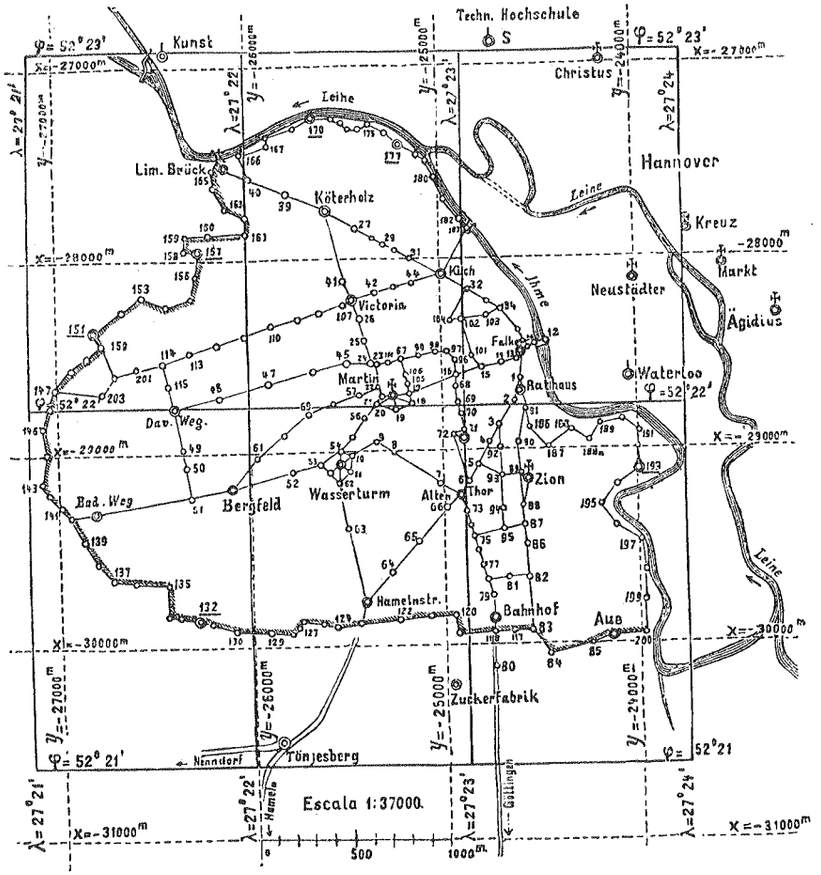


Fig. 495. – Ciudad y suburbios de Linden. Sistema de coordenadas de Celle

Escala 1:37000. — 203 puntos en 6 Km²

El número de puntos tomados es:

En la poligonal de contorno o de rodeo . . .	33 puntos
En las poligonales interiores	72 »
Destacados o radiados	10 »
Total en 1,64 Km² . . .	115 puntos

o sea 70 puntos por kilómetro cuadrado.

La figura 497 representa una manzana de un plano de población, con las poligonales y puntos de relleno tomados en el mismo.

En España, la numeración de las estaciones se hace en el orden en que se ha recorrido la poligonal: los puntos destacados o radiados se anotan con letras minúsculas, empezando para cada estación por la *a* y terminando en la *z* cuando hubiese tantos destacados

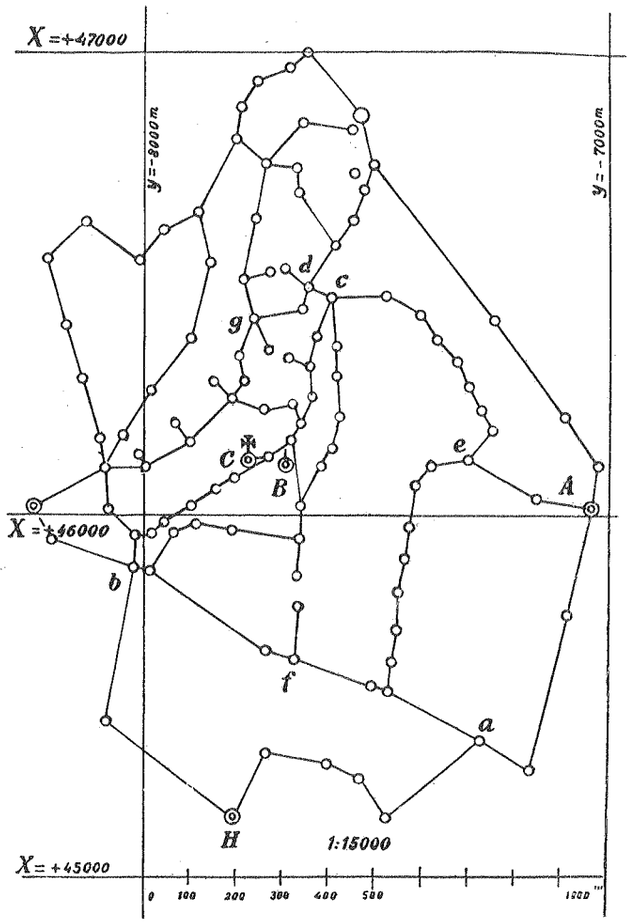


Fig. 496. — Red poligonométrica de Grünwinkel, cerca de Karlsruhe

Escala 1:15000. — 115 puntos en 1,64 Km²

como letras tiene el alfabeto: si aquél fuera mayor que éste, se designarán los puntos con las mismas letras con subíndice.

Para el orden que debe seguirse en la marcha de las poligonaciones, tratándose de planos de población, véanse las Instrucciones oficiales del Instituto Geográfico y Catastral de España, insertas en el Apéndice, donde también se ve el modo de tomar los detalles del relleno de todo el plano.

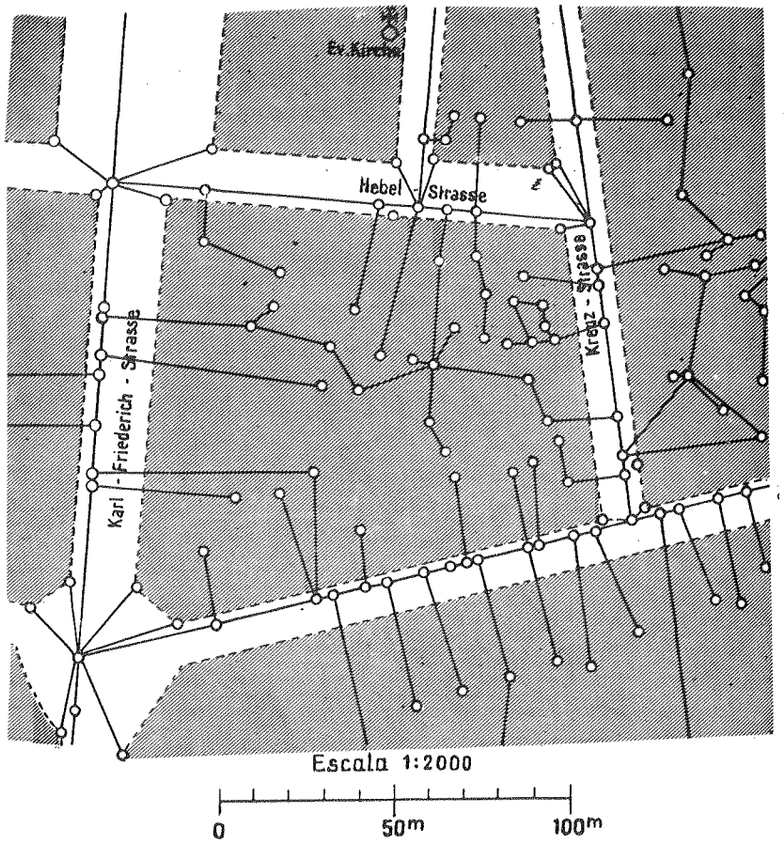


Fig. 497. — Fragmento de la red poligonal de Karlsruhe

§ 112. Señalamiento de los vértices de poligonales

Este señalamiento varía según se trate de poligonales en campo libre o en poblaciones.

I. *Vértices de poligonales en el campo.* Aparte de las señales ya existentes sobre las cuales se haya de estacionar después como vértices de poligonales (mojones de término, de lindes, etc.) y que cumplan con la condición fundamental de permanencia, el modo más corriente de señalar los puntos de poligonales consiste en enterrar piedras análogas a la representada en la figura 405. Sobre estas piedras puede centrarse el aparato, y cuando no puede ponerse el jalón al lado, como en la figura 407, se recurre, y esto es lo mejor, a un dispositivo cualquiera de sujeción de la banderola, como el que vimos en la figura 6, o como los representados en las figuras 498 y 499. A esta clase de dispositivos corresponde también el de la figura 508 y el jalón hueco con tablilla corrediza de la figura 4. Para conseguir la verticalidad del jalón se emplea el rectificador (fig. 6).

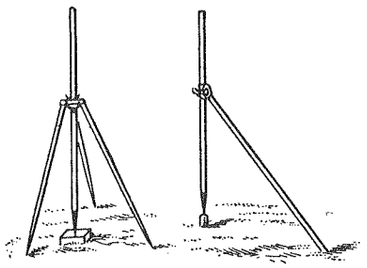


Fig. 498

Fig. 499

También se señalan los vértices de las poligonales con estacas clavadas en el suelo, como la que representa la figura 500.

En el Catastro Parcelario de España, a cargo el Instituto Geográfico y Catastral, se marcan los puntos permanentes con señales de hormigón, cemento, terracota, etc., enterradas a profundidad no menor de un metro si el terreno es blando o grabadas en roca si de ésta es el suelo.

Para las señales de los levantamientos topográficos en España, véanse las Instrucciones oficiales insertas en el Apéndice.

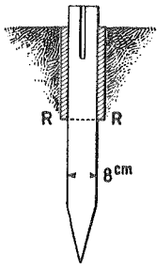


Fig. 500

II. *Vértices de poligonales en poblaciones.* Estos vértices se señalan de muy distinta manera, según los distintos países y hasta según las poblaciones, y según que hayan de servir o no para estaciones de nivel. En la figura 501 se ven las señales hechas en una calle en que no es posible fijarlas sino en las aceras, por la gran cantidad de tuberías de gas, agua, etc., que pasan bajo el arroyo. De estas señales la + grabada en el bordillo de la acera es para los vértices de poligonal, la ⊥ para referencia en la medida de las alineaciones, y el O es un clavo grande de hierro, de 0,55 m de longitud, sujeto con cemento.

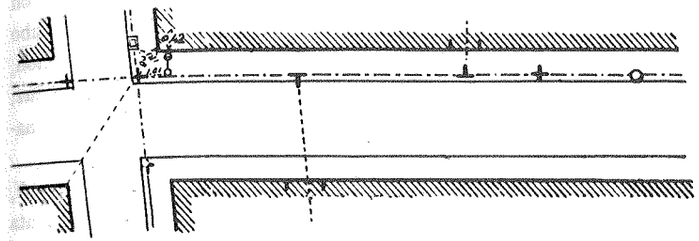


Fig. 501. — Señales en las aceras de Berlín

En otras poblaciones, en vez de estas señales se han empleado pequeños burlones de hierro, de la forma y tamaño indicado en la figura 502, con un agujero en la dirección vertical de su eje, de 3 a 5 mm de diámetro; estas señales no sólo sirven para fijar exactamente un punto, sino que también dan excelentes resultados para ser visadas de 50 a 300 m de distancia, colocando en el agujero una varilla con un trozo de papel en la punta. Van empotradas en las aceras.

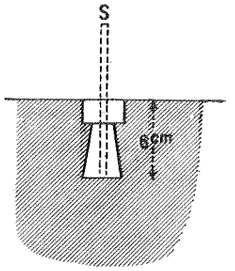


Fig. 502

En las calles con el piso de cemento o asfalto dan muy buen resultado las señales hechas con tubos de gas, clavados a ras del suelo y sujetos con cemento, como se ve en la figura 504. Para evitar que en las reparaciones de las calles se destruyan estas señales, y para encontrarlas

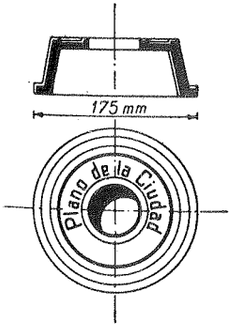


Fig. 503

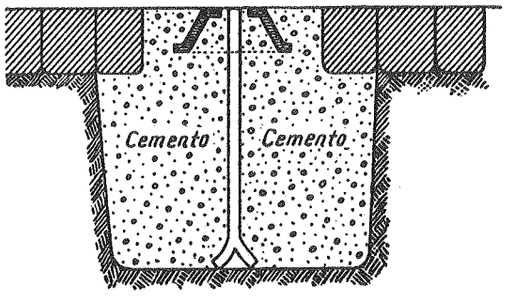


Fig. 504

con más facilidad, se coloca alrededor del tubo en la parte superior una especie de cubierta de protección, representada en la figura 503. Esta cubierta pesa unos 3 Kg y lleva en su cara superior la inscripción: «Plano de la Ciudad». Estas fueron las señales empleadas en el plano de la ciudad alemana de Ulm.

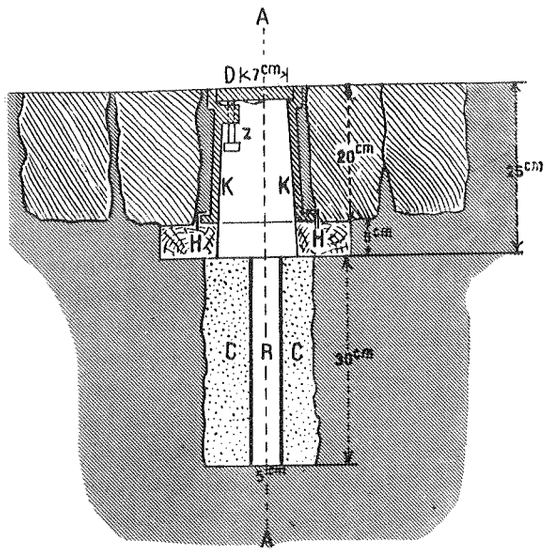


Fig. 505. — Señal del plano de Linden, con su tapa. Escala 1:10

Otra clase de señales, hechas con tubos, son las empleadas en el plano de Linden, una de las cuales está representada en la figura 505. El tubo R es de hierro, está enterrado a unos 25 cm de profundidad y asegurado con cemento C. Por encima de este tubo va una boca de agua K, de fundición, de 20 cm de altura y 9 cm de luz, que descansa sobre una pieza de madera H.

La boca superior de la caja K, que es ligeramente cónica, presenta en realidad una luz de 7 cm, en vez de 9 cm, a causa del tope Z que se ve a la izquierda, que sirve de soporte regulable a la tapa D. Por esta razón el eje $A\,A$ del tubo R no coincide con el de la caja K. La arandela de madera H, sobre la cual va clavada la caja K, está suelta sobre el cemento y el tubo R no sobresale de la cara inferior de dicha arandela, con lo cual en caso de tener que quitar la caja K para reparación del pavimento, etc., no se altera para nada la posición permanente del tubo R.

Las mejores señales para planos de población son las constituídas por pernos empotrados en las paredes, como el representado en la figura 506; estos pernos B van fijados a la pared M como los de nivelación, de los cuales sólo se diferencian en que llevan en su cabeza un taladro para introducir una pequeña varilla S de 2 a 3 mm de grosor, que se observa directamente con el teodolito o el taquímetro.

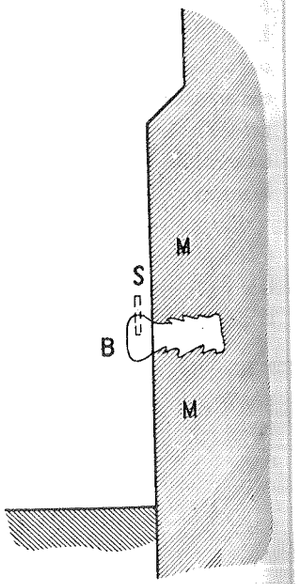


Fig. 506

Es fácil ver, geométricamente, que con dos de estos pernos, calculados por coordenadas, se pueden replantear los puntos antiguos que haya en las proximidades de aquéllos. Si se ve un vértice topográfico lejano, basta con un perno empotrado para replantear un vértice antiguo de poligonal u otro punto dado por sus coordenadas, aplicando la solución dada a este problema en la figura 516, donde C representa el perno de fijación del punto conocido.

Estos pernos (fig. 506) corresponden a los de las torres (figura 413) de los levantamientos topográficos.

En la figura 507 se ve el modo de hacer el levantamiento de un cruce de calles, partiendo de dos pernos I, II empotrados, que se encuentran del vértice de poligonación (3) a

distancias respectivas de 18,789 m y 10,137 m, y además, se mide la distancia al perno de nivelación a que está cerca de dicho vértice. Con estos tres puntos fijados con pernos, pueden calcularse las coordenadas del vértice (3), y además se miden las distancias del punto F, pie de la perpendicular bajada desde (3) a la recta I-II, a estos tres puntos (3), I y II. Ahora bien, como desde todo el cruce de las calles se ve el vértice topográfico A,

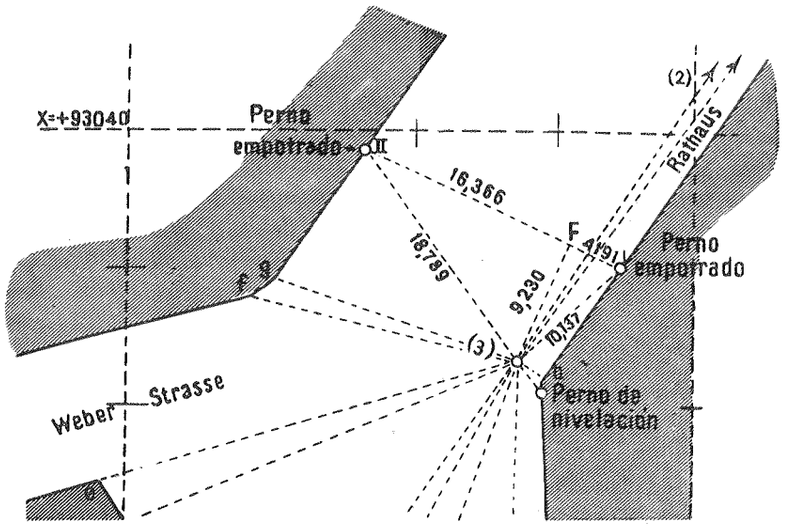


Fig. 507

para el caso eventual de pérdida de la señal del vértice (3), se determina este punto, u otro próximo, por coordenadas, aun cuando sólo haya uno de los pernos empotrados II, I, o a (véase la figura 516, donde C representa el perno de que se trate).

En el plano de población de Basel, según Mändli, no se señalaron los vértices de las poligonales directamente, sino mediante dos pernos empotrados análogos al de la figura 506. Para determinar con rapidez el vértice se empleaba un dispositivo en forma de compás, con patas de 1 m de longitud, en cuyas puntas iban fijadas unas varillas metálicas que se introducían en los taladros de los dos pernos; en esta posición, el eje de giro del compás marcaba el vértice buscado. Las dos varillas bastan para mantener en el aire el compás, pudiéndose así centrar el teodolito sobre el eje de giro de aquél.

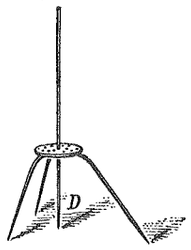


Fig. 508

Para visar los puntos, en los planos de población, se emplean jalones de pequeño diámetro, que se sujetan mediante un trípode especial (fig. 5) sobre el punto exacto del suelo. También se emplea el tripodillo que se ve en la figura 508, de 25 a 30 cm de altura, con una varilla muy fina D que se centra sobre el punto de que se trate.

Para ver el modo de señalar los puntos en los planos de población, en España, véanse en el Apéndice las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral.

§ 113. Medición de los ángulos en las poligonales

Para la observación de las poligonales se emplea ordinariamente un teodolito pequeño (figura 316 ó 317), tanto si se trata de trabajos de campo como en población. Es de la mayor conveniencia que el teodolito empleado esté provisto del dispositivo de centrado estudiado en el párrafo 73 (figs. 348 y 350), o esté construído para poderlo centrar con su misma base nivelante, como el de la figura 353.

El teodolito debe llevar círculo vertical, para tomar el ángulo de pendiente cuando la visual sea muy inclinada.

La libreta de campo puede llevarse con arreglo al formulario de la página 363. En general basta con un par de vueltas de horizonte para la medición de los ángulos, aunque antes de la medición en la segunda posición del anteojo, debe girarse el círculo (o todo el instrumento, si se trata de un teodolito sencillo) para tener otras lecturas. En el ejemplo de la figura 487 se han hecho dos pares de vueltas de horizonte para cada ángulo, con objeto de conseguir una gran precisión.

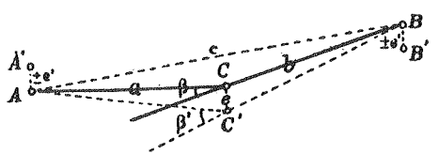


Fig. 509

En la observación angular de las poligonales tienen especial importancia el centrado del aparato y el señalado de los puntos, pues en los lados cortos (tratándose de planos de población son casi siempre menores de 50 m) los errores de excentricidad producen efectos de consideración.

En la figura 509 tenemos el caso de una poligonal casi rectilínea, a la cual pertenecen los puntos A, C, B. Sea C la estación desde donde se observan las señales colocadas en los puntos A y B; además del error en la medición del ángulo con el teodolito, hay que tener en cuenta tres excentricidades, a saber:

1. Excentricidad e del teodolito, de dirección transversal a la poligonal;
2. Excentricidad e' de la señal A, transversal a la dirección de la poligonal;
3. Excentricidad e' de la señal B, también transversal a la poligonal.

Estas tres excentricidades dan lugar, como se ve en la figura, a los siguientes errores angulares:

$$\beta' - \beta = CAC' + C'BC = \frac{e}{a}\rho + \frac{e}{b}\rho = \frac{a+b}{ab}e\rho. \qquad (1)$$

$$ACA' = \frac{e'}{a}\rho \quad \text{y} \quad BCB' = \frac{e'}{b}\rho. \qquad (2)$$

Estos tres errores son independientes y se unen al error propio de la observación angular, μ, para dar el cuadrado del error medio de un ángulo de la poligonal en cuestión:

$$m^2 = \mu^2 + \left(\frac{a+b}{ab}e\rho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a}\rho\right)^2 + \left(\frac{e'}{b}\rho\right)^2. \qquad (3)$$

Cuando la poligonal no es casi rectilínea, es decir, cuando el ángulo β de la figura 509 no es muy pequeño, o sea, cuando el ángulo γ de la figura 510 no es casi igual a 180°, con objeto de obtener una fórmula para el error de excentricidad, se traza el círculo ACB que pasa por los tres puntos consecutivos A, C, B de la poligonal. Cuando la excentricidad de C es tal que este punto permanece en el círculo, no produce error alguno en la medición del ángulo γ.

Ahora bien, cuando C es el punto verdadero y C' el excéntrico, es decir, el erróneo, se ve si la recta CC' es tangente al círculo o normal al mismo; en el caso de la figura 509, la única excentricidad $CC' = e$ que da lugar a error considerable, es la de dirección normal a la general de la poligonal, que es casi rectilínea.

Teniendo esto en cuenta, vamos a tomar como excentricidad, en la figura 510, la distancia radial $C'D = e$; en realidad esta distancia es la componente radial de la excentricidad, cuya componente tangencial CD es de efecto despreciable.

Para hallar una relación entre $C'D = e$ y $\gamma - \gamma' = \varepsilon$, tomemos el triángulo ACC', en el cual se tiene:

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{CC'\operatorname{sen}\gamma'}{a}, \qquad C'C = \frac{C'D}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{e}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por ser ε muy pequeño, podemos considerar como iguales los ángulos γ y γ', con lo cual tenemos la siguiente fórmula, de acuerdo con la (3) de la página 441:

$$\varepsilon = \frac{e\rho}{a}\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{ab}e\rho. \qquad (4)$$

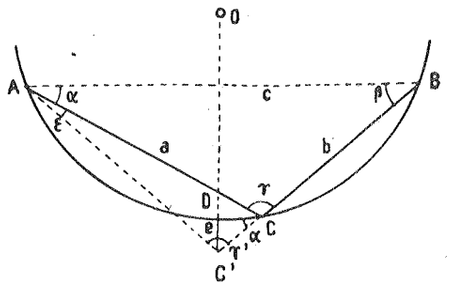


Fig. 510

Este valor ε puede ponerse en vez del (1), pues claramente se ve que la distancia c en la poligonal quebrada se convierte en la suma $a+b$ de la poligonal rectilínea cuando aquélla se hace recta. El valor ε^2, deducido de (4), puede ponerse también en lugar del segundo término del segundo miembro de la ecuación (3), y así se tiene el cuadrado del error medio de un ángulo en una poligonal quebrada cualquiera:

$$m^2 = \mu^2 + \left(\frac{c}{ab}e\rho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a}\rho\right)^2 + \left(\frac{e'}{b}\rho\right)^2. \qquad (5)$$

Sustituyendo aquí e' por e, resulta:

$$m^2 = \mu^2 + (e\rho)^2\frac{c^2 + b^2 + a^2}{a^2 b^2}. \qquad (6)$$

Si en la ecuación (5) se pone $c = a + b$, es decir, si se vuelve a considerar una poligonal casi rectilínea, la (5) se convierte en la (3) nuevamente, como así debía suceder.

No vamos a hacer aquí uso alguno de las fórmulas (5) o (6); en cambio, vamos a formar una pequeña tabla deducida de la fórmula (3) con los siguientes datos hipotéticos: error medio propio de la medición angular, $\mu = \pm 10''$; excentricidad media del teodolito, $e = \pm 5$ mm; excentricidad media de las señales, $e' = \pm 10$ mm. Estos valores de 5 mm y 10 mm para la excentricidad son demasiado grandes, y si pueden darse en el campo, no pueden tolerarse, ni suponerse siquiera, en los planos de población. Con estos datos y dicha fórmula resulta la tabla siguiente:

$\mu = \pm 10''$
$e = \pm$ 5 mm
$e' = \pm 10$ mm

a ó b	50 m	100 m	200 m	300 m	∞
50 m	1′ 12″	1′ 04″	51″	49″	47″
100	1 04	37	29	28	25
200	51	29	20	18	15
300	49	28	18	16	13
∞	47	25	15	13	10

Claro está que podría calcularse el peso de las observaciones angulares y repartir con arreglo al mismo el error angular entre todos los ángulos observados. Pero no se trata de esto, sino de hacer ver la gran importancia que tiene un pequeño error de centrado en la observación de las poligonales.

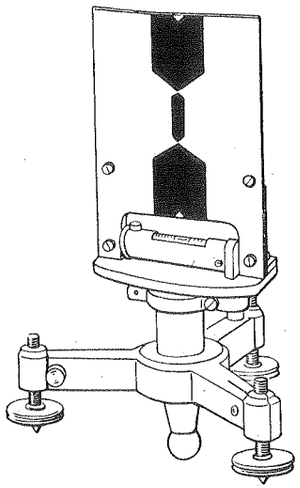


Fig. 511.—Tablilla de mira

También hay que tener en cuenta la acumulación de errores en las poligonales recorridas con teodolito, de que trataremos en el párrafo 117, pero podemos adelantar que siempre hay que procurar reducir al mínimo el error de centrado, con lo cual volvemos a reconocer la conveniencia del empleo de los dispositivos de centraje ya estudiados (§ 73, pág. 305).

Empleo de tres trípodes. El mejor modo de eliminar el error de centrado en la medición de ángulos consiste en emplear tres trípodes. Para ello hay que disponer de tres placas de centrado (*P* de la figura 352) o de tres plataformas nivelantes (fig. 351), que se colocan sobre tres trípodes iguales y bien sólidos. Además, hay que tener dos tablillas (fig. 511) o dos varillas de mira, que para la disposición llamada de Freiberg (pág. 305) llevan sus correspondientes plataformas con idénticas esferas de centrado que el dispositivo óptico de la figura 352. Ahora bien, para las poligonales pueden emplearse varillas más sencillas, de madera, provistas de una gruesa cabeza esférica, que lleva un gancho para poderse colgar fácilmente; esta cabeza, como se ve en la figura 512, se ajusta al hueco de la placa de centrado, quedando verticalmente suspendida de la cuerda atada al gancho superior.

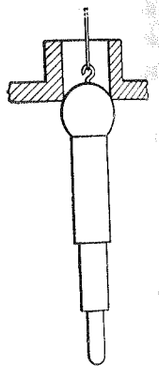


Fig. 512
Varilla de madera

Tanto si se emplean varillas como tablillas, pueden utilizarse teodolitos de centrado rígido o con dispositivo óptico de centraje.

Con estos dispositivos se hace la observación angular de una poligonal $ABCDE\ldots$ (fig. 513) del modo siguiente: se colocan primero los tres trípodes en A, B y C y se centra perfectamente la placa o la plataforma, por medio de una plomada. En el punto de partida hay que hacer el centrado con todo esmero, y, a ser posible, con el dispositivo óptico. Se coloca entonces el teodolito en A, y en B una tablilla o varilla de mira, para medir el acimut de entrada en A. Se pone después el teodolito en B, y en A y C se colocan tablillas o varillas de mira, y así sucesivamente. En los puntos intermedios se hace el centrado de las placas o plataformas con la plomada; pero en el punto final hay que proceder con el mismo esmero que en el inicial.

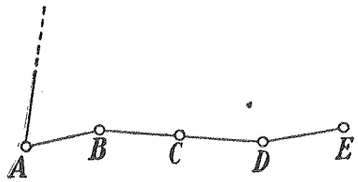


Fig. 513

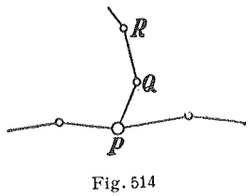


Fig. 514

Con este procedimiento se asegura, en todos los puntos, la necesaria coincidencia entre el vértice de cada ángulo y el punto del terreno correspondiente, quedando eliminado el error de centrado. En el centrado de los puntos intermedios hay que proceder también cuidadosamente, pues pueden servir después para arranques o enlaces de otros itinerarios, como se ve en la figura 514, en que el itinerario $PQR\ldots$ arranca de la poligonal principal. En este caso hay que centrar exactamente (dispositivo óptico) el aparato sobre el punto P, y marcar el punto Q con una señal bien centrada (fig. 508). Para continuar esta segunda poligonal, se vuelve a centrar con exactitud (centrado óptico) el teodolito en Q, y se marca el punto P con la señal antes empleada en Q, perfectamente centrada.

§ 114. Medición de los lados de una poligonal

Después de lo expuesto sobre medida de longitudes en los párrafos 18 a 22, sólo nos resta detenernos en algunos detalles, referentes de modo particular a los planos de población.

Los lados o ejes de las poligonales se miden, mejor que de ningún otro modo, con la regla ordinaria de 5 metros descrita en el párrafo 18 (pág. 47). Como ya vimos en el párrafo 20, basta contrastar las reglas en el comparador siempre que se aprecien variaciones de humedad, aunque a veces lo mejor es contrastarlas casi diariamente.

Cuando se colocan las reglas horizontalmente y las diferencias de altura se determinan por el método de banqueo, con plomada de hilo o de varilla provista de nivel de burbuja (§§ 12 y 18), no tenemos nada nuevo que agregar a lo ya sabido. También para las reglas o cintas colocadas oblicuamente hemos hecho el correspondiente estudio en los párrafos 18 (págs. 50 a 52) y 19 (págs. 53 a 57).

Puede emplearse también el círculo vertical del teodolito para tomar los ángulos de pendiente y aplicar la corrección resultante a la medición hecha directamente con la regla. El ángulo de pendiente se puede tomar también con alguno de los dispositivos destinados a este uso (§ 19, páginas 53 a 56).

Cada lado o eje se mide dos veces, una en cada sentido, con la misma regla y con el menor intervalo posible entre las dos mediciones. En las páginas 69 a 72 estudiamos el modo de calcular la precisión de la medida en función de la diferencia obtenida entre las dos mediciones.

Como error tolerable en una doble medición de lados de poligonal, según la clase de terreno, se toma ordinariamente:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{En terreno favorable} & d_1 = 0{,}004\sqrt{s} + 0{,}00030\,s + 0{,}02 \\ \text{» » regular} & d_2 = 0{,}006\sqrt{s} + 0{,}00035\,s + 0{,}02 \\ \text{» » desfavorable} & d_3 = 0{,}008\sqrt{s} + 0{,}00040\,s + 0{,}02 \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde s (longitud del lado) y d (error tolerable) se dan en metros.

Este error, tolerable en trabajos topográficos y catastrales, es inadmisible en planos de población, donde el límite de permisión está mucho más bajo.

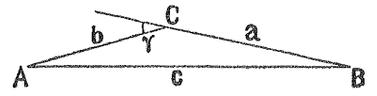


Fig. 515

Interposición de obstáculos. Si no puede medirse directamente un lado AB (por asperezas del terreno, etc.) se recurre al medio más sencillo de solventar la dificultad, resolviendo el triángulo ACB (fig. 515) en el que se miden los lados a y b y el ángulo exterior γ. Tanto si se miden los tres ángulos del triángulo, como si se miden dos o uno solo, el cálculo es bien sencillo. En el caso de la figura 515 se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos\gamma. \quad (2)$$

Aquí puede calcularse ya c directamente: pero si γ es pequeño (que es lo mejor), se transforma esta ecuación del modo siguiente:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right) = (a+b)^2 - 4ab\,\mathrm{sen}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Y si se hace

$$2\sqrt{ab}\,\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2} = x \qquad (3)$$

resulta, sustituyendo en la anterior ecuación y extrayendo la raíz cuadrada:

$$c = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)}. \qquad (4)$$

Si se miden los ángulos A y B del triángulo ACB, se tiene directamente:

$$c = b\cos A + a\cos B.$$

Reducidas al horizonte. Ya hemos visto repetidas veces el modo de reducir al horizonte una longitud l' cuando entre sus extremos hay una diferencia de altura igual a h; la reducida al horizonte l es, en este caso: $l = \sqrt{l'^2 - h^2}$, y cuando h es muy pequeña, se puede determinar con cualquier dispositivo de puntería y nivel, o calcular la corrección $\frac{h^2}{2l}$, como se vió en el párrafo 18 [pág. 49, fórmula (2)]. También se pueden nivelar exactamente todos los lados inclinados de la poligonal, empleando un nivel (equialtímetro) y miras. Este procedimiento está principalmente indicado para mediciones sobre calles y vías férreas de pendiente uniforme.

Por último, hemos de citar el procedimiento indicado en la página 57 (fig. 66), con el cual se obtienen las distancias reducidas al horizonte dirigiendo por el extremo superior de un jalón una visual horizontal a un segundo jalón, dividido de manera que se lea directamente la reducida.

Telémetros. Muchas veces se ha tratado de sustituir la medición directa, con reglas, de los lados de una poligonal, por la medición indirecta, es decir, con telémetro, sin haber logrado resultados satisfactorios. Pero con los telémetros de que se dispone en la actualidad (§§ 74 y 75) puede asegurarse que nada se pierde, en precisión, sustituyendo la medición directa por la telemétrica.

Este procedimiento tiene, además, la gran ventaja de que se hacen a un mismo tiempo las observaciones angulares y de distancias, con lo cual se logra un gran ahorro de trabajo de campo. Sobre todo en los terrenos escabrosos en que tan difícil y penoso es el empleo de la regla, está perfectamente indicado el uso del telémetro.

§ 115. Consideraciones sobre las poligonales

Aunque ya hemos tratado de todo lo concerniente a las poligonales ordinarias, vamos a hacer ahora algunas consideraciones particulares, encaminadas, en parte, a vencer dificultades locales que puedan encontrarse, y, en parte, a perfeccionar las poligonales o la poligonación ya levantada.

I. Enlace o cierre de una poligonal en un vértice topográfico o geodésico inaccesible. Cuando una poligonal pasa cerca de un vértice geodésico o topográfico (o termina en el mismo), como una torre u otro punto inaccesible, no se puede hacer el cierre directamente, sino de modo indirecto, como se ve en la figura 516.

Supongamos que la poligonal $m'\,m\,n\,n'$ pasa cerca del vértice C, dado por sus coordenadas. Podemos considerar dos casos:

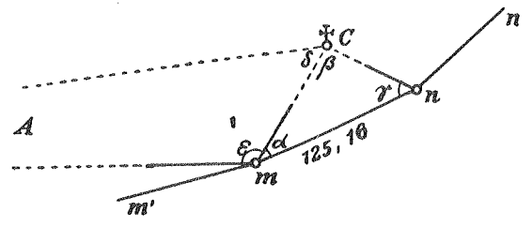


Fig. 516

Primer caso. Si cerca de C hay otro punto A dado por sus coordenadas y visible desde C y m, se pueden calcular las coordenadas de m y cerrar la poligonal en m, en acimut y en coordenadas, como si el punto m fuera un vértice topográfico o geodésico.

Segundo caso. Cuando el vértice A no es visible desde m, se determina la distancia mC por un medio auxiliar cualquiera y se hace un cierre de la poligonal con C, en coordenadas, pero no en acimut.

Suponiendo que estamos en el primer caso, tomemos para valores de las coordenadas de C y A, los siguientes, al objeto de hacer una aplicación práctica:

	y	x	Diferencias	
Punto C	$-7773{,}87$	$+46101{,}76$	$-466{,}75$	$-87{,}50.$
Punto A	$-8240{,}62$	$+46014{,}26$		

Desde n se visan los puntos C y m, y desde m, los puntos n, C y A, midiendo los siguientes ángulos y el lado mn:

$$\varepsilon = 122^\circ\,51'\,30'' \qquad \alpha = 29^\circ\,28'\,20'' \qquad \gamma = 50^\circ\,49'\,40'' \qquad \text{lado } mn = 125{,}16\text{ m}.$$

De los ángulos α y γ se deduce el β, ya que $\beta = 180^\circ - (\alpha+\gamma) = 99^\circ\,42'\,0''$, y ya podemos calcular la distancia Cm:

$$Cm = \frac{mn}{\mathrm{sen}\,\beta}\,\mathrm{sen}\,\gamma = 98{,}438, \qquad \log Cm = 1{,}993162.$$

De las coordenadas conocidas de C y A se deduce el acimut y la distancia CA, a saber:

$$(CA) = 259^\circ\,22'\,56'' \qquad \log CA = 2{,}676585 \qquad CA = 474{,}881.$$

Una vez calculado CA puede resolverse perfectamente el triángulo ACm, ya que se conocen en el mismo dos lados CA y Cm y el ángulo $AmC = \varepsilon$ opuesto al primero. El ángulo A se calcula como sigue:

$$\mathrm{sen}\,A = \frac{mC}{AC}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon, \qquad A = 10^\circ\,1'\,40''.$$

El ángulo δ resulta así ser igual a $180^\circ - (A+\varepsilon) = 47^\circ\,6'\,50''$.

Para hallar las coordenadas de m en función de las de C tenemos, en primer lugar, la distancia $Cm = 98{,}438$ ya determinada, y el acimut (Cm) se deduce del (CA) de este modo:

$$(Cm) = (CA) - \delta = 212^\circ\,16'\,6''.$$

Conocido el acimut (Cm) tenemos para valor de las coordenadas del punto m:

$$y_m = y_c + Cm\,\mathrm{sen}\,(Cm) \qquad x_m = x_c + Cm\cos(Cm)$$

Punto m: $y_m = -7826{,}425$ m $\qquad x_m = +46018{,}525$ m,

con lo cual queda resuelto el problema. Como comprobación, se calcula el acimut (mA) en función de las coordenadas de m y A, resultando $(mA) = 269^\circ\,24'\,36''$, que debe ser igual a la suma de ángulos $(CA) + A = 269^\circ\,24'\,36''$, como efectivamente sucede.

También puede hacerse una comprobación para el trozo mC, midiendo otra base que parta de m. Muy conveniente sería visar desde m otro vértice topográfico o geodésico A', para comprobar y asegurar el acimut (Cm).

II. Nudo de poligonales. En muchos casos no resulta conveniente levantar una poligonal entre dos vértices topográficos dados, sino dirigir éstas desde varios vértices a un punto central, llamado *nudo* de poligonación. Este caso se da mucho en los planos de población, en el cruce de calles, donde no hay ningún vértice topográfico. En la figura 517 se representa uno de estos casos: en primer lugar se calcula, respecto a los tres puntos A, B, C, el acimut de uno de los lados que parten del nudo D, es decir, el acimut (DE) o (ED), para el cual se obtendrán tres valores; se halla el promedio de estos tres valores y se asigna distinto peso a cada uno de ellos, que será igual a la inversa del ángulo de poligonal tomado para cada acimut. A este valor medio de (DE) deben referirse todos los acimutes de los lados, y de las coordenadas de los tres puntos dados se deducen tres veces las de D. El promedio de los valores de los tres pares de coordenadas, cuyos pesos son las inversas, da las longitudes de las poligonales, de las coordenadas definitivas del punto D, ya compensadas.

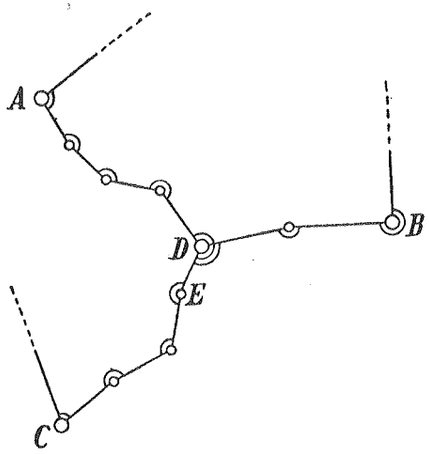


Fig. 517

III. Eliminación de los lados cortos en las poligonales. Ya veremos la razón de suprimir los lados cortos de las poligonales; pero sin llegar a ello, la simple intuición nos previene contra estos lados cortos, que constituyen un punto débil en éstas y son utilizables únicamente aplicándoles el método empleado para los nudos o puntos de enlace (como el lado 23-24 de la figura 494).

El mejor modo de evitar el efecto perjudicial de un lado corto, consiste en recurrir a un vértice topográfico muy distante, de la manera siguiente: supongamos que en la poligonal de la figura 518, no se vea d desde b, ni e desde c, pero que, en cambio, desde c y d sea visible un vértice topográfico distante M. Para poder introducir este punto en el cálculo, hay que tener las coordenadas de los puntos c y d, para lo cual debe calcularse toda la poligonal previamente (sin las visuales cM y dM). Una vez conocidas las coordenadas de c y d, se deducen los acimutes (cM) y (dM) con toda exactitud, si el punto M está a distancia relativamente grande.

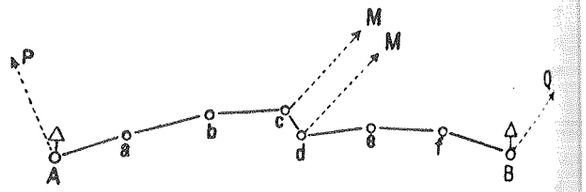


Fig. 518

El fundamento de este método estriba en que con la medición del ángulo c y el acimut (cM), los acimutes (cb) y (cd) resultan independientes del cálculo de la poligonal, y lo mismo puede decirse del punto d.

De este modo pueden utilizarse los lados muy cortos de las poligonales (tan cortos como lo permita el enfoque del anteojo), sin que estén afectados por el error de centrado.

El cálculo previo tiene, además, la importancia de servir para hallar la corrección constante de longitud y para descubrir algún posible error de cálculo.

También en las poligonales ordinarias resulta ventajoso el determinar los acimutes de las visuales dirigidas desde vértices de aquéllas a puntos lejanos dados por sus coordenadas, no sólo para rectificar la orientación de la poligonal, sino para disminuir la desviación transversal de la misma.

IV. Omisión de puntos. Cuando en una poligonal hay puntos que se desvían demasiado de la dirección general de aquélla, como sucede con los A y F en la figura 519, se prescinde de ellos en el cálculo, para lo cual, en los triángulos BAC y GFE, en que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se hallan respectivamente los lados BC y GE y los correspondientes ángulos adyacentes. El cálculo de la poligonal se hace con los lados BC y GE, y después se le unen los puntos A y F.

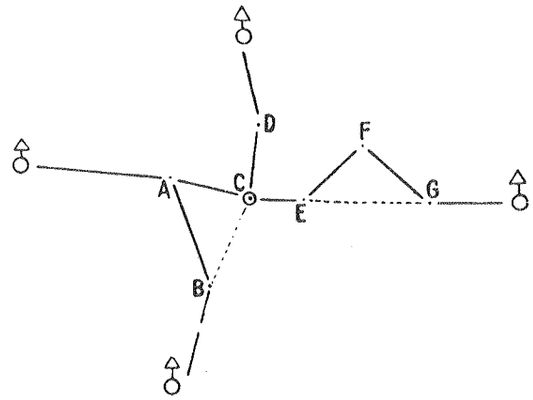


Fig. 519

§ 116. Error angular medio

Al tratar de error angular medio en las poligonales, hemos de distinguir dos clases de errores, según se trate de los ángulos de la poligonal propiamente dichos, o de los acimutes de la misma.

I. Error medio de los ángulos de la poligonal. Cualquier poligonal con cierre por acimutes puede servir para el cálculo del error medio de uno de sus ángulos. Por ejemplo, a poligonal de la figura 487, que cierra con un error acimutal de $e_\beta = 11''$, da para error medio de uno de sus nueve ángulos, según la fórmula (7) de la página 22, $11'' : \sqrt{9} = \pm 4''$: según la teoría general de la propagación de los errores (§ 5, pág. 10), el error o variación $e_\beta = 11''$ puede considerarse como la acción resultante de nueve errores aislados accidentales, de signo $\pm$.

Para una poligonal de n puntos y n ángulos (con cierre en los puntos inicial y final) se tiene, siendo el error de acimut $e_\beta = -w$, para valor del error medio angular m, según la misma fórmula (7) de la página 22:

$$m = \frac{w}{\sqrt{n}}. \qquad (1)$$

Ahora bien, el cálculo de un error medio deducido del error de cierre de una poligonal es poco seguro, como sucede con el pequeño error medio de $\pm 4''$, que resulta para la poligonal de la figura 487.

Cuando hay gran número de poligonales con un error de cierre w, se tiene para cada poligonal un valor particular, que según la fórmula (1) será:

$$m_1^2 = \frac{w_1^2}{n_1} \qquad m_2^2 = \frac{w_2^2}{n_2} \qquad m_3^2 = \frac{w_3^2}{n_3} \ldots$$

Si el número de poligonales es z, el valor medio de m será:

$$m = \sqrt{\frac{1}{z}\left(\frac{w_1^2}{n_1} + \frac{w_2^2}{n_2} + \frac{w_3^2}{n_3} + \ldots\right)}. \qquad (2)$$

Con esta fórmula hemos calculado la tabla siguiente para la poligonación de dos poblaciones (Linden y Hannover), ya citadas anteriormente. En la medición de la primera (I) empleamos un teodolito grande, de nonio, con tres trípodes y dispositivo de centrado. En cambio la segunda medición (II) la hicimos con un pequeño teodolito de microscopios lectores, también con tres trípodes y los mismos dispositivos que en la primera observación, pero sin emplear dispositivo óptico de centrado, sino sólo con la plomada simple. En la medición I se hizo con todo esmero el centrado y la puesta en estación, y el error angular $m = 15''$ que a pesar de ello resultó, se debió en gran parte a la observación angular en sí, hecha con el antiguo teodolito de nonio, cuya precisión dejaba bastante que desear. En los planos de población dan excelente resultado los pequeños teodolitos de microscopios lectores, que son ligeros, manejables, de precio relativamente bajo y de mucha precisión. El error angular medio, de 10″ y aun menos, es más que suficiente para esta clase de trabajos.

I. Linden 1887 — *II. Hannover 1894*

Núm.	n	$-e_\beta = w$	w^2	$\frac{w^2}{n}$	Núm.	n	$-e_\beta = w$	w^2	$\frac{w^2}{n}$
1.	8	+ 51″	2601	325	1.	6	+ 13″	169	28
2.	5	+ 22	484	97	2.	5	− 16	256	51
3.	9	+ 17	289	32	3.	7	− 32	1024	146
4.	8	− 21	441	55	4.	6	+ 2	4	1
5.	7	− 48	2304	329	5.	5	− 62	3844	769
6.	7	+ 22	484	69	6.	6	+ 41	1681	280
7.	5	+ 23	529	106	7.	7	− 12	144	21
8.	4	− 47	2209	552	8.	4	− 2	4	1
9.	3	+ 21	441	147	9.	5	− 29	841	168
10.	5	+ 41	1681	336	10	5	− 17	289	58
15.	3	− 14	196	65	11.	5	− 5	25	5
16.	5	− 49	2401	480	12.	6	− 10	100	17
18.	8	+ 13	169	21	13.	4	+ 7	49	12
26.	11	− 67	4489	408	14.	6	+ 26	676	113
					15.	7	− 18	324	46
					16.	6	+ 7	49	8
					17.	4	− 19	361	90
					18.	9	− 9	81	9
					19.	11	− 17	289	26
14	88			3022	19	114			1849

I. $m = \sqrt{\frac{3022}{14}} = \pm 15''$. *II.* $m = \sqrt{\frac{1849}{19}} = \pm 10''$.

Ordinariamente se tolera un error máximo de cierre en las poligonales principales (como ya vimos en la página 469), de

$$e_w = 1{,}0' \sqrt{n}$$

al cual corresponde un error angular medio de 20″. En los planos de población, este límite se reduce de 10″ a 15″.

II. Error medio de un acimut. Del error medio de los ángulos de una poligonal se puede también deducir el error medio de un acimut de la misma, y es fácil comprender que los acimutes de los distintos lados de la poligonal deben ser *desigualmente* exactos (los ángulos de la poligonal pueden medirse con igual precisión), pues en el principio y al final se hace el cierre sobre direcciones fijas en mejores condiciones que en el medio de la poligonal, y puede decirse que el error medio de los acimutes en una poligonal va aumentando desde el principio hasta el centro y desde aquí va disminuyendo hasta el final

Supongamos, como en las fórmulas (1) y (2), que se tiene una poligonal con n vértices y n ángulos, incluyendo los de entrada y salida. Consideremos un lado de esta poligonal, por ejemplo el que une el punto r con el $r+1$, cuyo acimut es $(r, r+1)$ y vamos a averiguar cuál es el error medio de este acimut después de hecha la compensación.

Según la fórmula (13) de la página 456, el error angular de cierre es:

$$e_\beta = -w = (\alpha_f - \alpha_i) - [\beta].$$

Después de dividir en partes iguales este error entre el número n de ángulos, se tiene la corrección para cada ángulo:

$$\frac{e_\beta}{n} = \frac{1}{n}(\alpha_f - \alpha_i) - \frac{1}{n}[\beta].$$

De aquí podemos deducir los valores definitivos de los acimutes de todos los lados de la poligonal, que serán los siguientes, prescindiendo, para mayor sencillez, de la adición de múltiplos de 180°:

$$(1, 2) = \alpha_i + \beta_1 + \qquad + \frac{1}{n}(\alpha_f - \alpha_i) - \frac{1}{n}[\beta]$$

$$(2, 3) = \alpha_i + \beta_1 + \beta_2 + \qquad + \frac{2}{n}(\alpha_f - \alpha_i) - \frac{2}{n}[\beta]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(r, r+1) = \alpha_i + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r + \frac{r}{n}(\alpha_f - \alpha_i) - \frac{r}{n}[\beta]$$

o bien

$$(r, r+1) = \alpha_i + \frac{r}{n}(\alpha_f - \alpha_i) + \left(1 - \frac{r}{n}\right)(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r) - \frac{r}{n}(\beta_{r+1} + \ldots + \beta_n).$$

Llamando M al error medio del acimut $(r, r+1)$, por la ley de propagación de los errores tendremos:

$$M^2 = \left[\left(1 - \frac{r}{n}\right)^2 r + \left(\frac{r}{n}\right)^2 (n - r)\right] m^2$$

o sea

$$M^2 = \left(r - \frac{r^2}{n}\right) m^2 \qquad \text{de donde} \qquad M = m\sqrt{\frac{r(n-r)}{n}}. \qquad (3)$$

Pero siendo $m = \frac{w}{\sqrt{n}}$, según la fórmula (1), se puede escribir la última ecuación en la forma siguiente:

$$M = \frac{w}{n}\sqrt{r(n-r)}. \qquad (4)$$

Esta fórmula confirma lo que dijimos antes de su deducción, a saber, que el error medio M de un acimut $(r, r+1)$ es pequeño al principio y al final del itinerario y más

grande en el medio de la poligonal; claramente nos pone de manifiesto esta conclusión la fórmula (3), donde $\sqrt{r\,(n-r)}$ representa la ordenada de un semicírculo de diámetro n, cuyo valor máximo $\frac{n}{2}$ corresponde al punto medio, es decir, que según las fórmulas (3) y (4) se tiene:

$$M_{máx} = \frac{m}{2}\sqrt{n} \qquad \text{o bien} \qquad M_{máx} = \frac{w}{2}.$$

Las fórmulas (3) y (4) tienen gran importancia, pues permiten apreciar la exactitud o precisión de una poligonal en dirección, aun después de hecha su compensación.

Como según lo que acabamos de exponer resulta que los acimutes compensados correspondientes a distintos lugares de la poligonal presentan distinto grado de precisión, es evidente que una poligonal levantada con teodolito y que se quiera compensar nuevamente, no debe hacerse girar como si fuera rígida, sino que debe *plegarse* más o menos por sus vértices.

También podemos escribir la fórmula (3) en esta otra forma:

$$M = m\sqrt{q}, \qquad \text{donde} \qquad q = \frac{r\,(n-r)}{n}, \tag{5}$$

es decir, que podemos considerar $\frac{1}{q}$ como el peso del acimut $(r,\ r+1)$ después de hecha la compensación, o sea, que q es la inversa del peso del acimut $(r,\ r+1)$ después de compensado.

Para aplicar la fórmula (3) o la (4) a un ejemplo, supongamos una poligonal de $n = 8$ puntos o vértices, que cierre con un error acimutal $e_\beta = -w = 1' = 60''$; el error medio angular será $m = \frac{60}{\sqrt{8}} = \pm 21{,}21''$ y el error medio acimutal del lado $(r,\ r+1)$ será $M = 7{,}5''\sqrt{r\,(8-r)} = 21{,}2''\sqrt{q}$, siendo $q = \frac{r\,(8-r)}{8}$. A continuación puede verse la marcha del cálculo y los resultados:

Puntos	1	2	3	4	5	6	7	8
Lados		1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8
$\frac{r\,(n-r)}{n} = q =$		0,88	1,50	1,87	2,00	1,87	1,50	0,88
$\sqrt{q}$	=	0,94	1,23	1,37	1,41	1,37	1,23	0,94
M	=	$\pm 20''$	$\pm 26''$	$\pm 29''$	$\pm 30''$	$\pm 29''$	$\pm 26''$	$\pm 20''$.

El primer lado y el último tienen como error medio $20''$, mientras que el del centro de la poligonal llega a los $30''$.

En vista de lo que antecede, pudiera pensarse en la conveniencia de perfeccionar el sencillo procedimiento de compensación del párrafo 110 (pág. 471), en el cual se consideran los acimutes como magnitudes independientes de igual precisión, introduciendo en el mismo los pesos dados por la fórmula (5); pero el exceso de trabajo de cálculo no compensa la ventaja que puede obtenerse. Por esta razón no volvemos al procedimiento indicado, y más adelante (§ 118) trataremos de la compensación rigurosa, con corrección de los ángulos de la poligonal observados.

§ 117. Errores en las poligonales casi rectilíneas de lados iguales

Las consideraciones hechas en el párrafo anterior sobre error medio de los ángulos y de los acimutes de las poligonales son aplicables a poligonales de cualquier forma, de lados iguales o desiguales, con ángulos agudos u obtusos, etc. Ahora bien, para estudiar además el error transversal (normal a la dirección de la poligonal) consideraremos el caso más sencillo, que es el de una poligonal casi rectilínea con todos los lados iguales.

En este caso son independientes entre sí los errores longitudinal y angular, ya que los primeros producen solamente variaciones en la dirección general de la poligonal, y los segundos sólo en dirección normal a la misma.

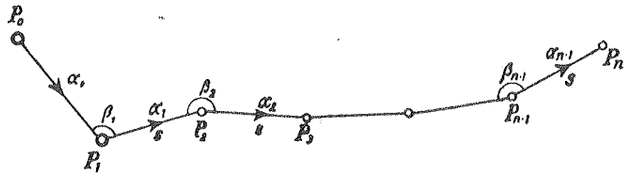


Fig. 520

De la distribución o reparto del error longitudinal en una poligonal rectilínea, hemos ya tratado en el párrafo 22 (páginas 74 a 76); por esta razón vamos a ocuparnos ahora únicamente de las variaciones transversales, para lo cual consideraremos una poligonal que, partiendo de un punto permanente P_1 (fig. 520), vaya a parar a otro punto P_n, pasando por los P_2, P_3..., en dirección casi rectilínea y con sus lados iguales.

Además de las coordenadas del punto P_1 se supone dado el acimut de entrada α_0 de la dirección $P_0 P_1$; el lado s y los ángulos β_1, $\beta_2 \ldots$, β_{n-1} se determinan en la observación de la poligonal. En primer lugar se calculan los acimutes de todos los lados:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 - 180^\circ \\
&\alpha_2 = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 - 2 \times 180^\circ \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_{n-1} = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} - (n-1)\,180^\circ.
\end{aligned}$$

Se determinan ahora los errores ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$, ε_{n-1} correspondientes a la medición de los ángulos en los vértices de la poligonal, de los cuales se deducen los errores δ_1, $\delta_2 \ldots$, δ_{n-1} de los acimutes, del modo ya sabido:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_0 + \beta_1 + \varepsilon_1 - 180^\circ \\
&\alpha_2 + \delta_2 = \alpha_0 + \beta_1 + \varepsilon_1 + \beta_2 + \varepsilon_2 - 2 \times 180^\circ \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} = \alpha_0 + \beta_1 + \varepsilon_1 + \beta_2 + \varepsilon_2 + \ldots - (n-1)\,180^\circ
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_1 = \varepsilon_1 \\
&\delta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&\cdots\cdots \\
&\delta_{n-1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Calculemos ahora la coordenada y del punto final P_n, cuyo error designaremos con la letra griega η; este error es la verdadera desviación transversal del punto final, resultante de los errores de los ángulos de la poligonal. En primer lugar tenemos:

$$y = y_1 + s \operatorname{sen} \alpha_1 + s \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + s \operatorname{sen} \alpha_{n-1}, \tag{3}$$

y después:

$$y + \eta = y_1 + s \operatorname{sen} (\alpha_1 + \delta_1) + s \operatorname{sen} (\alpha_2 + \delta_2) + \ldots s \operatorname{sen} (\alpha_{n-1} + \delta_{n-1})$$

o sea

$$y + \eta = y_1 + s \operatorname{sen} \alpha_1 + s \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + s \operatorname{sen} \alpha_{n-1} + s \cos \alpha_1\, \delta_1 + s \cos \alpha_2\, \delta_2 + \ldots + s \cos \alpha_{n-1}\, \delta_{n-1} \tag{4}$$

La diferencia entre (4) y (3) nos da el error transversal η; ahora bien, por seguir la poligonal la dirección del eje de las abscisas, los coeficientes de los errores δ son iguales, aproximadamente, a la unidad, y el error transversal resulta expresado así:

$$\eta = s\,(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1}), \tag{5}$$

Sustituyendo aquí los valores de δ_1, $\delta_2 \ldots$, dados en (2), se tiene:

$$\eta = s\,[(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-2)\,\varepsilon_2 + (n-3)\,\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1}]. \tag{6}$$

De aquí se deduce que en una poligonal con un solo cierre, deben medirse los ángulos del principio con extraordinario esmero.

Supongamos que se miden todos los ángulos con la misma precisión, y que su error medio sea igual a $\pm m$; según la ley de propagación de los errores [fórmula (10) de la página 11], el cuadrado del error medio transversal q será:

$$q^2 = s^2\,\frac{m^2}{\rho^2}\left\{(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2\right\}$$

La suma de los cuadrados de los números enteros consecutivos, del 1 al $n-1$, es igual, según la teoría de las series, a $\dfrac{n\,(n-1)\,(2\,n-1)}{6}$, y sustituyendo este valor en la anterior expresión y extrayendo la raíz cuadrada se tiene:

$$q = \pm\, s\,\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n\,(n-1)\,(2\,n-1)}{6}} \tag{7}$$

Haciendo la longitud total $(n-1)\,s$ de la poligonal igual a L, resulta:

$$q = \pm\, L\,\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n\,(2\,n-1)}{6\,(n-1)}}. \tag{8}$$

Cuando n no es demasiado pequeño, se puede suprimir la unidad en numerador y denominador de la cantidad subradical, quedando para valor muy aproximado de q el siguiente:

$$q = \pm\, L\,\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n}{3}}, \tag{9}$$

Esta expresión representa, con bastante exactitud, la ley de propagación de los errores en una poligonal de longitud cualquiera. De esta ley se deduce que en poligonales levantadas con teodolito debe procurarse que los lados sean pocos y largos.

Al contrario, en las poligonales levantadas con brújula (y en las niveladas), esta ley, como veremos más adelante, es la siguiente:

$$q = m'\sqrt{L\,s}, \tag{9a}$$

que nos dice que, en una poligonal levantada con brújula, aumenta el error medio transversal proporcionalmente a la raíz cuadrada de la longitud s de los lados, por lo cual, en las poligonales de brújula, conviene hacer los ejes cortos. El error medio acimutal m', (9a), es en una poligonal de brújula mucho más grande que el error medio angular m, (9), de una poligonal levantada con teodolito; el error m' es igual a $\pm 0{,}1^\circ = \pm 6'$, mientras que para el teodolito, m es sólo de $\pm 30''$, o sea, la duodécima parte de m'. En resumen, en la compensación de estas dos clases de poligonales, hay que tener en cuenta que en las de teodolito se logra más exactitud, pero la acumulación de errores es mayor, por lo cual deben hacerse pocos lados y largos (de hasta 300 m); en cambio, en las poligonales de brújula, menos precisas en sí, la acumulación de errores es menor, y conviene hacer muchos lados y cortos (de 20 m a 50 m).

Hasta ahora nos hemos referido a una poligonal suelta, es decir, a una poligonal que partiendo de un punto fijo no ha de terminar forzosamente en ningún otro punto dado, ni tener un determinado acimut de salida o cierre. Este es el caso, por ejemplo, que se presenta en la construcción de los túneles.

Vamos ahora a tratar del caso en que la poligonal tenga cierre acimutal en sus dos extremos, aunque sólo tenga cierre de coordenadas en su punto inicial o de partida. Estas poligonales raramente se presentan en la práctica, pero su teoría nos da el medio de comprobar el cierre de acimutes; en el párrafo siguiente (§ 118) nos ocuparemos también de este particular. Sean β_1, $\beta_2 \ldots$, β_n los valores medidos para los ángulos de la poligonal, y ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$, ε_n sus errores verdaderos; el error angular de cierre de la poligonal será $[\varepsilon]$, y la corrección de los ángulos, en la distribución uniforme que ordinariamente se hace del error de cierre, será $v = +\dfrac{[\varepsilon]}{n}$.

De los ángulos corregidos $\beta_1 + v$, $\beta_2 + v$, etc., se deducen los acimutes de la poligonal:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 + v - 180^\circ \\
&\alpha_2 = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + 2\,v - 2\times 180^\circ \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_{n-1} = \alpha_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} + (n-1)\,v - (n-1)\,180^\circ
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

De las fórmulas (1) y (10) se deducen los errores verdaderos de los acimutes, a saber:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_1 = \varepsilon_1 - v \\
&\delta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\,v \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\delta_{n-1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - (n-1)\,v
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

El error o desviación transversal del punto final se deduce de la fórmula (5), sustituyendo en aquélla los valores de δ por los dados en (11):

$$\eta = s\left\{(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-2)\,\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - v\,(1+2+\ldots+n-1)\right\} \tag{12}$$

y sustituyendo la suma de los números naturales de 1 a $n-1$ por su valor, se tiene:

$$\eta = s\left\{(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-2)\,\varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_{n-1} - \frac{n\,(n-1)}{2}\,v\right\} \tag{13}$$

Y poniendo en vez de v su valor

$$v = +\frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{\varepsilon_2}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

y sacando ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ como factores comunes, resulta:

$$\eta = s\left\{\left(n-1-\frac{n-1}{2}\right)\varepsilon_1 + \left(n-2-\frac{n-1}{2}\right)\varepsilon_2 + \ldots + \left(1-\frac{n-1}{2}\right)\varepsilon_{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\varepsilon_n\right\}$$

y simplificando,

$$\eta = \frac{s}{2}\left\{(n-1)\,\varepsilon_1 + (n-3)\,\varepsilon_2 + (n-5)\,\varepsilon_3 + \ldots (n-3)\,\varepsilon_{n-1} + (n-1)\,\varepsilon_n\right\} \tag{14}$$

Aquí se ve que, al contrario de lo que sucede en las poligonales sueltas, los coeficientes de ε son simétricos respecto al centro de la poligonal, desde el cual van disminuyendo hacia los dos extremos. Suponiendo que se tenga un número impar de puntos, el que ocupa el centro o medio de la poligonal será el $\dfrac{n+1}{2}$, y el coeficiente de $\varepsilon_{1/2\,(n+1)}$ será:

$$n - \left(2\,\frac{n+1}{2} - 1\right) = 0,$$

lo cual significa que un error angular en el punto medio de la poligonal no produce desviación lateral alguna del extremo de la misma. O sea, que en una poligonal con cierre

acimutal y un solo cierre de coordenadas, es lo mismo medir o no el ángulo del medio, en cuanto al error transversal del punto final se refiere. En este caso, en que no se trata de un error angular de cierre, se calculan los acimutes de la primera mitad de la poligonal partiendo del cierre o acimut de entrada en el punto P_1, y los de la segunda mitad se calculan partiendo del cierre o acimut de salida en el punto P_n; con estos acimutes se establecen las ecuaciones (10).

Vamos ahora a hallar el error *medio* transversal q para esta poligonal, suponiendo que el error medio angular (de observación) sea $\pm m$. Según se sabe, el cuadrado de q será:

$$q^2 = \frac{s^2}{4}\frac{m^2}{\rho^2}\left\{(n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + \ldots + (n-3)^2 + (n-1)^2\right\}$$

Calculando esta suma, considerada como una serie, se tiene:

$$q^2 = s^2\frac{m^2}{\rho^2}\frac{n(n^2-1)}{12} \tag{15}$$

y haciendo la longitud total $(n-1)\,s$ de la poligonal igual a L, tendremos, extrayendo la raíz cuadrada:

$$q = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}}. \tag{16}$$

También podemos simplificar esta fórmula para obtener un valor aproximado, suprimiendo la unidad en numerador y denominador de la cantidad subradical, cosa que puede hacerse cuando n es un número bastante grande, resultando:

$$q = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n}{12}}. \tag{17}$$

Como se ve, comparando este valor con el (9), el error transversal del punto final es menor en las poligonales con cierre en sus dos extremos, que en las de un solo cierre.

Consideremos ahora una poligonal con cierre de acimut y coordenadas en los puntos inicial y final, que sea sensiblemente rectilínea, de lados casi iguales y dirigida según el eje de las abscisas. El error angular de cierre debe repartirse por igual entre todos los ángulos de la poligonal; el error de cierre de coordenadas se reparte proporcionalmente a los lados, es decir, como en el caso anterior, en partes iguales entre los mismos. Vamos a calcular, para esta poligonal, la variación transversal media del centro del itinerario y supongamos que n sea un número impar. Del error de cierre de las coordenadas, interesa solamente el error de las ordenadas; la mitad de este error debe agregarse, como corrección, a la ordenada del vértice central de la poligonal.

Para el cálculo de estos errores, podemos partir del desarrollo anterior, y deducir de la fórmula (5) el error transversal del punto final del itinerario, o la variación w en la dirección del eje de las ordenadas, a saber:

$$w = s\,(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1}), \tag{18}$$

donde los valores de $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_{n-1}$ son los dados por las fórmulas (11). La ordenada, ya corregida, del punto medio de la poligonal, es por consiguiente:

$$y = y_1 + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + \ldots + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_{\frac{n-1}{2}} + \frac{w}{2}. \tag{19}$$

Su valor verdadero es, según (4):

$$\left.\begin{aligned} y + \eta = y_1 + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + \ldots + s\,\mathrm{sen}\,\alpha_{\frac{n-1}{2}} + s\cos\alpha_1\,\delta_1 + s\cos\alpha_2\,\delta_2 + \cdots \\ + s\cos\alpha_{\frac{n-1}{2}}\,\delta_{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Y teniendo en cuenta que el acimut α es casi igual a cero, resulta para el error η el valor siguiente:

$$\eta = s\left(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{\frac{n-1}{2}}\right) - \frac{w}{2}$$

o bien

$$\eta = s\left(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{\frac{n-1}{2}}\right) - \frac{s}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1})$$

y efectuando operaciones y simplificando:

$$\eta = \frac{s}{2}\left(+\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{\frac{n-1}{2}} - \delta_{\frac{n+1}{2}} - \ldots - \delta_{n-1}\right) \tag{21}$$

Sustituyendo aquí los valores de δ_1, $\delta_2 \ldots$ dados por (11), tenemos, una vez hechas las sumas necesarias:

$$\left.\begin{aligned} \eta = -\frac{s}{2}\Big\{ &+ \varepsilon_2 + 2\,\varepsilon_3 + 3\,\varepsilon_4 + \ldots + \frac{n-3}{2}\,\varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{2}\,\varepsilon_{\frac{n+1}{2}} + \frac{n-3}{2}\,\varepsilon_{\frac{n+3}{2}} + \ldots \\ &+ \varepsilon_{n-1} + v\left(1 + 2 + \ldots + \frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{2} - \frac{n+3}{2} - \ldots - (n-1)\right)\Big\} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

En primer lugar, sustituyamos el coeficiente de v por su valor, en forma más simple, $-\frac{(n-1)^2}{4}$. Después, sustituyamos v por su valor:

$$v = +\frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{\varepsilon_2}{n} \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

y para simplificar hagamos $\frac{(n-1)^2}{4n} = c$, de modo que, al hacer estas sustituciones en la fórmula (22), se convierte ésta en la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \eta = \frac{s}{2}\Big\{ &c\,\varepsilon_1 + (c-1)\,\varepsilon_2 + (c-2)\,\varepsilon_3 + \ldots + \left(c - \frac{n-3}{2}\right)\varepsilon_{\frac{n-1}{2}} + \left(c - \frac{n-1}{2}\right)\varepsilon_{\frac{n+1}{2}} \\ &+ \left(c - \frac{n-3}{2}\right)\varepsilon_{\frac{n+3}{2}} + \ldots + (c-1)\,\varepsilon_{n-1} + c\,\varepsilon_n\Big\} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Con esta ecuación puede calcularse el efecto de los errores angulares parciales en la desviación transversal del centro de la poligonal. En el siguiente cuadro tenemos calculados los coeficientes de ε para distintos valores de n, y el error o desviación transversal η del centro de la poligonal:

$n = 3$, $\eta = \frac{s}{100}(+4{,}8\,\varepsilon_1 - 9{,}7\,\varepsilon_2 + 4{,}8\,\varepsilon_3)$

$n = 5$, $\eta = \frac{s}{100}(+11{,}5\,\varepsilon_1 - 2{,}9\,\varepsilon_2 - 17{,}3\,\varepsilon_3 - 2{,}9\,\varepsilon_4 + 11{,}5\,\varepsilon_5)$

$n = 7$, $\eta = \frac{s}{100}(+18{,}6\,\varepsilon_1 + 4{,}2\,\varepsilon_2 - 10{,}3\,\varepsilon_3 - 24{,}6\,\varepsilon_4 - 10{,}3\,\varepsilon_5 + 4{,}2\,\varepsilon_6 + 18{,}6\,\varepsilon_7)$

$n = 9$, $\eta = \frac{s}{100}(+25{,}7\,\varepsilon_1 + 11{,}3\,\varepsilon_2 - 3{,}2\,\varepsilon_3 - 17{,}6\,\varepsilon_4 - 32{,}0\,\varepsilon_5 - 17{,}6\,\varepsilon_6 - 3{,}2\,\varepsilon_7 + 11{,}3\,\varepsilon_8 + 25{,}7\,\varepsilon_9)$

$n = 11$, $\eta = \frac{s}{100}(+32{,}7\,\varepsilon_1 + 18{,}3\,\varepsilon_2 + 3{,}9\,\varepsilon_3 - 12{,}8\,\varepsilon_4 - 25{,}0\,\varepsilon_5 - 39{,}5\,\varepsilon_6 - 25{,}0\,\varepsilon_7 - 12\,8\,\varepsilon_8 + 3{,}9\,\varepsilon_9 + 18{,}3\,\varepsilon_{10} + 32{,}7\,\varepsilon_{11})$

$n = 13$, $\eta = \frac{s}{100}(+40{,}0\,\varepsilon_1 + 25{,}5\,\varepsilon_2 + 11{,}1\,\varepsilon_3 - 3{,}3\,\varepsilon_4 - 17{,}8\,\varepsilon_5 - 32{,}2\,\varepsilon_6 - 46{,}6\,\varepsilon_7 - 32{,}2\,\varepsilon_8 - 17{,}8\,\varepsilon_9 - 3{,}3\,\varepsilon_{10} + 11{,}1\,\varepsilon_{11} + 25{,}5\,\varepsilon_{12} + 40{,}0\,\varepsilon_{13})$.

Aquí se ve que el error angular produce su máximo efecto en el centro de la poligonal, desde donde va disminuyendo hacia los extremos. Es decir, que observando con todo cuidado los ángulos inicial, final y del centro, se consigue una gran precisión sin dispendio de trabajo.

Todo lo dicho se refiere al error verdadero; para pasar al error medio, supongamos que todos los ángulos se observen con la misma precisión, siendo su error medio $\pm m$; si $\pm q$ es la desviación transversal del centro de la poligonal, se tiene, por la ley de propagación de los errores:

$$q^2 = \frac{s^2}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\left[c^2 + (c-1)^2 + (c-2)^2 + \ldots + \left(c - \frac{n-3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{n-1}{2}\right)^2\right]$$

y desarrollando los cuadrados y simplificando, resulta:

$$q^2 = \frac{s^2}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\left\{\frac{n}{2}c^2 - 2c\left(1+2+3+\ldots+\frac{n-3}{2}\right) + \left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n-3}{2}\right)^2\right] - \frac{n-1}{2}c + \frac{(n-1)^2}{8}\right\}$$

Ahora bien, como la suma de los números naturales del 1 al $\frac{n-3}{2}$ es igual a $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$, y la suma de los cuadrados de estos mismos números es igual a $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, se tiene, después de sustituir c por su valor y de hacer todas las reducciones posibles:

$$q^2 = s^2\frac{m^2}{\rho^2}\frac{n^4+2n^2-3}{192n} \qquad \text{o sea} \qquad q = \pm s\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n^4+2n^2-3}{192n}}. \tag{24}$$

Introduciendo ahora en esta fórmula la longitud total de la poligonal

$$L = (n-1)s,$$

tendremos:

$$q = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n^4+2n^2-3}{192n(n-1)^2}}. \tag{25}$$

Como fórmula aproximada, se tiene la siguiente expresión:

$$q = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n}{192}} \tag{26}$$

que sólo es aplicable a valores muy grandes de n.

Si ahora queremos comparar las desviaciones medias transversales dadas por las ecuaciones (8), (16) y (25), observemos que las dos primeras se refieren al punto final de una poligonal de longitud L, y la tercera al centro de la misma poligonal. Para hacer comparables estas fórmulas sustituyamos en (8) y (16) L por $\frac{L}{2}$ y n por $\frac{n+1}{2}$, con lo cual tendremos:

1. Para el punto final de una poligonal completamente suelta, con $\frac{n+1}{2}$ puntos y de longitud $\frac{L}{2}$:

$$q_1 = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n(n+1)}{24(n-1)}}. \tag{27}$$

2. Para el punto final de la misma poligonal, con cierre de acimutes:

$$q_2 = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{96(n-1)}}. \tag{28}$$

3. Para el centro de una poligonal cerrada por acimutes y coordenadas, con n puntos y longitud L:

$$q_3 = \pm L\frac{m}{\rho}\sqrt{\frac{n^4+2n^2-3}{192n(n-1)^2}}. \tag{29}$$

Para el cálculo numérico de q, según estas tres fórmulas, se expresa L en kilómetros, m en minutos, y así resulta q expresado en centímetros:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \pm L m W_1 \\ q_2 &= \pm L m W_2 \\ q_3 &= \pm L m W_3 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

donde los factores W_1, W_2 y W_3 se toman de la tabla siguiente, según el valor de n.

n	W_1	W_2	W_3
3	14,6	10,3	4,0
5	16,3	10,3	4,9
7	18,1	10,8	5,7
9	19,9	11,5	6,4
11	21,6	12,2	7,0
13	23,1	12,8	7,6

Mediante el cierre por acimutes y coordenadas se reduce la desviación o error transversal a menos de la tercera parte del valor que tiene en la poligonal completamente suelta. La conveniencia, o más bien la exigencia o necesidad de tomar lados largos en las poligonales, constituye el resultado más importante del estudio de los errores que acabamos de hacer.

Error tolerable en el cierre de las poligonales. Completando lo expuesto en el párrafo 109 (pág. 469), vamos a ocuparnos de los errores tolerables en los cierres de poligonales, distinguiendo, como allí se hizo, un error longitudinal y otro transversal. Los límites ordinariamente admitidos para el primero son los indicados en la página 469. Para el cálculo del error transversal hay que tener en cuenta que primero se calculan las diferencias de coordenadas en la poligonal, y después, el error angular de cierre se reparte por igual entre todos los ángulos de la misma. Ya hemos visto también cuál es el error medio transversal para el punto final de una poligonal con cierre de acimut pero no de coordenadas, a cuyo caso corresponden las ecuaciones (10) a (17) de las págs. 495 y 496. Según la ecuación (16) de la página 496, se tiene:

$$m_q^2 = L^2\frac{m^2}{\rho^2}\frac{n(n+1)}{12(n-1)}, \tag{31}$$

donde m es el error medio de la medición angular, y n el número de vértices incluyendo el punto final.

Para poder aplicar con facilidad esta fórmula a los cálculos numéricos, se hace:

$$\frac{1}{\rho'}\sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}} = W \tag{32}$$

y expresando L en kilómetros y m en minutos, se tiene m_q en metros:

$$m_q = L m W, \tag{33}$$

donde W está dado por la tabla de la página siguiente, según sea n.

Todo lo dicho se refiere a poligonales casi rectilíneas y de lados iguales. Para poligonales de otra forma, consignaremos el resultado de nuestros trabajos sobre poligonales curvadas por un solo extremo o en forma de S; para ambas clases de poligonales, el error medio lineal de cierre es algo menor que para una poligonal casi rectilínea de igual longitud e igual número de lados que aquéllas. Pero esta disminución del error lineal de cierre, respecto a esta última poligonal, es muy pequeña, aun para formas muy distintas de la rectilínea, por lo cual, para señalar los límites de error tolerables, basta considerar el caso de la poligonal rectilínea de lados iguales.

n	W
3	0,206
5	0,230
7	0,256
9	0,282
11	0,305
13	0,327

(34)

Tomando como límite máximo de error $\Delta_q = 3\,m_q$, y siendo el error medio de la observación angular $m = 20''$, se tiene, según la fórmula (33):

$$\Delta_q = LW. \tag{35}$$

Este valor se diferencia del señalado en la fórmula (10) de la página 470, en el término adicional 0,05 m, dado por la práctica.

§ 118. Compensación exacta de las poligonales

La teoría de errores expuesta en el párrafo anterior (§ 117) corresponde al método simple de compensación empleado en la práctica (§ 108, pág. 463); vamos ahora a estudiar la compensación rigurosa por el método de los mínimos cuadrados, cuya aplicación práctica sólo tiene lugar en muy contados casos.

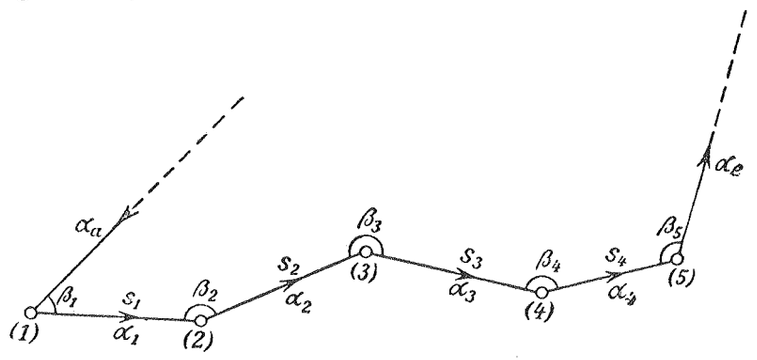


Fig. 521

Para mayor sencillez vamos a considerar una poligonal con sólo cinco lados (fig. 521), aunque las fórmulas que se obtienen al final son aplicables a poligonales con un número cualquiera de lados.

Esta compensación está basada en las tres ecuaciones de condición que resultan del cierre angular y de los dos cierres de coordenadas.

Llamando v a la corrección angular, tenemos en primer lugar la ecuación de condición para los ángulos:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - e_\beta = 0, \tag{1}$$

donde e_β es la diferencia o residuo que se obtiene en la comprobación. Partiendo del acimut α_i, y por medio de los ángulos β observados en la poligonal, se calculan los acimutes de los diferentes lados de aquélla, que en la compensación irán afectados por las correcciones $\Delta\alpha$. Llamando λ a la corrección de los lados, se tienen las dos siguientes ecuaciones de condición para las coordenadas:

$$(s_1+\lambda_1)\operatorname{sen}(\alpha_1+\Delta\alpha_1)+(s_2+\lambda_2)\operatorname{sen}(\alpha_2+\Delta\alpha_2)+(s_3+\lambda_3)\operatorname{sen}(\alpha_3+\Delta\alpha_3)+ \\ +(s_4+\lambda_4)\operatorname{sen}(\alpha_4+\Delta\alpha_4)-(y_5-y_1)=0$$

$$(s_1+\lambda_1)\cos(\alpha_1+\Delta\alpha_1)+(s_2+\lambda_2)\cos(\alpha_2+\Delta\alpha_2)+(s_3+\lambda_3)\cos(\alpha_3+\Delta\alpha_3)+ \\ +(s_4+\lambda_4)\cos(\alpha_4+\Delta\alpha_4)-(x_5-x_1)=0.$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1+\operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2+\operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3+\operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4+ \\ +s_1\cos\alpha_1\Delta\alpha_1+s_2\cos\alpha_2\Delta\alpha_2+s_3\cos\alpha_3\Delta\alpha_3+s_4\cos\alpha_4\Delta\alpha_4+[s\operatorname{sen}\alpha]-(y_5-y_1)=0 \tag{2}$$

$$\cos\alpha_1\lambda_1+\cos\alpha_2\lambda_2+\cos\alpha_3\lambda_3+\cos\alpha_4\lambda_4- \\ -s_1\operatorname{sen}\alpha_1\Delta\alpha_1-s_2\operatorname{sen}\alpha_2\Delta\alpha_2-s_3\operatorname{sen}\alpha_3\Delta\alpha_3-s_4\operatorname{sen}\alpha_4\Delta\alpha_4+[s\cos\alpha]-(x_5-x_1)=0. \tag{3}$$

En esta forma no pueden utilizarse estas ecuaciones, pues en la compensación por el método de los mínimos cuadrados no intervienen los acimutes calculados, sino los ángulos observados en la poligonal. Por consiguiente hay que sustituir las correcciones $\Delta\alpha$ por las v; para ello se parte de estas igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_i+\beta_1\pm 180^\circ\\
\alpha_2 &= \alpha_i+\beta_1+\beta_2\pm 2\times 180^\circ\\
\alpha_3 &= \alpha_i+\beta_1+\beta_2+\beta_3\pm 3\times 180^\circ\\
\alpha_4 &= \alpha_i+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\pm 4\times 180^\circ
\end{aligned}$$

que juntamente con estas otras,

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= v_1\\
\Delta\alpha_2 &= v_1+v_2\\
\Delta\alpha_3 &= v_1+v_2+v_3\\
\Delta\alpha_4 &= v_1+v_2+v_3+v_4,
\end{aligned}$$

se sustituyen en las ecuaciones (2) y (3), que se convierten así en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1+\operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2+\operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3+\operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4+\\
&+(s_1\cos\alpha_1+s_2\cos\alpha_2+s_3\cos\alpha_3+s_4\cos\alpha_4)v_1+\\
&+(s_2\cos\alpha_2+s_3\cos\alpha_3+s_4\cos\alpha_4)v_2+\\
&+(s_3\cos\alpha_3+s_4\cos\alpha_4)v_3+\\
&+s_4\cos\alpha_4\,v_4+\\
&+[s\operatorname{sen}\alpha]-(y_5-y_1)=0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\alpha_1\lambda_1+\cos\alpha_2\lambda_2+\cos\alpha_3\lambda_3+\cos\alpha_4\lambda_4-\\
&-(s_1\operatorname{sen}\alpha_1+s_2\operatorname{sen}\alpha_2+s_3\operatorname{sen}\alpha_3+s_4\operatorname{sen}\alpha_4)v_1-\\
&-(s_2\operatorname{sen}\alpha_2+s_3\operatorname{sen}\alpha_3+s_4\operatorname{sen}\alpha_4)v_2-\\
&-(s_3\operatorname{sen}\alpha_3+s_4\operatorname{sen}\alpha_4)v_3-\\
&-s_4\operatorname{sen}\alpha_4\,v_4+\\
&+[s\cos\alpha]-(x_5-x_1)=0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ahora bien, si designamos las coordenadas de los puntos (2), (3) y (4) con (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4), vemos que el coeficiente de v_1 en las ecuaciones (4) es igual a $x_5 - x_1$, el de v_2 igual a $x_5 - x_2$, etc., y del mismo modo, los coeficientes de las v en las ecuaciones (5) serán las diferencias de ordenadas $y_5 - y_1$, $y_5 - y_2$, etc.

Sustituyendo los valores anteriores en las dos ecuaciones de condición de las coordenadas, se transforman en estas otras:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1+\operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2+\operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3+\operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4+\\
&+(x_5-x_1)v_1+(x_5-x_2)v_2+(x_5-x_3)v_3+(x_5-x_4)v_4+[s\operatorname{sen}\alpha]-(y_5-y_1)=0\\
&\cos\alpha_1\lambda_1+\cos\alpha_2\lambda_2+\cos\alpha_3\lambda_3+\cos\alpha_4\lambda_4-\\
&-(y_5-y_1)v_1-(y_5-y_2)v_2-(y_5-y_3)v_3-(y_5-y_4)v_4+[s\cos\alpha]-(x_5-x_1)=0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Con las fórmulas (1) y (6) tenemos establecidas las tres ecuaciones de condición para la poligonal, de las cuales, tomando los pesos más convenientes para la medición de los ángulos y de los lados, resultan las tres ecuaciones normales. Pero no vamos a hacer esta deducción directamente, sino una compensación por grupos, considerando la ecuación (1) como primer grupo, y las dos ecuaciones (6) como segundo.

La compensación de la ecuación (1) consiste, simplemente, en distribuir el error angular de cierre e_β por partes iguales entre todos los ángulos de la poligonal. Con estos ángulos así corregidos calculamos otra vez los acimutes y las diferencias de coordenadas. Es decir, que se sigue en el cálculo la misma marcha que hemos indicado para el cálculo ordinario de una poligonal, y se deducen del mismo los errores e_y, e_x de cierre de las coordenadas. Las tres ecuaciones de condición se expresan así del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1 + \operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2 + \operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3 + \operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4 + & \\ + (x_5 - x_1)v_1 + (x_5 - x_2)v_2 + (x_5 - x_3)v_3 + (x_5 - x_4)v_4 - e_y &= 0 \\ \cos\alpha_1\lambda_1 + \cos\alpha_2\lambda_2 + \cos\alpha_3\lambda_3 + \cos\alpha_4\lambda_4 - & \\ - (y_5 - y_1)v_1 - (y_5 - y_2)v_2 - (y_5 - y_3)v_3 - (y_5 - y_4)v_4 - e_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Estas v representan aquí la segunda corrección de los ángulos, que juntamente con las anteriores, dan las correcciones definitivas. Pero no tomamos estas ecuaciones (7) como definitivas, sino que vamos a aplicarle el método de compensación por grupos, para lo cual consideraremos la primera de estas ecuaciones como primer grupo y la segunda y tercera como segundo grupo.

Empezaremos, en este supuesto, por calcular los promedios de las coordenadas:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} \qquad x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \quad (8)$$

de modo que x_0, y_0 son también las coordenadas del centro de gravedad del sistema de puntos o vértices de la poligonal. Multiplicando ahora la primera ecuación (7) sucesivamente por $(x_0 - x_5)$ y por $-(y_0 - y_5)$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} + (x_0 - x_5)v_1 + (x_0 - x_5)v_2 + (x_0 - x_5)v_3 + (x_0 - x_5)v_4 + (x_0 - x_5)v_5 &= 0 \\ - (y_0 - y_5)v_1 - (y_0 - y_5)v_2 - (y_0 - y_5)v_3 - (y_0 - y_5)v_4 - (y_0 - y_5)v_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Y sumando estas dos ecuaciones respectivamente con la segunda y tercera de las (7), resulta:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1 + \operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2 + \operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3 + \operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4 + \\ &+ (x_0 - x_1)v_1 + (x_0 - x_2)v_2 + (x_0 - x_3)v_3 + (x_0 - x_4)v_4 + (x_0 - x_5)v_5 - e_y = 0 \\ &\cos\alpha_1\lambda_1 + \cos\alpha_2\lambda_2 + \cos\alpha_3\lambda_3 + \cos\alpha_4\lambda_4 - \\ &- (y_0 - y_1)v_1 - (y_0 - y_2)v_2 - (y_0 - y_3)v_3 - (y_0 - y_4)v_4 - (y_0 - y_5)v_5 - e_x = 0. \end{aligned}$$

Haciendo ahora

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \xi_1 & x_2 - x_0 &= \xi_2 & x_3 - x_0 &= \xi_3 & \cdots \\ y_1 - y_0 &= \eta_1 & y_2 - y_0 &= \eta_2 & y_3 - y_0 &= \eta_3 & \cdots \end{aligned}$$

tenemos que ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, etc., serán las coordenadas de los vértices de la poligonal referidas al centro de gravedad del sistema como origen. Por consiguiente, sustituyendo estos valores en las anteriores ecuaciones, e introduciendo en éstas el valor ρ, tendremos las tres ecuaciones de condición expresadas del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1\lambda_1 + \operatorname{sen}\alpha_2\lambda_2 + \operatorname{sen}\alpha_3\lambda_3 + \operatorname{sen}\alpha_4\lambda_4 - & \\ - \frac{\xi_1}{\rho}v_1 - \frac{\xi_2}{\rho}v_2 - \frac{\xi_3}{\rho}v_3 - \frac{\xi_4}{\rho}v_4 - \frac{\xi_5}{\rho}v_5 - e_y &= 0 \\ \cos\alpha_1\lambda_1 + \cos\alpha_2\lambda_2 + \cos\alpha_3\lambda_3 + \cos\alpha_4\lambda_4 + & \\ + \frac{\eta_1}{\rho}v_1 + \frac{\eta_2}{\rho}v_2 + \frac{\eta_3}{\rho}v_3 + \frac{\eta_4}{\rho}v_4 + \frac{\eta_5}{\rho}v_5 - e_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Supongamos para todos los ángulos el mismo peso; se ve inmediatamente que las tres ecuaciones normales que resultan de las ecuaciones (10), se descomponen en dos grupos entre sí independientes. Si representamos los coeficientes de v en las ecuaciones (10), respectivamente por a, b y c, se tiene que $[ab] = 0$ y $[ac] = 0$, por ser $[\xi] = 0$ y $[\eta] = 0$. Las tres ecuaciones normales serán, por lo tanto:

$$\begin{aligned} [aa]k_1 &= 0 \\ [bb]k_2 + [bc]k_3 - e_y &= 0 \\ [bc]k_2 + [cc]k_3 - e_x &= 0 \end{aligned}$$

Siendo también $k_1 = 0$, se tiene que resolver únicamente el último par de ecuaciones normales.

Ahora pasemos a ocuparnos de los pesos en la medición de los ángulos y de la longitud de los lados. Para los ángulos podemos siempre admitir la igualdad de precisión y puede representarse por $\pm m$ el error medio de un ángulo de la poligonal. Para los lados de ésta, pongamos el error medio en la forma $\pm c\sqrt{s}$, y puesto que estos lados no pasan nunca de 400 m, eligiendo convenientemente la constante c, el error medio puede quedar representado por la anterior expresión con bastante exactitud. Llamemos respectivamente p y γ a los pesos de los ángulos y de las longitudes de los lados; las inversas de estos pesos serán:

$$\frac{1}{p} = m^2 \qquad \frac{1}{\gamma} = c^2 s$$

o también:

$$\frac{1}{p} = \frac{m^2}{c^2} \qquad \frac{1}{\gamma} = s. \quad (11)$$

En las ecuaciones segunda y tercera (10) podemos sacar el factor común $\frac{1}{\rho}$ y unirlo a la inversa $\frac{1}{p}$ del peso p. Para establecer las ecuaciones normales, debemos emplear, por consiguiente, $\frac{1}{p}\frac{1}{\rho_2}$, en vez de $\frac{1}{p}$, y si hacemos

$$\frac{m^2}{c^2}\frac{1}{\rho} = q \quad (12)$$

tendremos:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\rho^2} = q\frac{1}{\rho}.$$

Esto supuesto, y poniendo, para simplificar,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\Delta y}{s} \qquad \cos\alpha = \frac{\Delta x}{s}$$

tendremos las dos ecuaciones normales siguientes, deducidas de las dos últimas ecuaciones de (10), a saber:

$$\left.\begin{aligned} \left(\left[\frac{\Delta y^2}{s}\right] + \left[\xi^2\right]\frac{q}{\rho}\right)k_1 + \left(\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right] - \left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho}\right)k_2 - e_y &= 0 \\ \left(\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right] - \left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho}\right)k_1 + \left(\left[\frac{\Delta x^2}{s}\right] + \left[\eta^2\right]\frac{q}{\rho}\right)k_2 - e_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

El que sólo haya dos ecuaciones normales tiene la ventaja de poderse hallar fácilmente los parámetros k por determinantes. Como determinante para el denominador, se tiene:

$$D=\left(\left[\frac{\Delta y^2}{s}\right]+\left[\xi^2\right]\frac{q}{\rho}\right)\left(\left[\frac{\Delta x^2}{s}\right]+\left[\eta^2\right]\frac{q}{\rho}\right)-\left(\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right]-\left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho}\right)^2 \tag{14}$$

y por consiguiente:

$$\left.\begin{aligned} k_1&=\frac{1}{D}\left[+\left(\left[\frac{\Delta x^2}{s}\right]+\left[\eta^2\right]\frac{q}{\rho}\right)e_y-\left(\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right]-\left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho}\right)e_x\right]\\ k_2&=\frac{1}{D}\left[+\left(\left[\frac{\Delta y^2}{s}\right]+\left[\xi^2\right]\frac{q}{\rho}\right)e_x-\left(\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right]-\left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho}\right)e_y\right]\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

De aquí se deducen, pues, los valores de las correcciones λ de los lados y las v de los ángulos, a saber:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=s_1\,(k_1\operatorname{sen}\alpha_1+k_2\cos\alpha_1)\\ \lambda_2&=s_2\,(k_1\operatorname{sen}\alpha_2+k_2\cos\alpha_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1&=(-\xi_1 k_1+\eta_1 k_2)\,q\\ v_2&=(-\xi_2 k_1+\eta_2 k_2)\,q\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Con esto queda terminado el problema de la compensación, y con las longitudes y ángulos ya corregidos se pueden calcular las coordenadas definitivas.

Sin embargo, vamos a insistir sobre las ecuaciones (16) y (17), para ver que tienen una sencilla interpretación geométrica. En efecto, hagamos

$$k_1=r\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{y} \qquad k_2=r\cos\varphi. \tag{18}$$

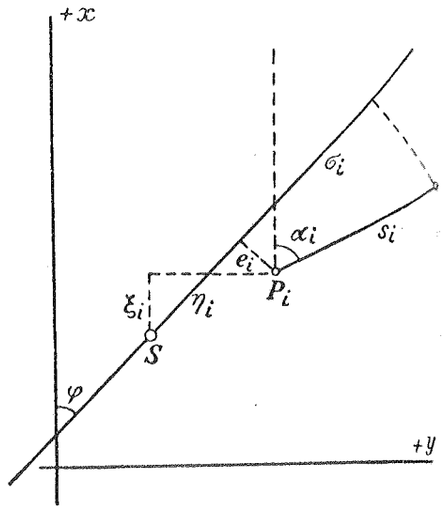


Fig. 522

El valor de las dos variables auxiliares introducidas r y φ será:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1}{k_2} \qquad r=\frac{k_1}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{k_2}{\cos\varphi}. \tag{19}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (16) y (17) k_1 y k_2 por sus expresiones (18), tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=r\,s_1\cos(\alpha_1-\varphi) & v_1&=r\,(\eta_1\cos\varphi-\xi_1\operatorname{sen}\varphi)\,q\\ \lambda_2&=r\,s_2\cos(\alpha_2-\varphi) & v_2&=r\,(\eta_2\cos\varphi-\xi_2\operatorname{sen}\varphi)\,q\\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Supongamos ahora que S (fig. 522) es el centro de gravedad del sistema de vértices de la poligonal; por este punto S se traza una recta con el acimut φ; sea σ_i la proyección sobre esta recta de un lado cualquiera s_i de la poligonal; el valor de dicha proyección será:

$$\sigma_i=s_i\cos(\alpha_i-\varphi)$$

y la corrección longitudinal es:

$$\lambda_i=r\,\sigma_i. \tag{21}$$

Llamemos ahora e_i a la distancia entre un vértice cualquiera P_i de la poligonal y la recta que pasa por S; de la figura 522 se deduce:

$$e_i=\eta_i\cos\varphi-\xi_i\operatorname{sen}\varphi.$$

Y la corrección angular será:

$$v_i=r\,q\,e_i. \tag{22}$$

Es decir que, mediante esta recta de compensación, se obtienen para las correcciones de lados y de ángulos las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=r\,\sigma_1 & v_1&=r\,q\,e_1\\ \lambda_2&=r\,\sigma_2 & v_2&=r\,q\,e_2\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

donde los valores σ y e pueden tomarse directamente, y con suficiente precisión, de una figura bien hecha.

Resumen de fórmulas. Para la aplicación práctica del método de compensación que hemos expuesto, vamos a resumir la marcha del cálculo.

1. Después de la primera corrección de los ángulos β de la poligonal, se hallan del modo ordinario los acimutes α y los valores provisionales de las diferencias de coordenadas, $\Delta y=s\operatorname{sen}\alpha$ y $\Delta x=s\cos\alpha$, así como los errores de cierre:

$$\left.\begin{aligned} e_y&=(y_f-y_i)-[s\operatorname{sen}\alpha]\\ e_x&=(x_f-x_i)-[s\operatorname{sen}\alpha]\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Al mismo tiempo pueden calcularse los valores provisionales de las coordenadas x, y.

2. Cálculo de las coordenadas del centro de gravedad

$$y_0=\frac{[y]}{n} \qquad x_0=\frac{[x]}{n} \tag{25}$$

y de las nuevas coordenadas

$$\eta=y-y_0 \qquad \xi=x-x_0, \tag{26}$$

las cuales pueden también tomarse directamente de la figura, después de fijar en ésta el centro de gravedad.

3. Determinación de la variable auxiliar q.

Error medio angular de observación $=\pm m$, en minutos
» » lineal » » $=\pm c\sqrt{s}$

$$q=\frac{m^2}{c^2}\frac{1}{\rho'}. \tag{27}$$

En esta expresión siempre es posible, tomando para c un valor conveniente, obtener para valor de q un número redondo, por ejemplo $q=\frac{1}{2}$, o $q=1$, $q=2$, etc.

4. Cálculo de los coeficientes de las ecuaciones normales:

$$\left.\begin{aligned} a&=\left[\frac{\Delta y^2}{s}\right]+\left[\xi^2\right]\frac{q}{\rho'} & D&=a\,b-c^2\\ b&=\left[\frac{\Delta x^2}{s}\right]+\left[\eta^2\right]\frac{q}{\rho'} & k_1&=\frac{1}{D}\,(b\,e_y-c\,e_x)\\ c&=\left[\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}\right]-\left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho'} & k_2&=\frac{1}{D}\,(a\,e_x-c\,e_y)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1}{k_2} \qquad r=\frac{k_1}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{k_2}{\cos\varphi}. \tag{29}$$

5. Determinación de las correcciones λ y v.

Después de trazada la recta de compensación en la figura o desarrollo de la poli-

gonal, se pueden hallar los valores de σ y e con un compás y una regla, teniéndose

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = r\,\sigma_1 & v_1 = r\,q\,e_1 \\ \lambda_2 = r\,\sigma_2 & v_2 = r\,q\,e_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (30)$$

donde v se expresa en minutos.

6. Cálculo definitivo de las coordenadas.

Después de corregidos los lados y los ángulos, al agregar v a los ángulos primeramente compensados, se calculan los acimutes definitivos y las diferencias de coordenadas, con lo cual se tienen ya las coordenadas definitivas.

§ 119. Ejemplo de una compensación de poligonal

Como aplicación de cuanto antecede, tenemos el ejemplo de poligonal representado en la figura 523; esta poligonal tiene dos cierres acimutales en los puntos (1) y (9), refe-

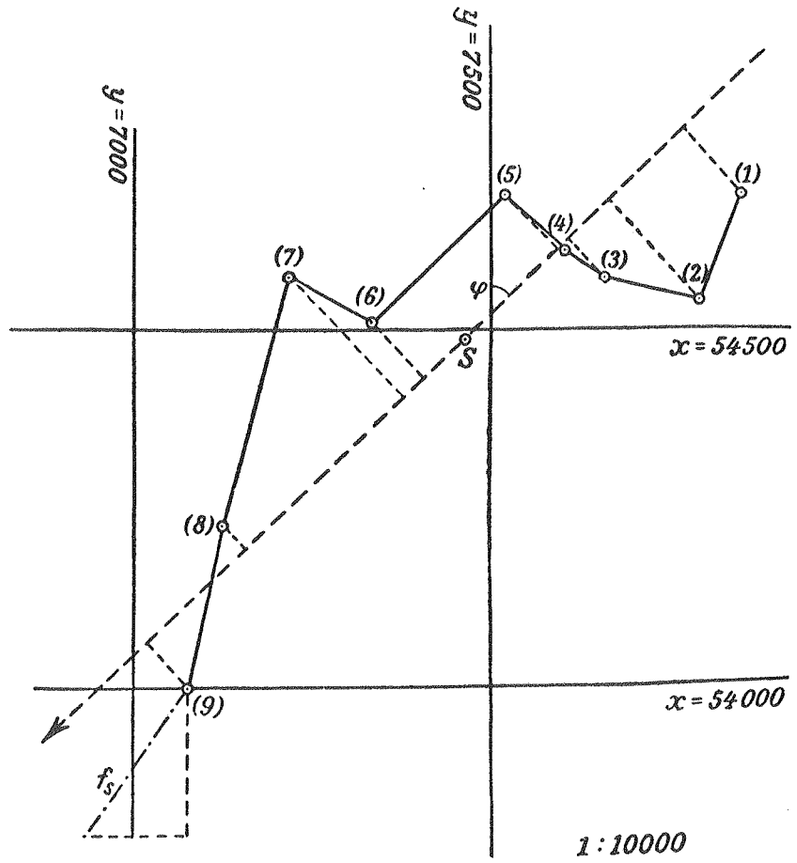


Fig. 523

ridos a dos puntos fijos C y B no representados en la figura. El primer cálculo, hecho con logaritmos o con máquina de calcular, da los resultados consignados en la tabla siguiente

Punto	Ángulos β		Acimutes α		Lados s	$s \operatorname{sen} \alpha = \Delta y$		$s \cos \alpha = \Delta x$		y		x		η_1		ξ	
	°	′ ″	°	′ ″	m	m		m		m		m		m		m	
C										+ 7853,19		+ 54686,79		+ 390		+ 200	
				5 44 39													
		+17															
(1)	16	08 14	201	53 10	159,60	− 59,49		− 148,09									
		+17								+ 7794		+ 54539		+ 331		+ 52	
(2)	261	52 20	283	45 47	135,72	− 131,82		+ 32,29									
		+17								+ 7662		+ 54571		+ 199		+ 84	
(3)	196	47 10	300	33 14	66,45	− 57,22		+ 33,78									
		+17								+ 7605		+ 54605		+ 142		+ 118	
(4)	189	14 00	309	47 31	117,33	− 90,15		+ 75,09									
		+17								+ 7514		+ 54680		+ 51		+ 193	
(5)	98	05 00	227	52 48	233,83	− 188,27		− 170,24									
		+17								+ 7326		+ 54510		− 137		+ 23	
(6)	251	01 40	298	54 45	131,13	− 114,79		+ 63,40									
		+17								+ 7211		+ 54573		− 252		+ 86	
(7)	74	36 35	193	31 37	365,22	− 85,43		− 355,08									
		+17								+ 7126		+ 54218		− 337		− 269	
(8)	178	50 55	192	22 49	224,85	− 48,21		− 219,62									
		+18								+ 7077,54		+ 53997,90		− 385		− 489	
(9)	86	32 40	98	55 47													
B	1353	08 34	93	11 06		− 775,38		− 688,47		− 775,65		− 688,89		+ 1113		+ 756	
	− 1260																
	93	08 34															
	+ 2	34															
						$e_y = -0,27$		$e_x = -0,42$		$[y] = 67169$		$[x] = 49381$		− 1111		− 758	
										$y_0 = +7463$		$x_0 = +54487$					

Para el cálculo de las variables auxiliares tomemos:

$$m = \pm 0{,}5'$$
$$m_s = \pm 0{,}015\sqrt{s} \quad \text{o sea} \quad c = 0{,}0\,5$$

y tendremos:

$$q = \frac{m^2}{c^2}\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{3{,}095}$$

o bien, en números redondos:

$$q = \frac{1}{3}.$$

En el cuadro siguiente están calculados los valores de $\frac{\Delta y^2}{s}$, $\frac{\Delta x^2}{s}$, $\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}$ y también los de η^2, ξ^2 y $\eta\xi$, habiéndose empleado para ello una regla de cálculo de 50 cm de longitud.

$\frac{\Delta y^2}{s}$	$\frac{\Delta x^2}{s}$	$\frac{\Delta y\,\Delta x}{s}$		$\eta^2:1000$	$\xi^2:1000$	$\eta\xi:1000$	
22,2	137,4	+ 55,3		152,1	40,0	+ 78,0	
127,9	7,7		− 31,4	109,6	2,7	+ 17,0	
49,3	17,2		− 28,1	39,6	7,1	+ 16,7	
69,4	48,0		− 57,7	20,2	13,9	+ 16,8	
139,8	114,3	+ 126,5		2,6	37,2	+ 9,8	
100,5	30,7		− 55,5	18,8	0,5		− 3,0
20,0	345,5	+ 83,1		63,5	7,4		− 21,7
10,3	214,2	+ 47,0		113,6	72,4	+ 90,7	
				148,2	239,1	+ 188,3	
539,4	915,0	+ 311,9	− 172,7	668,2	420,3	+ 417,3	− 24,7
		+ 139,2				+ 392,6	

Y de aquí se obtiene:

$$+\left[\frac{\Delta y^2}{s}\right] = +539{,}4 \qquad +\left[\frac{\Delta x^2}{s}\right] = +915{,}0 \qquad +\frac{\Delta y\,\Delta x}{s} = +139{,}2$$
$$+\left[\xi^2\right]\frac{q}{\rho'} = +40{,}8 \qquad +\left[\eta^2\right]\frac{q}{\rho'} = +64{,}8 \qquad -\left[\eta\xi\right]\frac{q}{\rho'} = -38{,}1$$
$$a = +580{,}2 \qquad b = +979{,}8 \qquad c = +101{,}1$$

$$ab = +568480$$
$$c_2 = \quad 10220$$
$$D = +558260$$

$$k_1 = \frac{1}{D}(-979{,}8 \times 0{,}27 + 101{,}1 \times 0{,}42) = \frac{1}{D}(-264{,}5 + 42{,}5)$$

$$k_2 = \frac{1}{D}(-580{,}2 \times 0{,}42 + 101{,}1 \times 0{,}27) = \frac{1}{D}(-243{,}8 + 27{,}3)$$

$$k_1 = -\frac{222{,}0}{D} \qquad k_2 = -\frac{216{,}5}{D}$$

− 222,0	2.34635 n
D	5.74684
k_1	6.59951 n
sen φ	9.85485 n
r	6.74466

− 216,5	2.33546 n
D	5 74684
k_2	6.58862 n
cos φ	9.84398 n
r	6.74464

k_1	6.59951 n
k_2	6.58862 n
tg φ	0.01089

$\varphi = 225° 43'$
$r = 0{,}0005555$

Con el acimut φ puede trazarse la recta de compensación en la figura 523, y de ésta se deducen ya los valores de σ y e.

σ	λ	e	v
+ 142 m	+ 0,08 m	− 123 m	− 1″
+ 77	+ 0,04	− 189	− 2
+ 11	+ 0,01	− 75	− 1
+ 8	0,00	− 9	0
+ 257	+ 0,14	+ 105	+ 1
+ 37	+ 0,02	+ 107	+ 1
+ 305	+ 0,17	+ 231	+ 3
+ 190	+ 0,11	+ 44	0
		− 89	− 1

Por último, en la tabla siguiente tenemos el segundo cálculo de la poligonal, con los lados y ángulos corregidos:

Punto	Ángulos β	Acimutes α	Lados s	s sen α $= \Delta y$	s cos α $= \Delta x$	y	x
	° ′ ″	° ′ ″	m	m	m	m	m
C							
		5 44 39					
(1)	16 08 30					+ 7853,19	+ 54686,79
		201 53 09	159,68	− 59,52	− 148,17		
(2)	261 52 35					+ 7793,67	+ 54538,62
		283 45 44	135,76	− 131,86	+ 32,30		
(3)	196 47 26					+ 7661,81	+ 54570,92
		300 33 10	66,46	− 57,23	+ 33,78		
(4)	189 14 17					+ 7604,58	+ 54604,70
		309 47 27	117,33	− 90,16	+ 75,09		
(5)	98 05 18					+ 7514,42	+ 54679,79
		227 52 45	253,97	− 188,38	− 170,34		
(6)	251 01 58					+ 7326,04	+ 54509,45
		298 54 43	131,15	− 114,80	+ 63,40		
(7)	74 36 55					+ 7211,24	+ 54572,85
		193 31 38	365,39	− 88,47	− 355,22		
(8)	178 51 12					+ 7125,77	+ 54217,63
		192 22 50	224,96	− 48,23	− 219,73		
(9)	86 32 57					+ 7077,54	+ 53997,90
		98 55 47					
B							

Para comparar con estos resultados la compensación rigurosa, damos en el cuadro siguiente las coordenadas de los puntos de la poligonal, con el error final repartido del modo ordinario:

Puntos	y	Diferencias	x	Diferencias
	m	m	m	m
(1)	+ 7853,19	0	+ 54686,79	0
(2)	+ 7793,67	0	+ 54538,65	− 3
(3)	+ 7661,82	− 1	+ 54570,90	+ 2
(4)	+ 7604,59	− 1	+ 54604,66	+ 4
(5)	+ 7514,42	0	+ 54679,72	+ 7
(6)	+ 7326,10	− 6	+ 54509,41	+ 4
(7)	+ 7211,29	− 5	+ 54572,77	+ 8
(8)	+ 7125,79	− 2	+ 54217,58	+ 5
(9)	+ 7077,54	0	+ 53997,90	0

La diferencia entre las dos compensaciones confirman cuanto dijimos anteriormente sobre el valor de los métodos aproximados (pág. 473), y por lo tanto podemos rehusar todos los sistemas o métodos de compensación perfeccionados que han aparecido en este último decenio, y que en realidad sólo son alteraciones, por no decir deterioraciones, del sencillo método del reparto proporcional. En caso de necesitarse una compensación mucho más rigurosa, se sigue el método expuesto en el párrafo 118, cuya aplicación se facilita considerablemente con el trazado de la recta de compensación.

Acerca de este último procedimiento podemos aún decir que la dirección de la recta de compensación es siempre aproximadamente la misma que la del error lineal de cierre. Además, el factor r es, con mucha aproximación, igual a $\frac{e_s}{[s]}$. Por último, si q se halla del modo ordinario, las correcciones λ y v pueden deducirse de la fórmula (30) de la página 506. A causa de la inseguridad que hay en la adopción de v y φ no resulta definitivo el último cálculo de la diferencia de coordenadas. Si se atribuye el error subsistente de cierre de coordenadas al valor inexacto de r, lo único que puede hacerse es tomar variaciones proporcionales de Δy y Δx para eliminar el error.

BIBLIOGRAFÍA:

JORDAN, Zur Theorie der Polygonzüge (Zeitschr. f. Verm., 1884, págs. 197-203).

FENNER, Zur Ausgleichung nicht gerader Züge (Zeitschr. f. Verm., 1887, págs. 249-271, 287-297).

JORDAN, Die Ausgleichung gerader ungleichseitiger Züge (Zeitschr. f. Verm., 1889, páginas 46-52).

KLINGATSCH, Zur graphischen Ausgleichung von Polygonzügen (Zeitschr. f. Verm., 1900, páginas 540-548)

EGGERT, Die Fehlerfortpflanzung in Polygonzügen (Zeitschr. f. Verm., 1907, págs. 4-19).

FERBER, Polygonzugsausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit im voraus angenommenen mittleren Fehlern (Zeitschr. f. Verm., 1907, págs. 618-635, 649-662).

DEUBEL, Die Ausgleichung bei Polygonzügen nach dem graphischen Verfahren von Eitzenberger (Zeitschr. f. Verm., 1912, págs. 528-535).

HAPANOWICZ, Eine Studie über Ausgleichung von Polygonzügen (Österr. Zeitschr. f. Verm., 1912, págs. 38-46).

EGGERT, Die zulässigen Abschlussfehler der Polygonzüge (Zeitschr. f. Verm., 1912, páginas 495-508).

EGGERT, Zur Ausgleichung von Polygonzügen (Zeitschr. f. Verm., 1912, págs. 547-554).

CANDIDO, Strenge Ausgleichung eines Polygonzuges (Österr. Zeitschr. f. Verm., 1925, páginas 97-105).

HELLEBRAND, Zur strengen Ausgleichung von Theodolitzügen (Österr. Zeitschr. f. Verm., 1926, págs. 42-49, 53-62, 75-79).

EGGERT, Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der kleinsten Quadrate (Zeitschr. f. Verm., 1928, págs. 657-675).

HERRMANN, Zur Fehlertheorie des zwischenorientierten Polygonzuges (Allg. Verm. Nachr., 1929).

Apéndice

Tablas

		Págs.
I.	Reduccción para la dilatación térmica o para pequeños errores de división	513
II.	Reducción al horizonte de longitudes inclinadas, $L - L\cos\alpha$.	514
III.	Conversión de divisiones sexagesimales en centesimales	515
IV.	Conversión de divisiones centesimales en sexagesimales	516
V.	Promedio de cuatro valores angulares	517 y 518
VI.	El número ρ y valor aproximado para $\frac{r\alpha}{\rho}$	519
VII.	Millas y su equivalencia.	520
VIII.	Medidas antiguas de España y América	520 a 522

Instrucciones

Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral de España para los levantamientos topográficos y catastrales . . . . . 523 a 529

I: Reducción para la dilatación térmica o para pequeños errores de división

Dilatación, por el calor, de una regla de 1 metro de longitud

Latón				Hierro				Abeto			
°C	mm	°C	mm	°C	mm	°C	mm	°C	mm	°C	mm
1°	0,02	16°	0,30	1°	0,01	16°	0,18	1°	0,00	16°	0,06
2	0,04	17	0,32	2	0,02	17	0,19	2	0,01	17	0,07
3	0,06	18	0,34	3	0,03	18	0,20	3	0,01	18	0,07
4	0,08	19	0,36	4	0,05	19	0,21	4	0,02	19	0,08
5	0,09	20	0,38	5	0,06	20	0,23	5	0,02	20	0,08
6°	0,11	21°	0,40	6°	0,07	21°	0,24	6°	0,02	21°	0,08
7	0,13	22	0,41	7	0,08	22	0,25	7	0,03	22	0,09
8	0,15	23	0,43	8	0,09	23	0,26	8	0,03	23	0,09
9	0,17	24	0,45	9	0,10	24	0,27	9	0,04	24	0,10
10	0,19	25	0,47	10	0,11	25	0,28	10	0,04	25	0,10
11°	0,21	26°	0,49	11°	0,12	26°	0,29	11°	0,04	26°	0,10
12	0,23	27	0,51	12	0,14	27	0,30	12	0,05	27	0,11
13	0,25	28	0,53	13	0,15	28	0,32	13	0,05	28	0,11
14	0,26	29	0,55	14	0,16	29	0,33	14	0,06	29	0,12
15	0,28	30	0,56	15	0,17	30	0,34	15	0,06	30	0,12

Reducción para un error n

Regla de 1 metro $= 1^m + n$	2m	4m	5m	6m	8m	10m	20m	30m	40m	50m	100m
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$n = 0{,}01$	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0
0,02	0,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
0,03	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	3,0
0,04	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	4,0
0,05	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0
0,06	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	6,0
0,07	0,1	0,3	0,4	0,4	0,6	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	7,0
0,08	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	8,0
0,09	0,2	0,4	0,5	0,5	0,7	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	9,0
0,10	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	10,0
0,11	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	11,0
0,12	0,2	0,5	0,6	0,7	1,0	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	12,0
0,13	0,3	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	13,0
0,14	0,3	0,6	0,7	0,8	1,1	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0	14,0
0,15	0,3	0,6	0,8	0,9	1,2	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	15,0
0,16	0 3	0,6	0,8	1,0	1,3	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	16,0
0,17	0,3	0,7	0,9	1,0	1,4	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	17,0
0,18	0,4	0,7	0,9	1,1	1,4	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	18,0
0,19	0,4	0,8	1,0	1,1	1,5	1,9	3,8	5,7	7,6	9,5	19,0
0,20	0,4	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	20,0

(Véase § 20)

II. Reducción al horizonte de longitudes inclinadas, $L - L \cos \alpha$

α	Longitud inclinada L											α
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	
1°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1°
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	2
3	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,03	3
4	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,05	4
5	0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,08	5
6	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	0,11	6
7	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,15	7
8	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,19	8
9	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,11	0,12	0,25	9
10	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09	0,11	0,12	0,14	0,15	0,30	10
11	0,02	0,04	0,06	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,18	0,37	11
12	0,02	0,04	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,20	0,22	0,44	12
13	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,21	0,23	0,26	0,51	13
14	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,30	0,59	14
15	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	0,24	0,27	0,31	0,34	0,68	15
16	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,39	0,77	16
17	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,31	0,35	0,39	0,44	0,87	17
18	9,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49	0,98	18
19	0,05	0,11	0,16	0,22	0,27	0,33	0,38	0,44	0,49	0,54	1,09	19
20	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,60	1,21	20
21	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,46	0,53	0,60	0,66	1,33	21
22	0,07	0,15	0,22	0,29	0,36	0,44	0,51	0,58	0,66	0,73	1,46	22
23	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,79	1,59	23
24	0,09	0,17	0,26	0,35	0,43	0,52	0,61	0,69	0,78	0,86	1,73	24
25	0,09	0,19	0,28	0,37	0,47	0,56	0,66	0,75	0,84	0,94	1,87	25
26	0,10	0,20	0,30	0,40	0,51	0,61	0,71	0,81	0,91	1,01	2,02	26
27	0,11	0,22	0,33	0,44	0,54	0,65	0,76	0,87	0,98	1,09	2,18	27
28	0,12	0,23	0,35	0,47	0,59	0,70	0,82	0,94	1,05	1,17	2,34	28
29	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	2,51	29
30	0,13	0,27	0,40	0,54	0,67	0,80	0,94	1,07	1,21	1,34	2,68	30
0,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,5
1,0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,003	1,0
1,5	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,007	1,5
2,0	0,001	0,001	0,002	0,002	0,003	0,004	0,004	0,005	0,006	0,006	0,012	2,0
2,5	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,019	2,5
3,0	0,001	0,003	0,004	0,005	0,007	0,008	0,010	0,011	0,012	0,014	0,027	3,0
3,5	0,002	0,004	0,006	0,007	0,009	0,011	0,013	0,015	0,017	0,019	0,037	3,5
4,0	0,002	0,005	0,007	0,010	0,012	0,015	0,017	0,019	0,022	0,024	0,049	4,0
4,5	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	0,018	0,022	0,025	0,028	0,031	0,062	4,5
5,0	0,004	0,008	0,011	0,015	0,019	0,023	0,027	0,030	0,034	0,038	0,076	5,0
5,5	0,005	0,009	0,014	0,018	0,023	0,028	0,032	0,037	0,041	0,046	0,092	5,5
6,0	0,005	0,011	0,016	0,022	0,027	0,033	0,038	0,044	0,049	0,055	0,110	6,0
6,5	0,006	0,013	0,019	0,026	0,032	0,039	0,045	0,051	0,058	0,064	0,129	6,5
7,0	0,007	0,015	0,022	0,030	0,037	0,045	0,052	0,060	0,067	0,075	0,149	7,0
7,5	0,009	0,017	0,026	0,034	0,043	0,051	0,060	0,068	0,077	0,086	0,171	7,5

(Véanse §§ 18 y 19, págs. 50 y 56)

III. Conversión de divisiones sexagesimales en centesimales

Grados (°)

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g
0,0°	0,0..	1,1..	2,2..	3,3..	4,4..	5,5 .	6,6..	7,7..	8,8..	10,0..
10	11,1..	12,2..	13,3..	14.4..	15,5..	16,6 .	17,7..	18,8..	20,0..	21,1.
20	22.2..	23,3..	24,4..	25,5..	26,6..	27,7..	28,8..	30,0..	31,1..	32,2..
30	33,3..	34,4..	35,5..	36,6..	37,7..	38,8 .	40.0..	41,1..	42,2..	43,3..
40	44,4..	45,5..	46,6..	47,7 .	48,8..	50,0..	51,1..	52,2..	53,3..	54,4..
50°	55,5..	56,6..	57,7..	58,8..	60,0..	61,1..	62,2..	63,3..	61,4..	65,5..
60	66,6..	67,7 .	68,8..	70,0..	71,1..	72,2..	73,3..	74,4..	75,5..	76,6..
70	77,7..	78,8..	80,0..	81,1..	82,2..	83,3..	84,4..	85,5..	86,6..	87,7..
80	88,8..	90,0..	91,1..	92,2..	93,3..	91,4..	95,5..	96,6..	97,7..	98,8..
90	100,0..	101,1..	102,2..	103,3..	104,4..	105,5..	106,6..	107,7..	108,8..	110,0..
100°	111,1..	112,2..	113,3..	114,4..	115.5..	116,6..	117,7..	118,8..	120,0..	121,1..
110	122.2..	123,3..	124,4..	125,5..	126,6..	127,7..	128,8..	130,0..	131,1..	132,2..
120	133,3..	134,4..	135,5..	136,6..	137,7..	138.8..	140,0..	141,1 .	142,2..	143,3..
130	144,4..	145,5..	146,6..	147,7..	148,8..	150,0..	151,1..	152,2..	153,3 .	154,4..
140	155,5..	156,6..	157,7..	158,8..	160,0..	161,1..	162,2..	168,3..	164,4..	165,5 .
150°	166,6 .	167,7..	168,8..	170,0..	171,1..	172,2..	173,3..	174,4..	175,5..	176,6..
160	177,7..	178,8..	180,0..	181,1..	182,2..	183,3..	184,4..	185,5..	186,6..	187,7..
170	188.8..	190,0..	191,1..	192,2..	193,3..	194,4..	195,5..	196,6..	197,7..	198,8..
180	200,0..									

Minutos (′)

	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc
00′	0,00 00 00	0,01 85 19	0,03 70 37	0,05 55 56	0,07 40 74	0,09 25 93	0.11 11 11	0,12 96 30	0,14 81 48	0,16 66 67
10	0.18 51 85	0,20 37 04	0,22 22 22	0,24 07 41	0,25 92 59	0,27 77 78	0,29 62 96	0,31 48 15	0,33 33 33	0,53 18 52
20	0,37 03 70	0,38 88 89	0,40 74 07	0,42 59 26	0,44 44 44	0,46 29 63	0,48 14 81	0,50 00 00	0,51 85 19	0,53 70 37
30	0,55 55 56	0,57 40 74	0,59 25 93	0,61 11 11	0,62 96 30	0,64 81 48	0,66 66 67	0,68 51 85	0,70 37 04	0,72 22 22
40	0,74 07 41	0,75 92 59	0,77 77 78	0,79 62 96	0,81 48 15	0,83 33 33	0.85 18 52	0,87 03 70	0,88 88 89	0,90 74 07
50	0,92 59 26	0,94 44 44	0,96 29 63	0,98 14 81	1,00 00 00	1,01 85 19	1,03 70 37	1,05 55 56	1,07 40 74	1,09 25 93

Segundos (″)

	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″
	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc
00″	0,00 00 00	0,00 03 09	0,00 06 17	0,00 09 26	0,00 12 35	0,00 15 43	0,00 18 52	0,00 21 66	0,00 24 69	0,00 27 78
10	0,00 30 86	0,00 33 96	0,00 37 04	0,00 40 12	0,00 43 21	0,00 46 30	0,00 49 38	0,00 52 47	0,00 55 56	0,00 58 64
20	0,00 61 73	0,00 64 81	0,00 67 90	0,00 70 99	0,00 74 07	0,00 77 16	0,00 80 25	0,00 83 33	0,00 86 42	0,00 89 51
30	0,00 92 59	0,00 95 68	0,00 98 77	0,01 01 85	0,01 04 94	0,01 08 03	0,01 11 11	0,01 14 20	0,01 17 28	0,01 20 37
40	0,01 23 46	0,01 26 54	0,01 29 63	0,01 32 72	0,01 35 80	0,01 38 89	0,01 41 98	0,01 45 06	0,01 48 15	0,01 51 23
50	0,01 54 32	0,01 57 41	0,01 60 49	0,01 63 58	0,01 66 67	0,01 69 75	0,01 72 84	0,01 75 93	0,01 79 01	0,01 82 10

	,00″	,01″	,02″	,03″	,04″	,05″	,06″	,07″	,08″	,09″
	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc	g c cc
0,0″	0,00 00 00	0,00 00 03	0,00 00 06	0,00 00 09	0,00 00 12	0,00 00 15	0,00 00 19	0,00 00 22	0,00 00 25	0,00 00 28
0,1	31	34	37	40	43	46	49	52	56	59
0,2	62	65	68	71	74	77	80	83	86	90
0,3	93	96	99	1 02	1 05	1 08	1 11	1 14	1 17	1 20
0,4	1 23	1 27	1 30	1 33	1 36	1 39	1 42	1 45	1 48	1 51
0,5″	0,00 01 54	0,00 01 57	0,00 01 60	0,00 01 64	0,00 01 67	0,00 01 70	0,00 01 73	0,00 01 76	0,00 01 79	0,00 01 82
0,6	1 85	1 88	1 91	1 94	1 98	2 01	2 04	2 07	2 10	2 13
0,7	2 16	2 19	2 22	2 25	2 28	2 31	2 35	2 38	2 41	2 44
0,8	2 47	2 50	2 53	2 56	2 59	2 62	2 65	2 69	2 72	2 75
0,9	2 78	2 81	2 84	2 87	2 90	2 93	2 96	2 99	3 02	3 06

$1° = 1{,}111...^{g}$ $\quad 1' = 1{,}85\,185\,185...^{c}$ $\quad 1'' = 3{,}086\,41975\,3086..^{cc}$

(Véase § 36, pág. 139)

IV. Conversión de divisiones centesimales en sexagesimales

Grados (g)

	0g	1g	2g	3g	4g	5g	6g	7g	8g	9g
00g	0° 0′	0° 54′	1° 48′	2° 42′	3° 36′	4° 30′	5° 24′	6° 18′	7° 12′	8° 6′
10	9 0	9 54	10 48	11 42	12 36	13 30	14 24	15 18	16 12	17 6
20	18 0	18 54	19 48	20 42	21 36	22 30	23 24	24 18	25 12	26 6
30	27 0	27 54	28 48	29 42	30 36	31 30	32 24	33 18	34 12	35 6
40	36 0	36 54	37 48	38 42	39 26	40 30	41 24	42 18	43 12	44 6
50g	45° 0′	45° 54′	46° 48′	47° 42′	48° 36′	49° 30′	50° 24′	51° 18′	52° 12′	53° 6′
60	54 0	54 54	55 48	56 42	57 36	58 30	59 24	60 18	61 12	62 6
70	63 0	63 54	64 48	65 42	66 36	67 30	68 24	69 18	70 12	71 6
80	72 0	72 54	73 48	74 42	75 36	76 30	77 24	78 18	79 12	80 6
90	81 0	81 54	82 48	83 42	84 36	85 30	86 24	87 18	88 12	89 6
100g	90° 0′	90° 54′	91° 48′	92° 42′	93° 36′	94° 30′	95° 24′	96° 18′	97° 12′	98° 6′
110	99 0	99 54	100 48	101 42	102 36	103 30	104 24	105 18	106 12	107 6
120	108 0	108 54	109 48	110 42	111 36	112 30	113 24	114 18	115 12	116 6
130	117 0	117 54	118 48	119 42	120 36	121 30	122 24	123 18	124 12	125 6
140	126 0	126 54	127 48	128 42	129 36	130 30	131 24	132 18	133 12	134 6
150g	135° 0′	135° 54′	136° 48′	137° 42′	138° 36′	139° 30′	140° 24′	141° 18′	142° 12′	143° 6′
160	144 0	144 54	145 48	146 42	147 36	148 30	149 24	150 18	151 12	152 6
170	153 0	153 54	154 48	155 42	156 36	157 30	158 24	159 18	160 12	161 6
180	162 0	162 54	163 48	164 42	165 36	166 30	167 24	168 18	169 12	170 6
190	171 0	171 54	172 48	173 42	174 36	175 30	176 24	177 18	178 12	179 6
200g	180° 0′									

Minutos (c)

	0c	1c	2c	3c	4c	5c	6c	7c	8c	9c
00c	0′ 0,0″	0′ 32,4″	1′ 4,8″	1′ 37,2″	2′ 9,6″	2′ 42,0″	3′ 14,4″	3′ 46,8″	4′ 19,2″	4′ 51,6″
10	5 24,0	5 56,4	6 28,8	7 1,2	7 33,6	8 6,0	8 38,4	9 10,8	9 43,2	10 15,6
20	10 48,0	11 20,4	11 52,8	12 25,2	12 57,6	13 30,0	14 2,4	14 34,8	15 7,2	15 39,6
30	16 12,0	16 44,4	17 16,8	17 49,2	18 21,6	18 54,0	19 26,4	19 58,8	20 31,2	21 3,6
40	21 36,0	22 8,4	22 40,8	23 13,2	23 45,6	24 18,0	24 50,4	25 22,8	25 55,2	26 27,6
50c	27′ 0,0″	27′ 32,4″	28′ 4,8″	28′ 37,2″	29′ 9,6″	29′ 42,0″	30′ 14,4″	30′ 46,8″	31′ 19,2″	31′ 51,6″
60	32 24,0	32 56,4	33 28,8	34 1,2	34 39,6	35 6,0	35 38,4	36 10,8	36 43,2	37 15,6
70	37 48,0	38 20,4	38 52,8	39 25,2	39 57,6	40 30,0	41 2,4	41 34,8	42 7,2	42 39,6
80	43 12,0	43 44,4	44 16,8	44 49,2	45 21,6	45 54,0	46 26,4	46 58,8	47 31,2	48 3,6
90	48 36,0	49 8,4	49 40,8	50 13,2	50 45,6	51 18,0	51 50,4	52 22,8	52 55,2	53 27,6

Segundos (cc)

	0cc	1cc	2cc	3cc	4cc	5cc	6cc	7cc	8cc	9cc
00cc	0,000″	0,324″	0,648″	0,972″	1,296″	1,620″	1,944″	2,268″	2,592″	2,916″
10	3,240	3,564	3,888	4,212	4,536	4,860	5,184	5,508	5,832	6,156
20	6,480	6,804	7,128	7,452	7,776	8,100	8,424	8,748	9,072	9,396
30	9,720	10,044	10,368	10,692	11,016	11,340	11,664	11,988	12,312	12,636
40	12,960	13,284	13,608	13,932	14,256	14,580	14,904	15,228	15,552	15,876
50cc	16,200″	16,524″	16,848″	17,172″	17,496″	17,820″	18,144″	18,468″	18,792″	19,116″
60	19,440	19,764	20,088	20,412	20,736	21,060	21,384	21,708	22,032	22,356
70	22,680	23,004	23,328	23,652	23,976	24,300	24,624	24,948	25,272	25,596
80	25,920	26,244	26,568	26,892	27,216	27,540	27,864	28,188	28,512	28,836
90	29,160	29,484	29,808	30,132	30,456	30,780	31,104	31,428	31,752	32,076

	0,1cc	0,2cc	0,3cc	0,4cc	0,5cc	0,6cc	0,7cc	0,8cc	0,9cc
	0,0324″	0,0648″	0,0972″	0,1296″	0,1620″	0,1944″	0,2268″	0,2592″	0,2916″

(Véase § 36, pág. 139)

V. Promedio de cuatro valores angulares

	0″	10″	20″	30″	40″	50″
0′	0′ 9″	0′ 2,5″	0′ 5″	0′ 7,5″	0′ 10″	0′ 12,5″
1	0 15	0 17,5	0 20	0 22,5	0 25	0 27,5
2	0 30	0 32,5	0 35	0 37,5	0 40	0 42,5
3	0 45	0 47,5	0 50	0 52,5	0 55	0 57,5
4	1 0	1 2,5	1 5	1 7,5	1 10	1 12,5
5′	1′ 15″	1′ 17,5″	1′ 20″	1′ 22,5″	1′ 25″	1′ 27,5″
6	1 30	1 32,5	1 35	1 37,5	1 40	1 42,5
7	1 45	1 47,5	1 50	1 52,5	1 55	1 57,5
8	2 0	2 2,5	2 5	2 7,5	2 10	2 12,5
9	2 15	2 17,5	2 20	2 22,5	2 25	2 27,5
10′	2′ 30″	2′ 32,5″	2′ 35″	2′ 37,5″	2′ 40″	2′ 42,5″
11	2 45	2 47,5	2 50	2 52,5	2 55	2 57,5
12	3 0	3 2,5	3 5	3 7,5	3 10	3 12'5
13	3 15	3 17,5	3 20	3 22,5	3 25	3 27'5
14	3 30	3 32,5	3 35	3 37'5	3 40	3 42,5
15′	3′ 45″	3′ 47,5″	3′ 50″	3′ 52,5″	3′ 55″	3′ 57,5″
16	4 0	4 2,5	4 5	4 7,5	4 10	4 12,5
17	4 15	4 17,5	4 20	4 22,5	4 25	4 27,5
18	4 30	4 32,5	4 35	4 37,5	4 40	4 42,5
19	4 45	4 47,5	4 50	4 52,5	4 55	4 57,5
20′	5′ 0″	5′ 2,5″	5′ 5″	5′ 7,5″	5′ 10″	5′ 12,5″
21	5 15	5 17,5	5 20	5 22,5	5 25	5 27,5
22	5 30	5 32,5	5 35	5 37,5	5 40	5 42,5
23	5 45	5 47,5	5 50	5 52,5	5 55	5 57,5
24	6 0	6 2,5	6 5	6 7,5	6 10	6 12,5
25′	6′ 15″	6′ 17,5″	6′ 20″	6′ 22,5″	6′ 25″	6′ 27,5″
26	6 30	6 32,5	6 35	6 37,5	6 40	6 42,5
27	6 45	6 47,5	6 50	6 52,5	6 55	6 57,5
28	7 0	7 2,5	7 5	7 7,5	7 10	7 12,5
29	7 15	7 17,5	7 20	7 22,5	7 25	7 27,5
30′	7′ 30″	7′ 32,5″	7′ 35″	7′ 37,5″	7′ 40″	7′ 42,5″
31	7 45	7 47,5	7 50	7 52,5	7 55	7 57,5
32	8 0	8 2,5	8 5	8 7,5	8 10	8 12,5
33	8 15	8 17,5	8 20	8 22,5	8 25	8 27,5
34	8 30	8 32,5	8 35	8 37,5	8 40	8 42,5
35′	8′ 45″	8′ 47,5″	8′ 50″	8′ 52,5″	8′ 55″	8′ 57,5″
36	9 0	9 2,5	9 5	9 7,5	9 10	9 12,5
37	9 15	9 17,5	9 20	9 22,5	9 25	9 27,5
38	9 30	9 32,5	9 35	9 37,5	9 40	9 42,5
39	9 45	9 47,5	9 50	9 52,5	9 55	9 57,5
40′	10′ 0″	10′ 2,5″	10′ 5″	10′ 7,5″	10′ 10″	10′ 12,5″
41	10 15	10 17,5	10 20	10 22,5	10 25	10 27,5
42	10 30	10 32,5	10 35	10 37,5	10 40	10 42,5
43	10 45	10 47,5	10 50	10 52,5	10 55	10 57,5
44	11 0	11 2,5	11 5	11 7,5	11 10	11 12,5

0″	0,00″
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5″	1,25″
6	1,50
7	1,75
8	2,00
9	2,25

(Véase § 88, pág. 364)

V. Promedio de cuatro valores angulares (continuación)

	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	
0″	0′ 0,00″	0′ 15,00″	0′ 30,00″	0′ 45,00″	1′ 0,00″	1′ 15,00″	1′ 30,00″	1′ 45,00″	0″
1	0,25	15,25	30,25	45,25	0,25	15,25	30,25	45,25	1
2	0,50	15,50	30,50	45,50	0,50	15,50	30,50	45,50	2
3	0,75	15,75	30,75	45,75	0,75	15,75	30,75	45,75	3
4	1,00	16,00	31,00	46,00	1,00	16,00	31,00	46,00	4
5	1,25	16,25	31,25	46,25	1,25	16,25	31,25	46,25	5
6	1,50	16,50	31,50	46,50	1,50	16,50	31,50	46,50	6
7	1,75	16,75	31,75	46,75	1,75	16,75	31,75	46,75	7
8	2,00	17,00	32,00	47,00	2,00	17,00	32,00	47,00	8
9	2,25	17,25	32,25	47,25	2,25	17,25	32,25	47,25	9
10″	0′ 2,50″	0′ 17,50″	0′ 32,50″	0′ 47.50″	1′ 2,50″	1′ 17,50″	1′ 32,50″	1′ 47,50″	10″
11	2,75	17,75	32,75	47,75	2,75	17,75	32,75	47,75	11
12	3,00	18,00	33,00	48,00	3,00	18,00	33,00	48,00	12
13	3,25	18,25	33,25	48,25	3,25	18,25	33,25	48,25	13
14	3,50	18,50	33,50	48,50	3,50	18,50	33,50	48,50	14
15	3,75	18,75	33,75	48,75	3,75	18,75	33,75	48,75	15
16	4,00	19,00	34,00	49,00	4,00	19,00	34,00	49,00	16
17	4,25	19,25	34,25	49,25	4,25	19,25	34,25	49,25	17
18	4,50	19,50	34,50	49,50	4,50	19,50	34,50	49,50	18
19	4,75	19,75	34,75	49,75	4,75	19,75	34,75	49,75	19
20″	0′ 5,00″	0′ 20,00″	0′ 35,00″	0′ 50,00″	1′ 5,00″	1′ 20,00″	1′ 35,00″	1′ 50,00″	20″
21	5,25	20,25	35,25	50,25	5,25	20,25	35,25	50,25	21
22	5,50	20,50	35,50	50,50	5,50	20,50	35,50	50.50	22
23	5,75	20,75	35,75	50,75	5,75	20,75	35,75	50,75	23
24	6,00	21,00	36,00	51,00	6,00	21,00	36,00	51,00	24
25	6,25	21,25	36,25	51,25	6,25	21,25	36,25	51,25	25
26	6,50	21,50	36,50	51,50	6,50	21.50	36,50	51,50	26
27	6,75	21,75	36,75	51,75	6,75	21,75	36,75	51,75	27
28	7,00	22,00	37,00	52,00	7,00	22,00	37,00	52,00	28
29	7,25	22,25	37,25	52,25	7,25	22,25	37,25	52,25	29
30″	0′ 7,50″	0′ 22,50″	0′ 37,50″	0′ 52,50″	1′ 7,50″	1′ 22,50″	1′ 37,50″	1′ 52,50″	30″
31	7,75	22,75	37,75	52,75	7,75	22,75	37,75	52.75	31
32	8,00	23,00	38,00	53,00	8,00	23,00	38.00	53,00	32
33	8,25	23,25	38,25	53,25	8 25	23,25	38,25	53,25	33
34	8,50	23,50	38,50	53,50	8,50	23,50	38,50	53,50	34
35	8,75	23,75	38,75	53,75	8,75	23,75	38,75	53,75	35
36	9,00	24,00	39,00	54,00	9,00	24,00	39,00	54.00	36
37	9.25	24,25	39,25	54,25	9,25	24,25	39,25	54,25	37
38	9,50	24,50	39,50	54,50	9,50	24,50	39,50	54,50	38
39	9,75	24,75	39,75	54,75	9,75	24,75	39,75	54,75	39
40″	0′ 10,00″	0′ 25,00″	0′ 40,00″	0′ 55,00″	1′ 10,00″	1′ 25,00″	1′ 40,00″	1′ 55,00″	40″
41	10,25	25,25	40.25	55,25	10,25	25,25	40,25	55.25	41
42	10,50	25,50	40,50	55,50	10,50	25,50	40,50	55,50	42
43	10,75	25,75	40,75	55,75	10,75	22,75	40,75	55,75	43
44	11,00	26,00	41,00	56,00	11,00	26,00	41,00	56,00	44
45	11,25	26,25	41,25	56,25	11,25	26,25	41.25	56,25	45
46	11,50	26,50	41,50	56,50	11,50	26,50	41,50	56,50	46
47	11,75	26,75	41,75	56,75	11,75	26,75	41,75	56,75	47
48	12,00	27,00	42,00	57,00	12,00	27,00	42.00	57,00	48
49	12,25	27,25	42,25	57,25	12,25	27,25	42,25	57,25	49
50″	0′ 12,50″	0′ 27,50″	0′ 42,50″	0′ 57,50″	1′ 12,50″	1′ 27,50″	1′ 42,50″	1′ 57,50″	50″
51	12,75	27,75	42,75	57,75	12,75	27,75	42,75	57,75	51
52	13,00	28.00	43,00	58,00	13,00	28.00	43.00	58,00	52
53	13,25	28,25	43,25	58,25	13,25	28,25	43,25	58,25	53
54	13,50	28,50	43,50	58,50	13,50	28,50	43,50	58,50	54
55	13,75	28,75	43,75	58,75	13,75	28,75	43,75″	58,75	55
56	14,00	29,00	44,00	59,00	14,00	29,00	44,00	59,00	56
57	14,25	29,25	44,25	59,25	14 25	29,25	44,25	59,25	57
58	14,50	29,50	44,50	59,50	14,50	29,50	44,50	59,50	58
59	14,75	29,75	44,75	59.75	14,75	29,75	44,75	59.75	59
60″	0′ 15,00″	0′ 30,00″	0′ 45,00″	1′ 60.00″	1′ 15,00″	1′ 30,00″	1′ 45,00″	2′ 0,00″	60″

(Véase § 88, pág. 364)

VI. El número ρ

I. En divisiones sexagesimales

$\rho^\circ = \frac{180}{\pi} = 57{,}295\ 7795$ $\qquad \frac{1}{\rho^\circ} = 0{,}01745\ 32925$ $\qquad \log \rho^\circ = 1.758\ 1{\cdot}26{\cdot}324$

$\rho' = \frac{180.60}{\pi} = 3437{,}74677$ $\qquad \frac{1}{\rho'} = 0{,}00029\ 08882\ 087$ $\qquad \log \rho' = 3.536\ 2733{\cdot}828$

$\rho'' = \frac{180.60.60}{\pi} = 206264{,}8063$ $\qquad \frac{1}{\rho''} = 0{,}00000\ 43481\ 36811$ $\qquad \log \rho'' = 5.314\ 4251{\cdot}332$

Valor aproximado para $\frac{r\,\alpha}{\rho}$

r	$\alpha = 1''$	$\alpha = 10''$	$\alpha = 20''$	$\alpha = 30''$	$\alpha = 1'$	$\alpha = 10'$	$\alpha = 20'$	$\alpha = 30'$	$\alpha = 1^\circ$
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,006	0,009	0,017
10	0,000	0,000	0,001	0,001	0,003	0,029	0,058	0,087	0,175
57,296	0,000	0,003	0,006	0,008	0,017	0,167	0,333	0,500	1,000
100	0,000	0,005	0,010	0,015	0,029	0,291	0,582	0,873	1,745
200	0,001	0,010	0,019	0,029	0,058	0,582	1,164	1,745	3,491
300	0,001	0,015	0,029	0,044	0,087	0,876	1,745	2,618	5,236
400	0,002	0,019	0,039	0,058	0,116	1,164	2,327	3,491	6,981
500	0.002	0,024	0.048	0,073	0,145	1,454	2,909	4,363	8,727
600	0,003	0.029	0 058	0,087	0,175	1,745	3,491	5,236	10,472
700	0,003	0,034	0,068	0,102	0.204	2,036	4,072	6,109	12,217
800	0,004	0,039	0,078	0,116	0,233	2,327	4 651	6,981	13,963
900	0,004	0,044	0 087	0,131	0,262	2,618	5,236	7,854	15,708
1000	0,005	0,048	0 097	0,145	0,291	2,909	5,818	8,727	17,453
3437,7	0,017	0,167	0,333	0,500	1,000	10,000	20	30	60
10000	0,048	0,181	0,970	1,454	2,909	29,1	58	87	175
20000	0,097	0,970	1,939	2,909	5,818	58,2	116	175	349
50000	0 242	2,424	4,848	7,272	11,544	145,4	291	436	873
100000	0 484	4,848	9,696	14,544	29,089	290,9	582	873	1745
206265	1,000	10,000	20,000	30,000	60,000	600,0	1200	1800	3600

II. En divisiones centesimales

$\rho^g = \frac{200}{\pi} = 63{,}6619\ 77234$ $\qquad \frac{1}{\rho^g} = 0{,}01570\ 796327$ $\qquad \log \rho^g = 1.803\ 8801{\cdot}230$

$\rho^c = \frac{20000}{\pi} = 100\ \rho^g$ $\qquad \rho^{cc} = \frac{2000000}{\pi} = 100\ \rho^c = 10000\ \rho^g$

Valor aproximado para $\frac{r\,\alpha}{\rho}$

r	$\alpha = 1^{cc}$	$\alpha = 10^{cc}$	$\alpha = 20^{cc}$	$\alpha = 50^{cc}$	$\alpha = 1^c$	$\alpha = 10^c$	$\alpha = 20^c$	$\alpha = 50^c$	$\alpha = 1^g$
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,003	0,008	0,016
10	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,016	0,031	0,079	0,157
63,662	0,000	0,001	0,002	0,005	0,01	0,1	0,2	0,5	1
100	0,000	0.002	0,003	0,008	0,016	0,157	0,314	0,785	1,571
200	0,000	0,003	0,006	0,016	0,031	0,314	0,628	1,571	3,142
300	0,000	0,005	0,009	0,024	0,047	0,471	0,942	2,356	4,712
400	0,001	0,006	0,013	0,031	0,063	0,628	1,257	3,142	6,283
500	0,001	0,008	0,016	0,039	0,079	0,785	1,571	3,927	7,854
600	0,001	0,009	0,019	0,047	0,094	0,942	1,885	4,712	9,425
700	0,001	0,011	0,022	0,055	0,110	1,100	2,199	5,498	10,996
800	0,001	0,012	0,025	0,063	0,126	1,257	2,513	6,283	12,566
900	0,001	0,014	0,028	0,071	0,141	1,414	2,827	7,068	14,137
1000	0,002	0,016	0,031	0,079	0,157	1,571	3,142	7,854	15,708
6366,2	0,010	0,1	0,2	0,5	1	10	20	50	100
10000	0,016	0,157	0,314	0,785	1,571	15,7	31	79	157
20000	0,031	0,314	0,628	1,571	3,142	31,4	63	157	314
50000	0,079	0,785	1,571	3,927	7,854	78,5	157	392	785
100000	0,157	1,571	3,142	7,854	15,708	157,1	314	785	1571
636620	1	10	20	50	100	1000	2000	5000	10000

(Véase § 36, pág. 141)

VII. Millas y su equivalencia

1 milla geográfica $= \frac{1}{15}$ de grado de ecuador terrestre (elipsoide)

1 milla marina = 1 minuto de ecuador terrestre $= \frac{1}{4}$ de milla geográfica

		log
1 milla geográfica	= 7,42043854 Km	0 8704295·7
1 milla geográfica cuadrada .	= 55,0629081 Km²	1.7408591·4
1 kilómetro	= 0,13476292 milla geogr.	9.1295704·3
1 kilómetro	= 0,53905170 milla marina	9.7316304·2
1 kilómetro cuadrado. . . .	= 0,018161046 milla cuadr.	8.2597408·6

Actualmente se define la milla marina como la longitud del arco correspondiente a un minuto de meridiano, por lo cual resulta variable con la latitud; también se toma como longitud de la milla marina el valor medio de dicho arco, que es de 1852,010 metros.

La milla inglesa equivale a 1,60933 Km
La milla prusiana equivale a 7,53248 Km
La versta rusa equivale a 1,06679 Km
La milla austriaca equivale a 7,58594 Km

VIII. Medidas antiguas de España y América

Medidas de longitud	Medidas de superficie
Castilla, León, Asturias, Andalucía, Extremadura 1 *Vara de Burgos* = 3 pies o tercias = 4 cuartas o palmos = 6 sesmas = 36 pulgadas (de 12 líneas) = 48 dedos = 0,836 m (en Almería 0,833 m; Jaén y Ciudad Real 0,839; Madrid 0,843). 1 *Legua* = 20000 pies = 5,573 Km (en Ciudad Real 6,687).	1 *Vara cuadrada* (llamada de Burgos) = 0,6988 m². 1 *Estadal:* usualmente 16 varas cuadradas, Granada 7,56; Valladolid y Guadalajara 11,11; Madrid y Huelva 12,25; Palencia 12,84; Córdoba y Jaén 13,14; Toledo y Cádiz 13,44; Segovia y Avila 14,06; Ciudad Real 16; Cuenca y Sevilla 18,06; Badajoz 18,43. 1 *Fanega* = 9216 varas cuadr. = 64,4 a en Santander, Burgos, Ciudad Real, Cuenca, Salamanca, Almería, Granada, Cádiz, Cáceres, Badajoz. En Logroño 2722, Soria 3200, Guadalajara 4444, Zamora 4800, Toledo (400 estadales) 5376, íd. (500 estad.) 6722, Avila 5625 ó 6000, Huelva 5280, Sevilla 8507, Málaga 8640, Córdoba 8700, Jaén 8963 varas cuadradas. 1 *Obrada:* Palencia 7704 1/6 varas cuadradas, Valladolid 600 estad. 1 *Aranzada:* Sevilla 6806, Córdoba 5256 varas cuadradas. 1 *Tahulla* de regadío en Almería: 1600 varas cuadradas. 1 *Hemina* en León: de secano 1344 3/9; de regadío 896 2/9 var. cuadr. 1 *Día de bueyes* en Asturias: 1800 varas cuadradas.
Galicia 1 *Vara* = 0,836 m (Coruña 0,843; Lugo 0,855).	1 *Ferrado* de 900 varas cuadradas = 6,288 a (en Lugo 625 varas cuadradas = 4,368 a). 1 *Cavadora:* Orense = 625 varas cuadradas = 4,368 a.
Vascongadas 1 *Vara* = 0,836 m. 1 *Legua* = 5,573 Km.	1 *Estadal:* Vizcaya y Alava 5,444 varas cuadr., Guipúzcoa 12,25. 1 *Peonada:* Vizcaya 3,805 a. 1 *Fanega:* Alava (660 est.) 25,144 a; Guipúzc. (4900 v. cuadr.) 34,43 a.

VIII. Medidas antiguas de España y América (continuación)

Medidas de longitud	Medidas de superficie
Navarra 1 *Vara* = 0,785 m. 1 *Legua* = 5,49 Km	1 *Robada* = 1458 varas cuadradas del país = 8,984 a.
Aragón 1 *Vara* = 0,772 m (Teruel 0,768 m). 1 *Legua* = 5,573 Km (Huesca 6,176 Km).	1 *Fanega:* Huesca (1200 varas cuadradas del país) 7,15 a; Teruel (1600 varas cuadradas castellanas) 11,118 a. 1 *Cuartal* (1/4 fanega): Zaragoza 2,384 a.
Cataluña 1 *Cana* = 8 palmos = 32 cuartos = 1,555 m (Gerona 1,559 m; Tarragona 1,560 m). 1 *Hora de camino:* en Tarragona 4458 m; en Gerona 3762 m	1 *Cana cuadrada* = 64 palmos cuadrados = 2,418 m². 1 *Mojada* de Barcelona = 2 cuarteras = 16 mundinas = 2025 canas cuadradas = 48,965 a. 1 *Jornal de tierra:* Tortosa (900 canas cuadr.) 21,90; Reus 37,35; Lérida (1800 canas cuadradas) 43,58; Montblanch (1025 canas cuadradas) 49,28; Tarragona (jornal de rey) 60,84 áreas. 1 *Vesana:* Gerona (900 canas cuadradas) 21,87 a; Ampurias 1200; Figueras (vesana de senyor) 1024 canas cuadradas.
Baleares 1 *Cana* = 1,555 m. 1 *Destre* lineal mallorquín = 4,214 m.	1 *Cuarterada* = 4 cuartones = 400 destres superf. = 70,031 a. 1 *Fanegada* = 200 brazas reales = 8,319 a.
Valencia 1 *Vara* = 0,906 m (en Alicante 0,912). 1 *Legua* = 6,037 Km (en Alicante 5,555 Km).	1 *Estadal:* Valencia = 14,06 varas castellanas cuadr. = 9,83 m². 1 *Fanega:* Valencia y Castellón (1012 1/2 var. cuadr. del país) 8,32 a. 1 *Jornal:* Alicante (5776 varas cuadradas del país) 48,042 a; Castellón 49,866 a.
Murcia 1 *Vara* = 0,836 m (Albacete 0,837). 1 *Legua* = 5,576 Km	1 *Vara cuadrada* = 0,699 m². 1 *Estadal* = 25 varas cuadradas = 17,47 m². 1 *Fanega:* Murcia (9600 var. cuadr.) 67,094 a; Albacete (10000 varas cuadradas) 70,57 a.
República Argentina 1 *Braza* = 2 varas = 8 palmos = 6 pies = 1,732 m 1 *Legua* = 3000 brazas = 5,196 Km.	1 *Legua cuadrada* = 26,99842 Km².
Brasil 1 *Covado* = 2 pies = 3 palmos = 0,660 m. 1 *Braza* = 2 varas = 2,200 m. 1 *Legua* = 6,183 Km. 1 *Pie* = 0,33 m.	1 *Covado cuadrado* = 0,4356 m². 1 *Pie cuadrado* = 0,1089 m². 1 *Braza cuadrada* = 4,84 m². 1 *Legua cuadrada* = 38,2295 Km².

VIII. Medidas antiguas de España y América (continuación)

Medidas de longitud	Medidas de superficie
Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, Guatemala, Honduras, Nicaragua, Perú, El Salvador y Venezuela 1 *Vara* = 3 pies = 4 palmos = 0,8359 m. 1 *Legua* = 3 millas = 5,572 Km	*Medidas castellanas antiguas* En VENEZUELA: 1 *Fanegada* = 0,6987 Ha.
Paraguay 1 *Vara* = 0,866 m. 1 *Legua* = 4,33 Km.	1 *Legua cuadrada* = 18,75 Km².
Uruguay 1 *Vara* = 0,859 m. 1 *Legua* = 5,154 Km.	1 *Legua cuadrada* = 26,6 Km².

Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral

para los levantamientos topográficos y catastrales (*)

A continuación figuran, extractadas, algunas disposiciones que, por ser de carácter general, merecen ser destacadas de las Instrucciones completas del Instituto Geográfico y Catastral, dictadas para la ejecución de los trabajos al mismo encomendados. Hemos seleccionado precisamente los artículos que tratan de métodos operatorios, apreciación y errores tolerables y, en general, todos aquellos que pueden interesar al lector, como complemento y comparación de esta técnica operatoria con la estudiada en esta obra. Al mismo tiempo, publicamos algunos artículos referentes a trámite de documentación, divulgando así, aunque en muy reducido grado, algo de la precisión y solvencia de la magna labor y de la elevada empresa que el Instituto Geográfico Español lleva a cabo de manera tan perfecta.

Por tratarse de Topografía simplemente, no hacemos referencia en este Apéndice a las Instrucciones que para los trabajos geodésicos y astronómicos tiene en vigor el Instituto Geográfico, limitándonos a extractar las dictadas para la formación del Mapa Nacional, de los planos de población y del Catastro Topográfico Parcelario. Cada párrafo corresponde a un artículo de dichas Instrucciones, sin consignar la numeración original correspondiente, y sin hacer referencia a los formularios empleados por el Instituto, por no corresponder este detalle al carácter general de esta obra y citándolos únicamente para dar a conocer la existencia de tales Instrucciones, modelo en su género.

Mapa Nacional de España

Los trabajos topográficos de cada término municipal, con sus anejos o territorios dependientes de él, comprenderán: la triangulación topográfica; el señalamiento de los mojones y línea de término; la representación planimétrica de los accidentes topográficos, como son ríos, arroyos, canales, acequias, ferrocarriles, carreteras, caminos, cañadas, lagunas, etc.; la situación de edificios aislados o poblaciones de menos de diez edificios, mojones de término, hitos o postes kilométricos, postes telegráficos y telefónicos, pozos, fuentes, abrevaderos, cruces, etc.; la representación de los polígonos que encierren diferentes producciones agrícolas y forestales; los planos de poblaciones que excedan de diez edificaciones, y la representación del relieve del terreno, o sea la nivelación.

Trabajos de campo

Triangulación

La triangulación topográfica de cada término municipal se compondrá de los triángulos necesarios para cubrir toda su superficie.

La longitud de los lados no excederá de cinco kilómetros ni bajará de dos. Los ángulos no podrán ser menores de veinte grados.

(*) Recopilación de las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral de España, hecha por el traductor.

La triangulación topográfica se apoyará en la geodésica de tercer orden, terminada totalmente hace bastantes años en España.

Cuando un término municipal tenga una superficie menor de 10000 hectáreas, se agrupará con alguno de los adyacentes para efectuar la triangulación.

Todos los vértices geodésicos que se hallen dentro del término municipal, serán también vértices de la red topográfica; si esto no fuera posible, por las condiciones del terreno, se tomarán como puntos auxiliares.

Los vértices se señalarán en el terreno con un taladro de 6 a 8 cm de diámetro y de 40 a 50 cm de profundidad, en cuyo fondo se clavará una estaca, llenándolo después completamente de polvo de carbón y cubriéndolo todo con un mojón piramidal de tierra y piedras de 50 cm de altura, y que tenga por base un triángulo de un metro de lado. Cuando los vértices se sitúen en roca, el taladro será del mismo diámetro, pero su profundidad se reducirá a 10 cm, quedando colocado en el centro de un triángulo cuyos lados, grabados a cincel en la misma roca, tengan 20 cm de longitud. Estas señales se referirán a tres objetos cercanos y fijos, como árboles, cercas, rocas, etc., los cuales se señalarán grabando las iniciales T. T. Cuando no haya objetos próximos a que referir un vértice, se clavarán tres estacas a menos de 20 m de él, que servirán de referencia.

En la observación definitiva de las direcciones acimutales se medirán, siempre que sea posible, los tres ángulos de cada triángulo. Cuando sea forzoso estacionar fuera del vértice, caso que se evitará cuanto se pueda, se elegirán las estaciones auxiliares necesarias, de manera que se puedan reducir al vértice todas las direcciones de la vuelta de horizonte. La distancia máxima desde estas estaciones auxiliares al vértice será de 10 m.

La diferencia máxima que se admitirá entre la suma de los tres ángulos observados en cada triángulo y 180°, será de un minuto. En general, el error admitido en la observación de cada ángulo será el doble de la apreciación del aparato. Las comprobaciones de los lados habrán de ser inferiores al 1:1000.

Corregido de horizontalidad el eje del círculo vertical del teodolito, se apunta cuidadosamente en dos posiciones inversas de este círculo a uno de los vértices, haciendo las lecturas correspondientes, y se corregirá, si es preciso, la colimación con el tornillo que mueve lateralmente el retículo.

Las direcciones acimutales se observarán con dos punterías: la primera con el anteojo a la izquierda del eje central del teodolito y la segunda con el anteojo a la derecha.

Se medirá la distancia cenital de todos los puntos a que se dirija visual acimutal.

Señalamiento de mojones y líneas de término

El señalamiento de los mojones y línea límite entre cada dos términos municipales, se hace con la asistencia de los Ayuntamientos respectivos o de Comisiones autorizadas por ellos, levantándose acta sobre el terreno en que se describen todos los mojones comunes y la línea límite entre cada dos mojones consecutivos, expresándose el nombre del lugar en que se encuentra cada mojón, la forma y dimensiones de éste, el material de que está compuesto y el nombre del propietario de la finca en que radique, o de los propietarios colindantes, si estuviese situado sobre una linde. Todos los mojones y la línea límite han de quedar perfectamente identificados de modo que no pueda haber duda alguna sobre la situación de la misma. Cuando los Ayuntamientos no estuviesen conformes con una línea definitiva, se describirá en el acta la línea de posesión el día de que se trate, que tendrá carácter de provisional, hasta que en su día pueda convertirse en definitiva.

Después de señalados los mojones y la línea de término entre dos municipios, se hará el levantamiento del plano correspondiente por el personal del Instituto; este plano se hace por itinerarios de brújula y estadia, dirigiendo en cada estación una visual al punto anterior y otra al siguiente, anotando las lecturas correspondientes de rumbo y distancia, y de modo que ambos elementos resulten medidos dos veces.

Cuando se considere como línea de término el eje de las aguas de un río, el eje de un camino, barranco, etc., se levantará el plano de las dos márgenes desde el itinerario.

Representación planimétrica

Después de levantado el plano de la línea límite de cada término municipal, se lleva a cabo la representación planimétrica de los accidentes topográficos. El instrumento empleado para este objeto es la brújula, midiéndose las distancias con estadia. Se empieza por trazar itinerarios por los ferrocarriles, carreteras, caminos, ríos y arroyos que atraviesen el término. Sobre estas líneas principales, que han de empezar y acabar en puntos de la línea límite, se trazan los itinerarios que se necesiten para determinar los demás caminos, ríos, arroyos, etc., así como el perímetro de las poblaciones y de grupos de edificios.

Desde estos itinerarios se fijan todos los vértices geodésicos o topográficos visibles, los mojones de término, las fuentes, pozos, casas, etc., y cuantos detalles merezcan ser representados. Para que quede determinado un punto por este procedimiento, ha de ser observado por lo menos desde tres estaciones, y las visuales no han de formar entre sí ángulos menores de 30°.

La distancia entre cada dos estaciones consecutivas de brújula no excederá de 300 m.

El desarrollo gráfico de estas operaciones se referirá al Norte verdadero en escala de 1:25000 y en hojas cuadriculadas.

Cuando haya masas ferruginosas en el sitio de la operación se empleará la pantómetra en lugar de la brújula.

Los accidentes topográficos se indicarán en los planos con arreglo a los signos convencionales reglamentarios en el Instituto, y que constan en las Instrucciones completas del mismo.

Al comprobar los trabajos de esta clase se admitirá como diferencia máxima en los rumbos la de treinta minutos, tomando en cuenta la diferente declinación entre la brújula con que se haya observado y aquella con que se compruebe. En la medición de distancias se tolerará el $\frac{1}{300}$ de diferencia. La tolerancia en el desarrollo gráfico será para el cierre de cada polígono de 10 m $\sqrt{K}$, siendo K la longitud del perímetro del polígono en kilómetros.

La declinación de las brújulas se obtendrá dirigiendo visuales desde un vértice trigonométrico a otros cuatro unidos con él y que, a ser posible, llenen la condición de estar situados en distinto cuadrante cada uno, hallando después el promedio de las declinaciones que resulten.

Planos de población

En los trabajos de esta clase hay que distinguir dos casos: 1.° Cuando se trate de capitales de provincia o de poblaciones de gran extensión y extraordinaria importancia, y 2.° Cuando las poblaciones carezcan de esas condiciones.

En general, cuando se disponga de fotografías aéreas de la población, se procederá a darles escala, utilizando para ello los itinerarios topográficos que hayan llegado o rodeado la población, al hacer la representación planimétrica del término correspondiente. De la

fotografía transformada se calcarán los perímetros de las manzanas. Este calco se reducirá a escala 1:25000.

Primer caso. Se empieza por inscribir el casco de población, con los arrabales próximos, en un gran polígono cuyos lados tengan 1000 a 2000 metros, y cuyos vértices se referirán a los de la triangulación topográfica. Estos vértices de poligonación exterior se unen con otros en el interior de la población situados sobre azoteas, torres, tejados, etc., para formar una red de triángulos que sirvan para referir a ella los vértices de la poligonación interior.

Apoyándose en los vértices del polígono exterior, y marchando por las avenidas o calles principales, se divide aquél en otros polígonos interiores, cuya magnitud varía según la extensión de la población y sus disposiciones especiales.

Estos polígonos interiores (que deben ajustarse a la división de la población en barrios, cuarteles, etc., cuando la haya), se dividen a su vez en otros, y éstos en otros, hasta que cada manzana quede encerrada dentro de un polígono.

Todos los vértices de la poligonación se señalan a cincel en las aceras, si las hubiese, con una P. de 10 cm de longitud y un punto en su parte inferior derecha, que será el que marque el vértice, o bien clavando estacas en el suelo y refiriéndolas, por medición de tres o más distancias, con las esquinas de las casas u otros puntos que reúnan condiciones de permanencia.

Los lados de la poligonación se miden dos veces directamente con cinta metálica; cuando esto no fuera posible, por mira horizontal o de otro modo. Las manzanas se refieren a los lados de esta poligonación por abscisas y ordenadas determinando con todo cuidado las inflexiones del perímetro de aquéllas, así como las que existan entre los arranques de las medianerías. Entre las dos mediciones de cada lado se tolerará una diferencia máxima de 1:300, y cuando se compruebe la operación por medio de otras dos mediciones, se tolerará una diferencia de 1:500 entre el promedio de las dos primeras mediciones y el de las dos de comprobación.

La observación de ángulos acimutales de la poligonación se hará con teodolito que aprecie 1′ o menos de 1′.

La máxima tolerancia en el cierre de cada polígono será el duplo de la apreciación directa del teodolito multiplicado por el número de vértices.

Se nivelarán todos los lados de los polígonos y en caso necesario se trazarán algunos perfiles más, a fin de obtener las curvas de nivel, de metro en metro (o menos aún cuando así se precise).

Segundo caso. Para poblaciones de menos importancia se siguen las mismas normas en cuanto a observación de poligonales, que en el primer caso, salvo que, cuando sea posible, se encierran varias manzanas en un solo polígono, trazando alineaciones de uno a otro lado, para poder referir a las mismas las fachadas y detalles de las manzanas.

Nivelación

La nivelación topográfica de cada término municipal comprende el número necesario de perfiles para representar el relieve del terreno en la escala 1:25000, por medio de curvas de nivel a la equidistancia de 10 metros. Las altitudes se refieren al nivel medio del mar en Alicante.

Las líneas de doble nivelación tienen por objeto referir a las nivelaciones de precisión un punto de partida, por lo menos, en cada término municipal. Estas líneas se nivelan marchando la segunda vez en sentido contrario de la primera.

Previamente a la nivelación se harán con brújula o pantómetra los itinerarios que se hayan de seguir en aquélla, eligiendo para ello ferrocarriles, carreteras, caminos vecinales, carreteros y finalmente de herradura.

En cada estación del nivel, la longitud de la nivelada de espalda ha de ser aproximadamente igual a la de frente, no debiendo exceder cada una de ellas de 100 metros.

En los trozos en que la diferencia de los valores obtenidos para el desnivel por las dos nivelaciones, llegue a 30 mm $\sqrt{K}$ (siendo K la distancia en kilómetros), se repetirá la nivelación de todo el trozo hasta obtener una diferencia menor que la expresada.

La diferencia de los dos resultados en el total de la línea doblemente nivelada no deberá exceder de 40 mm $\sqrt{K}$.

Empezando por un punto de la doble nivelación se nivela todo el perímetro de cada término municipal, y después se trazan perfiles que sigan los principales accidentes del terreno. Terminados estos perfiles, se unen entre sí por otros itinerarios de nivelación por las vertientes y divisorias de aguas, y éstos por otros hasta haber tomado todos los accidentes notables y todos los cambios de pendiente en el terreno.

Si la diferencia entre la suma de los desniveles parciales positivos y la de los negativos en cada polígono excediese de 70 mm $\sqrt{K}$ (siendo K la longitud del perímetro del polígono en kilómetros), se repetirá la nivelación de éste.

Trabajos de gabinete

Triangulación

La resolución de los diferentes triángulos, según los casos, se hace por medio de los oportunos formularios.

Para conocer si se ha deslizado un error grosero en la medición de distancias cenitales, se combinarán de dos en dos las recíprocas, las cuales deben satisfacer, prescindiendo de la refracción, a la condición: $z + z' = 180° - v$, siendo v el ángulo formado en el centro de la Tierra por las verticales de ambos puntos, cuyo valor es: $v = L : R \operatorname{sen} 1''$.

Los cálculos logarítmicos correspondientes a las triangulaciones topográficas se harán con seis cifras en las mantisas.

Planimetría

El desarrollo definitivo de la planimetría de cada término municipal se hará en escala 1:25000. La valuación de superficies se ejecutará sobre los planos en escala 1:25000, haciendo uso del planímetro.

Nivelación

La tolerancia admitida en observación alterna es de 2 m $\sqrt{K}$, siendo K la longitud, en kilómetros, y en observación recíproca sólo se admitirá 1 m $\sqrt{K}$.

Planos de población

El desarrollo se hará gráficamente, a escala 1:5000, salvo en los casos especiales en que se hace a escala 1:1000 y hasta 1:500.

El Instituto Geográfico tiene también brigadas para el levantamiento de planos por fotogrametría terrestre, y efectúa del mismo modo levantamientos por fotogrametría aérea, formando fotoplanos tanto de rústica como de poblaciones.

Para el detalle de todos estos trabajos, así como de los correspondientes a Mareógrafos, Sismología, Magnetismo, Corrientes telúricas y atmosféricas y Gravimetría, dispone el Instituto de personal especializado y de los instrumentos más modernos, estando en todo ello en primera línea entre las naciones que más adelantadas se encuentran en esta materia.

Catastro Topográfico Parcelario

Antes de proceder al levantamiento topográfico de los polígonos topográficos con todas las parcelas y subparcelas contenidas en el mismo, se procede al deslinde y señalamiento de los perímetros de las parcelas.

Además de las líneas límites de las parcelas figurarán en los planos las líneas de separación de cultivos, que han de servir para determinar las subparcelas. También se situarán dentro de cada parcela las edificaciones, pozos, norias, caminos de servidumbre, acequias, sendas, etc., que contenga. Del mismo modo se anotan en los planos parcelarios los nombres de los distintos pasos o parajes, caminos, barrancos, ríos, vías férreas, canales, etc.

El levantamiento de cada parcela se hace a escala proporcionada a su tamaño real, no debiendo figurar ninguna con tamaño, en el plano, inferior a dos centímetros cuadrados; las escalas empleadas son 1:2000, 1:5000, 1:10000 y 1:25000.

Los levantamientos se hacen con brújula y estadia, siendo la máxima longitud de los tramos o ejes de cada itinerario de 100 a 120 metros, en planos a escala 1:2000. En la escala de 1:5000 dichos tramos podrán ser hasta de 150 m.

Se opera, en general, por estaciones recíprocas, y en el limbo de la brújula se apreciará, por lo menos, el cuarto de grado. En la mira se hace la lectura con los tres hilos del retículo, comprobando, antes de mover aquélla, si son concordantes las diferencias del hilo central y las de los extremos.

El error relativo de la operación en estas condiciones viene dado por la fórmula

$$E_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega^2} + E_0^2}$$

en la que E_0 representa el error máximo cometido en la lectura de un rumbo y $\frac{1}{\omega}$ la aproximación en la medida de distancia. Puede, por consiguiente, admitirse como error relativo $1:500 = 0{,}002$, resultante de la aplicación de la fórmula anterior para $\omega = 500$.

Cuando se opere en terreno inclinado, o en observación de distancias la visual no sea horizontal, se anotará con apreciación de medio grado el ángulo de pendiente, que servirá para reducir las distancias al horizonte.

Para declinar las brújulas se señalan en cada partido judicial en sitio de fácil acceso y buen horizonte, un punto permanente desde el cual sean bien visibles, a distancia no inferior a 500 metros, cuatro puntos, por lo menos, situados en los cuatro cuadrantes del horizonte. Partiendo de un lado de triangulación geodésica o topográfica, o directamente por observación astronómica se calculan los acimutes de las direcciones antedichas.

Levantado el perímetro de cada polígono, procede el topógrafo a hacer el relleno del mismo, es decir, a hacer el levantamiento de todas y cada una de las parcelas, con los detalles antes indicados.

En los desarrollos gráficos de los levantamientos no debe pasar el error de cierre, en su valor relativo, de 0,002 para el itinerario perimetral del polígono, y de 0,003 para los itinerarios interiores.

Cada parcela del polígono topográfico recibirá un número de orden y las subparcelas se designarán dentro de cada parcela por el mismo número de ésta, seguido de letras minúsculas ($1a$, $1b$; $2a$, $2b$, etc.).

El cálculo de las superficies se hace con planímetro, repitiendo dos veces la medida, y tomando la media de ambos resultados si éstos fueren concordantes, dada la precisión del aparato empleado.

Como documento anejo al plano parcelario de cada polígono, se hará una relación y estado en el que se consignarán por orden numérico las parcelas y subparcelas que comprenda, pago o paraje en que cada una se encuentre, apellidos y nombre del propietario, su vecindad y cultivos.

Terminados los planos parcelarios de los polígonos que comprende un término municipal, y las relaciones de propietarios y superficies, el Jefe provincial remite copia de unos y otras al Ayuntamiento correspondiente, para que estén expuestos al público durante el plazo de tres meses; durante este plazo, y ante la Junta pericial, los propietarios identificarán sus parcelas, y al cabo de aquel plazo el Ayuntamiento devolverá dicha documentación con la conformidad o los reparos u observaciones que la Junta pericial por sí o en nombre de los propietarios desee hacer constar.

Además de los planos y relaciones de características antes indicadas, se formará un índice alfabético por propietarios del término de que se trate.

Una vez atendidas las reclamaciones presentadas, se remite la documentación a la Dirección General para su aprobación, y hecho esto, se obtienen copias que se envían al Ministerio de Hacienda a los efectos que procedan, consistentes en la valoración de las parcelas para aplicarles la tributacion que con arreglo a las disposiciones sobre la materia haya de corresponderles.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

Págs.

§ 1. Introducción 1

Capítulo I

La media aritmética y el error medio

§ 2. Consideraciones generales 4
§ 3. Media de los errores. 4
§ 4. Error medio 6
§ 5. Propagación de los errores: Acumulación de errores accidentales y constantes . . 8
§ 6. Media aritmética: Representación gráfica. Peso de una observación 11
§ 7. Media aritmética general: Error medio de la unidad de peso. Interpretación mecánica de algunas fórmulas 15
§ 8. Compensación de un error de cierre 20
§ 9. Determinación del error medio en función de las diferencias entre las observaciones. 22
§ 10 Compensación de observaciones mediatas o indirectas 25
§ 11. Compensación de observaciones condicionadas 26

Capítulo II

Primeras operaciones de Agrimensura y su aplicación a levantamientos de poca importancia

§ 12. Fijación de puntos: Alineaciones rectas 28
§ 13. Escuadras de agrimensor 30
§ 14. Escuadras de reflexión, o de espejos 32
§ 15. Escuadras de refracción, o de prismas: Prisma triangular de sección rectangular isósceles. Escuadra de Bauernfeind. Escuadra de prisma pentagonal, de Zeiss. Prisma de Wollaston 36
§ 16. Cruz de prismas (alineador) 40
§ 17. Estudio de los errores en los prismas. 42
§ 18. Medición de distancias con reglas: Clisímetro de perpendículo para medir la inclinación de las reglas. Falsa escuadra. 47
§ 19. Medición de longitudes con cinta y cadena: Reducción al horizonte de las mediciones con cinta o cadena. Clisímetro de Zugmaier y Sickler. Clisímetro de Wolz. Clisímetro de espejo. Reductómetro. Mediciones de precisión con cinta 52
§ 20. Verificación de reglas y cintas: Comprobación directa. Comparador para cintas de acero y cadenas. Comparador para reglas y cintas. 58
§ 21. Precisión de las mediciones directas de distancias: Acumulación de errores. Resultado experimental de un estudio sobre propagación de errores. Error medio en las dobles mediciones. Límite de los errores tolerables. Observación 66
§ 22. Compensación de las mediciones de longitud 74
§ 23. Rueda, podómetro, velocidad de marcha: Medición de distancias a pasos. 76
§ 24. Mediciones por abscisas y ordenadas. Croquis 80
§ 25. Levantamientos topográficos: Red de líneas paralelas. Prolongación y medición de alineaciones a través de obstáculos 84

Págs.

§ 26. Dispositivos empleados en los trabajos de gabinete (desarrollos): Levantamiento por coordenadas. Cuadriculador Coordinatógrafo de Coradi. Ortógrafo. Aparato de Cemus. Escala corredera de Homeyer. Escala universal de Waue. Reductor de Schleicher 87
§ 27. Coordinatógrafo polar 94
§ 28. Pantógrafo 96

Capítulo III

Reglas de cálculo y máquinas de calcular

§ 29. Reglas de cálculo logarítmicas: Círculos y ruedas de cálculo. Regla de cálculo con escalas subdivididas. Tablillas de cálculo y reglas tubulares 102
§ 30. Máquina de calcular de Burkhardt: Máquinas de rodillos modernas. Máquinas de calcular «Tim» y «Unitas» 108
§ 31. Máquinas de calcular Odhner 113
§ 32. Máquinas de calcular de Steiger-Egli y de Hamann: Máquina «Millionär». Máquina «Mercedes-Euklid». Máquinas «Hamann-Manus» y «Hamann-Automat». . . . 116
§ 33. Reseña histórica de las máquinas de calcular: Máquina de sumar, de Pascal. Máquina de calcular, de Leibniz. Máquinas de calcular del siglo XIX 123

Capítulo IV

Cálculo de coordenadas

§ 34. Definiciones y generalidades: Sistema de coordenadas empleado en el Mapa nacional de España 130
§ 35. Fórmulas fundamentales del cálculo de coordenadas: Comprobación del cálculo del acimut. Notaciones gráficas 132
§ 36. Tablas y formularios: Tablas de logaritmos. Tablas de coordenadas. Tablas trigonométricas. Formularios. Cifras decimales. Valor del radiante ρ 139
§ 37. Cambio de coordenadas: Transformación de las x y las y. Cambio y transformación de incrementos Δx y Δy 142
§ 38. Cálculo de coordenadas en una red: Puntos intercalados. Puntos laterales. Puntos de intersección. Puntos determinados por intersección de arcos. Cuadrilátero con diagonales. 147

Capítulo V

Cálculo y división de superficies

§ 39. Área en función de coordenadas rectangulares: Fórmulas generales. Casos particulares, el triángulo y el cuadrilátero. Corrección por causa de la curvatura terrestre. Influencia de la altura. Método de cálculo de Elling 154
§ 40. Determinación gráfica del área de una figura: Tabla hiperbólica de Kloth. Planímetro de Waues. Variaciones del papel 161
§ 41. Planímetro polar de Amsler: Planímetro de compensación. Planímetro polar para polo exterior e interior. Planímetro-pantógrafo. Planímetro de rueda deslizante. 165
§ 42. Planímetro de rodillos de Coradi: Planímetros de rodillos. Planímetro de disco y rodillos. Planímetro esférico de rodillos. Transformación de los planímetros polares en planímetros de rodillos 173
§ 43. Planímetro polar de suspensión: Planímetro polar de disco. Planímetro polar esférico 178
§ 44. Planímetro de varilla de Prytz 181
§ 45. Precisión de las mediciones con planímetro 185
§ 46. Reseña histórica del planímetro: Planímetro de Oppikofer. Planímetro de Wetli. Planímetro polar 188

Págs.

§ 47. Precisión en la medición de superficies: Error tolerable. Compensación de áreas. . 192
§ 48. Fórmulas especiales para triángulos y cuadriláteros 196
§ 49. División de un triángulo 198
§ 50. División de un cuadrilátero por una recta paralela a una dirección dada 199
§ 51. División de un cuadrilátero por una recta que pase por un punto dado. 202
§ 52. División de cuadriláteros y polígonos en general, por rectas que determinen sobre los lados partes proporcionales: Cálculo del triángulo de convergencia *M*. Generalización a los polígonos. Fórmulas aproximadas 205
§ 53. Rectificación de linderos: Partición de terrenos en general. 211

Capítulo VI

Elementos principales de los instrumentos topográficos

§ 54. El nivel: Nivel tubular. Nivel esférico 215
§ 55. Sensibilidad del nivel 216
§ 56. Empleo del nivel: Nivel de reglilla. Nivel caballero. Nivel de plataforma (acimutal). Nivel reversible 220
§ 57. Precisión de los niveles: Influencia de la temperatura y de la presión atmosférica. Acciones químicas en los niveles 227
§ 58. Refracción de la luz a través de superficies esféricas: Refracción a través de dos superficies esféricas sucesivas. Construcción gráfica 230
§ 59. Lentes: Lentes convergentes o convexas. Lentes divergentes o cóncavas. Cálculo de la distancia focal en función de los radios de curvatura. Combinación de dos lentes. Lentes infinitamente delgadas 235
§ 60. Aberraciones de las lentes: Aberración esférica. Aberración cromática 239
§ 61. Diafragmas. 241
§ 62. Refracción de la luz a través de los prismas: Desviación mínima. Prisma acromático. 243
§ 63. El órgano de la visión en el hombre: Acomodación del ojo. Agudeza visual. Fisiología del ojo humano. Gafas. 245
§ 64. Lupas o lentes de aumento: Diafragmas de las lupas. Distintas formas de lupas . . 250
§ 65. Anteojo simple: Aumento del anteojo. Campo visual de un anteojo. Claridad. Retículo y línea de mira o eje de colimación 253
§ 66. Anteojo de objetivo y ocular compuestos: Objetivo. Ocular de Huygens. Ocular de Ramsden. Ocular ortoscópico de Kellner. Ocular terrestre. Anteojo holandés o de Galileo. Anteojo prismático. 260
§ 67. Anteojo con lente enfocadora móvil 267
§ 68. Microscopio compuesto. 273

Capítulo VII

El teodolito

§ 69. Definición y descripción del teodolito: Teodolito simple. Teodolito repetidor. Teodolito simple con círculo acimutal giratorio (teodolito reiterador). Eje horizontal o de giro del anteojo. El anteojo. Niveles. Fijación del teodolito en el trípode . . 276
§ 70. Diversos modelos de teodolitos: Teodolito topográfico pequeño, de Wolz. Teodolito topográfico tipo pequeño, con microscopios lectores, de Otto Fennel Söhne Teodolitos de Hildebrand. Teodolitos de Bamberg. Teodolito Zeiss, con microscopios de escala interior. Teodolito Breithaupt. Teodolitos Zeiss-Wild. Teodolito de círculos dentados, de Heyde 285
§ 71. Nonio: Precisión de las lecturas con nonios. Datos históricos 293
§ 72. Microscopios lectores: Microscopios de hilos o de estima. Microscopios de escala. Microscopio con nonio. Microscopio micrométrico. Microscopio lector de Zeiss-Wild. 296
§ 73. Accesorios para la puesta en estación de los teodolitos: Plomadas. Centrado exacto del teodolito. Centrado con la base nivelante de los teodolitos Breithaupt. Centrado óptico. Datos históricos 304

Págs.

§ 74. Telémetros de doble imagen: Telémetro de doble imagen de Kern-Aregger. Telémetro de Fennel. Telémetro de Wild. Telémetro de Breithaupt 309
§ 75. Telémetro de Zeiss-Bosshardt 316
§ 76. Errores de los ejes en el teodolito 319
§ 77. Notas sobre los errores axiales de los teodolitos: Eliminación de estos errores. Orden de sucesión de verificaciones y correcciones. Teodolito con varios niveles. Precisión excesiva o inútil 324
§ 78. Cálculo del efecto de los errores axiales del teodolito: Fórmulas diferenciales de trigonometría esférica. Error de colimación. Error del eje horizontal, o de giro del anteojo. Error del eje vertical. Acción o efecto combinado de los tres errores. Fórmulas de los errores para un ángulo observado 325
§ 79. Anteojo excéntrico 330
§ 80. Excentricidad de la alidada: Variabilidad de la excentricidad. Eliminación de la excentricidad dando la vuelta de campana al anteojo. Influencia de la excentricidad sobre los nonios. Resumen 332
§ 81. Cálculo de la excentricidad de la alidada 335
§ 82. Errores de división de los círculos: Examen de un círculo graduado. Error de división en los trazos diametralmente opuestos. Determinación de los errores sistemáticos de división por mediciones reiteradas 339
§ 83. Medición de un ángulo horizontal o acimutal: Método de reiteración. Método de repetición. Errores en el método de repetición. Errores inherentes al método de repetición 342
§ 84. Cuidados en el manejo del teodolito 347

Capítulo VIII

Triangulación

§ 85. Generalidades 349
§ 86. Principios fundamentales para el cálculo de una triangulación 352
§ 87. Señalamiento de vértices: Instrucciones oficiales para el señalamiento de vértices en Alemania 354
§ 88. Medición de ángulos: Orientación de las visuales. Método de repetición 362
§ 89. Reducción de los ángulos al centro de la estación: Reducción al centro de un punto de mira Comprobación de los cálculos 366
§ 90. Casos particulares de reducción al centro: Proyecciones. Medición de triángulos auxiliares. Reducción al centro mediante puntos auxiliares. Precisión en la reducción al centro. Empleo de las miras 371
§ 91. Ejemplo de una triangulación: Red principal. Fijación de puntos o vértices auxiliares 380
§ 92. Intersección directa con dos visuales: Cálculo de las coordenadas por intersección de dos visuales, según el Catastro prusiano. Empleo de las máquinas de calcular. 387
§ 93. Precisión en los métodos de intersección: Intersección directa con medición de acimutes. Intersección lateral 393
§ 94. Problemas de intersección inversa: Solución de J. T. Mayer. Solución de Kästner Punto auxiliar de Collins. Solución gráfica de Cassini. Reducción de la intersección inversa a la directa 396
§ 95. Resolución por coordenadas del problema de intersección inversa: Formación de un estado de acimutes. Punto auxiliar de Collins. Formulario del Catastro prusiano. 401
§ 96 Cálculo de la intersección inversa con máquina de calcular; Intersección inversa, según Delambre 407
§ 97. Precisión en la intersección inversa: Círculo peligroso. Error medio en la determinación de *P*. Reseña histórica del problema de la intersección inversa. 411 417
§ 98. Método de intersección inversa aplicado a tres puntos 422
§ 99. Método de intersección recíproca 425

Págs.

§ 100. Fijación de dos puntos (problema de Hansen): Solución indirecta del problema. Solución directa. Solución de Delambre. Punto auxiliar de Collins. Precisión en la fijación de dos puntos 425
§ 101. Casos particulares del problema de Hansen: Determinación de un par de puntos con tres puntos dados. Determinación de un par de puntos con cuatro puntos dados . 431
§ 102. Intersección con figura de errores: Figura de errores para la intersección directa . 435
§ 103. Figura de errores para la intersección inversa 440
§ 104. Elección precisa de puntos en las figuras de errores: Reseña histórica sobre la compensación gráfica de la posición de un punto 444
§ 105. Ejecución de una triangulación topográfica 447
§ 106. Triangulación de poblaciones 451

Capítulo IX

Poligonales

§ 107. Fórmulas fundamentales: Poligonal independiente. Enlace de una poligonal por su punto de partida con un sistema de coordenadas dado. Enlace de una poligonal con un sistema de coordenadas por sus dos puntos extremos (origen y final) . . 454
§ 108. Ejemplo de cálculo de una poligonal: Cálculo de coordenadas de una poligonal con tabla de logaritmos. Precisión de los cálculos. Tablas de coordenadas. Máquinas de calcular. Reseña histórica 458
§ 109. Error longitudinal y transversal. Límites tolerables: Reducción longitudinal de la red de poligonación. Error de cierre tolerable 466
§ 110. Compensación de las poligonales: Errores groseros en una poligonal 471
§ 111. Red de poligonación. 474
§ 112. Señalamiento de los vértices de poligonales: Vértices de poligonaciones en el campo y en poblaciones 478
§ 113. Medición de los ángulos en las poligonales: Empleo de tres trípodes 482
§ 114. Medición de los lados de una poligonal: Interposición de obstáculos. Reducidas al horizonte. Telémetros 485
§ 115. Consideraciones sobre las poligonales: Enlace o cierre de una poligonal en un vértice topográfico o geodésico inaccesible. Nudo de poligonales. Eliminación de los lados cortos en las poligonales. Omisión de puntos. 486
§ 116. Error angular medio: Error medio de los ángulos de la poligonal. Error medio de un acimut 489
§ 117. Errores en las poligonales casi rectilíneas de lados iguales: Error tolerable en el cierre de las poligonales 492
§ 118. Compensación exacta de las poligonales 500
§ 119. Ejemplo de una compensación de poligonal 506

Apéndice

Tablas

Reducción para la dilatación térmica o para pequeños errores de división 513
Reducción al horizonte de longitudes inclinadas 514
Conversión de divisiones sexagesimales en centesimales 515
Conversión de divisiones centesimales en sexagesimales 516
Promedio de cuatro valores angulares . . . . . 517 y 518
El número ρ y valor aproximado para $\frac{r\,a}{\rho}$ 519
Millas y su equivalencia 520
Medidas antiguas de España y América . . . . . 520 a 522

Instrucciones

Resumen de las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral . . . . . 523 a 529