

SEGUNDA PARTE

**ALTIMETRÍA, TAQUIMETRÍA
FOTOGRAMETRÍA Y REPLANTEOS**

§ 1. Introducción

En las operaciones topográficas estudiadas en el primer tomo (Planimetría), no desempeñaba papel alguno la forma real del terreno, pues para estas mediciones sólo se consideraba la proyección de la superficie del terreno sobre la del mar, es decir, sobre una superficie esférica, representativa de aquélla, o sobre un plano horizontal. El objeto de la Altimetría es representar la verdadera forma del terreno, en mayor o menor extensión, haciendo para ello las mediciones convenientes.

En Topografía y, en general, en Geografía, se entiende por altura o altitud de un punto su elevación sobre la superficie del mar supuesta en reposo, es decir, su «altura sobre el mar», que es como ordinariamente se expresan las altitudes en Topografía.

Para medidas altimétricas de precisión no se toma como referencia la superficie del mar, sino otra definida con más exactitud y llamada *superficie de nivel*, que es una superficie que, pasando por un determinado punto, se conserva siempre perpendicular a la dirección de la gravedad. Como superficies de nivel conocemos ya la superficie del mar en reposo y la del geoide, pero la altura de esta última no es tan exacta como requieren las medidas altimétricas de precisión, por lo cual, en casi todos los países, se toma como referencia una superficie de nivel que coincide muy aproximadamente con la del mar en reposo, y que queda perfectamente definida por una cierta señal permanente. En España se toma como superficie de comparación la del nivel medio de las aguas del mar en Alicante, suponiendo esta superficie prolongada por toda la extensión de nuestro país.

De este modo sólo tendrán altitud o cota negativa los puntos situados bajo el nivel del mar. A partir de dicha superficie de cota cero, ha tomado el Instituto Geográfico español redes de nivelación de gran precisión, cuya exactitud está comprobada por toda clase de operaciones adecuadas. Estas redes, llamadas de «nivelación de precisión», van siguiendo detalles de importancia, como carreteras, ferrocarriles, etc., y en muchos puntos se marcan con planchas circulares metálicas con las iniciales N. P. (nivelación de precisión) y un número, que es el de orden en la lista que obra en el Instituto Geográfico, donde consta la altitud exacta de cada punto. Además de estas señales de toda precisión hay otras, con la cota ya marcada, de menos precisión, pero siempre referidas a las primeras. A la superficie de nivel se refieren todas las altitudes, tomando aquélla como de cota o altura cero.

Los métodos de medición de alturas se reducen en realidad a determinaciones de diferencias de nivel; para hallar la altitud de un punto sobre el nivel del mar, se determina su diferencia de altura con una señal de nivelación próxima, cuya altitud sobre el nivel del mar sea conocida. Los métodos para hallar las diferencias de nivel, es decir, para hacer mediciones altimétricas, se designan en general con el nombre de *nivelación*, y se clasifican en tres grupos: *nivelación geométrica o por alturas*, *nivelación trigonométrica o por pendientes* y *nivelación barométrica*.

La nivelación geométrica consiste en medir directamente la diferencia de nivel entre dos puntos próximos. La trigonométrica determina la diferencia de nivel mediante el cálculo de distancias y ángulos cenitales observados, aplicándose este procedimiento a extensiones bastante grandes, como, por ejemplo, en una red de triangulación topográfica. La nivelación barométrica consiste en calcular la diferencia de nivel entre dos puntos, en función de la diferencia de presión atmosférica observada en ambos.

Estos tres métodos son de desigual precisión, siendo el más preciso el primero, al cual sigue en exactitud el segundo, y después el tercero, que es el menos preciso de todos. Por esta razón los procedimientos operatorios son de la mayor escrupulosidad en la nivelación geométrica, de menos en la trigonométrica y menor aún en la barométrica.

En los tres capítulos siguientes vamos a estudiar los tres métodos de nivelación que acabamos de definir.

CAPÍTULO I

Nivelación geométrica o por alturas

§ 2. Método operatorio

Se entiende por nivelación geométrica el sistema de mediciones altimétricas consistente en determinar la diferencia de altitud entre dos puntos observados, mediante visuales horizontales dirigidas a miras verticales, como se ve en las figuras 1 y 2.

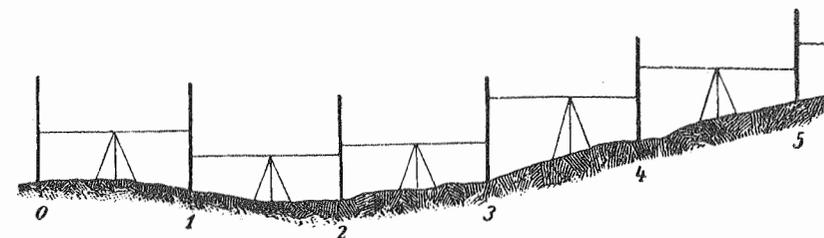


Fig. 1

En la figura 1 se va colocando la mira sucesivamente en los puntos 0, 1, 2, ...; como el cero de la graduación de la mira está en el punto inferior de la misma, la visual horizontal entre dos puntos consecutivos da directamente la diferencia de altura entre ambos, igual a la diferencia entre las correspondientes lecturas de mira. Sumando algebraicamente estas diferencias parciales o intermedias, se deduce el desnivel entre puntos situados a cualquier distancia, por grande que ésta sea.

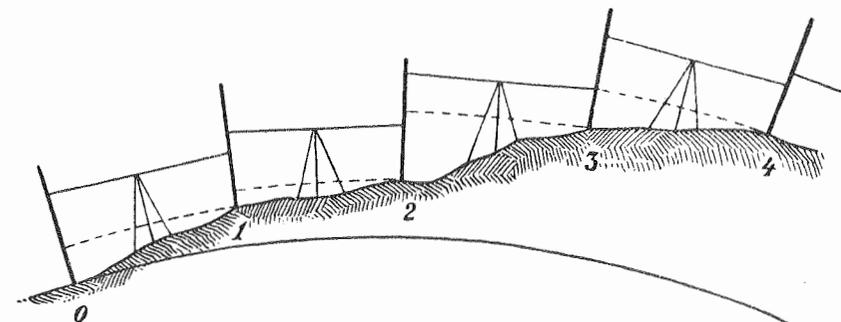


Fig. 2

En la figura 1 se da por supuesto que las verticales de todos los puntos son paralelas entre sí, cosa admisible únicamente si se hace caso omiso de la curvatura de la superficie terrestre.

Considerando la Tierra como una esfera, se comprende fácilmente que la visual horizontal entre cada dos puntos (fig. 2) da la diferencia de altura entre ambos, con tal que la visual se dirija desde el medio de la distancia que los separa.

Si se considera la Tierra como un elipsoide, resulta mucho más complicada la teoría de la nivelación; más adelante trataremos con extensión de esta hipótesis, limitándonos ahora a indicar que para todas las nivelaciones necesarias en los trabajos técnicos corrientes (vías férreas, etc.), la corrección debida a la forma elipsoidal de la Tierra cae fuera

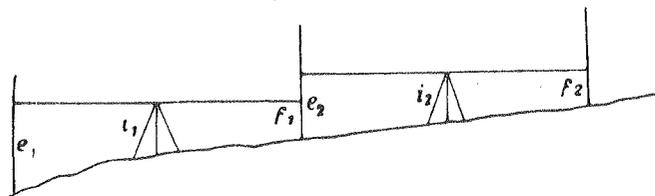


Fig. 3

de los límites de apreciación, no siendo, por tanto, ni práctico ni conveniente tenerla en cuenta en dicha clase de trabajos.

Para la práctica del procedimiento nivelatorio representado en las figuras 1 y 2 se necesitan, en esencia, dos útiles: el

aparato nivelador (equialtimetro), llamado simplemente *nivel* (con su trípode), para dirigir las visuales horizontales, y las *miras*, para materializar las líneas verticales sobre las cuales se leen las alturas.

En la figura 3 se ven dos posiciones o estaciones del nivel i_1 e i_2 ; en la primera se leen las alturas e_1 y f_1 , correspondientes a las posiciones de la mira atrás y adelante del nivel (niveladas de espalda y de frente); a la segunda estación corresponden las dos lecturas de mira e_2 y f_2 . Las dos diferencias de nivel serán:

$$h_1 = e_1 - f_1 \quad h_2 = e_2 - f_2,$$

y si se supone que se hacen más estaciones de nivel, la diferencia de altitud entre el primer punto y el último será:

$$[h] = h_1 + h_2 + h_3 + \dots = e_1 - f_1 + e_2 - f_2 + e_3 - f_3 + \dots \quad (1)$$

Esta sucesión de desniveles constituye un *itinerario de nivelación*, mediante el cual se halla la altura del último punto conociendo la del primero; llamando a estas alturas H_n y H_a , se tiene:

$$H_n = H_a + h_1 + h_2 + h_3 + \dots \quad (2)$$

Los puntos en que se coloca la mira, que generalmente sirven sólo para determinar la altura del último punto del itinerario, se llaman *puntos observados*, o *puntos de mira*, llamándose *estaciones* a los puntos en que se va colocando el nivel.

La distancia entre cada dos puntos de mira consecutivos, cuyo desnivel se mide directamente, es siempre reducida, de unos 100 metros, resultando así para la visual una longitud de 50 metros; como el método anterior puede repetirse todas las veces que se quiera, se tiene que con el sistema de itinerarios puede nivelarse no ya una línea de más o menos kilómetros, sino muchas líneas a través de países y continentes, determinando alturas de montañas y la configuración real de la superficie recorrida.

Cuando se hacen de este modo cientos y miles de estaciones, se puede temer un error final, por acumulación de errores parciales, que haga inadmisibles la nivelación practicada; y en efecto, este temor, que tuvo durante bastante tiempo una importancia secundaria, pasó a constituir una idea fundamental en los últimos sesenta años del siglo XIX, principalmente por la experiencia adquirida con el trazado de líneas férreas, habiéndose perfeccionado de tal modo el método operatorio, que actualmente el sistema de mayor precisión en las operaciones de nivelación lo constituye el de itinerarios de visuales cortas y horizontales sobre miras verticales, es decir, el método llamado de nivelación por alturas.

§ 3. Itinerarios de nivelación

Consideremos en primer lugar el caso general de una nivelación entre dos puntos, situados a distancia cualquiera, como sucede en la práctica al fijar señales permanentes de nivelación partiendo de otras de cota fija. Más adelante estudiaremos los instrumentos (niveles) empleados en estas operaciones y las miras correspondientes, limitándonos ahora a la nivelación propiamente dicha y al cálculo de la misma.

La figura 4 representa un itinerario de esta clase con las lecturas que van haciéndose, tanto de espalda, e , como de frente, f . A continuación puede verse el formulario empleado (registro de campo), con las lecturas y cálculos de desniveles, correspondiente a la figura 4.

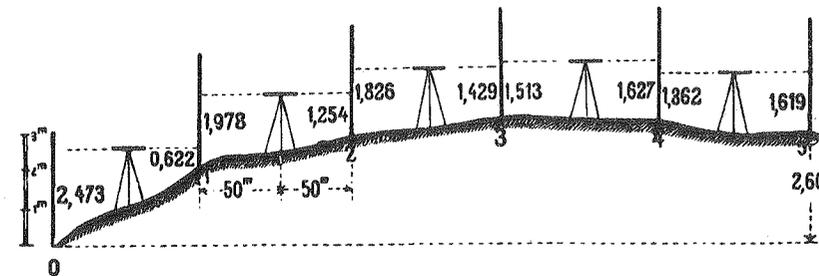


Fig. 4. — Itinerario de nivelación

Registro de campo (figura 4)

Puntos de mira	Longitud de la visual Metros o pasos	Lecturas		Diferencias de altura $h = e - f$	Altitud sobre el nivel cero	Observaciones
		e	f			
0	50 m	2,473	+ 1,851	56,297	Señal de nivelación
1	50 m	0,622		58,148	
1	50 m	1,978	+ 0,724	
2	50 m	1,254		58,872	
2	50 m	1,826	+ 0,397	
3	50 m	1,429		59,269	
3	50 m	1,513	- 0,114	
4	50 m	1,627		59,155	
4	50 m	1,362	- 0,257	
5	50 m	1,619		58,898	
	500 m	+ 9,152		+ 2,972	- 56,297	
		- 6,551		- 0,371	+ 58,898	
		+ 2,601		+ 2,601	+ 2,601	

No es preciso dar explicación alguna sobre este registro, cuya claridad es manifiesta, con su cálculo y comprobaciones. Cuando no son necesarias las altitudes de los puntos intermedios, sólo se calculan las diferencias y la altitud del último punto. Para ahorrar espacio, se pueden colocar una sobre otra las dos lecturas de espalda, e , y de frente, f .

En el Instituto Geográfico español se emplea un formulario parecido; la diferencia estriba en que por emplearse en éste la mira parlante de dicho Centro, hay que consignar en el registro de campo el color del decímetro observado, y en que en vez de anotar los puntos de mira se anotan los de estación de nivel, no haciendo constar la longitud de visual, que reglamentariamente ha de ser menor de 100 m; en las columnas cuarta y sexta se anotan las lecturas hechas desde cada estación respectivamente a la mira de espalda y a la de frente, tal como se ve a continuación:

Registro de nivelación por alturas (Instituto Geográfico de España)

Estaciones del nivel	Diferencias en + metros	Nivelada de espalda		Nivelada de frente		Diferencias en - metros	Altitudes metros	Notas
		Colores	Metros	Colores	Metros			
21	1,877	Rojo	2,691	Rojo	0,814		663,316	Señal pintada □ en un hito
22	0,735	Rojo	1,403	Negro	0,668		665,193	
23		Rojo	0,817	Negro	2,195	1,378	663,815	
24		Rojo	0,572	Negro	2,123	1,551	662,264	
25	0,932	Blanco	2,284	Blanco	1,352		663,196	

Complemento aritmético. El cálculo con los complementos aritméticos (muy empleado en el cálculo logarítmico), introducido en los métodos de nivelación por el general Schreiber, ha reportado grandes ventajas en los itinerarios de nivelación por alturas.

Para este uso, las miras (como veremos más adelante) llevan una segunda numeración con el signo \times delante de cada número, correspondiente al complemento aritmético (exceso sobre 10) de cada lectura. Por ejemplo, para la lectura 2,790 se tiene:

$$\times 7,210 = 7,210 - 10 = -2,790. \quad (1)$$

Los complementos aritméticos tienen, como se ve, la significación de números negativos, y la sustracción de un número equivale a la adición de su complemento aritmético, es decir, que el signo \times representa en realidad -10 .

En la figura 5 se ve una estación de nivel con las visuales de espalda y de frente, donde están anotadas no sólo las lecturas ordinarias sino sus complementos aritméticos.

Si se conviene en leer en la nivelada de espalda el número simple (sin el signo \times) y en la de frente el complemento (con el signo \times), se tiene la diferencia de alturas, en el caso representado por la figura 5:

$$2,790 + \times 7,642 = 10,432 - 10 = 0,432. \quad (2)$$

mientras que haciendo sólo las lecturas directas se tendría:

$$2,790 - 2,358 = 0,432 \quad (3)$$

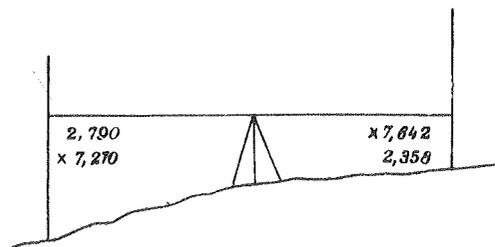


Fig. 5

Lectura de las miras con complemento aritmético

Las diferencias negativas de alturas (desniveles negativos) deben, pues, considerarse, en este sistema, como complementos aritméticos, y así deben tenerse en cuenta en el cálculo de altitudes.

Como aclaración a lo expuesto, damos en el registro siguiente la observación y

cálculo de la nivelación representada por la figura 4, empleando los complementos aritméticos.

La comprobación por sumas se hace del mismo modo que en el caso anterior. La suma de las lecturas de frente f , da ahora 43,449, pero en ella entra cinco veces el signo \times , es decir, que se ha sumado -50 , luego debe escribirse $43,449 - 50$, o sea, $3,449 - 10 = \times 3,449$. También podría ponerse $\times 93,449$, dando al signo \times el significado -100 .

Registro de campo (figura 4)

Puntos de mira	Longitud de la visual Metros o pasos	Lecturas		Diferencias de altura $h = e - f$	Altitud sobre el nivel cero	Observaciones
		e	f			
0	50 m	2,473	1,851	56,297	Señal de nivelación
1	50 m	$\times 9,378$			
1	50 m	1,978	0,724	58,872	
2	50 m	$\times 8,746$			
2	50 m	1,826	0,397	59,269	
3	50 m	$\times 8,571$			
3	50 m	1,513	$\times 9,886$	59,155	
4	50 m	$\times 8,373$			
4	50 m	1,362	$\times 9,743$	58,898	
5	50 m	$\times 8,381$			
	500 m	9,152	$\times 3,449$	2,601	-56,297	
		<u>2,601</u>			+58,898	
					+2,601	

También en este registro pueden anotarse las lecturas de espalda e y de frente f , una debajo de la otra, y disponer en una sola columna las diferencias de altura y las altitudes.

Los complementos aritméticos pueden servir también para comprobar las lecturas ordinarias. Para ello, en la nivelada de espalda, además del número ordinario se lee también su complemento aritmético (sin anotarlo en el registro), y las dos lecturas, prescindiendo del signo \times , deben sumar 10. La misma lectura doble se hace para la nivelada de frente, teniéndose así una excelente prueba para las lecturas de mira.

Mejor comprobación se logra con el empleo de las miras reversibles, y mejor aún con la doble nivelación de que trataremos en el párrafo 13.

§ 4. Perfiles longitudinales

Los desniveles de una línea o itinerario de nivelación (vía férrea, carretera, canal de riego, etc.), se representan según un perfil longitudinal que aparece en el plano como si todos sus trozos estuvieran en la misma dirección, es decir, en un mismo plano.

El levantamiento de un perfil longitudinal se divide en dos partes: primera, nivelación propiamente dicha, y segunda, cálculo de altitudes.

Para la nivelación, se divide la línea que se trata de representar en trozos iguales (de 20 m, 50 m, 100 m, etc., según las circunstancias), que se marcan y se numeran, al objeto

de fijar de modo seguro los puntos de mira. Para nivelar carreteras y vías férreas ya construidas, se toman como estaciones los hitos numerados (kilómetros, hectómetros, etc.) que hay en sus bordes. Para señalar los puntos de estación donde no lo estén, se emplean estacas fuertes con la cabeza redondeada (o con un clavo o tornillo fijado en la misma). Además de estos puntos principales, se marcan con estacas aquellos otros intermedios en

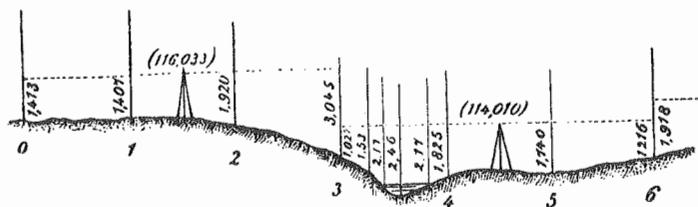


Fig 6. - Perfil longitudinal con puntos intermedios

que haya cambio de pendiente. En los perfiles de gran longitud, se fijan a distancias convenientes señales permanentes, como ya veremos en los párrafos 12 y 20 a 22.

En la figura 6 damos un ejemplo de nivelación

de perfil longitudinal con puntos intermedios (secundarios); la tabla que sigue es el registro de campo correspondiente a este ejemplo.

Registro de campo (figura 6)

Puntos observados	Lecturas		Altitud	Horizonte	Observaciones
	e	f			
⊙ (0)	1,413		114,620 m	116,033 m	Punto inicial
(1)		1,407	114,626		
(2)		1,920	114,113		
⊙ (3)		3,045	112,988		(Cambio de estación)
⊙ (3)	1,022		112,988 m	114,010 m	
(3) + 8,0 m		1,530	112,480		Cambio de pendiente
(3) + 12,2		2,170	111,840		Margen del cauce
(3) + 17,0		2,460	111,550		Fondo del cauce
(3) + 25,0		2,170	111,840		Margen del cauce
(4)		1,825	112,185		
(5)		1,740	112,270		
⊙ (6)		1,216	112,794		(Cambio de estación)
⊙ (6)	1,918		112,794 m	114,712 m	
..		

En este ejemplo hay algunos puntos de paso (cambios de estación), como son el ⊙3 y el ⊙6 (fig. 6) y varios intermedios o destacados, para los cuales basta leer el centímetro de aproximación.

La cota de arranque del punto 0 se supone conocida e igual a 114,620 sobre el nivel cero; este es el primer dato que se anota, y a continuación la primera lectura 1,413, obteniéndose así el primer horizonte:

	$114,620 + 1,413 = 116,033$
a continuación se tiene	$116,033 - 1,407 = 114,626$
y del mismo modo:	$116,033 - 1,920 = 114,113$
	$116,033 - 3,045 = 112,988$
nuevo horizonte	$112,988 + 1,022 = 114,010$
	$114,010 - 1,530 = 112,480$

El cálculo varía un poco cuando se leen los complementos aritméticos en los puntos intermedios y en la nivelada de frente, pues basta sumar para obtener tanto el horizonte como las altitudes.

Cuando se toman muchos puntos intermedios (§ 6), es mejor observar primero los puntos de paso y después los intermedios o destacados; al terminar, se hace una lectura de comprobación al último punto de mira de frente. También es conveniente, para comprobar dos estaciones consecutivas, determinar dos veces un mismo punto de comprobación.

Estos cálculos, al menos en cuanto se refiere a los puntos de paso o de cambio de estación y a los de comprobación, se hacen, de ordinario, en el campo, según el registro anterior, y después se calculan en el gabinete, primero, los horizontes sucesivos y las altitudes de los puntos de paso; después se hacen las sumas de comprobación como se vio en los registros anteriores y, finalmente, se calculan las altitudes de todos los puntos intermedios. Para los puntos de paso se aproxima el cálculo al milímetro, y para los intermedios basta con aproximar al centímetro.

Trazado de los perfiles. Una vez calculadas las altitudes de todos los puntos, ordinariamente referidas a un nivel convenientemente elegido, se toman aquellas en papel milimétrico o papel especial para perfiles. Cuando hay que dibujar un perfil longitudinal con otros transversales (§ 5), se toma la misma escala para representar las altitudes de ambos perfiles. En todos los países existen Instrucciones oficiales sobre escalas, dibujo, etc., según los distintos servicios, a las cuales hay que atenerse en el trazado de los perfiles. En España se tienen en las «Instrucciones para los trabajos topográficos» del Instituto Geográfico y Catastral.

§ 5. Perfiles transversales

Los perfiles perpendiculares a los longitudinales se llaman transversales y se levantan a escala mayor que aquéllos; estos perfiles tienen especial importancia en los estudios de caminos y canales.

Los perfiles se señalan primero con jalones y después con miras o cinta métrica, y con un nivel se hace su levantamiento.

Cuando los perfiles transversales son muy uniformes, se levantan exactamente igual que los longitudinales y se anotan las distancias y alturas leídas en un registro análogo al empleado para aquéllos. Todas las lecturas deben aproximarse, en general, al centímetro. Pero si los perfiles transversales presentan muchas irregularidades (caminos, arroyos, linderos, hitos, etc.), se dibujan todos los detalles en un *croquis*, sobre el cual se anotan también todas las mediciones y lecturas hechas durante el levantamiento.

El perfil transversal se dibuja de modo que la izquierda y la derecha sean las del perfil longitudinal, suponiendo que se recorre éste en el sentido de su numeración ascendente, como se ve en el ejemplo representado en la figura 7.

También se pueden numerar los puntos de los perfiles transversales, y en el croquis se anotan solamente estos puntos y las medidas planimétricas (distancias horizontales), anotando las lecturas de nivelación en el registro de campo, idéntico al de los perfiles longitudinales.

En la figura 7 están todas las medidas aproximadas al decímetro solamente, pero es mejor aproximar las alturas al centímetro, mientras que para las distancias horizontales basta en general con el decímetro. El nivel se coloca en un punto, previamente determi-

Para el relleno de estas redes, deben trabajar dos operadores a la vez; el primero lleva el plano y coloca los portamiras, señala los puntos que no estén marcados en el plano, ya sea a pasos, con una brújula de bolsillo, etc., y, en general, dirige toda la operación. El segundo operador se limita a hacer con el nivel las lecturas de mira y a anotarlas en el registro de campo (véase pág. 8). Los números de los puntos del plano y los del registro deben corresponderse, y mediante signos convencionales se comprueba esta correspondencia a cada cinco o diez puntos.

Después, en gabinete, se calculan las altitudes en el mismo registro de campo, con lo cual queda terminada la nivelación. El trazado de las curvas de nivel se hace como en el método taquimétrico de que más adelante trataremos. En realidad, todo el procedimiento anterior es una taquimetría simplificada. Como reglas generales, deben observarse las siguientes: señalamiento en el plano de los puntos de mira de la nivelación, e inscripción ordenada de todos los números (los de orden, con lápiz, a la izquierda del punto, y los de altura, a la derecha). En los itinerarios de nivelación secundarios o de relleno, se aproximan las lecturas de mira al centímetro, y en los puntos corrientes del terreno, sólo al decímetro. Para la observación de los puntos de estos itinerarios, se sitúa el nivel en el punto medio de la distancia entre cada dos consecutivos, dado por supuesto que se hacen estaciones alternas.

En terreno regularmente accidentado pueden levantar dos operadores, en pocos días y trabajando del modo indicado, una superficie de 1 kilómetro cuadrado, con 500 a 1000 puntos observados; el trabajo de cálculo es insignificante.

Cuando se encuentran desniveles mayores, pueden emplearse miras alargadas. Si el terreno es francamente montañoso y abrupto, este método resulta muy fatigoso y de dudosa exactitud, por lo cual debe ir unido a un levantamiento taquimétrico.

Cuando no basta la determinación de altitudes de los puntos existentes en el plano, ni aun tomando más puntos fijados a pasos y con la brújula de bolsillo, hay que trazar una red de itinerarios, que a ser posible debe ser de mallas cuadradas, con lados de 20 a 50 m, según el terreno, refiriendo algunos vértices de esta red a puntos del plano, con lo cual puede situarse toda la red en el plano de manera precisa. Se señalan todos los puntos con estacas, que se numeran, y se procede a la nivelación del modo ya conocido. Esta clase de nivelación se presta admirablemente a la preparación de terrenos para mejoras agrícolas, regadíos, etc.

§ 7. Niveles

Los instrumentos empleados en la nivelación por alturas, llamados en general equialtímetros, consisten, en esencia, en un nivel de aire y un anteojo, cuyos ejes son paralelos entre sí, de modo que, al calar el nivel, queda horizontal el eje de colimación del anteojo.

Hay muchas clases de niveles, de los cuales damos a continuación las principales características.

Clasificamos los niveles siguiendo dos criterios, a saber:

A. Según el modo de lograr la horizontalidad del eje óptico del anteojo:

1. Por los tres tornillos nivelantes del aparato, que sirven para colocar verticalmente el eje de éste, con lo cual quedan dispuestos perpendicularmente a aquél los ejes del nivel y del anteojo. Al girar el aparato alrededor de su eje vertical, debe estar siempre calado el nivel (figs. 9, 12 y 14).

2. La horizontalidad se logra con un *tornillo de elevación*, por lo cual hay que corregir el nivel para cada visual.

La disposición 1 es muy frecuente; pero para instrumentos pequeños, resulta más cómoda y conveniente la 2.

B. Según la disposición relativa de anteojo y nivel:

1. Anteojo y nivel fijos entre sí y al aparato (figs. 9, 10 y 17).
2. Anteojo con collares, giratorio en sus cojinetes, y nivel caballero o nivel fijo al anteojo (figs. 11 y 12).
3. Anteojo con collares, giratorio en sus cojinetes, y nivel reversible (figs. 13, 15 y 19).
4. Anteojo con collares, giratorio en sus cojinetes, y nivel fijo en el soporte del anteojo (fig. 14).

La disposición 1 con tornillo de elevación es muy empleada, a causa de la sencillez del aparato correspondiente. Para nivelaciones de precisión son preferibles las disposiciones 2 y 3, por ser en ellas más fácil la comprobación y corrección del instrumento; en este respecto, es también ventajoso el sistema de nivel fijo al anteojo sobre el de nivel caballero (en éste puede acumularse polvo bajo las patas del nivel, etc.). Para la disposición 2 lo más práctico es, cuando el aparato tiene además de un nivel fijo un nivel caballero, nivelar primero y comprobar después el instrumento.

La disposición 4 presenta la ventaja de la facilidad con que se comprueba y corrige el aparato, pero subsisten, para la unión no rígida entre anteojo y nivel, las mismas consideraciones hechas para el nivel caballero.

En el año 1845 construyó Breithaupt un nivel de anteojo giratorio en sus collares, que llevaba unido un nivel de suspensión, el cual giraba sobre un eje puntiagudo y mediante un contrapeso se mantenía en su sitio de tal modo, que la graduación quedaba hacia arriba. También este instrumento resulta de fácil comprobación y corrección; sin embargo, su empleo se extendió poco y fué sustituido por el aparato de nivel reversible tan conocido.

Como sustitutivo del aparato de anteojo reversible y nivel caballero, construyó la casa Breithaupt un nivel en el cual el soporte del anteojo consistía en dos placas de acero, y el anteojo, en lugar de los collares, llevaba unas cuchillas de acero y unas clavijas regulables, de cabeza redonda, con las cuales se apoyaba aquél en las placas de acero. El nivel iba provisto también de sus correspondientes placas de acero, con las cuales se apoyaba sobre el anteojo.

Este aparato se emplea todavía en Alemania en algunos trabajos hidráulicos y de nivelación de gran precisión, y tuvo su apogeo en los últimos cuarenta años del siglo pasado, debido a que entonces era muy frecuente hacer las lecturas con el anteojo en las dos posiciones, y esto hacía que los collares de los aparatos corrientes se desgastaran demasiado pronto; pero hace ya mucho tiempo que no se emplea este método de observación, por lo cual no pierde ventaja alguna el sistema de anteojo con collares; además, la precisión con que hoy trabajan los talleres mecánicos en que se fabrican estos instrumentos, hace imposible una gran diferencia entre los dos collares del anteojo, y así pierde también todo su valor la pretendida precisión que se obtenía con las cuchillas y clavijas regulables.

En las figuras 9 a 14 damos varios modelos de equialtímetros correspondientes a las distintas disposiciones de anteojo y nivel antes enumeradas. Algunas figuras corresponden a modelos antiguos, pero que todavía se emplean; todas las casas constructoras fabrican actualmente modelos nuevos de todos estos aparatos, con los anteojos provistos de lente móvil de enfoque, etc. Las figuras 15, 17 y 19 representan niveles de construcción especial, provistos de dispositivos para la lectura del nivel.

Todos estos niveles sirven para nivelaciones sencillas y de poca precisión unos, y otros para nivelaciones precisas de segundo orden. En el párrafo 9 se describen los aparatos necesarios para las nivelaciones de gran precisión.

La figura 9 representa la forma más sencilla de equaltímetro; el anteojo y el nivel están fijados entre sí y también fijados en el soporte del anteojo.

El soporte o base del aparato lo constituye una plataforma ordinaria con tres tornillos nivelantes, que se fija al trípode mediante un tornillo con muelle. El eje vertical, de apoyo cónico, puede girar dentro de una columna, de igual figura interior, que forma cuerpo con la plataforma nivelante, y lleva unido un bastidor (horquilla) al cual va fijado el anteojo. A este mismo bastidor de soporte va unido el nivel.

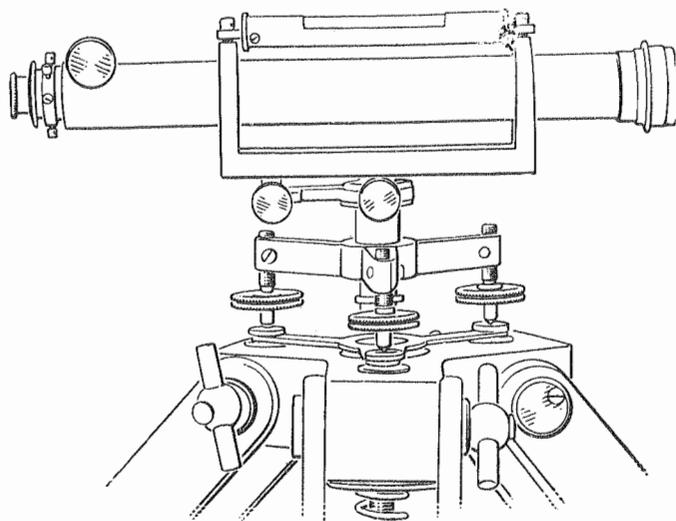


Fig. 9. — Forma más sencilla del equaltímetro

Este aparato tiene dos dispositivos de corrección; uno consistente en un tornillo vertical que actúa sobre el retículo del anteojo (los tornillos horizontales que se ven en el dibujo y que actúan también sobre él retículo no sirven para correcciones); el segundo dispositivo consiste en un tornillo vertical de corrección, que obra sobre el extremo de la izquierda del nivel. El tornillo que hay en el extremo de la derecha del nivel sirve sólo para fijar éste a su soporte.

Este nivel tan sencillo se emplea mucho en los trabajos corrientes de Obras Públicas para perfiles transversales y para los longitudinales de mediana extensión, y la sencillez es su principal característica. Para los trabajos corrientes de vías férreas, carreteras, construcciones, etc., da este nivel la suficiente precisión, siendo su ventaja principal la que ofrece su fácil y cómodo manejo, aunque carezca de una gran precisión, innecesaria por otra parte para esta clase de trabajos. Para mayor comodidad aún, puede agregarse a este aparato un nivel esférico, y si se quiere, disponer un nivel de esta clase en el trípode, cosa de que carece el aparato representado en la figura 9. La corrección y comprobación de este instrumento se hace como se indica en la figura 23.

En la figura 10 se ve un nivel que sólo difiere del anterior en que dispone de un tornillo de elevación *S*, para hacer horizontal la visual antes de cada lectura. El eje vertical se coloca en esta posición aproximadamente nada más, para lo cual se hace uso del nivel esférico *D*.

Este nivel, construido por Rosenberg, de Berlín, está provisto de un anteojo de 28 aumentos, 32 cm de distancia focal y 31 mm de abertura de objetivo. El nivel tubular tiene una sensibilidad de 21".

Como dispositivo de corrección se tiene en este aparato solamente el tornillo *L*, con el cual se coloca el eje del nivel paralelo a la visual. El retículo va fijado, sin movimiento alguno, en el tubo portaocular.

Este aparato lleva también un espejo (no representado en la figura) unido al mismo mediante una articulación de nuez, para hacer la lectura del nivel desde el mismo ocular.

El trípode presenta una particularidad, y es que entre las espigas de la plataforma superior y las patas del trípode van situadas unas piezas metálicas, en forma de segmentos esféricos, que dan lugar a un rozamiento bien uniforme, con lo cual se evita el tener que

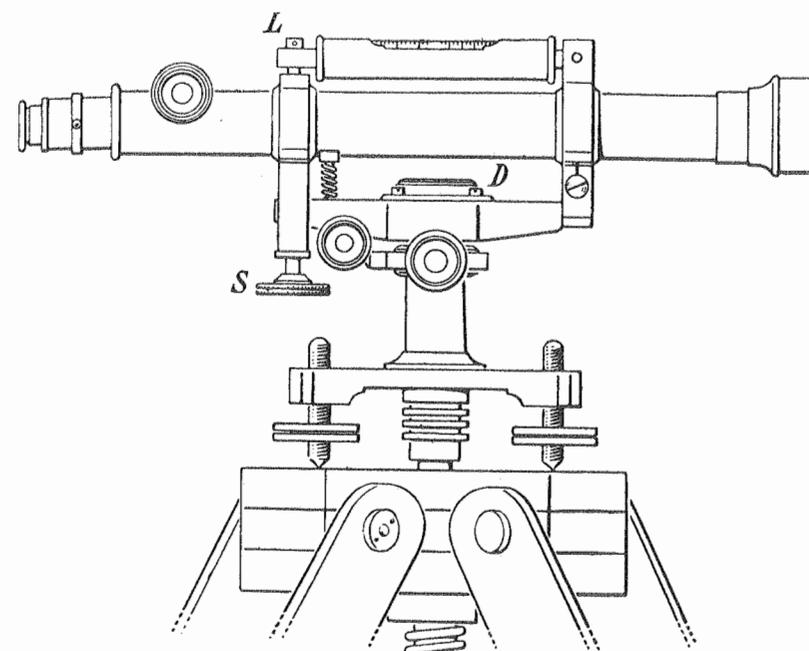


Fig. 10. — Nivel sencillo con tornillo de elevación

aflojar y apretar los tornillos del trípode cada vez que se pone el nivel en estación. Los trípodes con articulación de bolas se emplean mucho en los aparatos de poco peso, y dan excelente resultado.

El nivel representado en la figura 11 (de anteojo reversible y nivel caballero), construido en 1904 por Otto Fennel, de Kassel, tiene un anteojo de 25 aumentos y un nivel con sensibilidad de 22" por división. La distancia focal del objetivo es de 38 cm y su abertura de 33 mm.

El anteojo puede girar alrededor de su eje, dentro de sus cojinetes, e invertirse, es decir, sacarse de éstos y volverlo a colocar después de girarlo 180°, y el nivel puede también invertirse sobre el anteojo; este nivel es, pues, de anteojo y nivel reversibles.

El retículo se centra con los cuatro tornillos *F*, y con los cuatro tornillos *L* se ajusta y corrige el nivel. Además del nivel tubular hay un nivel esférico fijado en el soporte del anteojo, por debajo de éste, que sirve para disponer verticalmente el eje de giro de todo el aparato.

Toda la parte superior del aparato puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto medio del soporte del anteojo. En vez del tornillo corriente de elevación, lleva este aparato un tornillo de Stampfer *S* (véase § 13), que puede emplearse también para medir distancias y al mismo tiempo nivelar con visuales inclinadas. En las divisiones del tambor *S* puede leerse una 50.^a parte de giro de este último, mientras que en la

escala *T* se leen las vueltas enteras del tambor. En *B* hay un muelle antagonista, sobre el cual actúa el tornillo *S*.

La plataforma del trípode es de metal; las patas del mismo van unidas a aquella mediante tornillos y tuercas de presión.

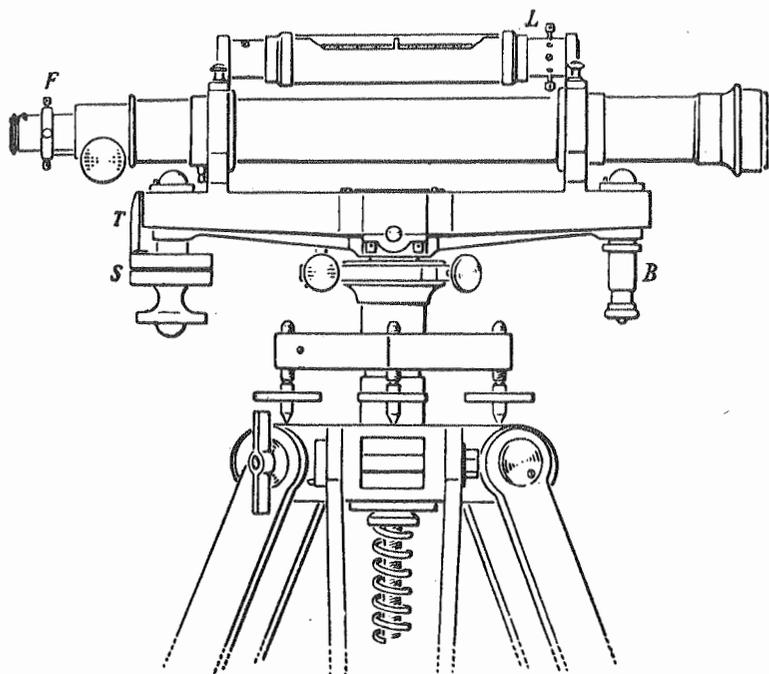


Fig. 11. — Equialtímetro de anteojo reversible y nivel caballero

En la figura 12 vemos un nivel de anteojo reversible y nivel fijo al anteojo, construido por G. Heyde, de Dresden; el anteojo puede girar en sus cojinetes e invertirse con sólo

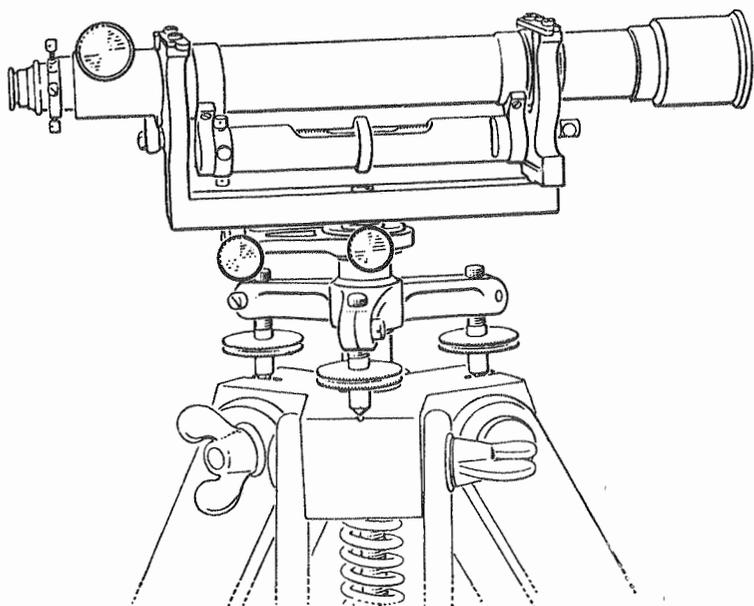


Fig. 12. — Equialtímetro de anteojo reversible y nivel fijo al anteojo

abrir las tapas de estos últimos; el nivel va fijado al anteojo, lo cual constituye en general una ventaja, como ya apuntamos en la página 13.

La corrección de este aparato se hace en primer lugar con cuatro tornillos que sirven para centrar el retículo sobre el eje de los collares del anteojo, y después con cuatro tornillos dispuestos a la izquierda del nivel, con los cuales se logra que estén en un mismo plano el eje del nivel y el del anteojo, y que ambos ejes se dispongan paralelamente entre sí.

Como este aparato no lleva tornillo de elevación, tiene practicado en el cojinete de la derecha del anteojo un corte horizontal, que al abrirse o cerrarse más o menos, mediante dos tornillos, hace subir o bajar el extremo de la derecha del anteojo (véase tomo I, fig. 303).

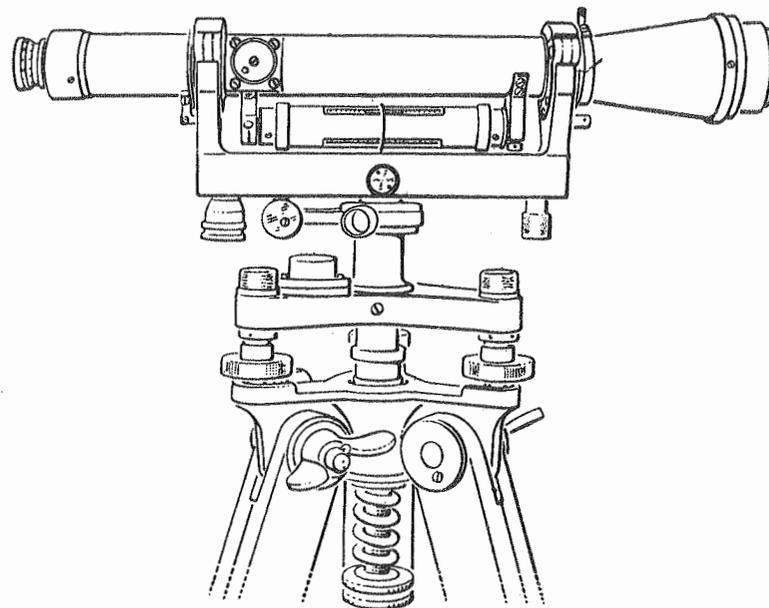


Fig. 13. — Equialtímetro de anteojo y nivel reversibles

Para corregir este aparato hay que cerciorarse en primer lugar de la absoluta igualdad del diámetro de los dos collares del anteojo. Una ligera desigualdad en estos diámetros hace que la comprobación de este instrumento resulte más difícil que con el nivel caballero del aparato representado en la figura 11 (véase tomo I, página 223). Pero esta dificultad no tiene gran importancia, y la gran ventaja que supone la unión del anteojo reversible con el nivel hace de este sistema de construcción uno de los más empleados en Altimetría.

La figura 13 representa un aparato de anteojo y nivel reversibles, construido por Max Hildebrand, de Freiberg; el anteojo tiene lente móvil de enfoque (véase tomo I, página 267) y puede girar y volverse en sus cojinetes; en el centro del soporte del anteojo hay un eje horizontal, alrededor del cual puede girar un poco este soporte accionando el tornillo de elevación que se ve a la izquierda. Para poner en estación el nivel, basta colocar aproximadamente vertical el eje principal del instrumento, mediante el nivel esférico dispuesto sobre la plataforma nivelante del mismo.

Para corregir este aparato se tienen, en primer lugar, cuatro tornillos que hay en el ocular del anteojo, los cuales, como sucede en casi todos los anteojos modernos, van cubiertos por un manguito atornillado a la caja del anteojo; con estos tornillos se centra el retículo con el eje del anteojo. Después se dispone de tornillos laterales, a la izquierda del nivel,

para corregir el cruce del eje de éste con el del anteojo, o sea, para que los dos ejes estén en el mismo plano, y de un tornillo, a la derecha, para disponer paralelamente entre sí estos dos ejes.

El nivel va recubierto con un tubo de cristal, para resguardarlo del calor.

El anteojo tiene 30 aumentos y el nivel una sensibilidad de 12'', por lo cual este aparato no puede conceptuarse como de alta precisión. Una ventaja notable de este nivel consiste en la poca importancia que supone una ligera desigualdad entre los diámetros de los dos collares del anteojo, gracias al nivel reversible de que aquél está provisto.

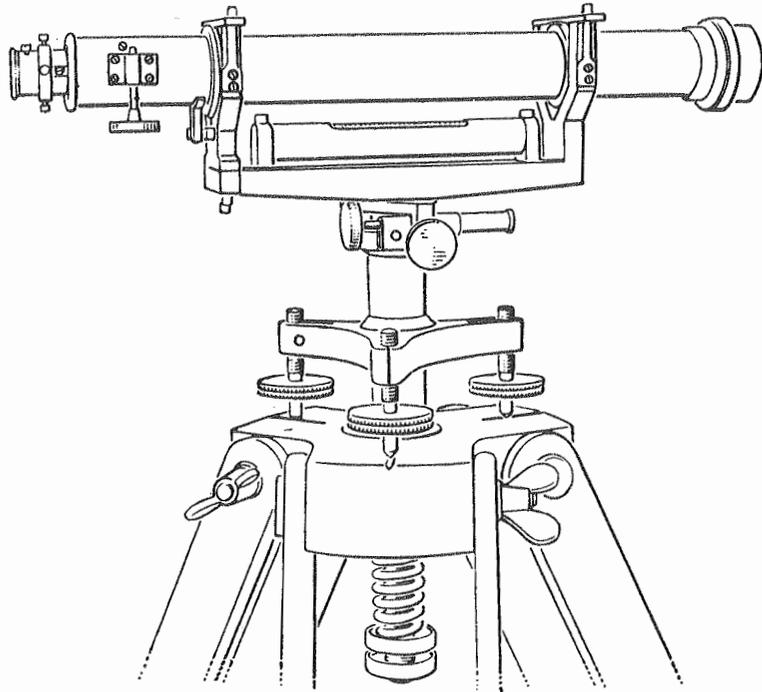


Fig. 14. — Equialtímetro de anteojo reversible y nivel fijo al soporte del anteojo

El aparato representado en la figura 14 tiene anteojo reversible (como los de las figuras 11, 12 y 13); el objetivo tiene 32 cm de distancia focal, 3 cm de abertura y el aumento total del anteojo es de 25 diámetros.

El nivel, que tiene 20'' de sensibilidad, es independiente del anteojo y va fijado al soporte de aquél, por lo cual tiene el verdadero carácter de nivel de plataforma del aparato.

Además de los tornillos de corrección para centrar el retículo, se puede subir o bajar uno de los extremos del nivel para colocar el eje de éste perpendicular al eje vertical o de giro del aparato. Por último, a la izquierda del soporte del anteojo se ve el corte horizontal practicado en el mismo, que por medio de un tornillo de presión y otro de llamada puede estrecharse o ensancharse a voluntad.

También podría dotarse a este aparato de un tornillo de elevación, aunque el conjunto resultaría complicado y pesado, ya que el nivel se halla sobre la parte de la horquilla que participa del movimiento basculante del anteojo.

Esta construcción está inspirada en la idea de poder corregir a fondo el aparato, al contrario de lo que sucede con los niveles tan sencillos representados en las figuras 9 y 10.

La figura 15 representa un nivel moderno construido por Breithaupt, de Kassel, de anteojo giratorio en sus collares (reversible), y nivel lateral reversible. El anteojo, provisto de lente móvil de enfoque (véase tomo I, página 267), tiene 23,5 cm de longitud, con 30 aumentos, y la precisión del nivel es de 10''.

Este nivel tiene tornillo de elevación, con la cabeza (6) dispuesta horizontalmente, provisto de embrague (7) y llamada (5) para afinar la corrección, todo ello colocado de modo que el manejo del tornillo resulta fácil y cómodo.

Este aparato presenta la particulari-

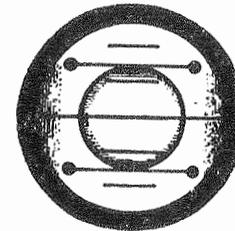


Fig. 16

Campo del tubo lector del nivel

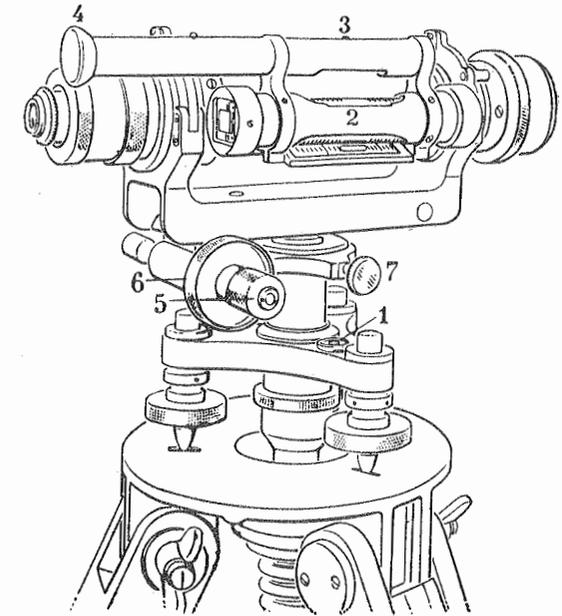


Fig. 15

Equialtímetro de nivel reversible y tubo lector del nivel

dad del tubo (4) de lectura para el nivel: en (3) va un dispositivo de reflexión que hace visible desde (4) la burbuja (2), pero notablemente disminuida, como se ve en la figura 16, que representa el campo visual del tubo de lectura del nivel; la disminución de tamaño de la imagen de la burbuja hace que resulte muy fácil y seguro el calado de la misma.

En vez del sencillo espejo que se fija en el instrumento representado en la figura 10, lleva éste, como hemos visto, el tubo de lectura del nivel, con lo cual se logra que tanto la imagen de la mira como la de la burbuja, caigan en el punto remoto del ojo del observador (tomo I, página 251).

En la figura 17 se ve un aparato de anteojo y nivel fijos, construido por Otto Fennel, de Kassel: el anteojo, con lente móvil de enfoque, tiene 23,5 cm de longitud, 3,6 cm de abertura de objetivo y 30 aumentos. El nivel, unido fijamente al anteojo, tiene una precisión de 30'' por 2 mm. El anteojo, juntamente con el nivel, se

puede mover mediante un tornillo de elevación.

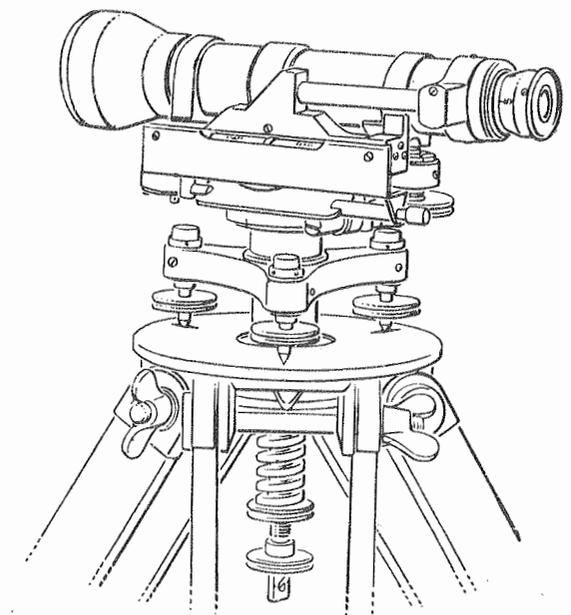


Fig. 17

Nivel sencillo con tornillo de elevación, y anteojo y nivel fijos

Para corregir el nivel se dispone solamente de un tornillo, con el que se mantienen paralelos entre sí el eje óptico del anteojo y el del nivel.

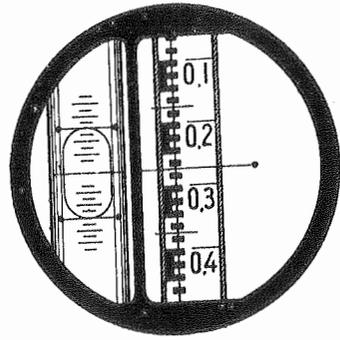


Fig. 18

Campo visual del nivel de la figura 17

Por encima del nivel hay un dispositivo de prismas y lentes mediante el cual se lleva la imagen reducida de la burbuja al campo óptico del anteojo, de modo que al dirigir una visual a la mira, aparece junto a la imagen de ésta, como se ve en la figura 18, la de la burbuja, resultando así muy sencillo y seguro el calado de ésta, la vigilancia de la misma y la lectura de la mira.

En la figura 19 se representa un equialtímetro de anteojo y nivel reversibles, construido por C. Zeiss, de Jena; el anteojo, con lente móvil de enfoque, tiene 21 cm de longitud, una abertura de objetivo de 3,5 cm y 28 aumentos. La sensibilidad del nivel es de 15" por 2 mm.

El tornillo de elevación, dispuesto horizontalmente, se ve a la derecha, debajo del nivel.

El aparato se sujeta al trípode mediante el dispositivo representado en la figura 315 del tomo I.

Para observar la burbuja hay sobre el nivel un sistema de prismas, mediante el cual se puede ver aquélla con una lente dispuesta junto al ocular del anteojo.

Una particularidad de este aparato, introducida por la casa Zeiss en el año 1909 y mejorada en este modelo, consiste en el modo de calar la burbuja del nivel. En el campo de la lente se ve la mitad de cada extremo de la burbuja (fig. 20); cuando ésta está calada, ambos extremos deben coincidir, lo cual se aprecia exactamente con la lente. Por esta razón no es necesario que el nivel lleve divisiones ningunas. El retículo va provisto de tornillos de corrección (cubiertos con un manguito atornillado), así como el nivel. El calado definitivo de la burbuja se hace desplazando convenientemente el dispositivo de prismas.

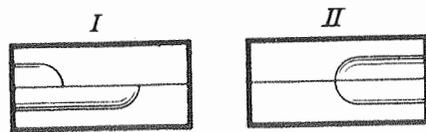


Fig. 20

I, burbuja no calada; II, burbuja calada

Delante del objetivo va una lámina de cristal de caras paralelas para cuya aplicación nos remitimos a la figura 29.

Plataformas nivelantes y trípodes. La disposición de la plataforma nivelante y del trípode merece especial atención tratándose de los niveles, pues al contrario de lo que sucede con los teodolitos, el número de estaciones que se hacen al día con un nivel es extraordinario. Por esta razón un pequeño ahorro de tiempo o una pequeña facilidad en la colocación del trípode adquiere gran importancia y puede influir considerablemente en el resultado final, pues el facilitar y abreviar el método de nivela-

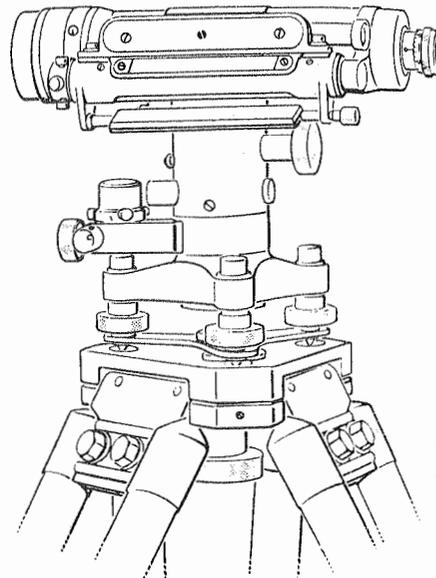


Fig. 19. — Equialtímetro de anteojo y nivel reversibles, de C. Zeiss

ción influye sobre los pequeños errores sistemáticos y sobre la probabilidad de compensar estos errores en la doble nivelación, de ida y vuelta.

Según nuestra propia experiencia, es muy importante que el aparato esté provisto de un nivel esférico y de un tornillo elevador; el primero para nivelar aproximadamente el aparato, y el segundo para calar directamente el nivel del anteojo en cada lectura de mira.

El dispositivo ordinario de nivelación del aparato consiste en la plataforma con tres tornillos nivelantes, como se ve en todos los niveles representados en las figuras 9 a 19. Pero hay otros muchos sistemas, como, por ejemplo, el de plataforma con cuatro tornillos, de los cuales son de efecto opuesto dos a dos, o de dos tornillos con muelles antagonistas. También se emplea, en aparatos pequeños, la articulación de bola, con varilla o placa de regulación, etc.

Con todos estos dispositivos se estaciona muy pronto el nivel, si el tornillo de sujeción al trípode es de paso grande.

Otro sistema de nivelación del aparato consiste en el empleo de dos discos, montados bajo aquél y en forma de cuña, de los cuales uno va unido al trípode y el otro al aparato; haciendo girar este último disco se coloca verticalmente el eje principal de aquél. La misma idea fué utilizada por la casa Zeiss, pero poco después quedó relegada ante la superioridad de la plataforma nivelante de tres tornillos.

Los trípodes deben estacionarse de manera comoda y rápida; por esta razón son preferibles los de patas con articulaciones hechas de modo que siempre estén las tres igualmente apretadas, y no haya necesidad de aflojar y apretar los tornillos cada vez que se haya de estacionar.

A esta clase de trípodes pertenece el representado en las figuras 311 y 312 del tomo I (pág. 283), así como el sencillo trípode del nivel de Rosenberg (fig. 10), con segmentos esféricos encajados, de que ya tratamos al describir dicho aparato.

En la elección de trípode para el nivel hay que tener también en cuenta la clase de suelo sobre que se va a operar, pues hay mucha diferencia entre el trabajo sobre el suelo duro y liso de una carretera asfaltada, al que se hace sobre un terreno de labor o de prado, o sobre la explanación de una vía férrea, o en un terreno accidentado cualquiera. Para el trabajo sobre carreteras o calles es muy conveniente disponer un nivel esférico poco sensible sobre la plataforma del trípode, que se cala (aproximadamente) moviendo las patas de este último, con lo cual se abrevia de manera considerable la nivelación definitiva del

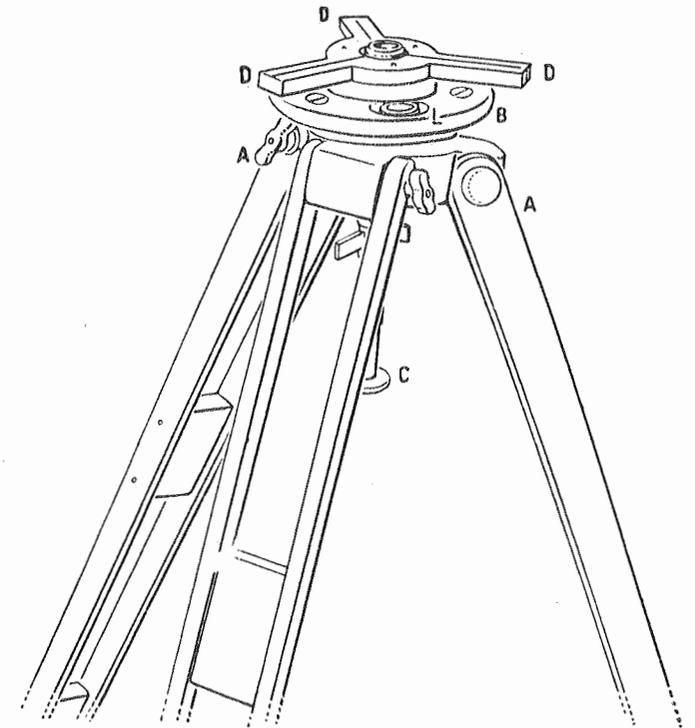


Fig. 21

aparato y no hay que hacer tantas manipulaciones con el mismo, ya que apenas hay que tocar sus tornillos nivelantes, por haber quedado su plataforma casi horizontal al mover las patas del trípode. De este modo, sin pérdida de precisión se logra una gran velocidad en la nivelación de que se trate.

También sobre terrenos de labor o sobre praderas resulta ventajoso el nivelar aproximadamente la plataforma del trípode moviendo sus patas en el sentido conveniente. En cambio, en las explanaciones de vías férreas no es posible proceder así, porque las patas del trípode se clavan muy a fondo entre el balasto y no hay manera de moverlas poco a poco para nivelar la plataforma ni que sea aproximadamente.

La figura 21 representa un trípode especial para niveles, empleado por primera vez en la nivelación de Francia; a la plataforma del trípode va unido, mediante una articulación de bola, un disco B , que puede inclinarse a voluntad, por medio del tornillo de sujeción C , y fijarse con el mismo una vez que el nivel esférico L está aproximadamente calado. La pieza superior D , de tres brazos, se coloca para otro objeto sobre el mismo disco B .

Breve reseña histórica. El anteojo fué empleado por primera vez para nivelar, en 1674, por Picard. Pero tanto el anteojo de Picard como los construídos poco después por Huygens y Römer, no disponían de nivel alguno, sino de un dispositivo de péndulo para poner horizontal su eje de colimación. Los aparatos con nivel se encuentran descritos en la «*Géométrie pratique*» de Mallet, en 1702, y después por Nicolás Bion hacia 1720. En Alemania se lee la primera descripción de aparatos con nivel en 1715, en el trabajo de Leonardo Christoph Sturm, titulado «*Aufrichtige Entdeckung des ... Nivellierens oder Wasserwägens*», donde se dice que «hay algunos detalles que hacen muy pesado el manejo del instrumento»... A mediados del siglo XVIII construye Brander un aparato muy bien pensado en todas sus partes y provisto de dispositivos de ajuste suficientes.

§ 8. Comprobación y corrección de los niveles

Según sea la disposición de las diferentes partes de un aparato, sobre todo la del nivel y su sistema de fijación, así se hace la comprobación y corrección; sin embargo, hay ciertos requisitos generales que tienen que verificarse en todos los equaltímetros, y entre los cuales ocupa el primer lugar el paralelismo que debe existir entre el eje del nivel y el eje de colimación del anteojo.

En la corrección de niveles vamos a seguir el orden en que hemos descrito estos aparatos, es decir, partiendo de los más sencillos a los más complicados.

Nivel sencillo (fig. 9). En este aparato, como ya vimos en su descripción, el nivel y el anteojo son fijos entre sí y fijos con el eje vertical del aparato.

Según se ve en el esquema de la figura 22, se pueden considerar en este nivel tres ejes: el eje del nivel, L ; el eje de colimación Z del anteojo, y el eje vertical de giro V .

Deben siempre cumplirse las dos condiciones siguientes:

[1] $L \perp V$, es decir, el eje del nivel ha de ser perpendicular al vertical o de giro del aparato.

[2] Z ha de ser paralelo a L (eje de colimación y eje del nivel, paralelos).

Para hacer que se cumplan estas dos condiciones, se dispone de los dispositivos de corrección k y l : el primero, k , representa los tornillos de llamada del retículo del anteojo, y el segundo, l , el tornillo de llamada del nivel.

Para lograr que el eje L del nivel sea paralelo al eje de colimación Z del anteojo puede emplearse el dispositivo l o el k , mas para hacer que L sea perpendicular a V sólo se emplea el l , de donde se deduce que *en primer lugar* debe satisfacerse la condición $L \perp V$, mediante el tornillo de corrección l del nivel, y después se dispone Z paralelamente a L , mediante los tornillos k del retículo del anteojo.

En la práctica no es tan importante la primera condición ($L \perp V$) como la segunda, pero en bien de la rapidez y comodidad de las operaciones, es conveniente que el eje L del nivel sea perpendicular, lo más exactamente posible, al eje vertical V del aparato.

Las correcciones se hacen del modo siguiente:

[1] Poner el eje del nivel perpendicular al eje vertical del aparato.

El nivel se corrige como un nivel de plataforma o acimutal, de la manera que estudiamos en el tomo I, página 224. Después de colocar, a ojo, horizontalmente el nivel, se dispone éste paralelo a la línea de unión de dos tornillos de la plataforma nivelante, y moviendo éstos se cala aquél. Se hace girar entonces el nivel (con el anteojo) 180° y se corrige la mitad de la desviación de la burbuja con el tornillo l del nivel, y la otra mitad con los mismos tornillos nivelantes. Se hace girar entonces al nivel 90° y se corrige toda la desviación de la burbuja con el tercer tornillo nivelante. Se repiten estas operaciones hasta lograr el calado permanente de la burbuja.

Otro procedimiento consiste (tomo I, página 225) en determinar primeramente el punto de calado del nivel, respecto al eje vertical del aparato, para lo cual se lee la posición del centro de la burbuja para dos posiciones opuestas del mismo, y se toma la media de ambas lecturas. Se lleva el centro de la burbuja a coincidir con el punto de calado así determinado, mediante los tornillos nivelantes, para tener el eje vertical del aparato bien corregido, y sólo queda ya centrar la burbuja por medio del tornillo de corrección del nivel.

Por último, también se puede colocar directamente el eje del nivel en ángulo recto con el eje vertical, siguiendo el método expuesto en el tomo I, página 225, al final del párrafo titulado «*Nivel de plataforma o acimutal*».

[2] Poner el eje de colimación del anteojo paralelo al del nivel.

La comprobación de esta importante condición hay que hacerla valiéndose de las miras de nivelación. Empezaremos por el sistema, muy empleado, de la estación en el centro (nivel en el punto medio de la distancia entre las dos miras).

Es de la mayor importancia tener en cuenta, incluso para la nivelación, que un error de paralelismo entre la visual y el eje del nivel no produce efecto alguno cuando se esta-

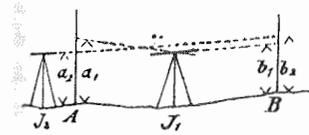


Fig. 23

cione el aparato J_1 (fig. 23) en el punto medio de la distancia que separa las dos miras A y B , es decir, que no es preciso que el nivel esté en la recta AB , sino solamente que las distancias visuales o de mira J_1A y J_1B sean iguales entre sí, pues si la visual no es paralela al eje del nivel, las dos lecturas a_1 y b_1 tendrán el mismo error, por exceso o por defecto,

y la diferencia $a_1 - b_1$ será la que realmente existe en el terreno entre los puntos A y B .

De aquí se deduce el siguiente procedimiento para comprobar la condición [2], es decir, para ver si el eje óptico del anteojo es paralelo al eje del nivel:

Se eligen dos puntos bien definidos A y B distantes entre sí unos 100 m (fig. 23) y se estaciona primero el nivel en el punto medio J_1 de la distancia, entre ambos puntos A y B , y después lo más cerca posible de uno de ellos, el A por ejemplo, en J_2 . En estas dos posi-

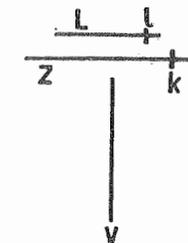


Fig. 22

ciones del aparato, las lecturas de mira serán respectivamente a_1, b_1 y a_2, b_2 , y se debe cumplir la condición siguiente:

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2.$$

Si no se verifica esta igualdad debe corregirse el aparato, en la posición J_2 , con los tornillos verticales del retículo del anteojo, de modo que aquélla quede cumplida, es decir, que se tenga:

$$b_2 = a_2 - (a_1 - b_1).$$

Como se ve, b_2 es la lectura correspondiente a la posición horizontal de la visual.

Ejemplo numérico:

Lecturas en J_1	Lecturas en J_2	Corrección:
$a_1 = 1,675$ m	$a_2 = 1,590$ m	no varía $a_2 = 1,590$
$b_1 = 1,383$	$b_2 = 1,317$	se corrige $b_2 = 1,298$
Diferencias: $a_1 - b_1 = 0,292$	$a_2 - b_2 = 0,273$	<u>0,292</u>

La diferencia $a_1 - b_1 = 0,292$ es la verdadera, por estar J_1 en el medio de AB ; a_2 se da como buena, por la pequeñez de la distancia de mira o visual, y b_2 se calcula en función de estas lecturas:

$$b_2 = 1,590 - 0,292 = 1,298.$$

Se corre el retículo del anteojo hacia arriba, estando el aparato en J_2 , hasta que sobre la mira más distante B se lea 1,298, en vez de 1,317 que antes se leyó, con lo cual queda el eje óptico del anteojo en posición horizontal.

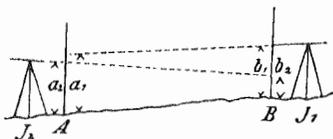


Fig. 24

Como comprobación se repite toda la operación anterior, y como prueba final se estaciona el aparato muy cerca de la mira B .

Aunque este procedimiento puede siempre emplearse, damos a continuación otro, correspondiente a la figura 24.

Se toman dos puntos de estación J_1, J_2 , para el nivel, simétricamente situados respecto a las miras A y B . Se hacen las cuatro lecturas a_1, b_1, a_2, b_2 , sobre las miras, y se ve si se verifica la igualdad de diferencias, $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$. Si no sucede así, se halla la media aritmética entre ambas, a saber:

$$a - b = \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)}{2}.$$

Ésta es la diferencia verdadera, por lo cual, estando el aparato en J_2 se corrige el retículo de modo que en vez de b_2 se lea $a_2 - (a - b)$.

Ejemplo numérico:

Lecturas en J_1	Lecturas en J_2	Corrección:
$a_1 = 2,045$ m	$a_2 = 1,784$ m	no varía $a_2 = 1,784$
$b_1 = 1,243$	$b_2 = 0,952$	se corrige $b_2 = 0,967$
Diferencias: $a_1 - b_1 = 0,802$	$a_2 - b_2 = 0,832$	<u>0,817</u>
Media: $a - b = 0,817$.		

Se halla la diferencia $1,784 - 0,817 = 0,967$, y se corrige el retículo en J_2 , de modo que en vez de 0,952 se lea 0,967 sobre la mira más distante B .

Al corregir el retículo, no debe haber duda alguna acerca del sentido en que hay que moverlo (hacia arriba o hacia abajo), pues basta pensar en que el ocular no produce inversión de la imagen; es decir, que el retículo ha de moverse en la dirección en que directa-

mente se ve que hay que hacer la corrección, hacia arriba o hacia abajo, según sea esta última. No debe olvidarse que los tornillos de corrección del retículo han de manejarse con mucho cuidado y gran prudencia.

Los procedimientos que hemos descrito, sobre todo el de estación en el centro, se emplean mucho, aun para aparatos distintos de los sencillos que estamos considerando; en todos los casos se puede comprobar, de este modo, el paralelismo entre el eje de colimación del anteojo y el eje del nivel, en un equaltímetro cualquiera. Si se trata, por ejemplo, de un aparato con anteojo y nivel reversibles, basta prescindir de esta cualidad para que le sean aplicables los métodos indicados para los aparatos sencillos.

La hipótesis anterior de que a_2 permanece invariable, es cierta sólo aproximadamente, pero no da lugar a error alguno cuando se repite toda la operación. Con todo, si se conocen las distancias $J_2 A$ y $J_2 B$ de la figura 23, se puede deducir, de la relación entre ambas, la corrección de a_2 .

Nivel sencillo con tornillo de elevación (fig. 10). De las dos condiciones indicadas en el caso del nivel sencillo, sólo hay que cumplir la segunda para los niveles con tornillo de elevación, es decir, la referente al paralelismo entre el eje de colimación del anteojo y el eje del nivel. Por lo tanto, sólo se necesita uno de los dispositivos de corrección, l o k (figura 22). Ordinariamente se emplea el tornillo de corrección l del nivel (fig. 10).

La corrección se hace del modo indicado anteriormente (fig. 23): una vez hallada la verdadera diferencia de altura $a_1 - b_1$, entre dos puntos A y B , estacionando con el nivel en el medio de la distancia que los separa, se calcula la lectura corregida b_2 que corresponde a la a_2 . La visual se fija a la altura b_2 , con el tornillo de elevación, y entonces se centra la burbuja del nivel con el tornillo de corrección del mismo. Cuando sólo se dispone del dispositivo de corrección del retículo, se mueve éste, estando el nivel calado, de modo que se tenga la lectura corregida b_2 .

Aparato con anteojo reversible y nivel caballero (fig. 11). Las condiciones para los ejes son las mismas que para el nivel sencillo de la figura 9. Ahora bien, como el eje de los collares o cojinetes del anteojo desempeña un cierto papel en la corrección y ajuste del aparato, vamos a subdividir la condición segunda (paralelismo entre visual y nivel) en otras tres, a saber:

- [1] Eje de colimación del anteojo paralelo al eje de los cojinetes (eje mecánico)
- [2] Eje del nivel paralelo al eje mecánico del anteojo.
- [3] Eje mecánico perpendicular al eje vertical o general del aparato.

1. La primera condición, es decir, el «centrado del retículo», se logra del modo siguiente: se elige un punto distante (para que no se tenga que temer influencia alguna debida a una pequeña excentricidad del objetivo) y se enfoca perfectamente con el anteojo; si al girar éste en sus collares deja de coincidir la cruz filar con el punto observado, se corrige la mitad de la desviación con los tornillos de corrección del retículo, con lo cual queda cumplida la condición propuesta.

2. Una vez centrado el retículo, hay que saber si el eje del nivel es paralelo al eje mecánico del anteojo. La comprobación y corrección se hace del modo indicado en el tomo I (págs. 223 y 224: *Nivel caballero*). En primer lugar se ve si están en un mismo plano el eje del nivel y el eje mecánico del anteojo, para lo cual basta hacer girar suavemente el nivel sobre los collares de aquél a un lado y a otro, y si se observa el cruzamiento entre ambos ejes, se sitúan en el mismo plano por medio de los tornillos laterales del nivel.

Para conseguir el paralelismo entre el eje del nivel y el eje mecánico del anteojo, basta con calar el nivel y después hacerlo girar 180° sobre el anteojo; si la burbuja se desvía del centro, se corrige la mitad de la desviación con el tornillo de corrección del nivel.

También se puede hacer la corrección por medio del punto de calado (tomo I, página 223), o midiendo el ángulo que forman entre sí el eje del nivel y el eje mecánico del anteojo.

3. Para que el eje mecánico del anteojo, y con éste, el eje de colimación y el eje del nivel sean perpendiculares al eje vertical o general del aparato, se trata el nivel como si fuera un nivel de plataforma (tomo I, página 224); se cala éste, se hace girar el eje vertical 180° alrededor de sí mismo y se corrige la mitad de la desviación de la burbuja con los tornillos nivelantes y la otra mitad con el tornillo de corrección que hay bajo el soporte del anteojo.

Tornillo de elevación. Cuando estos aparatos están provistos de tornillo de elevación, como el representado en la figura 11, desaparece la condición [3], y respecto a las demás, se sigue el mismo método de corrección antes indicado. El tornillo de elevación en la figura 11 desempeña también otro papel, como ya veremos en el párrafo 13.

Anteojo reversible y nivel fijo al anteojo (fig. 12). Para estos instrumentos, uno de los cuales está representado en la figura 12, subsisten las condiciones [1] a [3] enunciadas para los niveles anteriores. También el método de corrección es el mismo, aunque para el paralelismo del eje mecánico del anteojo y el eje del nivel se hace girar 180° el anteojo entero, con su nivel sobre sus collares, mientras que en el caso anterior se hacía girar sólo al nivel caballero. Es evidente que aun para el nivel caballero, significa lo mismo invertir el nivel con el anteojo que el nivel solo.

Como ya indicamos en la página 13, presenta muchas ventajas el nivel fijo al anteojo, por lo cual se emplea mucho esta disposición en nivelaciones de precisión.

Desigualdad entre los collares del anteojo. Tanto para los aparatos con nivel caballero, como para los de nivel fijo al anteojo, es indispensable que los diámetros de los dos collares del anteojo sean rigurosamente iguales, si se quieren aplicar los métodos hasta ahora indicados para lograr el paralelismo entre el eje del nivel y el eje mecánico del anteojo: es decir, que los dos collares deben pertenecer a la misma superficie cilíndrica. Ya en el tomo I, página 224, vimos el modo de comprobar la igualdad de los diámetros de los collares, según el cual se corrige el nivel caballero como de costumbre, y se halla un ángulo de convergencia α_1 (fig. 242 del tomo I); se da al nivel caballero una desviación igual al ángulo α_1 , y se dispone horizontalmente el eje mecánico del anteojo.

Ejemplo. Con un equiálmetro de precisión, construido por Bamberg (núm. 9779, serie de Danzig), provisto de nivel fijo al anteojo y de un nivel caballero especial, encontramos, después de repetir numerosas veces el procedimiento anterior (tomo I, página 224), $\beta = 1,344$ divisiones del nivel, es decir, que el collar del lado del ocular era mayor que el del lado del objetivo. Con bastante precisión pudimos deducir por medición directa los valores $\varphi = 45^\circ$ y $\psi = 42^\circ$. Así hallamos para α_1 el valor $\alpha_1 = 0,653$ divisiones del nivel. Para el ajuste del instrumento, hicimos de modo que la burbuja del nivel caballero se corriera 0,65 de división de su escala hacia el lado del ocular del anteojo, con lo cual quedó horizontal el eje mecánico de este último. La precisión del nivel caballero era de $3,4''$, y para la diferencia entre los radios de los dos collares hallamos el valor $R - r = 1,78 \mu$.

Si el aparato sólo tiene un nivel unido al anteojo, se corrige aquél como antes dijimos. Para que la visual o eje de colimación sea horizontal se sigue el procedimiento de estación

en el centro (fig. 23), con lo cual se pone directamente de manifiesto el pequeño ángulo de desviación, α_1 , del nivel.

Para eliminar el error procedente de la desigualdad de collares, propuso C. Aimonetti un anteojo especial, en el cual eran intercambiables objetivo y ocular; por lo tanto, una vez calado el nivel, había que hacer cuatro lecturas de mira, y la media aritmética de éstas correspondía a la visual horizontal.

Debe tenerse en cuenta que con los medios de que actualmente dispone la mecánica de precisión, resultan despreciables las posibles diferencias entre los collares de un mismo anteojo.

Anteojo y nivel reversibles (figs. 13 y 15). En estos instrumentos deben cumplirse las mismas condiciones que en los de nivel caballero, a saber:

- [1] Eje de colimación del anteojo paralelo al eje mecánico del mismo.
- [2] Eje del nivel paralelo al eje mecánico del anteojo.
- [3] Eje mecánico del anteojo perpendicular al eje vertical o general del aparato.

1. El centrado del retículo, necesario para la condición [1], se hace del modo indicado en la página 25.

2. La corrección necesaria para que se cumpla la condición [2], se hace como se indicó en el tomo I, página 225. En primer lugar, para descubrir si el eje del nivel no está en un mismo plano con el eje mecánico del anteojo, se hace girar el nivel un poco a un lado y a otro, alrededor del eje mecánico del anteojo: si la burbuja se corre en distintas direcciones, es señal de que ambos ejes están cruzados, es decir, que no están en el mismo plano. Para corregir este cruzamiento se dispone de tornillos de corrección laterales en uno de los extremos del nivel.

Para colocar paralelamente entre sí el eje mecánico del anteojo y el eje del nivel (tomo I, página 225) se cala el nivel, tanto si está sobre el anteojo, como debajo de éste o a un lado; se gira el anteojo 180° alrededor de su eje mecánico y se corrige la mitad de la desviación de la burbuja con los tornillos verticales de corrección del nivel.

Este aparato presenta la ventaja de que no requiere igualdad entre los diámetros de los collares del anteojo, que pueden ser muy diferentes entre sí, sin que ello afecte más que al eje de giro del anteojo.

Corrección sin tener en cuenta el eje mecánico del anteojo. Los tornillos de corrección del retículo no son indispensables para corregir el aparato, y buena prueba de ello la tenemos en que hay muchos aparatos con retículo fijo. Se puede colocar directamente el eje del nivel paralelo al eje de colimación, para lo cual se lee sobre una mira primero con el nivel arriba (o a la derecha) y después abajo (o a la izquierda), pero siempre calado; haciendo coincidir la visual o eje de colimación con la media aritmética de ambas lecturas, se tiene ya este último dispuesto horizontalmente. El nivel se cala después con su tornillo de corrección. Para nivelaciones de precisión no conviene esta disposición a causa de la dificultad en descubrir y corregir el cruce entre el eje visual y el del nivel, operación que hay que hacer como para los niveles sencillos (véase página 36).

3. La corrección necesaria para que se cumpla la condición [3], se hace del mismo modo que para los aparatos con nivel caballero o con nivel fijo al anteojo (pág. 25).

Convergencia de los ejes del nivel. En los niveles reversibles hay que tener presente, según lo expuesto en el tomo I, página 225, que pueden considerarse dos ejes distintos, que son las dos rectas tangentes al nivel en los ceros de sus dos escalas, y en la misma dirección que el tubo de aquél. Si estas dos rectas no son paralelas, no es suficiente

el método de corrección antes indicado, como se vió en el tomo I, página 227; también en la página 227 de dicho tomo I vimos cómo puede determinarse el ángulo de convergencia λ por medio de un nivel caballero.

También se puede hallar de otro modo el ángulo de convergencia λ cuando el nivel es desmontable, es decir, cuando puede desatornillarse y después de invertir sus extremos volverse a atornillar en su caja. Este procedimiento fué empleado ya por Amsler, y puede aplicarse al nivel representado en la figura 25, construido por Fennel. La cubierta L del nivel va sujeta a un bastidor R por medio de los tornillos SS ; los tornillos de corrección J para evitar el cruce con el eje de colimación del anteojo, actúan sólo sobre el bastidor R .

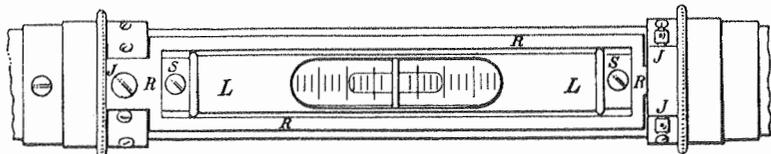


Fig. 25

Para invertir el nivel se aflojan los tornillos SS , se saca la cubierta L con el nivel dentro, se le da la vuelta, de modo que los extremos cambien de sitio, y se vuelven a apretar los tornillos SS .

La comprobación del nivel se hace del modo siguiente: se coloca la mira de nivelación a unos 50 m de distancia y se dispone el aparato sobre el trípode de modo que uno de los tornillos nivelantes caiga en la dirección de la visual. Se lee entonces, con el nivel calado, debajo del anteojo, por ejemplo, 0,243, y después con el nivel por encima del anteojo, por ejemplo, 0,248, y se toma la media de las dos lecturas, o sea 0,2455 m.

Se aflojan los dos tornillos SS (fig. 25) y se da la vuelta al nivel, es decir, se cambian entre sí de sitio sus extremos S , y se repite la operación anterior, obteniéndose así otras dos lecturas, que supongamos sean 0,245 y 0,250, cuya media es 0,2475 m. La media de las dos medias así obtenidas es 0,2465 y la semidiferencia entre ambas es 0,0010. Esto significa que la media primera es 1 mm más baja y la segunda 1 mm más alta de la posición horizontal, y llamando λ a la diferencia, se tendrá que $\frac{1}{2}\lambda = 1$ mm es la inclinación correspondiente a 50 m de distancia visual, o sea $4,0''$ ($\lambda = 8''$), para la posición primera del nivel (véase tomo I, página 226, figura 245).

Por último, para determinar el ángulo de convergencia λ podemos seguir el método de nivelación en el centro, situando después horizontalmente el eje visual (fig. 23). Una vez horizontal la visual, y suponiendo el nivel arriba, se dispone éste de modo que el eje superior del mismo sea paralelo a la visual. Se gira entonces el nivel hacia abajo y se dispone otra vez horizontalmente la visual, y de este modo la desviación de la burbuja es igual al ángulo de convergencia λ .

Cuando al hacer esta investigación se encuentra $\lambda = 0$ o de valor muy pequeño, se tiene el nivel corregido de una vez para siempre, es decir, que los ejes superior e inferior del nivel son paralelos entre sí, y si al girar el nivel arriba y abajo marca lo mismo, o si arriba y abajo se toma el promedio, queda demostrada y comprobada la horizontalidad del eje de giro.

La casa Zeiss, por indicación de H. Wild, construye equialtímetros con nivel caballero y anteojo provisto de dos objetivos y ocular intercambiables, de modo que puede invertirse la dirección de la visual. Con este dispositivo se puede determinar directamente la convergencia de los dos ejes del nivel.

Anteojo reversible y nivel sobre la horquilla del anteojo (fig. 14). Las condiciones que ha de cumplir un aparato de esta clase son las siguientes:

- [1] Eje de colimación paralelo al eje mecánico del anteojo.
- [2] Eje del nivel perpendicular al eje general del aparato.
- [3] Eje de colimación paralelo al eje del nivel.

1. El centrado del retículo para la condición [1] se hace como para los aparatos con anteojo reversible y nivel caballero (pág. 25).

2. Para la condición [2] se considera el nivel como si fuera de plataforma y se corrige del mismo modo que este último (tomo I, pág. 224). Una vez calado el nivel, se gira 180° el aparato alrededor de su eje vertical, y se corrige la mitad de la desviación de la burbuja con los tornillos nivelantes y la otra mitad con el tornillo de corrección del nivel. También pueden emplearse los dos procedimientos indicados en el tomo I, páginas 224 y 225, para corregir el nivel.

3. Para la condición [3], es decir, para hacer que el eje del nivel sea paralelo al eje mecánico del anteojo, y por lo tanto al eje de colimación, ya que ambos se han hecho paralelos al cumplirse la condición primera, partamos de la siguiente hipótesis o consideración: estando el eje general vertical, o sea, estando calado el nivel, supongamos que el eje mecánico del anteojo y el de colimación, paralelo a aquél, forme un pequeño ángulo α con la horizontal; al invertir el anteojo, sin variar para nada la posición vertical del eje general del aparato, el eje de colimación formará el mismo ángulo con la horizontal, pero de sentido contrario; es decir, igual a $-\alpha$.

De aquí se deduce el siguiente procedimiento: una vez colocado verticalmente el eje general del aparato, se lee sobre una mira colocada a 50 m de distancia, se da la vuelta al anteojo, se gira el aparato 180° alrededor de su eje vertical, y se vuelve a leer la mira. Por medio de los tornillos de corrección que hay debajo del soporte del anteojo (a la izquierda, en la figura 14) se lleva el eje de colimación de éste a coincidir con la media aritmética de las dos lecturas anteriores.

Si el nivel no está exactamente corregido respecto al eje vertical del aparato, no hay que esforzarse demasiado por conseguirlo, ya que no puede influir para nada en la bondad del trabajo, con tal que para las dos lecturas se cale con todo cuidado el nivel mediante los tornillos de la plataforma nivelante.

En el año 1911 construyó la casa Fennel un equialtímetro con el nivel fijo al soporte del anteojo; éste era fijo, como el de la figura 9, pero uno de sus extremos podía subir o bajar un poco mediante tornillos de ajuste, como los del anteojo representado en la figura 14. El anteojo estaba dispuesto, como el de Wild-Zeiss descrito en la página 28, para invertir la visual, pero de tal modo que coincidían las dos visuales, cosa que no sucedía con el anteojo Wild-Zeiss.

Si después de corregido el nivel se lee con este anteojo sobre una mira de nivelación, y una vez cambiado el ocular y girado el aparato 180° se repite la lectura, la media aritmética de ambas lecturas da la visual horizontal, a la cual se ajusta el anteojo por medio de sus tornillos de corrección.

§ 9. Equialtímetros para nivelaciones de precisión

La precisión de las nivelaciones depende del aparato empleado, y es función del aumento del anteojo y de la sensibilidad del nivel. Por consiguiente, los equialtímetros

para esta clase de nivelaciones van provistos de anteojos de gran aumento (hasta 40 diámetros) y de niveles de 4'' a 5'' de sensibilidad o apreciación.

Los aparatos representados en las figuras 11 a 13 pueden servir para nivelaciones de precisión siempre que sus anteojos y niveles cumplan los requisitos anteriores. Para hacer aún mayor la precisión se emplean aparatos especiales, construidos para este objeto, entre los cuales citaremos los representados en las figuras 26 a 29.

Estos cuatro aparatos pueden emplearse del modo ordinario, leyendo sobre la mira con el nivel calado; pero los representados en las figuras 27 a 29 están proyectados para métodos especiales, que estudiaremos en el párrafo 14.

En la figura 26 se ve un aparato de anteojo y nivel reversibles, de forma anticuada, construido para nivelaciones de precisión. La distancia focal del objetivo es de 42 cm y su

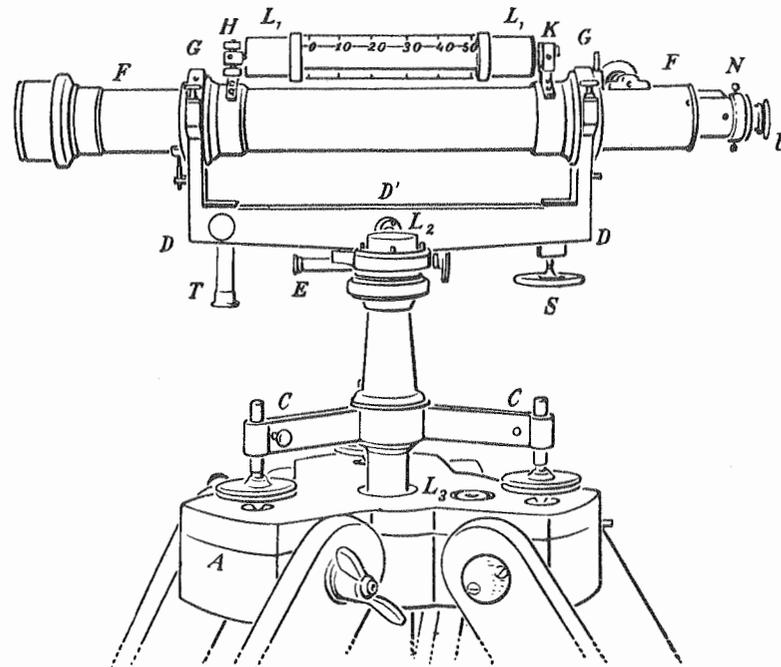


Fig. 26. — Nivel de precisión con anteojo y nivel reversibles

abertura de 4,0 cm. El aumento del anteojo es de 37 veces y la apreciación del nivel de 6,5'' por división (la escala está dividida en líneas de París).

El anteojo *F* puede girar alrededor de su eje mecánico, e invertirse en sus collares; el soporte *D* del anteojo puede girar alrededor de su punto medio, por efecto del tornillo de elevación *S*, que tiene un muelle antagonista en *T*. El nivel esférico *L*₂ sirve para nivelar el aparato, y el *L*₃ para nivelar el trípode.

En *N* y *H*, *K* se ven los tornillos de corrección del retículo y del nivel.

El tornillo de elevación *S* tiene un paso $h = 0,25$ mm y actúa sobre un brazo de palanca $\frac{TS}{2} = l = 103$ mm, de modo que a una vuelta completa del tornillo corresponde un ángulo de $\frac{0,25}{103} \rho = 501'' = 8' 21''$. La cabeza del tornillo está dividida en 100 partes iguales, correspondiendo a cada intervalo un ángulo de 5''.

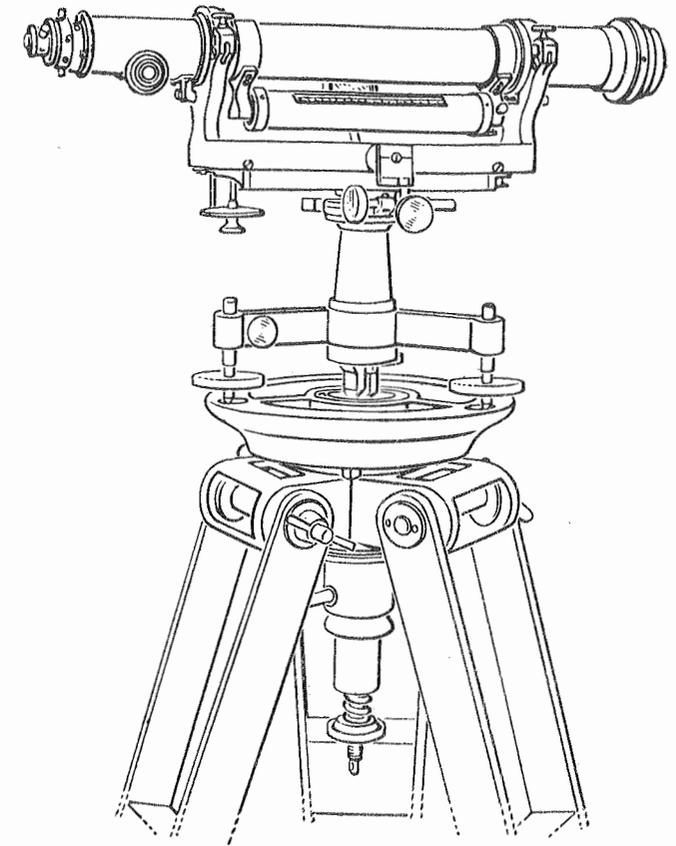
El ocular va provisto de un cristal azul *b* para cuando la luz sea excesiva.

El aparato representado en la figura 27, de la Escuela Técnica de Berlín, de anteojo reversible y nivel fijo al anteojo, fué construido por Max Hildebrand, de Freiberg, para la nivelación de la red trigonométrica de Alemania. El anteojo tiene 4 cm de abertura, la distancia focal del objetivo es de 44 cm y sus dos oculares tienen respectivamente 33 y 40 aumentos. El nivel, provisto de cámara o depósito, tiene una apreciación de 5''.

El tambor del tornillo de elevación está dividido en 100 partes iguales, con lo cual, a una división del tambor, corresponde una inclinación del anteojo de 5''.

El aparato no va dispuesto directamente sobre el trípode, sino sobre un casquete esférico, mediante el cual se puede calar rápidamente el nivel esférico del aparato para cualquier posición del trípode. Después se nivela muy bien girando un poco los tornillos nivelantes (véase página 21).

Fig. 27. — Nivel de precisión de anteojo reversible y nivel fijo al anteojo



El retículo o cruz filar consiste en un hilo vertical y dos hilos horizontales casi juntos, cuya aplicación veremos en el párrafo 14.

La figura 28 representa un equialtímetro de anteojo y nivel reversibles construido por F. W. Breithaupt, de Kassel, para las nivelaciones de precisión y obras hidráulicas del Ministerio de Agricultura de Alemania. La longitud invariable del anteojo, que es giratorio y reversible en sus collares, es de 46,5 cm; este anteojo está provisto de lente móvil de enfoque, y con una abertura de objetivo de 5 cm, tiene un aumento de 45 veces. El aparato

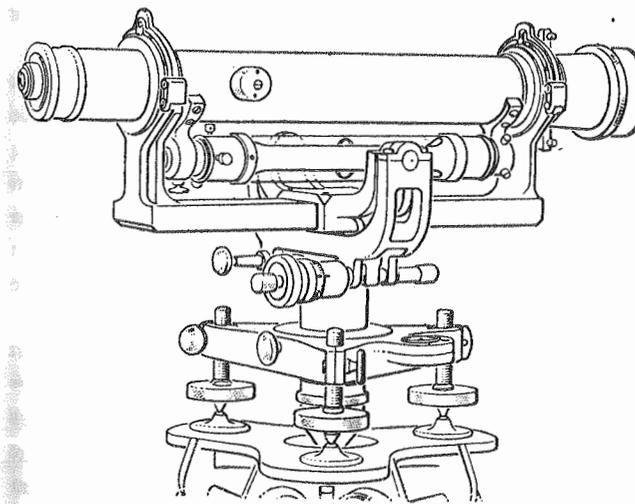


Fig. 28. — Nivel de precisión con nivel reversible

tiene dos niveles reversibles de 5" y 10" de apreciación respectivamente, que pueden cambiarse entre sí con gran rapidez. Además lleva un dispositivo para dar la vuelta al nivel sobre el anteojo, de modo que con toda sencillez puede comprobarse el paralelismo de los dos ejes del nivel (véase página 21).

El tornillo de elevación, que está colocado horizontalmente, puede emplearse también como tornillo eclimétrico o de inclinación (véase § 13).

Este aparato tiene el mismo dispositivo de centrado que el teodolito de Breithaupt descrito en el tomo I, página 305 (fig. 349, C), para abreviar las nivelaciones. Al pasar de una estación a otra se saca el anteojo, con su soporte, de la plataforma nivelante, y un ayudante coloca el trípode, con la plataforma nivelante unida al mismo, bien centrado sobre la nueva estación.

Para el método de nivelación Seibt, para el cual ha sido proyectado este aparato, véase el párrafo 14.

Este aparato ha sustituido en las nivelaciones de precisión al descrito en la página 20, de anteojo reversible y nivel fijo sobre el anteojo. La exclusión de una posible diferencia entre los diámetros de los collares del anteojo, propuesta en aquel aparato, se consigue plenamente en este último.

Este nivel presenta la ventaja de poderse comprobar de manera completamente satisfactoria y definitiva las distintas causas de error posibles, y de evitar

la dificultad proveniente de la unión no rígida de anteojo y nivel.

El aparato que vemos en la figura 29, construido por la casa Zeiss, ha sido proyectado por H. Wild en cuanto se refiere al anteojo y dispositivo de prismas para observación del nivel, del mismo modo que el representado en la figura 19.

La longitud del anteojo, provisto de lente móvil de enfoque, es de 34 cm, el diámetro del objetivo es de 4,5 cm y el aumento es de 36 veces. El nivel reversible tiene una sensibilidad de 10" por 2 mm.

El tornillo horizontal de elevación *A* puede servir también de tornillo eclimétrico (§ 13).

Tal como se ha descrito este aparato, sólo puede emplearse para leer sobre la mira del modo ordinario. Para afinar las lecturas, lleva el anteojo un dispositivo, también ideado por Wild, mediante el cual puede desviarse un poco la visual paralelamente a sí misma. Para ello se ajusta sobre el tubo portaobjetivo un manguito *M*, que se sujeta con el tornillo *S* y lleva en su interior una lámina de cristal de caras perfectamente paralelas que puede girar alrededor de un eje horizontal. Este último va unido, mediante una

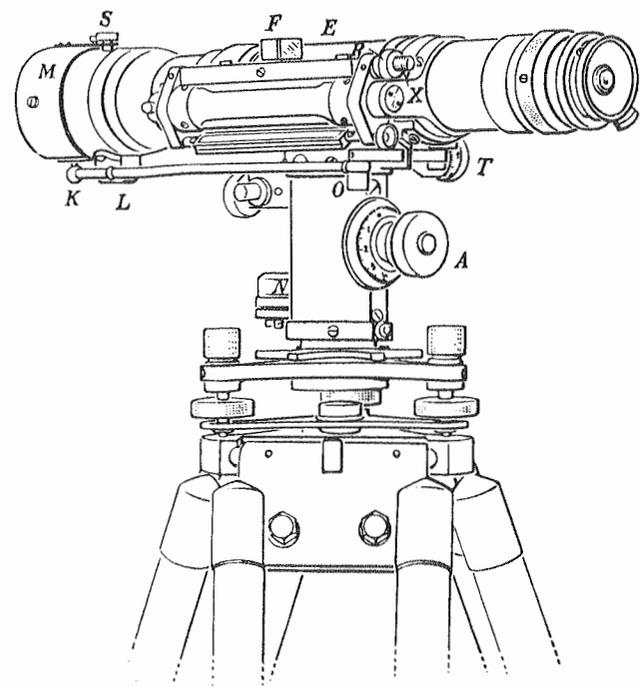


Fig. 29. — Nivel de precisión de C. Zeiss

articulación de bola *K*, a una varilla *L* que se mueve con el tambor micrométrico *T*, produciéndose así un giro de la placa de cristal alrededor de su eje horizontal.

Al girar esta placa experimenta la visual una traslación paralela, cuya magnitud puede leerse directamente sobre el tambor *T*.

En la figura 30 vemos representado esquemáticamente el dispositivo anterior. La posición normal del eje de colimación (visual) es la correspondiente al cero del tambor micrométrico; si estando el tambor en el cero se lee la mira con el anteojo, hay que apreciar como de ordinario la distancia del hilo horizontal a la división más próxima; pero si por medio del tambor *T* se lleva dicho hilo a coincidir con esta división, se puede leer directamente sobre aquélla dicha distancia. Para la manera de nivelar con este aparato, véase el párrafo 14.

También el aparato representado en la figura 19, construido por Zeiss, está provisto de una lámina de cristal de caras paralelas, pero su movimiento y dispositivo de lectura responden a una construcción más sencilla.

La casa suiza H. Wild, de Heerbrugg, construye un nivel de precisión fundado en estos mismos principios. También la casa Kern, de Aarau, Suiza, construye un aparato análogo, pero en el cual la coincidencia de los extremos de la burbuja (fig. 20) se observa en el campo del anteojo del mismo modo que para el nivel de Fennel (fig. 18).

La misma casa Fennel construye un nuevo aparato con placa de cristal oscilante; en el campo del anteojo se ve (fig. 31) la posición de la señal filar (en forma de cuña) sobre la mira, y además la burbuja del nivel y la lectura del tambor micrométrico.

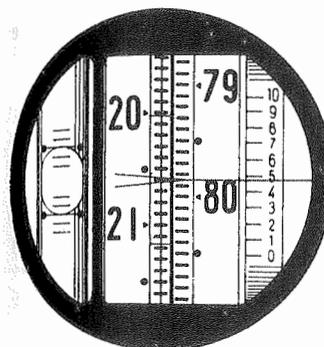


Fig. 31

La misma casa Fennel construye un nuevo aparato con placa de cristal oscilante; en el campo del anteojo se ve (fig. 31) la posición de la señal filar (en forma de cuña) sobre la mira, y además la burbuja del nivel y la lectura del tambor micrométrico.

Nivel de Heckmann. La casa Breithaupt ha construido, por indicación del ingeniero Heckmann, un equiltímetro, en el cual se puede medir también la distancia, en la mira, entre el hilo horizontal del retículo y la división de centímetro más próxima. La figura 32 representa esquemáticamente el dispositivo empleado en este aparato para conseguir dicho objeto.

En el plano imagen *B* del anteojo va fijo en *F*₁ el hilo horizontal del retículo; por delante de este plano, a una cierta distancia del mismo, va una lámina de cristal *P* de caras paralelas, que puede girar alrededor de un eje horizontal *A*. Esta lámina va unida a una varilla que, al girar aquélla, hace subir o bajar un segundo hilo horizontal *F*₂.

Para la posición normal de la lámina de cristal, coinciden los dos hilos *F*₁ y *F*₂ y la visual correspondiente a ambas encuentra a la mira en *Z*₀. Al girar la lámina *P* experimenta la visual correspondiente al hilo *F*₁ una pequeña traslación paralela dentro del

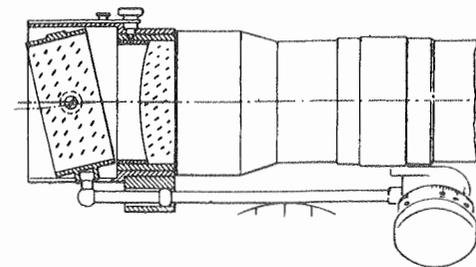


Fig. 30

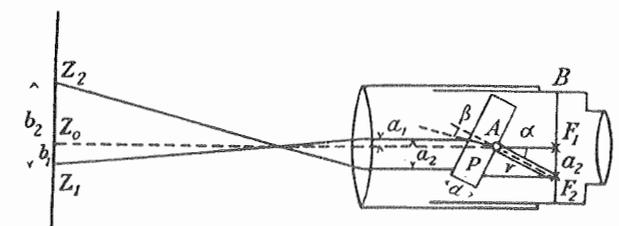


Fig. 32

Marcha de los rayos luminosos en el nivel de Heckmann-Breithaupt

anteojo, y por fuera de éste gira alrededor del foco anterior del objetivo tomando la dirección Z_1 . Al mismo tiempo y automáticamente se traslada el hilo móvil a F_2 ; la visual correspondiente a este hilo se traslada paralelamente a sí misma, experimenta después una segunda traslación al atravesar la lámina P y fuera del anteojo se desvía tomando la dirección Z_2 . En la figura 32 se tiene, para expresión del corrimiento de la visual F_1 :

$$a_1 = d (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha,$$

y por ser

$$\operatorname{sen} \beta = n \operatorname{sen} \alpha,$$

resulta:

$$a_1 = d \left(\operatorname{tg} \alpha - n \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta} \right) \cos \alpha$$

o también

$$a_1 = d \operatorname{sen} \alpha \left(1 - n \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right).$$

Para pequeños valores de α resulta también muy pequeño el de β , es decir, que puede escribirse:

$$\cos \alpha = \cos \beta = 1$$

y sustituyendo en el valor de a_1 :

$$a_1 = d \operatorname{sen} \alpha (1 - n). \quad (1)$$

Pero en la figura se ve que

$$a_2 = r \operatorname{sen} \alpha \quad (2)$$

y que

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

y sustituyendo aquí los valores (1) y (2) se tiene:

$$b_1 = b_2 \frac{d}{r} (1 - n). \quad (3)$$

Por consiguiente, dando valores convenientes a d , r y n se puede hacer que b_1 sea igual a una cierta fracción de b_2 . Para el aparato de Heckmann-Breithaupt estos valores son tales, que se tiene:

$$b_1 = \frac{1}{10} b_2.$$

De aquí se deduce la siguiente regla para el empleo de este nivel: estando calado el nivel se coloca la lámina P , mediante un botón situado cerca del ocular, de modo que el hilo horizontal F_1 coincida en la mira con la división centimétrica más próxima al mismo. Al mismo tiempo y de modo automático, se habrá trasladado el hilo horizontal F_2 a Z_1 , y la diferencia entre ambas lecturas Z_1 y Z_2 es igual a b_2 . Luego la lectura correspondiente a la visual horizontal será:

$$Z_0 = Z_1 + \frac{1}{10} b_2. \quad (4)$$

El aparato tiene el mismo aspecto y construcción que el representado en la figura 15, pero delante del ocular lleva una especie de cámara, que se encaja sobre el anteojo, en la cual va el dispositivo para el movimiento de los dos hilos del retículo. El primer hilo F_1 (hijo) está materializado por una raya sobre una laminilla de cristal, del modo representado en la figura 33, en la cual se ve este hilo en forma de horquilla o cuña; los otros dos hilos, uno superior y otro inferior, sirven para medir distancias (véase capítulo IV).

Este aparato se emplea con una mira apropiada, que se ve en las figuras 34 y 35. En la posición normal de la lámina giratoria (fig. 34), para la cual coinciden los dos hilos, se lee en centímetros enteros 1,36. En la figura 35, en que se ha llevado el hilo fijo a

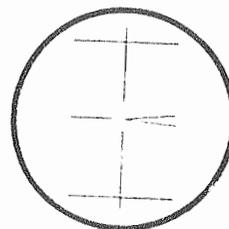


Fig. 33
Disposición de los hilos

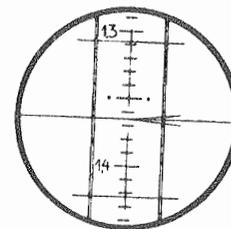


Fig. 34
Lectura aproximada 1,36

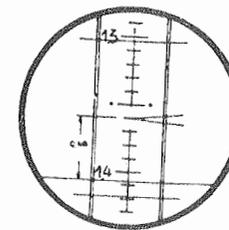


Fig. 35
Lectura final 1,3648

coincidir con la división más próxima (1,36), se ve que la distancia entre los dos hilos es de 0,048; por lo tanto, según la fórmula (4), se tendrá para valor definitivo de la lectura:

$$1,36 + 0,0048 = 1,3648.$$

Nivel cruzado. Se dice que el nivel está cruzado cuando su eje no es paralelo al eje de colimación o eje visual del anteojo, es decir, cuando los dos ejes no están en un mismo plano vertical.

Ya hemos visto anteriormente el modo de corregir y evitar esta falta de paralelismo; ahora vamos a estudiar el efecto que la misma puede producir sobre las nivelaciones.

Supongamos que el eje del nivel no esté en el mismo plano vertical del eje visual, sino que ambos ejes formen entre sí un pequeño ángulo φ .

Las figuras 36 a y b representan, en proyección vertical, el anteojo F con el nivel L , y las figuras 36 c y d la proyección horizontal del mismo. En estas figuras, FF es el eje del anteojo, y al mismo tiempo eje de rotación de anteojo y nivel. El eje del nivel ALB forma, en proyección horizontal, un ángulo φ con el eje del anteojo, por lo cual, en la proyección vertical, está representado por un segmento $AB=2y$, en vez de estarlo por un punto L .

En la figura 36 b se supone que se ha dado al nivel un pequeño giro α alrededor del eje del anteojo, viéndose en la proyección vertical el segmento $A'B'=2y$ formando con la horizontal el mismo ángulo α , correspondiente a una diferencia de altura h entre los puntos A' y B' . Esta diferencia será:

$$h = A'B' \operatorname{sen} \alpha = 2y \operatorname{sen} \alpha. \quad (5)$$

Fig. 36 a

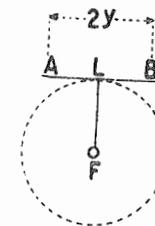


Fig. 36 b

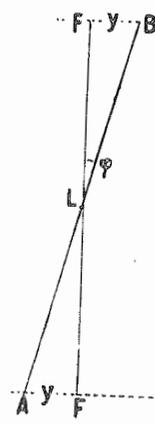
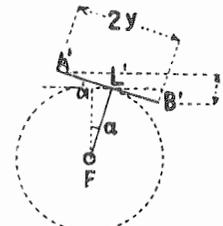


Fig. 36 c

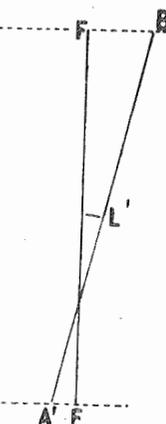


Fig. 36 d

Ahora bien, para una longitud l del eje del nivel, se tiene (fig. 36 c):

$$y = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2} \varphi$$

y sustituyendo en la fórmula (5):

$$h = l \varphi \operatorname{sen} \alpha$$

o bien

$$\frac{h}{l} = \varphi \operatorname{sen} \alpha = n. \quad (6)$$

Ésta es la inclinación del nivel a causa de su cruce con el eje del anteojo, o, también, la inclinación de la visual si se coloca el nivel horizontalmente en la dirección de aquélla. Es decir, que el valor $\varphi \operatorname{sen} \alpha$ es el error que estamos estudiando.

A primera vista se observa que este producto $\varphi \operatorname{sen} \alpha$ es muy pequeño, porque a su vez lo son φ y α , y en los teodolitos no hay que tenerlo en cuenta siquiera.

En cambio, en los equialtímetros puede tener efecto apreciable este producto $\varphi \operatorname{sen} \alpha$. Procediendo con poco cuidado, puede alcanzar el cruce φ un valor $1^\circ = 3600''$; y si el ángulo α es sólo de $1'$, el producto $\varphi \operatorname{sen} \alpha$ valdrá $3600'' \operatorname{sen} 1' = 3600'' : \rho' = 1''$; como se ve, el error puede ser bien apreciable. Ahora bien, el giro α puede con facilidad ser algo mayor, y de ésta y de las anteriores consideraciones se deduce la regla siguiente:

1. En todo aparato de precisión debe darse al anteojo con el nivel un giro grande lateral α , alrededor del eje del primero, con lo cual resulta muy fácil descubrir el error φ . Después de corregir este error φ por medio de los tornillos laterales de corrección del nivel, hay que procurar, mediante algún tope o dispositivo apropiado, que no pueda producirse un giro accidental α del anteojo con el nivel. En el aparato representado en la figura 26 se evita este giro con los tornillos que hay sobre D .

2. En los aparatos en que el anteojo y el nivel van fijos al soporte, no hay que tener en cuenta el error de cruce del nivel para nivelaciones poco precisas, por ejemplo, para levantamientos de perfiles transversales; pero si se emplean estos aparatos para trabajos más precisos, por ejemplo, para perfiles longitudinales, se procede del modo siguiente: se coloca el aparato, una vez hechas las otras correcciones, de modo que el eje visual sea paralelo a la línea de unión de dos tornillos de la plataforma nivelante, y se lee sobre una mira. Se ve entonces, al mover el tercer tornillo nivelante, que es el que produce una desviación transversal, si varía la lectura de mira, calando de nuevo el nivel con los dos primeros tornillos nivelantes. Claro está que al hacer girar el tercer tornillo tiene que variar un poco la lectura de mira, a causa de la variación de altura del aparato mismo; pero es siempre muy pequeña, y si se quiere, en caso necesario puede hacerse intervenir en el cálculo.

El cruce del nivel tiene gran importancia en la nivelación: con mucha frecuencia nos hemos limitado, después de calar un nivel esférico, a calar el nivel del anteojo sólo en la dirección de cada visual, pero este procedimiento puede emplearse solamente cuando se esté seguro de que no hay desviación apreciable entre el nivel principal y el eje del anteojo.

Convergencia del eje del nivel y del eje de colimación. Una comprobación expeditiva de la posición del eje del nivel respecto al eje de colimación del anteojo se tiene en la prueba que diariamente se hace antes de empezar el trabajo, determinando la diferencia de altura entre dos puntos, una vez con iguales distancias de mira y la segunda vez con distancias desiguales. El error obtenido en esta segunda medición se divide por la diferen-

cia entre las distancias visuales y se tiene así la convergencia entre el eje de colimación y el del nivel, por unidad de longitud de la visual.

Esta convergencia puede también utilizarse en el cálculo de la corrección de un itinerario de nivelación, cuando la suma de las visuales de espalda no sea igual a la de las visuales de frente.

Hay que tener en cuenta que si en la nivelación se toman las lecturas con tres hilos horizontales, para determinar el error de convergencia hay que emplear la media aritmética de las tres lecturas.

Variabilidad del eje de colimación, o eje visual. Los procedimientos que hemos propuesto para corregir los niveles están fundados, en su mayor parte, en la invariabilidad del eje de colimación; pero únicamente se puede prescindir de esta hipótesis cuando al nivelar se hacen iguales las distancias de las niveladas de espalda y de frente.

La posición del eje de colimación en los anteojos de enfoque por movimiento del ocular, depende de este movimiento precisamente. Según vimos en el tomo I, página 258, el eje de colimación es una recta cuando el ocular se mueve en línea recta. Si hay irregularidades en el movimiento del ocular, se producen también desviaciones del eje de colimación, que hacen que éste deje de ser una línea recta.

En los anteojos de enfoque por lente especial móvil, la posición del eje de colimación depende del movimiento de esta lente de enfoque, como se vió en el tomo I (pág. 260). Aun para el movimiento rectilíneo de esta lente, el eje de colimación resulta en general una línea ligeramente curva, pero tan poco, que prácticamente se puede considerar como una línea recta. Las irregularidades en el movimiento de la lente de enfoque producen también aquí desviaciones de la forma rectilínea en el eje de colimación.

Para determinar en un equialtímetro el error correspondiente a la forma curvilínea del eje visual, se toma una base recta de 165 m, se divide en once partes iguales de 15 m, y se señalan de modo permanente los doce puntos de división. El nivel se va colocando en el medio de los once tramos sucesivos, y cada vez se leen las miras colocadas en los doce puntos de división. La comparación de las diferentes lecturas indica la forma en que se mueve el tubo portaocular.

Para asegurarse del movimiento correcto del ocular, cuando el aparato no tiene dispositivo especial para ello, se empieza por corregir el aparato del modo que representa la figura 23, y después de haber estacionado y corregido en J_1 y J_2 , se vuelve a colocar el nivel en varias estaciones más, a diferentes distancias de A y B , y se ve si se obtiene la verdadera diferencia de altura, que es el desnivel obtenido desde J_1 .

Curvatura del anteojo. El centrado del retículo en un aparato de anteojo reversible sólo da lugar al paralelismo entre el eje de colimación y el eje mecánico del anteojo, cuando se considera este último como un cuerpo rígido. Pero si se supone que el anteojo se pueda curvar un poco, puede darse el caso de que los extremos objetivo y ocular no bajen exactamente la misma cantidad, dando lugar a una inclinación del eje de colimación. Si se gira el anteojo 180° alrededor de su eje mecánico, se tiene el mismo error en su nueva posición, y por lo tanto el centrado del retículo no puede descubrir por sí solo la curvatura del anteojo.

Para descubrir este defecto, pueden seguirse varios procedimientos. Con dos miras y dos puntos auxiliares se puede situar horizontalmente el eje de colimación, como se ha visto en la página 23. Antes de centrar el retículo se mide con el nivel la inclinación del

eje mecánico del anteojo, y el ángulo obtenido es igual a la curvatura del anteojo. Este procedimiento, para obtener resultados de bastante precisión, es de ejecución laboriosa y pesada.

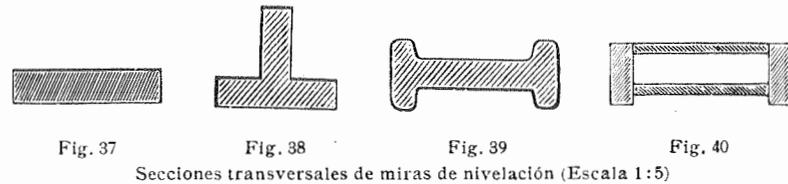
Hay otro procedimiento, muy empleado, que se lleva a cabo con más de un aparato, para ello se enfocan los retículos de dos anteojos al infinito y se colocan los dos aparatos uno frente a otro de tal modo que coincidan sus ejes de colimación, y con los niveles se mide la suma de las curvaturas de los dos anteojos. Si se dispone de tres aparatos se puede hallar la suma de las curvaturas de cada dos de ellos, y deducir de éstas la de cada uno de los anteojos.

§ 10. Miras de nivelación

Las miras de nivelación tienen de 2 a 4 m de longitud y están hechas, generalmente, de madera de abeto.

Con una sola mira se puede nivelar; pero como en cada estación del nivel hay que llevar la mira del punto de espalda al de frente, es mejor emplear dos miras.

La sección transversal de una mira puede ser simplemente de forma rectangular (unos 10×3 cm), como se ve en la figura 37. Para evitar el alabeo se hace la sección



Secciones transversales de miras de nivelación (Escala 1:5)

transversal en forma de T (fig. 38) o de doble T (fig. 39); en este último caso, los rebordes sirven al mismo tiempo para proteger las divisiones. También presenta muchas ventajas la mira de sección en forma de bastidor rectangular (fig. 40).

Los extremos de las miras van protegidos con piezas metálicas bien fuertes.

Para facilitar el transporte puede dotarse a las miras de dispositivos para plegarse o embutirse unos trozos en otros; pero tratándose de nivelaciones de precisión, no deben emplearse más miras que las rígidas y enterizas.

Para preservar las miras de la humedad se les dan varias manos de pintura de aceite, después de haberlas desecado perfectamente.

La unidad de división es ordinariamente 1 cm; en las nivelaciones corrientes (perfiles longitudinales y transversales) no se pasa del centímetro de aproximación; en cambio, para nivelaciones de precisión se necesitan divisiones de medios centímetros o de intervalos aún menores, hasta 1 mm. Para las nivelaciones ordinarias se divide la mira simplemente con un compás, señalando los puntos de división con trazos normales a los bordes de aquella. Para miras de precisión, hay que emplear la máquina de dividir.

Únicamente en casos particulares puede resultar ventajoso el empleo de miras con las divisiones marcadas por medio de trazos lineales o rayas; siempre son mejores las miras de trazos gruesos en colores: blanco y rojo o blanco y negro. El orden de los trazos puede ser muy variable, aunque actualmente sólo se emplean, con ligeras variaciones, las formas representadas en las figuras 41 y 42. En la mira de la figura 41, los decímetros van pintados alternativamente en la mitad derecha y en la mitad izquierda de la cara delantera,

los medios decímetros van también claramente indicados. En la figura 42 se ve una mira con las divisiones «en casillero»; para evitar el error de irradiación lleva dos series de divisiones centimétricas, paralelas e inmediatas pero corridas en un centímetro una respecto a otra. El error de irradiación consiste en que, cuando la mira está fuertemente iluminada, los trazos blancos se ven más grandes que los negros o rojos, aunque realmente sean iguales entre sí. A causa de la disposición de las dos divisiones en la figura 42, los errores aparentes de ambas obran en sentido contrario.

El cero de la división coincide, generalmente, con el extremo inferior de la mira, pero esta condición no es necesario que se cumpla en todas las miras. Cuando se emplean a la vez dos miras, debe conocerse la diferencia de altura entre sus ceros, lo cual se consigue con una simple medición con el nivel.

Más importancia tiene la numeración de la mira. Como los anteojos empleados son astronómicos, conviene pintar los números invertidos, es decir, al revés, para verlos al derecho al hacer la lectura, como se ve en las figuras 41 y 42. Los números están ordenados de modo que sea casi imposible cometer un error de lectura. En las figuras 41 y 42, cada número va dentro del decímetro a que corresponde, de modo que, por ejemplo, todas las lecturas hechas sobre el decímetro que lleve el número 0,5, empiezan también con 0,5. Para comprobar, llevan estas miras otra serie de números, dispuestos cada uno en el decímetro anterior al que le corresponde.

Da muy buenos resultados, para evitar los errores groseros de lectura, la mira con numeración *horizontal*, como la que representa la figura 46. Las miras de las figuras 41 y 42 llevan también (pintados en rojo) los números correspondientes a los complementos aritméticos, de los cuales ya tratamos en la página 6.

Miras reversibles. También se emplean miras pintadas por las dos caras, de tal modo que las cifras de una y otra den, por suma o diferencia, una cantidad constante cualquiera. De estas miras, merece especial atención la de Vogler, en la cual una de las dos divisiones va corrida respecto a la otra en $\frac{1}{2}$ intervalo (0,5 cm) con objeto de eliminar el error de apreciación (véase § 17), y numeradas de tal modo que la escala de una es la continuación de la otra, es decir, que si la cara anterior va graduada de 0 m a 3 m, la posterior lo está de 3 m a 6 m.

Miras para la lectura directa de alturas. Para el levantamiento de perfiles longitudinales y transversales, así como para la nivelación de superficies no muy extensas, se emplean muchas veces miras que dan directamente, sin necesidad de cálculo alguno, la altura del punto del terreno.

A esta clase de miras corresponde la representada en la figura 43, provista de una división en decímetros, suficiente para las nivelaciones ordinarias de poca precisión. La

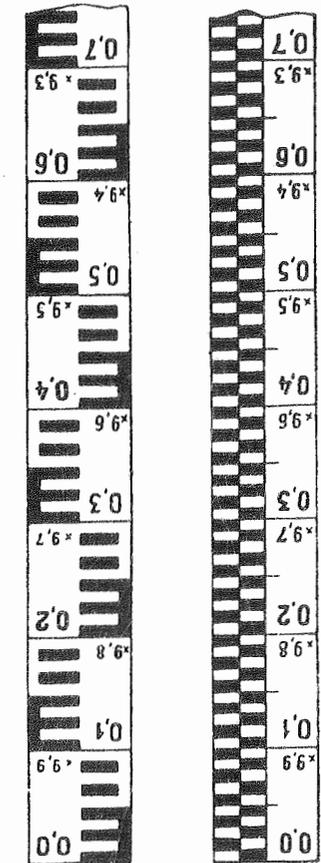


Fig. 41

Fig. 42

numeración crece de arriba hacia abajo y cada metro va indicado por una letra (A, B, C), que se repite en los decímetros del mismo metro. En el extremo inferior de la mira va una corredera, con la cual puede aquélla elevarse hasta 1 m sobre el suelo.

Esta mira se emplea del modo siguiente: supongamos que el punto de arranque del itinerario de nivelación tenga una altura, aproximada al centímetro, de 37,86 m. Se sube la mira, por medio de la corredera, hasta que con el anteojo se lea, en cualquiera de los tres metros, los ...,86, por ejemplo, B, 86; se fija la corredera en esta posición, y las tres letras A, B, C, equivalen respectivamente a 36, 37 y 38 m, de modo que la lectura sobre la mira habrá sido realmente 37,86. Si estando el aparato en la misma estación, y sin variar la posición de la corredera se va colocando la mira en distintos puntos del terreno, las lecturas irán dando directamente la altura de cada uno de aquéllos.

Para cada nueva estación del aparato hay que variar la posición de la corredera.

En este principio está fundada la construcción de una mira por la casa Dennert y Pape, de Altona, pero en la cual la mira móvil o principal se desliza sobre otra mira fija, que puede emplearse al mismo tiempo para otros usos (nivelación de puntos permanentes, etc.).

Hay otras muchas miras construídas con este mismo objeto: por ejemplo, una que lleva una tira móvil y numerada, de modo que para cada posición del anteojo puede emplearse, en su campo, una cifra cualquiera para los decímetros. En este caso puede reducirse a 1 m la longitud de la corredera.

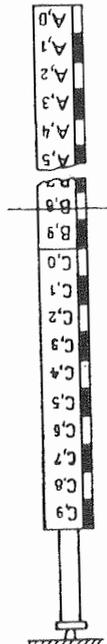


Fig. 43

Miras para nivelaciones de precisión. Para las nivelaciones ordinarias, de poca precisión, bastan, con ligeras variaciones, las disposiciones que se han visto en las miras de las figuras 41 y 42; pero tratándose de nivelaciones de precisión, cada método especial requiere también su mira especialmente dividida y numerada.

En la figura 44 se ve (a escala 1:5) una mira dividida en medios centímetros, tal como se empleaba antes en Alemania. A la izquierda lleva una numeración, de abajo hacia arriba, y a la derecha, señalada con espas X, otra numeración, de arriba hacia abajo, correspondiente a los complementos aritméticos de la primera. Cada dos números correspondientes a la misma división suman 100, por ejemplo:

$$60 + \times 40 = 100, \quad 59 + \times 41 = 100, \text{ etc.}$$

La aplicación de los complementos la hemos visto ya en el párrafo 3 (pág. 6).

En la figura se ve claramente el modo de estacionar esta mira sobre el terreno.

La figura 45 representa una mira con divisiones lineales, de medio en medio centímetro, de la cual trataremos en el párrafo 14.

En la figura 46 se ve la mira empleada en la nivelación de Francia; la división en centímetros corresponde a distancias visuales de hasta 170 m; la de medios centímetros, a distancias menores de 85 m, y la división en dobles milímetros es para visuales que no lleguen a los 35 m. La numeración horizontal, en cifras pequeñas, sirve para evitar los errores de lectura. El espesor o grosor de las rayas de división es distinto en los tres grupos de divisiones de tal modo que siempre resulta igual a la sexta parte de un intervalo.

La figura 47 representa la mira de Seibt, con numeración en dobles decímetros y divisiones de 4 mm de grosor. Las dos caras opuestas de la mira llevan en el extremo inferior

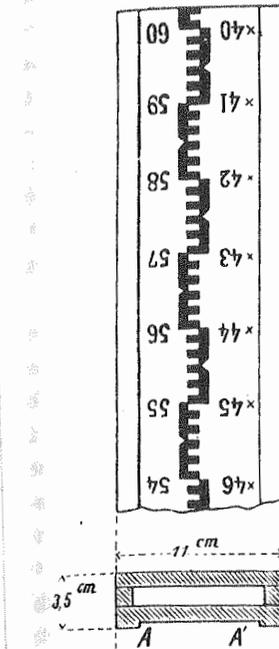


Fig. 45. - Mira de divisiones lineales (1:5)

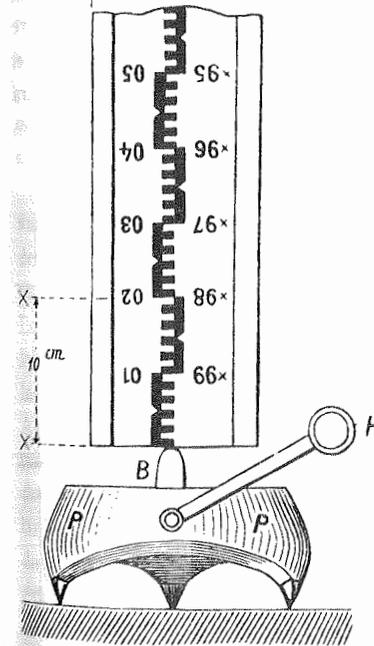


Fig. 44. - Mira dividida en medios centímetros. Escala 1:5

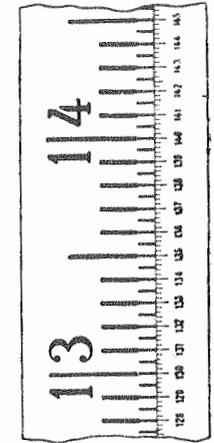
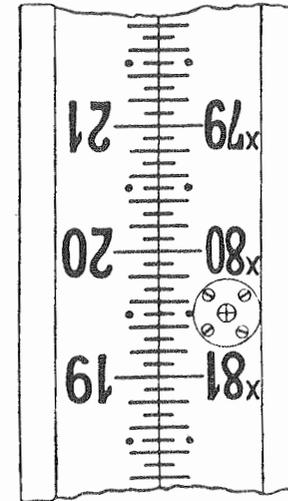


Fig. 46. - Mira francesa de divisiones lineales

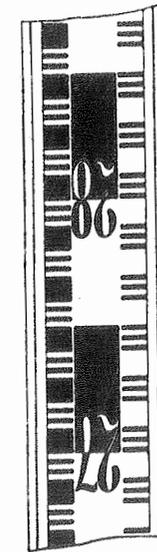


Fig. 47. - Mira de Seibt

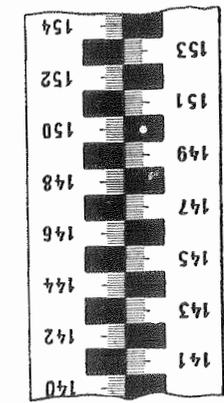


Fig. 48. - Mira del Servicio topográfico suizo

En la figura 48 se ve la mira empleada en el Servicio topográfico suizo, dividida en milímetros. Los espacios centimétricos blancos están divididos en milímetros (con la

el número 20; en la cara delantera llega la numeración hasta el 35 (en dobles decímetros), y en la posterior baja hasta el 5. Las lecturas correspondientes en las dos caras dan una suma constante e igual a 40, y su diferencia da la altura de la visual en decímetros simples.

Por ejemplo, las dos lecturas 27,43 y 12,56 dan de suma 40,00, y su diferencia 14,87 significa que la altura de la visual es 1,487 m (véase el párrafo 14).

máquina de dividir). Para distancias visuales cortas y grandes aumentos (40 veces) pueden leerse perfectamente fracciones de milímetro.

La mira representada en la figura 49, construída por C. Zeiss, tiene 3 m de longitud, es de madera, con sección en forma de U y lleva los dos extremos protegidos por caperuzas de acero a las cuales van unidos los extremos de una tira de metal invar, de 26 mm de anchura, que va alojada en una caja de iguales dimensiones practicada en la mira. La tira lleva dos divisiones en medios centímetros, pero *defasadas* una respecto a otra en 2,5 mm. La numeración de la primera división va de 0 a 60, y la de la segunda de 60 a 120. Esta mira corresponde al nivel Zeiss representado en la figura 29. En el párrafo 14 estudiaremos el método de nivelación en que se emplea esta mira.

La figura 50 representa la mira de división transversal ideada por Hänel y construída por Rosenberg, de Berlín, en la cual se hacen las lecturas siguiendo el principio de las escalas transversales. Por ejemplo, si el hilo horizontal del retículo cae en *FF*, la lectura será 1,4672. Para esta clase de divisiones no hay que limitarse a los milímetros, sino que con un aumento suficiente del anteojo, se puede leer perfectamente la décima de milímetro.

También puede leerse de otro modo, cuando en vez del hilo horizontal tiene el retículo un hilo inclinado, con igual inclinación que las divisiones transversales de la mira. En la figura 50 se ve en *F'F'* este hilo inclinado, juntamente con el hilo vertical del retículo; como punto de mira para las lecturas se toma el de intersección de ambos hilos, y para la lectura exacta se hace girar

un poco el aparato alrededor de su eje general (vertical), estando calado el nivel, hasta que el hilo inclinado caiga precisamente en la mitad de un intervalo de la mira, como se ve en la figura. Hecho esto se lee primero sobre el borde izquierdo de la mira, teniéndose, en el caso de la figura, la lectura 1,415; después se agrega la elevación del punto de mira sobre el punto en que el hilo inclinado corta al borde izquierdo de la mira, con toda sobre el hilo vertical, que en nuestro caso es igual a 0,64 de un intervalo, o sea a 0,0064 m; es decir, que la lectura definitiva es $1,415 + 0,0064 = 1,4214$.

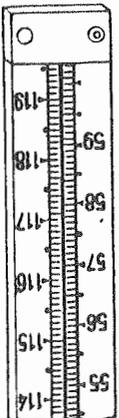


Fig. 49. — Mira de metal invar, de C. Zeiss

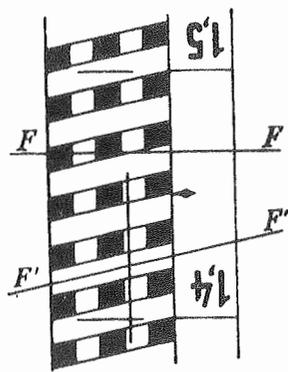


Fig. 50. Mira con divisiones inclinadas

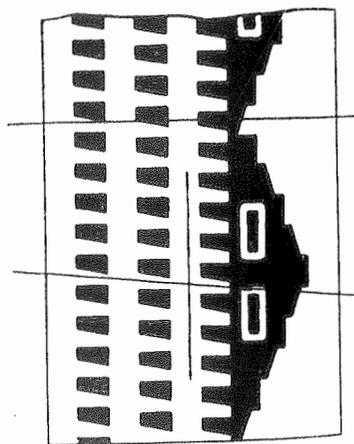


Fig. 51. — Mira de Dieperink

La figura 51 representa la mira nivelante de Dieperink, fundada en el mismo principio de las escalas transversales, pero los milímetros están determinados por el punto medio de la distancia entre dos señales, como se ve en la parte inferior de la figura para todos los milímetros de un centímetro. Los centímetros están

claramente indicados, mediante resaltes distintos, en la parte de la derecha de la mira. Cada decímetro empieza en la base del resalte que más penetra hacia la izquierda. La lectura de la mira, hecha con el hilo horizontal, tal como se ve en la figura, es de 0,1057 m.

También puede emplearse para leer esta mira un hilo inclinado.

Esta mira, una vez adquirida la práctica suficiente en su manejo, es de gran valor y presta excelente servicio.

Miras nivelantes para trabajos en minas. En la figura 52 se ve la mira de Schmidt (en escala 1 : 12,2) especial para nivelar en galerías de minas y en túneles, trabajo que no ofrece dificultad alguna y que puede verificarse con miras ordinarias de 1,5 ó 2 m de longitud, alumbradas con lámparas, linternas, antorchas, etc. La lámpara de acetileno, que tanto se emplea, produce una iluminación excelente, no siendo necesario iluminar el retículo del anteojo.

La mira de Schmidt lleva, en primer lugar, una corredera-alargadera (con los tornillos de presión *p* y la varilla reguladora *f*), más necesaria en el espacio siempre reducido de un túnel o galería que en campo abierto; de este modo puede darse a la mira una longitud comprendida entre 1,5 m y 2,7 m, dada por el índice *Z*. En *d* va un nivel esférico ordinario. Para iluminar la mira sirve la lámpara *L*, que puede correrse a todo lo largo de la mira, con la llama oculta al observador.

También se emplean en las nivelaciones mineras miras transparentes, iluminadas por detrás, y miras cortas, suspendidas de la armadura de las galerías.

El defecto que presentan las miras de madera, de variar de longitud de modo irregular, que para grandes desniveles tiene reconocida importancia, da lugar, cada vez más, al empleo de miras metálicas (fig. 49). Los primeros ensayos tropezaron con la dificultad de la medición continua de temperaturas. Para las nivelaciones de precisión construyó la Escuela Superior de Agricultura de Berlín, por indicación de Vogler, dos miras metálicas, cada una de las cuales consistía en dos láminas de acero divididas en decímetros y otra lámina de zinc, colocada entre las dos primeras, unidas entre sí por su extremo superior. La lectura de este termómetro metálico se hacía con ayuda de una escuadra graduada, en el extremo inferior de la mira (véase tomo I, fig. 71); las lecturas de la escuadra se tomaban para todas las lecturas de mira, pero con cielo cubierto no se leían con tanta frecuencia. Toda la mira iba encerrada en una cubierta de aluminio, con aberturas solamente en los puntos correspondientes a las divisiones decimétricas, para poder hacer las lecturas.

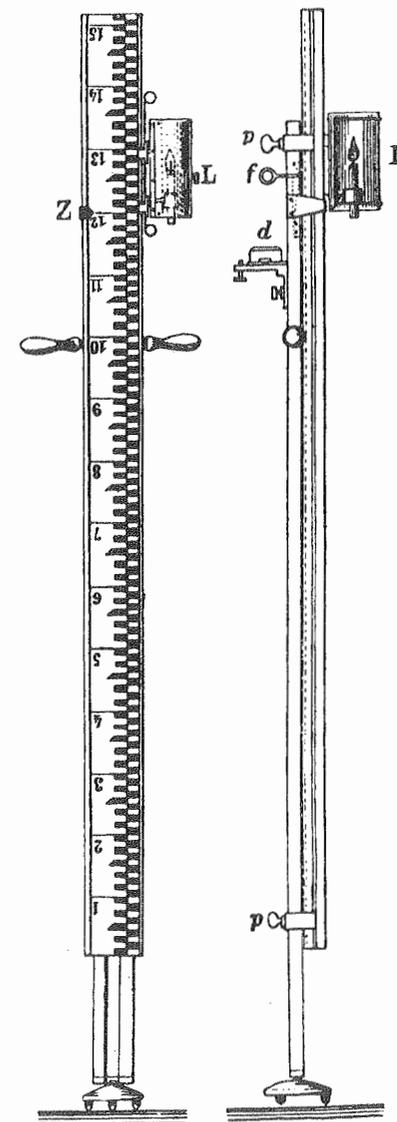


Fig. 52. Mira para trabajos mineros (Escala 1:12,2)

La mira de Schell consiste en una regla de ferroníquel, con divisiones en decímetros y protegida con una cubierta de madera. A causa de la poca dilatación del ferroníquel, se toma la temperatura con dos termómetros de mercurio fijados a la regla metálica.

Tanto esta regla como la de Vogler se emplean sólo para niveles especiales de gran precisión (véase § 14).

También Musil ha construido una mira nivelante de metal invar, dividida en centímetros. La mira propiamente dicha es de madera y lleva una tira de metal invar en cada cara; las dos tiras van unidas por el extremo inferior al casquete o regatón de la mira y pueden dilatarse libremente.

Las miras nivelantes con metal invar se están empleando cada vez más, y es de creer que poco a poco irán sustituyendo a las miras ordinarias de madera.

Mira parlante del Instituto Geográfico y Catastral de España. Esta mira, representada en la figura 53, presenta la enorme ventaja, por una ingeniosa combinación de colores, de permitir la localización de un error grosero de lectura, como vamos a ver seguidamente.

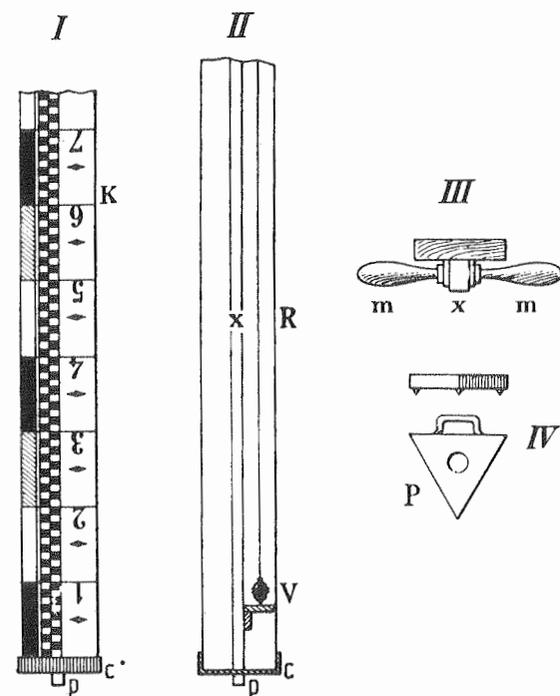


Fig. 53. — Mira parlante del Instituto Geográfico y Catastral

La cara anterior, I, va dividida, verticalmente, en cinco fajas o columnas; la primera lleva los decímetros, pintados alternativamente de negro, blanco y rojo; la segunda, pintada de blanco, sólo sirve para separar la primera de la tercera; ésta y la cuarta van divididas en centímetros, alternativamente blancos y negros y de tal modo dispuestos que cada centímetro blanco de una de ellas cae frente a uno negro de la otra, y al contrario; la faja quinta y última lleva la numeración de los decímetros, tal como se ve en la figura.

Dada la disposición de los colores de la faja primera, se comprende fácilmente que las lecturas de mira en que la cifra de metros y decímetros sea múltiplo de 3 corresponden a color negro; cuando estas cifras dan un múltiplo de 3 más uno, el color será blanco; y

cuando dichas cifras sean un múltiplo de 3 menos uno, el color será rojo; de este modo, anotando el color al hacer las lecturas, se tiene un dato de gran valor para descubrir algún error grosero en aquéllas, evitándose en muchas ocasiones tener que volver al campo para rectificar lecturas, ya que en gabinete puede verse si el error resultante se debe a alguna lectura equivocada.

Para las nivelaciones de precisión emplea el Instituto Geográfico español una mira del mismo modelo que la anterior, pero con numeración horizontal para los centímetros y nivel esférico provisto de tres tornillos para su rectificación. Esta mira lleva un trípode especial para mantenerla verticalmente sin movimiento alguno, y tiene adosado un listón dividido en decímetros, pintados sucesivamente de negro, blanco y rojo, pero *defasados* un lugar respecto a los de la mira anterior.

Cerca de cada uno de los extremos de esta mira, van muy bien incrustadas unas plaquitas metálicas, que llevan grabados unos puntos para estudiar la variación de longitud de las miras. Estas plaquitas van cubiertas por unas tapas metálicas, fijadas a la mira y selladas para que no puedan tocarse durante las operaciones de campo.

Consta la regla nivelante del Instituto Geográfico y Catastral español de una regla *R* de madera de 3,05 m de longitud, 0,10 m de anchura y 0,02 m de grosor; en la cara posterior, II, lleva un refuerzo, consistente en un listón de madera *x*, para evitar el menor alabeo de la mira y asegurar su rigidez. En el extremo inferior lleva una cantonera de hierro *c*, con un pivote *p* de base esférica, el cual entra en un alojamiento practicado en el centro de una plancha *P*, que se coloca sobre el terreno. El listón de refuerzo tiene un taladro, por el que pasan y se atornillan una sobre otra dos agarraderas *m*, que sirven para sujetar la mira en posición vertical; para asegurar la verticalidad de la mira sirve la plomada *V*, suspendida del mismo listón.

La cara anterior, I, va dividida, verticalmente, en cinco fajas o columnas; la primera lleva los decímetros, pintados alternativamente de negro, blanco y rojo; la segunda, pintada de blanco, sólo sirve para separar la primera de la tercera; ésta y la cuarta van divididas en centímetros, alternativamente blancos y negros y de tal modo dispuestos que cada centímetro blanco de una de ellas cae frente a uno negro de la otra, y al contrario; la faja quinta y última lleva la numeración de los decímetros, tal como se ve en la figura.

Dada la disposición de los colores de la faja primera, se comprende fácilmente que las lecturas de mira en que la cifra de metros y decímetros sea múltiplo de 3 corresponden a color negro; cuando estas cifras dan un múltiplo de 3 más uno, el color será blanco; y

cuando dichas cifras sean un múltiplo de 3 menos uno, el color será rojo; de este modo, anotando el color al hacer las lecturas, se tiene un dato de gran valor para descubrir algún error grosero en aquéllas, evitándose en muchas ocasiones tener que volver al campo para rectificar lecturas, ya que en gabinete puede verse si el error resultante se debe a alguna lectura equivocada.

Para las nivelaciones de precisión emplea el Instituto Geográfico español una mira del mismo modelo que la anterior, pero con numeración horizontal para los centímetros y nivel esférico provisto de tres tornillos para su rectificación. Esta mira lleva un trípode especial para mantenerla verticalmente sin movimiento alguno, y tiene adosado un listón dividido en decímetros, pintados sucesivamente de negro, blanco y rojo, pero *defasados* un lugar respecto a los de la mira anterior.

Cerca de cada uno de los extremos de esta mira, van muy bien incrustadas unas plaquitas metálicas, que llevan grabados unos puntos para estudiar la variación de longitud de las miras. Estas plaquitas van cubiertas por unas tapas metálicas, fijadas a la mira y selladas para que no puedan tocarse durante las operaciones de campo.

Colocación de las miras. Para fijar las miras sobre los puntos del terreno se emplean unas planchas pesadas, de unos 2,5 Kg cuando menos; la que se ve en la figura 44 pesa unos 5 Kg. Estas planchas llevan en su cara superior un resalte o simplemente una cierta convexidad para colocar la parte plana del regatón de la mira; es muy corriente que este regatón lleve practicado un alojamiento para que se introduzca en el mismo el resalte de la plancha.

Además de estas planchas o pies de hierro, se emplean también unas varillas de acero que se clavan en el suelo y que con gran facilidad se arrancan del mismo al pasar de una estación de mira a otra. Estas varillas se emplean en los trabajos de nivelación de Dinamarca.

También en Alemania se han empleado, para la rectificación de las pistas automovilistas, no sólo los pies de hierro, sino varillas de madera dura, con excelente resultado.

Para colocar bien verticalmente la mira se emplea un nivel esférico, montado en la cara posterior de la misma o en uno de los costados, o una plomada de fácil manejo.

La mira se sujeta con dos manillares o asas, dispuestas a los lados de aquélla. Para asegurar la inmovilidad de la mira, sobre todo cuando hay viento fuerte, se emplean dos varillas de madera o dos cañas de bambú que se clavan en el suelo y que el portamiras sujeta al mismo tiempo que la mira, como se ve en la figura 54.

Precisión y comprobación de las miras. Para nivelaciones de poca importancia es suficiente que la longitud de la mira tenga una aproximación de $\frac{1}{4}$ mm por 1 m. Para comprobar esta aproximación resulta muy cómodo el empleo de una regla de dibujo (de hoja de sierra), que se va aplicando a cada dos intervalos milimétricos, sobre la mira. La longitud de la regla se comprueba por comparación con un metro normal (fig. 55), de modo que se tenga

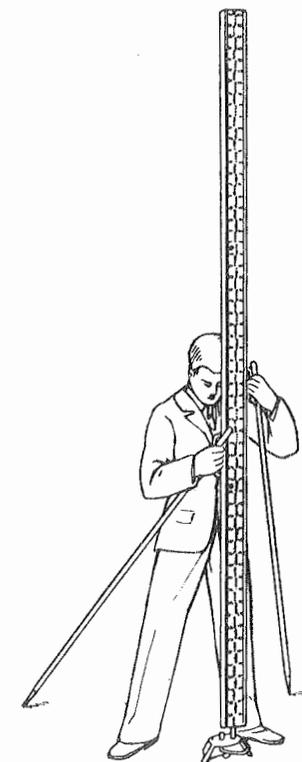


Fig. 54

para cualquier temperatura una exactitud de 0,1 mm. Procediendo así puede medirse la longitud de un metro de mira en un sitio cualquiera de la longitud total de la misma.

Cuando hay desniveles grandes en el terreno sobre que se trata de operar, resulta a veces necesario tener en cuenta la corrección de la mira.

En las nivelaciones de precisión hay que comprobar la mira frecuentemente y aplicar la corrección resultante a los desniveles observados.

La dilatación de las miras de madera por el calor es muy pequeña; en cambio, la humedad atmosférica puede alterar la longitud de las miras en varias décimas de milímetro por metro. Por consiguiente, si hay que medir grandes diferencias de altura, y no se estudia con detenimiento la mira que se ha de emplear, se corre el riesgo de que el error de la mira inutilice la precisión de las observaciones y el resultado de la nivelación.

El primer estudio que debe hacerse de la mira se refiere a la precisión o exactitud de las divisiones, para lo cual se necesitan un metro normal y un comparador. El error accidental debido a la división de la mira puede reducirse a 0,1 mm si aquella se hace con el cuidado debido. A veces hay que determinar el error correspondiente a cada división o raya, como sucede con la mira francesa representada en la figura 46 ó con las de Vogler y Schell (descritas en la página 44), debiendo después aplicar a las lecturas las correcciones resultantes.

Después hay que determinar la longitud real del metro de mira. Para la comparación de las miras, en la Escuela Superior Técnica de Hannover se disponía de una regla de acero de sección trapezoidal (fig. 55), cuya cara graduada incidía oblicuamente sobre la cara dividida de la mira (de modo análogo a como inciden sobre el papel las caras de las escalas triangulares tan empleadas en dibujo). Esta regla, construída por Bamberg, y provista de una lámina de platino iridiado con divisiones de 0,1 mm, fué contrastada oficialmente en la Oficina de Pesas y Medidas de Berlín, dando el siguiente resultado, según certificado de 13 de septiembre de 1883:

$$N.º 1930 = 1 \text{ m} + 0,04 \text{ mm} + 0,011 \text{ mm} (t - 18) = 1 \text{ m} - 0,158 \text{ mm} + 0,011 t$$

donde t es la temperatura en grados centígrados, dada por un termómetro alojado en el cuerpo de la regla. Representando con el símbolo (1 m) el valor de un metro nominal de la regla de acero, y con u su diferencia con el valor real de un metro, se tendrá, según la igualdad anterior:

$$(1 \text{ m}) = 1 \text{ m} + u \quad u = -0,158 \text{ mm} + 0,011 t$$

En la siguiente tabla hemos calculado los valores de u correspondientes a temperaturas t comprendidas entre 0° y 30° , para el metro de acero de Hannover:

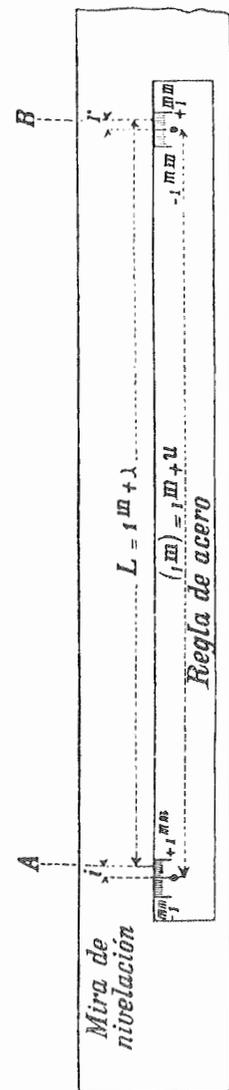
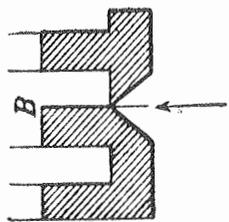


Fig. 55. — Comprobación de una mira

t	u	t	u	t	u	t	u	t	u		
0°	-0,158 mm	5°	-0,103 mm	10°	-0,048 mm	15°	+0,007 mm	20°	+0,062 mm	25°	+0,117 mm
1	-0,147	6	-0,092	11	-0,037	16	+0,018	21	+0,073	26	+0,128
2	-0,136	7	-0,081	12	-0,026	17	+0,029	22	+0,084	27	+0,139
3	-0,125	8	-0,070	13	-0,015	18	+0,040	23	+0,095	28	+0,150
4	-0,114	9	-0,059	14	-0,004	19	+0,051	24	+0,106	29	+0,161
5	-0,103	10	-0,048	15	+0,007	20	+0,062	25	+0,117	30	+0,172

Para poder hacer las lecturas exactas al colocar la cara inclinada de la regla de acero sobre la mira, deben ser muy finas las líneas de división de ésta, y elegirse para la lectura sitios en que no haya pintura. En la mira de la figura 44, van de decímetro en decímetro unas señales muy finas (cubiertas para los trabajos ordinarios), de un espesor de 0,03 mm, y con una lupa puede apreciarse una desviación de 0,01 mm respecto a las divisiones de 0,1 mm de la escala de platino iridiado que va unida a la regla de acero. El procedimiento operatorio ordinario consistía en disponer la regla de acero sobre la mira en cinco sitios diferentes de ésta, tomando dos veces la lectura para cada posición; después de cada una se corría un poco la regla y se repetían las lecturas, de modo que se tenían en definitiva diez posiciones, de las cuales se tomaba la media aritmética. Conviene utilizar un formulario impreso o preparado de antemano, para evitar cualquier equivocación o error grosero. Se tiende la mira, de modo que quede el 0 cm a la izquierda, y según indica la figura 55, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Metro de la regla de acero (1 m)} &= 1 \text{ m} + u \\ \text{Metro de la mira} &L = 1 \text{ m} + \lambda \\ \text{Lectura a la izquierda} &= i, \quad \text{id. a la derecha} = d, \\ 1 \text{ m} + \lambda &= 1 \text{ m} + u + d - i, \quad \text{o sea,} \quad \lambda = d - i + u. \end{aligned}$$

En la tabla siguiente puede verse el resultado completo de una comprobación de mira, donde u está tomada de la tabla anterior sobre temperaturas:

Mira Bamberg n.º 2. = Hannover 16 julio 1890

División de la mira	Temp. t	Regla de acero		$d - i$	u	$\lambda = d - i + u$
		i	d			
1/2 y 21/22	22,4°	0,50 mm	0,62 mm	+0,12 mm	+0,09 mm	+0,21 mm
		0,16	0,30	+0,14	+0,23
11/12 y 31/32	. .	0,64	0,70	+0,06	(tabla anterior)	+0,15
		0,36	0,44	+0,08		+0,17
21/22 y 41/42	. .	0,24	0,36	+0,12	+0,21
		0,50	0,60	+0,10		+0,19
31/32 y 51/52	. .	0,40	0,55	+0,15	+0,24
		0,64	0,80	+0,16		+0,25
39/40 y 59/60	22,8	0,70	0,90	+0,20	+0,29
		0,50	0,75	+0,25		+0,34

$$\begin{aligned} \text{Suma} &+ 2,28 \\ \text{Media } \lambda &= +0,228 \text{ mm} \end{aligned}$$

En dicho día, la longitud de un metro de mira era $L = 1 \text{ m} + 0,228 \text{ mm}$.

Cuando se procede de este modo y se prepara de antemano un formulario, resulta sencillísimo hacer una comprobación de mira, siendo con frecuencia más pesados los prepara-

tivos y detalles de la operación que la comprobación misma, incluyendo el cálculo con- siguiente.

Cuando la comprobación de la mira se hace todos los días, resulta más práctico hacer dos señales permanentes en la parte media de la mira, separadas entre sí un metro, y cuya distancia se mide diariamente con el metro normal.

La longitud del metro de mira se comprueba, del modo expuesto, una sola vez al año, al empezar la campaña, y una vez determinada, se fija su diferencia con la distancia entre las señales o divisiones de la mira. Puesto que esta diferencia se supone invariable durante la campaña, basta determinar diariamente la distancia entre señales, para tener la longitud del metro de mirá.

La mira empleada en Alemania para los levantamientos topográficos lleva al final del primero y segundo metros unas señales de plata, con una cruz muy fina grabada (fig. 45) sobre las cuales se coloca el metro normal.

La medición de la distancia entre señales se hace todos los días, antes y después de cada media jornada, es decir, cuatro veces por día de trabajo.

En la nivelación de precisión de Holanda, también las miras llevaban dos señales fijas, consistentes en unos punzones pequeños que sobresalían de aquéllas, y cuya distancia se medía con un metro normal terminado en cuchillas y una escuadra graduada.

Otro método de comparación de miras consiste en el empleo de las miras de compensación construídas por Goulier para la nivelación de Francia. La mira de madera va atravesada por dos varillas de acero y latón, muy próximas entre sí, y unidas por el extremo inferior con el regatón de la mira, de modo que pueden dilatarse libremente hacia arriba. En la parte superior de la mira hay practicada una ventanilla a través de la cual se ven las varillas, que llevan respectivamente una escala y un índice, de modo que puede medirse fácilmente la variación relativa de ambas a causa de los cambios de temperatura. En la mira va fijada otra escala, frente a una señal que sirve de índice en la varilla de acero. Esta última lectura da la diferencia entre la mira de madera y la varilla de acero, mientras que la primera lectura da la temperatura y, por tanto, la longitud de la varilla de acero.

Como ejemplo de las variaciones tan considerables que pueden experimentar las miras en un verano, damos a continuación un resumen de parte de las comparaciones de miras nivelantes que hicimos en el verano de 1881 para la nivelación de Prusia:

Lugar	Fecha	Mira n.º 17 mm	Mira n.º 18 mm	Media mm
Graben.	9 junio 1881	$\lambda = -0,02$	$\lambda = -0,00$	$\lambda = -0,01$
Germersheim	23 » »	-0,11	-0,06	-0,08 mín.
Karlsruhe.	9 julio »	-0,04	-0,01	-0,02
Appenweier (Strassburg)	11 agosto »	-0,07	-0,05	-0,06
Oberkirch	15 » »	-0,06	-0,05	-0,06
Oppenau	16 » »	+0,02	+0,04	+0,03
»	20 » »	+0,01	+0,05	+0,03
Griesbach	22 » »	+0,10	+0,10	+0,10
Alexanderschanze.	23 » »	+0,13	+0,15	+0,14
Karlsruhe.	4 sept. »	+0,08	+0,08	+0,08
»	12 » »	+0,19	+0,19	+0,19
Heidelsheim	14 » »	+0,18	+0,19	+0,18
Bretten	15 » »	+0,25	+0,23	+0,24 máx.
Karlsruhe.	29 » »	+0,15	+0,12	+0,14

Variación máxima 0,32 mm por 1 m.

§ 11. Niveles de mano y clisímetros

Para nivelaciones de poca precisión, como, por ejemplo, cuando se trata de perfiles transversales, o de arrastrar una cota a un punto próximo (en carreteras, caminos, etc.), pueden emplearse unos niveles pequeños, llamados de mano porque no necesitan trípode y pueden llevarse en el bolsillo.

Los niveles de esta clase que primero se emplearon y que son a la vez los más sencillos, son los representados por las figuras 56 y 57, construídos por Kahle, de Jena, y que no

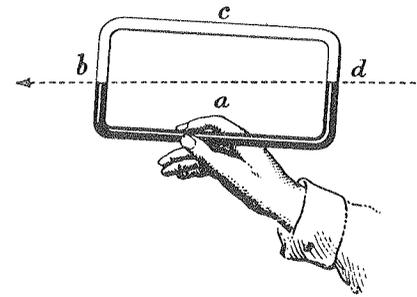


Fig. 56.— Nivel de tubo

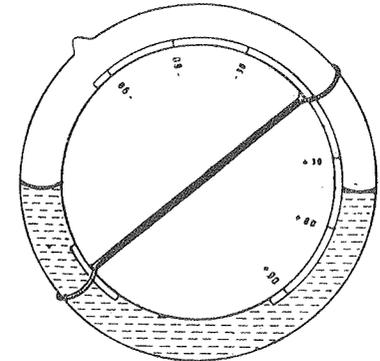


Fig. 57.— Nivel de tubo

necesitan explicación alguna, dada la claridad con que las figuras muestran su constitución y funcionamiento.

Las figuras 58 y 59 representan el nivel de mano de Wagner-Tesdorpf, de Stuttgart: el anteojo lleva un objetivo y un ocular de Huygens; en un lado de la pared o caja del anteojo va fijado un nivel *L*, paralelo al eje de aquél, y sobre el nivel va un espejo plano; muy

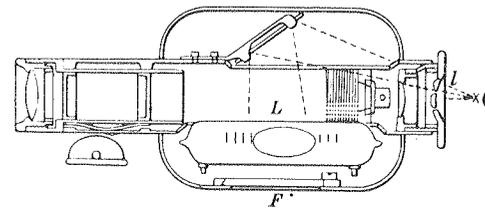


Fig. 58.— Nivel Wagner-Tesdorpf

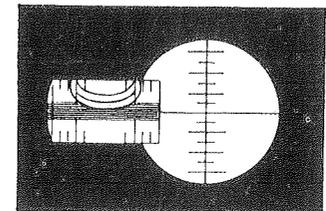


Fig. 59.— Campo del anteojo

cerca del ocular se encuentra una lente plano-convexa *l*, para poder ver la imagen de la burbuja, reflejada por el espejo.

Colocando el ojo en *C* (fig. 58) se ve de una parte el campo ordinario del anteojo, con el retículo, la mira, etc., y de otra parte, un poco a la izquierda, se ve la burbuja del nivel (figura 59). En el instante de estar centrada la burbuja es cuando se hace la lectura de la mira.

Las figuras 60 y 61 representan el nivel de bolsillo de Butenschön. El anteojo (de 5 aumentos) lleva un objetivo acromático *a* y como ocular una lente convexa *b*. El tubo

portaocular tiene en f una abertura, por debajo de la cual va fijado un nivel δ , cuya burbuja queda iluminada inferiormente, por g . Dentro del anteojo, entre el ocular y el

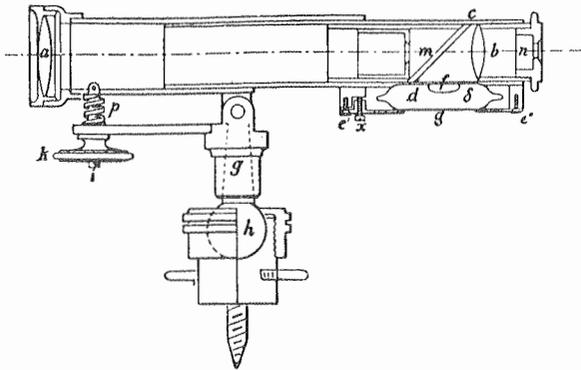


Fig. 60.—Instrumento de Butenschön

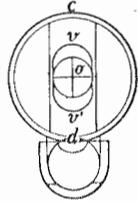


Fig. 61.—Campo del anteojo

retículo, se encuentra un espejo plano cd , inclinado 45° sobre el eje del anteojo, y con un pequeño orificio m en el centro. La imagen de la burbuja reflejada por el espejo aparece así en el medio del campo del anteojo, y cuando el nivel está centrado, se ve como indica la figura 61, es decir, con el retículo en el centro de la burbuja, y los extremos de ésta equi-

distantes de los bordes del campo óptico. Este pequeño aparato puede emplearse sosteniéndolo con la mano o fijado a un trípode o a un bastón o chuzo.

En la figura 62 se ve un nivel de mano americano, de 15 cm de longitud, de Buff & Berger: consiste este aparato en un tubo de latón con un pequeño nivel fijado junto al

objetivo, y por debajo de aquél y en ángulo recto con el mismo, va un hilo horizontal. Por debajo del nivel y del hilo se encuentra un prisma, que obrando como un espejo inclinado 45° sobre la visual,

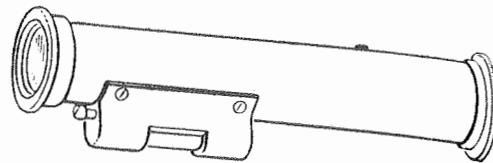
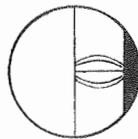


Fig. 62.—Nivel de mano norteamericano

refleja hacia el ojo del observador las imágenes de la burbuja y del hilo. En una mitad del campo del anteojo aparecen la burbuja y el hilo, mientras que en la otra mitad se ve la mira, del modo ordinario. Se sostiene el instrumento de modo que, como se ve en la figura 62, quede la burbuja dividida por mitad por el hilo, con lo cual (suponiendo el aparato en buenas condiciones) la visual dirigida al hilo será horizontal.

Clisímetros. En el tomo I, párrafo 19, figuras 59 a 65, hemos descrito algunos aparatos, de poca precisión, que dan la inclinación de las visuales, para reducir al horizonte las longitudes medidas en cualquier posición. Estos instrumentos, por dar la *inclinación*, es decir, el ángulo que la visual forma con el horizonte, se llaman propiamente *eclímetros*, y por su poca precisión no pueden emplearse para el levantamiento de perfiles longitudinales, etc., por lo cual se utilizan para este objeto otros instrumentos especiales, que dan la *pendiente* del eje de colimación, y que reciben el nombre de *clisímetros*.

La figura 63 representa el clisímetro más sencillo de todos, construido por Ertel, de Munich, y que consiste en una alidada suspendida en el extremo de un bastón o chuzo, y mantenida verticalmente por medio de una pesa situada por debajo de aquélla. En una de las pínulas, en forma de bastidor, puede correr un cursor sobre una escala, y tanto este cursor como la pínula fija llevan un orificio de mira y una cruz filar, de modo que pueden dirigirse visuales tanto en una dirección como en la contraria. Para ello se coloca una

tablilla de mira en una varilla, a la altura de la pínula fija de la alidada. En la escala se leen las pendientes en tanto por ciento.

La figura 64 representa el clisímetro de Bose, fijado sobre un trípode ligero, y provisto de dos niveles tubulares para colocarlo verticalmente. Este modelo, construido por Stiegel, de Kassel, permite obtener visuales muy precisas, por lo cual va provisto de un nonio para la lectura de las pendientes.

El clisímetro de Deubel-Fennel (figura 65) consiste en un pequeño anteojo de unos 5 aumentos, con una cruz filar, unido a un sector circular de 19 cm de radio, de modo que con un índice fijo en el bastón o chuzo de soporte, puede leerse una inclinación del anteojo de hasta el 40% . Es ingenioso el dispositivo para calar el nivel paralelo al plano del sector; para ello hay en el anteojo un pequeño espejo, cuya inclinación varía automáticamente al variar la del anteojo, de modo que para todas las posiciones de éste aparece la imagen de la burbuja en el campo del mismo; por esta razón basta, para poner en estación el aparato, con un simple bastón o chuzo.

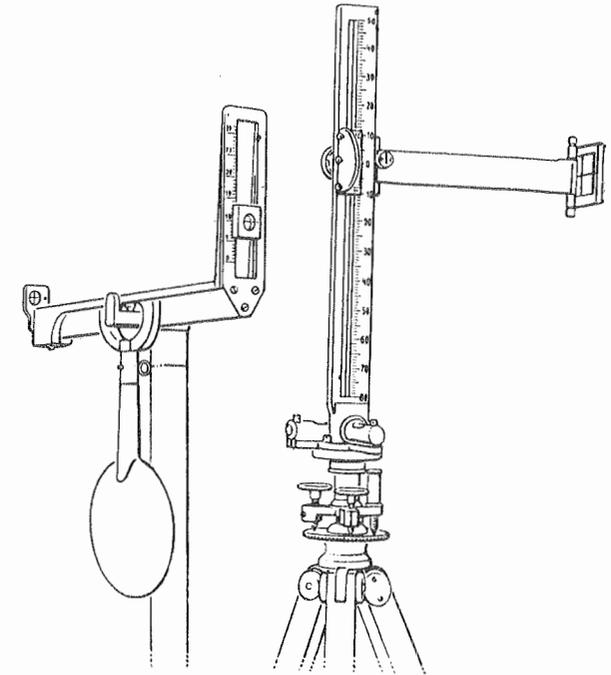
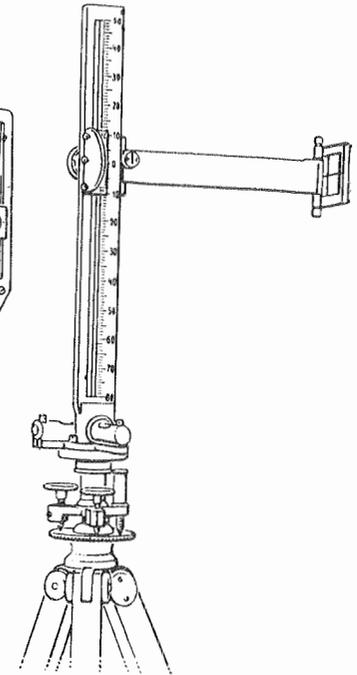
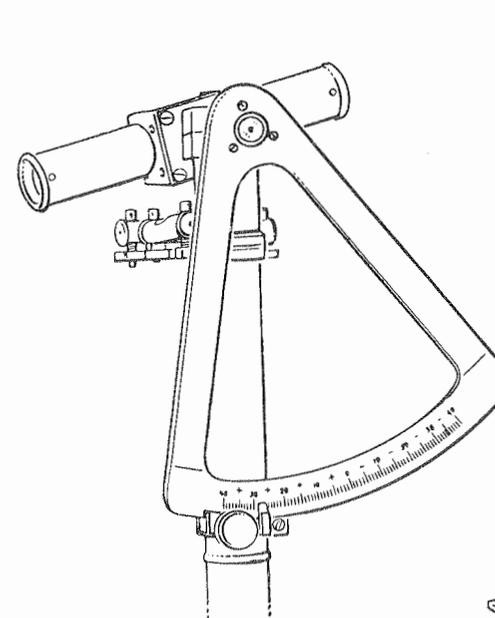
Fig. 63
Clisímetro de ErtelFig. 64
Clisímetro de Bose

Fig. 65.—Clisímetro de Deubel-Fennel

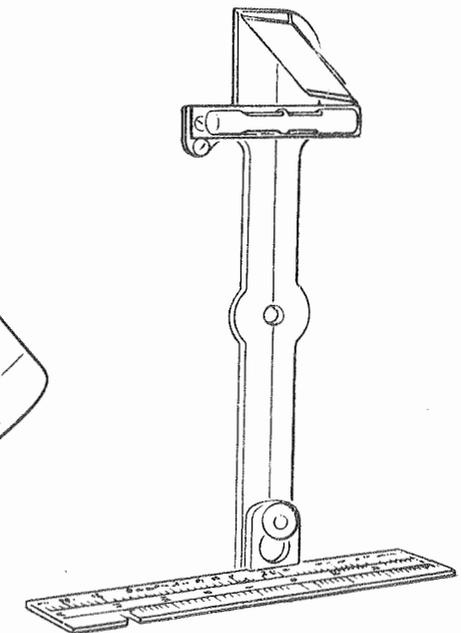


Fig. 66.—Clisímetro de Röther

Por último, en la figura 66 se ve el clisímetro de Röther (construido por Ertel, de Munich), que para su empleo se atornilla sobre una varilla. La escala de pendientes es horizontal y se lee mediante un espejo inclinado. De este modo se ve la escala verticalmente por detrás del espejo a distancia tal que se puede leer con toda precisión y facilidad. El espejo lleva una línea horizontal, con la cual, estando calado el nivel, se dirige la visual a la tablilla de la mira, al mismo tiempo que se hace la lectura sobre la escala de pendientes. Además de esta escala, lleva este aparato otras de reducción para mediciones en terreno inclinado, hechas con cintas o con miras.

Así como la aplicación de los niveles de mano (figs. 56 a 62) es siempre muy reducida, los clisímetros se emplean con éxito en levantamientos de perfiles longitudinales, para caminos vecinales o secundarios con pendientes del 10 % y más aún, pues en estos casos resulta muy pesado y de escaso rendimiento el empleo del nivel corriente, a causa de las muchas estaciones que hay que hacer, con visuales generalmente muy cortas. El cálculo de las diferencias de altura, cuando se emplea un clisímetro, es muy sencillo, ya que basta multiplicar las distancias por las pendientes leídas.

En el capítulo sobre Taquimetría describiremos algunos instrumentos análogos a los clisímetros y eclímetros.

§ 12. Señalamiento de los puntos de nivelación. Punto cero

Para señalar los puntos de nivelación, según la duración que hayan de tener estas señales, se emplean diferentes medios, como, por ejemplo, estacas, clavos, estacas con clavos o tornillos de cabeza redondeada fijados en lo alto de aquella, hitos, señales grabadas en piedras (Δ , +, etc.), en las aceras, en los zócalos, umbrales, cornisas, etc.

Las figuras 67 a 70 representan las señales empleadas para los puntos permanentes de la nivelación alemana. En la figura 67 se ve, a escala 1 : 10, un pilar de nivelación con clavo saliente, tal como se empleó en Prusia en 1870, y que consiste en un hito de granito de 25 cm de lado y 90 cm de altura, clavado en el suelo a una profundidad de 65 cm, y con un clavo de hierro empotrado en una de sus caras;

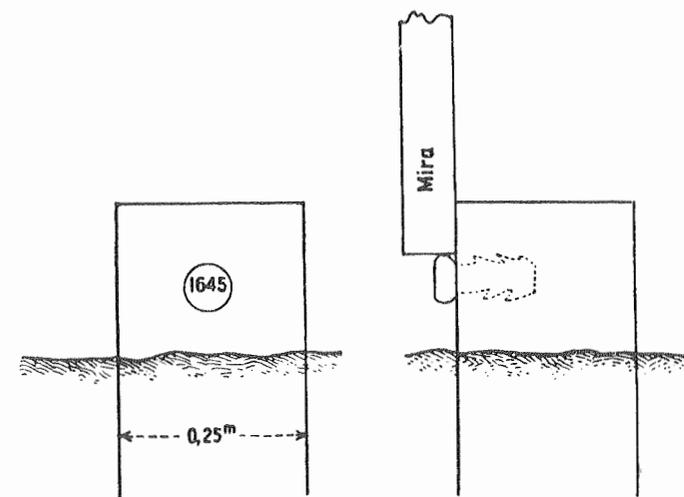


Fig. 67.— Señal permanente de la nivelación alemana

la parte superior de este clavo es el punto de nivelación, por lo cual la mira se coloca sobre el clavo y no sobre el hito o pilar de granito.

El número grabado en la cabeza del clavo es el de orden en el registro de puntos permanentes de nivelación.

Aunque este pilar se empotraba sólidamente en el suelo, no se consideró inalterable su posición, por lo cual, desde 1908 se procedió a echar en el suelo, antes de fijar el pilar,

una capa de cemento de 60×60 cm de lado, cuando menos, por 10 cm de espesor, y el pilar mismo se rodeó, hasta una altura de 40 cm, con cemento bien fuerte.

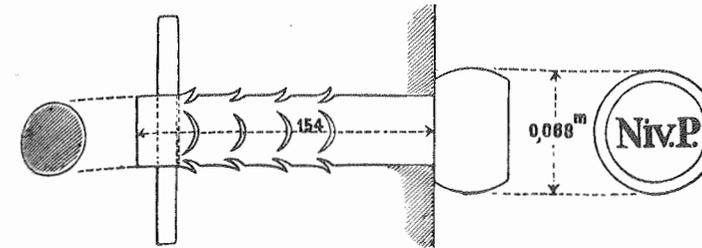


Fig. 68.— Clavos de pared para señales de nivelación

velaciones urbanas: por ejemplo, en la nivelación de Hannover y de Linden se emplearon varios cientos de señales de esta clase (fig. 69).

En la figura 70 se ve una señal de nivelación de precisión empleada en Alemania; el número indica que el punto más alto O de la cabeza del clavo está a 56,297 m sobre el punto cero. Este número se pone después de fijado el clavo, para lo cual, en la cabeza de éste se fija, con dos tornillos a y b , la plaquita del centro, que lleva el número correspondiente a la cota del punto superior de la cabeza del clavo, medida y comprobada después de fijado éste. Antes de conocer este número, se pone una plaquita provisional sin número, que se sustituye por la definitiva una vez terminada y calculada la nivelación.

Además de estas señales ordinarias se emplean, en la nivelación de Alemania, desde 1908, otras señales enterradas, para puntos de excepcional importancia, las cuales consisten en un pilar de granito de 90 cm de altura, que descansa sobre una plancha, también de granito, de 10 cm de espesor. En lo alto del pilar va encajado, y pegado con cemento, una especie de tapón de bronce, de la forma y dimensiones que indica la figura 71: el punto de nivelación es el punto más alto de la esfera de ágata e , que mediante el anillo de sujeción f queda

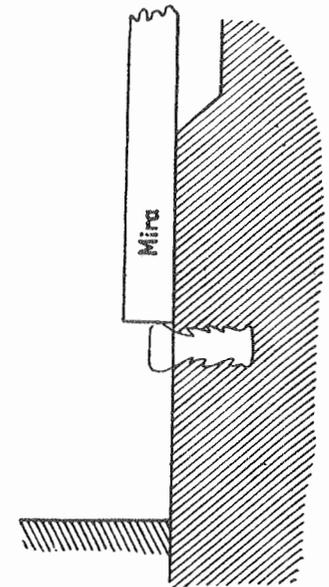


Fig. 69
Nivelación en un clavo de pared

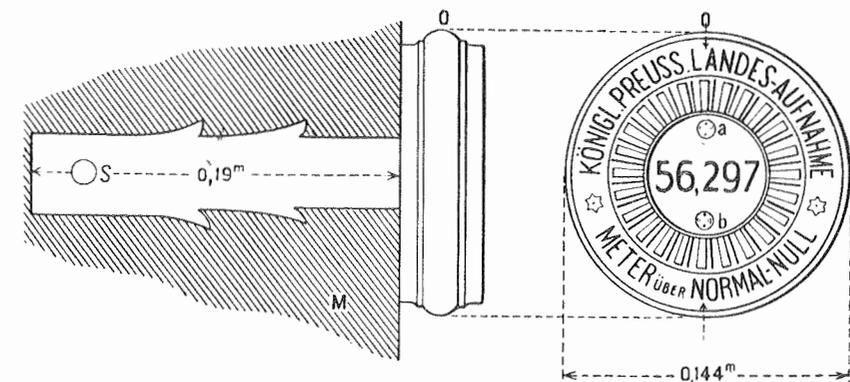


Fig. 70.— Señal alemana de las nivelaciones de precisión

bien asegurada en su alojamiento; la tapa de bronce *g*, que se sujeta con tornillos, sirve para resguardar la señal de cualquier accidente. Por encima se coloca una tapa de granito, cuya cara superior queda a unos 50 cm por bajo del suelo.

Otra clase de señales, hechas con tubos, es la empleada por primera vez en la nivelación de Hamburgo, en 1898; las primeras señales consistían en tubos de hierro forjado,

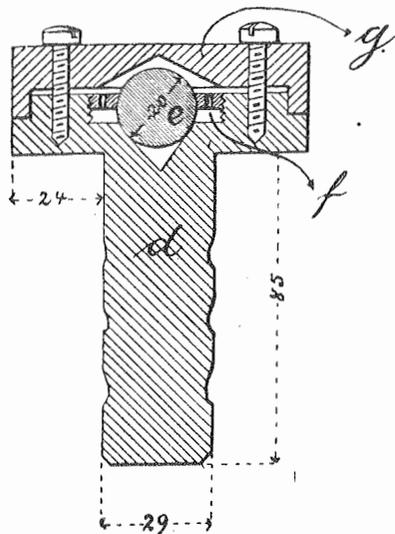


Fig. 71.—Señal de nivelación, con esfera de ágata

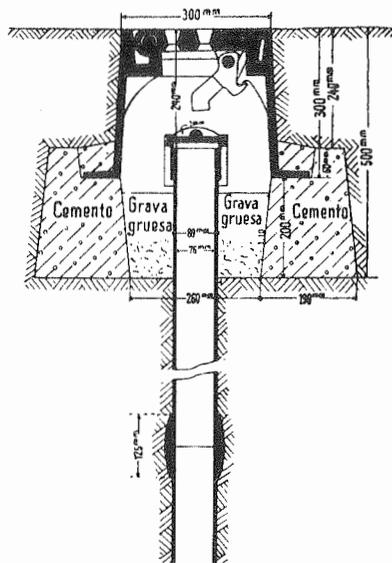


Fig. 72.—Señal tubular hamburguesa

de 75 mm de diámetro y 5 mm de espesor, que se unían unos a otros hasta que quedaran unos 2 m enterrados en la capa diluviana del subsuelo: la longitud total variaba entre los 10 m y los 20 m. El extremo superior del tubo, que quedaba enterrado a unos 20 cm, llevaba un tapón esférico roscado, cuyo punto superior era el punto de nivelación. Finalmente, como protección iba una caja muy fuerte de madera, con tapadera atornillada.

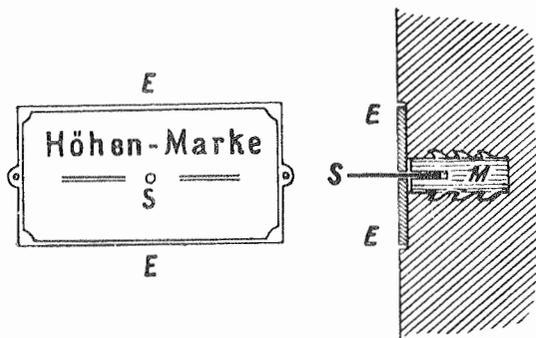


Fig. 73.—Antigua placa de la nivelación alemana



Fig. 74. Placa altimétrica de los ferrocarriles de Prusia

En la figura 72 se ve una de estas señales, pero perfeccionada, tal como se emplearon en Hamburgo en 1928. Los tubos de hierro son galvanizados a fuego, tanto interior como exteriormente, y van unidos mediante manguitos muy fuertes, también galvanizados. El extremo superior lleva roscado un tapón, cuya cabeza es el punto de nivelación. Sobre este tapón va una cubierta de zinc que entra y sale con holgura, y todo va resguardado

con una especie de caperuza de hierro colado, que se cierra con un trinquete. Tanto la cabeza del tapón del tubo como las juntas y articulaciones del trinquete y la cubierta se engrasan bien para que no se oxiden.

El tubo se clava hasta encontrar la capa diluviana del subsuelo, que a veces está a 30 m de profundidad: para ello va provisto su extremo inferior de una broca de sondeo, de acero. El tubo se rellena con arena.

Otra de las señales empleadas en Alemania consiste en un pilar de granito de 1 m de longitud, que descansa sobre una plancha de cemento y está rodeado, a su vez, de una capa de cemento. En la parte superior del pilar va encajado un clavo de hierro galvanizado, cuya cabeza redondeada constituye la señal propiamente dicha. El pilar no sobresale de la tierra, para resguardarlo de toda contingencia externa.

La figura 73 representa, a escala 1 : 5, una señal empleada en Alemania entre 1860 y 1880: se encuentran estas señales a la altura de 1,5 m sobre el piso de estaciones de ferrocarril, embarcaderos, etc. El perno o clavo de latón *M* lleva practicado un agujero, en



Fig. 75.—Placa francesa de la antigua nivelación Bourdaloue

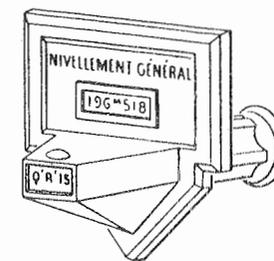


Fig. 76.—Placa francesa moderna



Fig. 77. Clavo francés de pared

el cual puede introducirse una varilla *S*; el perno va empotrado en la pared y señalada su posición con la placa *E*, que lleva la inscripción «Höhen Marke» (señal de nivelación).

Cuando hay que referir un itinerario de nivelación a un punto de esta clase, se cuelga de la varilla *S* una pequeña mira especial de suspensión, por lo cual no resulta recomendable este género de señales. Puede también hacerse la referencia acoplando una alidada nivelante a la mira, para visar la señal *S*, tomando después la altura de la mira.

La figura 74 representa, a escala 1 : 5, las placas de nivelación empleadas en las estaciones de ferrocarril de Prusia. Estas placas se colocan a la altura de un hombre, sobre un

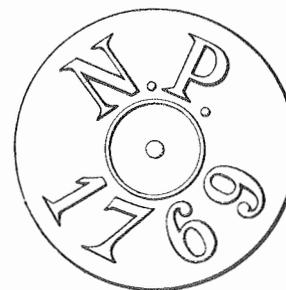


Fig. 78.—Señal horizontal permanente de las nivelaciones de precisión en España (Escala 1 : 2)



Fig. 79.—Placa mural de la nivelación española (Escala 1 : 10)

clavo (que es el punto de nivelación), y el número de aquella no corresponde a la cota de la placa, como sucede en la de la figura 73, sino a la altura del clavo que hay en el suelo. La inscripción de estas placas «Höhe über N.N.» significa «altura sobre el punto cero».

En las figuras 75 a 77 se ven diferentes señales de nivelación empleadas en Francia: la primera se empleó en un principio, habiendo sido sustituida después por la moderna señal representada en la figura 76; el clavo que se ve en la figura 77 se emplea como señal de nivelación empotrado en las paredes.

En España se emplea como señal de nivelación un disco de latón con su centro bien marcado, que representa el punto señalado. Este disco lleva, como se ve en la figura 78, las iniciales N. P. (nivelación de precisión) y un número de orden, que en el registro general que obra en el Instituto Geográfico sirve para identificar aquel punto en cota, posición, etc. Por encima de estas señales, sobre todo en las estaciones de ferrocarril, edificios públicos, etc., van fijadas a la pared unas placas ovaladas, como se ve en la figura 79, con una línea saliente y la cota correspondiente a esta línea, expresada, como es lógico, con menor número de cifras decimales que la cota de la señal de precisión. Para más detalles sobre la nivelación en España, véase el párrafo 21.

Puntos normales de referencia. En el año 1879 se fijó en el Observatorio de Berlín un punto normal de referencia para todas las cotas de Prusia, que después sirvió para la nivelación de toda Alemania. Antes tenía cada provincia, y aun cada ciudad, un punto normal de referencia, que daba la altura sobre el mar, pero debido a la imprecisión de estas cotas, se tomó como punto de partida el fijado en el Observatorio de Berlín, «a 37 m sobre el punto cero» (figura 80); este punto corresponde a la división *cero* de una escala de esmalte, de 20 cm de longitud, dividida en milímetros y encajada en la cara exterior de una pieza de piedra, de 1,70 m de larga, que va empotrada en el pilar norte del Observatorio.

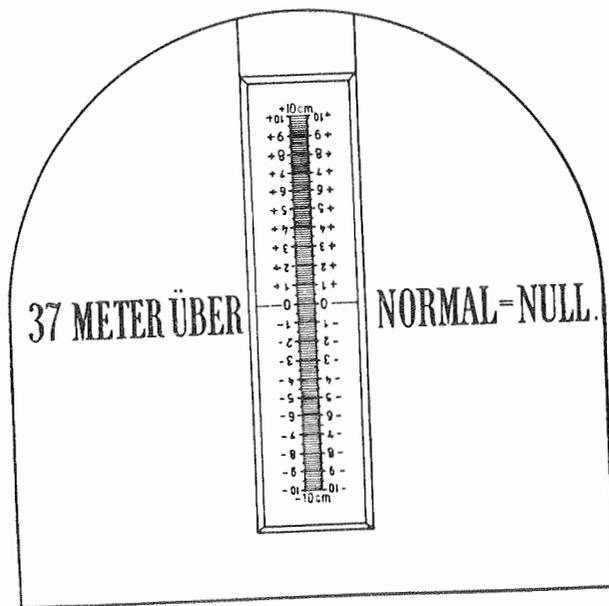


Fig. 80. — Punto normal del Observatorio de Berlín

A causa del traslado del Observatorio en el año 1913, se perdió este punto, sustituyéndose por otro, que se refirió al primero antes de su desaparición, y que está situado actualmente en el kilómetro 40,7 de la carretera Berlín-Müncheberg, en un terreno excelente desde el punto de vista geológico. La nueva señal consiste en el punto normal propiamente dicho (N. N. 1912) y en cuatro puntos de contraste, dos situados al Este y los otros dos al Oeste, a unos cientos de metros de distancia del punto principal.

Estos puntos se señalan con piezas de bronce y esferas de ágata, como indica la figura 71, pero cada pilar lleva cinco piezas de bronce y esferas de ágata, como indica la figura 71, pero cada pilar lleva cinco piezas de bronce de esta clase, en vez de una sola, de las cuales una sirve para el punto principal y las otras cuatro para otros tantos puntos de referencia, que pueden utilizarse, en caso preciso, para el replanteo del primero. Todos estos pilares, uno de los cuales se ve en planta en la figura 81, tienen una altura de 55 cm y 45 cm de lado. Sobre este pilar, pero girado un ángulo de 45° respecto al mismo, va

fijado un cubo de 30 cm de arista, pudiéndose labrar de una sola pieza el pilar con el cubo superior. Como se ve en la figura 81, la cara superior del cubo lleva un agujero, y la del pilar cuatro, para alojar los pernos o piezas de bronce antes dichas (fig. 71). Estos pilares van protegidos por una plancha de granito y enterrados de modo que su parte superior quede a 50 cm bajo el suelo. Para asegurar aun más el punto principal y los puntos de contraste, se cubren con otras placas de granito de 25 cm de altura y de 85 a 100 cm de lado.

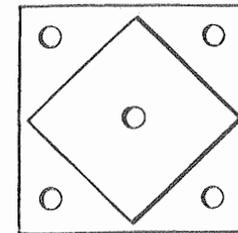


Fig. 81

El total de señales resulta así de 25, con 5 pilares de granito.

En España, el *punto cero* u origen es el nivel medio de las aguas del mar en Alicante, habiéndose atendido a la conservación de esta cota de origen, como se dirá en el párrafo 21.

§ 13. Métodos especiales de nivelación

Vamos a describir algunos métodos especiales; encaminados unos a aumentar la precisión, otros a facilitar y acelerar las nivelaciones en terrenos accidentados, etc. Los dos primeros (I y II) sirven también para los casos en que no se hace doble nivelación, sino que únicamente se recorre el itinerario una vez, ya que proporcionan el medio de obtener una comprobación del trabajo, aunque debe siempre tenerse en cuenta que la comprobación perfecta y completa de un itinerario de nivelación sólo es posible hacerla repitiendo aquél, es decir, haciendo la doble nivelación.

I. Nivelación con dobles puntos de mira. Consiste este procedimiento en hacer dos nivelaciones muy próximas entre sí, pero con las mismas estaciones de nivel, para lo cual se toma para cada punto de mira la altura de dos jalones distintos, o se emplea una plancha o pie de mira con dos salientes de desigual altura.

Si desde la estación J_1 (fig. 82) se hacen las lecturas de frente f_1 y f_2 sobre los dos puntos de mira (1) y (2), y se llaman e_1 y e_2 a las lecturas de espalda hechas sobre los

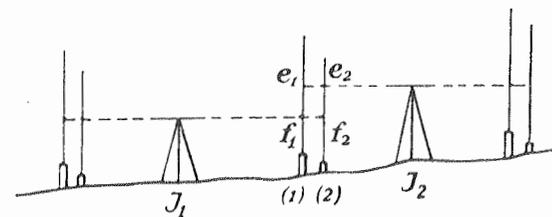


Fig. 82. — Nivelación con dobles puntos de mira

mismos puntos desde la nueva estación J_2 , se deberá tener la siguiente igualdad, que sirve de comprobación a las cuatro lecturas:

$$e_1 - f_1 = e_2 - f_2. \quad (1)$$

En el siguiente cuadro se ven las dos nivelaciones correspondientes al itinerario que va del punto $\odot A$ al $\odot B$; para las visuales de frente se toman los complementos aritméticos:

Punto	Niv. 1	Niv. 2	$e_1 - f_1$ $e_2 - f_2$	Altura o cota	Punto
⊙ A	—	—	1,467	52,647	⊙ A
	1,467	1,466	1,466	1,4665	
a	× 8,363 1 594	× 8,297 1 658	× 9,957 × 9,955	54,1135 × 9,9560	
b	× 8,769 1,42	× 8,726 1,526	0,251 0,252	54,0695 0,2515	
c	× 8,651 1,507	× 8,624 1,534	0,158 0,158	54,3210 0,1580	
⊙ B	× 8,415 —	× 8,414 —	× 8,415 × 8,414	54,4790 × 8,4145	⊙ B
	0,243	0,245	0,493	52,8935	
	0,493			-0,2465	
				52,647	

En la cuarta columna de esta tabla se anotan las diferencias $e-f$ para las dos nivelaciones, como medida de comprobación. Estas diferencias, como se ve en la figura 82, son al mismo tiempo las diferencias de nivel entre cada dos posiciones sucesivas del eje visual del anteojo, por lo cual el cálculo de alturas se hace muy bien tomando estos ejes como horizontes de referencia. De la altura conocida del punto de arranque ⊙ A se deduce la de la visual horizontal, más simplemente, la del horizonte entre A y a, que es 54,1135; de esta altura se deduce después la del horizonte entre a y b, 54,0695, y así sucesivamente, hasta llegar al último horizonte 54,4790, resultando la altura del último punto ⊙ B igual a 52,8935.

Como comprobación del cálculo se pueden sumar las distintas columnas, como se ve en la tabla, y comparar los resultados.

Cuando se trata simplemente de hallar el desnivel entre los dos puntos extremos, se pueden emplear sólo las tres primeras columnas, de las cuales, a la vez que se comprueba el cálculo, se deduce el duplo de la diferencia de alturas buscada.

Este procedimiento se emplea en las nivelaciones de itinerarios cerrados sobre vértices de triángulos, y pueden utilizarse planchas como la de la figura 54 provistas de dos salientes desiguales sobre los cuales se coloca sucesivamente la mira.

Estas niveladas dobles eran antes de uso casi general en muchos estados alemanes, y a primera vista subyugan por su sencillez y aparente exactitud, que queda muy amenuada al estudiar con más detenimiento su precisión. En efecto, las dos nivelaciones gemelas no son independientes entre sí; muchas causas de error influyen en ambas nivelaciones casi de igual modo, y el error medio que se deduce de la diferencia entre las dos nivelaciones da una medida ilusoria de la precisión del resultado.

Resulta incongruente el hecho de que, según la igualdad de comprobación (1), las lecturas hechas desde una estación del nivel puedan servir para comprobar las que se hagan desde la siguiente. Para eliminar los errores accidentales de lectura, debe mantenerse fijo el primer par de puntos (los de la izquierda de la figura 82), hasta que se hayan hecho las lecturas de espalda en la estación J_2 .

Tampoco este procedimiento ofrece garantías contra los errores groseros de lectura, como, por ejemplo, si se hacen las dos lecturas de espalda o las dos de frente con el nivel descentrado.

Por estas razones, la nivelación con dobles puntos de mira constituye un procedimiento muy apreciable en los trabajos de poca precisión, o cuando se dispone de una comprobación cualquiera, como, por ejemplo, de un cierre de poligonal, o de un cierre sobre puntos permanentes, etc.

II. Miras reversibles. Más sencillo es el empleo de una mira pintada por las dos caras (véase página 39), que se leen sucesivamente con visual horizontal: si el cero de la segunda cara está corrido respecto al de la primera en una cierta cantidad, la diferencia entre las dos lecturas debe siempre ser igual a esta misma cantidad (en la mira de Vogler, esta cantidad constante es 3,035 m).

A continuación damos un ejemplo de nivelación con mira reversible; las lecturas de frente corresponden aquí también a los complementos aritméticos de la mira.

Nivelación con mira reversible
(Constante de mira = 3,035 m)

Punto	Nivelada de espalda	Prueba	Nivelada de frente	Prueba
⊙ S	0,763	3,798	0	
1	1,426	4 462	+1	
2	1,544	4,579	0	× 8,583 × 5,547 -1
3	1,869	4,905	+1	× 8,779 × 5,745 +1
4	2,052	5,087	0	× 8,542 × 5,507 0
5	1,974	5,009	0	× 8,604 × 5,569 0
⊙ O			0	× 9,068 × 6,033 0
				× 8,831 × 5,795 -1
	9,628	27,840		
	× 2,407	× 74,196		× 2,407 × 74,196
	2,035	2,036		

Diferencia de altura ⊙ S - ⊙ O = 2,036 m.

En las columnas encabezadas con la palabra «Prueba» se anotan las diferencias entre la constante verdadera 3,035 y la deducida de las lecturas, por ejemplo:

$$1,426 + 3,035 = 4,461, \text{ corrección} = +1 \text{ mm.}$$

Este método de nivelación, empleando miras divididas en medios centímetros, es de gran utilidad en nivelaciones de precisión de segundo orden, como, por ejemplo, en las nivelaciones de poblaciones.

III. Nivelación con visual inclinada. Los aparatos representados en las figuras 28 y 29 están dotados de dispositivo para poder nivelar con visuales inclinadas; este procedimiento se aplica en terrenos muy accidentados, para evitar visuales muy cortas, y donde es posible que la visual horizontal pase por encima o por debajo de la mira.

En los dos aparatos de las figuras 28 y 29, el tornillo de elevación, que es horizontal, actúa como tornillo clisimétrico; la punta del mismo se apoya sobre una palanca rígida unida al soporte del anteojo, y al dar vueltas al tornillo va resbalando la punta a lo largo de una línea, que prolongada corta al eje horizontal de giro del anteojo, y que debe siempre ser perpendicular al eje de colimación del mismo. Si se dirige el anteojo hacia una mira colocada verticalmente, se tendrá, en el supuesto anterior, que el giro del tornillo será proporcional al trozo de mira barrido o recorrido por el eje de colimación. Es decir,

que si se tienen dos lecturas cualesquiera de mira O y U (fig. 83), se tendrán las lecturas del tornillo o y u correspondientes a aquéllas, y llamando h a la lectura del tornillo que corresponde a la visual horizontal se verificará:

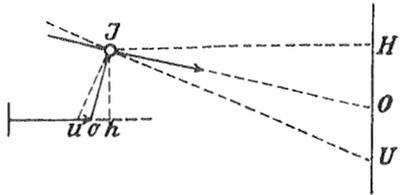


Fig. 83

Uso del tornillo clisimétrico horizontal

$$\frac{H - U}{O - U} = \frac{h - u}{o - u}$$

y la lectura de mira correspondiente a la visual horizontal será:

$$H = U + \frac{h - u}{o - u} (O - U) \quad (2)$$

El cálculo de H resulta muy sencillo haciendo $o - u = 1$, es decir, midiendo $O - U$ para una vuelta del tornillo, y haciendo que $h - u$ sea igual a un número entero de vueltas del tornillo. En este supuesto, el segundo miembro de la igualdad (2) es simplemente un múltiplo del intervalo de mira $O - U$.

En la figura 83 se ve también que la distancia horizontal JH entre el aparato y la mira se calcula con toda facilidad, pues llamando d a la distancia del eje J del anteojo al tornillo, se tiene:

$$JH = d \frac{O - U}{o - u} \quad (3)$$

Ordinariamente d es igual a 100 veces el paso del tornillo; si, además, se hace $o - u$ igual a una vuelta del tornillo, se tendrá:

$$JH = 100 (O - U) \quad (4)$$

En muchos aparatos (como sucede en el representado en la figura 10), el tornillo de elevación está montado verticalmente. En este caso la línea de apoyo de la punta del tornillo pasará por el eje horizontal de giro del anteojo, y además será paralela al eje de colimación. En la figura 84 se ve que también en este supuesto son válidas las fórmulas (2) a (4).

Según Vogler, se obtiene menos precisión con el empleo del tornillo clisimétrico que con la nivelación por alturas (visuales horizontales), y, además, resulta la operación más pesada a causa de las muchas vueltas que hay que dar al tornillo. En cambio, el tornillo clisimétrico tiene sobre el ordinario de elevación la ventaja de que se pueden nivelar terrenos muy accidentados con visuales inclinadas.

Si se regula el tornillo de modo que para la visual horizontal marque cero y si d (figura 83) es igual a 100 veces el paso de éste, se tiene que para cualquier inclinación de la visual, la lectura del tornillo será igual a 100 veces la tangente del ángulo que aquélla forma con la horizontal, por lo cual también se llama al tornillo clisimétrico, tornillo de tangentes o de pendientes.

Tornillo de Stampfer. El aparato representado en la figura 11 lleva otra clase de tornillo de elevación que sirve para nivelar con visual libre y para medir distancias: para ello, el tornillo termina en una articulación de bolas, mientras que su alojamiento o vaina pasa también por una articulación de la misma clase. Las fórmulas tan sencillas obtenidas para los tornillos clisimétricos sirven para el de Stampfer sólo como primera aproximación, siendo necesario aplicar a aquéllas algunos términos de corrección.

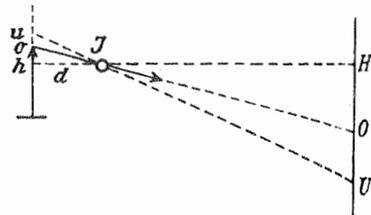


Fig. 84

Uso del tornillo clisimétrico vertical

§ 14. Nivelaciones de precisión

La precisión de las nivelaciones depende, en primer lugar, de la precisión de las lecturas de mira y de la exactitud con que se coloca horizontal el eje de colimación. Para afinar las nivelaciones hay que atender, por consiguiente, al empleo de aparatos bien contruidos y perfeccionados, tanto con referencia al aumento del anteojo, como a la bondad del nivel. En las figuras 26 a 29 hemos visto algunos aparatos especialmente adecuados a las nivelaciones de precisión. También para la exactitud de las lecturas hay que tener en cuenta la división exacta de las miras (de las cuales hemos visto algunos modelos especiales en las figuras 44 a 51); en las páginas 45 a 48 se hicieron algunas consideraciones sobre las miras nivelantes, que deben también tenerse presentes al tratarse de nivelaciones de precisión.

A estos medios perfeccionados corresponden también métodos operatorios especiales, de los cuales vamos a ocuparnos a continuación.

En todas las nivelaciones de precisión, en vez de hacer una simple nivelada de espalda y otra de frente, se hacen dos en cada sentido, empezando por una de espalda, a la que sigue una de frente: se repite después la de espalda y se vuelve a hacer la de frente, por lo cual hay que emplear dos miras en vez de una sola. Siguiendo este orden se pueden eliminar, por lo menos en parte, las pequeñas variaciones que pueden producirse en la posición del aparato, como, por ejemplo, las debidas al hundimiento de las patas del trípode, etc. De ordinario se emplean las miras reversibles (véase página 39), que requieren, desde luego, la doble lectura, pero también pueden emplearse las miras de una sola cara.

El empleo de dos miras supone hacer una corrección de cero en una de ellas, cuando la distancia de la división cero al extremo de la mira no es exactamente igual en ambas. Esta corrección no desempeña papel alguno en el caso de emplear la misma mira en el punto primero y en el último del itinerario de nivelación.

También en las nivelaciones de precisión se toma como distancia visual la de 50 m; en las carreteras y vías férreas se toman como puntos de mira las señales de hectómetros, con lo cual, al estacionar entre cada dos sucesivas, se tiene la distancia visual de 50 m.

Nivelación con burbuja descentrada. La colocación exacta del punto medio de la burbuja en el punto cero del nivel es una operación lenta y penosa cuando se trata de niveles muy sensibles, por lo cual se sigue un método más rápido consistente en disponer la burbuja aproximadamente centrada; de la lectura de su posición se deduce la inclinación de la visual, y con este dato ya puede corregirse la lectura de mira.

Si α es el ángulo de inclinación de la visual (fig. 85), s la distancia visual y l la lectura de mira, se tendrá la lectura ya corregida mediante la fórmula siguiente:

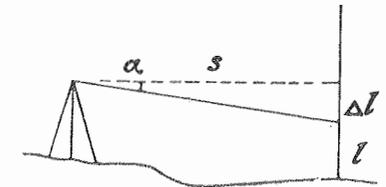


Fig. 85

$$l + \Delta l = l + s \frac{\alpha''}{\rho''} \quad (1)$$

La corrección Δl es positiva cuando el ángulo α es de depresión, es decir, cuando la visual está dirigida hacia abajo.

Suponiendo que el aparato esté bien corregido, es decir, que estando centrada la burbuja, la visual sea horizontal, el ángulo α de inclinación, para una posición descentrada de aquélla, se mide por la desviación del punto medio de la misma respecto al centro del nivel.

Queda sólo por decir de qué modo se cuenta la desviación o descentrado de la burbuja, para evitar errores de signo. Para ello, consideraremos dos casos: que el punto cero del nivel esté en el centro del mismo, o que se halle en el extremo de éste más próximo al objetivo del anteojo.

Punto cero en el centro. Supongamos que la escala del nivel tenga el cero en el punto medio y que hacia el lado del objetivo tenga el signo negativo, y hacia el ocular tenga el signo positivo.

Designemos con $Oc.$ y $Ob.$ las lecturas de los dos extremos de la burbuja, de modo que la desviación del punto medio de ésta será igual a $\frac{Oc. + Ob.}{2}$, y la corrección de la lectura de mira será:

$$\Delta l = \frac{s\gamma}{2\rho} (Oc. + Ob.)$$

o sea, expresada en milímetros:

$$\Delta l = \frac{s}{E} (Oc. + Ob.), \quad \text{donde} \quad E = \frac{412,53}{\gamma} \quad (2)$$

Si se hace la lectura de la burbuja dos veces para cada visual, es decir, antes y después de cada lectura de mira, la corrección será, expresada en milímetros:

$$\Delta l = \frac{s}{E'} [(Oc._1 + Oc._2) + (Ob._1 + Ob._2)], \quad \text{donde} \quad E' = \frac{825,06}{\gamma} \quad (3)$$

En estas fórmulas hay que expresar s en metros y la apreciación γ del nivel en segundos.

Punto cero en el extremo objetivo. Si, como sucede en el aparato representado en la figura 26 (pág. 30), el cero de la escala del nivel está en el extremo de éste más próximo al objetivo, y el punto medio de aquél corresponde a la división 25, se tendrá calado el nivel, es decir, centrada la burbuja cuando se verifique la siguiente condición:

$$\frac{Ob. + Oc.}{2} = 25, \quad \text{o sea} \quad Ob. + Oc. = 50.$$

La desviación de la burbuja, para otra posición cualquiera, será:

$$\frac{Ob. + Oc.}{2} - 25 = \frac{1}{2} [(Ob. + Oc.) - 50]$$

y la corrección de la lectura de mira, según (1), será:

$$\Delta l = \frac{s\gamma}{2\rho} [(Ob. + Oc.) - 50]$$

o sea, en milímetros:

$$\Delta l = \frac{s}{E} [(Ob. + Oc.) - 50], \quad \text{donde} \quad E = \frac{412,53}{\gamma} \quad (4)$$

En vez de calcular la corrección Δl para cada lectura simple, se puede también hallar la corrección $\Delta h = \Delta l_e - \Delta l_f$ correspondiente al desnivel o diferencia de lecturas, por medio de la fórmula siguiente, suponiendo que la distancia visual es igual en la

nivelada de espalda e y en la de frente f : esta corrección, expresada en milímetros, será:

$$\Delta h = \frac{s}{E} [(Ob. + Oc.)_e - (Ob. + Oc.)_f], \quad \text{donde} \quad E = \frac{412,53}{\gamma} \quad (5)$$

Las fórmulas (2) a (5) pueden calcularse cómodamente con la regla de cálculo. Se halla primero la constante E , que para una sensibilidad del nivel $\gamma = 4,15''$ será:

$$E = \frac{412,530}{4,15} = 99,40. \quad (6)$$

Se hace una señal en la corredera de la regla, y cada valor de Δh se determina según la fórmula (5) con un solo movimiento de la regleta o corredera.

Cuando la distancia no está dada en metros, sino en pasos, y si, por ejemplo, un paso es igual a 0,78 m, se tiene para s' pasos:

$$\Delta h = \frac{s'}{E'} [(Ob. + Oc.)_e - (Ob. + Oc.)_f], \quad \text{donde} \quad E' = \frac{E}{0,78} = \frac{412,530}{0,78\gamma} \quad (7)$$

Para el ejemplo anterior, $E' = 1,28E = 127,23$. La constante E es aquí la distancia visual en metros (o E' en pasos), para la cual la diferencia $(Ob. + Oc.)_e - (Ob. + Oc.)_f$ es igual exactamente a 1 mm de desnivel.

En las carreteras y vías férreas se acostumbra medir las distancias visuales a p sos, tomando como referencias las señales de hectómetros y kilómetros. En otros casos se mide la distancia con anteojo diastimométrico (véase § 59). Para lograr que las niveladas de frente y de espalda sean exactamente de la misma longitud, o sea que las distancias visuales sean iguales, se emplea una cinta métrica corriente.

La lectura del nivel se hace con más comodidad y precisión mediante dispositivos especiales. Pero también puede leerse directamente por medio de un espejo unido al anteojo.

Para el cálculo de la corrección resulta muy cómodo el empleo de la regla de cálculo ordinaria, como ya hemos indicado antes. También se emplean mucho los diagramas de corrección que dan directamente para cada s y para cada lectura de nivel la corrección que hay que aplicar. Sobre todo tratándose de anteojos diastimométricos (véase § 59) se toma directamente en el diagrama la lectura de mira, no teniendo que calcular previamente la distancia.

En una nivelación hecha por el autor con un nivel de sensibilidad $\gamma = 4,15''$, empleaba una mira dividida en medios centímetros (fig. 44), por lo cual la constante E de la fórmula (6) cambia de valor: si Δh se expresa en medios milímetros, esta constante vale $E = 49,70$. En cada nivelada de frente y de espalda se hacían dos lecturas, correspondientes a las dos numeraciones de la mira (fig. 44), como se ve en la tabla de la página siguiente, donde también van anotadas las correcciones.

Las correcciones para la burbuja descentrada se calcularon con la regla de cálculo del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \frac{38}{49,7} 3,5 = 2,7, & \frac{36}{49,7} 3,2 = 2,3, \text{ etc. (para metros)} \\ \frac{48,5}{63,7} 3,5 = 2,7, & \frac{45,5}{63,7} 3,2 = 2,3, \text{ etc. (para pasos).} \end{array}$$

Los pasos que figuran en la primera columna se midieron directamente; los metros se deducen del número de pasos, dividiendo, con la regla de cálculo, el número total de pasos por la distancia, conocida, entre los dos hitos, igual a 500 m.

Nivelación con burbuja descentrada

Constante del nivel $E = 49,7$ m, o $E' = 63,7$ pasos

Distancia		Dirección	Lecturas de mira		Nivel			Corrección	Observaciones
Pasos	Metros		espalda × frente	× espalda frente	Ob.	Oc.	Ob. + Oc.		
48	38	espalda	2,790	× 7,210	10,8	43,0	53,8	+ 2,7	Hito (10,0) 10 h 30 m
49		frente	× 7,642	2,357	9,1	41,2	50,3		
				+ 1,7	+ 1,8	+ 3,5			
46	36	espalda	3,000	× 7,001	9,2	41,3	50,5	+ 2,3	
45		frente	× 7,259	2,741	7,6	39,7	47,3		
				+ 1,6	+ 1,6	+ 3,2			
49	38	espalda	3,358	× 6,642	9,2	41,2	50,4	0,0	
48		frente	× 7,351	2,649	9,2	41,2	50,4		
				+ 0,0	0,0	0,0			
46	35	espalda	2,980	× 7,020	8,7	40,6	49,3	+ 2,4	
44		frente	× 7,171	2,829	6,9	39,0	45,9		
				+ 1,8	+ 1,6	+ 3,4			
50	39	espalda	3,888	× 6,111	8,3	40,4	48,7	0,0	
49		frente	× 7,680	2,320	8,3	40,4	48,7		
				0,0	0,0	0,0			
43	33	espalda	3,094	× 6,906	8,0	40,1	48,1	- 0,3	
41		frente	× 7,311	2,689	8,2	40,4	48,6		
				- 0,2	- 0,3	- 0,5			
40	31	espalda	3,878	× 6,122	8,3	40,4	48,7	+ 1,9	
40		frente	× 9,210	0,789	6,7	39,0	45,7		
				+ 1,6	+ 1,4	+ 3,0			
638	250		6,612	× 3,386				+ 9,3	10 h 46 m Hito (10,5)
			= + 6,612	= - 6,614				- 0,3	
			+ 6,6130					+ 9,0	
			+ 90						
			+ 6,6220	medios metros					
			$h = + 3,3110$ m						

La nivelación con burbuja descentrada presenta muchas ventajas, no sólo en las nivelaciones de precisión, sino también en las nivelaciones de vías férreas, en las explotaciones hidráulicas, etc., y su mayor importancia consiste en que hace compatibles la precisión con la rapidez. Pero es preciso tener mucha práctica para obtener tales ventajas con este procedimiento, operando casi mecánicamente con la regla de cálculo para llenar las columnas de la derecha de la tabla anterior.

Muchos topógrafos temen a la práctica que hay que adquirir para aplicar este método de nivelación. Para nivelaciones de poca duración o con personal variable, no vale la pena lograr dicha práctica, resultando mejor en tales casos seguir el procedimiento ordinario de burbuja calada, sobre todo si no es preciso conocer la distancia; de todos modos un método cualquiera de precisión bien conducido debe siempre dar buenos resultados.

Lectura con los tres hilos. En el ejemplo anterior, y gracias al empleo de una mira dividida en medios centímetros, se obtuvo una gran precisión. Aun puede lograrse mayor precisión empleando las miras francesas de nivelación (fig. 46), o las suizas del Mapa topo-

gráfico (fig. 48). Con anteojos de gran aumento y cortas distancias de mira se eleva extraordinariamente la precisión en la lectura.

Se consigue una mayor precisión en la lectura de mira utilizando los tres hilos del retículo, como se hizo en la nivelación suiza y en la de algunos estados alemanes, particularmente en Baviera.

A continuación puede verse un ejemplo de nivelación de esta clase, llevada a cabo por el sistema Vogler:

Nivelación con lectura de los tres hilos

Punto Mira Distancia Error	Nivelada de espalda						Nivelada de frente						Punto Mira Distancia Error
	Burbuja		Mira		Burbuja		Mira		Burbuja		Mira		
	Oc.	Ob.	Cara 1	Oc.	Ob.	Cara 2	Oc.	Ob.	Cara 1	Oc.	Ob.	Cara 2	
N. B. 39	14,1	14,0	0,7405	13,9	14,1	3,7755	14,2	13,8	0,2325	14,3	13,7	3,2680	w_1
VI	14,1	14,0	0,8555	13,8	14,2	3,8915	14,2	13,8	0,3485	14,2	13,7	3,3845	V
0,2295		0,2	0,9700	0,6		4,0070		0,8	0,4655		1,1	3,5005	0,2330
0,2315	28,2	28,2	2,5660	28,3	28,3	11,6740	28,4	28,4	1,0465	28,5	28,5	10,1530	0,2325
		1	0,8553	2		3,8913		2	0,3488		3	3,3843	
+ 0,7			0,8554			3,8911			0,3490			3,3846	+ 0,6
w_1	14,1	13,5	1,5785	13,7	14,0	4,6135	13,6	14,1	0,9635	13,8	14,3	3,9985	w_2
V	14,1	13,5	1,7025	13,8	13,9	4,7380	13,6	14,1	1,0895	13,8	14,3	4,1245	VI
0,2470		1,2	1,8255	0,4		4,8605	1,0		1,2150	1,0		4,2490	0,2515
0,2470	28,2	28,2	5,1065	27,9	27,9	14,2120	28,2	28,2	3,2680	28,6	28,6	12,3720	0,2505
		3	1,7022	1		4,7373	3		1,0893	3		4,1240	
- 0,3			1,7025			4,7372			1,0890			4,1237	- 0,3
w_2	14,1	13,4	0,7555	14,1	13,6	3,7920	14,0	13,7	2,1975	14,0	13,7	5,2330	w_3
VI	14,2	13,3	0,8825	14,1	13,6	3,9175	14,0	13,7	2,3225	14,1	13,7	5,3580	V
0,2515		1,6	1,0080		1,0	4,0425		0,6	2,4480		0,7	5,4825	0,2505
0,2505	28,3	28,3	2,6470	28,2	28,2	11,7520	28,0	28,0	6,9680	28,1	28,1	16,0735	0,2495
		4	0,8823		3	3,9173		2	2,3227		2	5,3578	
- 0,1			0,8827			3,9176			2,3229			5,3580	+ 0,1
w_3	13,6	14,3	0,5800	13,5	14,4	3,6150	13,5	14,4	0,0225	13,7	14,1	3,0570	N. B. 40
V	13,5	14,3	0,6975	13,5	14,3	3,7315	13,5	14,4	0,1515	13,7	14,1	3,1855	VI
0,2325		1,5	0,8125	1,7		3,8480	1,8		0,2795	0,8		3,3140	0,2570
0,2330	28,6	28,6	2,0900	28,7	28,7	11,1945	28,8	23,8	0,4535	28,2	28,2	9,5565	0,2570
		4	0,6967	4		3,7315	5		0,1512	2		3,1855	
+ 0,2			0,6963			3,7311			0,1507			3,1853	- 0,4

El aparato empleado en este caso es el representado en la figura 27; el cero de la escala del nivel está en el medio. En este método operatorio conviene reducir a la horizontal todas las lecturas de mira, y el nivel debe leerse antes y después de leer la mira, para aplicar la fórmula (3) de la página 62. Para $\gamma = 4,54''$, se obtiene en este caso $E' = 181$.

Las diferencias de lecturas del nivel se anotan siempre por debajo de la lectura menor, para facilitar así la comprobación por suma. Los signos + y - están colocados de tal modo que indican la corrección que hay que aplicar a aquellos números bajo los cuales se anotan las diferencias de lectura del nivel. La distancia a la mira está dada por la parte de ésta comprendida entre el hilo superior y el inferior del retículo, como veremos, para su cálculo, en el párrafo 59. Aquí nos basta con saber que si la constante del aparato es igual

donde α será positivo si el ocular del anteojo está hacia arriba, es decir, si está más alto que el objetivo. La reducida al horizonte será:

$$\frac{\alpha}{\rho} s = \left(25 - \frac{N}{2}\right) \frac{\gamma}{\rho} s. \quad (13)$$

En cada estación del nivel debe leerse la parte de mira comprendida entre los dos hilos excéntricos del retículo, para que resulten exactamente iguales las distancias a la mira en las niveladas de espalda y de frente. Si N tiene respectivamente los valores N_e y N_f en las niveladas de espalda y de frente, se tendrá, según la fórmula (13), la siguiente corrección en milímetros para la diferencia de nivel:

$$(N_f - N_e) \frac{1000 \gamma}{2 \rho} s. \quad (14)$$

Con las fórmulas (10), (12) y (14) se pueden calcular las diferencias de nivel partiendo de las lecturas hechas desde una estación.

Si llamamos e y f respectivamente a las lecturas de espalda y de frente hechas directamente sobre la mira, con los subíndices 1 y 2 según se trate de la cara anterior o de la posterior de la mira, tendremos, según la fórmula (10), una primera diferencia de nivel en metros, que será:

$$(e_1 - e_2) - (f_1 - f_2)$$

y la diferencia de nivel definitiva, h , se obtendrá aplicando a esta primera la corrección (14):

$$h = (e_1 - e_2) - (f_1 - f_2) - (N_e - N_f) \frac{1000 \gamma}{2 \rho} s \quad (15)$$

donde N tiene el valor dado por la fórmula (12), a saber:

$$N = \frac{Oc_1 + Ob_1 + Oc_2 + Ob_2}{2}. \quad (16)$$

De este modo, siguiendo el esquema (11), se calcula dos veces (I y II) la diferencia de nivel.

Se obtiene una plena comprobación para N si se puede afirmar que la longitud de la burbuja es la misma al hacer las lecturas sobre las dos caras de la mira. Llamando d a esta longitud, se tiene:

$$Ob_{.1} = Oc_1 + d \quad Ob_{.2} = Oc_2 + d \quad (17)$$

y substituyendo en (16), resulta:

$$N = \frac{1}{2} (2 Oc_1 + d + 2 Oc_2 + d) = Oc_1 + Oc_2 + d$$

y de aquí se deduce, según los valores (17), que

$$N = Oc_1 + Ob_2 = Oc_2 + Ob_1 \quad (18)$$

donde se ve que N puede calcularse dos veces.

La prueba para las lecturas de mira, dada por la fórmula (9), no puede aplicarse directamente, por no ser igual la inclinación del eje visual en ambas lecturas. Si los extremos de la burbuja experimentan respectivamente los corrimientos o desviaciones ΔOc y ΔOb al pasar de la lectura sobre la cara anterior de la mira, a la hecha sobre la posterior, la diferencia o corrección de lectura, en metros, será:

$$Z = (\Delta Oc + \Delta Ob) \frac{1000 \gamma}{2 \rho} s. \quad (19)$$

La fórmula de comprobación (9) debe, pues, aplicarse en la forma siguiente:

$$e_1 + e_2 = 40 + Z_e \quad f_1 + f_2 = 40 + Z_f. \quad (20)$$

Para facilitar los cálculos y operaciones anteriores, publicó Seibt tablas especiales de nivelación (Berlín, 1901).

Como ejemplo, para el registro y cálculo de nivelaciones por el método Seibt, damos en la página 70 un facsímil de libreta de campo, correspondiente a la nivelación hecha entre los hitos 119 c y 119 b del itinerario a lo largo del río Lippe (Westfalia), sobre la cual conviene exponer algunos detalles aclaratorios.

En esta nivelación se empleó el aparato núm. 2782 de Breithaupt (fig. 28), con 5,05" de sensibilidad de nivel, y las dos miras, también de Breithaupt, 3A y 3B (fig. 47). La corrección de mira era de +0,30 mm por metro; además, había una corrección de punto cero para la mira A respecto a la B, de -0,70 mm. La visual o eje de colimación quedaba determinada por la lectura de uno de los dos hilos excéntricos del retículo; la diferencia con el hilo medio, multiplicada por 400 y sumada con la constante (§ 59), daba la distancia de mira. En cada nivelada de espalda y de frente se leían las dos caras de la mira, y, lo mismo que las correspondientes lecturas de nivel, se anotaban en la libreta. El cálculo de la altura de la visual y la doble desviación N se hacía con las fórmulas (10) y (18), y mediante la fórmula (14) se calculaba la corrección de las diferencias de nivel. Para calcular la diferencia total de nivel, se sumaban las lecturas de espalda y las de frente, obteniéndose en la primera nivelación, como se ve en la libreta, la siguiente diferencia de nivel: 3,128 - 8,372 = -5,244 \times 4,816. La suma de las correcciones para las desviaciones de la burbuja era de -0,1 mm, resultando para valor definitivo o corregido de la diferencia de alturas \times 4,8159.

Al valor medio de los obtenidos en ambas nivelaciones hubo que aplicar aún la corrección de mira, y por haberse empleado miras distintas en el punto origen y en el punto extremo de la nivelación, se aplicó también la corrección de punto cero de una de las miras (véase página 61).

Lectura sobre una división lineal de la mira. En la triangulación topográfica de Alemania se empleaba antes el procedimiento descrito en el ejemplo de la página 64. En el año 1898 se adoptó el principio de la visual libre, en vez del de la visual obligada hasta entonces seguido, pero con el perfeccionamiento de emplear miras de rayas en vez de trazos, y anteojo con retículo provisto de dos hilos paralelos horizontales, que se podían colocar simétricamente respecto a una raya o a un espacio de la mira, obteniéndose las ventajas que supone la colocación del retículo en el micrómetro del teodolito.

La mira, dividida en medios centímetros, es la que ya hemos visto en la figura 45, y el nivel es el representado en la figura 27.

La distancia normal de mira es de 50 m; pero el grosor de las rayas de ésta y la separación de los hilos del retículo en el anteojo están de tal modo dispuestos, que también puede aplicarse este método a distancias de 25 m y hasta de 12,5 m. Cuando se opere a estas distancias debe hacerse la medición con gran cuidado, por ejemplo, con una cinta métrica.

A estas tres distancias aparece el campo del anteojo del modo que representa la figura 86. En los tres casos quedan entre los hilos y las rayas unas fajas estrechas blancas, que al mover los hilos arriba y abajo se consigue hacer exactamente iguales. Para las distancias de 50 m y 12,5 m cae el punto medio del intervalo entre los hilos sobre una

Punto de mira Distancia	Nivelada de espalda		Nivelada de frente		$N_e - N_f$	Correc. mm	Nivelada de espalda		Nivelada de frente		$N_e - N_f$	Correc. mm	Observaciones
	Mira M_e	Nivel N_e	Mira M_f	Nivel N_f			Mira M_e	Nivel N_e	Mira M_f	Nivel N_f			
Mira B	2,683	12,8	2,719	12,0	0,8	0,6	2,697	17,9	2,723	17,6	0,6	0,5	6 sep. 1930 6 ^o mañana nublado calma
119 ^c 65 a	1,315	14,9	1,279	14,9			1,319	9,9	1,283	9,5			
	1,368	51,8	1,440	51,0			1,368	51,8	1,440	51,2			
a 56 b	2,247	14,3	3,331	14,6	0,1	0,1	2,243	8,4	3,327	8,6			
	1,755	11,2	0,671	11,0			1,751	16,9	0,667	17,3			
b 42 c	0,492	49,7	2,660	49,8	1,1	0,6	0,492	49,5	2,660	50,1	1,4	0,7	
	2,135	18,0	3,055	13,4			2,131	10,1	3,059	21,0			
	1,867	13,9	0,943	17,2			1,863	21,3	0,947	9,1			
c 75 d	0,268	56,2	2,112	55,1	1,8	1,6	0,268	56,0	2,112	54,6	2,1	1,9	
	2,511	11,9	2,035	15,0			2,515	16,1	2,031	10,8			
Mira A	1,487	14,1	1,967	12,8	0,5	0,6	1,491	9,6	1,963	17,0	0,6	0,7	
d 107 119 ^b	1,024	50,6	0,068	52,4			1,024	50,3	0,068	52,4			
	2,019	14,1	3,047	13,9			2,015	10,9	3,043	10,8			
2 × 345 m	1,983	12,7	0,955	12,2			1,979	15,6	0,951	15,1			
690 m	0,036	51,5	2,092	51,0			0,036	51,4	2,092	50,8			
0,69 Km	3,188		8,372				3,188		8,372				
	4,816						4,816						
	-01						+04						
	4,8159						4,8164						
													Promedio × 4,8162
													Correc. de mira × 847
													Correc. de punto cero + 70
													× 4,8154 m

raya, y para la de 25 m, cae entre dos rayas; en los dos casos primeros se leen sobre la mira medios centímetros, y en el último caso se leen mitades de medios centímetros.

Cada nivelada de espalda y de frente se observa dos veces, para lo cual se empieza por calar el nivel lo mejor posible, y después se hace una lectura sobre la división más próxima, por arriba, a la visual horizontal, y otra lectura sobre la división más próxima, por abajo a dicha horizontal, moviendo para ello convenientemente los hilos del retículo. En ambas posiciones se leen los dos extremos de la burbuja. La lectura de la mira se hace con las dos numeraciones que aquella lleva; por ejemplo, para una nivelada de espalda a 50 m o a 12,5 m de distancia, se lee 1,97 y × 8,03, ó bien, para 25 m de distancia, 2,035 y × 7,965.

La libreta de campo se lleva de modo análogo al facsímil de la página 70; sin embargo, damos en la página 72 otro ejemplo, en el que no se van calculando las diferencias de nivel parciales, sino que cada diferencia que va obteniéndose se va sumando a las anteriores. Del mismo modo, no se va haciendo la reducción de las diferencias de nivel parciales (para distancias iguales) según la fórmula (5), sino que se halla para el cierre del itinerario la suma de las desviaciones o corrimientos de la burbuja. Pero hay que tener en cuenta que para la distancia mitad de la normal (25 m) y para la cuarta parte de ésta (12,5 m), sólo entran en la suma la mitad o la cuarta parte, respectivamente, de las desviaciones de la burbuja, debiéndose reducir todas a la distancia normal de 50 m.

Puesto que las diferencias de nivel de punto a punto van sumándose, se tiene que los últimos números 0,45 y 0,43 representan la diferencia de nivel entre los puntos extremos, pero sin corregir de desviación de la burbuja. Estas desviaciones van también sumándose y se reducen a la distancia normal de 50 m. Para el cálculo de la corrección de diferencia de nivel se aplica la fórmula (5), y por ser la apreciación o sensibilidad del nivel $\gamma = 5,35''$, resulta $E = \frac{412,53}{5,35} = 77,11$, y para $s = 50$, se tiene $\frac{s}{E} = 0,648$. La expresión entre paréntesis de la fórmula (5) es, para la nivelación I, igual a $-0,1$, y para la II, igual a $+14,4$, de modo que las correcciones serán:

$$\begin{aligned} \text{Niv. I} \\ -0,1 \cdot 0,648 &= -0,065 \text{ mm} \\ \text{o sea} &= -0,13 \text{ medios mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Niv. II} \\ +14,4 \cdot 0,648 &= +9,331 \text{ mm} \\ \text{o sea} &= +18,66 \text{ medios mm.} \end{aligned}$$

Nivelación con el nivel Zeiss de la figura 29. Con este equialtímetro pueden colocarse los hilos del retículo sobre una raya de la mira. Por la construcción especial de este instrumento, sólo puede utilizarse el anteojó con visual horizontal, y el retículo se hace coincidir con la raya más próxima a la visual horizontal, por arriba o por abajo, subiendo o bajando esta visual por medio de una lámina de caras paralelas montada por delante del objetivo, leyéndose la elevación o depresión en un tambor micrométrico, como ya vimos en la página 33.

La mira correspondiente a este aparato es la representada en la figura 49, que lleva dos tiras de metal invar divididas en medios centímetros, con las divisiones de una de ellas corridas respecto a las de la otra en unos 2,5 mm. Sobre esta mira puede leerse directamente el medio centímetro, con visual horizontal; las cifras decimales tercera y cuarta se obtienen en la lectura con el tornillo micrométrico, que aprecia la media décima de milímetro.

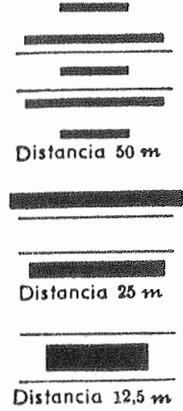


Fig. 86. — Colocación del retículo con relación a los trazos de la mira

Estación	Distancia m	De espalda E		De frente F		Nivelación I			Nivelación II						
		E	F	E	F	Lect. $\frac{1}{2}$ m	Mira Prueba $\frac{1}{2}$ m	Ob.	Nivel Oc.	v	Ob.	Nivel Oc.	v		
1	50	E	F	8,5	35,8	1,97	× 8,03	8,5	35,8	1,95	× 8,05	15,6	43,2	+ 4,2	
		F	E	6,4	33,7	× 9,14	0,86	6,4	33,7	× 9,16	0,84	13,6	41,0	+ 4,2	
2	50	E	F	+ 2,1	+ 2,1	1,11	× 8,89	+ 2,1	+ 2,1	1,11	× 8,89	× 2,0	+ 2,2	+ 4,2	
		F	E	12,8	41,0	3,05	× 6,95	12,8	41,0	3,05	× 6,95	13,1	41,4	+ 1,2	
3	50	E	F	8,8	37,1	× 7,76	2,24	8,8	37,1	× 7,77	2,23	12,5	40,8	+ 5,4	
		F	E	+ 4,0	+ 3,9	1,92	× 8,09	+ 4,0	+ 3,9	1,93	× 8,07	+ 0,6	+ 0,6	+ 5,4	
4	25	E	F	8,4	36,9	2,11	× 7,89	8,4	36,9	2,11	× 7,89	8,5	36,7	+ 4,9	
		F	E	13,2	41,6	× 5,65	4,35	13,2	41,6	× 5,63	4,37	6,0	34,3	+ 10,3	
5	12,5	E	F	- 4,8	- 4,7	× 9,68	0,32	- 4,8	- 4,7	× 9,67	0,33	+ 2,5	+ 2,4	+ 8,8	
		F	E	11,0	38,5	1,795	× 8,205	11,0	38,5	1,795	× 8,205	10,5	38,2	+ 8,8	
6	12,5	E	F	8,9	36,5	× 6,315	3,685	8,9	36,5	× 6,305	3,695	1,7	29,4	+ 19,1	
		F	E	+ 2,1	+ 2,0	× 7,79	2,21	+ 2,1	+ 2,0	× 7,77	2,23	+ 8,8	+ 8,8	+ 17,4	
6	200 × 2 400	E	F	17,3	45,4	2,71	× 7,29	17,3	45,4	2,72	× 7,28	3,0	31,3	- 1,7	
		F	E	21,0	49,3	× 7,65	2,35	21,0	49,3	× 7,64	2,36	6,5	34,7	+ 3,0	
6	12,5	E	F	- 3,7	- 3,9	× 8,15	1,85	- 3,7	- 3,9	× 8,13	1,87	- 3,5	- 3,4	+ 14,4	
		F	E	9,0	37,3	4,28	× 5,72	9,0	37,3	4,28	× 5,72	8,7	37,1	- 3,0	
6	200 × 2 400	E	F	14,7	43,0	× 8,02	1,98	14,7	43,0	× 8,02	1,98	14,8	43,1	+ 14,4	
		F	E	- 5,7	- 5,7	0,45	× 9,55	- 5,7	- 5,7	0,43	× 9,57	- 6,1	- 6,0	+ 14,4	
						+ 0,0001									
						+ 0,4499									

Promedio: + 0,4493 medios metros = + 0,2246 m

Para afinar la posición de los hilos, lleva el retículo un hilo en forma de horquilla, en vez de hilos horizontales (fig. 31), que para cualquier distancia asegura la posición precisa del hilo sobre la división de que se trate.

A continuación puede verse el facsímil de una libreta de campo correspondiente a una nivelación hecha con nivel Zeiss, con el cálculo y comprobaciones propias de la misma:

Punto	Mira	Distancia m	Niv. I		Niv. II		Compro- bación $\frac{f_E}{f_F}$ d	Desnivel $\frac{I+II}{2}$	Observaciones
			E_1 F_1 Desnivel I	E_2 F_2 Desnivel II	E_2 F_2 Desnivel II	E_2 F_2 Desnivel II			
N. B. 52	5	44	1,79	70	7,72	20	0	Constante de mira = 5,9250	
	6	44	5,89	28	11,81	80	+ 2		
			× 5,90	42	× 5,90	40	- 2		× 5,9041
	6	46	2,69	63	8,62	10	- 3		0,7408
	5	46	1,95	53	7,88	03	0		
			0,74	10	0,74	07	- 3		
N. B. 53	5	38	4,73	30	10,65	83	+ 3	0,6538	
	6	38	1,43	13	7,35	65	+ 2		
			3,30	17	3,30	18	+ 1		3,3018
	6	20	2,65	77	8,58	24	- 3		0,6005
	5	21	2,00	37	7,92	87	0		
			0,65	40	0,65	37	- 3		

Desnivel: 0,3002 m

Nivel Vogler con anteojo ascendente. Este instrumento consiste, en esencia, en un anteojo con nivel, que puede subir a lo largo de un vástago o eje vertical fijo en un trípode. Como mira se emplea la metálica descrita en la página 44, con señales circulares de decímetro en decímetro, sobre las cuales hay que enfilar el hilo horizontal del anteojo; no siendo posible medir directamente el ángulo de depresión o elevación con el nivel, por la distancia de 1 dm entre señales, es preciso subir el anteojo sobre el eje vertical para lograr dicha enfilación, y la elevación del mismo se mide con una escala muy fina, que se lee con un microscopio.

§ 15. Leyes de los errores de nivelación

Vamos a considerar los diferentes errores que pueden producirse en una nivelación, tanto de observación como instrumentales, y a estudiar el efecto a que conjuntamente dan lugar, investigando la ley a que este efecto obedece. Supongamos para ello que se trata de la nivelación de un itinerario de gran longitud L (fig. 87) efectuado con n estaciones y $2n$ tramos de longitud s .

Sea el error medio de una lectura de mira $\pm \mu$. Este error está compuesto del error de visual del anteojo y del error de centrado o lectura del nivel (según el método de nivelación empleado). Pero no es preciso, en principio, conocer ni estudiar separadamente estos errores, por lo cual designamos con $\pm \mu$ el efecto resultante de ambos.

La diferencia de nivel entre los puntos inicial y final de la línea L será, según se desprende de la figura 87:

$$H = e_1 - f_1 + e_2 - f_2 + e_3 - \dots - f_n.$$

Cada lectura de espalda e o de frente f va afectada del error medio $\pm \mu$, y por lo tanto el error ΔH del desnivel total H será:

$$\Delta H = \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \dots + \mu$$

y el error medio de H , según la ley general de acumulación de errores, es:

$$M = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \dots + \mu^2} = \sqrt{2n\mu^2} = \mu\sqrt{2n} \quad (1)$$

y como, según la figura 87,

$$L = 2ns, \quad \text{o sea} \quad 2n = \frac{L}{s},$$

sustituyendo este valor en la expresión (1) se tendrá:

$$M = \sqrt{\frac{L}{s}\mu^2}. \quad (2)$$

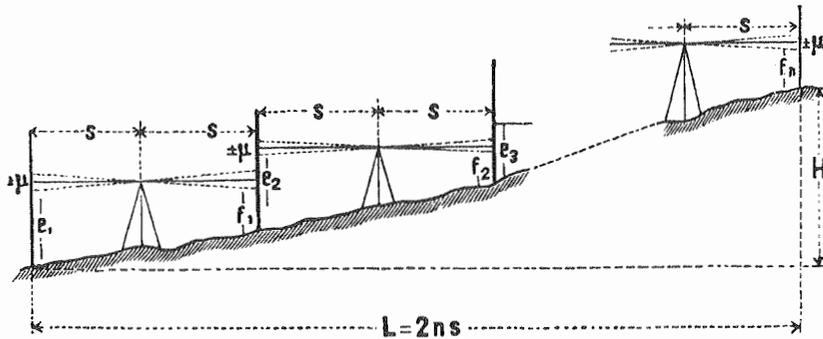


Fig. 87

Esta fórmula que da la ley principal de los errores de nivelación nos dice que, para un mismo instrumento y análogas circunstancias, el error medio de la nivelación (siendo constante la distancia s) aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la longitud de la línea nivelada L .

El error de una nivelación puede seguir esta ley, si el error $\pm \mu$ de las distintas niveladas es pequeño y lo más constante posible. Esta condición se cumple, porque se toma una distancia constante s como distancia normal en toda la nivelación.

Puesto que el error medio M , para distancia constante s , es proporcional a \sqrt{L} , el peso p de nivelaciones diferentes, para la distancia constante s , y en análogas circunstancias, será inversamente proporcional a la longitud de la línea nivelada, es decir:

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'} \quad (3)$$

Con lo expuesto no podemos resolver la duda de si es más conveniente nivelar con tramos cortos o largos; hemos de determinar aún la dependencia o relación entre el error medio μ y la distancia o tramo de nivelada, cosa que haremos en los párrafos 17 y 18.

Doble nivelación. Si se divide un itinerario en varios tramos (que no tienen que ser forzosamente iguales), y se nivela cada trozo s dos veces (ida y vuelta) se obtiene una dife-

rencia o desnivel parcial d , y teniendo gran número de estas diferencias puede ya calcularse la precisión o error medio, como se dijo en el tomo I (pág. 24), empezando por anotar los desniveles parciales del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Tramo } s_1; & h_1 - h_1' = d_1 \\ & \cdot \quad s_2; h_2 - h_2' = d_2 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad s_n; h_n - h_n' = d_n. \end{aligned}$$

Y según la fórmula (10) de la página 24 del tomo I, el error medio m de una nivelación de 1 Km será:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad (4)$$

y el error medio del promedio de las dos nivelaciones (ida y vuelta), de 1 Km, será:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]}. \quad (5)$$

Estas fórmulas (4) y (5) son las mismas (7) obtenidas en el tomo I, página 70, para el error medio de las dobles mediciones.

En las nivelaciones se expresan los tramos s en kilómetros y los desniveles en milímetros, resultando que el valor dado por las fórmulas (4) y (5) queda expresado en milímetros por kilómetro.

Damos a continuación un ejemplo de nivelación de una línea férrea. (El signo \times indica el complemento aritmético, es decir, lo que falta a la cantidad afectada de ese signo para valer 10; por ejemplo: $\times 4,7065 = 4,7065 - 10 = -5,2935$.)

Punto	Nivelación I Desniveles	Nivelación II Desniveles	I - II = d	Tramos s	\sqrt{s}	$\frac{d}{\sqrt{s}}$	$\frac{d^2}{s}$	Promedio $\frac{I + II}{2}$
Origen (1)	$\times 9,8147$ m	$\times 9,8141$ m	+ 0,6 mm	0,72 Km	0,85	0,7	0,49	$\times 9,8144$
(2)	1,6258	1,6262	- 0,4	0,42	0,65	0,6	0,36	1,6260
(3)	1,4329	1,4323	+ 0,6	0,47	0,69	0,9	0,81	1,4326
(4)	0,5106	0,5094	+ 1,2	0,48	0,69	1,7	2,89	0,5100
(5)	$\times 9,9927$	$\times 9,9951$	- 2,4	0,51	0,71	3,4	11,56	$\times 9,9939$
(6)	0,5894	0,5848	+ 4,6	0,57	0,75	6,1	37,21	0,5871
(7)	$\times 9,9440$	$\times 9,9398$	+ 4,2	0,74	0,86	4,9	24,01	$\times 9,9419$
(8)	$\times 9,6131$	$\times 9,6139$	- 0,8	0,30	0,55	1,5	2,25	$\times 9,6135$
(9)	0,5384	0,5384	0,0	0,64	0,80	0,0	0,00	0,5384
(10)	2,0364	2,0386	- 2,2	0,85	0,92	2,4	5,76	2,0375
(11)	1,3718	1,3740	- 2,2	0,57	0,75	2,9	8,41	1,3729
Extremo (12)								
$n = 11$	7,4698 m	7,4666 m	+ 3,2 mm	6,27 Km			93,75	7,4682

Con los datos de esta libreta se calcula el error medio de la doble nivelación de 1 Km por la fórmula (5):

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{93,75}{11}} = \pm 1,46 \text{ mm.} \quad (6)$$

En los 59 tramos como éste de que se componía el itinerario completo (34,31 Km) de que este ejemplo forma parte, resultó $M = \pm 1,94$ mm; la nivelación fué hecha en los meses de febrero y marzo de 1891, a una velocidad de 1,5 Km por hora.

Para el cálculo de los errores en la nivelación se emplea con frecuencia la expresión $\frac{d}{\sqrt{s}}$ ó $\frac{d^2}{s}$, para la cual damos una tabla (I) en el Apéndice. Obsérvese que no se hace el cálculo con $d^2:s$; sino con la forma $d:\sqrt{s}$, porque este cociente representa también el desnivel para 1 kilómetro. Para formar esta tabla, se prepara anteriormente la de \sqrt{s} (que damos en la misma página del Apéndice) y ya con la regla de cálculo se van hallando valores para $d:\sqrt{s}$. Si se quiere tener el valor de $d^2:s$, basta recurrir a una tabla de cuadrados.

Vamos a aplicar la fórmula (5) aun al caso en que sean de igual longitud todos los tramos s . En este supuesto, la citada fórmula se expresa del modo siguiente:

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{ns} [d^2]}$$

y llamando L a la longitud total del itinerario, es decir, haciendo $ns = L$, se tiene:

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{L}} \quad (7)$$

Si la nivelación total consta de varios itinerarios L_1, L_2, L_3, \dots , en los cuales el número de tramos sea respectivamente n_1, n_2, n_3, \dots , se tiene para el error medio la siguiente expresión:

$$M_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{(n_1 + n_2 + n_3 + \dots) s}}$$

o bien:

$$M_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{[L]}} \quad (7^*)$$

Error de cierre en una poligonal. Si el itinerario de nivelación forma parte de una red, compuesta de una serie de poligonales cerradas, podemos calcular el error medio en función del error de cierre, antes de proceder a la compensación de errores de los polígonos.

Llamemos, para ello, S a la longitud de una de las poligonales cerradas; N al número de éstas, y f al error de cierre. Téngase presente que estos errores de cierre se deducen de los promedios obtenidos en las nivelaciones de ida y vuelta (doble nivelación). Aplicando en este caso la fórmula (4), tendremos el error medio del promedio de dos nivelaciones de 1 Km de longitud. En dicha fórmula (4) hay que sustituir $2s$ por S , y tendremos:

$$M = \sqrt{\frac{1}{N} \left[\frac{f^2}{s} \right]} \quad (8)$$

En el párrafo 16 volveremos a tratar del error medio, después de haber estudiado el efecto de los errores sistemáticos en la nivelación.

Compensación lineal. Cuando se hace doble nivelación en un itinerario lineal, con puntos intermedios, la compensación consiste simplemente en referir las altitudes a un mismo punto origen y tomar después el promedio en todos los puntos. Los errores accidentales y groseros que pueden presentarse, deben ser considerados aparte.

Quando al hacer la nivelación de vuelta en un itinerario se observa una cierta diferencia respecto a la de ida, se reparte ésta proporcionalmente a la distancia a los puntos intermedios. Del mismo modo se procede cuando los puntos extremos del itinerario que

se nivela están referidos a puntos permanentes (por ejemplo, a dos señales de nivelación de precisión).

Estas sencillas compensaciones se corresponden exactamente con las estudiadas en el tomo I (§§ 9 y 10) para las mediciones de longitud. Las fórmulas allí deducidas (8 y 9 de la página 75) pueden aplicarse aquí directamente:

$$m = \frac{w}{\sqrt{L}} \quad (9)$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{w}{L} \sqrt{l l'} \quad (10)$$

Estas fórmulas nos dicen, aplicadas a la nivelación, que si en un itinerario de doble nivelación, o en uno sencillo entre puntos permanentes, se obtiene un error de cierre w , el error medio m , para 1 Km, se calcula o deduce mediante la expresión (9); y que un punto de dicho itinerario, que diste por un lado l y por el otro l' de un punto de cierre, queda determinado después de hecha la compensación, con un error medio M , dado por la fórmula (10). Este error medio alcanza su valor máximo cuando $l = l' = \frac{L}{2}$, y en este caso se tiene:

$$M_{\text{máx}} = \frac{w}{2} \quad (11)$$

§ 16. Errores sistemáticos en la nivelación

Quando en una doble nivelación se agrupan las diferencias de los diferentes trozos con arreglo a sus signos, se comprueba con frecuencia que estos signos no son positivos o negativos de modo arbitrario o irregular, sino que claramente se ve que tienden a aparecer en un determinado sentido, deduciéndose de aquí que los errores de la nivelación tienen también un cierto sentido, es decir, que son de naturaleza o tendencia unilateral. Resulta difícil determinar con precisión la causa de estos errores unilaterales; pero desde luego a esta clase pertenecen los de descenso del instrumento y de la mira, que vamos a considerar a continuación.

El descenso del instrumento, es decir, que el trípode se clave cada vez más en el terreno, o el de la mira, a saber, que la plancha que le sirve de base se hunda en el suelo, da siempre errores del mismo sentido, resultando los desniveles mayores de lo que realmente son.

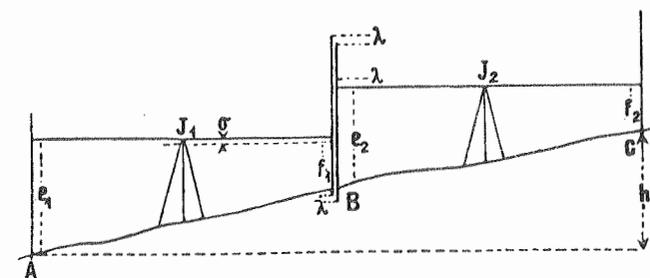


Fig. 88

Supongamos que se trata de nivelar entre A y C (fig. 88), con estaciones de nivel en J_1 y J_2 , y que entre A y B se produzca un descenso σ del trípode, en el tiempo que media entre la nivelada de espalda e_1 sobre A , y la de frente f_1 sobre B ; se ve fácilmente que la lectura de frente f_1 es más pequeña de lo que debiera ser, siendo el error igual a σ ; y el desnivel entre A y B , en vez de ser $e_1 - f_1$, es realmente $e_1 - (f_1 - \sigma) = e_1 - f_1 + \sigma$, o sea mayor en σ , que el desnivel observado.

Supongamos ahora que mientras se pasa de la estación J_1 a la J_2 , se hunda la mira en

el terreno, es decir, experimente un descenso λ respecto a su posición primitiva; es evidente que la lectura de espalda e_2 resulta mayor que la verdadera, con un exceso igual a λ , y el desnivel leído $e_2 - f_2$ debiera ser en realidad $e_2 + \lambda - f_2 = e_2 - f_2 + \lambda$, o sea, que el desnivel real es también mayor que el observado.

En el caso de la figura 88 se tiene para los dos descensos considerados:

$$\begin{aligned} \text{desnivel verdadero } h &= e_1 - f_1 + e_2 - f_2, \\ \text{desnivel observado } h' &= e_1 - f_1 + \sigma + e_2 - f_2 + \lambda. \\ \text{Efecto o error debido a los descensos: } h' - h &= \sigma + \lambda = \tau, \end{aligned} \quad (1)$$

llamando τ al efecto combinado de los descensos del aparato y de la mira.

Cuando el itinerario no es ascendente, como en la figura 88, sino descendente, sirve la misma fórmula (1), considerando, como siempre, h y h' con sus signos algebraicos, es decir, tomando una pérdida de nivel como una altura negativa.

Cuando se trata de una doble nivelación o de un itinerario cerrado, se entenderá la fórmula (1) del modo siguiente: sea I el desnivel observado en la nivelación de ida, que será positivo para pendiente ascendente o elevación y negativo para pendiente descendente o depresión; y sea II el desnivel correspondiente a la nivelación de vuelta. Siendo τ el error debido al hundimiento de trípode y mira para una nivelación simple, para esta doble será:

$$I - II = d = + 2\tau. \quad (2)$$

Al nivelar de A hacia B llamaremos I al desnivel entre A y B , que será positivo cuando B esté más alto que A , y negativo cuando B esté más bajo que A ; por ejemplo, $I = + 25,737$ m significa que B está 25,737 m más alto que A . Al nivelar por segunda vez, es decir, de B hacia A , se registrará en la libreta de campo un valor negativo, por ejemplo, $- 25,714$ m, y sin embargo escribiremos $II = + 25,714$ m, y por consiguiente $I - II = + 23$ mm; esto es, que la fórmula $I - II = d$ debe sobreentenderse que se aplica a signos iguales de I y II , iguales ambos al de I .

Para nivelar un polígono cerrado debemos calcular todas las alturas con el signo correspondiente al sentido en que discurre el itinerario, y de este modo el hundimiento posible de trípode y mira producirá un error positivo de cierre (prescindiendo aquí de los errores propios de la nivelación). También puede considerarse toda doble nivelación como una simple, de precisión, en itinerario cerrado; por ejemplo, en la nivelación anterior se tiene de A hacia B $+ 25,737$ m y de B hacia A $- 25,714$ m, y el error de cierre será $w = + 25,737 - 25,714 = + 23$ mm, como se obtuvo anteriormente.

El autor de esta obra encontró una prueba concluyente del efecto que el hundimiento de trípode y mira produce en la nivelación, en un trabajo llevado a cabo en 1881. La operación se efectuó con una llovizna que en nada afectaba a la visualidad, sino al contrario, ya que se tenían imágenes completamente quietas y muy limpias; el suelo se mojó bien y se ablandó considerablemente, y al hacer la nivelación de vuelta, resultaron las siguientes diferencias d , bien importantes:

Puntos	Distancias	Niv. I. Lluvia	Niv. II. Seco	$I - II = d$
6640	2,0 Km	+ 25,737 m	+ 25,714 m	+ 23 mm
6641	2,0	+ 31,835	+ 31,816	+ 19
6642	2,0	+ 40,618	+ 40,604	+ 14
6643	6,0 Km	+ 98,190 m	+ 98,134 m	+ 56 mm

La nivelación I iba del punto 6640 al 6643, con una elevación total de 98,190 m, y la nivelación II , al contrario, del punto 6643 al 6640, con una depresión de 98,134 m; sin

embargo, mantuvimos el signo de I e hicimos el cálculo de este modo: $d = + 98,190 \text{ m} - (+ 98,134 \text{ m}) = + 56 \text{ mm}$.

Considerando esta diferencia $+ 56$ mm como efecto de los hundimientos en el piso blando, se tiene:

$$\tau = \frac{+ 56}{6} = + 9,3 \text{ mm por kilómetro.} \quad (4)$$

Como resultado práctico de una nivelación es detestable el obtenido en este ejemplo, pero desde el punto de vista de la investigación bajo circunstancias excepcionales constituye un caso bien interesante. El resultado obtenido en la nivelación de ese mismo itinerario, con tiempo seco, no daba, para 57 Km de distancia y 829 m de desnivel, ninguna variación apreciable en las diferencias d a causa del hundimiento del trípode o de la mira.

Otro ejemplo de esta clase se tiene en la nivelación de precisión de Suiza, pero referida principalmente al efecto producido por el hundimiento del trípode del nivel. En un itinerario de 171 Km se observaron diferencias en el mismo sentido, por valor de 163 mm (por efecto de dicho hundimiento), correspondiente a casi 1 mm por kilómetro.

También en la nivelación del Vístula en 1891 se observó un error constante, de 0,3 mm por kilómetro aproximadamente, que debe atribuirse al hundimiento del trípode y la mira, y no a otra causa distinta, por haberse hecho aquella en vertientes arcillosas, charcos de agua, etc.

Como regla general, y ya se trate de errores sistemáticos debidos a hundimiento de trípode o mira, o a cualquier otra causa, debe procurarse evitar los errores constantes, y hacer la nivelación doble, es decir, recorriendo el itinerario en sentidos opuestos, para tener garantía de la bondad de la operación (*).

Evaluación de los errores sistemáticos por el cálculo del error medio de la nivelación.

Ya hemos visto que los errores sistemáticos se ponen de manifiesto al nivelar un itinerario, cuando las diferencias d entre las nivelaciones de ida y vuelta entre estación y estación tienden a preponderar en un mismo sentido y son proporcionales a la longitud del itinerario.

Para obtener un valor numérico de estos errores sistemáticos, tomemos como origen de coordenadas el punto de arranque del itinerario; como ordenadas se toman las sumas de los valores absolutos de las diferencias para cada punto, y como abscisas las correspondientes distancias del origen a estos puntos, y por entre los puntos resultantes se traza una recta promedia. La diferencia Δ entre las ordenadas última y primera representa el valor medio del conjunto de errores sistemáticos del itinerario. Para 1 Km, este valor será $\frac{\Delta}{L}$; pero como Δ resulta de la doble nivelación del itinerario, es evidente que para

(*) Es muy interesante el trabajo de Ch. Lallemand titulado «Rapport sur les travaux du service du Nivellement général de la France en 1895», seguido de dos notas sobre la influencia de los errores sistemáticos en las nivelaciones de precisión y sobre el grado de estabilidad de las estacas empleadas como señales provisionales en estas operaciones. Extracto de los «Comptes-Rendus» de la 11.ª Conferencia general de la Asociación Geodésica Internacional celebrada en Berlín en octubre de 1895 (págs. 203-229).

También Lallemand trata de las nivelaciones de Austria, España, Prusia y Francia, y encuentra los errores medios sistemáticos en las dobles nivelaciones; en España, 0,26 mm; en Prusia, 0,27 mm, y en Francia, 0,18 mm por kilómetro.

Véase, además, en las Actas de la Comisión permanente de Lausana, 1896, una nota de Lallemand sobre nivelación de Francia (páginas 227-276).

Muy interesante es el estudio hecho por Holm sobre los errores sistemáticos en la nivelación; al leer el nivel se comete un error constante cuando el operador tiene la costumbre de leer con un solo ojo, a causa de la desigualdad tan frecuente entre ambos ojos. Este error de paralaje puede evitarse colocándose el observador una vez a un lado y otra al otro del itinerario que se está nivelando.

una nivelación simple de 1 Km de longitud, la suma de los errores sistemáticos será $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta}{L}$, y para la media aritmética de las dos nivelaciones de 1 Km, el error medio sistemático será:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{L} \quad (5)$$

Si tenemos varios itinerarios formando red, tomaremos la media cuadrática de los distintos valores parciales δ , dando a cada uno de éstos el peso L , con lo cual resultará:

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} \frac{\frac{\Delta_1^2}{L_1^2} L_1 + \frac{\Delta_2^2}{L_2^2} L_2 + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

o bien:

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta^2}{L} \right] \quad (5^*)$$

Consideremos ahora un solo tramo entre dos estaciones; la diferencia d entre la nivelación de ida y la de vuelta está compuesta de una parte accidental d' y de otra constante o sistemática, que según la fórmula (5) es igual a $2s\delta$. Es decir, que se tiene:

$$d = d' + 2s\delta.$$

Y elevando al cuadrado:

$$d^2 = d'^2 + 4s^2\delta^2 + 4sd'\delta.$$

Y como el último término puede suponerse igual a cero, resulta:

$$d'^2 = d^2 - 4s^2\delta^2. \quad (6)$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (7) del párrafo 15, se tiene:

$$M^2 = \frac{1}{4L} ([d^2] - 4s^2[s^2]). \quad (7)$$

Si se trata de varios itinerarios enlazados, haremos la sustitución en la fórmula (7*) del párrafo 15, pero poniendo δ_1 en vez de δ :

$$M_1^2 = \frac{1}{4[L]} ([d^2] - 4\delta_1^2[s^2])$$

y sustituyendo δ_1 por su valor, dado por la fórmula (5*), resulta en definitiva:

$$M_1^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{[d^2]}{[L]} - \frac{[s^2]}{[L^2]} \left[\frac{\Delta^2}{L} \right] \right). \quad (8)$$

Estas fórmulas (5*) y (8), para el cálculo del error medio y de los errores sistemáticos de una nivelación, se deben a Ch. Lallemand, y fueron publicadas en las Actas de la 17.^a Conferencia Internacional Geodésica (1912), en la cual se acordó que debe entenderse por «nivelaciones de gran precisión» aquellas en que el error medio accidental por kilómetro no pase de $\pm 1,5$ mm, y cuyo error medio sistemático no pase de $\pm 0,3$ mm.

§ 17. Errores propios del equaltímetro

Para el uso correcto del aparato empleado en la nivelación, es de gran importancia el conocimiento del error propio del nivel y del anteojo, así como de la influencia que ejerce el modo de estar dividida la mira, según sea la unidad de división de la misma.

Error del nivel propiamente dicho. En el tomo I (§ 57) tratamos ya de la precisión de los niveles de aire, y de lo allí expuesto se deduce que para visuales horizontales (en nivelaciones ordinarias) resulta ventajoso el empleo de niveles de poca sensibilidad; en cambio, para la nivelación con visual inclinada (nivel descentrado) debe emplearse un nivel de gran sensibilidad. Para la nivelación corriente con burbuja calada resulta también conveniente no emplear niveles muy sensibles, sino más bien perezosos, que facilitan y abrevian las operaciones de modo considerable (véase el cuadro de la página 227 del tomo I). Hay que tener también presente que para observar el nivel desde el ocular es mejor disponer el espejo a un lado del nivel, y no por encima del mismo.

Según se vió en la página 227 del tomo I, el error medio para el *centrado* de la burbuja es igual a $\pm 0,09\sqrt{A''}$, siendo A'' la sensibilidad, o apreciación del nivel (inclinación del eje del nivel correspondiente a 1 división de la escala de este último). Es decir, que para una distancia de mira igual a s , el error λ debido al nivel será, expresado en milímetros:

$$\lambda = \frac{0,09\sqrt{A''}}{\rho''} \times 1000 \times s = 0,00044 s\sqrt{A''}. \quad (1)$$

Por ejemplo, para los siguientes valores numéricos de s y de A'' , los correspondientes de λ serán:

	$s = 10$	20	50	100	150 m
$A'' = 10''$	$\lambda = 0,014$	0,023	0,070	0,139	0,21 mm
$A'' = 30''$	$\lambda = 0,02$	0,05	0,12	0,24	0,36 mm

Error de lectura de mira. Si suponemos igual a T el valor de la unidad de división de la mira, y el aumento del anteojo igual a V , es evidente que a una distancia s , el ángulo J bajo el cual se verá dicha unidad T , será:

$$J = \frac{T}{s} V. \quad (2)$$

A este ángulo J se le llama diámetro aparente de la unidad de mira.

La precisión con que puede leerse la posición de los hilos del retículo sobre la mira depende, como es natural, del valor del diámetro aparente J . Para determinar el grado de esta dependencia, hemos utilizado los datos obtenidos por Reinhertz y Kummer, en los trabajos que llevaron a cabo para determinar el error medio de lectura en miras de nivelación a diversas distancias y con diferentes aumentos de anteojo, para miras divididas en centímetros y en medios centímetros (*).

Con estos datos y aplicando la fórmula (2) a todas las lecturas, hemos calculado el valor del diámetro aparente J , y conocido este valor, hallamos el error medio m_1 de la apreciación para el intervalo J , en función del error medio conocido m , mediante la siguiente fórmula:

$$m_1 = m \frac{J}{T}. \quad (3)$$

Tomando los valores m_1 como ordenadas y los de J como abscisas, se ve que m_1 es proporcional a J . Con una compensación gráfica se obtiene para m_1 el valor:

$$m_1 = \pm (0,136 + 0,0292 J) \quad (4)$$

donde tanto m_1 como J están expresados en milímetros.

(*) REINHERTZ, Resultado de varias observaciones sobre la precisión de lecturas en las miras, especialmente en las de nivelación. «Nova acta d. Kais. L. C. Deutschen Akademie der Naturforscher», tomo 62, número 2, Halle, 1894, y Zeitschr. f. Verm., 1894 y 1895.

KUMMER, Precisión en las lecturas con los anteojos de los niveles. Zeitschr. f. Verm., 1897.

Sustituyendo este valor y el de J dado por la fórmula (2) en la expresión de m_1 (3), y despejando m se obtiene:

$$m = \pm \left(0,136 \frac{s}{V} + 0,0292 T \right) \quad (5)$$

donde m y T están expresadas en milímetros y s en metros.

Claro está que esta fórmula (5) no da exactamente la precisión de lectura para un observador cualquiera y un cierto anteojo, pero el valor obtenido con su aplicación puede considerarse como un buen promedio.

En la obra antes citada de Reinhertz, da su autor para expresión del error medio de lectura una fórmula distinta, que empleando nuestra notación es como sigue:

$$m_1 = 0,08 \sqrt{J}.$$

Esta fórmula indica que para valores cada vez menores de J , los correspondientes de m_1 disminuyen continuamente, casi hasta hacerse infinitamente pequeños, lo cual no sucede en realidad. Ésta es una nueva razón para que consideremos la fórmula (4) como más conveniente y de mayor exactitud en su aplicación.

La apreciación depende del punto de la división leída. El error de apreciación es mínimo cuando se lee sobre el punto medio de un trazo, y máximo para los puntos que marcan $1/4$ y $3/4$ del trazo. De aquí resulta un error sistemático y personal que hay que tener en cuenta. De las investigaciones llevadas a cabo por Reinhertz y Kummer, ya citadas, se deduce que si el error en el punto medio de un trazo se supone = 1, el error total de apreciación (sin separar la parte accidental de la constante y teniendo en cuenta el grosor de los hilos del retículo), en otro sitio cualquiera, es aproximadamente igual a 1,3; en los sitios más desfavorables, este error es 1,5 y más aún, y en los bordes del trazo el valor de este error viene a ser el promedio de su valor en todos los demás puntos del mismo.

La apreciación puede aumentarse considerablemente empleando miras reversibles con las dos escalas corridas una respecto a otra en una cierta fracción de división ($1/2$ o $1/4$) (véase párrafo 10, página 39).

Posición de los hilos del retículo sobre la mira. Acabamos de ver que la lectura es más precisa sobre el centro de un trazo que en otro punto cualquiera del mismo; por lo tanto, la mayor precisión de lectura se obtiene cuando se coloca el hilo del retículo en dicho punto medio, no teniendo que considerar el número de partes o divisiones leídas en la mira, y atendiendo solamente a dividir el trazo en dos partes exactamente iguales.

Para un anteojo de 37 aumentos y una distancia de mira de 50 m se determinaron los siguientes errores, estando la mira empleada dividida en medios centímetros: error de lectura, 0,41 mm; error de posición del hilo en el punto medio del trazo, 0,21 mm; error de posición del hilo sobre una raya blanca de 1,3 mm de grosor, 0,15 mm. Este sistema de nivelación con el hilo sobre el centro de un trazo fué empleado por Seibt, como ya se vió en el párrafo 14 (pág. 67). También el método empleado en Alemania (§ 14, pág. 69), en el cual la lectura se hace con un doble hilo sobre una raya de la mira, está basado en el mismo fundamento que el anterior. Con el nivel de Vogler (§ 14, pág. 73) se hace la lectura colocando el hilo central del retículo en el centro de uno de los circulitos marcados sobre la mira.

§ 18. Efecto de conjunto de todos los errores, y precisión de la nivelación en general

El efecto resultante de la combinación de todos los errores parciales antes considerados depende del sistema de nivelación empleado, por lo cual debemos considerar los tres casos siguientes:

- Sistema I. — Calado del nivel y lectura de la mira.
 „ II. — Lectura del nivel y lectura de la mira.
 „ III. — Lectura del nivel y posición obligada de los hilos sobre la mira.

Más adelante nos ocuparemos del primer método, que es el más empleado en la práctica. Para la precisión con que puede disponerse horizontalmente el eje de colimación del anteojo, tomamos las sensibilidades dadas en la página 81, y en este supuesto, la parte del error de lectura debida al nivel será:

$$\lambda = \pm 0,00044 \sqrt{A s} \quad (1)$$

donde λ se expresa en milímetros, la sensibilidad A del nivel en segundos de arco, y la distancia de mira s en metros. El error total medio de una lectura, resultante de λ y de m (pág. 82), se calculará mediante la fórmula:

$$\mu^2 = m^2 + \lambda^2.$$

Sustituyendo m por su valor numérico dado en la fórmula (5) de la página 82, y λ por el suyo (1), se tiene:

$$\mu^2 = \left(0,0185 \frac{1}{V^2} + 0,000000194 A \right) s^2 + 0,00794 \frac{T}{V} s + 0,00085 T^2. \quad (2)$$

Para un instrumento determinado, en el cual A y V son constantes, queda reducida la fórmula anterior a esta otra, de notación más sencilla:

$$\mu^2 = a + b s + c s^2. \quad (3)$$

La combinación de anteojo y nivel según el aumento de aquél y la sensibilidad de éste, no puede someterse a límites concretos; sin embargo, para las necesidades de la práctica se pueden indicar, como mejores, las siguientes relaciones:

	Sensibilidad del nivel	Aumento del anteojo	Unidad de división de la mira
1. Aparatos pequeños (de viaje, para perfiles transversales, etc.).	A'' 40 — 50"	V 10	T $1/1$ cm (event. también $1/1$ dm)
2. Aparatos pequeños para perfiles, itinerarios, etc.	30"	15 — 20	$1/1$ „
3. Aparatos medianos para nivelaciones corrientes	20"	25	$1/1$ „
4. Aparatos grandes	10 — 15"	30	$1/1$ „ (ó $1/2$ cm)
5. Aparatos para nivelaciones de precisión	5"	40	$1/2$ „ (con rayas y doble hilo)

(con cámara)

Precisión de los métodos de nivelación. A los errores debidos a los aparatos empleados en las operaciones de nivelación, hay que agregar otros errores muy diferentes, según el método seguido en estas operaciones.

Si para colocar la mira no se emplea la plancha ni ningún otro dispositivo que asegure la posición exacta sobre el punto de que se trate (véase página 8), sino que se dispone sobre una piedra cualquiera (no tallada), o directamente sobre el suelo, se pueden cometer errores importantes en los puntos de mira.

Limitándonos a los errores accidentales, se puede tener una idea de la precisión que cabe alcanzar en una nivelación, combinando las fórmulas (1) y (2) de la página 74, que expresan la ley de acumulación de errores, con la (2) de la página 83, tomando como término de comparación el promedio de los errores temibles en la nivelación simple de un trozo $L = 1$ Km de longitud.

Al mismo tiempo comprobaremos la dependencia entre la precisión de la nivelación y la longitud de la distancia de mira. Según la fórmula (2) de la página 74, el error medio de una nivelación de longitud total L y de distancia de mira s es:

$$M = \sqrt{\frac{L}{s}} \mu^2$$

y sustituyendo el valor de μ^2 dado por la fórmula (3) de este mismo párrafo, resulta:

$$M = \sqrt{L \left(\frac{a}{s} + b + c s \right)}. \quad (4)$$

Llamemos s_m al valor de s para el cual se reduce M a un mínimo, es decir, al valor que satisface a la siguiente condición:

$$-\frac{a}{s_m^2} + c = 0$$

de donde:

$$s_m = \sqrt{\frac{a}{c}}$$

y sustituyendo aquí los valores de a y c , tales como se tienen en (2), resulta:

$$s_m = \frac{2,094 T V}{\sqrt{95,4 + 0,001 A V^2}}. \quad (5)$$

Ésta es, por lo tanto, la mejor distancia de mira para un instrumento cuyo anteojo tenga V de aumento y A de sensibilidad de nivel (en segundos), cuando la unidad de división de la mira empleada es igual a T (expresada en milímetros).

Con lo que acabamos de exponer se tiene ya una idea general del efecto que la distancia de mira produce en la precisión de las nivelaciones, y calculando este efecto, así como el error medio para una nivelación de 1 Km de itinerario, con los aparatos indicados en la página 83, se forma la tabla siguiente, que da el error por kilómetro para distancias de mira de 50 m y de 100 m:

Error medio kilométrico para varios aparatos, miras y distancias de mira

Niveles y miras				s_m	M	$s = 50$ m	$s = 100$ m
				m	mm	mm	mm
1.	$A = 45''$	$V = 10$	$T = 10$ mm	21	$\pm 4,0$	$\pm 4,4$	$\pm 5,3$
2.	» 30	» 17,5	» 10	36	3,0	3,1	3,5
3.	» 20	» 25	» 10	52	2,6	2,6	2,7
4a.	» 12,5	» 30	» 10	61	2,35	2,35	2,4
4b.	» 12,5	» 30	» 5	31	1,7	1,7	1,95
5.	» 5	» 40	» 5	41	1,4	1,4	1,6

Se deduce de esta tabla que la precisión varía muy poco al variar la distancia de mira. En terreno llano, en que la influencia de la refracción es muy pequeña en la mayor parte de los casos, se ve que cuando no se desea la precisión máxima sino una media (como representan los casos 3 y 4a de la tabla), no produce efecto alguno el aumentar a 100 m la distancia de mira. Claro está que se supone que el aire está tranquilo, sin lo cual no son aplicables los resultados anteriores.

También se ve en esta tabla que la distancia considerada en la práctica como la más conveniente (50 m) es, efectivamente, el promedio de las distancias s_m señaladas por el cálculo como las mejores distancias de mira.

Para métodos especiales de nivelación, por ejemplo, el de lectura con varios hilos, lectura sobre el centro de un trazo, lectura del nivel, etc., no son aplicables las consideraciones anteriores.

Rapidez de la nivelación. El rendimiento en tiempo y espacio es muy distinto, según las diferentes circunstancias en que se efectúa la nivelación, y resulta muy difícil dar cifras aproximadas ni señalar valores promedios, más que nada porque en estos trabajos intervienen factores ajenos a los geodésicos y topográficos propiamente dichos.

En la revista técnica alemana «Zeitschrift für Vermessungskunde» (año 1886), en una memoria sobre una nivelación urbana aparece como velocidad de esta última la de 47 Km en 41 horas, o sea 1,1 Km por hora aproximadamente.

En nuestra Memoria sobre la nivelación de Baden (Zeitschr. f. Verm., 1882) constan los siguientes resultados referentes al rendimiento de aquel trabajo: por término medio se tardó en nivelar 1 Km 46 minutos, es decir, que la velocidad fué de 1,3 Km por hora; en cada kilómetro se hicieron, como promedio, doce estaciones, resultando así una distancia media de mira de 41 m. Deduciendo el tiempo necesario para cada puesta en estación (1,5 minutos aproximadamente), el rendimiento medio diario era de 8,7 Km. En un trozo de 6 Km de longitud, con 500 m de desnivel, donde hubo que nivelar con distancias de mira de sólo 16 m, se empleó en 1 Km, 1 hora y 24 minutos. En la doble nivelación el error medio fué $M = \pm 2,23$ mm por kilómetro [calculado con la fórmula (5) de la página 75], bien pequeño si se tiene en cuenta la dificultad de la nivelación del tramo antes aludido con 500 m de desnivel.

En la página 75 hemos citado como ejemplo la nivelación de un tramo de vía férrea, con guijarros de gran tamaño, que se efectuó a una velocidad de 1,5 Km por hora.

Claro está que es muy distinto nivelar una carretera llana con hitos kilométricos o nivelar una calle con marcas permanentes, a nivelar un camino o itinerario muy pendiente con muchas y muy próximas estaciones de nivel, etc.

También aparece aquí claramente confirmada la gran ventaja del método de nivelación con burbuja descentrada, descrito en el párrafo 14, con el cual se ahorra casi la mitad del tiempo que requiere la nivelación corriente.

Todos los cálculos de esta nivelación se hicieron del modo expuesto en el párrafo 14.

De la discusión de los errores, y principalmente de la distribución de signos de las diferencias resultantes entre las nivelaciones de ida y de vuelta, dedujo el autor que las mediciones resultan tanto más exactas y concordantes, cuanto más continuado es el trabajo de campo, es decir, cuanto menos interrupciones sufre éste en su desarrollo. La explicación es bien sencilla: tratándose de un trabajo tan uniforme, y casi pudiéramos llamar monótono, como el de nivelación, donde hay unas cuantas operaciones que se repiten cientos y cientos de veces, se llega a la mecanización tanto de los movimientos

manuales y musculares, como de la labor intelectual; la manipulación de los tornillos, las lecturas y registros, las indicaciones a los peones o ayudantes, etc., se hacen de modo casi mecánico, pudiéndose decir que se trabaja con la exactitud y velocidad de una máquina. Todas estas consideraciones pueden también aplicarse a las mediciones de bases.

Los datos anteriores son quizá los únicos publicados con tanto detalle sobre velocidad de las nivelaciones; ordinariamente se omiten en todas las publicaciones y memorias los detalles referentes a distancias de mira, velocidad de la nivelación, etc., mientras que tratándose de mediciones de bases, forman estos detalles parte esencial de las publicaciones correspondientes.

Actualmente ha aumentado mucho la precisión en las nivelaciones de primer orden (alta precisión), cuyo error medio no llega a 1 mm, y sería muy interesante comparar el trabajo y el tiempo empleados en éstas, con los valores correspondientes a las que acabamos de considerar, efectuadas en el año 1881.

§ 19. Compensación de una red de nivelación

Las redes de nivelación se compensan, de ordinario, por medio de observaciones (o valores) condicionadas, aplicando para ello las reglas generales conocidas, de las cuales pueden verse las principales en el tomo I (pág. 27).

La aplicación de estas leyes a una red de nivelación es muy fácil. Tomemos como ejemplo numérico un trozo de la red de nivelación de Baden, representado en la figura 89, con el registro de distancias y desniveles. Las flechas indican la dirección de la pendiente.

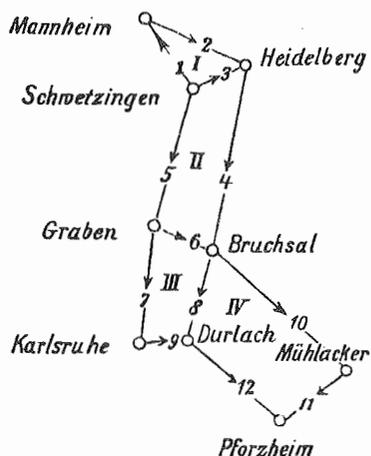


Fig. 89

Escala aproximada 1 : 200 000

Registro de campo

N.º	Tramos		Distancias <i>s</i>	Desniveles <i>h</i>
	desde	hasta		
			Km	m
1	Schwetzingen	Mannheim	14	0,893
2	Mannheim	Heidelberg	20	9,125
3	Schwetzingen	Heidelberg	9	10,012
4	Heidelberg	Bruchsal	32	2,640
5	Schwetzingen	Graben	26	6,193
6	Graben	Bruchsal	12	6,481
7	Graben	Karlsruhe	22	6,999
8	Bruchsal	Durlach	17	1,712
9	Karlsruhe	Durlach	5	1,212
10	Bruchsal	Mühlacker	33	126,214
11	Mühlacker	Pforzheim	13	39,844
12	Durlach	Pforzheim	26	164,388
			229	375,713
			= [s]	= [h]

Para establecer las ecuaciones de condición, tenemos los cuatro itinerarios cerrados que se ven en la figura, y empezando por el I, vemos que en el mismo debe verificarse:

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0. \tag{1}$$

Y sustituyendo estos valores por los numéricos dados en el registro de campo, resulta:

$$+ 0,893 + 9,125 - 10,012 = + 0,006 = w_1. \tag{2}$$

Para que esta diferencia w_1 se anule, hay que aplicar una corrección v a cada valor de h , de modo que se tenga:

$$(h_1 + v_1) + (h_2 + v_2) - (h_3 + v_3) = 0 \tag{3}$$

o sea, con los valores numéricos correspondientes:

$$+ (0,893 + v_1) + (9,125 + v_2) - (10,012 + v_3) = 0. \tag{4}$$

Restando de esta ecuación la (2), se obtiene:

$$I. \quad v_1 + v_2 - v_3 + 0,006 = 0. \tag{5}$$

Ésta es la primera ecuación de condición; procediendo análogamente con los otros tres polígonos de la red, y tomando, para comprobación, el polígono total exterior (perimétrico), prescindiendo de los cierres parciales, se forma la tabla de cierres de poligonales que se ve a continuación.

Tabla de cierres de poligonales

Polígono	Itinerario	Longitud <i>s</i>	Desniveles observados	Diferencias <i>w</i>
I.	1. Schwetzingen-Mannheim . . .	14 Km	+ 0,893 m	
	2. Mannheim-Heidelberg . . .	20	+ 9,125	
	3. Heidelberg-Schwetzingen . . .	9	- 10,012 m	
II.		43	+ 10,018 - 10,012	$w_1 = + 6 \text{ mm}$
	3. Schwetzingen-Heidelberg . . .	9	+ 10,012	
	4. Heidelberg-Bruchsal	32	+ 2,640	$w_2 = - 22 \text{ mm}$
	6. Bruchsal-Graben	12	- 6,481	
	5. Graben-Schwetzingen	26	- 6,193	
III.		79	+ 12,652 - 12,674	$w_3 = - 18 \text{ mm}$
	6. Graben-Bruchsal	12	+ 6,481	
	8. Bruchsal-Durlach	17	+ 1,712	
	9. Durlach-Karlsruhe	5	- 1,212	
IV.		22	- 6,999	$w_4 = - 42 \text{ mm}$
	7. Karlsruhe-Graben	22	- 6,999	
		56	+ 8,193 - 8,211	
	10. Bruchsal-Mühlacker	33	+ 126,214	
	11. Mühlacker-Pforzheim	13	+ 39,844	
Polígono perimétrico	12. Pforzheim-Durlach	26	- 164,388	$w' = - 76 \text{ mm}$
	8. Durlach-Bruchsal	17	- 1,712	
		89	+ 166,058 - 166,100	
	2. Mannheim-Heidelberg	20	+ 9,125	
	4. Heidelberg-Bruchsal	32	+ 2,640	
	10. Bruchsal-Mühlacker	33	+ 126,214	
	11. Mühlacker-Pforzheim	13	+ 39,844	
	12. Pforzheim-Durlach	26	- 164,388	
	9. Durlach-Karlsruhe	5	- 1,212	
	7. Karlsruhe-Graben	22	- 6,999	
	5. Graben-Schwetzingen	26	- 6,193	
	1. Schwetzingen-Mannheim	14	+ 0,893	
	191	+ 178,716 - 178,792		

Con esta tabla a la vista pueden hacerse varias comprobaciones de cálculo, por ejemplo:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w', \quad \text{es decir,} \quad +6 - 22 - 18 - 42 = -76$$

y también, para s:

$$\frac{43 + 79 + 56 + 89 + 191}{2} = \frac{458}{2} = 229.$$

Este valor 229 es la suma [s], ya obtenida en el registro de campo correspondiente a la figura 89.

También con los desniveles de la poligonal perimétrica y con los de los itinerarios 3, 6 y 8, se tiene la comprobación siguiente:

$$178,716 + 178,792 + 10,012 + 6,481 + 1,712 = 375,713.$$

La consideración de la poligonal perimétrica no tiene más objeto que facilitar estas comprobaciones: no puede formarse su ecuación de condición e incorporarla a las otras cuatro para el cálculo de la compensación, porque realmente está contenida en estas otras, y no constituiría ecuación independiente.

Las cuatro ecuaciones de condición son las siguientes:

- I. $+v_1 + v_2 - v_3 + 6 \text{ mm} = 0.$ (6)
- II. $+v_3 + v_4 - v_6 - v_5 - 22 \text{ mm} = 0.$ (7)
- III. $+v_6 + v_8 - v_9 - v_7 - 18 \text{ mm} = 0.$ (8)
- IV. $+v_{10} + v_{11} - v_{12} - v_8 - 42 \text{ mm} = 0.$ (9)

En cuanto a los pesos, sabemos que son inversamente proporcionales a las distancias s [véase página 74, fórmula (3)], y ya se puede formar la tabla de coeficientes y pesos de las ecuaciones de condición:

N.º	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
I.	a	+1	+1	-1	+6
II.	b	.	.	+1	+1	-1	-1	-22
III.	c	+1	-1	+1	-1	.	.	.	-18
IV.	d	-1	.	+1	+1	-1	-42
$\frac{1}{p} = s$	14	20	9	32	26	12	22	17	5	33	13	26	

De aquí pueden deducirse directamente los coeficientes de las ecuaciones finales o normales, a saber:

$$\left[\frac{aa}{p} \right] = 14 + 20 + 9 = 43, \quad \left[\frac{ab}{p} \right] = -9, \quad \text{etc.}$$

Y las ecuaciones normales serán:

$$\left. \begin{aligned} +43 k_1 - 9 k_2 \dots + 6 \text{ mm} &= 0 \\ -9 k_1 + 79 k_2 - 12 k_3 \dots - 22 \text{ mm} &= 0 \\ -12 k_2 + 56 k_3 - 17 k_4 - 18 \text{ mm} &= 0 \\ -17 k_3 + 89 k_4 - 42 \text{ mm} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Como se ve, todos estos coeficientes (43, 9, etc.) no son otra cosa que los valores de s que figuran en la tabla de cierre de las poligonales, o las sumas parciales de los mismos; por ejemplo, 43, que es la suma correspondiente a la poligonal I, etc.

Resolviendo las ecuaciones (11) se tiene:

$$k_1 = -0,063 \quad k_2 = +0,358 \quad k_3 = +0,575 \quad k_4 = +0,581. \quad (12)$$

Se toman ahora las ecuaciones en v, que son de la forma siguiente:

$$v_1 = a_1 \frac{k_1}{p_1} + b_1 \frac{k_2}{p_1} + c_1 \frac{k_3}{p_1} + d_1 \frac{k_4}{p_1},$$

$$v_2 = \dots$$

A estas ecuaciones corresponde la tabla siguiente, que puede decirse es una continuación de la anterior (10):

Núm.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
$\frac{1}{p} = s$	14	20	9	32	26	12	22	17	5	33	13	26
$k_1 = -0,063, k_1 s =$	-0,9	-1,3	+0,6
$k_2 = +0,358, k_2 s =$.	.	+3,3	+11,5	-9,3	-4,3
$k_3 = +0,575, k_3 s =$	+6,9	-12,6	+9,8	-2,9	.	.	.
$k_4 = +0,581, k_4 s =$	-9,9	.	+19,2	+7,6	-15,1
v =	-0,9	-1,3	+3,9	+11,5	-9,3	+2,6	-12,6	-0,1	-2,9	+19,2	+7,6	-15,1

Los valores de v así calculados se agregan al registro de campo (pág. 86), y se forma la siguiente tabla de compensaciones:

Tabla de compensaciones

N.º	Itinerario		Observadas		v	Compensadas h + v	\sqrt{s}	$\frac{v}{\sqrt{s}}$	$\frac{v^2}{s}$
	desde	hasta	s	h					
			Km	m	mm	m			
1	Schwetzingen	Mannheim	14	0,893	-0,9	0,8921	3,74	0,24	0,06
2	Mannheim	Heidelberg	20	9,125	-1,3	9,1237	4,47	0,29	0,08
3	Schwetzingen	Heidelberg	9	10,012	+3,9	10,0159	3,00	1,30	1,69
4	Heidelberg	Bruchsal	32	2,640	+11,5	2,6515	5,66	2,03	4,12
5	Schwetzingen	Graben	26	6,193	-9,3	6,1837	5,10	1,82	3,31
6	Graben	Bruchsal	12	6,481	+2,6	6,4836	3,46	0,75	0,56
7	Graben	Karlsruhe	22	6,999	-12,6	6,9864	4,69	2,69	7,24
8	Bruchsal	Durlach	17	1,712	-0,1	1,7119	4,12	0,02	0,00
9	Karlsruhe	Durlach	5	1,212	-2,9	1,2091	2,24	1,29	1,66
10	Bruchsal	Mühlacker	33	126,214	+19,2	126,2332	5,74	3,35	11,22
11	Mühlacker	Pforzheim	13	39,844	+7,6	39,8516	3,61	2,10	4,41
12	Durlach	Pforzheim	26	164,388	-15,1	164,3729	5,10	2,96	8,76
	Sumas =		229	375,7130	+2,6	375,7156	50,93	18,84	43,11
			Suma $\left[\frac{v^2}{s} \right] = [p v^2] = 43,11.$						(13)

Una vez calculados los valores h + v se comprueba si se cumplen las ecuaciones de condición, es decir, si éstas quedan satisfechas al poner en ellas las alturas ya corregidas. Efectivamente sucede así en nuestro ejemplo, en que tomamos sólo una altitud como conocida (la de Karlsruhe = 116,745 sobre el nivel cero), resultando para las demás los siguientes valores:

Mannheim . . . 104,4670	Karlsruhe . . . 116,7450	Bruchsal . . . 116,2421	} (14)
Schwetzingen . 103,5749	Durlach . . . 117,9541	Mühlacker . . . 242,4754	
Graben . . . 109,7586	Heidelberg . . 113,5907	Pforzheim . . . 282,3270	

Una vez halladas las altitudes, queda sólo por determinar la precisión obtenida; para ello se comprueba el valor (13) resultante de la tabla de compensaciones, formando las sumas — $[wk]$, como se ve a continuación:

$$\begin{array}{llll}
 \text{I. } w = + 6 \text{ mm,} & k = - 0,063 \text{ mm} & - wk = + 0,378 \\
 \text{II. } w = - 22 \text{ » ,} & k = + 0,358 \text{ » ,} & - wk = + 7,876 \\
 \text{III. } w = - 18 \text{ » ,} & k = + 0,575 \text{ » ,} & - wk = + 10,350 \\
 \text{IV. } w = - 42 \text{ » ,} & k = + 0,581 \text{ » ,} & - wk = + 24,402 \\
 & & \hline
 & & + 43,006 = - [wk]. \quad (15)
 \end{array}$$

Este valor, comparado con el dado en (13), a saber $[pv^2] = 43,11$, nos da el error medio m para la unidad de peso, que por ser cuatro las condiciones de condición será:

$$m = \sqrt{\frac{43,11}{4}} = \pm 3,4 \text{ mm para 1 Km.} \quad (16)$$

Compensación de las nivelaciones de montaña. En terrenos relativamente llanos u ondulados se confirma la hipótesis hecha de que los pesos p son inversamente proporcionales a las distancias, pero en grandes desniveles puede aquélla resultar incierta, especialmente cuando en una misma compensación entran itinerarios muy pendientes e itinerarios casi horizontales, y cuando no se hace un buen contraste de las miras.

Llamando μ al error medio de nivelación para una distancia $s = 1$, m al error medio para toda la longitud s , y p al peso, podemos expresar la anterior hipótesis del modo siguiente:

$$\frac{1}{p} = s; \quad \text{y como} \quad m = \mu \sqrt{s}, \quad \frac{1}{p} = \mu^2 s. \quad (17)$$

Pero, como se ve, sólo interviene en esta expresión el error de nivelación propiamente dicho, y tratándose de grandes desniveles hay que tener también en cuenta la inseguridad en la medición sobre la mira empleada, y también un pequeño error variable con la altura, por todo lo cual es mejor aplicar las fórmulas siguientes para una longitud s y una altura o desnivel h :

$$m = \sqrt{(\mu \sqrt{s})^2 + (\lambda h)^2}, \quad \frac{1}{p} = \mu^2 s + \lambda^2 h^2. \quad (18)$$

Queda ahora por saber de qué modo pueden o deben determinarse las constantes μ y λ de esta fórmula. En la nivelación de Baden, efectuada por el autor (del 1873 al 1882) siguiendo muy diferentes métodos y en parte con miras insuficientemente contrastadas, se calcularon los pesos con la fórmula (18), determinándose los errores parciales μ y λ caso por caso, y de modos muy diversos, como, por ejemplo, hallándolos separadamente *a priori* (*).

(*) Acerca del error de cierre en función de las longitudes s y de las alturas h del polígono, publicó Vogler un trabajo en la revista «Zeitsch. f. Verm.», 1877. También Helmert se ocupó de este asunto en las «Astron. Nachrichten» (números 2127, 2128, 1877). En la «Zeitsch. f. Verm.», 1885, publicó el autor una nota sobre la separación de errores en las poligonales de nivelación.

En el estudio sobre «Nivellement de précision de la Suisse, exécuté par la Commission géodésique fédérale, 1891» se tiene el caso de nivelación de montañas muy altas, en que es de la mayor importancia la cuestión referente al peso; en este trabajo no se empleó una fórmula con sólo dos términos, como la (18), sino otra con un tercer término, para el hundimiento o asentamiento (*tassement*) del trípode. Acerca del hundimiento del trípode publicó el autor una Memoria en la «Zeitsch. f. Verm.», 1892; véase también lo dicho en el párrafo 16.

Compensación aproximada. La compensación exacta hecha del modo indicado en el ejemplo anterior, resulta relativamente poco pesada, sobre todo porque aparte las sumas (que en todos los casos hay que efectuarlas), casi todas las operaciones pueden hacerse con la regla de cálculo ordinaria; también hay que tener en cuenta que si por no tener mucha práctica, dicha compensación por el método de los mínimos cuadrados resulta fatigosa y lenta, vale la pena verificarla por este método en gracia al orden y seguridad que proporciona.

Cuando el número de puntos nodales de la red es menor que el de condiciones, se hace la compensación por el método de las observaciones enlazadas, cuyo detalle puede verse en el ejemplo del § 35 (véase también § 34).

Es muy frecuente el caso de tener que reunir o agrupar nivelaciones hechas con la precisión suficiente para la mayor parte de las aplicaciones técnicas de ellas derivadas, pero sin la comprobación que proporciona una compensación matemática. Para saber qué método de compensación aproximada conviene aplicar, hay que distinguir dos casos, según que exista uno solo o varios puntos de cierre o enlace.

Cuando se tienen varios puntos permanentes, se unen los dos más alejados, y si el resultado obtenido es satisfactorio, se reparte sin más el error observado, y así sucesivamente.

Cuando sólo se tiene un punto de enlace (o ninguno), se toma de ordinario un polígono que se compensa aisladamente y en él se apoyan los demás; mejor es escoger una diagonal que corte al mayor número posible de itinerarios, promediar y tomarla como base para el resto de la nivelación. Claro está que es de la mayor importancia tener buen *golpe de vista* para estas compensaciones y no olvidar que en muchas aplicaciones prácticas no importa un margen de uno o más centímetros, siendo impropcedente llevar la compensación a sus límites más avanzados.

§ 20. Nivelación de Alemania

En virtud de los acuerdos de la segunda Conferencia para la medición del grado en Europa (octubre de 1867), comenzaron en Alemania los trabajos de nivelación geométrica en 1868, que terminaron en 1894, con unos 16000 Km de red, de los cuales 15000 Km corresponden a itinerarios propiamente tales y 1000 Km a nivelaciones de enlace.

En el párrafo 12 se han descrito las señales permanentes empleadas en Berlín en 1879, y los métodos de nivelación fueron los descritos en el párrafo 14.

Los errores medios considerados para una doble nivelación de 1 Km de longitud eran de tres clases:

1. En función de las diferencias $I - II = \Delta$ entre las niveladas de ida y vuelta de los tramos a , entre señal y señal (unos 2 Km):

$$m_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{\Delta^2}{a} \right]}. \quad (1)$$

2. En función de las diferencias $I - II = d$ entre las niveladas de ida y vuelta de los itinerarios s :

$$m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]}. \quad (2)$$

3. En función de los errores de cierre de los itinerarios en una compensación con ecuaciones de condición:

$$m_3 = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \quad (3)$$

En el transcurso del tiempo se pudo observar que la fijación de las señales dejaba que desear, así como la precisión que para otros trabajos se requería, y por estas causas se comenzó un nuevo levantamiento altimétrico completo (1912), referido únicamente a los antiguos puntos normales, e independiente, en el resto, de la primera nivelación. Estas referencias se han descrito en el párrafo 12, página 56, y comenzaron en 1914, no pudiendo continuarse hasta 1919 a causa de la guerra. En el párrafo 12 nos hemos ocupado de la fijación de puntos, y en el párrafo 14 de los procedimientos de nivelación empleados a partir de 1898.

La determinación de los errores medios por kilómetro se hizo de dos maneras diferentes. Primero, aplicando las fórmulas (1) a (3) de las páginas 91 y 92, con las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

I. — 1923:

$$m_1 = \sqrt{\frac{69,58}{632}} = \pm 0,33 \text{ mm} \quad m_2 = \sqrt{\frac{1,84}{32}} = \pm 0,24 \text{ mm} \quad m_3 = \pm 0,40 \text{ mm}$$

II. — 1927:

$$m_1 = \sqrt{\frac{477,64}{4013}} = \pm 0,34 \text{ mm} \quad m_2 = \sqrt{\frac{6,65}{68}} = \pm 0,31 \text{ mm} \quad m_3 = \pm 0,53 \text{ mm}$$

En segundo lugar se aplicaron las fórmulas de Lallemand (5*) y (8) (pág. 80), que abrazan tanto los errores sistemáticos como los accidentales:

I. — 1923:

$$\delta = \sqrt{\frac{7,36}{2717,52}} = \pm 0,05 \text{ mm} \quad m = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{294,60}{679,38} - \frac{1053,34}{461557,18} \right) 7,36} = \pm 0,32 \text{ mm}$$

II. — 1927:

$$\delta = \sqrt{\frac{26,61}{16001,08}} = \pm 0,04 \text{ mm} \quad m = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1796,61}{4000,27} - \frac{5983,29}{16002160,07} \right) 26,61} = \pm 0,33 \text{ mm}$$

Estos valores indican que la precisión en el nuevo levantamiento es notablemente mayor que en el antiguo, y que a causa del orden y desarrollo de los métodos de nivelación empleados, los errores sistemáticos quedan descartados casi en absoluto.

En el año 1928 se llevó a cabo un delicado trabajo topográfico en el norte de Alemania para estudiar las depresiones seculares de las costas, partiendo de señales enterradas (figura 71, pág. 54); de estas señales a las costas se llevaron itinerarios de gran precisión de 20 a 30 Km, siempre empleando señales enterradas en sitios seguros y firmes. En los lugares pantanosos se emplearon señales tubulares, del tipo de las representadas en la figura 72 (pág. 54).

De este modo se estableció a lo largo de la costa del Mar del Norte, entre la frontera holandesa y la danesa, un sistema perfecto de señales altimétricas, unidas con los puntos principales permanentes mediante nivelaciones de primer orden, siendo necesario el empleo de tantas y tan buenas señales y de tan buenos enlaces, dado el gran período de tiempo que ha de transcurrir hasta repetir las mediciones para comprobar la supuesta depresión de las costas.

En el año 1891 se creó, en el Ministerio de Obras Públicas de Berlín, un Instituto especial (*) dedicado principalmente a la nivelación de precisión de los ríos prusianos. Las nivelaciones llevadas a cabo por este Instituto representan un complemento de gran valor para la nivelación general del país, ya que todos los itinerarios están cerrados de modo que las alturas de los puntos permanentes están siempre referidas al nivel *cero-normal*.

Acerca de los antiguos equialtímetros empleados por el Instituto en cuestión, hicimos ya algunas consideraciones en el párrafo 7 (pág. 13); la figura 28 (pág. 28) representa un nivel moderno, empleado también por el Instituto; en la figura 47 (pág. 41) vimos la mira de Seibt, fundador de este Instituto, y en las figuras 73 y 74, las señales empleadas en estos trabajos. Por último, en la página 67 hemos descrito el método de nivelación seguido por Seibt. Las distancias de mira oscilaban entre los 10 y los 100 metros, y llegaban, por término medio, a los 80 m; los puntos permanentes se colocaban, de ordinario, de kilómetro en kilómetro.

En 1921 pasó el Instituto al Ministerio de Agricultura, agregándose allí a la División de Estudios hidráulicos.

De los cálculos sobre la precisión de dichos trabajos, interesan aquí únicamente los valores de los errores medios resultantes de las diferencias obtenidas en las nivelaciones de ida y vuelta entre los puntos permanentes. Designando estas diferencias con $2v$ y la longitud de los tramos con s , y llamando n al número de éstos, se tiene para expresión del error medio de una nivelación sencilla de 1 Km de longitud:

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left| \frac{4vv}{s} \right|}$$

Nivelación a través de corrientes de agua. Como ejemplo de nivelación de corrientes o lagos de bastante anchura,

cosa que sucede con alguna frecuencia en las nivelaciones de precisión, vamos a describir las operaciones realizadas en mayo de 1931 por los alumnos de la Escuela Superior Técnica de Berlín, en la parte norte del lago Wann, representado en la figura 90. En la orilla oeste se hizo estación sobre un puente de piedra, que también servía para emplazar las tablillas de mira. Cerca de este puente había dos señales de nivelación, marcadas en la figura con las cifras 29 y 29a; la primera era un punto permanente de la red nacional, y la segunda un clavo empotrado en un edificio próximo.

En la margen este se tomó como estación un punto cerca de un puente, donde había un punto (21a) marcado con un clavo empotrado; poco más arriba, sobre la misma orilla había un punto permanente (19) de la red nacional.

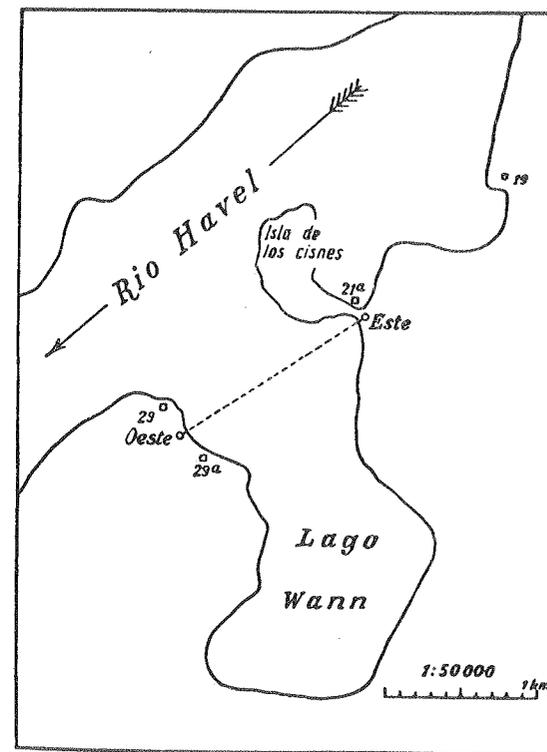


Fig. 90. — Nivelación a través del lago Wann

(*) «Bureau für die Hauptnivellements und Wasserstandbeobachtungen».

La anchura del lago en este punto es de unos 1400 m. Como niveles se emplearon instrumentos de gran precisión, de anteojo reversible y de nivel fijo de 5'' a 8'' de sensibilidad, como el representado en la figura 27 (página 31). Dos de estos aparatos tenían tres hilos horizontales en el retículo (pág. 64), y los otros dos sólo tenían un doble hilo horizontal (pág. 69). Formando juego con los aparatos se emplearon dos pares de miras (tablillas) de cristal esmerilado de unos 4 mm de espesor, con los trazos pintados de negro. La anchura de estos trazos se eligió de tal modo que al colocar un hilo en el centro de un espacio blanco (fig. 91), como al colocar el doble hilo simétricamente respecto a un trazo negro (fig. 92), se lograra la mayor precisión posible en los enrasos; los trazos de la primera tablilla (fig. 91) eran de 7 cm de anchura,

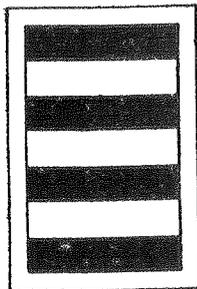


Fig. 91
Tablilla para uso de un solo hilo

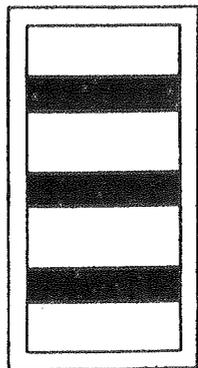


Fig. 92.— Tablilla para uso de dos hilos

iguales que los espacios blancos; en la segunda (fig. 92), los trazos tenían también 7 cm de anchura, pero los espacios blancos eran de 12 cm. En la margen oeste se disponía la mira directamente sobre la señal del puente, mientras que en la orilla opuesta hubo que sujetarla a un jalón clavado en el suelo, y ambas exactamente perpendiculares a la dirección de la visual.

Como referencias permanentes para las tablillas y los niveles se emplearon puntos auxiliares, constituidos por jalones de 1 m de longitud con tornillos embudidos. Como trabajo auxiliar preparatorio se determinó mediante una red trigonométrica la dirección de las visuales, midiendo para ello una base estaquillada en la margen oeste, de unos 100 m de longitud, con la cual se pudieron establecer *a priori* las visuales, con 0,3 m de aproximación.

Las observaciones principales se hicieron a las horas en que el Sol se encontraba aproximadamente en la normal a la dirección de la visual, y se llevaron a cabo simultáneamente en cada margen, con aparatos diferentes, haciendo señales con banderines. Se hicieron en total cuatro series de observaciones, cambiando entre sí los aparatos de una y otra costa al final de las dos primeras series. El cambio de observador se hizo después de la primera y tercera serie.

Cada serie de observaciones comprendía seis estaciones de mira repetidas tres veces (para la mira de la margen opuesta), y entre ellas, tres estaciones también repetidas tres veces, para la mira de la misma margen. En

Registro de observaciones

Estación: Este
Instrumento: V 803

Margen opuesta Mira 3		Margen propia Mira 5 (rayada)	
Nivel		Nivel	
Ob. + Oc.	Promedio	Ob. + Oc.	Promedio
62,0	51,83	52,5	52,60
51,6			
41,9			
40,9	51,07		
51,2			
61,1			
61,7	51,30	54,3	54,35
51,0			
41,2			
42,3	52,10		
51,9			
62,1			
62,4	51,90	53,5	53,45
51,7			
41,6			
40,8	50,97		
51,1			
61,0			
	51,53		53,47

esta última se tomaba como línea de enfilación una raya hecha con lápiz, cuya posición en el trazo se medía con toda exactitud.

Para evitar errores en la lectura, se cambiaba de sitio el encargado de leer el nivel, después de cada serie de observaciones, de modo que en la primera y tercera serie se colocaba al norte del aparato, y en la segunda y cuarta, al sur del mismo.

Para mejor comprensión del método de cálculo seguido, damos aquí un extracto del registro para la primera serie de observaciones, hechas en la margen este, el 8 de mayo, con un nivel V 803, provisto de retículo con doble hilo horizontal.

Al mirar la tablilla de la margen opuesta se enfilaron en cada una de las seis observaciones las tres rayas de aquélla (fig. 92) con el doble hilo del retículo, leyendo cada vez los dos extremos de la burbuja. En la mira de la margen en que se hacía estación se enfilaba por tres veces (con doble visual) la raya trazada a altura exactamente determinada. En este registro figura la suma de las dos lecturas del nivel para cada enfilación.

El nivel tenía una sensibilidad de 5,53''; las distancias de las miras al aparato eran, respectivamente, 1391 m y 15 m.

Con estos datos se hacía el cálculo siguiente:

Mira de la margen opuesta:

$$\text{Desviación del nivel} = \frac{1}{2}(51,53 - 50,00) = + 0,76 p = + 4,19''$$

$$\text{Diferencia de nivel} = + 28,3 \text{ mm.}$$

Mira de la margen propia:

$$\text{Desviación del nivel} = \frac{1}{2}(53,47 - 50,00) = + 1,74 p = + 9,59''$$

$$\text{Diferencia de nivel} = + 0,7 \text{ mm}$$

La altura de la señal enfilada sobre el centro de la mira, en la margen este, era igual a + 0,040 m, y el efecto debido a la curvatura de la Tierra (§ 27) alcanzaba el valor 0,152 m.

La diferencia de nivel entre los centros de las dos miras se establecía del modo siguiente:

Centro mira Este — Señal Este	+ 0,040 m	
Señal Este — Altura aparato Este	+ 0,001	
Altura aparato Este — Centro mira Oeste		- 0,028 m
Curvatura terrestre	+ 0,152	
	+ 0,193 m	- 0,028 m
Centro mira Este — Centro mira Oeste	+ 0,165 m.	

En este resultado está incluida la posible convergencia entre los ejes del anteojo y del nivel, así como el efecto producido por la refracción atmosférica (§ 27). Estos dos errores quedaron eliminados en estas mediciones, por hacerse simultáneamente otra serie de observaciones en la margen oeste, y porque al intercambiar los aparatos se hacían otras dos series de observaciones en ambas márgenes. Las diferencias de altura entre los centros de las tablillas fueron las que siguen:

Este, Aparato V 803	$\Delta h = + 0,165 \text{ m}$	Oeste, Aparato V 805	$\Delta h = - 0,193 \text{ m}$
»	» V 805	»	» V 803
	$\Delta h = + 0,166 \text{ m}$		$\Delta h = - 0,124 \text{ m}$
	Valor medio: $\Delta h = 0,162 \text{ m.}$		

La repetición de las cuatro series de observaciones dió como promedio $\Delta h = 0,161 \text{ m.}$

En total se hicieron del 8 al 10 de mayo de 1931, en cada cota, 32 series de observaciones, registradas en la forma indicada en la página 94, de las cuales se obtuvieron los siguientes desniveles:

8 mayo (mañana).	$\Delta h = 0,165$ m
9 » (mañana).	0,201
9 » (tarde).	0,163
10 » (mañana).	0,203
Promedio:	$\Delta h = 0,183 \text{ m} \pm 11 \text{ mm.}$

En las nivelaciones sobre anchuras considerables de agua, la precisión del resultado depende más que nada de la bondad de los aparatos empleados. Siempre debe tenerse presente que no hay que alterar la posición del eje de colimación ni del nivel durante la misma serie de observaciones. En el ejemplo anterior, en que se emplearon aparatos de tipo antiguo, no se pudo mantener rigurosamente esta invariabilidad, sobre todo al guardar aquéllos en sus cajas, para trasladarlos de una a otra orilla, por la necesidad de introducir el ocular a fondo. En este respecto resulta ventajoso el empleo de los anteojos con lente interna de enfoque.

Tratándose de aparatos con nivel reversible, no resulta perjudicial una variación en la desviación de éste, pudiéndose además girar el nivel alrededor del anteojo (figura 28, página 31).

§ 21. Nivelación de España

En el año 1871 comenzaron los trabajos de nivelación de precisión en España, empleándose los instrumentos de tipo Kern (de Aarau), y miras de pinabete, de una pieza, reforzadas con una costilla de igual madera, y provistas de nivel esférico, de plomada, manillas y de plancha triangular de hierro.

Las líneas de nivelación siguen, en general, las vías de comunicación por este orden: carreteras generales, carreteras provinciales, ferrocarriles, caminos vecinales, carreteros y de herradura.

Como superficie de nivel de comparación (puntos de cota o altitud cero) se toma la del mar en Alicante, prolongada teóricamente bajo las tierras, llamándose así a las altitudes positivas «sobre el nivel del mar»; además de esta superficie de comparación, sometida continuamente a estudio y observación con mareógrafos, se han fijado otros puntos de referencia, establecidos con toda solidez y garantía, que sirven para dar cota a otras nivelaciones sin tener que acudir cada vez a nuevas determinaciones del nivel del mar, y que a su vez sirven de enlace con las redes de nivelación de los países vecinos, sin tener en cuenta la variación relativa del nivel medio de los diferentes mares.

Como punto principal de referencia se estableció uno en el Observatorio Astronómico de Madrid, y para evitar todo error posible debido a variaciones que pudieran tener lugar en el montículo en que se halla dicho Observatorio, se establecieron otros cuatro puntos más (Puerta de Alcalá, Museo del Prado, Plaza de Oriente y Ayuntamiento), formando con el del Observatorio el polígono de Madrid, que asegura la apreciación de cualquier alteración de uno de ellos.

A partir de dicha superficie de comparación, ha hecho el Instituto Geográfico y Catastral redes de nivelación de alta precisión que siguen las vías principales antes citadas: de estas líneas de gran precisión, parten otras de mediana precisión, y otras líneas de altura; todas son de doble nivelación, y cuando excepcionalmente hay alguna sencilla, va de un punto de cota conocida a otro también conocido, de modo que se tiene asegurada la comprobación. De las últimas líneas parten los perfiles (nivelados por pendientes) y con este

relleno se completa la altimetría de los términos municipales y con ellos la de toda la Nación.

En un principio se adoptaron los siguientes límites de precisión: 1 mm como error máximo de observación a 100 m de distancia; 0,1 mm el referente a las correcciones y reducciones que afecten a la observación; $5\sqrt{k}$ mm el error de cierre en un polígono o en una doble nivelación de una longitud de k Km; 0,50 m el error máximo en la apreciación de distancia a 100 m; 10'' de inclinación del nivel en cada estación; 1 mm, diferencia de lecturas a 40 m de la mira sobre el hilo central, en las dos posiciones del anteojo a 180°, y, por último, una división de desvío de la burbuja en las dos posiciones normal e inversa (*).

Pero en la XVII Conferencia Internacional Geodésica (Hamburgo, septiembre de 1912) se acordó que la precisión en las nivelaciones de alta precisión debe satisfacer a las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{error probable accidental} & \dots \leq 1 \text{ mm por kilómetro} \\ \text{error probable sistemático} & \dots \leq 0,2 \text{ mm por kilómetro} \end{aligned}$$

y en virtud de este acuerdo viene el Instituto Geográfico y Catastral realizando nivelaciones con instrumentos muy perfeccionados, que van uniéndose a los mareógrafos instalados en distintos puntos de nuestras costas y que van sirviendo a la vez para comprobar o rectificar las cotas obtenidas en las primeras nivelaciones.

Las referencias principales empleadas en España consisten en una pieza cilíndrica de bronce fundido, de 0,1 m de longitud por 0,03 m de diámetro; por un extremo termina en una placa circular de 0,08 m de diámetro y 0,006 m de espesor, que lleva grabadas las iniciales N. P. (nivelación de precisión) y el número de orden (fig. 78). Esta pieza va empotrada verticalmente en la roca o sillar de alguna edificación (de permanencia suficientemente garantizada), de modo que la cara superior del disco quede rasando el suelo. Como señales auxiliares, cuando hay temor de que puedan desaparecer estas principales, se disponen en sus cercanías unos clavos de bronce (de 0,10 m de espiga, 0,01 m de diámetro y cabeza de 0,015 m de diámetro por 0,01 m de espesor) encajadas en taladros, de modo que enrase su cabeza con la piedra.

Las señales secundarias (cuya permanencia interesa solamente mientras dura la doble nivelación) se pintan en roca o sitio estable, formando un cuadro de unos 0,08 m de lado, con una circunferencia interior de 0,05 m de diámetro, y al lado el número de orden correspondiente. Las miras empleadas (de 3,05 m de longitud, por 0,10 m de anchura y 0,02 m de grosor) provistas como se dijo al principio de una costilla de refuerzo y nivel esférico (o de plomada), llevan cerca de uno de sus extremos una plaquita metálica bien incrustada en la madera, con unos puntos grabados con punzón muy fino, que sirven para estudiar las variaciones en la longitud total de las miras. Estas plaquitas van protegidas con unas cubiertas también metálicas, que se sellan para que permanezcan intactas durante las operaciones de campo.

Para la manera de estar dividida la mira y demás detalles, véase la página 44.

Antes de empezar las operaciones de nivelación se hace un estudio detenido del instrumento, para determinar sus constantes en una temporada de campo, que son: el valor angular correspondiente a una división del nivel; la separación angular entre cada dos hilos del retículo y la longitud absoluta de la mira (**).

(*) «Geodesia y Cartografía». — A. Mifsut.

(**) Para estos detalles véase la obra del ingeniero geógrafo y general de E. M. Arturo Mifsut «Geodesia y Cartografía», y las «Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral».

Los errores instrumentales se determinan sistemáticamente antes y después de cada serie de observaciones, y los promedios de los valores resultantes se toman y aplican como constantes en cada serie.

Se calculan los errores residuales con toda escrupulosidad (colimación, paralelismo entre el eje geométrico del anteojo y la línea de nivel, error de nivel).

Finalmente se hace la reducción al nivel verdadero, es decir, se hallan la corrección de esfericidad y la corrección por refracción, de las que se trata con todo detalle en los §§ 23, 27, 36, 37, 38 y 39.

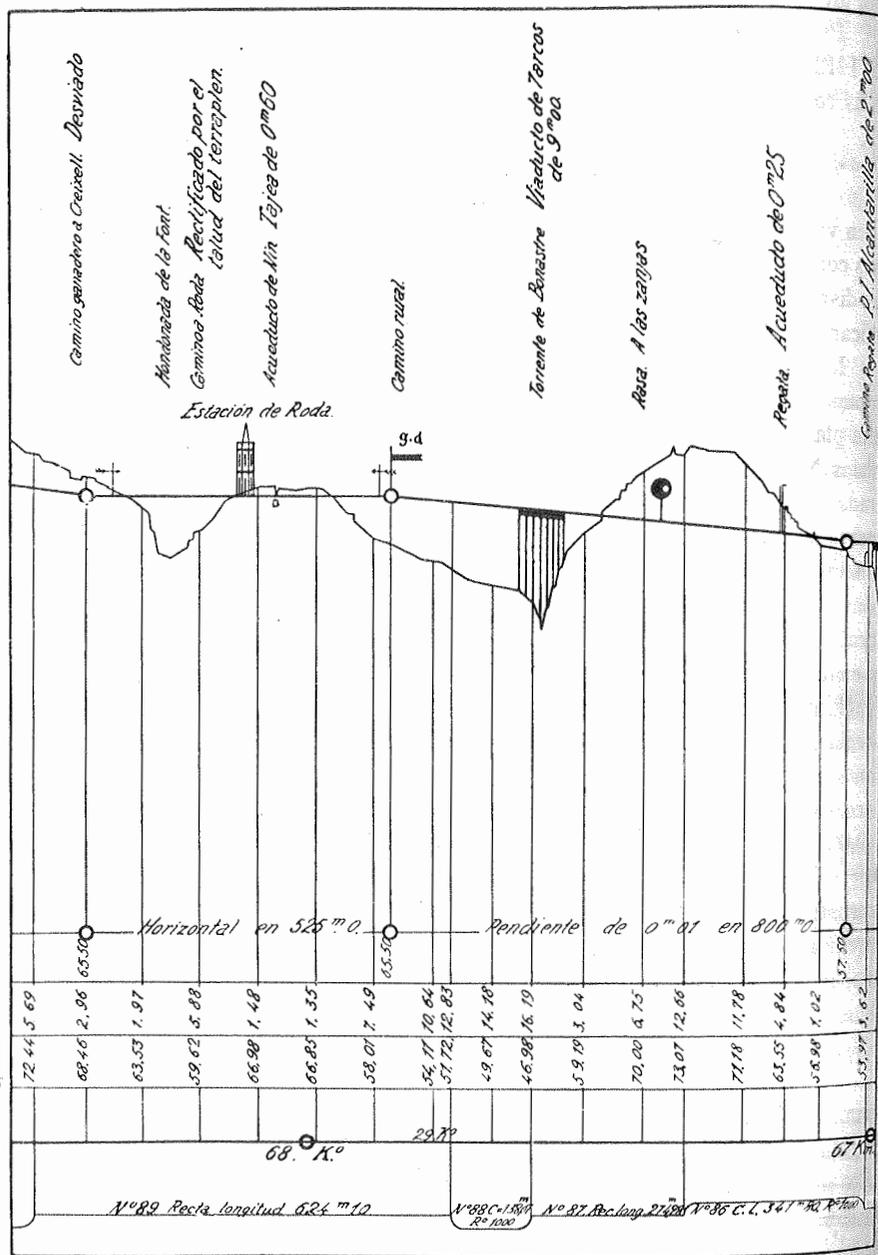


Fig. 93. — Perfil longitudinal en las cercanías de la estación de Roda

Para formularios, límites y demás detalles relacionados con la nivelación de precisión en España, pueden verse las Instrucciones Topográficas del Instituto Geográfico y Catastral.

§ 22. Nivelación de las vías férreas y de los planos de población

Las vías férreas, que forman parte del plan general de nivelación, se consideran como itinerarios de precisión, y en nada difiere su levantamiento altimétrico del descrito para esta clase de itinerarios. La formación de perfiles y obtención de detalles específicos a las necesidades ferroviarias corresponde a las Instrucciones seguidas en cada país por los ministerios de Obras Públicas.

La figura 93 muestra un ejemplo de perfil longitudinal de un ferrocarril (línea de Picamoixons a Roda). Según el «Formulario español para la redacción de los proyectos de caminos de hierro» (2 de diciembre de 1858), el perfil longitudinal se dibujará con abscisas a escala de 1:10000 (perfil longitudinal de cada sección del trazado), o a escala de 1:5000 (perfil de cada trozo de las distintas secciones); las ordenadas serán a escala 10 veces mayor (1:1000, ó 1:500 respectivamente). Las rasantes del trazado se dibujan con carmín. En una línea horizontal se especificarán las rasantes (horizontal, rampa, pendiente), con su número de orden, inclinación por metro y longitud. Se marcarán y anotarán las ordenadas rojas (ordenadas del trazado), y las ordenadas negras (ordenadas del terreno), con respecto a un plano de comparación referido al nivel del mar, y las cotas rojas (alturas de desmonte o de terraplén); se anotarán asimismo los kilómetros, el número y longitud de las alineaciones (especificando el radio de las curvas). Los desmontes se rayan de carmín, y los terraplenes de amarillo (al revés de lo corriente en Francia y Alemania). En la parte superior del perfil se detallan los caminos y cauces cruzados, las estaciones, obras de fábrica (atarjeas, alcantarillas, pontones y puentes), pasos a nivel, etc.

Puede verse en HÜTTE, Manual del ingeniero (tomo III, carreteras), la disposición reglamentaria del perfil longitudinal para los proyectos de carreteras españoles, con los colores empleados.

Los planos de población se nivelan, en España, siguiendo todos los polígonos del levantamiento planimétrico, y si es preciso se determinan más perfiles, de modo que se obtengan con toda precisión curvas de nivel de metro en metro, según el método general de nivelación de precisión. Como señales se utilizan las mismas del levantamiento planimétrico. Cuando la finalidad del plano requiere mayor densidad de curvas de nivel (obras de alcantarillado, etc.) se aumenta el número de perfiles para obtener la debida precisión en el relleno altimétrico.

§ 23. Efecto de la forma elipsoidal de la Tierra, sobre los resultados de las nivelaciones

Tanto si se trata de nivelaciones geométricas como de la barométrica, que estudiaremos más adelante (cap. IV), hay que considerar dos fuerzas al estudiar la gravedad, que como es sabido es la fuerza que determina la dirección de la plomada o el calado de la

burbuja del nivel y que resulta de la combinación de otras dos, que son la gravitación o atracción de la masa terrestre y la fuerza centrífuga.

La gravitación (que es la misma fuerza que determina el movimiento de los astros en el espacio) o atracción entre dos puntos-masa, sabemos que es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Ahora bien, por tener la Tierra forma casi esférica, y en muchos casos así se puede suponer, empezaremos por estudiar la atracción de una esfera sobre un punto dado por encima o por debajo de la superficie de aquélla.

Mediante un sencillo cálculo se demuestra que la atracción total de una superficie esférica homogénea sobre un punto de su interior es igual a cero, y que la atracción sobre un punto exterior o de la misma superficie, es igual a la que ejercería un punto-masa situado en el centro de la esfera y que tuviera concentrada en sí toda la masa de la superficie considerada. Y puesto que una esfera homogénea, o varias esferas concéntricas, pueden considerarse como la suma de superficies esféricas homogéneas, resulta de lo dicho anteriormente que la atracción total de una tal esfera sobre un punto exterior a la misma o sobre un punto de su superficie, es igual a la que sobre el mismo ejercería un punto-masa situado en el centro de la esfera y con una masa igual a la masa total de aquélla.

De aquí se deduce que las atracciones, o aceleraciones correspondientes, para dos puntos situados por encima o en la misma superficie de la esfera, serán inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias al centro. Llamando g a la acción de la gravedad en un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre, g^0 a la misma acción sobre el punto situado en la superficie del mar, por debajo del primero, y r al radio de la Tierra, se tiene:

$$\frac{g}{g^0} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} = 1 - \frac{2h}{r} + \dots \quad (1)$$

Esta reducción para la altura h , al aire libre *sobre* la superficie terrestre, se aplica del mismo modo a puntos situados por *debajo* de ésta, con sólo tomar h como negativa.

Claro está que todo lo anterior se refiere a la hipótesis de la Tierra esférica; pero como el achatamiento del elipsoide terrestre es tan pequeño, puede aplicarse, como primera aproximación, la sencilla ley (1) a la hipótesis, mejor dicho, a la realidad de la forma elipsoidal de la Tierra.

Pero además hay que considerar la variación de la gravedad sobre la superficie del mar, al variar la latitud. La atracción de la masa terrestre puede considerarse, como primera aproximación, igual para todos los puntos de la superficie; pero como la fuerza centrífuga va disminuyendo del Ecuador hacia los Polos, se deduce que la gravedad, resultante de ambas fuerzas, aumenta con la latitud. Las mediciones gravimétricas efectuadas en distintas partes de la superficie de la Tierra demuestran que la gravedad, para una cierta latitud φ puede expresarse del modo siguiente:

$$g^0 = g^0_0 (1 + \alpha \sin^2 \varphi) \quad (2)$$

donde, según los cálculos de Helmert,

$$g^0_0 = 9,78030 \text{ m} \quad \text{y} \quad \alpha = 0,005302,$$

es decir, que el valor en función de $\sin \varphi$ resulta ser:

$$g^0 = 9,78030 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi). \quad (3)$$

Para muchas aplicaciones conviene tomar la latitud media $\varphi = 45^\circ$; y como sabemos que $\sin^2 45^\circ = 0,5$, se tiene, sustituyendo en la fórmula anterior:

$$g^0_{45} = 9,78030 (1 + 0,002651) = 9,80632 \text{ m.}$$

Sustituyendo en (2) $\sin^2 \varphi$ por $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$, resulta:

$$g^0 = 9,80632 (1 - 0,002644 \cos 2\varphi) \quad (4)$$

o bien:

$$g^0 = g^0_{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \quad (5)$$

donde g^0 es la aceleración de la gravedad en un punto de la superficie del mar de latitud φ . Si este punto tiene al mismo tiempo una altura h , se aplica la fórmula (1), y en este caso la aceleración de la gravedad g en el punto de cota h sobre la superficie del mar, en una latitud φ , será:

$$g = g^0_{45} \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2h}{r}\right) \quad (6)$$

donde

$$g^0_{45} = 9,80632 \text{ m} \quad \text{y} \quad \beta = 0,002644.$$

Cotas ortométrica y dinámica. Cuando la superficie terrestre se considera como plana o como esférica, la definición de altitud o cota es a la par sencilla y precisa (véanse páginas 3 y 4), pero no sucede igual al considerar la Tierra como un elipsoide.

Supongamos tres puntos del elipsoide terrestre, situados en el mismo meridiano (figura 94), uno en el ecuador, de latitud 0° , otro en el paralelo medio, de latitud 45° , y otro en el polo, de latitud 90° , y que en cada uno se levanta verticalmente una mira o una torre de 100,00 m de altura sobre el nivel medio del mar, de modo que los extremos de las tres torres o miras se encuentran a la misma altura, en el sentido o significado ordinario de esta palabra.

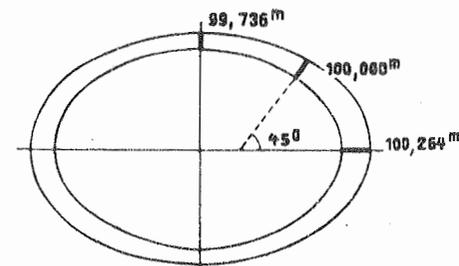


Fig. 94

Pero supongamos ahora que las aguas sufrieran una especie de crecida diluvial hasta que llegaran exactamente al extremo de la torre o mira situada en los 45° de latitud; se ocurre preguntar, prescindiendo del aumento de masa debido a esta crecida hipotética de las aguas, si los extremos de las otras dos torres o miras quedarían también rasantes con la superficie del agua. Para contestar a esta pregunta debe tenerse en cuenta la variación de la gravedad según las fórmulas (4) y (5), y no sólo la noción ordinaria de altura, sino una segunda definición, más racional, de la misma. En efecto, las alturas medidas con miras de nivelación se llaman alturas ortométricas, y las tres torres del ejemplo, medidas ortométricamente, tienen 100,00 m de altura. Todas las alturas niveladas del modo ordinario, en banquetes cortos, son ortométricas.

Pero hay otra clase de altitudes o cotas, que son las *dinámicas*, que no se miden con miras ni escalas, sino mediante el trabajo necesario para elevar hasta aquéllas una cierta masa, diciéndose que dos cotas dinámicas son iguales cuando hay que emplear idéntico trabajo en elevar una misma masa a las dos alturas.

Si en dos lugares de la Tierra se tienen dos alturas dinámicas h_1 y h_2 , y el valor de la aceleración de la gravedad en aquéllos es igual respectivamente a g_1 y g_2 , se debe verificar la siguiente condición:

$$g_1 h_1 = g_2 h_2, \quad \text{o sea} \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{g_2}{g_1} \quad (7)$$

Tomemos la ecuación (5), a saber:

$$g^0 = g^{0_{45}} (1 - \beta \cos 2\varphi),$$

con el valor $\beta = 0,00264$, y veremos que alturas dinámicas iguales, en el ecuador, a los 45° de latitud, y en el polo, serán entre sí como los valores numéricos siguientes:

$$(1 + 0,00264) : 1 : (1 - 0,00264),$$

o también como

$$100,264 : 100,000 : 99,736.$$

Éstas son las alturas que indican, en la figura 94, la elevación del agua, es decir, que marcan la superficie libre de la misma, la cual, como es sabido, es siempre normal a la resultante de todas las fuerzas que obran sobre ella, y que en nuestro caso es la gravedad, efectuándose el movimiento en la superficie libre sin gasto alguno de trabajo.

Una superficie que en todos sus puntos sea normal a la gravedad, se llama *superficie de nivel*; todas las distancias entre dos superficies de nivel próximas (contadas sobre las normales a ambas) son desniveles dinámicos iguales, y, en cambio, las alturas o desniveles ortométricos serán en general desiguales; más claro, las superficies de nivel son equidistantes dinámicamente, pero no ortométricamente.

Ya con esto podemos contestar la pregunta formulada al principio y que tiene aplicación práctica en las nivelaciones sobre la superficie elipsoidal de la Tierra.

Supongamos que en la misma figura 94 se tenga un itinerario de nivelación desde el Ecuador al Polo, siguiendo la superficie del agua de cota cero; la diferencia de nivel obtenida en este itinerario será cero. Pero al llegar al polo, supongamos que se sube de pronto a una altura de 99,736 m, nivelada con mira, y que se sigue un itinerario de vuelta sobre la superficie superior, desde el Polo al Ecuador, donde se desciende hasta el punto de partida; aquí habrá que bajar en dirección vertical 100,264 m, y se tendrá, prescindiendo de los errores de nivelación, uno de cierre igual a $99,736 - 100,264 = -0,528$ m.

Esto quiere decir que si nivelando del modo ordinario se va del Ecuador al Polo y se vuelve en 100 m de desnivel, libre de errores, se tiene un error de cierre de 0,5 m.

Análogas consideraciones pueden hacerse sobre la figura 95, donde se suponen hechas nivelaciones entre las latitudes φ_1 y φ_2 , con alturas H_1 y H_2 . Una nivelación exenta de errores dará un error de cierre $H_1 - H_2$, donde H_1 y H_2 son alturas ortométricas (medidas con miras), las cuales están relacionadas entre sí, como ya se ha dicho, por la ecuación:

$$g_1 H_1 = g_2 H_2, \quad \text{o también} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{g_2}{g_1} \quad (8)$$

Según la fórmula (6), se tiene para la altura media $\frac{H}{2}$:

$$g_1 = g^{0_{45}} \left(1 - \beta \cos \left(\varphi_1 - \frac{H}{r} \right) \right), \quad g_2 = g^{0_{45}} \left(1 - \beta \cos \left(\varphi_2 - \frac{H}{r} \right) \right)$$

de donde:

$$\frac{g_2}{g_1} = 1 - \beta (\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1) = 1 + 2\beta \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Pero como con mucha aproximación puede escribirse

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{r} \quad (m = \text{arco de meridiano})$$

y como, además,

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin 2\varphi \quad (\varphi = \text{latitud media}),$$

se tiene:

$$\frac{H_1}{H_2} = 1 + 2\beta \sin 2\varphi \frac{m}{r}, \quad \text{y también} \quad H_1 - H_2 = 2H\beta \sin 2\varphi \frac{m}{r} \quad (9)$$

En esta fórmula, el producto Hm de la altura o cota H por el arco de meridiano m , es la superficie rayada en la figura 95, que llamaremos F , y sustituyendo este valor en (9) resulta para error de cierre:

$$H_1 - H_2 = \frac{2\beta}{r} F \sin 2\varphi \quad (10)$$

Para $\beta = 0,00264$ y $r = 6370000$ m se obtiene:

$$(H_1 - H_2) \text{ mm} = 0,832 (F \text{ Km}^2) \sin 2\varphi \quad (11)$$

Esta expresión nos dice que si un itinerario de nivelación cerrado, proyectado sobre el plano meridiano, abarca una superficie de 100 Km de longitud por 100 m = 0,1 Km de altura ($F = 100 \times 0,1 = 10 \text{ Km}^2$), y si $\varphi = 45^\circ$ ($\sin 2\varphi = 1$), la fórmula (11) dará para el error de cierre el siguiente valor:

$$H_1 - H_2 = 8,32 \text{ mm} \quad (12)$$

o sea, para 500 m de altura:

$$\text{error de cierre} = 42 \text{ mm.} \quad (13)$$

Con este cálculo aproximado basta para ver que dada la actual precisión en las mediciones, resulta apreciable el error de cierre por esfericidad, por lo cual hoy día debe hacerse la correspondiente reducción en los cálculos.

La teoría completa de nivelación sobre el elipsoide requiere no limitarse al simple desarrollo de las fórmulas (9) a (11) tomando una altura media y una latitud media, sino llevar a cabo una integración según φ y H , reduciendo todas las alturas a medidas ortométricas o a medidas dinámicas.

Además del achatamiento de la Tierra en general, que ya se tiene actualmente en cuenta, deben tenerse presentes las irregularidades locales de la corteza terrestre, montañas y depresiones, que evidentemente influyen en los resultados de las nivelaciones y en los errores de cierre de los itinerarios cerrados de nivelación. Las alturas niveladas experimentan esta influencia, de mayor grado que los errores de cierre; por ejemplo, en una nivelación en los Alpes encontró Helmert un error de cierre que no llegaba a 0,1 m, mientras que las cotas de los puertos franqueados resultaban con un error por defecto de 0,3 m.

Para un desarrollo más completo de esta teoría pueden consultarse los tratados siguientes: «Lever des plans et nivellement», por Pelletan y Lallemand (París, 1889); «Lehrbuch der praktischen Geometrie, Höhenmessungen, 1894», de Vogler. «Das Nivelieren», de Lorber, Viena, 1894. «Höhere Geodäsie», Helmert, etc.

CAPÍTULO II

Nivelación trigonométrica o por pendientes

§ 24. Medidas de ángulos cenitales

El fundamento de la nivelación trigonométrica consiste en la medición, desde una estación *S* (fig. 96), del ángulo de pendiente α o de la distancia cenital z de un punto de mira *P*, cuya distancia horizontal a a la primera es conocida, resultando dada la diferencia de altura h entre los dos puntos por la fórmula siguiente:

$$h = a \operatorname{tg} \alpha = a \cot z. \quad (1)$$

El ángulo de pendiente α puede ser positivo o negativo según que el punto esté más alto o más bajo que el *S*, y por ello debe siempre ir afectado del signo que le corresponda. Si se miden las distancias cenitales huelga poner el signo al ángulo observado, pues para niveles por bajo el horizonte, éste pasa de los 90° . La ecuación (1) es aplicable en todos los casos.

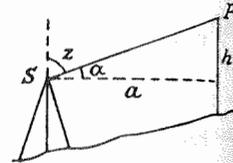


Fig. 96

La medida de los ángulos verticales y de las distancias cenitales se lleva a cabo en el teodolito, provisto de círculo cenital. Los teodolitos representados en las figuras 318, 320 y 322 a 330 del tomo I, sirven también para la observación de distancias cenitales, y sólo agregaremos aquí lo concerniente a la medición de ángulos verticales.

El círculo vertical va fijo ordinariamente al eje de giro del anteojo, es decir, toma parte en el movimiento de balanceo de aquél; de vez en cuando, y para atenuar el efecto de los errores de división del círculo, se gira éste un poco alrededor del eje, lo cual no es necesario tratándose de los levantamientos topográficos ordinarios.

La disposición de los nonios no siempre es la misma: en la figura 97, que representa un círculo vertical con nivel fijado al soporte

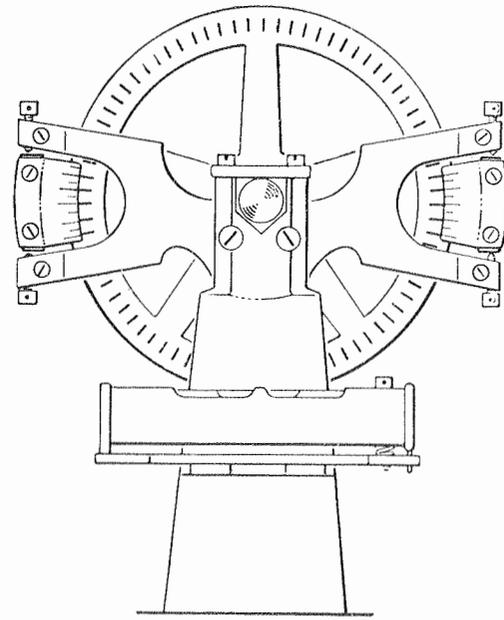


Fig. 97

Círculo alimétrico con nivel fijo al soporte del anteojo

del anteojo, los dos nonios van sujetos a este soporte y pueden correrse un poco en sentido vertical.

Para observaciones de ángulos verticales debe ir dispuesto un nivel paralelamente al anteojo, como se ve en la figura. Cuando el eje principal del teodolito está colocado bien vertical, condición necesaria en la medición de ángulos verticales y en las nivelaciones, se cala el nivel para cada visual horizontal, lo cual se consigue, en la disposición de la figura 97, con el tornillo nivelante que esté mejor situado para ello.

La mejor disposición de los nonios y del nivel es la representada en la figura 98; los primeros pueden girar un poco alrededor del eje de rotación del anteojo, y el nivel va montado en la misma pieza de los nonios (nivel de alidada), pudiéndose calar mediante el tornillo que se ve en la parte inferior. De este modo la medición de los ángulos verticales se hace independiente de la posición vertical del eje principal del teodolito. Esta disposición de nonios y nivel es la que se tiene en los aparatos representados en las figuras 318, 322, 328 y 329 del tomo I.

Si el círculo vertical no lleva un nivel dispuesto en la dirección del anteojo, sólo podrá utilizarse en las nivelaciones de carácter secundario o de poca importancia.

Otra disposición consiste simplemente en proveer al anteojo de un nivel colocado sobre el mismo y cuyo eje sea paralelo al eje de colimación de aquél, como en los niveles de anteojo (equialtímetros). Para mejor cumplir esta condición conviene que el nivel sea reversible, en vez de simple.

Para estas tres colocaciones del nivel damos a continuación las instrucciones necesarias para la observación de ángulos verticales:

I. Nivel en el soporte del anteojo (fig. 97).

1. Se lleva el punto de mira aproximadamente al centro del campo.
2. Si el nivel no está bien calado, se cala cuidadosamente con el tornillo de la plataforma nivelante que esté para ello mejor situado.
3. Se lleva la cruz filar, o por lo menos el hilo horizontal del retículo, sobre el punto de mira, y se comprueba nuevamente el calado del nivel.
4. Se hace la lectura en el círculo vertical, para lo cual se hace girar éste alrededor del eje principal del teodolito hasta que se vean con toda claridad y cómodamente sus divisiones.

II. Nivel de alidada (fig. 98).

1. Se coloca el hilo horizontal sobre el punto de mira.
 2. Se cala el nivel mediante su tornillo de llamada.
 3. Se hace la lectura como en I.
- III. Nivel sobre el anteojo.
1. Se cala el nivel del anteojo, por medio del movimiento de llamada de este último, y se lee sobre el círculo.

2. Se lleva el hilo horizontal sobre el punto de mira y se lee nuevamente el círculo. La diferencia entre ambas lecturas da el ángulo vertical.

Ordinariamente es preciso hacer la lectura en las dos posiciones del anteojo (la

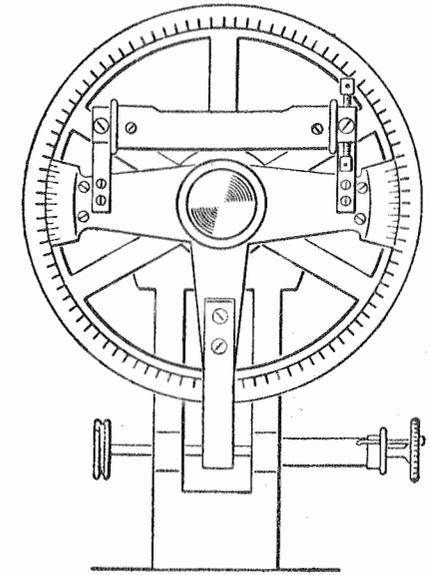


Fig. 98

Círculo alimétrico con nivel de alidada

segunda después de girar el teodolito 180° alrededor de su eje vertical y el anteojo 180° sobre su eje de giro), como demostraremos en el párrafo siguiente. Y para no confiar demasiado en la horizontalidad de los hilos del retículo, debe colocarse el punto de mira en las posiciones I y II (fig. 99) simétricamente respecto al centro de la cruz filar.

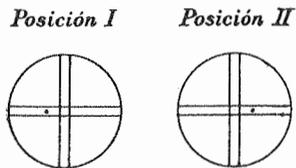


Fig. 99. Medición de alturas angulares

§ 25. Cálculo de los ángulos de pendiente

Una vez medido un ángulo vertical en las dos posiciones del anteojo, se hace el cálculo definitivo de su valor, cálculo que depende principalmente del modo como esté dividido el limbo.

I. *Graduación por cuadrantes.* Es la disposición más sencilla, que permite leer directamente los ángulos de elevación o de depresión, como se ve en la figura 100. En este limbo cada nonio da una lectura del ángulo de pendiente para cada posición del anteojo. Esta graduación ofrece a primera vista muchas ventajas, pero también tiene sus inconvenientes: uno de ellos, el de tener que emplear un nonio doble o graduado en los dos sentidos; además hay que anotar siempre el signo del ángulo.



Fig. 100.—Ángulos de elevación y de depresión

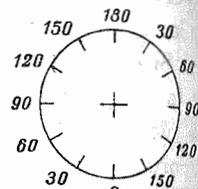


Fig. 101. Distancias cenitales

II. *Por medias circunferencias.* Más ventajosa resulta la graduación por medias circunferencias (fig. 101), donde a la horizontal corresponde la lectura de 90°, por lo cual no hay necesidad de tener en cuenta el signo del ángulo observado. Todas las lecturas, tanto si se trata de ángulos de elevación como de depresión, se hacen en el mismo sentido. Cuando en la posición primera del anteojo se tiene una distancia cenital, en la posición segunda se tendrá su suplemento, es decir, la distancia al nadir.

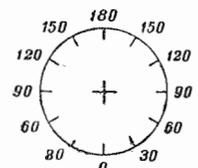


Fig. 102.—Distancias cenitales y nadirales



Fig. 103. Graduación corrida

En la figura 102 se ve una modificación, poco importante del caso anterior, en la cual, en cada posición del anteojo, se tiene en un nonio una distancia cenital, y en el otro su suplemento.

III. *Graduación corrida.* Cuando tanto el limbo vertical como el horizontal del teodolito están graduados de 0° a 360°, la disposición del anteojo respecto al primero puede ser diferente de unos aparatos a otros, es decir, que al subir el anteojo, la lectura puede aumentar o disminuir. En el primer caso se tiene en el primer nonio un ángulo de pendiente; en el segundo caso, una distancia cenital.

Esta disposición es la más aceptable, por no ser necesario diferenciar los ángulos de elevación o de depresión y porque la lectura de los dos nonios proporciona una excelente comprobación, como sucede con el círculo acimutal.

Corrección de índice o de cero. Al hacer una enfilación inclinada, una vez calado el nivel, sólo se obtiene directamente el verdadero ángulo de pendiente, o la distancia cenital, cuando a la visual horizontal corresponde exactamente la lectura 0° ó 90°. Cuando no sucede así, sino que a la visual horizontal corresponde una lectura i , es indu-

dable que el ángulo de pendiente (o la distancia cenital) queda afectado por este valor i . Vamos a estudiar la corrección correspondiente a los distintos casos de graduación antes considerados.

I. *Graduación por cuadrantes.* Tratándose de esta clase de limbo (fig. 100), supongamos que el anteojo se halla en tal posición F_0 (fig. 104) que la lectura del limbo sea cero. El eje de colimación del anteojo puede formar en esta posición un ángulo i sobre la horizontal. Si después se dirige el anteojo a un punto de mira P , cuyo ángulo de pendiente es α , se obtiene la lectura I , que en realidad será:

$$I = \alpha - i. \quad (1)$$

Después de haber vuelto el anteojo a su posición F_0 , supongamos que se gira todo el instrumento 180° alrededor de su eje principal (vertical), y el anteojo 180° alrededor de su eje horizontal, de modo que en su nueva posición F_0' corresponda también a la lectura cero. El eje de colimación forma también el mismo ángulo i con la horizontal (fig. 105), pero de sentido contrario al primero. La enfilación del punto P dará una lectura II , verificándose que:

$$II = \alpha + i. \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) se deduce:

$$\alpha = \frac{I + II}{2} \quad i = \frac{II - I}{2}. \quad (3)$$

La primera de estas igualdades nos indica que la media aritmética de las dos lecturas de un mismo ángulo de pendiente, correspondientes a las dos posiciones del anteojo, está exenta de la corrección de índice i .

Ejemplo

Nonio	Posición I	Posición II	Media	$II - I = 2i$
A	+ 5° 26' 30"	+ 5° 29' 40"	+ 5° 28' 05"	3' 10"
B	+ 5° 26' 10"	+ 5° 29' 30"	+ 5° 27' 50"	3' 20"
Media	+ 5° 26' 20"	+ 5° 29' 35"	+ 5° 27' 57,5"	= α

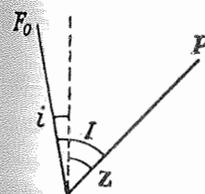


Fig. 106

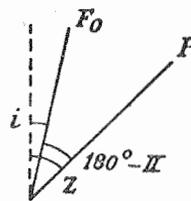


Fig. 107

II. *Graduación por medias circunferencias.* En las figuras 106 y 107 se ve el anteojo en sus dos posiciones, primero en la F_0 para la cual la lectura del limbo es igual a cero, y después enfilado al punto P , de distancia cenital z ; las lecturas I y II correspondientes a ambas posiciones serán:

$$I = z + i \quad II = 180^\circ - (z - i)$$

de donde:

$$z = 90^\circ - \frac{II - I}{2} \quad 2i = 180^\circ - (II + I). \quad (4)$$

Ejemplo

Nonio	Posición I (Círculo a la izqd. ^a)	Posición II (Círculo a la dch. ^a)	Media	II + I = 180 - 2i
A	88° 2' 10"	91° 57' 50"	+ 3° 55' 40"	180° 0' 0"
B	88° 2' 20"	91° 58' 10"	+ 3° 55' 50"	180° 0' 30"
		Media II - I	+ 3° 55' 45"	

Distancia cenital: $\alpha = 90^\circ - 1^\circ 57' 52,5'' = 88^\circ 2' 7,5''$.

III. *Graduación corrida.* Para esta clase de limbos, son distintas las lecturas en los dos nonios, por lo cual sólo consideraremos la lectura del nonio A. Podemos estudiar la corrección i , si se trata de ángulos de pendiente, mediante las figuras 104 y 105, y si de distancias cenitales, con ayuda de las 106 y 107.

Para ángulos de pendiente tenemos, en la primera posición del anteojo, como anteriormente (fig. 104):

$$I = \alpha - i.$$

Cuando se coloca el anteojo en la segunda posición F_0' , el nonio A da la lectura 180° . Al enfilar el punto P, y puesto que al subir el anteojo las lecturas van siendo cada vez menores, se tiene:

$$II = 180^\circ - (\alpha + i).$$

De estas dos igualdades se deduce:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{II - I}{2} \quad 2i = 180^\circ - (I + II). \quad (5)$$

Ejemplo

Nonio	Posición I (Círculo a la izqd. ^a)	Posición II (Círculo a la dch. ^a)	II - I	II + I
A	32° 15' 30"	147° 43' 40"	115° 28' 10"	179° 59' 10"
B	212° 15' 40"	327° 43' 40"	115° 28' 00"	179° 59' 20"
Media	32° 15' 35"	147° 43' 40"	115° 28' 05"	179° 59' 15"
			57° 44' 02,5"	2i = + 45"
			$\alpha = 32^\circ 15' 57,5''$	i = + 22,5"

Para la lectura de distancias cenitales se tiene, según la figura 106, en la primera posición del anteojo:

$$I = \alpha + i.$$

En la segunda posición hay que tener en cuenta, según se ve en la figura 107 (prescindiendo de la indicación allí expresada para la lectura II), que al pasar el anteojo de F_0 a P, la lectura de 360° queda rebajada en $\alpha - i$, es decir, que se tiene:

$$II = 360 - (\alpha - i)$$

y de las expresiones de las lecturas I y II, se deduce:

$$\alpha = \frac{1}{2}(I - II + 360^\circ) = \frac{I - II}{2} \quad 2i = I + II - 360^\circ. \quad (6)$$

Ejemplo

Nonio	Posición I (Círculo a la izqd. ^a)	Posición II (Círculo a la dch. ^a)	I - II + 360°	I + II
A	52° 40' 50"	307° 18' 20"	105° 22' 30"	359° 59' 10"
B	232° 41' 10"	127° 18' 30"	105° 22' 40"	359° 59' 40"
Media	52° 41' 00"	307° 18' 25"	105° 22' 35"	359° 59' 25"
			$\alpha = 52^\circ 41' 17,5''$	2i = - 35"

Eliminación del error o corrección de índice o cero. Aunque haciendo la observación en las dos posiciones del anteojo es fácil determinar y compensar el error de índice, es mejor que éste quede contenido entre límites muy cercanos o completamente eliminado.

Para ello se empieza por hallar el ángulo de pendiente o la distancia cenital de una cierta visual, siguiendo las reglas dadas antes para los distintos casos de graduaciones del limbo. La eliminación del error de índice varía según la disposición del nivel.

Cuando el nivel está colocado en el soporte del anteojo (fig. 97) se cala aquél y se enfila el punto de mira con el hilo horizontal del retículo, y mediante sus tornillos de sujeción se llevan los dos nonios al punto correspondiente a la lectura antes obtenida para el ángulo de pendiente o la distancia cenital. En algunos aparatos van los dos nonios fijados en un brazo que puede girar alrededor del eje de giro del anteojo, como se ve en la figura 98, aunque sin el nivel; en este caso, en vez del tornillo de llamada que se ve en dicha figura, hay un tornillo de corrección con el cual se pueden mover a la vez los dos nonios.

Si se trata de un nivel de alidada (fig. 98), se enfila el hilo horizontal del retículo sobre el punto de mira, y por medio del tornillo de llamada se llevan los nonios a la lectura antes obtenida para el ángulo de pendiente o la distancia cenital. Después se cala el nivel con su tornillo de corrección.

En el caso de que el nivel vaya fijado al anteojo (pág. 105) sólo hay que colocar el eje del nivel paralelamente al de colimación del anteojo. Cuando se trata de un nivel sencillo, se aplica el método de nivelación descrito en la página 23. Más fácil y cómodo es el procedimiento cuando el nivel es reversible; en este caso (como se hizo para el nivel descrito en la página 28) basta hacer la lectura sobre una mira de nivelación, con el nivel calado, en las dos posiciones del anteojo; la media aritmética de las dos lecturas da la visual horizontal, a la cual se ajusta el nivel mediante su tornillo de corrección.

§ 26. Medición de ángulos de pendiente por lecturas de nivel

En vez de calar cuidadosamente el nivel para cada visual, se puede también hacer la lectura de la desviación de la burbuja y llevar esta lectura al cálculo, como ya se dijo al tratar de las nivelaciones de precisión.

Después de determinada la sensibilidad del nivel con la probeta o examinador de niveles (tomo I, pág. 217), o directamente con el mismo círculo cenital, sólo resta hacer las lecturas en el orden debido y sobre todo no cometer ningún error de signo.

Las consideraciones que vamos a exponer se refieren al teodolito representado en la figura 320 del tomo I.

El círculo vertical está graduado de tal modo, que en la primera posición (antecojo a la izquierda), para visual horizontal y nivel calado, sin corrección de índice, la lectura en el microscopio I es 90° , y que al subir el anteojo, la lectura disminuye. Si se tiene una lectura a la izquierda l_i , la distancia cenital α será para una corrección de índice i , según lo expuesto anteriormente (pág. 108):

$$\alpha = l_i - i. \quad (1)$$

Después de dar la vuelta de campana al anteojo y de enfilarlo al mismo punto, se tendrá en el mismo microscopio I la lectura l_d , y según lo dicho en la página 108 la distancia cenital α será:

$$\alpha = 360^\circ - (l_d - i). \quad (2)$$

De estas dos fórmulas se deduce:

$$\kappa = 180^\circ - \frac{l_d - l_i}{2} \tag{3}$$

$$i = \frac{l_d + l_i}{2} - 180^\circ \tag{4}$$

Siempre se supone que el nivel está calado en el centro de la escala, es decir, en la división 20 para la graduación de las figuras 108 y 109, o que las lecturas de los dos extremos de la burbuja (izquierdo y derecho) suman 40. Si la burbuja está calada hacia la izquierda, la suma pasará de 40, y si a la derecha, no llegará a 40. Si s es la suma de las lecturas de los extremos de la burbuja, y e la sensibilidad del nivel en segundos, se

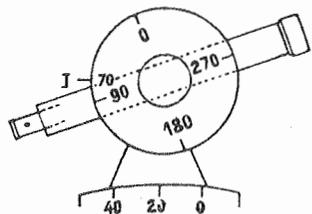


Fig. 108. — Anteojo a la izquierda

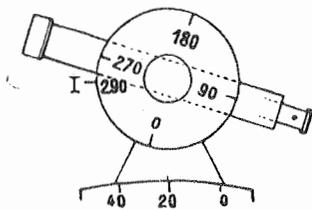


Fig. 109. — Anteojo a la derecha

tiene para valor de la inclinación del eje del nivel (que es la tangente en el punto 20), correspondiente a la suma s de lecturas, la siguiente expresión:

$$\left(\frac{s}{2} - 20\right) e = (e - 40) \frac{e}{2}$$

Esta inclinación se agrega a la lectura del círculo vertical, con un signo, que corresponde a la posición de la escala del nivel. Para aplicar correctamente este signo, obsérvese en la figura 108, que si $\frac{s}{2}$ es mayor que 20, o s mayor que 40, la tangente al nivel en el punto 20 se eleva, hacia la izquierda, sobre la horizontal, y que este ángulo de elevación, que habría que procurar fuera lo menor posible cuando no se aplicara la corrección de nivel, es precisamente la corrección que hay que aplicar a la lectura del anteojo a la derecha, Δ_d , y la correspondiente a la izquierda, Δ_i :

$$\Delta_d = (s - 40) \frac{e}{2} \quad \text{y} \quad \Delta_i = (s - 40) \frac{e}{2} \tag{5}$$

En un caso particular estudiado por nosotros, teníamos $e = 14,2''$, es decir, que a una desviación de la burbuja, de una división, correspondía una inclinación del nivel de $14,2''$, o que a una variación de s correspondía una inclinación de $7,1''$. Calculamos entonces una tabla para s de 0,1 en 0,1, cuyos valores principales, de 1 en 1, son los únicos que figuran en el cuadro siguiente, donde d e i' indican las lecturas hechas con los dos extremos (derecho e izquierdo) de la burbuja.

Lecturas de la burbuja, s	Correcciones Δ_i o Δ_d	Lecturas de la burbuja, s	Correcciones Δ_d o Δ_i
35	-36"	40	± 0"
36	-28"	41	+ 7"
37	-21"	42	+ 14"
38	-14"	43	+ 21"
39	- 7"	44	+ 28"
40	± 0"	45	+ 36"

Esta tabla nos dice que, por ejemplo, si en la figura 108 ó en la 109, los extremos de la burbuja dan las lecturas $d = 31,0$ e $i = 10,0$, se tendrá $s = 31,0 + 10,0 = 41,0$, y según la tabla, la correspondiente corrección angular será igual $+7''$.

A continuación puede verse un ejemplo numérico completo:

Estación: Torre A. Altura del anteojo sobre el pilar de observación, 0,220 m

Posición del anteojo	Punto de mira	Grados		Microscopio		Nivel				Media			
		Grados	Min.	I	II	i	d	$s = i + d$	Correc. tab	Grados	Min.	Seg.	
d	Torre B	270	17	5	0	5"	10,5	30,9	41,4	+ 10"	270	17	15
	"	270	17	2	- 9	- 7	11,4	30,6	42,0	+ 14	270	17	7
	i	"	89	40	25	36	61	10,1	30,6	40,7	+ 5	89	41
i	"	89	40	25	32	57	10,1	30,6	40,7	+ 5	89	41	2
	Torre C	90	40	27	36	63	10,4	30,6	41,0	+ 7	90	41	10
	"	90	40	28	39	67	10,3	30,7	41,0	+ 7	90	41	14
d	"	269	16	28	21	49	11,2	31,5	42,7	+ 19	269	17	8
	"	269	17	1	- 9	- 8	11,2	31,5	42,7	+ 19	269	17	11

(6)

	Torre B	Torre C
Valor medio de l_d	270° 17' 11,0"	269° 17' 09,5"
" " " l_i	89 41 04,0	90 41' 12,0
$l_d - l_i$	180° 36' 07,0"	178° 35' 57,5"
$\frac{l_d - l_i}{2}$	90 18 03,5	89 17 58,8
Distancia cenital κ	89° 41' 56,5"	90° 42' 01,2"
Ángulo de pendiente α . . .	+ 0 18 03,5	- 0 42 01,2

(7)

De este modo se hace el cálculo casi mecánicamente, y puesto que la observación en el campo resulta más exacta, más rápida y más cómoda y fácil cuando se leen los extremos de la burbuja en toda posición de ésta, en vez de calar cada vez el nivel, se desprende que el sistema de lectura de la burbuja es altamente recomendable para la medición de ángulos de pendiente, aunque no pueda clasificarse entre los de primer orden.

Curvatura del anteojo y error de los ejes del teodolito. En las observaciones de ángulos verticales topográficos se tiene un error casi constante en la curvatura del anteojo, que alcanza valores apreciables aun en los anteojos tan cortos de los teodolitos más pequeños; si a causa de esta curvatura el extremo objetivo está más bajo que el extremo ocular, es decir, si la curvatura es mayor del lado objetivo que del ocular, hay que colocar el anteojo, para enfilar un punto de mira, más elevado de lo que en realidad debiera estar, y como consecuencia se tiene que el ángulo de pendiente resulta, en las dos posiciones del anteojo, más grande de lo que realmente es. Este error no puede eliminarse repitiendo la observación.

En la página 37 hemos citado algunos procedimientos para determinar la curvatura del anteojo: aquí sólo añadiremos (Zeitschr. f. Verm., 1910) que para dos teodolitos con tornillos micrométricos de lectura, se encontraron curvaturas de $1,70''$ y $1,03''$ respectivamente: el primer aparato era de anteojo acodado, y el segundo era casi igual al representado en la figura 320 del tomo I.

De mucha menor importancia es el error de ejes del teodolito, en la medición de ángulos verticales.

Del mismo modo que se hizo para la medición de ángulos acimutales (tomo I, párrafo 78), se puede determinar teóricamente la cuantía del error que afecta a un ángulo vertical, cuando el teodolito tiene un cierto error de colimación y una inclinación conocida del eje horizontal. Pero el resultado de esta teoría es casi siempre negativo, porque para pequeños ángulos de pendiente, los errores de los ejes de un teodolito medianamente corregido son insignificantes. Por esta razón nos abstenemos aquí de la exposición de dicha teoría.

§ 27. Teoría de la nivelación por pendientes o trigonométrica

Para cortas distancias siempre es posible determinar una diferencia de nivel h (figura 110) conociendo la distancia horizontal a , cateto de un triángulo rectángulo ABE , uno de cuyos ángulos agudos α se mide. Según la figura 111, se tiene:

$$h = a \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Esta fórmula y este procedimiento sólo son válidos para distancias pequeñas, por dos razones:

En primer lugar, la curvatura de la superficie terrestre es bien apreciable, de tal modo que la línea AE de la figura 110 no debe considerarse como recta sino como un arco. Para las medidas acimutales (planimétricas) puede considerarse

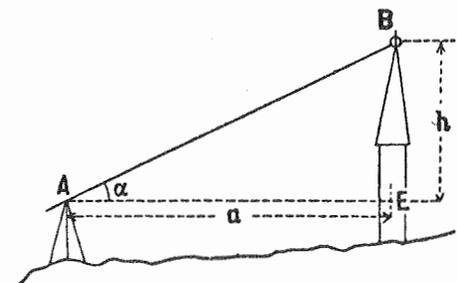


Fig. 110

como plano un triángulo de 5000 m de lado, pero tratándose de altimetría, ya resulta apreciable la curvatura terrestre en distancias de pocos centenares de metros.

En segundo lugar, hay que tener en cuenta la refracción de la luz, en virtud de la cual la línea AB de la figura 110 no es realmente una recta, sino un arco; esta refracción se debe a que las capas inferiores del aire son más densas que las superiores. Aun cuando de todos son conocidas las leyes físicas de la refracción de la luz y el cálculo correspondiente no ofrece ninguna dificultad, hay siempre una cierta inseguridad debida a las continuas mutaciones del estado atmosférico, que hace que hasta ahora no pueda alcanzarse la nivelación por pendientes la precisión de las observaciones acimutales.

I. Curvatura terrestre. Sea AE (fig. 111) la superficie terrestre, de forma esférica, cuyo radio es r , AH su tangente en A y α' el ángulo de pendiente de la visual dirigida de A a B . Esta visual AB la consideramos, de momento, como recta. Sea a la distancia entre los puntos A y E , y dada la pequeñez de a , comparada con el radio de la Tierra r , lo mismo es considerar medida a como cuerda o como arco AE .

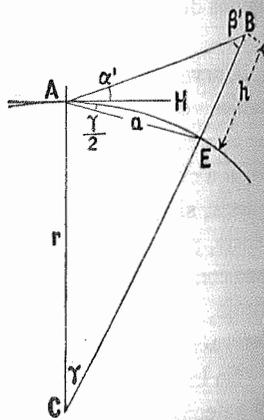


Fig. 111

El ángulo en el centro γ es, desde luego, conocido, y, por lo tanto, también lo es el $HAE = \frac{\gamma}{2}$, y ya puede hallarse el ángulo β' , por pertenecer al triángulo ACB , mediante la sencilla ecuación siguiente:

$$(\alpha' + 90^\circ) + \gamma + \beta' = 180^\circ$$

de donde:

$$\beta' = 90^\circ - (\alpha' + \gamma). \quad (2)$$

En el triángulo rectilíneo ABE se tiene, según la ley de los senos:

$$\frac{h}{a} = \frac{\operatorname{sen} \left(\alpha' + \frac{\gamma}{2} \right)}{\operatorname{sen} \beta'} = \frac{\operatorname{sen} \left(\alpha' + \frac{\gamma}{2} \right)}{\cos (\alpha' + \gamma)}$$

y por ser siempre muy pequeño el ángulo γ , se puede escribir:

$$\operatorname{sen} \left(\alpha' + \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha' + \frac{\gamma}{2} \cos \alpha' + \dots$$

$$\cos (\alpha' + \gamma) = \cos \alpha' + \dots$$

Y sustituyendo valores en la proporción anterior, resulta:

$$\frac{h}{a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha' + \frac{\gamma}{2} \cos \alpha'}{\cos \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha' + \frac{\gamma}{2}$$

$$h = a \operatorname{tg} \alpha' + a \frac{\gamma}{2},$$

y por ser

$$\gamma = \frac{a}{r}, \quad (3)$$

se tiene finalmente

$$h = a \operatorname{tg} \alpha' + \frac{a^2}{2r}. \quad (4)$$

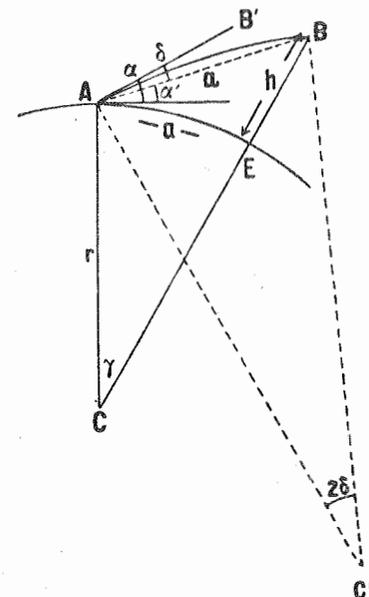


Fig. 112

II. Refracción de la visual. En vez de la visual rectilínea AB supuesta en la figura 111, vamos a considerar un rayo curvo AB , como se ve en la figura 112.

Este caso puede reducirse al anterior por medio de la fórmula (4), cuando se conoce el ángulo δ que forma la cuerda AB (fig. 112) con la tangente AB' .

Aproximadamente, y mientras posteriores experiencias no confirmen o rechacen la hipótesis, se toma el arco AB como circular plano de centro C' , a tal distancia, que el ángulo con el centro en C' es doble del pequeño ángulo $B'AB = \delta$, como se ve en la figura 112.

El radio r' del arco AB se supone constante, y mediante un coeficiente k se refiere al radio terrestre del modo siguiente:

$$r = kr' \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{r'} = k \frac{1}{r}. \quad (5)$$

La introducción de este coeficiente k responde a una hipótesis arbitraria: después veremos cómo determinarse, y que su valor, en números redondos, es 0,13.

De todos modos, puede hacerse el cálculo partiendo de la hipótesis (5), y aproximadamente puede también admitirse que los dos arcos AE y AB sean iguales a a , aunque por lo exagerado de la figura parezca esto una arbitrariedad, pero no es así, ya que en realidad el ángulo γ es tan pequeño (de $10'$ a $20'$ a lo sumo), que es perfectamente lícita la hipótesis de $AB = AE = a$.

Partiendo de este supuesto, se tiene, en la figura 112:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{a}{r}, \quad \text{y según (5)} \quad \delta' = \frac{k}{2} \frac{a}{r}. \quad (6)$$

En la misma figura se ve que:

$$\alpha' = \alpha - \delta = \alpha - \frac{1}{2} \frac{a k}{r}.$$

Tomando tangentes, y teniendo en cuenta la pequeñez del ángulo α , puede escribirse:

$$\text{tg } \alpha' = \text{tg} \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{a k}{r} \right) = \text{tg } \alpha - \frac{1}{2} \frac{a k}{r}$$

y sustituyendo este valor en (4), resulta:

$$h = a \text{tg } \alpha - \frac{a^2 k}{2r} + \frac{a^2}{2r},$$

o bien, sumando los dos últimos términos del segundo miembro de esta igualdad:

$$h = a \text{tg } \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2. \quad (7)$$

Esta es la fórmula fundamental de la nivelación trigonométrica o por pendientes, que para todas las aplicaciones prácticas resulta de suficiente precisión, a pesar de los valores aproximados que intervienen en su deducción.

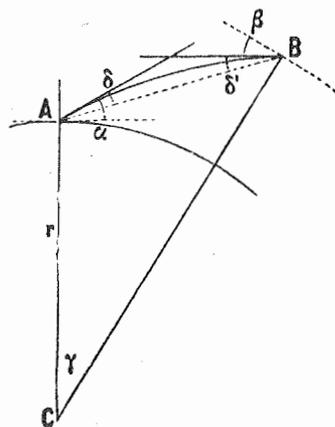


Fig. 113. — Observaciones recíprocas

Determinación del coeficiente de refracción k. El procedimiento más sencillo, en teoría, para determinar k , consiste en medir exactamente, por nivelación, una altura h y después medir el ángulo de pendiente α , para una distancia conocida a ; de este modo se conocen ya h , a , α y r , y sustituyendo sus valores en la ecuación (7) se resuelve ésta en k , obteniéndose así el valor:

$$k = 1 - \frac{2r}{a^2} (h - a \text{tg } \alpha). \quad (8)$$

Otro modo de determinar k consiste en la observación simultánea del ángulo de pendiente entre dos puntos, como se ve en la figura 113; el ángulo de elevación de la visual AB , medido en A , es α , y el ángulo de depresión de la visual BA , medido en B , es β , y entre los dos ángulos observados se tiene la siguiente relación:

$$\gamma + (90^\circ + \alpha - \delta) + (90^\circ - \beta - \delta') = 180^\circ$$

de donde:

$$\delta + \delta' = \gamma + \alpha - \beta.$$

Suponiendo $\delta' = \delta$, y sustituyendo en la fórmula (6), resulta:

$$\delta + \delta' = 2\delta = \frac{a k}{r} = \gamma + \alpha - \beta,$$

y poniendo en vez de γ su valor $\frac{a}{r}$ dado por la fórmula (3), se tiene, expresando $\beta - \alpha$ en valor angular:

$$k = 1 - \frac{r}{a} \left(\frac{\beta - \alpha}{\rho} \right) \quad (9)$$

donde ρ es el número de segundos (206264,806) del arco igual al radio.

Esta fórmula nos dice que para determinar el coeficiente de refracción k debe hacerse un gran número de observaciones recíprocas (y a ser posible simultáneas) de ángulos de pendiente. A continuación damos algunos de los valores medios hallados por este procedimiento (véase la correspondiente bibliografía en el párrafo 40):

1736. Maupertuis, Laponia	$k = 0,1053$
1751. Tobías Mayer (de mediciones francesas)	0,1250
1792. Delambre, Francia	0,1678
1823. Gauss, Hannover	0,1306
1831. Struve, Rusia	0,1237
1834. Bessel, Prusia	0,1370
1849. Baeyer, levantamiento del litoral	0,1300
1853. James Clark, Inglaterra	0,1587
1870-1875. Levantamientos en Prusia	0,1180
Promedio	$k = 0,1329$

En Alemania se toma como valor medio del coeficiente el hallado por Gauss en la medición del grado terrestre entre Gotinga y Altona, a saber, $k = 0,1306$. En números redondos se toma para este coeficiente el siguiente valor (*):

$$\text{Coeficiente de refracción promedio} \quad . . . \quad k = 0,13. \quad (10)$$

El valor obtenido por Gauss (en enero de 1823) para k , fué el promedio de 28 determinaciones, que por término medio diferían entre sí en 0,035, ó sea, aproximadamente, en la cuarta parte del valor promedio. Tomando los valores máximos y mínimos hallados por Gauss se encuentran desviaciones mucho mayores respecto al valor promedio; por ejemplo, de las 28 determinaciones de Gauss, la máxima fué 0,208 y la mínima $-0,114$. Baeyer encontró para valor máximo 0,267 y para valor mínimo 0,083. Como se ve, la mayor de estas desviaciones es casi igual al valor mismo de k . El valor de k puede, a veces, resultar negativo, indicando que en este caso la visual presenta su convexidad hacia abajo. A esta clase de refracción se debe la apariencia de agua que se observa sobre la arena recalentada, como sucede en los desiertos y en las grandes extensiones arenosas expuestas al Sol en climas cálidos (**).

Se han hecho numerosos experimentos, suponiendo que la desviación media del valor medio $k = 0,13$ del coeficiente de refracción puede alcanzar hasta una cuarta parte de k . Para tener una idea aproximada del valor numérico de la precisión, podemos escribir:

$$\text{valor medio } k = 0,13 (1 \pm 0,25). \quad (11)$$

Una vez estudiado todo cuanto se refiere a la ecuación (7), demos ahora una nueva interpretación a esta fórmula, valiéndonos para ello de la figura 114. La ecuación (7) nos da:

$$h = a \text{tg } \alpha + \frac{a^2}{2r} - \frac{a^2 k}{2r}. \quad (12)$$

(*) En España se toma como valor medio del coeficiente de refracción $k = 0,08$, en números redondos. Pero como este coeficiente se define en España como el cociente del ángulo de refracción δ por el ángulo en el centro γ , y en Alemania, según hemos visto, el coeficiente de refracción se define diciendo que es igual al cociente del doble del ángulo de refracción δ , por el ángulo en el centro γ , resulta que para comparar los valores del coeficiente de refracción español y alemán hay que multiplicar el primero por 2, ó dividir el segundo por 2. Según esto, el coeficiente alemán será, para España 0,06, y el español, para Alemania 0,16. — N. del T.

(**) En España puede observarse diariamente este fenómeno, con gran intensidad, durante el verano, en las marismas del Guadalquivir. — N. del T.

En la figura 114, correspondiente a esta fórmula, AE es la superficie curva del suelo, AH es la horizontal, AB la visual y AB' la tangente a esta visual. En esta figura se tiene:

$$\text{curvatura terrestre } EH = \frac{a^2}{2r}, \text{ y refracción } BB' = \frac{a^2 k}{2r}$$

y también:

$$HB' = a \operatorname{tg} \alpha \text{ (aproximadamente)}$$

y

$$EB = h = HB' + EH - BB'$$

Esta igualdad corresponde a la fórmula (12).

En la tabla IV del Apéndice damos los valores calculados para $\frac{a^2}{2r}$, $\frac{a^2 k}{2r}$ y su diferencia $\frac{1-k}{2r} a^2$, así como el ángulo de refracción $\delta = \frac{ak}{2r} \rho$. Los valores de esta tabla son aproximados, o mejor dicho, redondeados, ya que sólo se trata de dar una idea general de los mismos. Estos valores numéricos, y especialmente los del ángulo de refracción δ , sirven para conocer aproximadamente la precisión de la observación angular; por ejemplo, se ve que para una distancia de 30 kilómetros, el ángulo de refracción es de $1'3''$; si se admite, según (11), que la refracción tiene un margen de inseguridad del 25 %, se tiene que para 30 Km de distancia, el ángulo de pendiente ofrece un margen de imprecisión de $\pm 15''$ en números redondos.

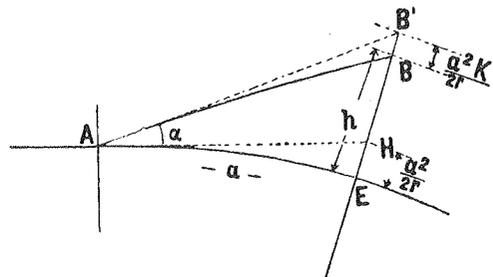


Fig. 114. — Curvatura terrestre y refracción

En las tablas II y III del Apéndice damos valores numéricos más exactos, cuya aplicación indicaremos en el párrafo siguiente. El radio de la Tierra que figura en estas dos tablas corresponde a la latitud de 50° (media de Alemania), y su valor es:

$$r = 6381000, \quad \log r = 6,80489. \quad (13)$$

§ 28. Ejemplo numérico del cálculo de alturas

Partamos de la fórmula fundamental (7) del párrafo anterior:

$$h = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 \quad (1)$$

que da la diferencia de altura entre el centro del anteojo y el punto de mira; en muchos casos hay que tener en cuenta una altura i del aparato y una altura z del punto visado. Supongamos (fig. 115) que el centro del anteojo esté a una altura i sobre un punto fijo (un vértice o señal permanente), y que el punto de mira esté a una altura z sobre su correspondiente punto fijo del terreno, como en las señales representadas en las figuras 409 y 410 del tomo I; en este caso hay que aplicar a la fórmula (1) la reducción $i - z$, y según la figura 115, se tendrá:

$$h = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 + i - z. \quad (2)$$

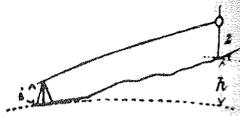


Fig. 115
 i , altura del instrumento;
 z , altura del punto de mira

Si α , i y z están afectados con el signo algebraico que les corresponda ($+\alpha$ para ángulo de elevación, $-\alpha$ para ángulo de depresión, etc.), resulta h con el signo que en realidad debe tener, es decir, positivo cuando el punto observado está más alto que el punto desde donde se observa. Vamos a dar un ejemplo, referente a la triangulación estudiada en la página 351 del tomo I.

En el punto A (Wasserturm, depósito de agua) se estacionó el teodolito representado en la figura 320 del tomo I, sobre el pilar de observación que se ve en la figura 116, con el anteojo a 0,220 m sobre el borde superior del depósito [véase (6) página 111], y el ángulo de pendiente leído (de depresión) al visar el borde superior de la balaustrada de Willmer, B , fué de $-0^\circ 22' 22''$.

Estacionado después el teodolito en Willmer, con su anteojo a 3,085 m por bajo del borde superior de la balaustrada, el ángulo de elevación leído al visar el borde superior del depósito de agua fué $\alpha = +0^\circ 22' 44''$. A estas observaciones corresponden (fig. 116)

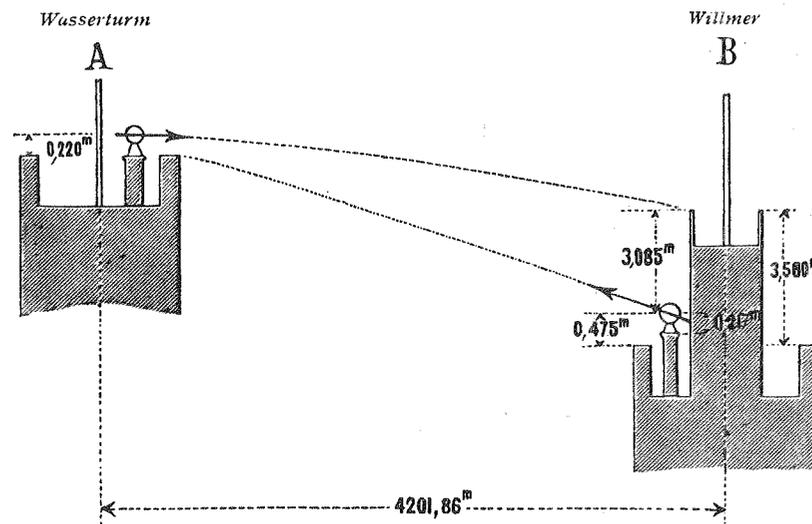


Fig. 116. — Nivelación trigonométrica

los valores $i = 0,220$ m, $z = 0,000$ m para el depósito de agua A , e $i = -3,085$ m, $z = 0,000$ m para Willmer, B (o bien $i = 0,475$ m sobre el borde inferior de Willmer, que se encuentra a su vez a 3,560 m por bajo del borde superior de la balaustrada).

Es decir, que el cuadro de valores será:

$$\begin{array}{ll} \alpha = -0^\circ 22' 22'' & \alpha = +0^\circ 22' 44'' \\ i = 0,220 \text{ m}, & z = 0,000 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{ll} i = -3,085 \text{ m}, & z = 0,000 \text{ m}. \end{array}$$

Vamos a hacer el cálculo con estos valores α , i y z , y para ello empezamos por tomar las coordenadas de los dos puntos, que según la triangulación (tomo I, página 368) son:

	A		B	
Centro	-25538,49	-29071,47	-21777,61	-30945,36
Pilar	-25537,81	-29071,06	-21779,14	-30944,96

Para el cálculo de la observación de A hacia B empleamos la distancia del pilar de A al centro de B , porque el ángulo de pendiente no se tomó sobre el borde exterior de la balaustrada, sino sobre el centro de la misma. Las distancias se calculan del modo indicado en la página 137 del tomo I, a saber:

Pilar de A	- 25537,81	- 29071,06	3.575211
Centro de B	- 21777,61	- 30945,36	9 951812
	- 3760,20	+ 1874,30	3 272839
			0.302372
			log a = 3.623399
			a = 4201,45 m.

El cálculo correspondiente de la distancia entre el pilar de Willmer y el centro del depósito de agua A, da $\log a = 3,623282$, $a = 4200,32$, valor que empleamos asimismo sin hacer reducción alguna para la mitad del espesor del depósito, como tampoco se hace para el correspondiente ángulo de pendiente. Por lo tanto, se tendrá:

$\alpha = -0^{\circ} 22' 22''$	$\alpha = +0^{\circ} 22' 44''$
log a 3.623 399	log a 3.623 282
log tg α 7.813 334 _n	log tg α 7.820 396
log (a tg α) 1.436 733 _n	log (a tg α) 1.443 678
a tg $\alpha = -27,336$	a tg $\alpha = +27,777$
$i = 0,220$	$i = -3,085$
$\chi = 0,000$	$\chi = 0,000$
$i - \chi = + 0,220$	$i - \chi = -3,085$
$+ 1,20 = \frac{1-k}{2r} a^2$ (según la tabla III del Apéndice) $+ 1,20$	
$h = -25,92$ m.	$h = +25,89$ m.

La diferencia de altura entre el borde superior de la plataforma del depósito de agua A y el borde superior de la balaustrada de Willmer B, es de A a B igual a 25,92 m, y de B a A, 25,89 m, es decir, que sólo se diferencian en 3 cm, y su valor promedio es de 25,90 m.

Si se da ahora la altura sobre el nivel del mar o nivel cero, del depósito de agua A (borde superior de la plataforma), 111,89 m, se tiene la altura de la balaustrada de Willmer restando 25,90 de 111,89, ó sea, 85,99 m.

Debemos advertir que este ejemplo está tomado de la nivelación realmente hecha en el verano de 1891, con el teodolito representado en la figura 320 del tomo I, siguiendo el método de nivelación estudiado en la página 111 de este segundo tomo.

Téngase en cuenta, para el caso anterior, que un error de 1" en el ángulo de pendiente da lugar a un error de altura tal, que para la distancia de 4200 m, resulta igual a $4200 : \rho = 0,02$ m = 2 cm; lo cual nos dice que la diferencia de 3 cm antes obtenida corresponde a la precisión de un segundo en los ángulos de pendiente.

En general, para todas las mediciones hemos hecho las comparaciones entre la directa y la inversa, y todas las comprobaciones han coincidido con pocos centímetros de diferencia.

Los demás errores distintos de los de ángulo vertical no tienen intervención en esta clase de observaciones: los errores de distancia son despreciables en cuanto al efecto que pueden producir en la determinación de la altura, y la refracción, que según la tabla correspondiente del Apéndice es sólo de 11" para una distancia de 5 Km, puede variar a lo sumo en la cuarta parte de este valor, es decir, en muy pocos segundos, que desaparecen en las distintas comprobaciones.

Compensación de las alturas trigonométricas. Con las diferentes comprobaciones de las medidas de ángulos verticales se llega fácilmente a una compensación de la red observada, como se ve en el siguiente ejemplo, tomado de nuestros trabajos en el año 1883. Los ángulos de pendiente se observaron con un teodolito provisto de nonios y en parte con un taquímetro (de 1' de apreciación), en distancias comprendidas entre 1 y 2 Km.

Como punto de partida o referencia para las alturas se tomó la señal correspondiente al punto B (fig. 117), es decir, que se conocía exactamente la altura sobre el nivel cero del vértice B, igual a 116,10 m.

Los ángulos de pendiente, observados al hacer la triangulación, dieron, mediante la fórmula $h = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2$, con los valores dados por las tablas II y III del Apéndice, las diferencias de nivel entre los distintos puntos, que figuran indicadas en la figura 117. Donde se hizo observación recíproca figuran los dos valores y la media de ambos; por ejemplo, de B a D = + 258,52 m y de D a B = - 258,87 m; el promedio es = 258,70 m. En esta figura, las cifras entre paréntesis corresponden a las observaciones recíprocas, y las situadas entre ambas y sin paréntesis, son las medias de cada par de aquéllas; las observaciones hacia el punto A (una torre), donde no se hizo estación, van indicadas solamente con un valor para la altura. Las flechas indican el sentido del desnivel.

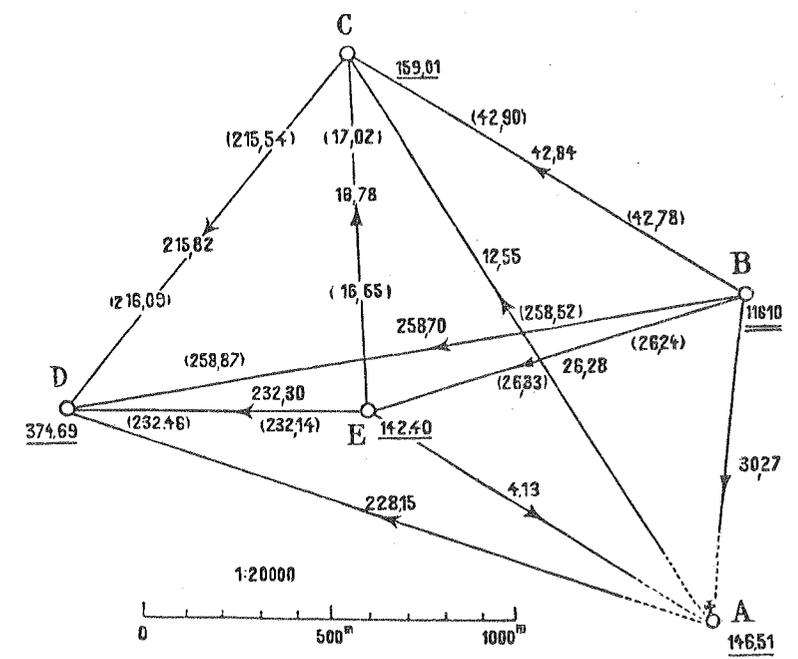


Fig 117. — Compensación de alturas trigonométricas. Las flechas indican el sentido de las alturas crecientes

Por otra parte, la compensación puede hacerse a voluntad, y ya dimos, en la página 91, el método fundamental para la compensación de una nivelación cuando sólo se tiene un punto fijo, consistente, como primera medida, en determinar una diagonal, lo más larga posible, del mayor número de modos posible, y relacionar o sujetar a ésta todas las demás. El punto más lejano del B, en nuestro caso, es el D, y por esta razón se determina primero la altura de este último punto del mayor número posible de modos, a saber:

1. Directamente	2. Respecto a E	3. Respecto a C	4. Respecto a A
116,10	116,10	116,10	116,10
+ 258,70	+ 26,28	+ 42,84	+ 30,27
374,80	+ 232,30	+ 215,82	+ 228,15
	374,68	374,76	374,52

Media aritmética 374,69 m = altura del punto D

Aunque este cuarto valor (respecto al punto *A*) tiene un peso menor que los otros tres, por carecer de observación recíproca, prescindimos de esta circunstancia para hacer la compensación más sencilla.

A la determinación de la altura del punto *D* sigue la del punto *C*, de todas las maneras posibles:

Por el punto <i>D</i>		Por el punto <i>B</i>		
1. Directamente	2. Respecto a <i>E</i>	3. Directamente	4. Respecto a <i>E</i>	5. Respecto a <i>A</i>
374,69	374,69	116,10	116,10	116,10
- 215,82	- 232,30	+ 42,84	+ 26,28	+ 30,27
158,87	+ 16,78	158,94	+ 16,78	+ 12,55
	159,17		159,16	158,92

Media aritmética 159,01 m = altura del punto *C*

De modo análogo se van fijando todos los puntos, hasta tener las alturas compensadas de todos ellos sobre el nivel del mar, o nivel de referencia, que son las siguientes:

Punto <i>A</i> . . .	146,51	Punto <i>D</i> . . .	374,69
» <i>B</i> . . .	116,10	» <i>E</i> . . .	142,40
» <i>C</i> . . .	159,01		

§ 29. Medición de la altura de las torres

Para el cierre de las nivelaciones trigonométricas sobre puntos del terreno ya nivelados, es necesario con frecuencia medir la altura de torres o de señales de nivelación

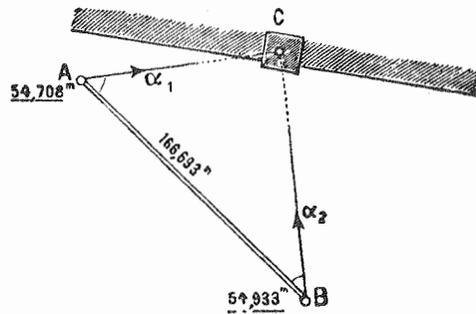


Fig. 118. — (Compárese con la figura 426 del tomo I)

(tomo I, página 359). A veces pueden medirse estas alturas exactamente con cintas métricas, reglas, etc.; pero en la mayor parte de los casos es preciso recurrir a procedimientos trigonométricos indirectos, para lo cual muchas veces se mide directamente la distancia horizontal del punto en que se estaciona el aparato a la torre, como en la figura 110, donde *a* es esta distancia horizontal.

Pero se sigue con más frecuencia el método de medir una pequeña base y observar dos ángulos acimutales, como vamos a indicar,

como ejemplo, para el caso de la medición de la torre de Hannover, que ya se tomó como ejemplo de reducción al centro en el tomo I, página 373 y figura 423.

Aquí sólo se trata de determinar la altura de la torre respecto a *A* o *B*, pues tanto uno como otro son puntos de la poligonal que por allí pasa, marcados con señal permanente (véase figura 428 del tomo I), y además nivelados, con cotas conocidas sobre el nivel cero, que son las indicadas en la figura 118: *A* = 54,708 m y *B* = 54,933 m.

Estos puntos *A* y *B* son los mismos señalados con (1) y (2) en la figura 426 del tomo I, y la distancia entre ellos es: *AB* = 166,693 m. También los ángulos acimutales en *A* y *B* son los mismos reseñados en la página 375 del tomo I, a saber:

$$CAB = \hat{A} = 51^\circ 18' 5'' \quad \text{y} \quad CBA = \hat{B} = 39^\circ 8' 20''.$$

El tercer ángulo *C* del triángulo *ABC* será $C = 180^\circ - (A + B)$, y ya tenemos así los tres ángulos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= 51^\circ 18' 5'' \\ \hat{B} &= 39^\circ 8' 20'' \\ \hat{C} &= 89^\circ 33' 35'' \end{aligned} \right\} \text{Suma} = 180^\circ 0' 0''. \text{ Distancia } AB = 166,693 \text{ m} \quad (1)$$

Conocidos los tres ángulos y la distancia *AB*, se calculan los otros dos lados *AC* y *BC* (ya calculados, por sus logaritmos log 1-*C* y log 2-*C*, en la página 375 del tomo I):

$$AC = \frac{AB}{\sin C} \sin B = 105,220 \text{ m} \quad \text{y} \quad BC = \frac{AB}{\sin C} \sin A = 130,099 \text{ m}.$$

En este caso, en que los puntos *A* y *B* pertenecen a una red de nivelación y sus cotas son conocidas, sólo hay que medir los ángulos de elevación de las visuales a *C*; cuando no sucede así, hay que medir también la diferencia de nivel entre *A* y *B*, por medio de los ángulos de pendiente de sus visuales recíprocas, o por los ángulos de pendiente de las visuales dirigidas desde ambos a algún punto intermedio. Una vez conocidos estos elementos, tenemos como datos:

Punto <i>A</i>		Punto <i>B</i>	
Cota, <i>H</i> ₁	= 54,708 m	Cota, <i>H</i> ₂	= 54,933 m
Altura del aparato	<i>i</i> ₁ = 1,009 m	Altura del aparato	<i>i</i> ₂ = 0,913 m
Ángulo de elevación	$\alpha_1 = +25^\circ 1' 52''$	Ángulo de elevación	$\alpha_2 = +20^\circ 38' 29''$
Distancia	<i>a</i> ₁ = 105,221 m	Distancia	<i>a</i> ₂ = 130,099 m

La cota *H* del centro *C* de la bola de la torre se calcula en función de *H*₁ y en función de *H*₂:

$$\begin{aligned} H &= H_1 + a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + i_1 & H &= H_2 + a_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + i_2 \\ &= 54,708 + 49,135 + 1,009 & &= 54,933 + 49,008 + 0,913 \\ &H = 104,852 \text{ m} & &H = 104,854 \text{ m} \end{aligned}$$

Cota de *C*: promedio, 104,853 m. (2)

Este procedimiento es el más empleado, no sólo por la facilidad de su ejecución, sino por la comprobación que supone la determinación de los dos lados del triángulo. Como puntos extremos de la base pueden servir dos cualesquiera, no señalados en el terreno de modo permanente; quedando perfectamente determinados cuando se emplean dos tripodes, uno para cada punto.

También se emplea mucho el siguiente método para medir la altura de las torres cuando no se dispone de sitio suficiente para establecer una base, por ejemplo, en una calle estrecha perpendicular a la torre: se toman dos puntos *P*₁ y *P*₂ en línea recta con el centro *T* de la torre: se miden las distancias horizontales *P*₁*P*₂ = *d*, y *P*₁*T* = *x*, y la *P*₂*T* = *x* + *d*, y si no se conocen las cotas de los puntos *P*₁ y *P*₂ se mide la diferencia de nivel entre ambos; se anotan las alturas *i*₁ e *i*₂ del teodolito en los puntos *P*₁ y *P*₂, y se miden los ángulos de elevación α_1 y α_2 , teniéndose así para calcular la cota del punto de mira *H* las dos ecuaciones siguientes:

$$H = H_1 + i_1 + x \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{y} \quad H = H_2 + i_2 + (d + x) \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (3)$$

Restando estas dos ecuaciones, se despeja *x*:

$$x = \frac{d \operatorname{tg} \alpha_2 + (H_2 - H_1) + (i_2 - i_1)}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Una vez calculada x con esta fórmula, se deduce el valor de H de las dos ecuaciones (3), como comprobación del cálculo. Con este procedimiento no cabe comprobación de las observaciones o medidas: pero ésta puede llevarse a cabo, tomando tres estaciones en vez de dos.

Alturas aproximadas. Hay muchas ocasiones, según el objeto de la medición, en que basta con obtener la altura de la torre, árbol, edificio, etc., con cierta aproximación: este caso se presenta especialmente en los trabajos forestales para determinar alturas de árboles, y también en los proyectos de triangulaciones hay que medir aproximadamente la altura de torres, edificios, etc.

En el tomo I (figs. 60 a 65) se han descrito varios goniómetros verticales portátiles (eclímetros, clinómetros, etc.), que pueden emplearse con este objeto, midiendo, también aproximadamente, la distancia horizontal a y calculando el producto $a \operatorname{tg} \alpha$ con la regla de cálculo, para mayor rapidez; en los trabajos forestales se emplean unos pequeños instrumentos especiales («dendrómetros», etc.) para estas mediciones rápidas y aproximadas.

En los reconocimientos y proyectos de triangulación se encuentran a veces torres y edificios, cuyas alturas pueden medirse con suficiente aproximación contando el correspondiente número de escalones (un escalón de torre tiene ordinariamente unos 20 cm de altura).

§ 30. Ampliación de fórmulas anteriores (*)

Aunque la fórmula (7) de la página 114 sirve cumplidamente para todas las aplicaciones prácticas, vamos a profundizar algo más en los detalles de su obtención, desde el punto de vista puramente matemático. En primer lugar, discutamos la sustitución que en aquélla se hizo, del arco por su cuerda; si en la figura 111 llamamos b al arco AE y a a su cuerda, se tendrá:

$$b = r\gamma \quad \text{y} \quad a = 2r \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$$

Desarrollando en serie el $\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$ resulta:

$$\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^3}{48}$$

y la diferencia $b - a$ entre el arco y su cuerda será:

$$b - a = \frac{r\gamma^3}{24} = \frac{r}{24} \left(\frac{b}{r}\right)^3 = \frac{b^3}{24r^2} \quad (1)$$

Supongamos que b sea igual, por ejemplo, a 20000 m, y $r = 6370000$ m; la diferencia $b - a$ será solamente 0,008 m, valor ciertamente despreciable. Con idéntica precisión podemos escribir, considerando la figura 119, $a = 2r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, fórmula que hasta ahora no hemos empleado, pero que nos servirá seguidamente.

Determinación del radio terrestre r . En un principio, hemos considerado la Tierra de forma esférica, y esta hipótesis es perfectamente admisible y de resultados válidos

(*) Las fórmulas desarrolladas en este párrafo no son necesarias para la práctica ordinaria de los métodos a que hacen referencia.

cuando se trata de mediciones de poca extensión. El radio medio de la Tierra, supuesta esférica, es, en números redondos, $r = 6370000$ m (véase tomo I, página 2).

Pero cuando se trata de una parte algo considerable de la superficie terrestre, hay que tener en cuenta que la Tierra es un elipsoide de revolución, que presenta distinta curvatura según la latitud y la dirección de que se trate. Para Alemania, cuya latitud media es $\varphi = 50^\circ$, el radio medio de curvatura es:

$$\log r = 6.80489, \quad r = 6381000 \text{ m} \quad (2)$$

y con estos valores se han calculado las tablas II a IV del Apéndice.

Ahora bien, para cálculos de mayor precisión en distancias más grandes, resulta demasiado grosero un valor constante para el radio de curvatura, como el (2), ya que la curvatura de la Tierra tiene para un mismo punto, en las distintas direcciones, valores diferentes que varían entre sí hasta en un 0,3%. El cálculo de estas variaciones de curvatura pertenece a la Geodesia superior, y con las fórmulas que se obtienen en el estudio de la misma se forman tablas que dan el valor del radio de curvatura en función de la latitud y del acimut.

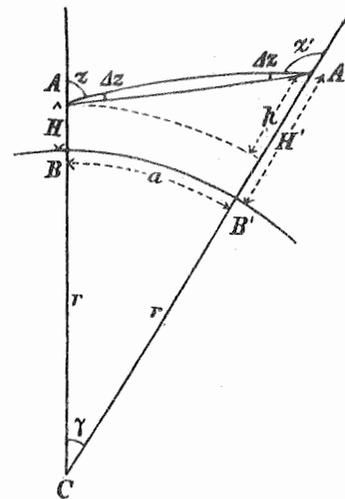


Fig. 119
Distancias cenitales recíprocas

Otras fórmulas de nivelación más completas. Volvamos al método de observaciones recíprocas (pág. 113) para discutir y ampliar la fórmula general, aun en la hipótesis de la Tierra esférica. Sea C el centro de la Tierra, supuesta esférica (fig. 119), y BB' la superficie del mar: A y A' son dos puntos cuyas cotas (altura sobre el mar) son respectivamente H y H' ; la línea curva AA' es el rayo visual, de cuya curvatura trataremos en el párrafo 36, y que ahora suponemos exactamente circular. Sean z y z' las distancias cenitales en A y A' : los ángulos que forma la visual curva AA' con la cuerda AA' , que son respectivamente Δz y $\Delta z'$, son los ángulos de refracción, y su suma $\Delta z + \Delta z'$ es el ángulo total de refracción del rayo visual AA' .

En el triángulo rectilíneo CAA' se tiene:

$$\frac{CA' - CA}{CA' + CA} = \operatorname{tg} \frac{A - A'}{2} \quad (3)$$

El ángulo en A , interior a este triángulo, es igual a $180^\circ - (z + \Delta z)$, y el ángulo en A' , igual a $180^\circ - (z' + \Delta z')$; su suma será:

$$A + A' = 180^\circ - \gamma,$$

y los lados del triángulo son:

$$CA = r + H \quad \text{y} \quad CA' = r + H'.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3),

$$\frac{H' - H}{2r + H + H'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma' + \Delta \gamma' - z - \Delta z)}{\cot \frac{1}{2} \gamma}$$

de donde:

$$H' - H = 2r \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{(\alpha' + \Delta \alpha') - (\alpha + \Delta \alpha)}{2}$$

Pero aquí podemos sustituir $2r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ por a (véase página 122), resultando para el desnivel h entre A y A' el siguiente valor:

$$h = H' - H = a \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \operatorname{tg} \frac{(\alpha' + \Delta \alpha') - (\alpha + \Delta \alpha)}{2} \quad (4)$$

En el mismo triángulo rectilíneo CAA' se verifica:

$$(\alpha + \Delta \alpha) + (\alpha' + \Delta \alpha') = \gamma + 180^\circ \quad (5)$$

Pongamos ahora, como antes hicimos:

$$\Delta \alpha = k \frac{\gamma}{2} \quad \text{y} \quad \Delta \alpha' = k' \frac{\gamma}{2} \quad (6)$$

y sustituyendo estos valores en (5), resulta:

$$\alpha + \alpha' + \frac{\gamma}{2} (k + k') = \gamma + 180^\circ$$

de donde:

$$\frac{k + k'}{2} = 1 - \frac{\alpha + \alpha' - 180^\circ}{\gamma} \quad (7)$$

Las distancias cenitales recíprocas y simultáneas dan, como se ve, el coeficiente medio de refracción de los dos puntos observados.

Sustituyendo en la ecuación (4) el valor de $\alpha' + \Delta \alpha'$ o el de $\alpha + \Delta \alpha$, deducidos de la (5), se obtienen dos nuevas expresiones para h :

$$h = H' - H = a \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \cot \left(\alpha + \Delta \alpha - \frac{\gamma}{2} \right) \quad (8)$$

y

$$h = H - H' = a \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \cot \left(\alpha' + \Delta \alpha' - \frac{\gamma}{2} \right) \quad (9)$$

Si se introduce la hipótesis de $\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon'$, se simplifica la ecuación (4) del modo siguiente:

$$h = H' - H = a \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} \quad (10)$$

Esta fórmula nos dice que cuando se hacen observaciones recíprocas midiendo ε y ε' , se obtiene el desnivel sin conocer la refracción, con tal de suponer (algo gratuitamente) que $\Delta \varepsilon$ y $\Delta \varepsilon'$ son iguales. Pongamos nuevamente:

$$\Delta \alpha = k \frac{\gamma}{2} \quad (11)$$

Sustituyendo este valor en (8), se tiene:

$$h = H' - H = a \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) \cot \left(\alpha - \frac{1-k}{2} \gamma \right) \quad (12)$$

Poniendo en vez de ε su igual $90^\circ - \alpha$, y $r = \frac{a}{\gamma}$, y desarrollando por la regla de Taylor, resulta:

$$\cot \left(\alpha - \frac{1-k}{2} \gamma \right) = \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{1-k}{2} a \right) = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \left(\frac{1-k}{2r} a \right)^2 \dots$$

Este último término es ya despreciable: además, basta con que el factor $\frac{H + H'}{2r}$ afecte al primer término, y la fórmula (12) se convierte en esta otra:

$$h = H' - H = \left(1 + \frac{H + H'}{2r} \right) a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 + \frac{1-k}{2r} a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (13)$$

De este modo tenemos la fórmula aproximada (7) de la página 114 desarrollada y ampliada con más exactitud. El factor de corrección $1 + \frac{H + H'}{2r} = 1 + \frac{H_m}{r}$ para la altura media H_m , puede deducirse logarítmicamente de la tabla auxiliar que se da al final de la II en el Apéndice.

Introduciendo en la fórmula (13) el nuevo símbolo H_m , y sumando sus dos últimos términos, se tiene la fórmula definitiva para el desnivel h :

$$h = H' - H = \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \quad (14)$$

§ 31. Ejemplo

Para detallar y aclarar las operaciones de observación simultánea y recíproca de distancias cenitales, vamos a reseñar, como ejemplo, la medición llevada a cabo por alumnos de la Escuela Superior Técnica de Berlín, el día 3 de julio de 1930. El problema consistía en hallar la altura de un pilar de observación situado en lo alto de la Escuela, que llamaremos A , desde una señal de un vértice topográfico cercano, que llamaremos B . La cota de este punto, determinada por el método indicado en la página 120, resultó ser de 76,490 m.

Para la observación de las distancias cenitales en los dos puntos A y B , se emplearon dos instrumentos iguales, de la forma y tamaño del representado en la figura 320 del tomo I, con lectura del nivel montado sobre el brazo-soporte de los microscopios lectores del círculo vertical, del modo indicado en la página 111.

Como puntos de mira se emplearon dos tablillas circulares blancas y dos heliótropos de Bertram; desde el punto B se pudieron hacer la mitad de las observaciones a la tablilla y la otra mitad al heliótropo; pero desde el punto A sólo pudo mirarse al heliótropo. Desde cada punto se hicieron 48 observaciones, para ambas posiciones del anteojo, igualmente distribuidas.

En las dos estaciones se pudieron medir directamente los desniveles entre el eje de rotación del anteojo, la tablilla de mira y el espejo del heliótropo, y después de reducir todas las mediciones a los ejes de rotación de ambos teodolitos, se obtuvieron los siguientes valores medios para las distancias cenitales, por la mañana y por la tarde:

	Estación B	Estación A
Mañana	$\alpha = 90^\circ 04' 07,1''$	$\alpha' = 89^\circ 59' 39,1''$
Tarde	$\alpha = 90^\circ 04' 01,3''$	$\alpha' = 89^\circ 59' 35,2''$

Para el cálculo subsiguiente había que hallar el radio de curvatura correspondiente a la dirección AB o BA , y la distancia entre los dos puntos; pero las coordenadas geográficas de ambos puntos se conocían, y así se pudieron calcular los dos acimutes y la distancia, con lo cual se calculó el radio de curvatura. De los radios de curvatura hallados para ambos acimutes, se tomó el valor promedio.

El resultado de estos cálculos fué, llamando a a la distancia y r al radio de curvatura:

$$\log a = 3,841370 \quad a = 6940,17 \text{ m}$$

$$\log r = 6,804797.$$

Para calcular el coeficiente medio de refracción $\frac{k+k'}{2}$, se empleó la fórmula (7) de la página 124, empezando para ello por calcular el ángulo en el centro γ , del modo siguiente:

$\log a$	3 841370
$\log (1 : r)$	3.195203
$\log \rho$	5.314425
γ	2.350998

$$\gamma = 224,38'' = 3' 44,38''.$$

El cálculo restante se hizo para los valores de z y z' correspondientes a mañana y tarde, como se ve a continuación:

Mañana		Tarde	
$\bar{\alpha}$	$= 90^\circ 04' 07,1''$	$\bar{\alpha}$	$= 90^\circ 04' 01,3''$
$\bar{\alpha}'$	$= 89^\circ 59' 39,1''$	$\bar{\alpha}'$	$= 89^\circ 59' 35,2''$
<hr/>		<hr/>	
	$180^\circ 03' 46,2''$		$180^\circ 03' 36,5''$
	$- 180^\circ$		$- 180^\circ$
<hr/>		<hr/>	
$\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' - 180^\circ$	$= 3' 46,2''$	$\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' - 180^\circ$	$= 3' 36,5''$
	$= 226,2''$		$= 216,5''$
$\log (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' - 180^\circ)$	2.35449	$\log (\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' - 180^\circ)$	2.33546
$\log \gamma$	2.35100	$\log \gamma$	2.35100
<hr/>		<hr/>	
	0.00349		9.98446
	1,0080		0,9648
$\frac{k+k'}{2}$	$= -0,0080$	$\frac{k+k'}{2}$	$= +0,0352.$

Como se ve, se obtuvieron valores medios muy pequeños para el coeficiente de refracción, pero que variaban bastante de la mañana a la tarde.

Para el cálculo del desnivel, se empleó la fórmula (10) de la página 124, despreciándose el valor de $\frac{H+H'}{2r}$, y operando como sigue:

Mañana		Tarde	
$\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$	$= -0^\circ 04' 28,0''$	$\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$	$= -0^\circ 04' 26,1''$
$\frac{\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}}{2}$	$= -0^\circ 02' 14,0''$	$\frac{\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}}{2}$	$= -0^\circ 02' 13,0''$
$\log \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}}{2}$	6.81268 _n	$\log \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}}{2}$	6.80943 _n
a	3.84137	a	3.84137
<hr/>		<hr/>	
$\log h$	0.65405 _n	$\log h$	0.65080 _n
h	$= -4,509 \text{ m}$	h	$= -4,475 \text{ m}.$

El promedio de ambos resultados fué el siguiente:

$$h = -4,492 \text{ m}.$$

De las observaciones hechas en el punto B resulta la cota del eje de muñones igual a 76,699 m, y la del mismo eje en A igual a 72,207. Y como la altura del teodolito en A era de 0,209 m, se tiene en definitiva:

$$\text{Cota del punto } A = 71,998 \text{ m}.$$

En el mismo día se midieron, desde los puntos A y B , las distancias cenitales de la torre de Radio de Charlottenburgo, que llamaremos C . Los valores medios de 12 mediciones de estas distancias cenitales fueron:

Estación en B		Estación en A	
Mañana	$\bar{\alpha}_1 = 88^\circ 47' 09,6''$	$\bar{\alpha}'_1 = 88^\circ 06' 28,6''$	
Tarde	$\bar{\alpha}_1 = 88^\circ 46' 58,0''$	$\bar{\alpha}'_1 = 88^\circ 06' 23,0''$	

Del cálculo hecho con las coordenadas, análogo al antes indicado, se dedujo:

$\log r_1$	$= 6.804486$	$\log r_1'$	$= 6.805500$
$\log a_1$	$= 3.703235$	$\log a_1'$	$= 3.532700$
a_1	$= 5049,92 \text{ m}$	a_1'	$= 3409,58 \text{ m}.$

Calculando ahora la altura del punto C en función de las cuatro distancias cenitales anteriores, y con los mismos coeficientes medios de refracciones anteriores (2), se tiene:

	Mañana	Tarde	Media
Desde el punto B:	185,730	185,928	185,829
" " A:	185,757	185,812	185,784
Valor promedio de la cota del punto C: 185,806 m.			

Se supone que los coeficientes de refracción k y k' correspondientes a las dos visuales de las dos estaciones son las mismas de antes, y relacionando estas observaciones con las anteriores (pág. 126), se calculan dichos coeficientes k y k' .

En primer lugar se tienen, para las distancias cenitales recíprocas entre los puntos B y A , las dos ecuaciones (2) de la página 126:

Mañana	Tarde
$k + k' = -0,0160$	$k + k' = +0,0704.$

Con los dos coeficientes de refracción k y k' calculamos los cuatro desniveles h aplicando la fórmula (7) de la página 114:

Estación en B		Tarde	
(A) ... $h = -$	$8,314 + 3,7750(1 - k)$	(A) ... $h = -$	$8,119 + 3,7750(1 - k)$
(C) ... $h = +$	$107,015 + 2,0001(1 - k)$	(C) ... $h = +$	$107,300 + 2,0001(1 - k).$

Estación en A		Tarde	
(B) ... $h = +$	$0,703 + 3,7750(1 - k')$	(B) ... $h = +$	$0,834 + 3,7750(1 - k')$
(C) ... $h = +$	$112,634 + 0,9096(1 - k')$	(C) ... $h = +$	$112,726 + 0,9096(1 - k').$

En el triángulo BAC , la suma de los desniveles, por ejemplo en el sentido $B - A - C - B$, ha de ser cero, es decir:

Mañana	Tarde
$- 8,314 + 3,7750(1 - k) +$	$- 8,119 + 3,7750(1 - k) +$
$+ 112,634 + 0,9096(1 - k') -$	$+ 112,726 + 0,9096(1 - k') -$
$- 107,015 - 2,0001(1 - k) = 0$	$- 107,300 - 2,0001(1 - k) = 0$

o sea:

$$-0,010 - 1,7750k - 0,9096k' = 0 \quad -0,008 - 1,7750k - 0,9096k' = 0.$$

Con estas ecuaciones y las dos (7) se calculan ya los valores de k y k' :

Mañana	Tarde
$k = +0,006 \quad k' = -0,02$	$k = -0,083 \quad k' = +0,153.$

Ya se pueden calcular los desniveles h con las ecuaciones (8) y (9); el resultado es el siguiente:

Estación en B	
Mañana	Tarde
(A) ... $h = - 4,562$	$h = - 4,031$
(C) ... $h = + 109,003$	$h = + 109,466$

Estación en A	
Mañana	Tarde
(B) ... $h = + 4,561$	$h = + 4,032$
(C) ... $h = + 113,566$	$h = + 113,497$

y con estos desniveles y la cota 76,699 del punto B se tiene:

	Mañana	Tarde	Promedio	
Cota del eje de giro del anteojo en A.	72,137	72,668	72,402	}
Cota del pilar de observación en A .	71,928	72,459	72,194	
Cota del punto C	185,703	186,165	185,934	

(11)

Una determinación trigonométrica, apoyada en una señal de nivelación de precisión, dió para el pilar de observación de la Escuela Superior (punto A) la cota 72,163. El valor que acabamos de obtener 72,194 es notablemente más exacto que el anterior (5), de la página 126. Esto nos prueba lo fundada que es la hipótesis hecha en la página 127 para la determinación de los coeficientes de refracción k y k' .

Para una mejor comprobación de las distintas hipótesis admitidas, vamos a hallar los verdaderos valores del coeficiente de refracción, para lo cual calcularemos las verdaderas distancias cenitales en función de las cotas conocidas de los dos puntos. Las operaciones se disponen del modo siguiente:

Cota verdadera del eje del anteojo en B	= 76,490	}	
» » » » » A	= 72,163		
Desnivel Δh	= - 4,327		

(12)

Pero en la página 126 se ha visto que

$$\log a = 3.841370 \quad \text{y} \quad \gamma = 224,38''$$

y por ser:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\Delta h}{a} \quad \text{y} \quad \alpha' = 180^\circ - \alpha,$$

se tiene:

$$\alpha = 90^\circ 02' 08,6'' \quad \alpha' = 89^\circ 57' 51,4''.$$

Comparando estos valores con las distancias cenitales observadas (1), se obtienen, por diferencia, los valores de la refracción:

Mañana $\Delta \alpha = - 1' 53,5''$	$\Delta \alpha' = - 1' 47,7''$
Tarde $\Delta \alpha = - 1' 52,7''$	$\Delta \alpha' = - 1' 43,8''$

Pero según se vió en la página 124, fórmula (6),

$$k = \frac{2 \Delta \alpha}{\gamma} \quad k' = \frac{2 \Delta \alpha'}{\gamma}$$

y sustituyendo aquí los valores numéricos de $\Delta \alpha$, $\Delta \alpha'$ y γ resulta:

Mañana $k = - 0,1056$	$k' = - 0,0960$	}	
Tarde $k = - 0,1005$	$k' = - 0,0925$		

(13)

Con estos coeficientes de refracción calculamos nuevamente, con las fórmulas (8) y (9), el desnivel del punto C respecto a los A y B, resultando los valores siguientes:

Estación B	
Mañana (C) ... $h = + 107,015 + 2,211 = 109,226$	
Tarde (C) ... $h = + 107,300 + 2,201 = 109,501$	

Estación A	
Mañana (C) ... $h = + 112,634 + 0,997 = 113,631$	
Tarde (C) ... $h = + 112,726 + 0,994 = 113,720$	

Con los valores verdaderos de las cotas del eje del anteojo en B y en A, se calcula la cota del punto C como sigue:

	Mañana	Tarde		Mañana	Tarde
(B):	76,699	76,699		(A):	72,372
	+ 109,226	+ 109,501			+ 113,631
	185,925	186,200			+ 113,720
	Media: 186,062				186,003
					186,092
					Media: 186,048

Promedio: 186,055. (14)

De estos resultados se deduce que el valor (11) calculado en función de los dos coeficientes de refracción, para la cota del punto C, se aproxima mucho más al valor (14), que debemos considerar como el más probable, que el valor (6) calculado en función del coeficiente medio de refracción.

§ 32. Nivelación trigonométrica en el mar

Aunque la medición de alturas sobre el mar apenas interesa a los trabajos puramente topográficos, damos aquí su teoría completa por la importancia que supone el conocimiento de la misma.

En las observaciones de ángulos verticales astronómicos sobre el mar, desempeña un papel muy importante la depresión del horizonte, es decir, el ángulo de depresión formado por el horizonte sensible (línea de unión entre el agua y el aire) y el horizonte verdadero en el punto de que se trate. Además es también de la mayor importancia el límite de la percepción visual. Ambos factores dependen de la refracción de la luz y de la altura de punto de observación sobre la superficie del mar.

La refracción sobre el mar experimenta grandes variaciones, y las mediciones en grandes extensiones, llevadas a cabo entre 1920 y 1930, han demostrado que estas variaciones se deben, en primer lugar, a la diferencia de temperatura entre el agua y el aire.

Entre el mes de noviembre de 1898 y el de octubre de 1899 efectuaron observaciones delicadas de depresión del horizonte, en Verudella, el conde Thun-Hohenstein y K. Koss, obteniendo para valor de la depresión los resultados resumidos en la siguiente tabla, en que h es la altura del punto de observación sobre la superficie del mar y Δ la diferencia entre la temperatura del aire y la del agua:

h	Diferencia de temperaturas Δ						
	+ 6°	+ 4°	+ 2°	0°	- 2°	- 4°	- 6°
4	1.5'	2.0'	3.0'	3.5'	4.5'	5.0'	6.0'
6	2.5	3.0	4.0	4.5	5.0	6.0	6.5
8	3.0	4.0	4.5	5.0	6.0	6.5	7.5
10	3.5	4.5	5.0	6.0	6.5	7.0	8.0
12	4.0	5.0	5.5	6.5	7.0	8.0	8.5
14	4.5	5.5	6.0	7.0	7.5	8.0	9.0
16	5.0	6.0	6.5	7.0	8.0	8.5	9.5

(1)

Gracias al viento se mantiene el aire casi constantemente bien mezclado; con viento muy flojo puede la depresión del horizonte diferir hasta 9' de su valor normal. Teniendo en cuenta esta posible desviación se han redondeado los valores de la tabla anterior en 0,5. Estas observaciones fueron discutidas ampliamente por E. Kohlschütter.



Fig. 120

Para el cálculo del límite de percepción visual partimos de la fórmula fundamental (7) de la nivelación trigonométrica (pág. 114):

$$h = a \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 \quad (2)$$

Sea AB (fig. 120) la visual desde un punto A , situado a una altura h sobre el mar, al horizonte sensible B ; esta visual es una línea que encuentra al mar en B , con un ángulo de depresión t en A , y que se extiende hasta el límite de percepción visual a . Apliquemos esta ecuación (2) primero a la visual AB y después a una visual hipotética y recíproca, de B hacia A , obteniendo así las dos ecuaciones siguientes:

$$\text{de } A \text{ hacia } B: -h = a \operatorname{tg} (-t) + \frac{1-k}{2r} a^2, \quad (3)$$

$$\text{de } B \text{ hacia } A: +h = a \operatorname{tg} 0^\circ + \frac{1-k}{2r} a^2. \quad (4)$$

De esta última ecuación se deduce el valor del límite de percepción visual:

$$a = \sqrt{\frac{2r}{1-k} h}. \quad (5)$$

Experimentalmente se ha fijado el coeficiente de refracción k entre los límites 0 y 0,25; tomando el radio medio de la Tierra $r = 6370000$ m, y expresando a y h en metros, se hallan los límites entre los cuales se halla comprendido el valor de a :

$$a = 3569,3 \sqrt{h} \quad \text{y} \quad a = 4121,5 \sqrt{h}. \quad (6)$$

Unicamente en casos excepcionales se sobrepasan estos valores.

Para tener una idea general sobre la relación entre h y a , hemos calculado el límite de percepción visual a para el coeficiente medio de refracción $k = 0,13$, con la fórmula $a = 3826,7 \sqrt{h}$, y en el cuadro siguiente pueden verse los valores obtenidos:

Altura h	Distancia a	Altura h	Distancia a	Altura h	Distancia a
0 m	0,0 Km	6 m	9,4 Km	30 m	21,0 Km
1	3,8	7	10,1	40	24,2
2	5,4	8	10,8	50	27,1
3	6,6	9	11,5	100	38,3
4	7,7	10	12,1	500	85,6
5	8,6	20	17,1	1000	121,0

A causa de las variaciones de la refracción puede variar también el límite de percepción visual, o distancia a , según las fórmulas (6), en un 10 % por exceso o por defecto respecto a los valores dados en esta tabla.

La observación de la depresión del horizonte puede también emplearse, conociendo la altura del punto en que se estaciona, para calcular el coeficiente de refracción; en efecto, restando la ecuación (3) de la (4) se obtiene:

$$2h = a \operatorname{tg} t, \quad (7)$$

y sustituyendo aquí el valor de a , dado por la fórmula (5), resulta:

$$1 - k = \frac{r}{2h} \operatorname{tg}^2 t. \quad (8)$$

Se toma la altura h lo más grande posible, por ejemplo en una montaña cercana al mar, cuya cota h se haya determinado previamente por medio de una nivelación cuidadosa, y se mide la depresión del horizonte t .

Todo lo expuesto hasta aquí se refiere a la distancia al horizonte sensible (límite de percepción visual); pero también la medición de ángulos de depresión sobre el mar, conocida que sea la altura del punto de observación, puede servir para determinar distancias sobre el mar, como se hace en Náutica y en los levantamientos de las costas. Sea t (fig. 121), como antes, la depresión del horizonte, es decir, el ángulo de depresión del horizonte sensible, a la distancia a , y T el ángulo de depresión correspondiente a un punto más próximo, también de la superficie del mar, por ejemplo, a la estela de un barco, a distancia s .

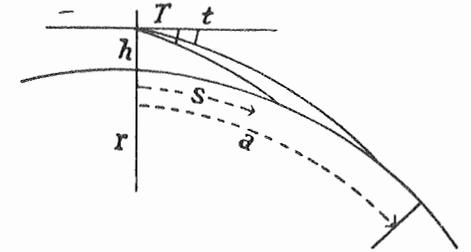


Fig. 121

El ángulo de depresión T satisface también a la ecuación fundamental (2):

$$-h = s \operatorname{tg} (-T) + \frac{1-k}{2r} s^2, \quad (9)$$

y como siempre se trata de un ángulo T muy pequeño, puede ponerse $\operatorname{tg} (-T) = -\frac{T}{\rho}$, y resolviendo la ecuación anterior en T se tiene:

$$T = \frac{h}{s} \rho + \frac{1-k}{2r} \rho s \quad \left(\log \frac{1-k}{2r} \rho = 8,14878 \right). \quad (10)$$

Supongamos, como ejemplo, que $h = 4$ m: a las distancias siguientes s corresponden los ángulos de depresión T que a continuación se consignan:

$s = 1$ Km	2 Km	4 Km	6 Km	7,7 Km
$T = 13' 59''$	$7' 21''$	$4' 23''$	$3' 42''$	$3' 36''$

Si se mide el ángulo de depresión T , se puede calcular la distancia s con la fórmula (10). Para ello basta resolver la ecuación (10) en s , sustituyendo r por su valor medio 6370000 m, y k por el suyo 0,13,

$$s = \frac{r}{\rho} \frac{1}{1-k} \left(T - \sqrt{T^2 - \frac{2h(1-k)\rho^2}{r}} \right) = 35,497 (T - \sqrt{T^2 - 11621 h}). \quad (11)$$

Suponiendo $h = 100$ m resultan para los valores de T que damos en el siguiente cuadro, los correspondientes a s :

T	s	T	s	T	s
$0^\circ 17' 58''$	38266 m	1°	5864 m	11°	520 m
0 20	23885	2	2882	12	477
0 30	12726	5	1147	15	383
1 00	5864	10	573	20	286

Este procedimiento fué aplicado al levantamiento de las costas de Spitzberg en el verano de 1920.

Para el cálculo de las distancias, se hacen las siguientes transformaciones operatorias partiendo de la ecuación (9), que resuelta en s nos da:

$$s = \frac{2hr}{(1-k)} \frac{\operatorname{tg} T}{2h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h^2 \cot^2 T (1-k)}{2hr}} \right) \quad (12)$$

Pongamos en esta fórmula:

$$\frac{2hr}{1-k} = B^2 \quad h \cot T = A \quad (13)$$

y se tendrá:

$$s = \frac{B^2}{2A} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4A^2}{B^2}} \right) \quad (14)$$

Pero por ser $B > 2A$, podemos introducir una nueva variable auxiliar u :

$$\frac{2A}{B} = \operatorname{sen} u, \quad (15)$$

y la ecuación (14) podrá escribirse del modo siguiente:

$$s = \frac{B}{\operatorname{sen} u} (1 - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}) = \frac{B}{\operatorname{sen} u} (1 - \cos u)$$

y mediante una sencilla transformación:

$$s = B \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (16)$$

y sustituyendo aquí B por su igual (15), $B = \frac{2A}{\operatorname{sen} u}$, resulta en definitiva:

$$s = \frac{A}{\cos^2 \frac{u}{2}} \quad (17)$$

Para todas las observaciones desde un mismo punto, B es constante, resultando muy fácil el cálculo de s mediante la aplicación de esta última fórmula.

§ 33. Nivelación trigonométrica en España

En España, al hacer las triangulaciones geodésicas, se leen también las distancias cenitales para calcular las alturas relativas o desniveles de los vértices y después las cotas o altitudes absolutas, partiendo de la de alguno de ellos, precisamente determinada por nivelación de precisión, y cerrando sobre otro también de cota conocida.

En los vértices de los triángulos geodésicos se lee cuatro veces la distancia cenital para cada visual (dos en cada posición del anteojo, pero alternadas); en las observaciones de cadena se hacen doce lecturas de la distancia cenital para cada punto observado, cambiando de cero a cada cuatro lecturas (reiteración); en las observaciones de cuadrilátero se reitera tres veces la doble distancia cenital, resultando seis lecturas para cada visual.

Cuando se observan puntos que no sean vértices (torres, etc.) se hacen doce lecturas.

No se hacen para cada punto observado más que cuatro lecturas seguidas, continuando las restantes después de un cierto tiempo, para que la refracción no sea la misma.

Las distancias cenitales se calculan en función de las lecturas y aplicando una corrección referente a la inclinación de la recta de unión de los ceros de los dos micrómetros.

La fórmula para el cálculo de la distancia cenital, correspondiente a un par de lecturas, es la siguiente:

$$z = \frac{1}{2} (360 + I - D) + y, \quad (1)$$

en la que I es la lectura del círculo vertical con el anteojo a la izquierda, y D la misma con el anteojo a la derecha; y es la corrección de línea de ceros, que está expresada por la fórmula:

$$y = \frac{1}{4} n [(a' + a'') - (a_1 + a_2)], \quad (2)$$

donde n es el valor angular de una división del nivel a' , y a'' las lecturas de los extremos de la burbuja con el anteojo a la izquierda, y a_1, a_2 , las mismas con el anteojo a la derecha. Estas fórmulas suponen que la graduación del limbo cenital es normal, y que la del nivel también crece de izquierda a derecha. Si el limbo fuera anormal, cambiarían los signos de D e I , e igualmente cambian los signos de las lecturas del nivel al cambiar el de su graduación.

Una vez calculadas las distancias cenitales, se reducen a los puntos vértices, empleando para ello la fórmula:

$$a = \frac{(i' - i) \operatorname{sen} z}{a \operatorname{sen} 1''}, \quad (3)$$

donde i' representa la altura del punto de mira sobre el punto-vértice, i la altura del eje horizontal del anteojo (eje de muñones) sobre el punto-vértice estación, a la distancia entre los puntos de estación y de mira, y z el promedio de las distancias cenitales que se quiere reducir.

La fórmula empleada por el Instituto Geográfico y Catastral de España para el cálculo de la diferencia de nivel h entre dos puntos en que se hayan observado las distancias cenitales recíprocas, es exactamente la fórmula anterior a la (4) de la página 124, a saber (empleando la misma notación):

$$h = H' - H = 2r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{1}{2} (\alpha + \Delta \alpha - \alpha' - \Delta \alpha') \cdot \left[1 + \frac{H + H'}{2r} \right]. \quad (4)$$

La fórmula aproximada, despreciando el último factor entre corchetes, por la pequeñez de H y H' en relación con el radio de la Tierra r , y dada la pequeñez del ángulo γ , y suponiendo además iguales las refracciones $\Delta \alpha$ y $\Delta \alpha'$, aun cuando las observaciones no sean simultáneas, es la siguiente:

$$h = H - H' = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \alpha'). \quad (5)$$

Como se ve, esta fórmula sólo se diferencia de la (10) (pág. 124) en que no lleva el factor $1 + \frac{H + H'}{2r}$.

La fórmula empleada por el Instituto Geográfico y Catastral para el cálculo del coeficiente de refracción k , es la que sigue:

$$1 - k = (\alpha + \alpha' - 180) \frac{r}{a \rho} \quad (6)$$

que en realidad es la misma fórmula (7) de la página 124 suponiendo $k = k'$.

La fórmula final para el valor de h , en función también de k , se deduce de las dos anteriores, y es la siguiente:

$$h = H - H' = a \cot \left(\alpha - \frac{a(1-k)\rho}{2r} \right), \quad (7)$$

donde ρ , como siempre, representa el número de segundos de un arco cuya longitud sea igual al radio.

Cuando en vez de suponer la Tierra esférica, quiera tenerse en cuenta el achatamiento, basta sustituir r por el radio de curvatura a la latitud y en la dirección de que se trate.

Si sólo se conoce una de las dos distancias cenitales, por no poderse estacionar más que en un vértice, se deduce el desnivel h por la fórmula (7), empezando por hallar el coeficiente de refracción por la fórmula (6), pero con el radio de curvatura correspondiente a la latitud, y no con el radio medio de la Tierra supuesta esférica; en esta fórmula (6) se sustituyen los valores de a, z, z' de unas cuantas visuales bien cercanas a aquella cuya diferencia de nivel se quiere hallar, y el promedio de todos los valores de $1 - k$ es el que se hace figurar en dicha fórmula (7), poniendo también el correspondiente radio de curvatura en vez de r .

Para todos los detalles operatorios de la nivelación trigonométrica en España, véanse las Instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral, y para la teoría y desarrollo de fórmulas puede consultarse el Tratado de Geodesia y Cartografía del ingeniero geógrafo y general de Estado Mayor don Arturo Mifsut.

En Alemania también se hacen las lecturas cenitales para la nivelación trigonométrica al hacer la triangulación de tercer orden, y para cada punto observado se hacen cuatro lecturas, como se vió en el ejemplo de la página 116.

El cálculo de los desniveles, para las observaciones recíprocas, se hace también suponiendo iguales los coeficientes de refracción, y siguiendo dos métodos: uno, el correspondiente al ejemplo de la página 117, y el otro que consiste en reducir las dos distancias cenitales recíprocas a las alturas del eje de muñones del antejo, aplicando después la fórmula (10) de la página 124.

Con los elementos observados y calculados en la medición de distancias cenitales hay suficiente para hacer la compensación de la red de que se trate, como veremos en los dos párrafos siguientes.

§ 34. Compensación de una red altimétrica por medio de observaciones de condición (con coeficientes correlativos)

Los métodos de compensación de las redes de nivelación trigonométrica son los mismos, en esencia, que para las redes de nivelación por alturas, pero por no resultar las ecuaciones de condición tan sencillas como para estas últimas, no es el mismo su número en ambos casos, como vamos a ver a continuación.

Supongamos que se tenga una red altimétrica con p puntos, entre los cuales se hayan medido h desniveles; de estas mediciones son realmente independientes $p - 1$, que es el número de visuales que parten de un vértice y se dirigen a los $p - 1$ restantes.

Por lo tanto, para que pueda haber compensación, es preciso que el número h de desniveles realmente observados sea mayor que $p - 1$, es decir, que $h > p - 1$.

La diferencia entre h y $p - 1$ representa el número de observaciones superabundantes o de condición, y este mismo número es también el de ecuaciones de condición independientes, que designaremos con r , es decir:

$$\text{Número de ecuaciones de condición: } r = h - p + 1. \quad (1)$$

Después trataremos del peso; vamos ahora a hallar el error medio de h , y para ello tomamos la fórmula (7) de la página 114 que da el valor del desnivel h para una observación simple, a saber:

$$h = a \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{a^2}{2r} - \frac{a^2 k}{2r} \right).$$

De aquí se deduce el error medio m del desnivel h , suponiendo que α sea muy pequeño:

$$m^2 = (a \Delta \alpha)^2 + \left(\frac{a^2 \Delta k}{2r} \right)^2, \quad (2)$$

donde $\Delta \alpha$ es el error medio del ángulo vertical, y Δk el error medio del coeficiente de refracción. El valor de $\Delta \alpha$ lo da el instrumento empleado; supongamos, como antes, que el coeficiente de refracción oscila en general entre los límites 0,0 y 0,25, y tomemos para Δk el valor aproximado $\Delta k = \pm 0,05$. Para obtener un valor numérico de m , supongamos por ejemplo que $\Delta \alpha = \pm 5''$, y tomando $\log r = 6,80489$, tendremos:

$$m = \sqrt{0,0005876 a^2 + 0,00001535 a^4}, \quad (3)$$

donde m está expresado en metros y a en kilómetros.

De esta fórmula resultan los siguientes valores para m en función de los correspondientes de a :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Km
m	0,02	0,05	0,08	0,12	0,16	0,20	0,26	0,32	0,39	0,46 m

Si las distancias cenitales han sido observadas recíprocamente, pero no al mismo tiempo (recíprocas y no simultáneas), hay que dividir los anteriores errores medios por $\sqrt{2}$. Cuando las observaciones son simultáneas se aplica la fórmula (3) tal como se ha escrito, porque en este caso puede suponerse con gran aproximación que el efecto de

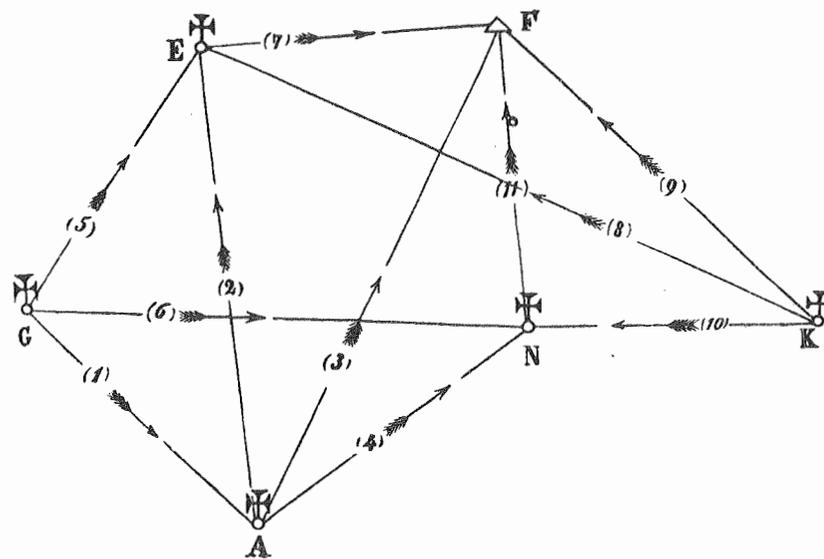


Fig. 122. — Compensación de una red de nivelación trigonométrica (Escala 1 : 125 000)

la refracción es igual en los dos puntos observados. Pero vamos a discutir con más precisión este asunto, porque en la práctica, para redes altimétricas de bastante extensión, no siempre pueden realizarse tales observaciones simultáneas.

Partiendo de la fórmula (2) siempre es posible determinar los pesos de los desniveles medidos, y hecho esto puede procederse a la compensación de la red, por ejemplo de la representada, a escala 1 : 125 000, en la figura 122, donde las flechas indican el sentido del

desnivel. Entre los seis puntos de esta red no se han medido directamente las distancias cenitales, sino que se han hecho el mayor número posible de observaciones de desniveles sobre puntos intermedios, que se refieren a los dos mismos puntos principales de la red y que sirven para calcular los desniveles entre cada par de estos últimos. Al mismo tiempo pueden hallarse los pesos de cada diagonal (línea de unión de dos puntos de la red), calculando con la fórmula (2) el error medio de cada observación.

En la tabla siguiente se tienen las once diagonales de la figura 122, figurando en primer término el desnivel calculado h , el error medio $\pm m$ previamente determinado para cada diagonal, y los correspondientes pesos p ; después figura la corrección v que hay que aplicar a los desniveles en virtud de la compensación, y finalmente los desniveles compensados $h + v$:

Antes de la compensación					Después de la compensación	
Núm.	h	m	m^2	$\frac{1}{p} = (10m)^2$	v	$h + v$
1	$GA = 46,54 \text{ m}$	$\pm 0,17 \text{ m}$	0,0289	2,9	-0,14 m	46,40 m
2	$AE = 8,69$	$\pm 0,13$	0,0169	1,7	-0,23	8,46
3	$AF = 10,65$	$\pm 0,13$	0,0169	1,7	+0,16	10,81
4	$AN = 9,64$	$\pm 0,08$	0,0064	0,6	+0,00	9,64
5	$GE = 54,74$	$\pm 0,42$	0,1764	17,6	+0,12	54,86
6	$GN = 55,68$	$\pm 0,30$	0,0900	9,0	+0,36	56,04
7	$EF = 2,46$	$\pm 0,08$	0,0064	0,6	-0,11	2,35
8	$KE = 31,47$	$\pm 0,21$	0,0441	4,4	-0,21	31,26
9	$KF = 33,75$	$\pm 0,34$	0,1156	11,6	-0,12	33,63
10	$KN = 32,43$	$\pm 0,08$	0,0064	0,6	+0,03	32,46
11	$NF = 1,00$	$\pm 0,13$	0,0169	1,7	+0,16	1,16

Para establecer las ecuaciones de condición, veamos ante todo cuál ha de ser su número. Según la fórmula (1) se tiene:

$$p = 6 \text{ puntos}, \quad h = 11 \text{ diagonales.}$$

luego,

$$r = h - p + 1 = 6 \text{ ecuaciones de condición.}$$

Pueden formarse estas seis ecuaciones de condición de modos distintos, con tal de que ninguna de ellas esté contenida en las demás. Empezando por el triángulo AGN tenemos que debe verificarse la siguiente igualdad: $h_1 + h_4 - h_6 = 0$. Sustituyendo estos desniveles por sus respectivos valores observados, que figuran en el cuadro (5), se tiene:

$$+46,54 \text{ m} + 9,64 \text{ m} - 55,68 \text{ m} = +0,50 \text{ m} = w_1.$$

Para eliminar esta variación de 0,50 m hay que aplicar a los desniveles observados ciertas correcciones v (errores residuales) de modo que se tenga:

$$(46,54 + v_1) + (9,64 + v_2) - (55,68 + v_3) = 0,$$

y de esta igualdad y la anterior resulta:

$$+v_1 + v_2 - v_3 + 0,50 = 0.$$

Esta es la primera ecuación de condición. De modo análogo se obtienen las otras cinco, formándose así el sistema completo de las seis ecuaciones de condición:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } v_1 + v_4 - v_6 + 5,0 \text{ dm} = 0 & \text{d) } v_2 + v_7 - v_3 + 5,0 \text{ dm} = 0 \\ \text{b) } v_1 + v_2 - v_5 + 4,9 = 0 & \text{e) } v_{10} + v_{11} - v_9 - 3,2 = 0 \\ \text{c) } v_4 + v_{11} - v_8 - 0,1 = 0 & \text{f) } v_8 + v_7 - v_9 + 1,8 = 0. \end{array} \quad (6)$$

Para obtener las ecuaciones normales, se forma la siguiente tabla de coeficientes y de inversas de los pesos:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	w
$\frac{1}{p}$	+2,9	+1,7	+1,7	+0,6	+17,6	+9,0	+0,6	+4,4	+11,6	+0,6	+1,7	dm
a	+1	+1	..	-1	+5,0
b	+1	+1	-1	+4,9
c	-1	+1	+1	-0,1
d	..	+1	-1	+1	+5,0
e	-1	+1	+1	-3,2
f	+1	+1	-1	+1,8

Como ya se sabe, basta ahora calcular las constantes: $\left[\frac{aa'}{p}\right] = 2,9 + 0,6 + 9,0 = +12,5$; $\left[\frac{ab}{p}\right] = +2,9$, etc., y ya tendremos las seis ecuaciones normales, que escritas con la notación acostumbrada, son las siguientes:

$$\begin{array}{l} +12,5 k_1 + 2,9 k_2 + 0,6 k_3 \dots \dots \dots + 5,0 = 0 \\ + 2,9 k_1 + 22,2 k_2 \dots + 1,7 k_4 \dots \dots \dots + 4,9 = 0 \\ + 0,6 k_1 \dots + 4,0 k_3 + 1,7 k_4 + 1,7 k_5 \dots \dots - 0,1 = 0 \\ \dots + 1,7 k_2 + 1,7 k_3 + 4,0 k_4 \dots \dots + 0,6 k_6 + 5,0 = 0 \\ \dots \dots + 1,7 k_3 \dots \dots + 13,9 k_5 + 11,6 k_6 - 3,2 = 0 \\ \dots \dots \dots + 0,6 k_4 + 11,6 k_5 + 16,6 k_6 + 1,8 = 0 \end{array}$$

y resolviendo estas ecuaciones en k , se obtiene:

$$k_1 = -0,40, \quad k_2 = -0,07, \quad k_3 = +0,38, \quad k_4 = -1,30, \quad k_5 = +0,59, \quad k_6 = -0,47$$

Las correcciones o errores residuales v se calculan utilizando la tabla (7) del modo siguiente:

$$v_1 = \frac{1}{p_1} (k_1 + k_2) = 2,9 (-0,40 - 0,07) = -1,4 \text{ dm}$$

y de análoga manera se calculan las demás correcciones v , que se consignaron en el cuadro (5), antes de los desniveles compensados $h + v$. Con estos desniveles se calculan las cotas de todos los puntos, y para eliminar la posible discrepancia en la última cifra decimal se aproxima el cálculo sólo a 0,01 m.

Se conoce la cota de uno de los puntos, el F , que es igual a 651,16 m sobre el nivel cero; las demás cotas se determinan, por medio de los desniveles compensados, como se ve en el cuadro siguiente:

F	..	651,16 m	A	..	640,35 m
K	..	617,53	G	..	593,95
N	..	649,99	E	..	648,81

§ 35. Compensación de una red altimétrica por medio de observaciones de enlace

El método de compensación que acabamos de exponer es el más indicado para la mayor parte de las redes altimétricas, a causa principalmente de las comprobaciones de cálculo que proporciona y que permiten calcular todas las cotas sin posibilidad de error.

Pero cuando el número de alturas observadas es muy grande en comparación con el número de puntos, puede resultar ventajosa la compensación por observaciones de enlace, de que vamos a ocuparnos en términos generales (véase página 91).

Supongamos, como en el caso anterior, que se tengan p puntos y h desniveles observados; considerando un punto de partida perfectamente fijo y conocido, tomaremos los $p - 1$ desniveles de los puntos restantes respecto al de partida, como variables o incógnitas independientes; así se tienen los h desniveles observados en función de estas $p - 1$ variables, es decir, se tendrán h ecuaciones con $p - 1$ incógnitas, que por el método de los mínimos cuadrados sirven no sólo para conocer las $p - 1$ variables, sino también para hallar sus pesos correspondientes. El número de ecuaciones normales es aquí igual al número de variables independientes, o sea $p - 1$.

En el método de los coeficientes correlativos estudiado en el párrafo 34, el número de ecuaciones era $h - p + 1$; y como el trabajo más grande en todas las operaciones de estos métodos consiste en la formación y resolución de las ecuaciones normales, hay que ver si $h - p + 1$ es mayor o menor que $p - 1$, o si

Observaciones de condición
 $h < 2(p - 1)$

Observaciones de enlace
 $h > 2(p - 1)$

Cuando el número h de desniveles observados es muy grande, conviene hacer la compensación por el método de las observaciones de enlace, por la ventaja que resulta del menor número de ecuaciones que hay que resolver.

La figura 123 representa un ejemplo de red altimétrica con siete puntos; las flechas indican, como de costumbre, el sentido del desnivel. En este ejemplo veremos que el

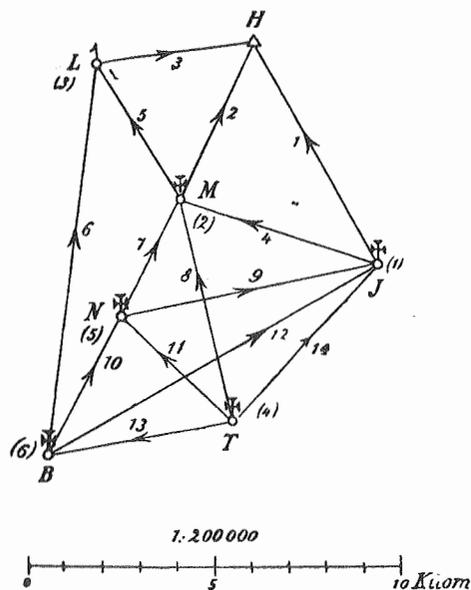


Fig. 123. — Red de triangulación

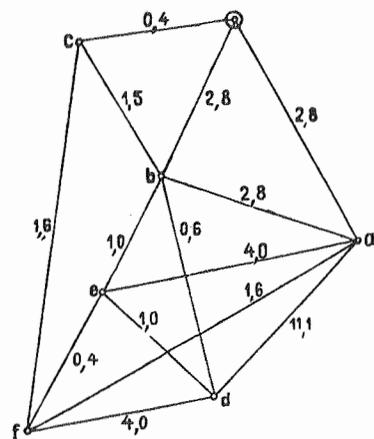


Fig. 124. — Pesos de los desniveles

cálculo se facilita considerablemente consignando en una figura auxiliar (fig. 124) los pesos de las diferentes determinaciones; las letras a, b, c, d, e, f se refieren a las ecuaciones normales (4) y (5).

Todo cuanto sigue puede servir también para compensación de nivelaciones ordinarias, y no sólo de las trigonométricas; la única diferencia consiste en que los itinerarios de

nivelación no se cortan, como sucede en la figura 123, pero prescindiendo de las diagonales 9 y 12, también puede servir la figura 123 como ejemplo de red de nivelación.

El peso de cada una de las diagonales puede determinarse no sólo por nivelaciones ordinarias, sino por nivelaciones trigonométricas, ya que el modo como se deducen los pesos para los efectos de la compensación no tiene apenas relación alguna con la compensación misma; por esta razón en el ejemplo de la figura 123 suponemos dados los pesos de las diagonales, como se hizo en el ejemplo del párrafo 34.

Por tener la red siete puntos, se tienen seis desniveles independientes, que se pueden elegir de modo diferente; en nuestro caso vamos a suponerlos todos referidos al punto principal H , cuya altitud o cota se supone perfectamente conocida e inalterable. Se puede considerar esta cota de partida igual a cero, o darle cualquier otro valor; pero como después hemos de referir todas las altitudes al nivel del mar (o nivel cero), empezaremos el cálculo con la verdadera cota del punto $H = 848,62$ m. Las cotas de los demás puntos, calculadas con los desniveles que figuran en la tabla (2) son aproximadamente (sin compensación) las siguientes:

Punto H	. . .	848,62 m (valor fijo)	} (1)
(1) » J	. . .	785,94 con una corrección x_1	
(2) » M	. . .	798,57 » » » x_2	
(3) » L	. . .	818,88 » » » x_3	
(4) » T	. . .	769,72 » » » x_4	
(5) » N	. . .	786,02 » » » x_5	
(6) » B	. . .	776,06 » » » x_6	

Estas correcciones x_1, x_2, \dots, x_6 deben determinarse mediante la compensación. Distintas de estas correcciones x son las catorce v (errores residuales) v_1, v_2, \dots, v_{14} , que hay que aplicar a los desniveles observados h , como se ve en la tabla siguiente:

Núm.	Antes de la compensación				Después de la compensación	
	Diagonales	Desnivel h	Error medio $\pm m$	Peso $p = \frac{0,01}{m^2}$	v	$h + v$
1	$J - H$	62,68 m	$\pm 0,06$ m	2,8	+ 0,003 m	62,683 m
2	$M - H$	50,05	$\pm 0,06$	2,8	- 0,043	50,007
3	$L - H$	29,74	$\pm 0,15$	0,4	+ 0,253	29,993
4	$J - M$	12,76	$\pm 0,06$	2,8	- 0,084	12,676
5	$M - L$	19,93	$\pm 0,08$	1,5	+ 0,084	20,014
6	$B - L$	42,97	$\pm 0,08$	1,6	- 0,013	42,957
7	$N - M$	12,55	$\pm 0,10$	1,0	+ 0,195	12,745
8	$T - M$	28,85	$\pm 0,13$	0,6	+ 0,086	28,936
9	$N - J$	0,08	$\pm 0,05$	4,0	- 0,011	0,069
10	$B - N$	9,96	$\pm 0,15$	0,4	+ 0,238	10,198
11	$T - N$	16,15	$\pm 0,10$	1,0	+ 0,041	16,191
12	$B - J$	10,41	$\pm 0,08$	1,6	- 0,143	10,267
13	$T - B$	6,03	$\pm 0,05$	4,0	- 0,037	5,993
14	$T - J$	16,25	$\pm 0,03$	11,1	+ 0,010	16,260

Los catorce valores de v hay que expresarlos en función de los seis valores de x , formándose así las catorce ecuaciones de errores para los catorce valores observados de h . Tomemos, por ejemplo, el último valor $h_{14} = 16,25$ m y comparémoslo con el valor aproximado de las cotas de los puntos a que se refiere (fig. 123):

Entre el índice de refracción n de un gas y su densidad θ existe la siguiente relación:

$$n^2 - 1 = c \theta, \quad (2)$$

donde $n^2 - 1$ es el llamado poder refringente del gas, y c una constante. Aplicando esta ley a los valores n y n' se tiene:

$$\frac{n^2}{n'^2} = \frac{1 + c \theta}{1 + c \theta'} = 1 + c(\theta - \theta') + \dots = 1 - c(\theta' - \theta) + \dots$$

o sea, con mucha aproximación:

$$\frac{n}{n'} = 1 - \frac{c}{2}(\theta' - \theta).$$

Sustituyendo este valor en (1) resulta:

$$\frac{\text{sen } \varphi'}{\text{sen } \varphi} = 1 - \frac{c}{2}(\theta' - \theta), \quad \text{o sea} \quad \frac{\text{sen } \varphi' - \text{sen } \varphi}{\text{sen } \varphi} = -\frac{c}{2}(\theta' - \theta). \quad (3)$$

Ahora bien, introduciendo aquí el concepto de diferencial tenemos:

$$\text{sen } \varphi' - \text{sen } \varphi = (\varphi' - \varphi) \cos \varphi = d\varphi \cos \varphi \quad \text{y} \quad \theta' - \theta = d\theta;$$

es decir, sustituyendo en (3):

$$\frac{d\varphi \cos \varphi}{\text{sen } \varphi} = -\frac{c}{2} d\theta, \quad d\varphi = -\frac{c}{2} \theta \frac{d\theta}{\theta} \text{tg } \varphi. \quad (4)$$

La densidad θ del aire se determina, para una altura barométrica B y una temperatura t , con la ley de Mariotte-Gay-Lussac (de la cual trataremos con más extensión en el párrafo 41), siendo $\alpha = 0,003665$:

$$\theta = \theta_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \alpha t}, \quad \text{o sea} \quad \frac{c}{2} \theta = \frac{c}{2} \theta_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \alpha t}. \quad (5)$$

El coeficiente $\frac{c}{2} \theta_0$ es la constante de refracción, que llamaremos c_0 ; esta constante es, según Bessel, para $B = 760$ y $t = 0^\circ$:

$$\frac{c}{2} \theta_0 = c_0 = 0,00029269, \quad \text{o bien} \quad c_0 \rho = c_0 206265'' = c_0'' = 60,371''. \quad (6)$$

Esta constante c_0 , era designada con α por Bessel; este símbolo α lo empleamos aquí como se hace de ordinario, para representar el coeficiente de dilatación del aire, que es $\alpha = 0,003665 = 1 : 272,851$.

De las fórmulas (4), (5) y (6) se deduce la siguiente:

$$d\varphi = -c_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} \frac{d\theta}{\theta} \text{tg } \varphi. \quad (7)$$

Pero según se ve en la figura 126,

$$d\alpha = dh \text{tg } \varphi; \quad (8)$$

luego,

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -c_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dh}. \quad (9)$$

Ahora bien, $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ es aproximadamente la inversa del radio de curvatura R del rayo luminoso, y si llamamos r al radio de la Tierra, y el cociente $r : R$ se designa, como se acostumbra en estos cálculos, por κ , tendremos:

$$\kappa = r \frac{d\varphi}{d\alpha} \quad (9a)$$

o bien

$$\kappa = -c_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} \frac{r}{\theta} \frac{d\theta}{dh}. \quad (10)$$

Para el trozo infinitamente pequeño BB' del rayo luminoso, κ es, como se ve, el índice de refracción.

Para obtener el valor de $d\theta$, se diferencia la función (5):

$$d\theta = dB \frac{\theta_0}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} - \theta_0 \frac{B}{760} \frac{\alpha dt}{(1 + \alpha t)^2}$$

de donde:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dB}{B} - \frac{\alpha}{1 + \alpha t} dt.$$

Sustituyendo esta expresión en (10) se tiene:

$$\kappa = -c_0 \frac{B}{760} \frac{r}{1 + \alpha t} \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dh} - \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \frac{dt}{dh} \right). \quad (11)$$

Aquí es necesario hacer uso de la fórmula fundamental de la nivelación barométrica [fórmula (19) del párrafo 41], a saber:

$$h = K \log \frac{B_0}{B} (1 + \alpha t)$$

donde B_0 es la altura barométrica en un punto situado por debajo de aquel en que la presión es B , y $K = 18464$ es la constante barométrica para Europa central.

Diferenciando esta ecuación se tiene:

$$\frac{dh}{dB} = -\frac{\mu K}{B} (1 + \alpha t). \quad (12)$$

En la fórmula (11), el cociente $dt : dh$ es la variación de temperatura con la altura, que llamaremos $-\tau$; es decir, que $+\tau$ es la disminución de temperatura del aire para un aumento de altura de 1 m, o sea:

$$-\frac{dt}{dh} = \tau \quad (13)$$

y sustituyendo los valores (12) y (13) en (11) se tiene:

$$\kappa = c_0 \frac{B}{760} \frac{r}{1 + \alpha t} \left(\frac{1}{\mu K (1 + \alpha t)} - \frac{\tau \alpha}{1 + \alpha t} \right) \quad (14)$$

o también:

$$\kappa = c_0 \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \frac{r}{\mu K} (1 - \mu K \alpha \tau). \quad (15)$$

Poniendo aquí en vez de las constantes sus valores numéricos, a saber: $c_0 = 0,00029269$, $\alpha = 0,003665$, $r = 6370000$, $K = 18464$ y $\mu = 0,43429$, resulta:

$$\kappa = 0,2325 \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} (1 - 29,39 \tau). \quad (16)$$

Esta expresión de κ da el índice de refracción diferencial, es decir, el índice de refracción en el punto del rayo curvo luminoso, en que la altura barométrica es B , la temperatura t y la variación térmica τ . Si el aire estuviera uniformemente caldeado, de modo que no hubiera variación de temperatura hacia arriba ni hacia abajo, τ sería cero, y el correspondiente índice de refracción, que llamaremos κ_0 , sería:

$$\kappa_0 = 0,2325 \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \alpha t)^2} \quad \text{y} \quad \kappa = \kappa_0 (1 - 29,39 \tau). \quad (17)$$

Al aumentar la altura disminuye la presión barométrica B ; también debe disminuir κ ; sin embargo, al aumentar la altura disminuye en general la temperatura del aire t , lo cual da lugar a un aumento para κ ; de modo que no puede decirse cómo se comporta κ a mayores o menores alturas. En las grandes alturas predomina, en general, la disminución de B , y en el límite superior de la atmósfera, será $\kappa = 0$, como claramente se comprende aun prescindiendo del anterior razonamiento.

Para las latitudes medias de Europa, la temperatura media del aire en verano es de $t = 15^\circ$, que para $B = 750$ da $\kappa_0 = 0,20$ y para $\tau = +0,01$ resulta $\kappa = 0,14$. En el párrafo 27 (página 115) vimos que de las observaciones efectuadas en las mediciones geodésicas, resulta un valor medio para el coeficiente de refracción k (que es el mismo índice de refracción κ) igual a 0,13; luego podemos, siguiendo un razonamiento inverso, afirmar que para dichas latitudes, a una altura barométrica $B = 750$ mm y una temperatura $t = 15^\circ$, la temperatura disminuye verticalmente de abajo hacia arriba en $\tau = 0,01^\circ$ por metro, valor que coincide aproximadamente con el determinado por observación directa, como veremos en el párrafo 39.

El valor de κ dado por la fórmula (16) sólo es aplicable desde el punto de vista diferencial, es decir, para un segmento infinitamente pequeño del rayo luminoso, y sólo podrá aplicarse dicha fórmula y la (17), así como las tablas que con las mismas pueden formarse, a arcos geodésicos infinitamente pequeños. Supongamos ahora que B , t y τ se representan como funciones de tercer grado de la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 (figura 127), y vamos a hallar las fórmulas para el cálculo de los ángulos de refracción Δ_1 y Δ_2 .

Tomemos para ello un sistema de coordenadas rectangulares con el origen en P_1 ; el eje positivo de las x lo suponemos en la dirección $P_1 P_2$ y el de las y hacia arriba.

La ecuación del rayo luminoso curvo entre P_1 y P_2 , con coeficientes indeterminados, será:

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad (18)$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 \quad (19)$$

y derivando nuevamente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\beta + 6\gamma x = \frac{1}{R} = \frac{\kappa}{r} \quad (19a)$$

donde R es el radio de curvatura del rayo y r el radio de la Tierra.

Aplicando las fórmulas (18) y (19) al punto origen P_1 y al extremo P_2 , se tiene, por ser $P_1 P_2 = a'$ (y también, con sobrada aproximación para este cálculo, igual a la distancia horizontal a entre los puntos P_1 y P_2):

Punto origen P_1	Punto extremo P_2
$x = 0$	$x = a$
$0 = 0$	$0 = \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3$
$\Delta_1 = \alpha$	$-\Delta_2 = \alpha + 2\beta a + 3\gamma a^2$

Con estas tres últimas ecuaciones se pueden ya calcular los coeficientes, antes indeterminados, α , β , γ , resultando para los mismos los siguientes valores:

$$\alpha = \Delta_1, \quad \beta = -\frac{2\Delta_1 - \Delta_2}{a}, \quad \gamma = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{a^2} \quad (20)$$

Sustituyendo los valores de β y γ en la fórmula (19a) se tienen para $x = 0$ y después para $x = a$, las dos ecuaciones que siguen:

$$\frac{\kappa_1}{r} = -2 \frac{2\Delta_1 - \Delta_2}{a}, \quad \frac{\kappa_2}{r} = 2 \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{a} \quad (21)$$

y teniendo en cuenta que el ángulo en el centro C es igual a $\frac{a}{r}$, se tiene, prescindiendo de los signos, es decir, tomando los valores absolutos de Δ_1 y Δ_2 , tales como se ven en la figura 127:

$$\kappa_1 = 2 \frac{2\Delta_1 - \Delta_2}{C}, \quad \kappa_2 = 2 \frac{2\Delta_2 - \Delta_1}{C} \quad (22)$$

Pero también sabemos, llamando k_1 y k_2 a los coeficientes de refracción en P_1 y P_2 , que

$$\Delta_1 = k_1 \frac{C}{2} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = k_2 \frac{C}{2} \quad (23)$$

y sustituyendo estos valores en las ecuaciones (22) y despejando k_1 y k_2 resulta:

$$k_1 = \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3}, \quad k_2 = \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \quad (24)$$

de donde:

$$\kappa_1 = 2k_1 - k_2, \quad \kappa_2 = 2k_2 - k_1 \quad (25)$$

Para ver la marcha general del cálculo, tomemos el caso más sencillo, que es aquel en que habiendo determinado en dos estaciones la altura barométrica y la temperatura del aire, se suponga que la disminución de temperatura se verifica uniformemente de abajo hacia arriba en todo el desnivel h entre ambas estaciones, teniéndose así para τ el valor $\tau = \frac{t_1 - t_2}{h}$ tomando un valor suficientemente aproximado de h . Con este valor de τ y los de B_1 y t_1 se calcula el de κ_1 aplicando la fórmula (16), y con esta misma fórmula se calcula el valor de κ_2 en función de los de τ , B_2 y t_2 ; una vez conocidos los valores de κ_1 y κ_2 se hallan los de k_1 y k_2 , mediante las fórmulas (24), y finalmente los de Δ_1 y Δ_2 , con las fórmulas (23).

Cuando acerca de la variación de temperatura con la altura sólo se sepa que en el punto inferior es t_1 y en el superior t_2 , puede tomarse para τ el valor anterior $\tau = (t_1 - t_2) : h$. Pero si se tienen otros datos sobre la marcha de la temperatura, o si sólo quieren hacerse hipótesis sobre la misma, se introducen en la ecuación (16) los correspondientes valores de τ_1 y τ_2 .

§ 37. Resultados teóricos y experimentales de la refracción

Vamos a utilizar para hacer esta comparación de resultados, las observaciones de refracción llevadas a cabo en 1877-1885 bajo la dirección de Bauernfeind, en los Alpes bávaros, de tal modo hechas que entre tres puntos unidos por una red de nivelación de precisión, se midieron distancias cenitales simultáneas y recíprocas en varias series seguidas.

De estas mediciones sólo vamos aquí a considerar las correspondientes a los dos puntos Höhensteig y Kampenwand, y consignaremos en primer lugar los datos puramente geodésicos, como son:

En esta tabla se ve que en la estación inferior se mantiene todo el día el aumento de temperatura hacia arriba (τ negativo) y únicamente hacia mediodía, cuando el calor es mayor, entre las 11 y las 3 de la tarde, se observa una disminución de temperatura.

Al valor de τ correspondiente a 100 m de altura se llama *gradiente termométrico*.

Una investigación análoga a la anterior (empleando estas fórmulas para el cálculo) fué la llevada a cabo por Reina en Roma, en 1895.

En Alemania, las investigaciones actuales de esta clase están a cargo del Instituto Geodésico.

§ 38. Desarrollo en serie del coeficiente de refracción

Para muchas aplicaciones resulta ventajoso desarrollar en serie el coeficiente de refracción k , en función de κ y de sus derivadas respecto al desnivel h , por lo cual quedan indeterminados los valores de éstas y los de κ .

Empecemos por expresar H_2 (cota del punto P_2) en función de H_1 (fig. 127), por la regla de Taylor:

$$H_2 = H_1 + \left(\frac{dh}{dC}\right)_1 C + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dC^2}\right)_1 C^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3h}{dC^3}\right)_1 C^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4h}{dC^4}\right)_1 C^4 + \dots \quad (1)$$

Las derivadas que figuran en esta serie se refieren al punto P_1 . Llamando a_1 a la distancia entre los puntos P_1 y P_2 , H_1 a la altura, y r_1 al radio de la Tierra en P_1 , se tiene:

$$H_2 = H_1 + \left(\frac{dh}{dC}\right)_1 \frac{a_1}{r_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dC^2}\right)_1 \frac{a_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3h}{dC^3}\right)_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4h}{dC^4}\right)_1 \frac{a_1^4}{r_1^4} + \dots \quad (2)$$

Para hallar el valor de estas derivadas, partamos de la ecuación diferencial (8) de la página 142:

$$\frac{dh}{da} = \cot \varphi$$

y poniendo aquí $da = r dC$ se tiene:

$$\frac{dh}{dC} = r \cot \varphi = r \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Derivando en C se tendrá:

$$\frac{d^2h}{dC^2} = \cot \varphi \frac{dr}{dC} - \frac{r}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dC}$$

y puesto que

$$\frac{dr}{dC} = \frac{dh}{dC} = r \cot \varphi$$

resulta para expresión de la segunda derivada:

$$\frac{d^2h}{dC^2} = r \cot^2 \varphi - \frac{r}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dC}. \quad (4)$$

La diferencial $d\varphi$ tiene aquí distinto significado que en el párrafo 36; en el caso actual, como se ve en la figura 128, $d\varphi = \varphi' - \varphi$; según la fórmula (9a) de la página 142, se tiene:

$$\varphi' - \varphi_1 = \kappa \frac{da}{r}$$

y según la figura 128:

$$\varphi_1 - \varphi = -dC,$$

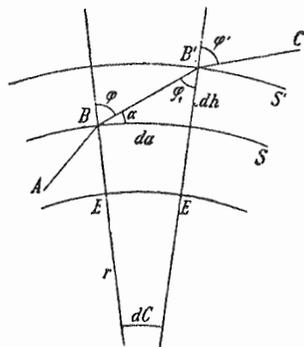


Fig. 128

luego

$$\varphi' - \varphi = \kappa \frac{da}{r} - dC = dC(\kappa - 1), \quad (5)$$

sustituyendo este valor de $d\varphi$ en la fórmula (4) se tiene:

$$\frac{d^2h}{dC^2} = r \cot^2 \varphi + \frac{r}{\operatorname{sen}^2 \varphi} (1 - \kappa). \quad (6)$$

En las derivadas de orden superior despreciaremos todos los términos que en la serie (2) den términos de orden $\frac{1}{r_1^2}$ o superior a éste. Es decir, que para la tercera derivada tomaremos el siguiente valor:

$$\frac{d^3h}{dC^3} = -\frac{r}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{d\kappa}{dh} \frac{dh}{dC}$$

y sustituyendo aquí el valor (3) de $\frac{dh}{dC}$, y llamando κ' a la primera derivada $\frac{d\kappa}{dh}$, resulta:

$$\frac{d^3h}{dC^3} = -\frac{r^2 \cot \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \kappa'. \quad (7)$$

La cuarta derivada será:

$$\frac{d^4h}{dC^4} = -\frac{r^3 \cot^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \kappa'', \quad (8)$$

donde $\kappa'' = \frac{d^2\kappa}{dh^2}$.

Llevando todos estos valores a la serie (2) y poniendo $\varphi = 90^\circ - \alpha$ se tiene:

$$H_2 - H_1 = h = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{2 r_1} + \frac{a_1^2 (1 - \kappa_1)}{2 r_1 \cos^2 \alpha_1} - \frac{a_1^3 \operatorname{tg} \alpha_1}{6 r_1 \cos^2 \alpha_1} \kappa_1' - \frac{a_1^4 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{24 r_1 \cos^2 \alpha_1} \kappa_1'' + \dots \quad (9)$$

o también:

$$h = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{2} C + \frac{a_1 (1 - \kappa_1)}{2 \cos^2 \alpha_1} C - \frac{a_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 \kappa_1'}{6 \cos^2 \alpha_1} C - \frac{a_1^3 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \kappa_1''}{24 \cos^2 \alpha_1} C + \dots \quad (10)$$

Tomemos ahora la ecuación (14) de la página 125, en la cual pondremos a_m en vez de $a \left(1 + \frac{H_m}{r}\right)$; es decir:

$$h = a_m \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a (1 - k_1)}{2 \cos^2 \alpha_1} C, \quad (11)$$

donde a_m se refiere a la cota media. Ahora bien:

$$a_m = a_1 \left(1 + \frac{h}{2 r_1}\right) = a_1 + \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 C,$$

y sustituyendo este valor en (11), tendremos:

$$h = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{2} C + \frac{a_1 (1 - k_1)}{2 \cos^2 \alpha_1} C. \quad (12)$$

En el último término no es necesario distinguir a de a_1 ni de a_m .

Comparando las dos expresiones (10) y (12) se obtiene el siguiente valor para k_1 :

$$k_1 = \kappa_1 + \frac{h}{3} \kappa_1' + \frac{h^2}{12} \kappa_1'' + \dots \quad (13)$$

Este desarrollo en serie nos proporciona también el modo de determinar el error que se comete en los desniveles obtenidos por distancias cenitales recíprocas y simultáneas, al suponer iguales los dos coeficientes de refracción.

En efecto, según la ecuación (13), se tiene para k_1 y k_2 :

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \kappa_1 + \frac{h}{3} \kappa_1' + \frac{h^2}{12} \kappa_1'' + \dots \\ k_2 &= \kappa_2 - \frac{h}{3} \kappa_2' + \frac{h^2}{12} \kappa_2'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Pero según la serie de Taylor, se tiene:

$$\kappa_2 = \kappa_1 + h \kappa_1' + \frac{h^2}{2} \kappa_1'' + \dots \quad (15)$$

y las derivadas primera y segunda serán:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2' &= \kappa_1' + h \kappa_1'' + \dots \\ \kappa_2'' &= \kappa_1'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Sustituyendo estos valores en (14) resulta:

$$k_2 = \kappa_1 + \frac{2}{3} h \kappa_1' + \frac{1}{4} h^2 \kappa_1'' + \dots \quad (17)$$

Tomemos ahora la ecuación (4) de la página 124, que escribiremos en la forma siguiente:

$$h = a \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r} \right) \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} + a \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r} \right) \frac{1}{\cos^2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}} \frac{\Delta \xi_2 - \Delta \xi_1}{2}$$

Para simplificar pongamos nuevamente:

$$a \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r} \right) = a_m \quad (18)$$

y como según las fórmulas (6) de la página 124,

$$\Delta \xi_2 - \Delta \xi_1 = \frac{\gamma}{2} (k_2 - k_1) = \frac{a}{2r} (k_2 - k_1) \quad (19)$$

se tiene, sustituyendo en la anterior expresión de h ,

$$h = a_m \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} + \frac{a_m^2}{4r \cos^2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}} (k_2 - k_1) \quad (20)$$

El valor de $k_2 - k_1$ se obtiene restando la primera de las ecuaciones (14) de la ecuación (17), y sustituido en 20 nos da para valor definitivo de h :

$$h = a_m \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} + \frac{a_m^2 h}{12r \cos^2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}} \left(\kappa_1' + \frac{h}{2} \kappa_1'' \right) \quad (21)$$

donde se ha sustituido $a_m a$ por a_m^2 .

En el método de observaciones simultáneas y recíprocas de distancias cenitales, sólo se emplea ordinariamente el primer término de la fórmula (21). El segundo término da, por consiguiente, el error buscado.

Cuando se observan las distancias cenitales recíprocas y simultáneas entre más de dos puntos, se forman las ecuaciones anteriores para determinar los valores de κ , κ' , κ'' , etc.

Ahora bien, como la fórmula (7) de la página 124 nos da el coeficiente medio de refracción $\frac{k_1 + k_2}{2}$, deducido de observaciones simultáneas y recíprocas, y como, por otra parte, de las fórmulas (14) y (17) se deduce que:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \kappa_1 + \frac{1}{2} h \kappa_1' + \frac{1}{6} h^2 \kappa_1'' \quad (22)$$

resulta que ya se tiene una ecuación en κ , κ_1' , κ_1'' ; aplicando la misma ecuación (22) a otras visuales simultáneas y expresando los coeficientes de refracción en función de κ_1 , κ_1' , κ_1'' mediante las fórmulas (15) y (16) se obtienen otras ecuaciones con estas mismas variables, que permiten resolver el sistema así formado.

§ 39. Variación periódica diurna de la refracción

Ya hemos visto que la refracción presenta una marcha diaria bien marcada, con un valor mínimo hacia mediodía.

Los primeros datos sobre esta materia se encuentran en una Memoria de Tralles, publicada por la Real Academia de Ciencias de Berlín en el año 1804, como resultado de sus estudios sobre la refracción atmosférica realizados en los años 1792 a 1804.

El general Baeyer, en el año 1840, hizo análogos estudios en su nivelación entre Swinemünde y Berlín, encontrando que el coeficiente de refracción es proporcional al semiarco diurno, $k = 0,2132 t$, donde t es la hora expresada en función de partes del semicírculo horario o diurno. Es decir, que para la salida y la puesta del Sol se tenía $k = 0,2132$, y a mediodía verdadero $k = 0$, lo cual significa que a mediodía verdadero se verificaba un cambio (retroceso) en la marcha de k , cosa imposible. Esta ley sólo tiene valor o aplicación en aquellas horas del día en que t está comprendido entre 0,34 y 0,85.

Después, en 1849, al hacer el general Baeyer la nivelación trigonométrica entre Berlín y Harz, pudo determinar la marcha continuada de la refracción, con un mínimo al mediodía. Bien es verdad que el general Baeyer no determinó realmente la refracción, pues por no haber nivelado las estaciones, no pudo calcular las distancias cenitales verdaderas; pero por lo menos determinó las variaciones de la refracción.

La primera referencia metódica entre cotas niveladas trigonométrica y barométrica fué hecha en 1877-1885 por Bauernfeind, con series de observaciones seguidas día y noche, obteniendo también una variación periódica de la refracción, con un mínimo hacia el mediodía, como se ve en las tablas que hemos dado en las páginas 146 y 147; y por ser conocidas, en este caso, las cotas de los puntos observados, se pudieron calcular los ángulos verdaderos de refracción. Sin embargo, la teoría de Bauernfeind no representa la variación periódica diaria de la refracción, porque el elemento fundamental en dicha teoría, que es la variación de temperatura con la altura, no fué expresado con toda la exactitud requerida.

Después de esta breve reseña histórica, volvamos a las observaciones de Baeyer en la nivelación Swinemünde-Berlín. Hemos hecho la compensación gráfica de aquellas observaciones, habiendo obtenido los siguientes valores medios, donde t representa el tiempo, expresado en partes del semicírculo diurno (por la mañana t es negativo, y por la tarde positivo):

	Mañana					Tarde					
$t =$	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	+0,2	+0,4	+0,6	+0,8	+1,0
$k =$	0,20	0,16	0,13	0,11	0,09	0,08	0,08	0,10	0,13	0,16	0,21

Siguiendo este camino, iniciado por nosotros, obtuvo el mayor Hartl los siguientes valores medios (sin distinción de mañana y tarde):

	Mediodía								Mañana o tarde		
$t =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k =$	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,13	0,13	0,15	0,16	0,17	0,19

Quando se pregunta por el motivo de estas variaciones periódicas de la refracción en el transcurso del día, no puede contestarse sino diciendo que la causa estriba en la variación de la temperatura con la altura (gradiente termométrico), es decir, en el factor τ de la fórmula (16) de la página 143, pues las variaciones de los demás elementos, presión y temperatura no explican, ni justifican por sí solas, la gran variación de k .

El gradiente termométrico en Alemania, deducido de las observaciones meteorológicas, tiene los siguientes valores medios, según Hann:

Disminución de temperatura para una diferencia de altura de 100 m (Gradiente termométrico)

Mes	Alpes occidentales	Sajonia del Norte	Alb de Suavia	Erzgebirge (Sajonia)	Harz	Media
Enero	0,45°	0,28°	0,21°	0,37°	0,33°	0,33°
Julio	0,67	0,64	0,57	0,68	0,71	0,65
Media anual	0,58°	0,51°	0,44°	0,59°	0,57°	0,54°

En 1880 publicamos un trabajo meteorológico, referente a 40 estaciones de Baden y Württemberg, sobre el gradiente termométrico; las alturas de estas estaciones oscilaban entre 114 m y 1012 m sobre el nivel del mar, y las latitudes geográficas φ estaban comprendidas entre 47° 41' y 49° 46'. De los promedios anuales de t correspondientes a los diez años 1869-1878, hallamos para 100 m de desnivel un descenso de temperatura de 0,88°.

Según «Meteorologische Zeitschrift», 1888, el gradiente termométrico en el Himalaya, en la parte baja, es de 0,56°, y cada vez menor hacia arriba, hasta llegar a 0,45° a los 3600 m de altura.

Según Sprung (Tratado de Meteorología, 1885), las observaciones hechas por Hann con globos sondas pueden resumirse en las siguientes fórmulas:

$$t = t_0 - 0,0076413 h + 0,0000004314 h^2 \text{ (verano)}$$

$$t = t_0 - 0,0062218 h + 0,0000002737 h^2 \text{ (invierno)}$$

donde t_0 es la temperatura del aire en el suelo, y t a una altura de h metros sobre este último. En promedio:

$$t = t_0 - 0,6931 \frac{h}{100} + 0,003526 \left(\frac{h}{100}\right)^2,$$

o bien

$$100 \frac{dt}{dh} = -0,6931 + 0,007052 \left(\frac{h}{100}\right).$$

Distinto efecto de la refracción según la distancia. Después de haber hallado teórica y prácticamente que el coeficiente de refracción tiene por valor medio $k = 0,13$ y que puede variar entre $k = 0,10$ y $k = 0,20$ en un día, hemos calculado la siguiente tabla para dar una idea del efecto que producen tales variaciones de k en el cálculo de desniveles para distancias no muy grandes; esta tabla corresponde a la fórmula (7) de la página 114:

Valor de $\frac{1-k}{2r} a^2$ para distintos valores de k (con $\log r = 6,80489$, para $\varphi = 50^\circ$)

$a =$	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m	6000 m	8000 m	10000 m
$k = 0$	0,08 m	0,31 m	0,71 m	1,25 m	1,96 m	2,82 m	5,01 m	7,83 m
$k = 0,10$	0,07	0,28	0,63	1,13	1,76	2,54	4,51	7,05
$k = 0,13$	0,07	0,27	0,61	1,09	1,70	2,45	4,36	6,82
$k = 0,16$	0,07	0,26	0,59	1,05	1,65	2,37	4,21	6,58
$k = 0,20$	0,06	0,25	0,56	1,00	1,57	2,26	4,01	6,27

§ 40. Bibliografía y literatura sobre nivelaciones trigonométricas y sobre refracción

A continuación damos una lista, por orden cronológico, de tratados, artículos, memorias, etc., sobre estas materias.

1736-1737. *Medición del grado en Laponia.* «Astr. Nachr.». Tomo 6 (1528), pág. 22: de todas las observaciones altimétricas recíprocas hechas por MAUPERTUIS, resulta el coeficiente de refracción $k = 0,1053$ (véase § 27, pág. 115).

1751. TOBIAS MAYER. «*De refractionibus objectorum terrestrium, etc.*», Göttingen, 1751. De la obra francesa «*La méridienne vérifiée*», resulta de las cuatro distancias cenitales recíprocas observadas, el coeficiente de refracción $k = \frac{1}{8}$ (véase § 27, pág. 115).

1805. LAPLACE. «*Traité de mécanique céleste*», tomo IV. París, 1805. Libro X, cap. I. Refracciones astronómicas. Ecuación diferencial del movimiento de la luz, pág. 246.

1805. ZACH. «*Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*». Tomo 11, Gotha, 1805, págs. 389-415 y 485-504. Determinación experimental de la refracción terrestre (empleada por Bohnenberger en «*De computandis, etc.*»).

1807. DELAMBRE. «*Base du système métrique décimale*». Tomo II, 1807. Valor medio, deducido de 189 observaciones; $k = 0,16776$; máximo $k = 0,5954$, mínimo $k = -0,0070$. Para el verano, 0,15862; para el invierno, 0,19486 (véase § 27, pág. 115).

1826. GAUSS. «*Berliner astronomisches Jahrbuch für 1826*», pág. 91. Determinación de la refracción en la medición del grado, en Hannover. 28 determinaciones. Las distancias estaban comprendidas entre los 46' 7" y los 2' 42" de ángulo en el centro (85 Km y 5 Km); el valor medio de todas las determinaciones respecto a la longitud de las líneas, es $k = 0,1306$ (véase § 27, pág. 115).

1831. STRUVE. Descripción de las operaciones de medición del grado de latitud, organizada por la Universidad de Dorpat y verificada en las provincias rusas del Báltico, en los años 1821 a 1831 por F. G. W. STRUVE, director del Observatorio de Dorpat. «Astr. Nachr.». Tomo 7 (1829), pág. 394. Valor medio de $k = 0,1237$ (véase pág. 115).

1837. FUSS, SAWITSCH y SABLER. Determinación del desnivel entre el mar Negro y el mar Caspio. Fórmula empírica:

$$k = 0,1448 \left(1 + \frac{1,79}{A}\right) \frac{B}{736,6} 1,012^{20-T}$$

donde A es la altura media de la visual sobre el suelo; B la presión barométrica en milímetros y T la temperatura del aire en C° .

1838. BESSEL. Medición del grado en Prusia oriental; da nueve determinaciones de k , para distancias sobre 14000 toesas (= 27 Km):

0,1437 0,1379 0,1538 0,1406 0,1264 0,1298 0,1313 0,1456 0,1276.

El promedio de estos nueve valores es $k = 0,1376$, y la media calculada por BESSEL respecto a las diferentes distancias es $k = 0,1370$ (véase pág. 115).

1840. BAEYER. Nivelación entre Swinemünde y Berlín, 1840. En la página 115 de este trabajo se tienen 60 determinaciones de refracción verificadas del 4 de agosto al 20 de septiembre de 1835; el valor medio de todas fué $k = 0,1412$. La desviación promedia de cada observación respecto a la media aritmética era de $\pm 0,0258$. Las horas de observación fueron de 7 a 10 de la mañana y de 2 a 5 de la tarde. Baeyer encontró que la refracción era, mañana y tarde, mayor que a mediodía, y llegó a establecer la proporcionalidad entre la refracción y la hora, expresada en partes del semicírculo diurno (véase § 39, pág. 151).
1849. BAEYER. Levantamiento de litorales, etc. Berlín, 1849, págs. 560-564. Determinaciones de la refracción, en función de la hora del día (§ 27, pág. 115).
1858. Levantamientos en Inglaterra (Ordnance trigonometrical Survey).

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{15,4} \text{ a } \frac{1}{9,4}; \text{ promedio: } \frac{1}{2}k = \frac{1}{12,6}, \text{ o } k = 0,1587 \text{ (véase pág. 115).}$$

1860. BAEYER. «Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg, VII^e série. Tomo III, n.º 5. «Sobre la refracción atmosférica», por J. J. BAEYER, miembro correspondiente de la Academia. Da una serie de observaciones de distancias cenitales, barómetro, temperatura del aire y psicrómetro entre las estaciones Kupferkuhle y Brocken, en Harz; distancia, 47843 m; desnivel, 971 m.
1861. BRUHNS. Desarrollo histórico de la refracción astronómica. Memoria premiada. Leipzig, 1861.
1864. BAUERNFEIND. La refracción atmosférica como base de una nueva representación de la constitución física de la atmósfera. «Astron. Nachr.». Tomo 62, n.º 1478-1480, págs. 209-252, y «Astron. Nachr.». Tomo 67, n.º 1587-1590, págs. 33-88.
1366. JORDAN. Nivelación trigonométrica y compensación de sus resultados. Stuttgart, 1866.
- 1870-1875. Levantamientos topográficos en Prusia: nivelación por alturas y por pendientes. Primer tomo: 1870, pág. 135; en las proximidades del mar $k = 0,1292$; en el interior $k = 0,1175$; media, $k = 0,1234$. Segundo tomo: 1873, pág. 90; valor medio de $k = 0,1007$. Tercer tomo: 1875, pág. 151; valor medio de $k = 0,1299$.
1876. JORDAN. Contribución a la teoría de la refracción terrestre. «Astron. Nachr.». Tomo 88, número 2095, págs. 99-108.
1876. KOPPE. Nivelación trigonométrica en la triangulación del túnel del Gotardo. «Zeitschr. f. Verm.», 1876, págs. 129-145. En las páginas 153-155 de la «Zeitschr. f. Verm.», 1876, hay una discusión, por Helmhert, de los errores de observación de KOPPE, titulada «Medición del eje del túnel».
1880. BAUERNFEIND. Resultado de las observaciones sobre refracción terrestre, por KARL MAX V. BAUERNFEIND. Primera nota: Memorias de la Real Academia de Ciencias de Baviera; Munich, 1880. Segunda nota, 1883. Tercera nota, 1888. Suplemento a las notas 2.^a y 3.^a, 1890 (véase § 37).
1881. HARTL. Relación entre la refracción terrestre y los elementos meteorológicos, por HEINRICH HARTL, Capitán del Instituto Geográfico Militar; tomo 16 (abril de 1881) de la «Meteorologische Zeitschrift».
1882. PASCHEN. Levantamiento topográfico del Gran Ducado de Mecklenburgo, parte I.
1883. FEARNLEY. Sobre la teoría de la refracción terrestre. «Generalbericht der internationalen Erdmessung für 1883», apéndice VII.
1883. HARTL. Contribución al estudio de la refracción terrestre. «Mitteilungen des k. k. Militär-geograph. Instituts». Tomo III, 1883.
1884. DIETZE. «Zeitschr. f. Verm.», 1884, págs. 245-259. Determinación de la refracción en las triangulaciones de orden inferior.
1884. HARTL. Sobre el coeficiente medio de refracción. «Mitteilungen des k. k. Militär-geograph. Instituts». Tomo IV, 1884.
1884. HELMERT. Teorías matemáticas y físicas de la alta Geodesia. Parte II: Teorías físicas. Capítulo 8. Nivelación trigonométrica. Fórmulas teóricas para el coeficiente de refracción (12), pág. 577.
1887. AMBRONN. Contribución al estudio de la constante de refracción, Hamburgo, 1887.
1889. GROSS. Observaciones meteorológicas en globo. «Zeitschr. f. Verm.», 1889, págs. 648-650.

1889. LINGG. Sobre los fenómenos de refracción observados en las determinaciones de horizonte en el lago Starnberg (Kaiserl. Leopold. Akad. d. Naturforscher, tomo 55, n.º 1, Halle 1889).
1889. JORDAN. Las fórmulas fundamentales de la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1889, páginas 176-183 y 232-238.
1889. P. PIZETTI. Sobre el cálculo de la refracción terrestre. «Atti della R. Accademia delle scienze di Torino», vol. XXV.
1890. FEARNLEY. Refracción terrestre. «Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft», 1890, página 252.
1891. BRUNS. Sobre la teoría de la refracción astronómica. «Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch.», 1891, págs. 164-227.
1893. KAYSER y RUNGE. Dispersión de la luz. Apéndice a las Memorias de la «Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch.», 1893.
1895. REINA y CICONETTI. Ensayo sobre el coeficiente de refracción terrestre en Roma, en 1895 («Zeitschr. f. Verm.», 1897, págs. 17-21).
1895. Publicaciones del «Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts». Distancias cenitales para la determinación de la altitud de las islas del Mar del Norte: Helgoland, Neuwerk y Wangeroog, etc. Berlín, Stankiewicz, 1897.
1896. LALLEMAND. Nota sobre el error de refracción en la nivelación geométrica. Memorias de la Conferencia Internacional para la medición de la Tierra, celebrada en Lausana del 15 al 21 de octubre de 1896. Berlín, 1897; anexo tomo III, págs. 247-276. Véase también JORDAN, Refracción en la nivelación. «Zeitschr. f. Verm.», 1898, págs. 97-103, 201-202.
1898. EGGERT. Comparación de los resultados de las nivelaciones geométrica y trigonométrica, por las observaciones efectuadas por BAUERNFEIND en 1881. «Zeitschr. f. Verm.», 1900, páginas 113-139.
1898. WALTER. Teoría de la refracción atmosférica. Leipzig, 1898. («Zeitschr. f. Verm.», 1899, página 221.)
1900. KOSS. Observaciones de depresión del horizonte. «Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Pola, 1900». Págs. 429-438. (Véase también «Zeitschr. f. Verm.», 1900, pág. 311.)
1903. CHRISTIANSEN. Algunas consideraciones sobre la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1903, págs. 305-315.
1907. F. R. HELMERT. Determinación de la altitud de la isla Wangeroog por observaciones trigonométricas, en el año 1888. «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss.», 1907-XI, páginas 766-791.
1908. F. R. HELMERT. Nivelación trigonométrica y coeficiente de refracción cerca de la superficie del mar. «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss.», 1908 XXVI, págs. 492-511.
1909. BREHMER. Refracción atmosférica sobre la superficie del agua. «Ann. d. Hydr. und marit. Met.», 1909, págs. 306-324.
1910. HAIMBERGER. Determinación de la refracción sobre la superficie del mar. Freiberg, 1910.
1911. DEGNER. Nuevas investigaciones sobre el valor de la refracción terrestre, partiendo de los datos de los levantamientos topográficos en Prusia. Berlín, 1911.
1914. GÜLLAND. Coeficiente teórico de refracción y elementos meteorológicos. «Zeitschr. f. Verm.», 1914, págs. 369-385, 393-419.
1915. SARNETZKY. Coeficiente de refracción terrestre. Giessen, 1915.
1920. BRUNN. Cálculo de la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1920, págs. 2-8.
1924. NÄBAUER. Curvatura de los rayos y dispersión de los colores en el aire. «Abh. d. Bayer. Ak. d. W.». Tomo XXX. Munich, 1924.
1926. WÜNSCHMANN. La refracción terrestre. «Handb. d. physik. Optik». Tomo I, págs. 273-281. Leipzig, 1926.

1840. BAEYER. Nivelación entre Swinemünde y Berlín, 1840. En la página 115 de este trabajo se tienen 60 determinaciones de refracción verificadas del 4 de agosto al 20 de septiembre de 1835; el valor medio de todas fué $k = 0,1412$. La desviación promedia de cada observación respecto a la media aritmética era de $\pm 0,0253$. Las horas de observación fueron de 7 a 10 de la mañana y de 2 a 5 de la tarde. Baeyer encontró que la refracción era, mañana y tarde, mayor que a mediodía, y llegó a establecer la proporcionalidad entre la refracción y la hora, expresada en partes del semicírculo diurno (véase § 39, pág. 151).
1849. BAEYER. Levantamiento de litorales, etc. Berlín, 1849, págs. 560-564. Determinaciones de la refracción, en función de la hora del día (§ 27, pág. 115).
1858. Levantamientos en Inglaterra (Ordnance trigonometrical Survey).

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{15,4} \text{ a } \frac{1}{9,4}; \text{ promedio: } \frac{1}{2}k = \frac{1}{12,6}, \text{ o } k = 0,1587 \text{ (véase pág. 115).}$$

1860. BAEYER. «Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg, VII^e série, Tomo III, n.º 5. «Sobre la refracción atmosférica», por J. J. BAEYER, miembro correspondiente de la Academia. Da una serie de observaciones de distancias cenitales, barómetro, temperatura del aire y psicrómetro entre las estaciones Kupferkuhle y Brocken, en Harz; distancia, 47843 m; desnivel, 971 m.
1861. BRUHNS. Desarrollo histórico de la refracción astronómica. Memoria premiada. Leipzig, 1861.
1864. BAUERNFEIND. La refracción atmosférica como base de una nueva representación de la constitución física de la atmósfera. «Astron. Nachr.». Tomo 62, n.º 1478-1480, págs. 209-252, y «Astron. Nachr.». Tomo 67, n.º 1587-1590, págs. 33-88.
1866. JORDAN. Nivelación trigonométrica y compensación de sus resultados. Stuttgart, 1866.
- 1870-1875. Levantamientos topográficos en Prusia: nivelación por alturas y por pendientes. Primer tomo: 1870, pág. 135; en las proximidades del mar $k = 0,1292$; en el interior $k = 0,1175$; media, $k = 0,1234$. Segundo tomo: 1873, pág. 90; valor medio de $k = 0,1007$. Tercer tomo: 1875, pág. 151; valor medio de $k = 0,1299$.
1876. JORDAN. Contribución a la teoría de la refracción terrestre. «Astron. Nachr.». Tomo 88, número 2095, págs. 99-108.
1876. KOPPE. Nivelación trigonométrica en la triangulación del túnel del Gotardo. «Zeitschr. f. Verm.», 1876, págs. 129-145. En las páginas 153-155 de la «Zeitschr. f. Verm.», 1876, hay una discusión, por Helmert, de los errores de observación de KOPPE, titulada «Medición del eje del túnel».
1880. BAUERNFEIND. Resultado de las observaciones sobre refracción terrestre, por KARL MAX v. BAUERNFEIND. Primera nota: Memorias de la Real Academia de Ciencias de Baviera; Munich, 1880. Segunda nota, 1883. Tercera nota, 1888. Suplemento a las notas 2.^a y 3.^a, 1890 (véase § 37).
1881. HARTL. Relación entre la refracción terrestre y los elementos meteorológicos, por HEINRICH HARTL, Capitán del Instituto Geográfico Militar; tomo 16 (abril de 1881) de la «Meteorologische Zeitschrift».
1882. PASCHEN. Levantamiento topográfico del Gran Ducado de Mecklenburgo, parte I.
1883. FEARNLEY. Sobre la teoría de la refracción terrestre. «Generalbericht der internationalen Erdmessung für 1883», apéndice VII.
1883. HARTL. Contribución al estudio de la refracción terrestre. «Mitteilungen des k. k. Militär-geograph. Instituts». Tomo III, 1883.
1884. DIETZE. «Zeitschr. f. Verm.», 1884, págs. 245-259. Determinación de la refracción en las triangulaciones de orden inferior.
1884. HARTL. Sobre el coeficiente medio de refracción. «Mitteilungen des k. k. Militär-geograph. Instituts». Tomo IV, 1884.
1884. HELMERT. Teorías matemáticas y físicas de la alta Geodesia. Parte II: Teorías físicas. Capítulo 8. Nivelación trigonométrica. Fórmulas teóricas para el coeficiente de refracción (12), pág. 577.
1887. AMBRONN. Contribución al estudio de la constante de refracción, Hamburgo, 1887.
1889. GROSS. Observaciones meteorológicas en globo. «Zeitschr. f. Verm.», 1889, págs. 648-650.

1889. LINGG. Sobre los fenómenos de refracción observados en las determinaciones de horizonte en el lago Starnberg (Kaiserl. Leopold. Akad. d. Naturforscher, tomo 55, n.º 1, Halle 1889).
1889. JORDAN. Las fórmulas fundamentales de la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1889, páginas 176-183 y 232-238.
1889. P. PIZETTI. Sobre el cálculo de la refracción terrestre. «Atti della R. Accademia delle scienze di Torino», vol. XXV.
1890. FEARNLEY. Refracción terrestre. «Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft», 1890, página 252.
1891. BRUNS. Sobre la teoría de la refracción astronómica. «Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch.», 1891, págs. 164-227.
1893. KAYSER y RUNGE. Dispersión de la luz. Apéndice a las Memorias de la «Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch.», 1893.
1895. REINA y CICONETTI. Ensayo sobre el coeficiente de refracción terrestre en Roma, en 1895 («Zeitschr. f. Verm.», 1897, págs. 17-21).
1895. Publicaciones del «Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts». Distancias cenitales para la determinación de la altitud de las islas del Mar del Norte: Helgoland, Neuwerk y Wangeroog, etc. Berlín, Stankiewicz, 1897.
1896. LALLEMAND. Nota sobre el error de refracción en la nivelación geométrica. Memorias de la Conferencia Internacional para la medición de la Tierra, celebrada en Lausana del 15 al 21 de octubre de 1896. Berlín, 1897; anexo tomo III, págs. 247-276. Véase también JORDAN, Refracción en la nivelación. «Zeitschr. f. Verm.», 1898, págs. 97-103, 201-202.
1898. EGGERT. Comparación de los resultados de las nivelaciones geométrica y trigonométrica, por las observaciones efectuadas por BAUERNFEIND en 1881. «Zeitschr. f. Verm.», 1900, páginas 113-139.
1898. WALTER. Teoría de la refracción atmosférica. Leipzig, 1898. («Zeitschr. f. Verm.», 1899, página 221.)
1900. KOSS. Observaciones de depresión del horizonte. «Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Pola, 1900». Págs. 429-433. (Véase también «Zeitschr. f. Verm.», 1900, pág. 311.)
1903. CHRISTIANSEN. Algunas consideraciones sobre la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1903, págs. 305-315.
1907. F. R. HELMERT. Determinación de la altitud de la isla Wangeroog por observaciones trigonométricas, en el año 1888. «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss.», 1907-XI, páginas 766-791.
1908. F. R. HELMERT. Nivelación trigonométrica y coeficiente de refracción cerca de la superficie del mar. «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss.», 1908 XXVI, págs. 492-511.
1909. BREHMER. Refracción atmosférica sobre la superficie del agua. «Ann. d. Hydr. und marit. Met.», 1909, págs. 306-324.
1910. HAIMBERGER. Determinación de la refracción sobre la superficie del mar. Freiberg, 1910.
1911. DEGNER. Nuevas investigaciones sobre el valor de la refracción terrestre, partiendo de los datos de los levantamientos topográficos en Prusia. Berlín, 1911.
1914. GÜLLAND. Coeficiente teórico de refracción y elementos meteorológicos. «Zeitschr. f. Verm.», 1914, págs. 369-385, 393-419.
1915. SARNETZKY. Coeficiente de refracción terrestre. Giessen, 1915.
1920. BRUNN. Cálculo de la refracción terrestre. «Zeitschr. f. Verm.», 1920, págs. 2-8.
1924. NÄBAUER. Curvatura de los rayos y dispersión de los colores en el aire. «Abh. d. Bayer. Ak. d. W.». Tomo XXX. Munich, 1924.
1926. WÜNSCHMANN. La refracción terrestre. «Handb. d. physik. Optik». Tomo I, págs. 273-281. Leipzig, 1926.

CAPÍTULO III

Nivelación barométrica

§ 41. Fundamentos de la teoría

La nivelación barométrica se funda en la determinación de la presión barométrica en distintas capas de la atmósfera.

Antes de la descripción de los instrumentos empleados en la medición de la presión atmosférica, y antes de exponer la teoría completa del cálculo de altitudes por observaciones barométricas, vamos a indicar aquí los fundamentos de esta teoría, para dar una primera idea general sobre la materia, que sirva de base e introducción a la misma.

Partamos de la ley de los gases de Mariotte-Gay-Lussac, que ya empleamos anteriormente en la teoría de la refracción [párrafo 36, fórmula (5), página 142], donde Θ representaba la densidad del aire, que ahora indicaremos con el símbolo Δ .

I. *Ley de Mariotte.* — El volumen de un gas a temperatura constante varía en razón inversa de la presión, y la densidad del gas varía en razón directa de la presión; es decir:

	Presión	Volumen	Densidad	
Estado inicial	p_0	v_0	Δ_0	
Estado final	p	v	Δ	
Ley de Mariotte:	$\frac{p}{p_0} =$	$\frac{v_0}{v} =$	$\frac{\Delta}{\Delta_0}$	(1)

Las presiones p_0 y p se refieren a cualquier unidad de superficie.

II. *Ley de Gay-Lussac.* — Al calentar un gas a presión constante, experimenta una variación en su volumen proporcional a la variación de temperatura.

	Volumen	Temperatura	
Estado inicial	v_0	0°	}
Estado final	v	$0^\circ + t$	
Ley de Gay-Lussac:	$v = v_0(1 + \alpha t)$		(3)

El coeficiente α que figura en esta ecuación tiene el siguiente valor:

$$\alpha = 0,003665 = \frac{1}{272,851} \quad (4)$$

Este coeficiente es el mismo, muy aproximadamente, para todos los gases permanentes y puede también aplicarse al ácido carbónico y al vapor de agua. La ley de Gay-Lussac se escribe más frecuentemente de este otro modo, aproximando el denominador de (4) para expresarlo con el número entero 273:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{273^\circ + t}{273^\circ} \quad (5)$$

La expresión $273^\circ + t$ se llama *temperatura absoluta* (-273° es el cero absoluto), por lo cual puede expresarse la ley de Gay-Lussac diciendo que los volúmenes de una cantidad de gas, a presión constante, son entre sí como sus temperaturas absolutas.

III. *Ley de Mariotte-Gay-Lussac.* — De la reunión de ambas leyes resulta esta otra: si un gas tiene el volumen v_0 bajo la presión p_0 y a la temperatura de 0° , y la presión toma el valor p y la temperatura t , su volumen será:

$$v = v_0 \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) \quad (6)$$

Si Δ_0 es la densidad del gas en su primer estado, y Δ en el segundo, se tiene:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) \quad (7)$$

también:

$$\Delta = \Delta_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \alpha t} \quad (8)$$

Con la exposición de estas leyes de Neumostática, podemos ya abordar el tema de la nivelación barométrica.

Nivelación barométrica. Imaginemos un cilindro vertical de aire (fig. 129) de sección arbitraria, por ejemplo, igual a la unidad.

En un punto cualquiera de la altura H sobre la superficie BAB del mar, sea p la presión atmosférica, y a la altura $H + dH$, sea la presión igual a $p - dp$. Se puede saber el valor dp de la pérdida de presión correspondiente al aumento de altura dH , conociendo la densidad Δ del aire en el punto en cuestión, y la aceleración de la gravedad g , pues evidentemente la variación dp de presión es igual al peso del pequeño cilindro de aire, de altura dH . Ahora bien, habiendo supuesto que la sección = 1, el volumen de este cilindro será $= 1 \times dH = dH$, su masa $= \Delta dH$, y su peso $= \Delta g dH$; es decir:

$$dp = -\Delta g dH \quad (9)$$

La densidad Δ se determina por la ley de Mariotte-Gay-Lussac; y sustituyendo en (9) el valor de Δ (8), se tiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0} g \frac{1}{1 + \alpha t} dH \quad (10)$$

En esta expresión se consideran constantes Δ_0 , p_0 , g y t , por lo cual puede, sin más, integrarse, a saber:

$$1p = -\left(\frac{\Delta_0 g}{p_0(1 + \alpha t)}\right) H + \text{constante} \quad (11)$$

donde $1p$ es el logaritmo natural o neperiano de p .

La constante de integración se halla tomando dos presiones p (por las lecturas del barómetro) y sus alturas correspondientes H , a saber:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estación superior } p = b, \quad H = H_2 \\ \text{Estación inferior } p = B, \quad H = H_1 \end{array} \right\} H_2 - H_1 = h. \quad (12)$$

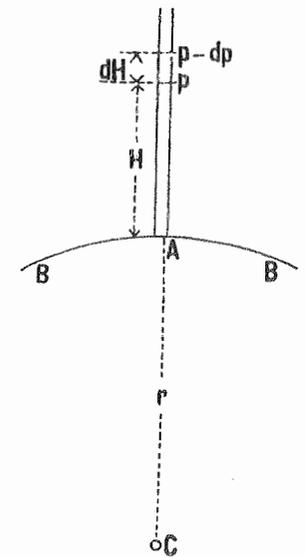


Fig. 129

Sustituyendo estos valores en (11) se tiene, para las dos estaciones:

$$\text{Estación superior} \quad 1b = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{K}{1 + \alpha t}\right) H_2 + \text{constante.}$$

$$\text{Estación inferior} \quad 1B = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{K}{1 + \alpha t}\right) H_1 + \text{constante.}$$

Restando la primera de la segunda ecuación resulta:

$$1B - 1b = \left(\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{K}{1 + \alpha t}\right) (H_2 - H_1). \quad (13)$$

$H_2 - H_1$ es la diferencia entre las dos alturas absolutas que en (12) hemos llamado h . Pasemos ahora de los logaritmos naturales o de Neper a los decimales o de Brigg, sabiendo que $\log x = \mu \cdot 1x$, y tendremos:

$$1B = \frac{1}{\mu} \log B, \quad 1b = \frac{1}{\mu} \log b, \quad \text{donde} \quad \mu = 0,434295 \dots,$$

o sea:

$$1B - 1b = \frac{1}{\mu} (\log B - \log b) = \frac{1}{\mu} \log \frac{B}{b}.$$

Sustituyendo esta expresión en (13) y despejando h (es decir, $H_2 - H_1$), se tiene:

$$h = \frac{1}{\mu} \frac{p_0}{\Delta_0 g} (1 + \alpha t) \log \frac{B}{b}. \quad (14)$$

En esta fórmula, B y b representan, según (12), ciertos valores de la presión, y puesto que sólo interviene en aquélla (14) la relación $B : b$, es evidente que no importa la unidad con que estén medidas, es decir, si están dadas por el número de milímetros de mercurio o de otro modo cualquiera, con tal que las dos estén expresadas en la misma unidad de medida.

No sucede lo mismo con la presión p_0 (14), la cual debe expresarse en unidades absolutas. Esta presión p_0 es un valor de referencia arbitrario, para el cual se ha tomado la altura de 760 mm (0,76 m) de mercurio de la columna barométrica, es decir:

$$p_0 = 0,76 \, qg \quad (15)$$

donde q es la densidad del mercurio.

Sustituyendo este valor en la fórmula (14) resulta:

$$h = \frac{0,76}{\mu} \frac{q}{\Delta_0} \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t). \quad (16)$$

La densidad q del mercurio y la densidad Δ_0 del aire a 0° y 760 mm de presión, se determinan pesando un recipiente lleno primero de mercurio y después de aire; o también, puesto que las densidades se refieren ordinariamente al agua, se pesa un recipiente lleno sucesivamente de mercurio, de agua y de aire, y llamando M , A y a a los pesos respectivos, las densidades del mercurio y del aire respecto al agua serán:

$$q = \frac{M}{A} = 13,596 \dots \quad \Delta_0 = \frac{a}{A} = 0,001293 \dots \quad (17)$$

y sustituyendo estos valores numéricos en (16) se obtiene:

$$h = \frac{0,76}{0,434295} \cdot \frac{13,596}{0,001293} \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \quad (18)$$

o bien, en forma abreviada:

$$h = K \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \quad (19)$$

donde

$$K = \frac{0,76}{0,434295} \cdot \frac{13,596}{0,001293}, \quad \text{o sea, en números redondos,} \quad K = 18400. \quad (20)$$

Lo dicho anteriormente sobre la determinación de la densidad del mercurio q y del aire Δ_0 , sólo debe tomarse como esquema para la exposición y desarrollo de la teoría, ya que en realidad intervienen otros muchos factores y la cosa no es tan fácil ni tan expedita; más adelante (§ 52) trataremos este asunto con la debida extensión, pero debemos dejar sentado aquí que la fórmula (19) es aplicable a casi todos los casos que en la práctica se presentan, si bien teniendo en cuenta que la constante barométrica K para la Europa central, en vez del valor (20), tiene el siguiente:

$$K = 18464 \text{ (para Alemania)}. \quad (21)$$

Es decir, que para Alemania la fórmula barométrica para nivelaciones debe ser:

$$h = 18464 (\log B - \log b) (1 + 0,003665 t). \quad (22)$$

En la tabla XVI del Apéndice damos los valores de $\log (1 + 0,003665 t) = \log (1 + \alpha t)$ (*).

§ 42. Barómetros de mercurio

El instrumento más valioso para la determinación de la presión atmosférica es el barómetro de mercurio.

Las diferentes clases de barómetros de mercurio pueden agruparse en los siguientes tipos generales:

1. Por la disposición del depósito de mercurio:
barómetros de cubeta (figs. 130, 134, 136); barómetros de sifón (figs. 131, 138, 139);
barómetros de sifón-cubeta (fig. 133).
2. Por su modo de aplicación:
barómetros fijos y barómetros portátiles.

El barómetro de cubeta, como barómetro fijo (fig. 130). Este barómetro tiene la forma más empleada en los observatorios meteorológicos. El tubo barométrico AA , cerrado por arriba, penetra por abajo en la cubeta B , de modo que el mercurio contenido en ésta se une al del tubo, formando una sola masa continua líquida.

Para preparar este barómetro se llena el tubo por completo, estando con el extremo cerrado hacia abajo y calentando bien el tubo, para expulsar el aire adherido a sus paredes, y después se le da la vuelta tapando convenientemente el extremo abierto, que se sumerge en el mercurio de la cubeta B y entonces se destapa; el mercurio baja de golpe en el tubo hasta quedar una columna que equilibra a la presión atmosférica exterior. En la parte superior del tubo queda un espacio vacío, que se conoce con el nombre de *cámara de Torricelli*.

(*) Todas las instrucciones y manuales prácticos de nivelación barométrica insertan tablas para el cálculo de la fórmula (19) y para la corrección cuando la latitud difiera sensiblemente de los 45° .

Para medir la diferencia de altura entre el punto más alto de la columna de mercurio, dentro del tubo, y la superficie del mercurio en la cubeta, sirve la regla *MS* que en la parte inferior lleva una punta *S* para enrasar con el mercurio y en la parte superior una escala graduada; esta punta estará rasando con la superficie del mercurio de la cubeta cuando se vea la imagen de aquélla, dada por el mercurio, tocando con la punta de la misma. Toda la pieza *MS* puede correrse un poco hacia arriba o hacia abajo, mediante el dispositivo *C* para conseguir la posición correcta de la punta *S*.

A lo largo de la escala en que termina por arriba la pieza *MS*, puede correr, mediante una cremallera y un tornillo *D*, el dispositivo de lectura *N*, que consiste en un anillo que rodea al tubo barométrico y en un nonio, cuyo cero está a la altura del borde inferior del anillo. Se mira de modo que coincidan los bordes de abajo del anillo (el de delante del tubo con el de detrás), y se corre el anillo por medio del tornillo *D*, hasta que la visual alcance la superficie superior del mercurio: se lee entonces con el nonio la altura barométrica. No es rigurosamente preciso el uso de una lente, pues aun sin ella se puede apreciar muy bien la décima de milímetro.

Para conocer la temperatura del mercurio hay un termómetro *T* dispuesto lo más cerca posible del tubo del barómetro. En la figura 130 se ve un segundo termómetro *T*, que en primer lugar tiene por objeto comprobar las lecturas del primero, pero que además da con mucha aproximación y directamente la reducción a 0° de la altura barométrica, mediante la lectura sobre la escala dividida en milímetros que lleva a la derecha; la escala de la izquierda está dividida en grados centígrados, como de ordinario.

En el § 43 estudiaremos la corrección de temperatura para éste y para los demás barómetros.

El barómetro abierto, de sifón, como barómetro portátil (fig. 131). Se llena de mercurio un tubo curvado en forma de sifón *ABC*, con el extremo cerrado *A* hacia abajo, y una vez lleno se le da la vuelta; el mercurio baja de *A* hasta *E*, y sube en la rama corta hasta el punto *D*; el mercurio alcanza en ambas ramas una altura tal, que la columna *DE* equilibra a la presión atmosférica exterior.

El tubo va fijado a una barra de madera, que lleva además una regla *M*, que sólo está sujeta a aquélla por el medio, pudiendo dilatarse libremente por los extremos. La regla *M* lleva sus extremos graduados: el cero común a ambas escalas se encuentra en la división de abajo (un poco por bajo de *C*), de modo que la distancia *ED* está dada por la suma de ambas lecturas. El enrarse con los extremos de la columna de mercurio se hace mediante anillos que rodean al tubo y que pueden correrse, a mano, a lo largo del mismo, las lecturas se hacen con nonios que forman cuerpo con los anillos. Un termómetro da la temperatura del mercurio y de la regla.

En la figura 132 se ve el sistema de cierre del extremo abierto del tubo, que se utiliza cuando hay que trasladar el barómetro de un sitio a otro. El tapón cierra a la vez la punta *C* y el tubo *B*, con taponcitos de corcho sujetos a una varilla de ballena *F*. El corcho tiene elasticidad suficiente para permitir la dilatación del mercurio, si éste se caldeara después de cerrado el tubo. En la misma figura se ven algunos detalles dignos de mención; la forma especial del tubo hace que al bajar la varilla *F* queden apretados a la vez los dos taponcitos en el tubo *A*; la disposición particular de las dos puntas *C* y *D* tiene por objeto impedir que durante los viajes o traslados del barómetro, pueda pasar aire alguno de la rama corta a la larga, pues las burbujas de aire, que pudieran llegar a *B*, se van acumulando en este ensanchamiento, y sólo cuando *B* se llenara de aire

penetrarían en *C*; análogo objeto tienen el ensanchamiento *E* y la punta *D* que penetra en el mismo.

Antes de hacer las lecturas conviene dar unos golpecitos al barómetro, para ayudar a vencer la adherencia del mercurio con el vidrio.

Este barómetro de sifón lo hemos empleado en el invierno de 1873-1874 en la expedición de Rohlfs al desierto de Libia, con excelente resultado práctico y a plena satisfacción durante todo el trabajo (*).

Barómetro portátil de sifón-cubeta, sistema Wild-Fuess (fig. 133). En la figura 133 se ha representado un barómetro moderno, construído en los talleres de R. Fuess, de Steglitz (Berlín), y que se emplea especialmente para comprobar las alturas dadas por los barómetros portátiles y los aneroides. El carácter esencialmente distintivo de este barómetro consiste en que la columna de mercurio puede subirse o bajarse mediante el tornillo *G*, que actúa sobre el fondo de piel *C* de la cubeta. Esta disposición permite determinar la distancia entre los meniscos inferior y superior (situados en tubos de igual diámetro y uno verticalmente sobre el otro) en diferentes posiciones, y además, al hacer subir la columna se pueden colocar los meniscos de modo que tengan ambos la misma forma. En el § 43 volveremos a realzar las ventajas de este dispositivo creado por Wild.

La figura 133 representa sólo la parte inferior del instrumento; el tubo barométrico *A* (arriba) está curvado en *O* y penetra por *A* (abajo) en la cubeta: de ésta sale la columna inferior por el tubo *B*, de igual diámetro que el *A*, y al apretar el tornillo *G* sube el fondo de piel *C* y con éste el mercurio por el tubo *B*. Antes de hacer la lectura se abre el tapón roscado *S*, por el cual penetra el aire en la rama inferior *B*. Sobre la columna barométrica va situado un termómetro, no representado en la figura. Las escalas van grabadas sobre la cubierta, de latón niquelado, de los tubos. Cada instrumento va provisto de unas instrucciones para su manejo y embalaje.

Las lecturas, una vez bien instalado el barómetro, se efectúan del modo siguiente: después de leído el termómetro, se lleva el menisco inferior, valiéndose del tornillo *G*, un poco por debajo del cero *N* del visor inferior, y el superior se mueve hasta quedar un poco por encima del menisco superior; entonces, con el tornillo *G* se sube el menisco inferior hasta el mismo visor, de modo que entre aquél y éste sólo pase una raya de luz; lo mismo se hace con el visor superior valiéndose de su tornillo de afinación y se hace la lectura con el nonio, que aprecia 0,05 mm. Después de hecha la lectura se afloja el tornillo *G*, para evitar que a la larga pierda transparencia el cristal del tubo abierto *B*.

Para las verificaciones que se describen en el § 60, empleó Reinhertz, como barómetro comparador, uno de estos instrumentos, con 14 mm de diámetro de tubo.

Barómetro de cubeta fija, de R. Fuess (fig. 134). Este barómetro, tan sencillo como práctico, es de los más empleados y conocidos; la cubeta forma cuerpo con el tubo barométrico, y va atornillada al tubo cubierta que lleva la escala para las lecturas, que se hacen simplemente moviendo el tornillo que se ve a la derecha, el cual hace subir o bajar el nonio cursor, hasta que éste enrarse con el menisco de mercurio. La escala de este instrumento es, de ordinario, de las llamadas *escalas reducidas*, cuya significación veremos en el § 43 (pág. 166). Cuando hay que transportar este instrumento se empieza por darle la vuelta poco a poco hasta que el tubo quede completamente lleno de mercurio, después se

(*) JORDAN, «Physische Geographie und Meteorologie der Lybischen Wüste» (Geografía física y Meteorología del desierto de Libia).

quita el tornillo que se ve en la parte de abajo (fig. 135) y se sustituye por otro, que con un tapón de goma cierra o tapa la boca inferior del tubo.

El comparador de barómetros representado en la figura 153, existente en las Escuelas Superiores Técnicas de Hannover y de Berlín, está equipado con este instrumento. El Observatorio de Marina de Hamburgo, después de suficientes pruebas y comprobaciones, afirmó la bondad y seguridad de los barómetros de cubeta fija.

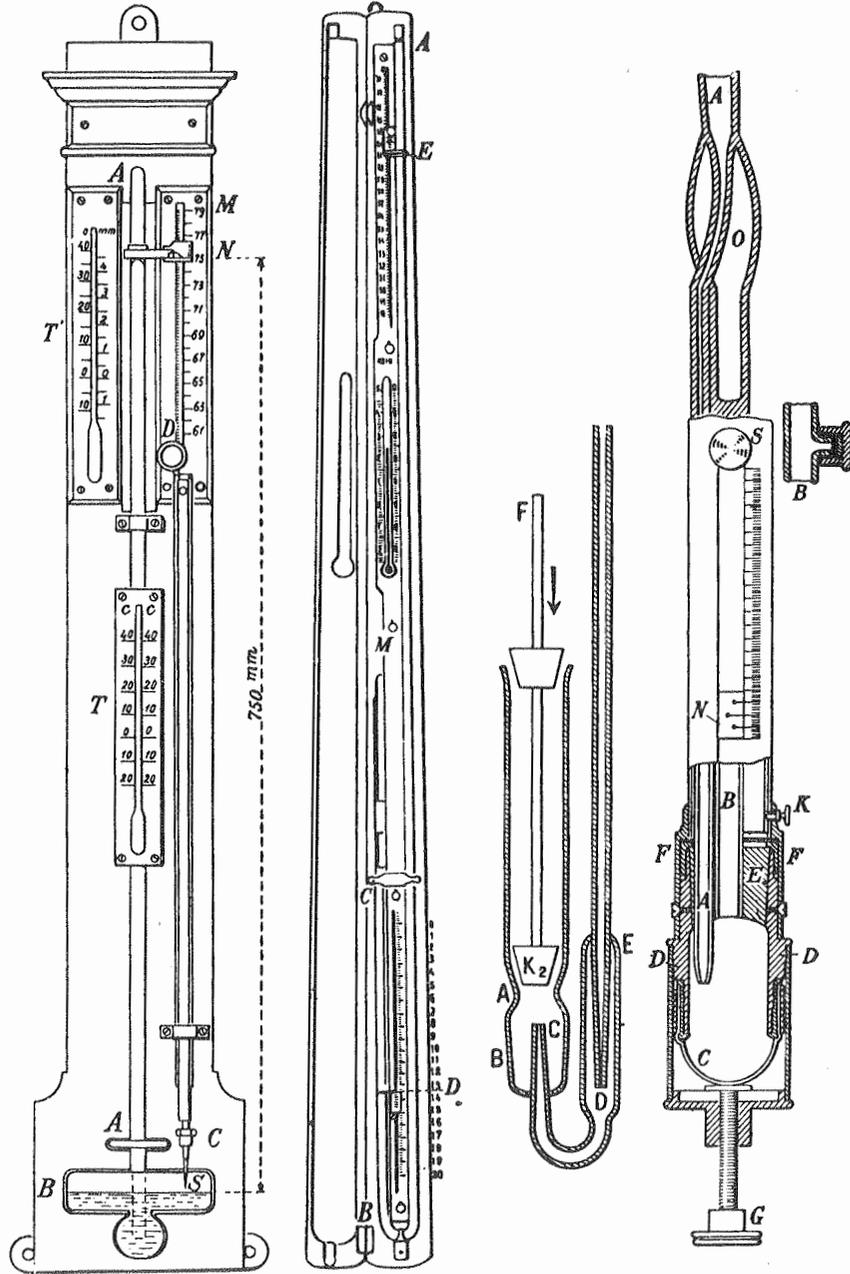
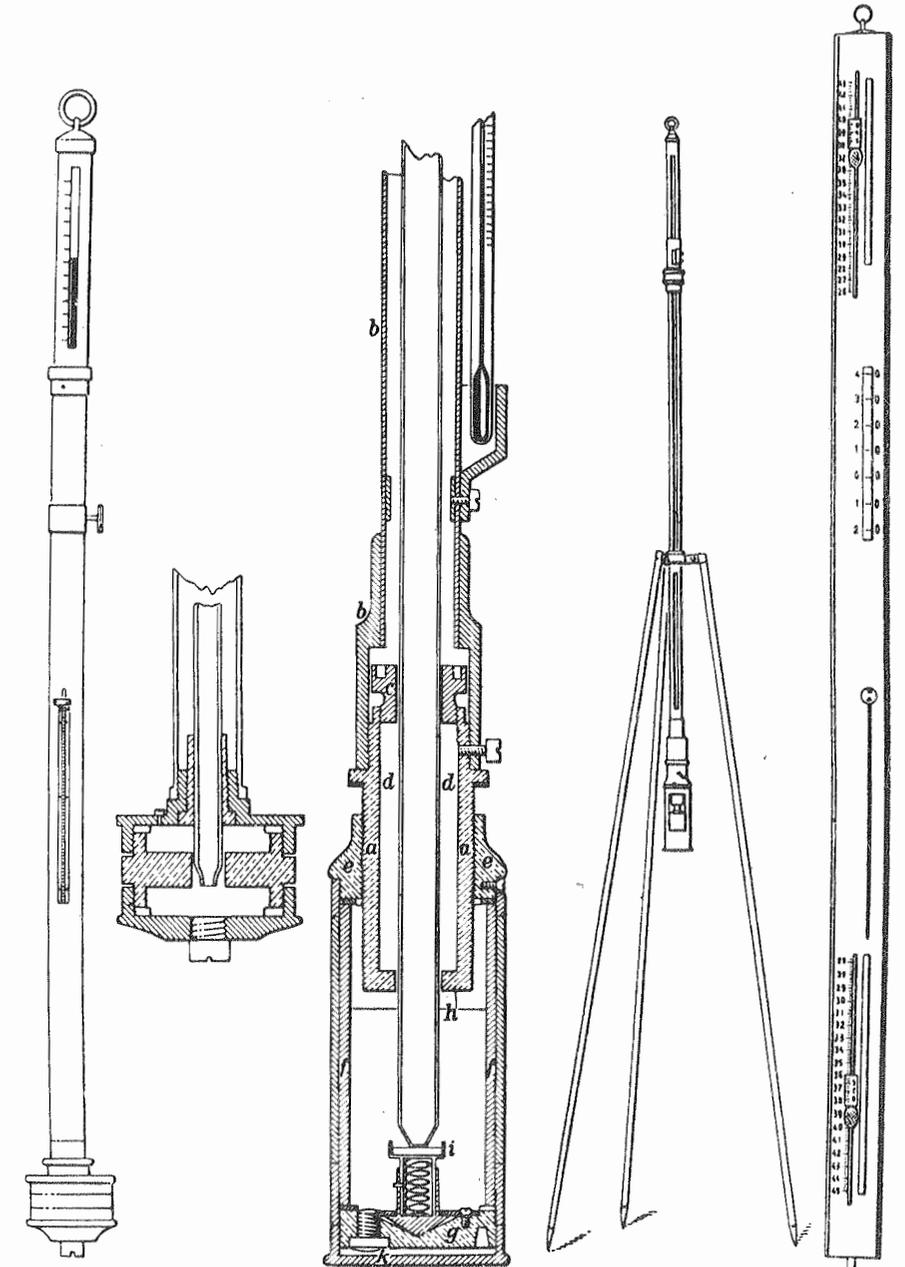


Fig. 130 Barómetro fijo con cubeta
 Fig. 131 Barómetro de sifón, para viaje
 Fig. 132 Detalle del sifón, y tubo de Buntten D
 Fig. 133 Barómetro de Wild-Fuess

Barómetro portátil de Fortin. Las figuras 136 y 137 representan este barómetro, que pudiéramos llamar clásico, tal como lo construye R. Fuess. Pertenece al tipo de barómetros de cubeta variable y nivel fijo. El tubo *a*, roscado exteriormente, lleva por arriba el tubo portaescala *b*, dentro del cual va el tubo de cristal *d*, y por abajo lleva la cubeta, que puede subirse o bajarse dándole vueltas sobre la rosca de aquél. La cubeta está compuesta de una parte superior *e* que hace de tapa, y del tubo de cristal *f*, encajado



Figs. 134 y 135 Barómetro de cubeta fija, de Fuess
 Fig. 136 Barómetro de Fortin, de viaje
 Fig. 137 Instalación del barómetro de Fortin
 Fig. 138 Barómetro de sifón, de viaje

dentro de otro de latón que lleva practicadas unas ventanillas en la forma que se ve en la figura 137; la cubeta tiene, finalmente, un fondo plano, constituido por la placa *g*, roscada a este último tubo de latón. Dando vueltas a la parte superior *e* a derecha o izquierda, según convenga, se hace que la punta *h* llegue a tocar la superficie del mercurio, análogamente a como se hace en el barómetro de la figura 130. En la figura se ve, en *i*, el tapón inferior del tubo barométrico, que, para los transportes, se ajusta a la boca de aquel mediante el tapón con muelle que se ve debajo. Cada instrumento que sale de la fábrica va acompañado de las correspondientes instrucciones para su manejo, montaje y embalaje.

En la figura 137 se ve el barómetro dispuesto para efectuar observaciones en el campo.

Para hacer lecturas, se desenrosca la cubeta hasta que se vea bien la luz entre la punta *h* y el mercurio, después se sube la cubeta, enroscando, hasta que la punta toque exactamente con la superficie del líquido; hecho esto se hace la lectura del menisco superior con el nonio del cursor correspondiente, y se lee el termómetro.

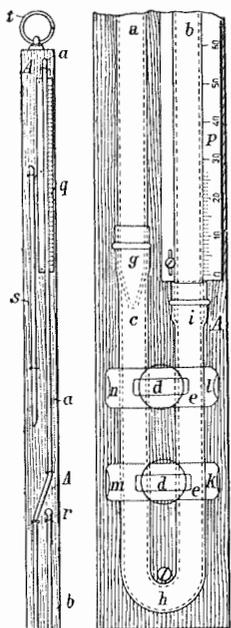


Fig. 140
Tubo de goma
(Escala 1:2)

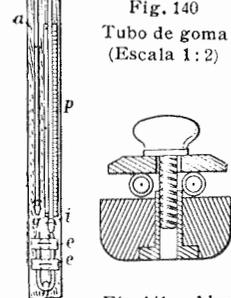


Fig. 141.—Abrazaderas del sifón de goma
(Escala 1:3)

El barómetro cerrado de sifón, de R. Fuess, como barómetro portátil. Este barómetro (fig. 138) tiene casi la misma construcción interior que el representado en las figuras 131 y 132; los cursores para las lecturas sobre los meniscos superior e inferior son de manejo más cómodo: el tubo barométrico, como se ve en la figura 138, está más cubierto que el de la figura 131, lo cual constituye una ventaja porque hace que sea menor el efecto de los cambios de temperatura sobre el mercurio, pero tiene a la vez el inconveniente de dificultar la inspección del tubo y de sus extremos. La altura se obtiene, en este barómetro, como en el de la figura 131, como suma de las lecturas hechas en las escalas superior e inferior.

Barómetro portátil de Darmer, con sifón de goma. A Axel Darmer se debe la idea de un barómetro muy sencillo de sifón (figura 139) que puede cerrarse con toda rapidez y seguridad, mediante prensas transversales (figs. 140 y 141).

Sobre la tabla *A* (fig. 139) van fijados los dos tubos de cristal que constituyen las ramas del sifón, de igual diámetro en toda su extensión y dispuestas en la forma ordinaria; las bocas inferiores de los tubos van unidas con un tubo curvado de caucho, que constituye el codo del sifón, y que lleva dos cierres, formados por dos especies de pinzas de chapa y tornillo (fig. 141).

La rama *a*, terminada en punta *c* (fig. 140), penetra en el codo de goma *ghi*, al cual se aprieta con una arandela de presión, de las empleadas para los ajustes de las tuberías de gas, de modo que la punta resulta estanca al aire.

Cuando hay que transportar este instrumento se empieza por inclinarlo de modo que salga el mercurio de la rama corta; se aprieta el tornillo de la mordaza de abajo (figs. 140 y 141), para estrangular el tubo de goma, con lo cual se limita en *k* la columna de mercurio; después se aprieta el tornillo de la mordaza superior *b* para limitar en *l* el mercurio que pudiera haber quedado sobre *k*, y así se tiene la columna inmovilizada primero en *m* y después en *n*. El tubo de goma

permite la dilatación del mercurio, por lo cual no hay que temer que el tubo de cristal se rompa aunque el mercurio experimente una gran elevación de temperatura.

El barómetro queda así impenetrable al aire, se encierra en un estuche de aluminio con correas y ya puede colocarse en cualquier posición durante el traslado.

Cuando se quiere poner de nuevo el instrumento en estación, se procede en orden inverso a como se hizo para embalarlo, es decir, se afloja primero la mordaza *d* superior y después la inferior, de modo que queden completamente sueltas las dos; la columna de mercurio queda así libre, y la lectura se hace como para todo barómetro de sifón. La escala de latón plateado *p*, fijada a la madera, está dividida en milímetros, cuyas décimas se aprecian por estima.

Las mordazas *p* tienen además la ventaja de que apretando un poco la de abajo, varía la altura de los meniscos, lo cual permite hacer varias lecturas de comprobación, para cada altura barométrica medida.

Corrección de temperatura. La escala de latón con que se lee la altura barométrica consta de dos partes: una abajo *p* (fig. 139) y otra arriba *q*, fijadas a la tabla con juego suficiente para permitir su dilatación por efecto del calor; de este modo la dilatación térmica de ambas queda compensada cuando los meniscos están en el medio de las escalas correspondientes; es decir, que sólo hay que tener en cuenta la distancia del menisco al punto medio de su escala, y para esta distancia, la dilatación sólo supone unas centésimas de milímetro, que pueden despreciarse sin cometer error apreciable.

En cuanto a la duración de la goma, sólo podemos decir que en el barómetro de esta clase que existe en Danzig, al cabo de diez años no ha habido necesidad aún de cambiarla por otra nueva.

§ 43. Correcciones del barómetro de mercurio

I. Corrección de temperatura. Toda columna de mercurio, cualquiera que sea su sección, varía de altura al variar la temperatura; es decir, que para una misma presión atmosférica, dependerá la altura barométrica de la temperatura, por lo cual es necesario reducir esta altura a la temperatura de 0° que se toma como normal.

El coeficiente de dilatación del mercurio es, según Regnault:

$$q = \frac{1}{5550} = 0,00018010. \quad (1)$$

Las cifras obtenidas por Regnault en 1847 han experimentado algunas modificaciones («Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures». Tomo II, París, 1883). En el tomo I de la misma publicación (año 1881) se da para el coeficiente de dilatación del latón el número 0,00001859, y para el del mercurio 0,00018153 (*). Las tablas meteorológicas internacionales dan para el coeficiente de dilatación del mercurio $q = 0,0001818$ y para el del latón 0,0000184 («Zeitschr. f. Verm.», 1895).

Sin entrar, de momento, en la exactitud de los valores numéricos y en las fórmulas detalladas, tomemos, para el objeto ordinario de la nivelación barométrica, la siguiente fórmula, que da la altura leída *B* en función de la reducida B_0 a 0°:

$$B = B_0 (1 + q t), \quad \text{donde} \quad q = 0,000180. \quad (2)$$

(*) Rep. d. Physik, 1886, pág. 244. Annalen d. Physik u. Chemie, 1887, pág. 424.

Despejando aquí B_0 , se tiene:

$$B_0 = \frac{B}{1 + qt} = B(1 - qt + q^2 t^2). \quad (3)$$

Las tablas auxiliares para uso diario se calculan por la fórmula (3) abreviada, mejor dicho, aproximada:

$$B_0 = B(1 - qt) \quad \text{o bien} \quad B_0 - B = -Bqt \quad (4)$$

o sea, para el mercurio:

$$B_0 - B = -0,000180 Bt \quad (5)$$

y para operar con regla de cálculo:

$$B_0 - B = -\frac{B}{556} \cdot \frac{t}{10}. \quad (5a)$$

Con esta fórmula se puede calcular la reducción, prescindiendo de la dilatación de la escala, como de ordinario se hace cuando ésta es de madera. Para tener en cuenta la dilatación de la escala, basta pensar que la longitud B leída en una escala con un coeficiente de dilatación m (por ejemplo, para el latón), debe reducirse en la siguiente cantidad, análogamente a lo indicado por las fórmulas (4) y (5):

$$\text{Escala de latón} - Bmt. \quad (6)$$

La reducción total será la diferencia entre la dilatación del mercurio y la del latón, es decir, según (4) y (6):

$$\text{Reducción: } B_0 - B = -(q - m) Bt. \quad (7)$$

Los coeficientes de dilatación para algunas de las sustancias empleadas en los barómetros, además del mercurio, son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Para el latón} & m = 0,000018 \\ \text{» » vidrio} & = 0,000011 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{ll} \text{Para la plata} & 0,000020 \\ \text{» » madera} & (0,000004) \end{array} \right\} \quad (8)$$

Sobre la dilatación de la madera, véase § 10, pág. 46, y también en el tomo I, § 20, página 62.

Las escalas empleadas con más frecuencia son las de latón, para el cual $m = 0,000018$. Es decir, que para la reducción conjunta del mercurio y del latón se tiene:

$$B_0 - B = -0,000162 Bt. \quad (9)$$

Para las dos reducciones (5) y (6) damos las tablas VI y VII en el Apéndice. Cuando se quiere calcular la reducción hasta la décima de milímetro, mejor que las tablas auxiliares es el empleo de la regla de cálculo, para lo cual es más conveniente la forma de cociente, a saber:

$$-0,000162 Bt = -\frac{B}{617} \cdot \frac{t}{10}. \quad (10)$$

En la reglilla se hace una señal sobre la lectura 617, y se calcula la reducción más exacta y fácilmente que con la tabla.

Vamos a estudiar el caso en que la escala tenga una temperatura t' algo diferente de la t del mercurio, y a considerar también aquel otro en que la temperatura normal τ de la escala no sea la misma que la del mercurio. La temperatura normal de la escala es para las medidas métricas $\tau = 0^\circ$ Celsius, para las antiguas francesas $\tau = 13^\circ$ Réaumur, y para las inglesas $\tau = 62^\circ$ Fahrenheit. Supongamos para la temperatura normal τ una lon-

gitud de la escala M_0 , y para la temperatura t' una longitud M , y sea m el coeficiente de dilatación de aquella; es evidente que podrán formularse las dos ecuaciones siguientes:

$$M = M_0 [1 + m(t' - \tau)] \quad \text{y} \quad Q = Q_0 (1 + qt).$$

Puesto que la longitud M sirve para medir la altura Q del mercurio (fig. 142), podemos poner $M = Q$, y las dos ecuaciones anteriores se reducen a esta única:

$$Q_0 = M_0 \frac{1 + m(t' - \tau)}{1 + qt}.$$

El valor numérico M_0 es la altura barométrica leída B , por lo cual podemos escribir la siguiente fórmula para su empleo en el cálculo de la reducción:

$$B_0 = B \frac{1 + m(t' - \tau)}{1 + qt},$$

y restando B de los dos miembros, se tiene:

$$B_0 - B = -B \frac{qt - m(t' - \tau)}{1 + qt}. \quad (11)$$

Haciendo el denominador $1 + qt = 1$, y por ser para las medidas métricas $\tau = 0$ y $t' = t$, se convierte esta fórmula en la anterior (7).

Un caso particular es el de los barómetros con cubeta y escala fijas (fig. 134), en los cuales, a causa de la altura variable del mercurio en la cubeta, no coinciden generalmente el cero de la escala con la superficie del mercurio en aquella (*).

Para la conversión recíproca de los valores barométricos, reducidos ya a sus respectivas temperaturas normales, se tienen las siguientes cifras:

		log
1 milímetro	= 0,443296 líneas de París	9,6466938
1 milímetro	= 0,036941 pulgadas de París	8,5675126
1 línea de París	= 2,255829 milímetros	0,3533062
1 pulgada de París	= 27,069948 milímetros	1,4324874

En la tabla V del Apéndice damos la conversión de pulgadas y líneas de París en milímetros, y de ella están tomados los números anteriores (**).

II. Corrección de nivel en la cubeta. Al subir o bajar el mercurio en el tubo, baja o sube el nivel del mismo en la cubeta, aunque no en igual cantidad, por ser mucho mayor la sección de la cubeta que la del tubo, no debiéndose despreciar la variación de altura del nivel en la cubeta por pequeña que pueda parecer. En los barómetros representados en las figuras 130 y 136 no hay que tener en cuenta este error porque se elimina al situar la punta sobre la superficie del mercurio.

Sea D el diámetro interior de la cubeta (fig. 143), y d y d_1 los diámetros respectivamente interior y exterior del tubo. Al subir la columna barométrica de B_0 a B , el mercurio

(*) LIZNAR, Sobre la reducción de lecturas barométricas a 0° («Meteor. Zeitschr.», 1915).
IRGENS, Sobre la corrección de temperatura en los barómetros de cubeta con escala fija reducida («Meteor. Zeitschr.», 1928).

(**) Sobre las relaciones entre unidades de longitud métricas, francesas antiguas e inglesas, puede verse la «Zeitschr. f. Verm.», 1890, págs. 265 269, y tablas completas para las conversiones de unas en otras en «Zeitschr. f. Verm.», 1895, págs. 244 y 247 (tablas meteorológicas internacionales), y las «Physikalisch-chemische Tabellen», de Landolt y Börnstein (Berlín, 1923).

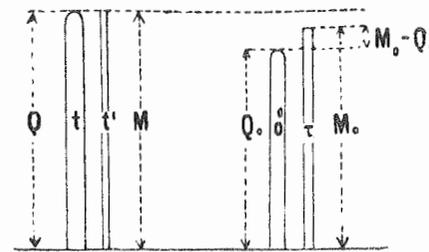


Fig. 142

rio bajará en la cubeta en una altura x , y puesto que las variaciones de volumen en el tubo y en la cubeta deben ser iguales, se tiene:

$$d^2 (B - B_0) = (D^2 - d_1^2) x$$

de donde:

$$\text{corrección de nivel } x = + (B - B_0) \frac{d^2}{D^2 - d_1^2} \quad (12)$$

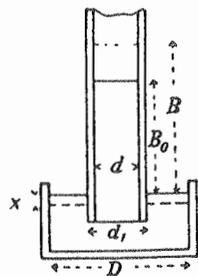


Fig. 143

El barómetro representado en la figura 130 tiene los siguientes diámetros: $d = 7$ mm, $d_1 = 11$ mm, $D = 110$ mm; para $B_0 = 755$ la corrección de nivel es $= + 0,00409 (B - 755)$. Con esta fórmula se calcula la siguiente tabla de corrección para los valores principales de B :

$B = 735$ mm	Correc. de nivel = -0,08 mm	$B = 755$ mm	Correc. de nivel = +0,00 mm
740	-0,06	760	+0,02
745	-0,04	765	+0,04
750	-0,02	770	+0,06
755	-0,00	775	+0,08

También se pueden reunir las correcciones de nivel y de temperatura; por ejemplo, para $d^2 : (D^2 - d_1^2) = 1 : 100$, y para $B_0 = 750$ mm se tiene:

$$\text{corrección total: } -0,000162 B t + 0,01 (B - 750).$$

En el Apéndice damos la tabla VIII para esta corrección total.

Para los barómetros de escala o cubeta móviles (figs. 130 y 136), no hay que hacer corrección de nivel de cubeta; pero en el barómetro de cubeta y escala fijas hay que tener en cuenta esta corrección, que queda simplificada cuando se hace $B_0 = 0$, en cuyo caso el cero de la escala coincide con el nivel del mercurio en la cubeta, cuando éste tiene la misma altura en la cubeta y en el tubo, es decir:

$$\text{corrección de nivel: } = + B \frac{d^2}{D^2 - d_1^2} \quad (13)$$

Ordinariamente los barómetros del tipo representado en la figura 134 están provistos de escala reducida, cuyas divisiones no son de 1 mm sino de $(1 - \frac{d^2}{D^2 - d_1^2})$ mm. Para una altura barométrica B , no se lee en la escala este valor B , sino que a causa de la reducción de las divisiones de la escala, el valor leído será:

$$B + B \frac{d^2}{D^2 - d_1^2}$$

que da la altura barométrica ya corregida de nivel de cubeta.

III. Corrección de capilaridad. A causa de no mojar el mercurio al vidrio, la superficie libre de aquél dentro del tubo no es plana, sino convexa, y el polo del menisco así formado queda por bajo del nivel que alcanzaría el mercurio si no hubiera capilaridad.

La depresión capilar δ es la distancia entre el punto más alto del menisco (polo) y el nivel que alcanzaría el mercurio en un tubo sin capilaridad (fig. 144). La depresión capilar depende del diámetro interior del tubo D y de la flecha o altura k del menisco.

En el Apéndice damos una tabla (IX) para la corrección por capilaridad, calculada por Schleiermacher y Delcros. En esta tabla se ve que, por ejemplo, para un diámetro interior de 10 mm y una flecha k del menisco, de 1,3 mm, la depresión es de 0,38 mm.

En los barómetros de cubeta se suma la depresión a la altura leída para el menisco. En los barómetros de sifón, esta corrección es igual a la diferencia entre las depresiones en las dos ramas del tubo, y si, como sucede ordinariamente, la depresión en la rama inferior es mayor que en la superior, hay que restar su diferencia de la altura leída.

En el barómetro de sifón-cubeta (fig. 133) con igual diámetro de tubo arriba y abajo, se sube la columna de mercurio con el tornillo G , para que los dos meniscos tengan la misma forma, con lo cual desaparece la inseguridad o duda que pudiera haber en la corrección de capilaridad, ventaja indiscutible de este sistema de sifón-cubeta.

La flecha del menisco no sólo varía de un barómetro a otro, sino también en un mismo instrumento; en el barómetro de este tipo con tubo de 6 mm de diámetro interior a que antes hemos aludido, se encontraron las flechas siguientes en distintos días (entre noviembre de 1873 y mayo de 1874), durante la expedición al desierto de Libia:

arriba:	0,83	0,83	0,88	1,00	0,83	0,90	0,82	0,83	0,94	0,89	0,95	0,94	mm
abajo:	1,11	1,26	1,17	1,22	1,37	1,64	1,58	1,40	1,53	1,65	1,55	1,63	mm

El diámetro interior era de 6 mm, por lo cual, según la tabla IX del Apéndice, a las flechas o alturas de menisco, de 1,1 mm y de 1,6 mm, corresponden respectivamente las depresiones 1,14 mm y 1,41 mm, y a la diferencia de flechas corresponde una diferencia de depresiones de 0,27 mm.

Cuando al cabo de algún tiempo se observa que el menisco de la rama inferior es mayor que el de la rama superior, debe atribuirse la causa a la oxidación que experimenta el mercurio al contacto con el aire, en la rama de abajo; además, con el aire penetran en esta rama algunas impurezas que hacen variar la adherencia normal del mercurio con el vidrio. Al cabo de algunos años el cristal mismo tiene adheridas interiormente tantas impurezas que dificultan y hasta llegan a imposibilitar la visión clara del menisco y se hace precisa la limpieza del tubo y del mercurio.

En los barómetros ya construídos no puede medirse directamente el diámetro interior del tubo de vidrio, a causa de la refracción de la luz a través de las paredes de aquél, que hace que la columna de mercurio vista desde fuera parezca mucho más ancha de lo

que realmente es, de tal modo que en los tubos de pared muy fina no se ve diámetro interior alguno, como si el mercurio llegara a la misma pared exterior del tubo. El aumento aparente del diámetro interior del tubo barométrico debido a la refracción de la luz, puede hallarse teóricamente, como se ve en una Memoria publicada en la «Zeitschr. f. Instr.», 1886; pero nosotros empleamos un procedimiento más sencillo, que consiste (fig. 145) en mirar al menisco con visual inclinada desde un punto más alto, y medir la distancia vertical h . Si α es el ángulo formado por la visual con la vertical, se tiene:

$$d = h \operatorname{tg} \alpha.$$

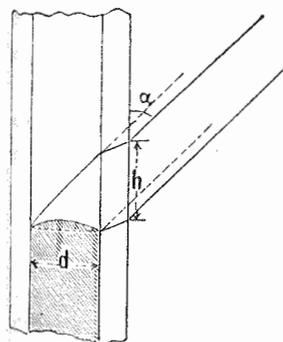


Fig. 145

Para que el ángulo α sea constante y se pueda determinar fácilmente (el valor que más conviene es $\alpha = 45^\circ$), se emplea un sencillo dispositivo de puntería, y la distancia h

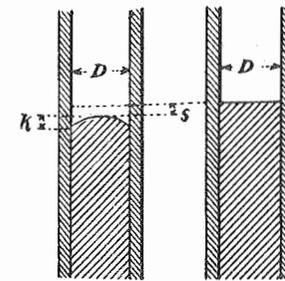


Fig. 144. - Depresión capilar

se mide con el cursor o corredera provista de nonio que se emplea para la lectura ordinaria de la lectura barométrica. El barómetro de la figura 130 a que antes hemos hecho referencia nos dió, por este procedimiento, un diámetro $d = 6,7$ mm.

Como ejemplo de corrección de temperatura y capilaridad, tomemos las lecturas correspondientes a una observación hecha con el barómetro de sifón (fig. 131), cuya escala es de latón, y cuyo diámetro interior es de 6 mm.

	Termómetro	Polo del menisco	Base del menisco	Flecha del menisco	Depresión capilar
Rama superior	17,5°	616,3 mm	615,3 mm	1,0 mm	1,07 mm
Rama inferior		127,4	129,1	1,7	1,44
	Suma = 743,7				0,37
Corrección de temperatura	- 2,11 (según la tabla del Apéndice)				
Corrección de capilaridad	- (1,44 - 1,07) = - 0,37 (» » » » »)				
Altura barométrica reducida	$B_0 = 741,22$ mm.				

Burbuja de aire en la rama superior del barómetro. Si al inclinar el barómetro penetra en la parte superior del tubo una burbuja pequeña de aire, se tiene ya un nuevo error que agregar a los ya conocidos, a causa del efecto continuo que la presencia de la burbuja ejerce en la lectura de la columna de mercurio. El aire de una burbuja grande tiene distinta tensión para diferentes temperaturas, y el efecto que su presencia produce se determina por comparación con un barómetro normal a distintas temperaturas. Teóricamente puede hallarse el efecto debido a una burbuja de aire (*); pero el procedimiento más seguro para eliminar este error, consiste en la comparación con otro barómetro. Tratándose del barómetro de sifón-cubeta de Wild-Fuess (fig. 133), se comprueba el vacío hallando la presión atmosférica en distintas posiciones de la columna de mercurio, en las cuales se coloca el cero del cursor de abajo, primero sobre una división de la parte baja y después sobre otra de la parte alta de la misma escala inferior. Esta es una de las ventajas principales del sistema de sifón-cubeta.

Precisión de los datos obtenidos con los barómetros de mercurio. El error medio de un enrase y lectura del barómetro de mercurio es menor de $\pm 0,1$ mm, aun para enrases a mano y para lecturas a simple vista; empleando lupa y con tornillo de afinación para el enrase, baja este error medio hasta 0,05 mm. Ahora bien, la precisión con que resulta medida una altura barométrica no es la misma que la correspondiente a este error medio de enrase y lectura. Se han hecho largas series de comparaciones entre barómetros de mercurio, obteniéndose diferencias que no pueden atribuirse solamente a los errores de enrase y lectura.

De numerosas determinaciones de precisión ha resultado que el error medio de una medición de presión atmosférica con un barómetro portátil, cuyo tubo tenía de 6 a 10 mm de diámetro, podía evaluarse en 0,15 a 0,2 mm, y que este error no podía disminuirse empleando dispositivos auxiliares mecánicos ni ópticos. Los barómetros de mayor tamaño, como el representado en la figura 133, dan errores más pequeños.

(*) «Poggendorffs Annalen», tomo 88; Schreiber, «Handbuch der barom. Höhenmessung»; JORDAN, «Einführung in die Geodäsie», Leipzig, 1907.

§ 44. Corrección de gravedad

Reducción de la presión a la gravedad normal. La altura barométrica reducida del modo antes expuesto no expresa aún la medida absoluta de la presión atmosférica, porque la gravedad, y con ella el peso del mercurio, varía de un lugar a otro. La presión (peso) de la columna de mercurio que equilibra a la presión atmosférica es igual al producto de la masa del mercurio (masa = volumen \times densidad) por la aceleración de la gravedad; esta aceleración, que se designa generalmente con la letra g , varía con la altura sobre el nivel del mar y con la latitud geográfica, como ya vimos en el § 23, para la altitud H , en la fórmula (6) de la página 101:

$$g = g_0^{45} \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r} \right) \quad (1)$$

$$g_0^{45} = 9,80632 \quad \beta = 0,00264.$$

Supongamos ahora que en un punto donde la aceleración de la gravedad sea g , se observe una altura barométrica B ; si en un punto al nivel del mar ($H = 0$) y a la latitud de 45° existe la misma presión atmosférica que en el primero, es indudable que la observación en aquel punto dará una altura barométrica B_0^{45} distinta de la B , pero guardando con ésta la siguiente relación:

$$B g = B_0^{45} g_0^{45}$$

o bien:

$$B_0^{45} = B \frac{g}{g_0^{45}} = B \left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r} \right) \quad (2)$$

de donde

$$B_0^{45} - B = - B \beta \cos 2\varphi - \frac{2BH}{r} \quad (3)$$

Para tener una primera idea de este valor, damos a continuación una tabla para el primer término del segundo miembro de la ecuación $\Delta B_1 = - B \beta \cos 2\varphi$, para $B = 760$ mm:

φ	ΔB_1						
0°	- 2,01 mm	40°	- 0,35 mm	45°	+ 0,00 mm	50°	+ 0,35 mm
10	- 1,89	41	- 0,28	46	+ 0,07	55	+ 0,69
20	- 1,54	42	- 0,21	47	+ 0,14	60	+ 1,01
30	- 1,01	43	- 0,14	48	+ 0,21	70	+ 1,54
35	- 0,69	44	- 0,07	49	+ 0,28	80	+ 1,89
40	- 0,35	45	- 0,00	50	+ 0,35	90	+ 2,01

Estos valores son los mismos que figuran en la primera columna de la tabla XI del Apéndice.

Como se ve, la corrección por latitud que supone el término $- B \beta \cos 2\varphi$ no es insignificante, pero para la mayor parte de las aplicaciones de la nivelación barométrica, sólo se tiene en cuenta la diferencia de correcciones para distintas latitudes, que en Europa central es muy aproximadamente de 0,07 mm por 1° de diferencia de latitud.

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (3) da la corrección o reducción por altitud y requiere para su cálculo el conocimiento, siquiera aproximado, de la altura H sobre el nivel del mar. Para toda clase de aplicaciones, se determina la altitud H aproximadamente por cualquier procedimiento adecuado a cada caso; pero si se trata de

calcular una tabla para hallar las reducidas de las lecturas barométricas, se debe deducir la altitud H de la misma altura barométrica B , mediante la siguiente función aproximada:

$$B = 760 - 0,087 H \quad \text{de donde} \quad H = 11,5 (760 - B).$$

Sustituyendo esta expresión de H en (3), se tiene:

$$B_0 - B = \Delta B_2 = -\frac{2BH}{r} = -\frac{23,0}{r} B(760 - B). \quad (5)$$

La tabla siguiente está calculada con $r = 6370000$ m.

B	H	ΔB_2	B	H	ΔB_2	B	H	ΔB_2
760 mm	0 m	-0,00 mm	690 mm	805 m	-0,17 mm	620 mm	1610 m	-0,31 mm
750	115	-0,03	680	920	-0,20	610	1725	-0,33
740	230	-0,05	670	1035	-0,22	600	1840	-0,35
730	345	-0,08	660	1150	-0,24	590	1955	-0,36
720	460	-0,10	650	1265	-0,26	580	2070	-0,38
710	575	-0,13	640	1380	-0,28	570	2185	-0,39
700	690	-0,15	630	1495	-0,30	560	2300	-0,40

Estos son los mismos valores que se ven en la fila correspondiente a $\varphi = 45^\circ$, de la tabla XI del Apéndice; los demás valores de esta tabla XI están calculados con la fórmula (3).

La reducción de la altura barométrica, dada por barómetros de mercurio, a la gravedad normal, se aplica cuando se han de utilizar aquéllas para la nivelación barométrica, y también cuando se trata de comparar sus datos con los de los aneroides y termómetros hipsométricos.

La altura barométrica reducida del modo indicado (por latitud y por altitud), y que se representa con el símbolo B_0^{45} , se toma como valor normal, y así se llama también por la Comisión internacional de Pesas y Medidas. En la obra «Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures, I, 1881», pág. A. 46, se dice literalmente, que «les hauteurs barométriques sont supposées réduites à la température zéro et à la densité 13,59593 du mercure, à 45° de latitude et au niveau de la mer». La Comisión internacional de Pesas y Medidas calcula con $\beta = 0,00259$, mientras que nosotros, con Helmert, tomamos $\beta = 0,00264$. Las tablas meteorológicas internacionales emplean el coeficiente $\beta = 0,00259$, y una reducción $= -\frac{5h}{4r}$, que no se refiere a elevaciones en el aire libre (ascensiones aéreas), sino sobre montañas.

§ 45. Termómetros de mercurio en general, y termómetros hipsométricos

Termómetros de mercurio. La determinación de la temperatura desempeña un papel tan importante en la nivelación barométrica, que es necesario conocer bien el instrumento para ello empleado, que es el termómetro de mercurio.

Hay tres clases de escalas termométricas en uso: la centígrada, la de Réaumur y la de Fahrenheit; la relación numérica, o equivalencia, entre unas y otras está dada en la tabla V del Apéndice.

El error de las indicaciones de los termómetros corrientes, llamados comerciales, oscila entre $0,5^\circ$ y 1° , y el cero puede siempre comprobarse introduciendo el termómetro en hielo fundente; pero la verificación escrupulosa del error de cero de un termómetro es una operación tan laboriosa, que generalmente no puede llevarla a cabo un observador cualquiera. Debemos advertir, sin embargo, que para los objetos ordinarios de la nivelación barométrica, por ejemplo, en los levantamientos con aneroides para proyectos de vías férreas, etc., basta con el empleo de los termómetros corrientes, comerciales, con el cero comprobado en hielo fundente.

Para investigaciones u observaciones de mayor precisión, hay que disponer de uno o dos termómetros normales, acompañados de sus correspondientes certificados oficiales. Para conocer el error de un termómetro comercial, se compara, en agua, con el normal, y la diferencia observada se lleva al cálculo cuando haya que emplear dicho termómetro comercial.

Respecto a los puntos fijos del termómetro y a la variación de las indicaciones del instrumento, tomamos lo que sigue del tratado de Física de Kohlrausch.

Científicamente se define la temperatura por la dilatación de un gas perfecto (el hidrógeno), en el cual a incrementos iguales de volumen (o de presión) corresponden incrementos iguales de temperatura. El termómetro de mercurio no presenta idéntica marcha que el termómetro de aire, porque el mercurio y el vidrio no se dilatan igualmente. La «Physikalisch-technische Reichsanstalt» emplea para la verificación de los termómetros uno de aire, determinando la depresión del cero. La fabricación misma de los termómetros hace que el vidrio soplado vaya después contrayéndose muy lentamente dando lugar a una elevación progresiva y casi igual de los puntos fijos 0° y 100° ; esta elevación, que se prolonga durante años enteros, con velocidad dependiente de las circunstancias, puede alcanzar hasta 1° . Calentando algún tiempo el termómetro, aun a la temperatura de ebullición del agua, puede acelerarse este proceso, produciéndose una depresión en toda la escala termométrica. La dilatación del vidrio en cada calentamiento produce un ensanchamiento en la cubeta o depósito del termómetro, dando lugar a un descenso de la columna termométrica, es decir, a una depresión del cero, que depende de la clase de vidrio y de la duración e intensidad del caldeo; este efecto va desapareciendo con el tiempo, al principio con bastante rapidez y después más lentamente, siendo aún perceptible al cabo de algunas semanas, con calentamientos fuertes y prolongados.

Si después de tener media hora el termómetro en agua hirviendo se pasa al hielo, la columna de mercurio baja todo lo que bajaría estando largo tiempo en el hielo sin haber pasado antes por el agua caliente; es decir, que se obtiene así la máxima depresión del punto cero a 100° ; de no proceder así habría que emplear mucho tiempo en las observaciones, que de este modo, preferible por todos conceptos, se hace casi en el acto (*).

Termómetro hipsométrico. De la temperatura de ebullición del agua puede deducirse el valor de la presión atmosférica.

Una décima de grado de diferencia en la temperatura de ebullición corresponde a 2,7 mm de altura barométrica; dadas estas cifras se comprende que en la temperatura

(*) WEINSTEIN, «Metronomische Beiträge Nr. 3, 1881»; BÖTTCHER, WIEBE, «Zeitschr. f. Instr.», 1888, 1889, 1890, 1892, 1894, 1895; «Mém. du Bureau internat. des poids et mesures 1893»; «Abhandl. d. Phys.-techn. Reichsanstalt»; «Physikalisch-chemische Tabellen von Landolt und Börnstein» 1923; «Phys.-techn. Reichsanstalt, Wissensch. Abhandlungen», tomo I, 1894 (trabajos termométricos por Pernet, Jäger y Gumlich. «Zeitschr. f. Instr.», 1901; investigaciones termométricas, por Schösser.

debe apreciarse hasta la centésima de grado para tener, en la presión barométrica, hasta 0,3 mm; esta precisión sólo se consigue con termómetros especialmente contruidos a este objeto, y con dispositivos adecuados para la ebullición del agua.

En la tabla XIII del Apéndice damos los valores numéricos de la presión atmosférica para distintas temperaturas de ebullición del agua (*).

De lo antes dicho sobre la determinación exacta de los puntos normales del termómetro, 0° y 100°, se desprende que el termómetro hipsométrico no da valores independientes de la presión atmosférica, ya que su misma escala depende de esta presión.

El termómetro hipsométrico desempeña análogo papel que los aneroides respecto a los barómetros; ambos son instrumentos que de modo empírico están graduados con un barómetro de mercurio. También tienen estos dos instrumentos otra analogía: la de que

ninguno de los dos necesita corrección o reducción de gravedad, al contrario de lo que sucede con el barómetro de mercurio (§ 44).

La figura 146 representa, a escala aproximada de 1:5, un hipsómetro construido por R. Fuess, provisto de dos termómetros contrastados, de cristal de Jena. En el medio se ve el instrumento *FEBD* dispuesto para la observación, con el termómetro *T* en su sitio y representado aparte a la derecha de la figura; a la izquierda de ésta se ve el cilindro *AAD*, que en los transportes lleva en su interior todas las piezas; en *G* se ve el depósito para llevar el agua y el alcohol.

Para poner en estación el aparato, se coloca la cubeta *E* sobre tres patas *F*, con la lamparilla de alcohol suspendida *C*; la tapa *B*, que se encaja sobre *E*, va atravesada por la camisa de vapor *D*, que comunica con la cápsula o recipiente de agua fijado en el interior de la cubeta *E* (no visible en

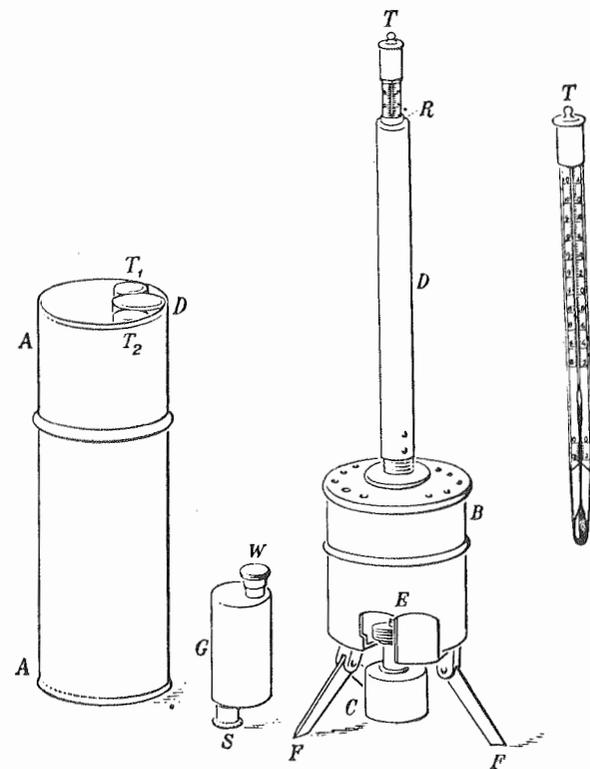


Fig. 146. — Hipsómetro (Escala 1:5; altura *AA* = 28 cm)

la figura); en este tubo-camisa de vapor entra el termómetro *T*, cuya columna de mercurio se lee en la parte superior, cuando el agua entra en ebullición. El termómetro se sujeta por arriba, en el tubo *D*, con un anillo de goma *R*, que permite bajar aquél dentro de este último hasta dejar fuera, por encima de *R*, sólo la parte precisa para hacer la lectura (unos 0,5 cm); de no hacerlo así, hay que aplicar una corrección por esta causa («Zeitschr. f. Instrumentenkunde», 1890; LANDOLT y BÖRNSTEIN, «Tablas físico-químicas», 1923, 5.ª ed.).

Para el transporte, se introduce todo en el cilindro *AA*, pero es conveniente el empleo de una funda fuerte o una caja-embalaje, para los trabajos en pleno campo.

(*) Las mejores tablas de esta clase son las de Wiebe, que dan la tensión del vapor de agua entre 76° y 101,5° (2.ª edición, Braunschweig, 1903).

Este instrumento fué comparado por nosotros mismos, durante 16 días, comprendidos entre enero y mayo de 1890, con dos barómetros de mercurio (figs. 130 y 138); el resultado principal de esta comparación fué que las observaciones hechas con el termómetro hipsométrico dan la presión atmosférica con la misma precisión que un barómetro ordinario con tubo de 6 mm de diámetro. Los errores accidentales de lectura alcanzaron, en números redondos, en el barómetro de mercurio $\pm 0,2$ mm, y en el termómetro hipsométrico sólo $\pm 0,1$ mm. También en cuanto a solidez y manipulación demostraron estas comparaciones, efectuadas durante trabajos que duraron cinco meses, que era preferible el empleo del termómetro hipsométrico como instrumento portátil, al del barómetro de mercurio.

Actualmente el termómetro hipsométrico Fuess está modificado por completo, el termómetro propiamente dicho está construido en Jena, con cristal de silicato bórico, para el cual la depresión del cero es despreciable, así como la elevación, con el tiempo, del mismo punto. El termómetro del nuevo hipsómetro no está dividido en décimas de grado, sino en dobles milímetros de presión atmosférica, de modo que ésta puede leerse con una apreciación directa de 0,2 mm. Al usar el termómetro, se observa que el mercurio se destila y se condensa en gotas finísimas en la parte alta del tubo, por lo cual después de cada ebullición conviene volcar el termómetro para que todo el tubo quede lleno de mercurio. También se observa a veces, probablemente a causa del rozamiento, una cierta adherencia entre el mercurio y el vidrio, que se hace desaparecer dando golpecitos suaves al termómetro mientras está hirviendo el agua.

También el resto del aparato ha experimentado grandes modificaciones: el tubo *D* está rodeado por otra camisa, por la cual pasa el vapor de agua después de haber subido por el interior de aquél, consiguiéndose así en el primero una temperatura constante; el diámetro *D* es lo bastante grande para que no pueda producirse un aumento de tensión en el vapor. Para que el agua al hervir no pueda salpicar la bola del termómetro, va cubierta la cápsula del agua con una tela metálica muy fina. El tubo completo consta de dos partes, una de las cuales se introduce dentro de la otra cuando hay que embalar o transportar el instrumento; para observaciones en el campo se coloca éste en una especie de caja o caseta de palastro para resguardar del viento la llama del alcohol. Se ha comprobado que cuando la llama es excesiva, el termómetro sube demasiado, por lo cual y especialmente cuando se utiliza caja cerrada, no debe dejarse que la llama sea muy grande, y en caso necesario se diluye un poco el alcohol.

Sobre la comparación del termómetro hipsométrico con el barómetro podemos citar las siguientes monografías: *Trabajos de Kunze en Tharand*, publicado en la «Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde», Berlín, 1882; *Estudio sobre el termómetro hipsométrico*, por Wiebe, «Zeitschr. f. Instr.», 1888; *Comparación del barómetro de mercurio con el termómetro hipsométrico*, por Hartl, en los Anales del Instituto Geográfico militar austriaco, tomo XII, 1892; *Aplicación del termómetro a la nivelación*, por Bosshard, «Zeitschr. f. Instr.», 1894; *Empleo y correcciones del hipsómetro de Fuess*, «Zeitschr. f. Instr.», 1897; *El hipsómetro como barómetro y su empleo para la determinación de la corrección por gravedad*, por Mohn, Cristianía, 1899; *Estudio y discusión de la constancia de los datos hipsométricos*, por Hecker, «Zeitschr. f. Instr.», 1901; *Determinación de la fuerza de la gravedad en el Océano Atlántico, entre Hamburgo-Lisboa y Río de Janeiro*, por Hecker; Publicaciones del Instituto Geodésico de Prusia, Berlín, 1903, y *Memorias de la Comisión internacional de medición del grado terrestre*, 1901; *Aplicación del termómetro hipsométrico y del barómetro de mercurio a la nivelación*, por Samel, «Zeitschr. f. Verm.», 1911.

Sobre la constancia de las indicaciones del termómetro hipsométrico, publicó E. Kohlschütter un informe en su trabajo titulado: «Resultados de la expedición al Este de Africa», donde empleó tres termómetros cuyas correcciones máximas, en tres años y medio, no pasaron de 0,2 mm, según certificado oficial del «Phys.-techn. Reichsanstalt».

§ 46. Barómetros metálicos, aneroides u holostéricos

Mientras no se dispuso de otro medio para medir la presión barométrica que el barómetro de mercurio, tan incómodo como poco práctico para los trabajos de campo, quedó limitada la nivelación barométrica a un estrecho círculo de investigación por parte de los geógrafos.

En el año 1847 construyó Lucien Vidi (nacido en 1805 en Nantes, muerto en 1866 en París) un instrumento que medía la presión atmosférica, no por el peso de una columna de mercurio, sino por la elasticidad de una caja metálica en cuyo interior había practicado el vacío.

Este instrumento fué llamado por su inventor barómetro anerode («Comptes rendus, XXIV, 1847» y «Annalen der Physik», tomo 73, 1848, de Poggendorff). El nombre del inventor aparece escrito de otro modo en el trabajo de Augusto Laurent titulado «Histoire des baromètres et manomètres anéroïdes. Biographie de Lucien Vidie, inventeur du baromètre et du manomètre anéroïdes», París, 1867, con una fotografía de Vidie. La palabra griega anerode está compuesta de la partícula privativa α y de $\nu\eta\rho\acute{o}\varsigma$ = líquido o fluído, y significa que el barómetro a que se refiere no tiene líquido alguno (mercurio). Poco después construyó Bourdon un barómetro anerode que en vez de caja circular de paredes elásticas, como el de Vidi, consiste en un tubo curvado en arco de círculo y con el vacío hecho en su interior; las variaciones de distancia entre sus extremos se miden con un amplificador de palanca. La construcción original de Vidi ha sido perfeccionada por Naudet y Hulot (París), cuyos instrumentos se han extendido de modo considerable. También las fábricas inglesas, como la de Casella, etc., construyen aneroides análogos. En Alemania, las casas que de modo especial construyen aneroides son las de Bohne en Berlín, Deutschbein en Hamburgo, Dennert y Pape en Altona, Lufft en Stuttgart, Fuess en Berlín-Steglitz, etc. Según Hellmann («Meteor. Zeitschr.», 1891: *Leibnitz y el barómetro anerode*), ya Leibnitz, en una carta de 3 de febrero de 1702, exponía el fundamento de los barómetros aneroides.

Desde la invención de los aneroides, se ha facilitado la nivelación barométrica de tal modo que hoy es de uso muy extendido entre técnicos y geógrafos.

La parte principal de los aneroides consiste en una caja metálica de paredes muy elásticas, de forma circular y herméticamente cerrada, en la que se ha practicado el vacío. Al aumentar la presión exterior se comprime esta caja y al disminuir vuelve a ensancharse, y estos movimientos son los que miden la presión atmosférica.

El movimiento de la lámina metálica no pasa de $\frac{1}{2}$ a 1 mm para una variación de presión atmosférica de 100 mm; para que pueda medirse también una presión con 0,1 mm de precisión, es preciso que se aprecie exactamente un movimiento de la lámina de 0,0005 mm. Según el dispositivo amplificador de lectura empleado, así es el tipo de anerode con caja de Vidi, a saber: a) amplificación mecánica del movimiento de la caja, mediante juego de palancas (fig. 147); b) medida micrométrica de dicho movimiento, por medio de un tornillo micrométrico (fig. 148).

La caja debe tener practicado el vacío, si no absoluto, casi absoluto, porque de no ser así, los cambios de temperatura producirían variaciones de tensión en el aire interior que se interpretarían como cambios de presión atmosférica y las verdaderas variaciones de ésta quedarían falseadas y en determinadas circunstancias hasta anuladas.

Ahora bien, habiéndose practicado el vacío en el interior de la caja, es indudable que ésta soporta toda la presión atmosférica exterior (que supone, para el tamaño ordinario de 5 a 8 cm de diámetro, unos 20 a 50 Kg sobre cada tapa), y que al hacer el vacío se produciría el aplastamiento total de la misma. Para evitar esto, llevan los aneroides, como parte integrante y fundamental de los mismos, un fuerte muelle antagonista, que equilibra o compensa la presión atmosférica exterior, desapareciendo así el peligro de aplastamiento de la caja.

Después de estos principios generales, describiremos varios modelos de barómetros aneroides.

Aneroides de Vidi, construídos por Naudet y por Bohne. Los aneroides más empleados son los del sistema Vidi, más o menos modificados o perfeccionados. El representado, a escala $\frac{1}{2}$, en la figura 147 es un modelo construído por Naudet, pero en sus partes esenciales se ajusta al nuevo modelo alemán, compensado, construído por Bohne en Berlín.

La parte principal es la caja *A* con el vacío practicado en su interior y herméticamente cerrada, de superficie ondulada, y cuyo funcionamiento ya hemos descrito anteriormente; en *L* se ve el fuerte resorte que sirve para equilibrar la presión atmosférica, como también antes se dijo.

La pared inferior de la caja *A* va unida al fondo *B* de la caja protectora exterior, de modo que al variar la presión atmosférica, la pared superior o tapa de la caja *A* y la varilla *C* solidaria con aquélla, experimentan pequeños movimientos arriba y abajo, que se miden con un dispositivo amplificador.

En los instrumentos más modernos, la caja *A* tiene las dos tapas onduladas, como se ve en el anerode representado en la figura 148; las dos tapas onduladas van soldadas a un sólido anillo. En algunas series de aneroides de Naudet y de Bohne se registra un movimiento de la caja de 0,005 mm por 1 mm de variación de presión atmosférica, por término medio.

Este pequeño movimiento de la tapa de *A*, soldada a la columna *C*, se transmite por ésta a un sistema amplificador de palancas *CD*, *DE*, *EF* y *FG*, que funciona del modo siguiente: al moverse la tapa de *A* con la columnita *C*, se transmite el movimiento por las palancas *CD* y *DE* a la horizontal *EF*, unida por *F* a la vertical *FG*, que es unas cinco veces más larga que aquélla, teniéndose así la primera amplificación, pero que

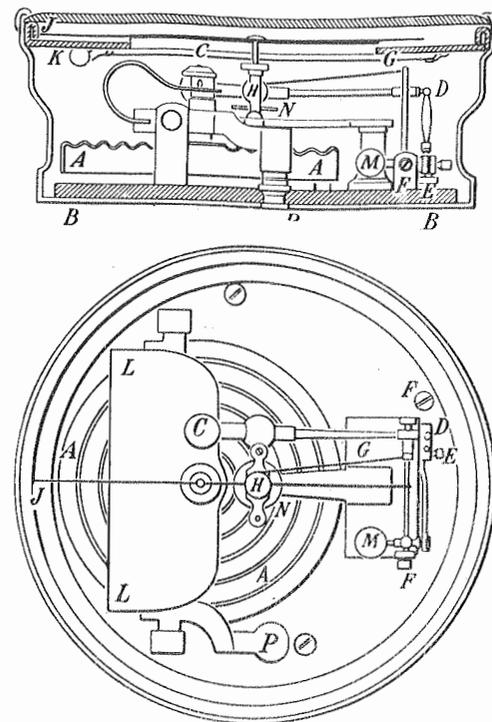


Fig. 147. — Barómetro de Vidi (Escala 1:2)

aun no es suficiente, por lo cual se aumenta mucho más mediante la cadenilla GH , fija en G y arrollada al eje H , pues por tener este eje muy poco diámetro, a un pequeño movimiento de G corresponde un giro muy apreciable de aquél y de la aguja indicadora HJ encajada sobre el mismo. La cadenilla GH sólo puede ejercer sobre el eje H una fuerza de tracción, por lo cual sólo actuará al moverse G (fig. 147) hacia la derecha; para poder registrar también el movimiento inverso, va un muelle espiral N arrollado sobre el eje H , que mantiene siempre tensa la cadenilla GH , de modo que al moverse la palanca FG con G hacia la izquierda, se produce también un giro del eje H y una desviación del índice J .

La tapa de la caja protectora lleva pegado un cuadrante que no se representa en la figura y sobre el cual se leen, con la aguja, las presiones 760, 750 . . .

Con este dispositivo, el movimiento primero de la caja ondulada, que por término medio es de 0,005 mm por 1 mm de presión barométrica, puede leerse, en los aneroides grandes de 8 cm de diámetro, sobre un limbo circular graduado, a razón de 2 mm por 1 mm de presión barométrica, es decir, que se consigue una amplificación de unas 400 veces.

Además del de amplificación, hay en el aneroides otros dispositivos auxiliares, por ejemplo, el que impide todo movimiento muerto, y que consiste, en primer lugar, en el muelle en espiral N , y además en el muelle principal antagonista L , que mantiene continuamente oprimida la columnita C contra la palanca CD , tanto si la presión atmosférica aumenta como si disminuye. También coadyuva a evitar los movimientos muertos el contrapeso de forma esférica M (fig. 147), pero únicamente cuando el instrumento está colocado horizontalmente, o sea con el cuadrante graduado hacia arriba, por lo cual al hacer una observación debe estar el aneroides en esta posición. Antes de hacer la lectura se dan unos golpecitos con la punta de los dedos en el instrumento para vencer la inercia del mecanismo.

Para corregir y poner a punto el aneroides, lleva éste, por una parte, el tornillo de corrección E , con el cual se varía el brazo de palanca EF , y por otra parte, el tornillo P , mediante el cual se varía la presión del muelle antagonista L contra la columnita C , produciéndose un cambio en la posición de la aguja J sobre el limbo K , independiente de la presión atmosférica exterior.

Para conocer la temperatura interior del instrumento va unido al cuadrante un termómetro, que no se ve en la figura 147. Siempre que se hace una lectura con el aneroides, debe también anotarse su temperatura interior. Para resguardar el instrumento de los cambios bruscos de temperatura, va encerrado en una caja forrada de paño o fieltro, de la cual no debe sacarse al hacer las observaciones.

Compensación por temperatura. Las distintas piezas del aneroides son de metales diferentes, por lo cual un cambio de temperatura produce dilataciones desiguales que dan lugar a un error en la lectura.

Este efecto perturbador de la temperatura puede compensarse de diferentes modos. Uno de los más empleados consiste en dejar en la caja barométrica un residuo de aire, que al experimentar cambios de temperatura produce efecto antagónico al producido por éstos en el resto del instrumento. Este método fué discutido teóricamente por Hergesell y Kleinschmidt en sus *Estudios sobre Física de la atmósfera*, tomo I.

Otro dispositivo destinado a la compensación por temperatura es el empleado en el aneroides de Bohne (*Nota sobre los instrumentos científicos de la Exposición de Berlín de 1879*, publicada por Löwenherz, Berlín, 1880), consistente en que la palanca HD , que

sin dejar de ser horizontal sube y baja con el muelle antagonista L , está compuesta de dos piezas de metales diferentes, de las cuales la que más se dilata está debajo; al subir la temperatura se curva esta palanca hacia arriba, contrarrestando así la subida del barómetro (véase § 47).

En la fábrica de Fuess, en Berlín-Steglitz, se han experimentado varias combinaciones de piezas bimetalicas en los aneroides (Pfeiffer, «Zeitschr. f. Instr.», 1931).

Aneroides de precisión de Goldschmid. La idea de medir el movimiento de la caja ondulada con un tornillo micrométrico, fué aplicada por primera vez por el mecánico Goldschmid, en Zurich, y desde 1857 se viene explotando en formas y modelos diferentes por sus sucesores, Hottinger y después Usteri-Reinacher, de Zurich.

En la figura 148 se representa uno de estos barómetros, a escala mitad de la natural: A es la caja ondulada, fijada al fondo de la caja cilíndrica B ; solidaria con la tapa de A es la columna vertical que se ve en su centro, y que en q va unida al resorte antagonista L . En el extremo libre de este muelle, en D , va montada en un soporte adecuado una plaquita de ágata, sobre la cual descansa una cuchilla unida a la palanca EF , que gira alrededor de uno de sus extremos E , y que por el otro lleva una plaquita rectangular bruñida K . De este modo, el movimiento de la caja ondulada A queda amplificado en K , con cuyo índice (raya grabada) puede leerse, en decenas de milímetro sobre la escala M , la elevación o depresión de la tapa de A . Para afinar más la lectura, va dispuesta sobre la palanca EF , otra semejante PG , fija en P y terminada por su extremo libre también en una plaquita rectangular bruñida K' . Esta

segunda palanca lleva fijada en su cara superior una plaquita J sobre la que se apoya la punta del tornillo micrométrico H , que se gira hasta lograr la coincidencia exacta de los índices grabados en los dos rectángulos K y K' . El termómetro va a la derecha de la escala M .

Con este barómetro se hacen las lecturas del modo siguiente: se da vueltas al tornillo micrométrico hacia abajo hasta que deje de oscilar la palanca superior $E K'$ y se nota que ésta queda oprimida por aquél; se sacude entonces un poco con los dedos en la tapa de la caja B para vencer la inercia del mecanismo, y se continúa dando vueltas al tornillo hasta conseguir la coincidencia exacta de las líneas de fe de las plaquitas $K K'$. La lectura sobre la escala M da sólo las decenas de milímetros; los milímetros y décimas de milímetro se leen con el índice O sobre el tambor T del tornillo micrométrico; cada división del tambor es $\frac{1}{10}$ mm, los números 2, 3 . . . indican milímetros enteros. Después de hecha la lectura se gira hacia atrás el tambor del tornillo hasta que la palanca superior $E K'$ oscile de nuevo libremente. Para precisar con exactitud la coincidencia de los índices de K y K' se emplea una lente.

Entre otros modelos, citaremos un barómetro aneroides con lectura microscópica, de Reitz-Deutschbein; en este instrumento, el movimiento de la caja ondulada se transmite directamente al brazo corto de una palanca, cuyo brazo largo lleva una escala muy fina, reproducida fotográficamente sobre una laminita de vidrio. Sobre esta escala se hace la

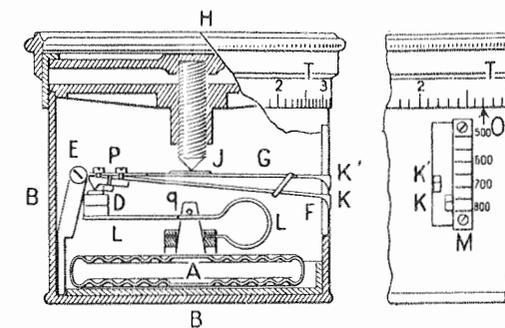


Fig. 148
Aneroides de precisión, de Goldschmid (Escala 1:2)

lectura con un microscopio de gran aumento. Otro aneroide con microscopio es el de Goldschmid-Weilemann (*).

§ 47. Fórmulas para las reducciones en los barómetros aneroides

De lo expuesto en el párrafo anterior sobre la construcción de los barómetros aneroides, se desprende que un barómetro de esta clase, dividido en milímetros (760, 750, etc.), no indicará en general exactamente la misma presión que un barómetro de mercurio bien corregido marcaría en el mismo sitio que aquél.

En primer lugar hay que tener en cuenta el efecto debido a la temperatura. Todas las piezas del aneroide no están construídas con el mismo metal, por lo cual, a todo cambio de temperatura sucede una serie de dilataciones desiguales en el mecanismo interior, que si no llevan algún dispositivo de compensación (§ 46, pág. 178), producen un error en la lectura del aneroide. También influye la temperatura en la elasticidad de los muelles del mecanismo.

Otro error consiste en la imposibilidad de ajustar exactamente el mecanismo transmisor, de tal modo que una diferencia de lectura de 1 mm no corresponde con exactitud a una variación de 1 mm en la presión atmosférica. Este error produce el mismo efecto que si la unidad de división de la escala (o la del tornillo micrométrico) fuera demasiado grande o demasiado pequeña, y por eso se le llama error de división o de escala.

Es decir, que la lectura directa F de un aneroide es, en general, sólo aproximadamente igual al valor Q_0 que daría un barómetro de mercurio una vez aplicadas al mismo todas las reducciones y correcciones (§§ 43 y 44). Vamos a expresar la relación entre Q_0 y F mediante una ecuación de la siguiente forma:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F), \quad (1)$$

donde:

x es la corrección de presión,

yt la corrección de temperatura (y es el coeficiente de temperatura),

$z(760 - F)$ la corrección de escala (z es el coeficiente de escala).

Esta ecuación (1) sirve para la mayor parte de los casos, y en los aneroides modernos, tratándose de observaciones de poca precisión (determinación de altitudes en excursiones, turismo, etc.) se puede prescindir hasta de las correcciones de temperatura y de escala, pues en los instrumentos compensados y es solamente de 0,05, es decir, yt vale sólo unos 0,05 mm por 1° , o sea 0,5 mm por 10° , y la escala de los buenos aneroides actuales tienen una precisión de $1/100$, o sea, que $z = 0,01$ aproximadamente. En los instrumentos ordinarios no se tienen correcciones tan pequeñas; la de temperatura alcanza con frecuencia 0,2 mm por 1° , y las divisiones tienen a veces un error del 5%. Por ejemplo, en aneroides sin otros defectos, se ha encontrado el coeficiente de escala igual a 0,3.

Tratándose de grandes intervalos y para observaciones de precisión no basta con suponer como suficiente la ecuación lineal (1), empleándose otra con más términos, de la forma siguiente:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) + y't(760 - F) + z'(760 - F)^2 + y''t^2 + \dots \quad (2)$$

(*) Para más detalles sobre los aneroides de Goldschmid, pueden consultarse los dos trabajos siguientes, de Koppe: «El barómetro aneroide de Jacobo Goldschmid, Zürich 1877», y «Sobre el aneroide de Goldschmid modificado por Hottinger & Co.», «Zeitschrift Eisenbahn». Núms. 16 y 17, tomo XVI.

El término $y't(760 - F)$ indica la parte de la corrección de temperatura dependiente de la altura barométrica misma, y el término de segundo grado $z'(760 - F)^2$ es una corrección de escala de segundo orden, etc.

Antes hemos supuesto una presión normal de 760 mm, pero no es condición esencial que así sea. Tomemos, por ejemplo, la altura de 700 mm en vez de 760 mm, y tendremos la ecuación (1) escrita de este otro modo:

$$Q_0 - F = (x + 60z) + yt + z(700 - F) \quad (3)$$

o también:

$$Q_0 - F = (x + 60z) + yt - z(F - 700).$$

Al pasar de la altura normal de 760 mm a la de 700 mm (3), pasa también la corrección de presión x a valer $x + 60z$.

Vamos a ver también cómo varía la presión Q_0 expresada en función cuadrática de la normal; partiendo del valor 760 mm, se tiene:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) + u(760 - F)^2. \quad (4)$$

Si en vez de la presión normal 760 mm se quiere tomar la de 700 mm, basta poner en la ecuación anterior $760 = 700 + 60$, y se tiene:

$$Q_0 = F + (x + 60z + 60^2u) + yt + (z + 120u)(700 - F) + u(700 - F)^2 \dots \quad (5)$$

Como se ve, no sólo ha variado la corrección de presión, sino también el coeficiente de escala, al variar la presión normal.

De aquí se desprende que las definiciones antes dadas en (1) para las distintas correcciones, serán más exactas, si se parte de una función general (2) cuando se refieren a datos simultáneos de una presión normal.

Ordinariamente se hacen los cálculos con la presión normal 760; pero a veces es conveniente tomar una presión *media*; por ejemplo, cuando se emplea una fórmula con una corrección de escala de segundo grado, resulta más fácil para la compensación tomar como presión normal la más igual posible a la media de todas las presiones consideradas.

El principio en que se funda el establecimiento de una fórmula de reducción entre Q_0 y F consiste siempre en la comparación repetida de un barómetro aneroide con uno de mercurio o con un termómetro hipsométrico; cuando se dispone de una serie de comparaciones de esta clase efectuadas a temperaturas lo más diferentes que sea posible y a presiones todo lo distintas que se pueda, se tiene ya una serie de coeficientes x, y, z , con los cuales se puede calcular una fórmula de reducción aplicando el método de los mínimos cuadrados.

Ahora bien, este sistema de series de comparaciones para temperaturas y para presiones distintas se emplea raramente (sobre todo en aplicaciones como las que aquí consideramos); el método más corriente consiste en determinar primero la corrección de temperatura mediante la refrigeración y calentamiento del aneroide a presión lo más fija posible, y después se halla el error de escala a temperatura todo lo fija que se pueda, para lo cual se efectúan comparaciones de tres clases (§ 49), a saber: 1.^a, en sitio fijo; 2.^a, en ascensión montañosa; 3.^a, con la máquina neumática.

En vez del cálculo de la reducción, puede también hacerse la compensación gráficamente; en muchos casos esta última es suficiente, y de todos modos debe siempre hacerse antes de la compensación analítica. En el ejemplo siguiente se detallan ambos métodos.

§ 48. Corrección de temperatura en los aneroides

Partamos de la fórmula de reducción (1) de la página 180:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) \quad (1)$$

En invierno es cuando mejor se determina la corrección de temperatura; se observa para ello el anerode dentro del local en que de ordinario se halle y a la temperatura a que éste se encuentre (calefacción ordinaria), y al mismo tiempo se lee un barómetro de mercurio (u otro anerode); se lleva después el anerode que se estudia al aire libre y frío, y al cabo de una hora se vuelve a leer, leyendo al mismo tiempo el barómetro de mercurio del interior; ambas veces se lee también la temperatura t del termómetro que va dentro del anerode.

La ecuación (1) corresponde a la primera observación; para la segunda se forma otra análoga, empleando las mismas letras acentuadas, y se tendrá así el siguiente sistema:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) \quad (2)$$

$$Q_0' = F' + x + yt' + z(760 - F') \quad (3)$$

Suponiendo que la escala sea bastante exacta, es decir, que el coeficiente z sea muy pequeño o que sea conocido, y puesto que F y F' no son muy distintas entre sí, podemos admitir que el último término de (2) es casi igual al de (3), y en este supuesto restando la ecuación (2) de la (3), resulta:

$$Q_0' - Q_0 = F' - F + y(t' - t)$$

de donde:

$$y = \frac{(Q_0' - Q_0) - (F' - F)}{t' - t} \quad (4)$$

o sea, abreviadamente:

$$y = \frac{\Delta Q_0 - \Delta F}{\Delta t} \quad \text{o también} \quad y = -\frac{\Delta F - \Delta Q_0}{\Delta t} \quad (5)$$

donde ΔQ_0 , ΔF y Δt representan diferencias de valores de la misma clase.

En el cuadro siguiente, ejemplo de una determinación del coeficiente de temperatura y , se ve la serie de observaciones antes indicadas; Q_0 y Q_0' representan las alturas leídas en el barómetro de mercurio, reducidas a 0°.

Corrección de temperaturas para el anerode Naudet n.º 39305

Núm.	Fecha y hora	t t'	Q_0 Q_0'	F F'	ΔQ_0	ΔF	$\Delta F - \Delta Q_0$	Δt	y
1.	1887 26 Enero 9 h	20,2°	746,5	749,6	+ 0,3	- 2,0	- 2,3	- 14,2°	- 0,162
	26 Enero 10	6,0	746,8	747,6					
2.	26 Enero 3	19,0	748,6	750,9	+ 0,4	- 1,4	- 1,8	- 13,0	- 0,138
	26 Enero 4	6,0	749,0	749,5					
3.	27 Enero 9	20,2	756,2	758,6	+ 1,1	- 1,3	- 2,4	- 17,2	- 0,140
	27 Enero 10	3,0	757,3	757,3					
Sumas . . .					+ 1,8	- 4,7	- 6,5	- 44,4	- 0,440
Promedio . . .					+ 0,60	- 1,57	- 2,17	- 14,80	- 0,147

$$\text{Valor medio de } y = -\frac{0,440}{3} = -0,147.$$

Estas comparaciones, de las cuales sólo figuran tres en el cuadro anterior, por ser suficientes como ejemplo, las repetimos de 5 a 10 veces, haciendo dos diarias, por término medio.

En vez de agrupar las comparaciones dos a dos (en local templado y en aire frío) es mejor ordenar la serie de aquéllas efectuadas para temperaturas siempre crecientes o siempre decrecientes, y después hacer la compensación gráficamente o por el método de los mínimos cuadrados. A continuación se ve un ejemplo para temperaturas crecientes, correspondiente a un anerode de Naudet; las comparaciones se hicieron en cuatro días. Las alturas Q_0 dadas por el barómetro de mercurio están reducidas a 0°; además de estas alturas figuran en el cuadro siguiente las observaciones F , t y las diferencias $F - Q_0$.

Núm.	Q_0	F	t	$F - Q_0$	Núm.	Q_0	F	t	$F - Q_0$
	mm	mm		mm		mm	mm		mm
1.	753,76	753,25	9,6°	- 0,51	6.	758,08	758,75	18,2°	+ 0,67
2.	759,51	759,05	10,9	- 0,46	7.	759,51	760,00	19,2	+ 0,49
3.	759,34	759,00	11,2	- 0,34	8.	758,26	759,15	23,6	+ 0,89
4.	753,54	758,40	13,7	- 0,14	9.	759,28	760,35	24,8	+ 1,07
5.	758,25	758,25	15,4	- 0,01	10.	758,61	759,65	25,5	+ 1,04

Para la compensación gráfica se toman las temperaturas t como abscisas y las diferencias $F - Q_0 = -l$ ó $Q_0 - F = l$ como ordenadas, resultando así los diez puntos que se ven en la figura 149.

Trazando la recta AB de compensación, el coeficiente de temperatura viene dado por la inclinación de aquélla sobre el eje de las abscisas. Para $t = 10^\circ$, la ordenada correspondiente en la recta AB es + 0,5 mm, y para $t = 28^\circ$ la ordenada es - 1,4 mm;

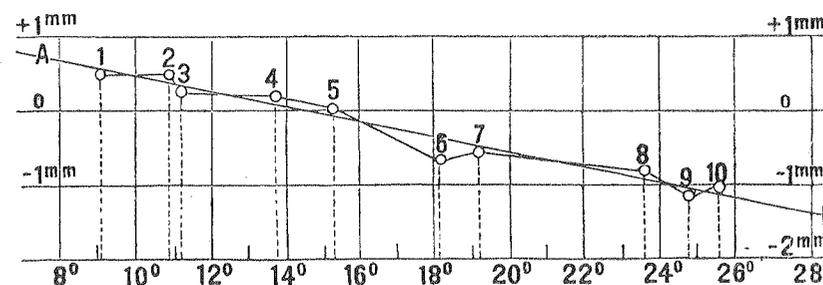


Fig. 149. — Corrección de temperatura de un barómetro anerode

restando cada par de estos valores se tiene - 1,9 mm para 18° de temperatura; luego el coeficiente de temperatura será:

$$y = -\frac{1,9}{18} = -0,106.$$

Haciendo la compensación analítica por el método de los mínimos cuadrados (cuyo detalle omitimos) se obtiene aproximadamente el mismo valor, ya que resulta $y = -0,103$.

Por lo tanto se tendrá en definitiva:

$$Q_0 = F + 1,51 \text{ mm} - 0,103 t$$

y el error medio de una compensación será $\pm 0,12$ mm.

Valor del coeficiente de temperatura. La reducción correspondiente a 1° se halla comprendida, para la mayoría de los aneroides (Naudet, Bohne, etc.), entre - 0,1 mm y - 0,2 mm.

Según los trabajos de Jelinek («Repertorium der Experimentalphysik», tomo XIII, año 1877), los coeficientes de temperatura para 108 aneroides examinados en el Servicio Meteorológico austríaco, alcanzaron los valores siguientes:

para 9 ejemplares, y comprendido entre + 0,23	y	0,00
» 9 » y » »	0,00	» - 0,07
» 82 » y » »	- 0,07	» - 0,17
» 8 » y » »	- 0,17	» - 0,37

Los valores positivos de y corresponden, en general, a los aneroides de menor tamaño (de 7 cm de diámetro).

También se debe al comandante alemán Hartl un estudio de este género («Mitteilungen des k. k. Militär-geographischen Instituts», 1881); en 81 aneroides, los coeficientes de temperatura y estaban comprendidos entre $-0,3$ y $-0,24$, y para 58 de estos instrumentos, o sea para el 72% del número total, y oscilaba entre $-0,11$ y $-0,17$. El error medio de una determinación anual de y deducida de 30 a 40 comparaciones, calculado por Hartl, era $= \pm 0,014$ mm. Según Wiebe («Zeitschr. f. Instr.», 1890) el coeficiente de temperatura aumenta en sentido positivo al disminuir la presión atmosférica. Este resultado fué confirmado posteriormente en las numerosas verificaciones efectuadas por Hebe y detalladas en su Memoria titulada «Sobre la verificación de aneroides» («Zeitschr. f. Instr.», 1900).

Correcciones de temperatura, de segundo orden. El suponer que la corrección de temperatura sea una función lineal $y t$, sólo es admisible para obtener una primera aproximación. En general debe suponerse que en la fórmula de reducción deben entrar, además del término $y t$, otros términos de la forma $y' t (760 - F)$, o $y'' t^2$, etc. [fórmula (2) de la página 180], pero cuando los intervalos o cambios de temperatura son moderados, basta para las operaciones ordinarias tomar la función lineal $y t$, prescindiendo del término $y'' t^2$.

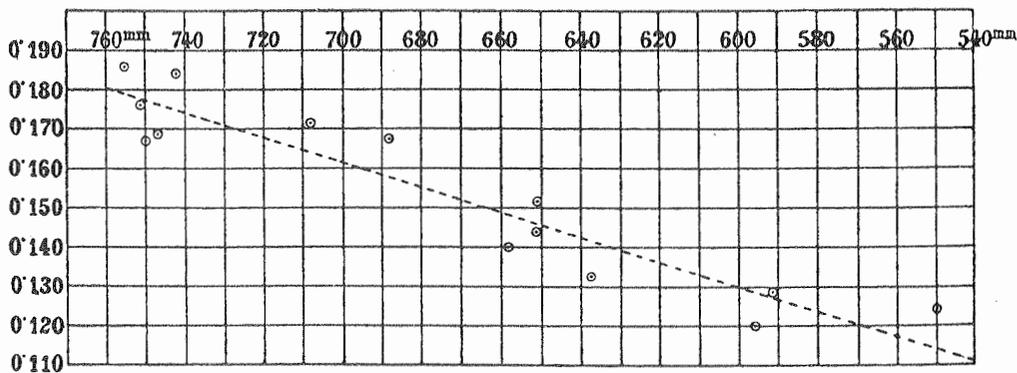


Fig. 150. — Corrección de temperatura de un aneroide en función de la altura barométrica, según Hartl

En los trabajos del comandante Hartl antes mencionados («Zeitschr. f. Verm.», 1882) se encuentran ejemplos sobre la relación entre el coeficiente de temperatura y la presión barométrica [término $y' t (760 - F)$]; en la figura 150 se ve el resultado de uno de estos ejemplos, en que aparece el coeficiente de temperatura como función de la altura barométrica. En esta figura las ordenadas son los coeficientes de temperatura y , y las abscisas son las presiones barométricas a que aquéllos corresponden; la faja de puntos resultantes y la recta compensada que marca la dirección de aquélla ponen de manifiesto que y no es constante sino que varía muy sensiblemente con la presión barométrica, como por ejemplo:

$B = 760$ mm	720 mm	680 mm	640 mm
$y = -0,18$	$-0,17$	$-0,16$	$-0,15$

Hartl llega a la conclusión siguiente: no basta, en modo alguno, con observar el aneroide en el mismo sitio con ligeras variaciones de presión, sino que es necesario determinar el coeficiente de temperatura para presiones atmosféricas muy distintas entre sí, para poder formar una tabla de doble entrada.

De los trabajos de Hebe antes citados («Zeitschr. f. Instr.», 1900), con 16 aneroides no compensados, dedujo su autor como factor para la variabilidad del coeficiente de temperatura con la disminución de presión, 0,0004 por milímetro; del ejemplo anterior resulta para este factor el valor 0,0003. Posteriormente se ha demostrado que el coeficiente de temperatura depende de la temperatura misma y del intervalo de temperatura que se considere. A Wiebe se debe una Memoria sobre el funcionamiento de los aneroides a baja temperatura («Zeitschr. f. Instr.», 1901).

Variación, con el tiempo, del coeficiente de temperatura. Experimentalmente se ha comprobado repetidas veces que, en los aneroides nuevos, el coeficiente de temperatura varía con el tiempo. Según Jelinek («Carls Repert.», tomo XIII, 1877), se observa, para un mismo instrumento, una disminución continua del coeficiente de temperatura en el transcurso de los años; por ejemplo, de 27 aneroides (que ya fueron verificados por Hartl en 1873 y en 1875) se observó esta disminución en 22, y sólo en 5 se apreció aumento; la disminución fué, por término medio, de 0,012 en dos años; otros 8 aneroides estudiados por Jelinek acusaron, de 1869 a 1875, en promedio, una disminución de 0,05.

Según Hartl («Zeitschr. f. Verm.», 1882), en los barómetros aneroides comparados durante una serie bastante prolongada de años, puede considerarse el coeficiente de temperatura como una cantidad independiente del tiempo. Los instrumentos nuevos requieren unos cuantos años para que sus coeficientes de temperatura puedan considerarse como constantes.

En cuanto a los aneroides *compensados*, sobre los cuales ya se citó en la página 178 la construcción de Bohne, podemos decir, refiriéndonos al instrumento verificado por nosotros mismos (Bohne n.º 780), que en febrero del año 1886 obtuvimos para su coeficiente de temperatura el valor $y = -0,008$, es decir, casi cero. En febrero del año 1888 encontramos un valor análogo (promedio $y = +0,01$). Posteriormente, este mismo aneroide de Bohne dió, en la comparación corriente en frío, un coeficiente de temperatura casi igual a cero. La palabra *compensado* no es una garantía de que y sea igual a cero; muchas veces se llama compensado a un aneroide que no lo es, pero cuyo coeficiente y de temperatura es muy pequeño.

Según Wiebe («Zeitschr. f. Instr.», 1890), los aneroides Bohne y Short examinados no presentaron cambio sensible en sus coeficientes de temperatura; pero en los Naudet este coeficiente pasó, en dos años, de $y = -0,07$ a $y = -0,09$ por término medio.

También Hebe encontró muy pequeñas variaciones, apenas perceptibles, en estos instrumentos («Zeitschr. f. Instr.», 1900).

§ 49. Corrección de escala en los aneroides

Para la verificación de la escala de un barómetro aneroide se puede proceder de tres modos distintos:

1. Por comparaciones reiteradas del aneroide con un barómetro de mercurio, a presión atmosférica natural, estando siempre los dos instrumentos en el mismo sitio.

II. Por comparación del aneroide con el patrón de mercurio durante la ascensión a una montaña.

III. Por comparación bajo la campana neumática, o con otro dispositivo que permita la reducción artificial de la presión atmosférica.

I. Comparación en un mismo sitio. El procedimiento más sencillo para determinar la corrección de escala consiste en comparar repetidamente el aneroide con un buen barómetro de mercurio en un mismo sitio fijo. Aunque los intervalos o cambios de presión atmosférica no son muy grandes en estas condiciones, la comparación hecha de este modo es utilizable para muchos objetos.

Las oscilaciones de la presión atmosférica son muy diferentes en las distintas épocas del año, siendo más pronunciadas en invierno que en verano. Por ejemplo, las oscilaciones medias mensuales, en 12 años de observaciones (Schoder, «Württemb. naturw. Jahreshfte, 1868») en Stuttgart, son:

En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
± 29 mm	25	29	20	18	16	15	14	18	23	26	29 mm.

En los meses de diciembre, enero y marzo, es, por consiguiente, cuando deben hacerse las comparaciones en una estación fija.

A continuación damos un ejemplo correspondiente al aneroide Naudet n.º 39305, cuya verificación se hizo en Karlsruhe, entre el 20 de febrero y el 14 de marzo de 1877, no consignando más que diez comparaciones, por ser suficientes para dar una idea del procedimiento. Los valores Q_0 están ya reducidos a 0°. En la tabla figuran no sólo las observaciones, sino todos los datos necesarios para la compensación gráfica o analítica:

Núm.	Q_0	F_0	$F_0 - Q_0 = -l$	$760 - F_0$	$\frac{760 - F_0}{100} = -b$	b^2	$-bl$	l^2
1.	762,82	762,03	- 0,79	- 2,03	- 0,020	0,0004	+ 0,0158	0,6241
2.	757,56	756,82	- 0,74	+ 3,18	+ 0,032	0,0010	- 0,0237	0,5476
3.	753,95	753,06	- 0,89	+ 6,94	+ 0,069	0,0048	- 0,0614	0,7921
4.	751,30	750,27	- 1,03	+ 9,73	+ 0,097	0,0094	- 0,0999	1,0609
5.	745,66	744,70	- 0,96	+ 15,30	+ 0,153	0,0234	- 0,1469	0,9216
6.	743,28	742,24	- 1,04	+ 17,76	+ 0,178	0,0317	- 0,1851	1,0816
7.	742,26	741,36	- 0,90	+ 18,64	+ 0,186	0,0346	- 0,1674	0,8100
8.	739,30	738,22	- 1,08	+ 21,78	+ 0,218	0,0475	- 0,2354	1,1664
9.	735,79	734,65	- 1,14	+ 25,35	+ 0,253	0,0640	- 0,2884	1,2996
10.	734,95	733,83	- 1,12	+ 26,17	+ 0,262	0,0686	- 0,2934	1,2544
10.	466,87	457,18	- 9,69	142,82	+ 1,428	0,2834	- 1,4858	9,5583

Vamos, en primer lugar, a tratar de la compensación gráfica, representada en la figura 151; a los valores de F_0 como abscisas, corresponden como ordenadas los de $F_0 - Q_0 = -l$ ó $Q_0 - F_0 = l$. Los valores de $760 - F_0$, b , b^2 , $-bl$ y l^2 no se emplean para la compensación gráfica.

Por entre los diez puntos así obtenidos se puede hacer pasar una recta, de modo que coincida lo más posible con la dirección media de la faja por aquéllos determinada, y ya se tiene la compensación gráfica. Las ordenadas de los puntos de esta recta dan directamente las correcciones de presión y de escala; por ejemplo, para 770 mm, la ordenada

es = + 0,66 mm, y para 720 mm la ordenada es = 1,29 mm. De este modo se forma la tabla de correcciones.

Cuando, por la causa que sea, no se quiere hacer el cálculo numérico, basta con esta compensación gráfica, hecha en papel milimétrico.

La compensación analítica parte de la fórmula antes empleada:

$$Q_0 = F_0 + x + \varepsilon (760 - F_0) \tag{1}$$

o también

$$Q_0 = F_0 + x + \frac{760 - F_0}{100} y, \text{ donde } y = 100 \varepsilon. \tag{2}$$

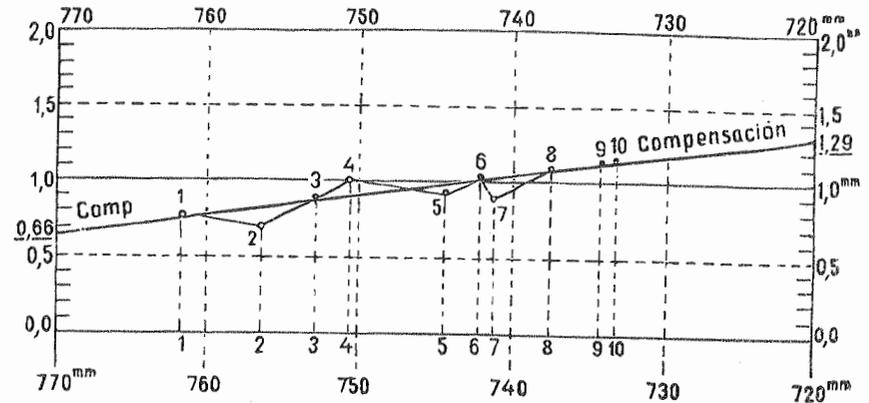


Fig. 151. — Corrección de escala de un barómetro aneroide

Al poner $100 \varepsilon = y$ desaparece la diferencia de posición de las comas en los coeficientes; pero hay que tener en cuenta que la letra y tiene aquí un significado completamente distinto del de coeficiente de temperatura que antes se le había dado (§§ 47 y 48). A la ecuación (2) corresponde la siguiente ecuación de errores:

$$v = x + by - l, \tag{3}$$

donde $b = \frac{760 - F_0}{100}$ y $-l = F_0 - Q_0$, como ya se indicó en la tabla anterior; y puesto

que en esta tabla tenemos también los valores de b^2 , $-bl$, etc., podemos ya formar las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} &+ 10x + 1,428y - 9,690 = 0 \\ &+ 1,428x + 0,285y - 1,486 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Solución:} \\ x = + 0,789 \text{ mm} \pm 0,042 \text{ mm} \\ y = + 1,259 \pm 0,248 \end{array} \right\} \tag{4}$$

$$[ll. 2] = [v^2] = 0,040, \quad m = \sqrt{\frac{0,040}{10 - 2}} = \pm 0,071 \text{ mm}$$

Por lo tanto, la fórmula de reducción será:

$$Q_0 = F_0 + 0,789 \text{ mm} + 1,259 \frac{760 - F_0}{100}. \tag{5}$$

Las diferencias o errores residuales v calculados según (3) son:

$$v = + 0,03 - 0,09 + 0,01 + 0,12 - 0,02 + 0,03 - 0,12 + 0,02 + 0,03 + 0,00. \tag{6}$$

La suma de cuadrados $[v^2] = 0,0405$ coincide con la suma 0,040 obtenida en (4).

A continuación pueden verse los valores principales de una tabla de reducción, calculados con la fórmula (5):

$$\begin{array}{cccccc}
 F_0 = & 770 \text{ mm} & 760 \text{ mm} & 750 \text{ mm} & 740 \text{ mm} & 730 \text{ mm} & 720 \text{ mm} \\
 Q_0 - F_0 = & +0,66 & +0,79 & +0,92 & +1,04 & +1,17 & +1,29
 \end{array} \quad (7)$$

Tanto el valor inicial + 0,66 mm como el final + 1,29 mm de las reducciones (7) están indicados en la figura 151; también en esta misma figura pueden hallarse las diferencias v de la serie (6), como distancias por encima o por debajo de la recta de compensación.

II. Comparación durante ascensiones a montañas. En una ascensión al Brocken, el 25 de septiembre de 1887, hicimos varias lecturas, en diversos puntos, en dos barómetros: uno, el portátil de mercurio de Mollenkopf (fig. 131), y otro, un pequeño aneróide francés, del tamaño de un reloj de bolsillo.

En la tabla siguiente pueden verse los datos referentes al barómetro de mercurio y sus reducidas; las alturas Q_0 están ya corregidas de temperatura y capilaridad, según lo expuesto en el § 43. Con estos valores Q_0 y la temperatura media $t = 7^\circ$ se calculan las altitudes aproximadas H , empleando una tabla de altitudes; con esto basta para calcular la corrección por gravedad $-\frac{2QH}{t}$, según lo dicho en el § 44, teniéndose así las alturas observadas Q_0 , reducidas a la gravedad normal. Estos valores Q_0 así reducidos, se toman como patrones de comparación para las lecturas del barómetro aneróide. En la última columna de la tabla van estas lecturas F_0 del aneróide, ya corregidas de temperatura.

Ascensión al Brocken el 25 de septiembre de 1887

N.º	Sitio y hora	Q_0	Temp del aire t	Altitud aprox. H	Correc. de gravedad $-\frac{2QH}{r}$	Q_0	F_0
		mm		m	mm	mm	mm
1.	Harzburg 8 h 50 m	742,45	9,0°	210	- 0,05	742,40	749,03
2.	Kanossa-Säule 11 16	721,52	9,0	450	- 0,10	721,42	727,00
3.	Molkenhaus 1 16	717,87	9,0	490	- 0,11	717,76	723,92
4.	Scharfenstein 3 18	707,15	8,5	610	- 0,14	707,01	713,07
5.	Pflasterstoss 4 3	687,07	5,5	850	- 0,18	686,89	690,18
6.	Pequeño Brocken . . . 4 46	673,74	3,0	1010	- 0,22	673,52	676,40
7.	Albergue del Brocken 5 30	663,02	2,0	1140	- 0,24	662,78	664,89
7.	Sumas	4912,82	46,0	4760	- 1,04	4911,78	4944,49
	Promedio	701,83	6,6	680	- 0,15	701,68	706,36

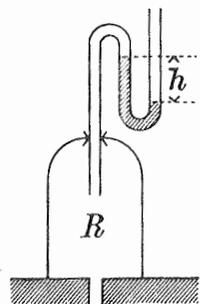


Fig. 152

La compensación se hizo como en el ejemplo detallado anteriormente (págs. 186 y 187).

III. Comparación con la máquina neumática. Este método de verificación es mucho más rápido que los dos anteriores y puede extenderse a los límites que se quiera. La práctica del mismo se lleva a cabo del modo siguiente: bajo la campana R (fig. 152) de una máquina neumática corriente se coloca el aneróide que se estudia, y la depresión producida por la máquina se mide, en un tubo en U , por la diferencia de nivel h del mercurio en sus dos ramas. Leyendo la

presión exterior Q' en un barómetro de mercurio, se tiene la presión interior $Q = Q' - h$. Este sencillo aparato, sin dispositivo para regular la velocidad de las variaciones de presión, no es utilizable a causa de la elasticidad remanente (véase página 192) de los aneroides.

Aparato comparador de R. Fuess. En la figura 153 se ve el aparato para la comparación de aneroides construido por R. Fuess. El primero de estos aparatos lo construyó Fuess en 1888 para el Instituto Geodésico de Alemania. Sobre una mesa se encuentra un recipiente de fundición R_1 , cerrado herméticamente con una tapa de cristal; a la izquierda va la bomba de vacío, de mercurio, L , con el regulador t , y a la derecha se ve un segundo recipiente R_2 , que se puede cerrar con una llave de latón, para la verificación de los barómetros de mercurio; este último lleva unas ventanas de luna de espejo para la observación y va tapado por arriba con una placa de cristal esmerilado. Fijado a este recipiente R_2 va el barómetro normal B , que por medio de la llave de tres vías h_2 se pone en comunicación con las demás partes del aparato. Las distintas piezas se comunican mediante tubos de goma, que se unen entre sí con empalmes metálicos especiales. La parte principal la constituye la bomba de mercurio L , inventada por Geissler en 1857 y que consiste en un dispositivo barométrico, en el cual, al subir y bajar el mercurio, se forma una cámara vacía de Torricelli.

Este principio se utiliza en el aparato de Fuess del modo siguiente: los dos globos de cristal k_1 y k_2 , unidos entre sí por un tubo de goma, hacen de cubeta de mercurio; el primero k_1 es fijo y el segundo k_2 puede subirse o bajarse a voluntad por una corredera, con un manubrio, con lo cual el mercurio de un globo pasa al otro y el aire en el recipiente R_1 se enrarece o se concentra, según se quiera.

Es muy importante regular la velocidad con que el aire se enrarece o se concentra en R_1 para evitar que lo haga rápidamente o a saltos; esto se consigue con el regulador t , intercalado en el tubo de unión de k_1 y k_2 , y representado con todo detalle en las figuras 154 y 155.

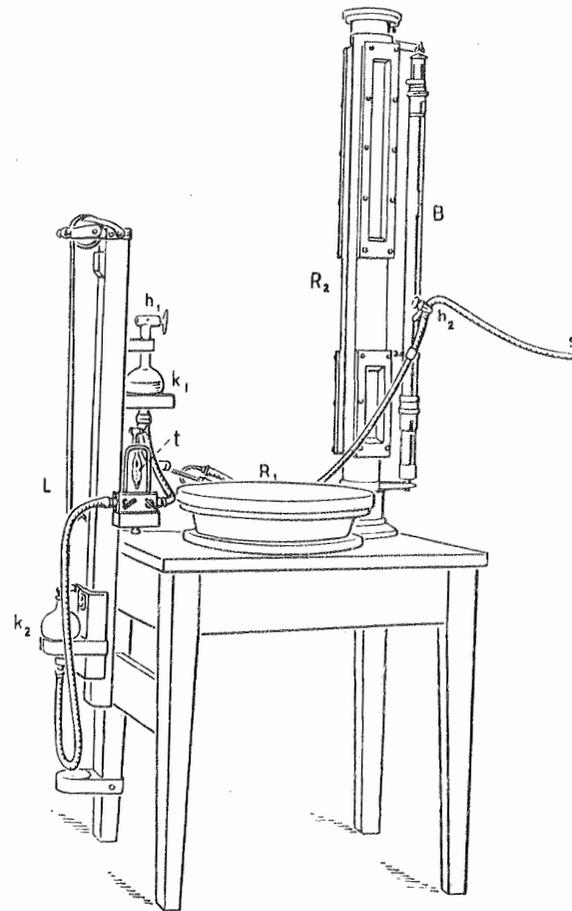


Fig. 153. — Comparador de barómetros

- h_1 = Llave de cristal
- k_1 = Globo fijo
- L = Bomba de mercurio
- t = Regulador
- k_2 = Globo móvil
- B = Barómetro normal
- R_1 = Recipiente para colocar y verificar de 3 a 4 aneroides cada vez
- R_2 = Recipiente para la colocación y examen de barómetros de mercurio

Este regulador consiste en un tubo de cristal en forma de U invertida, que lleva en la parte superior una llave para regular la presión del aire contenido en el mismo. Entre los brazos de este tubo en U se encuentra otro, ensanchado por el medio, en el cual penetra de arriba hacia abajo un pico de embudo, por el cual cae lentamente el mercurio gota

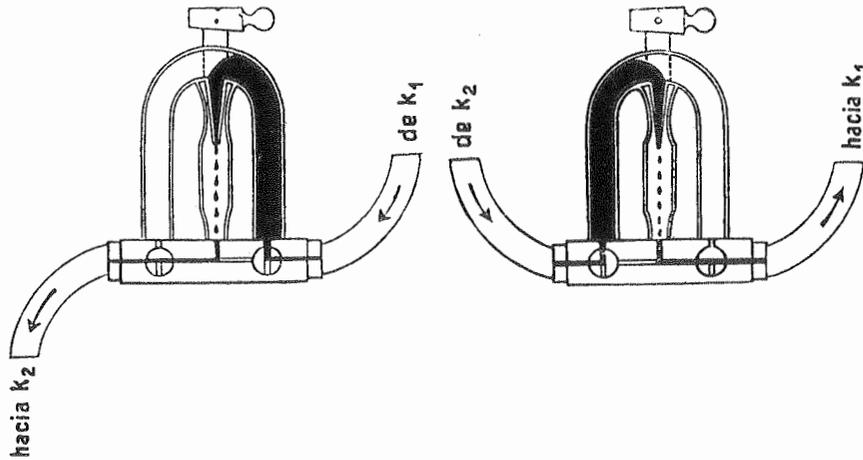


Fig. 154. — Regulador, con presión decreciente Fig. 155. — Regulador, con presión creciente

a gota. En las figuras 154 y 155 se ve, en la parte inferior, una pieza que es de fundición y que lleva los canales y orificios que en ella aparecen, con dos llaves de triple paso para regular la circulación del mercurio en el sentido conveniente.

Para probar un anerode con presiones decrecientes, se coloca en el recipiente R_1 y se tapa éste con una placa de cristal. El globo k_2 , lleno de mercurio, se sube dando vueltas al manubrio, con lo cual el mercurio pasa por el tubo de goma al otro globo k_1 . Al subir el globo k_2 se abre la llave de cristal h_1 , para que el aire contenido en k_1 pueda escapar al exterior, y las dos llaves que se ven en la parte inferior de la figura 154 se colocan paralelas, de modo que el mercurio pasará directamente de k_2 a k_1 (sin recorrer el tubo en U), en sentido contrario al de las flechas de esta figura.

Una vez lleno de mercurio el globo k_1 , se cierra la llave h_1 , y el aire que aun hay en este globo, en vez de salir al exterior, queda en comunicación por abajo con el recipiente R_1 . Ya se tiene así preparado el aparato; basta ahora con cerrar las dos llaves del regulador del modo que se ve en la figura 154, para que el mercurio pase por el tubo en U, siguiendo la dirección de las flechas.

Al bajar el globo k_2 (sin mercurio), empieza la verificación a presión decreciente; el mercurio baja del globo k_1 , pasando por el regulador t , al globo k_2 ; de este modo aumenta el espacio de comunicación con el recipiente R_1 y por lo tanto disminuye la presión del aire contenido en el mismo. Al vaciarse completamente el globo k_1 se produce, a una presión de 760 mm, un descenso de presión de unos 30 mm, y para una de 400 mm se produce un descenso de unos 20 mm. Se repite la operación hasta obtener la disminución deseada, pudiéndose llegar hasta una presión de 390 mm. La velocidad con que va disminuyendo la presión, está dada por la cantidad de mercurio que en un cierto tiempo pasa por el regulador t ; dicha velocidad es, ordinariamente, de 1 mm en cuatro minutos, y responde muy aproximadamente a la velocidad con que en la práctica disminuye la presión en las ascensiones en montaña.

Para probar el anerode con presiones crecientes, se baja del todo el globo k_2 , se colocan las llaves de triple paso de t en posición tal que el mercurio pueda pasar directamente a través de ellas, sin derivar por el tubo en U, y se abre la llave h_1 . El mercurio de k_2 baja al globo k_1 , que queda completamente lleno; se giran las llaves del regulador t colocándolas en la posición indicada en la figura 155; el globo k_1 se habrá llenado de aire a la presión atmosférica, y al cerrar de nuevo la llave h_1 queda en comunicación con el recipiente R_1 y ya puede empezar la prueba. Al subir el globo k_2 a su posición más alta, baja el mercurio, a través del regulador t , al globo fijo k_1 , como se ve en la figura 155, obligando al aire que había en k_1 a pasar al recipiente R_1 , aumentando así la presión existente en este último. Repitiendo la operación puede llegarse hasta una presión de 795 mm.

La presión en el interior del recipiente R_1 puede leerse en el barómetro de mercurio B , teniéndose así una serie de comparaciones análogas a las descritas anteriormente (páginas 186 y 188), que pueden después utilizarse en la compensación gráfica o analítica.

§ 50. Variabilidad de la corrección de presión. Elasticidad remanente

Todos los barómetros aneroides tienen el inconveniente de que a la larga varían sus indicaciones, comparadas con las de un barómetro patrón de mercurio. Las sacudidas inevitables en los trabajos de campo y en los viajes, transportes, etc., producen variaciones en la presión señalada por el anerode, que pueden descubrirse por comparación con un barómetro de mercurio o con un termómetro hipsométrico (§ 45).

Puede suceder que en un anerode, empleado durante un solo día en observaciones barométricas, se acuse una variación de 0,5 mm en sus indicaciones. En este caso basta repartir esta variación por igual en el tiempo correspondiente a la variación; pero tratándose de un tiempo mayor puede ocurrir que las variaciones no vayan siempre acumulándose, sino que se compensen total o parcialmente.

En la tabla siguiente damos, como ejemplo, las diferentes correcciones de presión resultantes de las comparaciones sucesivas de los aneroides empleados en la expedición a Libia, con el barómetro de mercurio, después de haber hecho todas las demás correcciones:

Correcciones de presión de cuatro aneroides

Lugar y fecha	Naudet 39305	Goldschmid 600	Casella 1640	Casella 1641	Chevallier
Cairo 5 diciembre 1873.	+ 2,8 mm	+ 14,0 mm	+ 5,0 mm	+ 1,3 mm	. . mm
Siut 12 » » . . .	+ 2,5	+ 13,3
Marak 20 » » . . .	+ 2,8	+ 13,1
Farafrah 1 enero 1874 . . .	+ 4,5	+ 13,8	+ 5,0	+ 0,7	+ 8,5
Dachel 10 » » . . .	+ 5,0	+ 13,2	+ 7,2	+ 1,6	+ 9,6
Dachel 16 marzo » . . .	+ 1,4	+ 11,0	+ 9,2	+ 0,9	+ 10,7
Chargeh 25 » » . . .	- 0,3	+ 9,4	+ 9,6	+ 1,0	+ 10,2
Esneh 1 abril » . . .	+ 0,8	+ 8,1	+ 9,4	+ 0,4	. .
Cairo 16 » » . . .	+ 0,6	. .	+ 8,7
Variación máxima	- 5,3 mm	- 5,9 mm	+ 4,6 mm	- 1,2 mm	+ 1,7 mm

El anerode Casella n.º 1641, que presentó las correcciones mínimas, era un instrumento pequeño, del tamaño de un reloj de bolsillo, y durante todo el tiempo lo llevó en un

bolsillo del pantalón el profesor Zittel; de donde se deduce que este modo de transportar los aneroides pequeños, los resguarda de las variaciones anormales. Los aneroides grandes y pesados, que había que transportar en los camellos, sufrieron grandes e inevitables sacudidas por el movimiento de éstos.

En tanto los aneroides acusen variaciones tan grandes como las mencionadas y mientras no se tenga la seguridad de que un instrumento no ha de sufrir variaciones rápidas y considerables, como sucede de ordinario, debe siempre llevarse en las excursiones o expediciones un barómetro de mercurio o un termómetro hipsométrico (§ 45).

Los aneroides, empleados como instrumento de interpolación o relleno, dan una gran precisión; por ejemplo, Hammer encontró para un aneroide Bohne («Zeitschr. f. Verm.», 1890) de 11 cm de diámetro, un error medio de $\pm 0,06$ mm en la determinación de diferencias de presión atmosférica hasta de 6 mm. También Schreiber encontró este mismo error medio para un aneroide igual en una serie de comparaciones efectuadas en un viaje por ferrocarril («Zeitschr. f. Verm.», 1907).

Elasticidad remanente. Cuando un cuerpo elástico, por ejemplo, una hoja de muelle sujeta por un extremo, se dobla por el otro, no vuelve instantáneamente a su posición primitiva al cesar la fuerza que produjo la deformación, sino que la alcanza después de varios movimientos cada vez menores. A esta propiedad de los cuerpos elásticos se llama *elasticidad remanente*.

Del mismo modo, cuando un aneroide experimenta un cambio de presión, no marca una lectura fija al cesar aquélla, sino que lentamente y poco a poco va variando en el mismo sentido que aquel cambio. Esta propiedad de los aneroides es conocida de mucho tiempo atrás, y ya fué estudiada con todo detenimiento por Reinherz («Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1887»).

Se ha comprobado que la mayor o menor elasticidad remanente está en relación con la magnitud y la velocidad del cambio de presión; por ejemplo, para dos aneroides iguales al representado en la figura 147, se observó la siguiente desviación, producida por la elasticidad remanente, a las dos horas de cesar los siguientes cambios de presión, que tuvieron lugar a una velocidad de 2,0 mm por minuto:

Cambio de presión:	20 mm	40 mm	70 mm	100 mm
Desviación remanente:	0,28	0,45	0,72	1,01

y para los mismos instrumentos, a un cambio de presión de 100 mm efectuado a diferentes velocidades, correspondieron las siguientes desviaciones remanentes:

Velocidad del cambio:	0,2 mm	0,5 mm	1,0 mm	2,0 mm por minuto
Desviación remanente:	0,38	0,60	0,74	1,01

De aquí se deduce que al comprobar las escalas deben producirse los cambios de presión a la misma velocidad a que se producen, en general, en su empleo ordinario, es decir, muy lentamente, a razón de 1 mm por 4 ó 5 minutos aproximadamente; la prueba de la escala para un cambio de 100 mm requerirá, por lo tanto, un día entero.

Estudio análogo al realizado por Reinherz ha sido llevado también a cabo por Chree (*Experiments on Aneroid Barometers, Phil. Trans. Londres 1898*), demostrando, una vez más, que el fenómeno de la elasticidad remanente es demasiado complicado para intentar reducirlo a una simple corrección de lectura.

Otros trabajos efectuados por Warburg y Heuse («Zeitschr. f. Instr.», 1919) han conducido al resultado de que la elasticidad remanente se aminora empleando una lámina muy

fina y muy dura, de unos 0,05 mm de espesor para la tapa y el cuerpo de la caja vacía, y también empleando doble caja.

§ 51. Temperatura y humedad del aire

Termómetro-honda. El procedimiento más corriente para medir la temperatura del aire consiste en colgar el termómetro a la sombra, bien quieto, y hacer la lectura al cabo de poco rato. Pero en el campo ni se dispone de sitio a propósito ni de tiempo para buscarlo; por lo cual se emplea el termómetro-honda, que es un termómetro atado al extremo de una cuerda que se hace girar con rapidez por el otro extremo sujeto con la mano, a razón de unas 100 vueltas por minuto; de este modo se pone el termómetro en contacto con una masa relativamente grande de aire cuya temperatura toma en su movimiento de rotación, que se continúa hasta que marque constantemente lo mismo.

A Schubert se debe un perfeccionamiento de este sistema tan sencillo, consistente en sustituir la cuerda por una varilla que sirve de empuñadura para hacer girar al termómetro, mejor dicho, a los dos termómetros, porque aquél forma parte del psicrómetro que lleva el nombre de su autor («Zeitschr. f. Instr.», 1896, y «Meteorolog. Zeitschr.», 1897).

Otro dispositivo más perfeccionado aún es el aspiró-psicrómetro de Assmann («Zeitschr. f. Instr.», 1892), en el cual se produce una corriente de aire con un ventilador (aspirador) movido por un mecanismo de relojería; la corriente tiene unos 15 minutos de duración y sustituye con ventaja al movimiento de rotación del termómetro. Todo el aparato tiene 21 cm de largo por 5 cm de diámetro y puede llevarse cómodamente al campo, en su estuche de cuero. Hemos comparado un aspiró-psicrómetro en el campo con un termómetro-honda ordinario y no hemos hallado discrepancias superiores a 0,5°.

Esto es todo cuanto se necesita para las nivelaciones barométricas corrientes; ni siquiera es preciso tomar la temperatura del aire a cada lectura del barómetro, pues basta tomarla de media en media hora, o con más frecuencia si la temperatura varía considerablemente, para conocer la marcha de aquélla; como mejor se hace es trazando la gráfica correspondiente, deduciendo después la temperatura para un momento cualquiera del tiempo que haya durado la operación completa.

Humedad del aire. Para observaciones de precisión en grandes alturas hay que tener en cuenta también la humedad del aire o la tensión del vapor acuoso; y aunque en la práctica raramente se haga caso de estos datos, es necesario conocer la relación teórica existente entre la humedad del aire y la medición barométrica de una altura.

Como mejor se determina la humedad del aire es por la comparación, empleada por vez primera por August, entre las indicaciones de dos termómetros, uno seco y otro húmedo. El modo de humedecer un termómetro consiste en envolver el depósito del mismo con una funda de muselina sobre la cual se echa un poco de agua. Al cabo de unos cinco minutos se evapora parte del agua, produciendo un descenso en la columna termométrica; cuanto más seco está el aire, más rápida y completa es la evaporación. La diferencia entre la temperatura dada por el termómetro húmedo y la del seco sirve para medir la humedad (o sequedad) del aire.

Se puede emplear también un termómetro-honda, o mejor aún el psicrómetro de Schubert antes citado; pero lo mejor, sin duda alguna, es el empleo del aspiró-psicrómetro de Assmann.

Para calcular la humedad del aire se empieza por tomar la tensión del vapor de agua saturado, cuyos valores, para distintas temperaturas, damos en la tabla XII del Apéndice, tomada de la tabla calculada por Regnault para los trabajos de la Comisión Internacional de Pesas y Medidas.

Si E es la tensión del vapor de agua saturado correspondiente a la temperatura t dada por el termómetro húmedo, y T es la temperatura que marca el termómetro seco, siendo B la lectura del barómetro, la tensión e del vapor de agua que se encuentra realmente en el aire será, para t , positiva:

$$e = E - \frac{0,48 (T - t) B}{610 - t} \quad (1)$$

Por ejemplo:

$$T = 16,4^\circ, \quad t = 13,2^\circ, \quad B = 735 \text{ mm}, \quad E = 11,3 \text{ mm};$$

$$e = 11,3 - \frac{0,48 \times 3,2 \times 735}{596,8} = 11,3 - 1,9 = 9,4 \text{ mm}.$$

Para una altura barométrica media cualquiera y un valor medio de t , se puede simplificar la fórmula anterior; por ejemplo, para $B = 740$ mm, $t = 10$, se tiene:

$$e = E - 0,55 (T - t). \quad (2)$$

Con esta fórmula aproximada se obtiene para el ejemplo primero $e = 9,5$, casi igual que el resultado $e = 9,4$ de la fórmula completa (Weinstein, «Handbuch der phys. Massbestimmung II»).

Para el cálculo de e se emplean tablas especiales, como las psicrométricas centesimales de Jelinek, las de Landolt-Börnstein y las meteorológicas internacionales.

En la tabla XIV del Apéndice damos un extracto de las tablas psicrométricas de Jelinek, cuyo uso se comprende mejor con un ejemplo. Supongamos que la lectura hecha en el termómetro seco T sea $16,4^\circ$ y en el húmedo $t = 13,2^\circ$. Para no tener que interpolar dos veces, se toman las siguientes temperaturas, en vez de las efectivamente leídas:

$$T = 16,2^\circ \quad \text{y} \quad t = 13,0^\circ \quad (T - t = 3,2^\circ)$$

o bien:

$$T = 16,0^\circ \quad \text{y} \quad t = 12,8^\circ \quad (T - t = 3,2^\circ).$$

Como el elemento principal es la diferencia entre ambas temperaturas, se pueden variar las correspondientes lecturas, sin alterar su diferencia, de modo que una de ellas marque decenas completas; y así se emplea la tabla XIV del Apéndice con una sola interpolación, obteniéndose para e el valor 9,3 ó el 9,1, suficientemente aproximado para los efectos de nivelaciones barométricas.

Como con frecuencia se da el caso de calcular altitudes por observaciones barométricas sin disponer de datos sobre la humedad del aire, es de mucha importancia conocer siquiera los valores medios de la tensión del vapor en diferentes sitios y épocas, que para cada lugar en particular puede facilitar el Servicio Meteorológico del país de que se trate (*).

§ 52. Fórmula barométrica completa

En el párrafo 41 expusimos el fundamento de la teoría de la nivelación barométrica, que vamos ahora a desarrollar hasta llegar a la fórmula completa que da la diferencia de nivel entre dos puntos, en función de las correspondientes lecturas barométricas y con las

(*) En España, el Servicio Meteorológico Nacional (oficinas centrales en el Parque del Retiro, Madrid).

distintas correcciones ya consideradas. Partamos para ello de la fórmula diferencial (10) de la página 157:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0} g \frac{1}{1 + \alpha t} dH. \quad (1)$$

La temperatura t del aire varía con la altura H ; pero como se desconoce, en general, la ley de la disminución de temperatura con la altura, y puesto que para la mayor parte de los casos es suficiente con tomar para la temperatura del aire la media aritmética de las observadas en las estaciones superior e inferior, como si fuera constante, procederemos, en la integración de la fórmula diferencial (1) considerando t como constante; pero no sucede lo mismo con la aceleración de la gravedad, variable con la altura, y que según la fórmula (1) de la página 100, está expresada en función de la altitud del modo siguiente:

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2H}{r}\right) \quad (2)$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la altitud H y g_0 la correspondiente a la cota cero. Sustituyendo este valor de g en (1), se tiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g_0}{1 + \alpha t} \left(1 - \frac{2H}{r}\right) dH. \quad (3)$$

Integrando esta ecuación resulta, separadamente para cada miembro:

$$\int \frac{dp}{p} = \log p = \frac{\log p}{\mu}, \quad \int \left(1 - \frac{2H}{r}\right) dH = H - \frac{H^2}{r}, \quad (4)$$

donde l es el logaritmo natural, \log el logaritmo decimal y $\mu = 0,434294$ el módulo de conversión. Es decir, que la integral de (3) será:

$$\frac{\log p}{\mu} = -\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g_0}{1 + \alpha t} \left(H - \frac{H^2}{r}\right) + \text{constante}. \quad (5)$$

Esta constante de integración se determina tomando dos presiones p con sus correspondientes altitudes H :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estación superior } p = b, \quad H = H_2 \\ \text{inferior } p = B, \quad H = H_1 \end{array} \right\} H_2 - H_1 = h, \quad \frac{H_1 + H_2}{2} = H. \quad (6)$$

Aplicando la fórmula (5) dos veces, una para cada par de valores de p y H , y restando ordenadamente las ecuaciones resultantes, se tiene:

$$\frac{\log B - \log b}{\mu} = +\frac{\Delta_0}{p_0} \frac{g_0}{1 + \alpha t} \left(H_2 - H_1 - \frac{H_2^2 - H_1^2}{r}\right);$$

pero

$$H_2 - H_1 - \frac{H_2^2 - H_1^2}{r} = (H_2 - H_1) \left(1 - \frac{H_2 + H_1}{r}\right),$$

luego sustituyendo este valor y despejando $H_2 - H_1$, resulta:

$$H_2 - H_1 = \frac{\log B - \log b}{\mu} \left(\frac{p_0}{\Delta_0 g_0}\right) (1 + \alpha t) \left(1 + \frac{H_2 + H_1}{r}\right). \quad (7)$$

Ahora bien, según la fórmula (5) de la página 101,

$$g_0 = g_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{g_0} = \frac{1}{g_0^{45}} (1 + \beta \cos 2\varphi), \quad (8)$$

y sustituyendo este valor en (7), así como poniendo en vez de $H_2 - H_1$ su igual h (6), y haciendo intervenir la altura media H (6), se tiene:

$$h = \log \left(\frac{B}{b}\right) \frac{1}{\mu} \frac{p_0}{\Delta_0} \frac{1}{g_0^{45}} (1 + \beta \cos 2\varphi) (1 + \alpha t) \left(1 + \frac{2H}{r}\right) \quad (9)$$

Vamos ahora a ocuparnos de las cantidades p_0 y Δ_0 que ya vimos relacionadas en la ley de Mariotte-Gay-Lussac [fórmula (8) de la pág. 157]. Sabemos que Δ_0 es la densidad del aire a la temperatura de 0° , bajo la presión inicial p_0 , que debe ser igual a 760 mm de mercurio; calculemos, pues, la presión ejercida por una columna de mercurio de sección unidad y de 760 mm de altura, a 0° de temperatura, al nivel del mar y a la latitud geográfica de 45° , es decir, el peso de esta columna. Siendo $q = 13,59593$ la densidad del mercurio, este peso es, evidentemente, $0,76 \times q \times g_0^{45}$, y sustituyendo este valor de p_0 en (9) se tiene:

$$h = \log \left(\frac{B}{b} \right) \frac{0,76 q}{\mu \Delta_0} (1 + \beta \cos 2\varphi) (1 + \alpha t) \left(1 + \frac{2H}{r} \right). \quad (10)$$

Pasemos ahora a determinar la densidad Δ_0 del aire. El aire libre, como es sabido, es una mezcla de aire seco con vapor de agua y pequeñas cantidades de ácido carbónico, que de momento no vamos a tener en cuenta. El valor constante de la densidad D_0 del aire seco a 0° y a 760 mm de presión, determinado por Regnault, es:

$$D_0 = 0,00129277. \quad (11)$$

También es constante la relación entre la densidad D_0' del vapor de agua a 0° de temperatura y bajo 760 mm de presión, y D_0 ; esta densidad relativa del vapor de agua ha sido determinada experimentalmente, y es

$$D_0' = d \cdot D_0 = 0,623 D_0. \quad (12)$$

Ahora bien, la tensión e del vapor de agua puede determinarse con un psicrómetro, o de otro modo cualquiera (§ 51); según la ley de Dalton, la tensión de la mezcla es igual a la suma de las tensiones del aire seco y del vapor de agua, y lo mismo sucede con la densidad de la mezcla en función de las de sus dos componentes; luego, ya podemos formar el siguiente cuadro de valores:

aire seco	$\left\{ \begin{array}{l} \text{tensión} = p - e \\ \text{ } = p_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{densidad} = \Delta \\ \text{ } = D_0 \end{array} \right.$	(13)

vapor de agua	$\left\{ \begin{array}{l} \text{tensión} = e \\ \text{ } = p_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{densidad} = \Delta' \\ \text{ } = D_0' \end{array} \right.$	(14)

mezcla	$\left\{ \begin{array}{l} \text{presión} = p \\ \text{ } = p_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{densidad} = \Delta + \Delta' \\ \text{ } = \Delta_0 \end{array} \right.$	(15)

Expresemos ahora Δ y Δ' en función de D_0 y D_0' respectivamente, aplicando para ello dos veces la ley de Mariotte:

$$\frac{\Delta}{D_0} = \frac{p - e}{p_0} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta'}{D_0'} = \frac{e}{p_0},$$

de donde:

$$\Delta + \Delta' = \frac{D_0(p - e)}{p_0} + \frac{D_0' e}{p_0}$$

y sustituyendo aquí D_0' por su valor (12):

$$\Delta + \Delta' = \frac{D_0}{p_0} (p - 0,377 e) = \frac{D_0 p}{p_0} \left(1 - 0,377 \frac{e}{p} \right). \quad (16)$$

Aplicando una vez más la ley de Mariotte, ahora a la mezcla (15), se tiene:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta + \Delta'} = \frac{p_0}{p},$$

de donde, sustituyendo $\Delta + \Delta'$ por su valor (16), resulta finalmente:

$$\Delta_0 = D_0 \left(1 - 0,377 \frac{e}{p} \right). \quad (17)$$

También se hace una reducción semejante, aunque casi despreciable, para la pequeña cantidad de ácido carbónico existente en el aire; para ello se sustituye en (13) el aire seco por la mezcla de éste y el vapor de agua; en (14) en vez del vapor de agua se pone el ácido carbónico, y en (15) se pone la mezcla de los tres gases; después se procede con idéntico razonamiento al que nos condujo a la fórmula (17); pero en ésta hay que poner entonces $D_0 \left(1 - 0,377 \frac{e}{p} \right)$ en vez de D_0 , obteniendo así una nueva expresión de la forma de dicha ecuación (17). Llamemos e' a la tensión del ácido carbónico en el aire, d' a la relación entre la densidad D_0'' del ácido carbónico a 0° y a 760 mm de presión y la densidad D_0 , y la fórmula (17), según lo antes expuesto, será:

$$\Delta_0 = D_0 \left(1 - 0,377 \frac{e}{p} \right) \left[1 - (1 - d') \frac{e'}{p} \right]. \quad (18)$$

El valor de d' , determinado experimentalmente, es $d' = 1,529$; ya sabemos que el ácido carbónico es un gas pesado, es decir, que su densidad relativa d' es mayor que la unidad. La tensión e' del ácido carbónico puede considerarse, en el aire, como constante, y $\frac{e'}{p}$ tiene por valor, muy aproximado, 0,0004; sustituyendo estos valores numéricos en (18) resulta:

$$\Delta_0 = D_0 \left(1 - 0,377 \frac{e}{p} \right) 1,00021. \quad (19)$$

Fórmula final. Si en la fórmula (10) se sustituye Δ_0 por su valor (19), poniendo a su vez en este último el valor numérico (11) de D_0 , resulta finalmente, para expresión definitiva y completa de la diferencia de nivel h , la fórmula siguiente:

$$h = K \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \left(1 + 0,377 \frac{e}{p} \right) (1 + \beta \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2H}{r} \right) \quad (20)$$

donde

$$K = \frac{0,76}{\mu} \frac{13,59593}{0,00129277} \frac{1}{1,00021} = 18400. \quad (21)$$

Para facilitar la interpretación de esta fórmula, resumimos a continuación el significado de las diferentes cantidades que en ella intervienen:

h es la diferencia de nivel que se trata de medir, que resulta expresada en metros, porque en esta unidad está expresada la altura barométrica 0,76 en (21) y en (10); $K = 18400$ es la llamada constante barométrica; sus diversos componentes son (21): 0,76 m la altura normal de una columna de mercurio, $\mu = 0,4342945$ el módulo logarítmico, 13,59593 la densidad del mercurio respecto al agua, 0,00129277 la densidad del aire bajo presión normal (760)₀⁴⁵, 1,00021 el factor de reducción para el ácido carbónico;

B y b son las presiones atmosféricas observadas simultáneamente en las estaciones superior e inferior, expresadas en cualquier unidad, con tal que ésta sea la misma para ambas;

$\alpha = 0,003665$ es el coeficiente de dilatación del aire para 1°C , o sea $\alpha = \frac{1}{272,85}$;

t es la temperatura media del aire ambiente en $^\circ \text{C}$;

e es la tensión media del aire libre;

p es la presión media atmosférica $= \frac{B + b}{2}$;

0,377 = 1 - d, donde d = 0,623, es la densidad del vapor de agua respecto al aire a igualdad de presión y temperatura;
 β = 0,00264 es el coeficiente de gravedad, dependiente del achatamiento terrestre;
 φ es la latitud geográfica media de ambas estaciones;
 H es la altitud media de las dos estaciones sobre el nivel del mar, en metros, y
 r = 6370000 m es el radio de la Tierra.

En nuestra fórmula final (20) no figura nada referente a la reducción de las alturas barométricas a igual temperatura, a igual gravedad, etc., porque estas reducciones deben hacerse *antes* de aplicar la fórmula o de utilizar las tablas correspondientes. La exclusión de las reducciones barométricas de la fórmula anterior es imprescindible para su aplicación a los aneroides, ya que las reducciones para estos instrumentos no pueden, en ningún caso, llevarse a la fórmula, y las reducciones para los barómetros de mercurio, que antiguamente figuraban, en general, en aquélla, como la corrección de gravedad, por ejemplo, no son aplicables a las observaciones efectuadas con los aneroides.

Otras fórmulas barométricas. En vez de suponer constante, como hemos hecho nosotros, la temperatura media del aire, se han llevado a la fórmula barométrica varias leyes sobre la variación de la temperatura con la altura, como se ve, por ejemplo, en la obra de Liznar, *Nivelación barométrica* (Leipzig y Viena, 1904). También para la corrección de humedad, en la cual hemos supuesto constante la tensión del vapor de agua, se introduce una variación, que obedece a leyes empíricas dadas por Hann (Hann-Stüring, *Tratado de Meteorología*, 4.^a ed., Leipzig, 1926; Liznar, obra antes citada; Grossmann, «Annalen der Hydr. u. marit. Met.», 1905). Según Hann, entre las tensiones e₁ y e₂ de vapor de agua en dos estaciones, cuya diferencia de nivel es h, existe la siguiente relación:

$$e_2 = e_1 10^{\frac{-h}{6700}}$$

De este modo aumenta extraordinariamente la precisión con que se tiene en cuenta la influencia de la humedad del aire en las fórmulas barométricas. Pero, prácticamente, carece de importancia el mínimo efecto producido por estas precisiones, en el cálculo de las diferencias de nivel.

§ 53. Tablas barométricas

La fórmula completa que da la diferencia de nivel h entre dos puntos es, como hemos visto (pág. 197):

$$h = 18400 \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \left(1 + 0,377 \frac{e}{p}\right) (1 + \beta \cos 2\varphi) \left(1 + 2 \frac{H}{r}\right) \quad (1)$$

α = 0,003665, β = 0,00264, r = 6370000.

Para las cantidades entre paréntesis, hemos calculado tablas especiales que damos en el Apéndice, a saber:

tabla XVI del Apéndice, para log (1 + α t)	
• XV • • •	log (1 + 0,377 $\frac{e}{p}$)
• X • • •	log (1 + β cos 2φ) y log (1 + $\frac{2H}{r}$)

Vamos a aplicar estas tablas a un ejemplo práctico: la determinación del desnivel existente entre dos estaciones meteorológicas (Karlsruhe y Höhenschwand), tomando para ello los valores medios de cinco años de los distintos elementos meteorológicos observados:

	Barómetro	Temp. del aire	Humedad
Estación inferior (Karlsruhe)	751,79 mm	+ 9,5°	+ 7,5 mm
• superior (Höhenschwand)	676,13	+ 5,9	+ 6,3
Media	713,96 mm	t = + 7,7°	e = + 6,9 mm

(2)

Los datos 751,79 y 676,13 son alturas dadas por barómetros de mercurio, ambas reducidas a 0°. La corrección de gravedad no se ha aplicado a estos datos. Las latitudes geográficas y las altitudes aproximadas sobre el nivel del mar para ambas estaciones son las siguientes:

Karlsruhe	H ₁ = 120 m	φ ₁ = 49° 1'
Höhenschwand	H ₂ = 1000	φ ₂ = 47 44
Media	H = 560 m	φ = 48° 22'

(3)

La corrección de gravedad para B y H con la latitud φ da, según la fórmula (3) de la página 171:

$$B - B \beta \cos 2\varphi - 2 \frac{BH}{r} = B_0^{45}$$

Calculando directamente el valor numérico de esta expresión o con ayuda de la tabla X del Apéndice, se tiene:

Para Karlsruhe	751,79 + 0,28 - 0,03 = 752,04
• Höhenschwand	676,13 + 0,17 - 0,21 = 676,09

(4)

Para aplicar la fórmula barométrica (1) tenemos ya los siguientes valores numéricos:

$$B = 752,04 \text{ mm} \quad \text{Media } p = 714 \text{ mm}, \quad e = 6,9 \text{ mm}, \quad t = 7,7^\circ, \quad \varphi = 48^\circ 22', \quad H = 560 \text{ m} \quad (5)$$

$$b = 676,09$$

log 752,04 = 2,876241		
log 676,09 = 2,830050		
Diferencia 0,046236	log 0,046236	8,66498
	K = 18400, log K	4,26482
La tabla XVI, con t = 7,7°, da para log (1 + α t)		0,01209
• • XV, • e = 6,9 y p = 714, da para log (1 + 0,377 $\frac{e}{p}$)		0,00158
• • X, • φ = 48,37° da para log (1 + β cos 2φ)		9,99987
• • X, • H = 560 da para log (1 + $\frac{2H}{r}$)		0,00008
	Suma, log h	2,94342

(6)

Si la altura de la estación de abajo está referida al nivel del mar, es decir, para Karlsruhe = 123,0, la altitud de la estación superior, Höhenschwand será = 123,0 + 877,8 = 1000,8 m.

Tablas y fórmulas barométricas para regiones determinadas. El cálculo anterior, con la fórmula general (1) y las tablas generales X, XV y XVI, se aplica raras veces. Afortunadamente son tan pequeños los tres últimos factores de aquélla, que pueden considerarse como constantes para grandes extensiones y para casos numéricos concretos, refundiéndose con la constante K que figura en la misma. En particular para Alemania se tiene, con e = 7,2 mm:

$$\frac{e}{p} = \frac{1}{100}, \quad \varphi = 50^\circ, \quad H = 500 \text{ m.} \quad (7)$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (1), resulta:

$$\text{para Alemania: } h = 18464 (\log B - \log b) (1 + 0,003665 t). \quad (8)$$

Con esta fórmula hemos calculado las tablas barométricas XVII a XX del Apéndice.

En vez de tomar $e : p = 0,01$, que facilita mucho el cálculo, pero que tratándose de valores extremos de e se sale ya de toda aproximación tolerable, puede emplearse otra relación, fundada en los trabajos hechos sobre el particular por Laplace y Biot; en efecto, de los valores medios mensuales de la tensión e del vapor acuoso y de la temperatura t en Baden, se puede deducir la siguiente fórmula empírica:

$$e = 3,6 \text{ mm} + 0,45 t. \quad (9)$$

Si tomamos $p = 700$ mm, en números redondos, tendremos:

$$1 + 0,377 \frac{e}{p} = 1 + 0,001939 + 0,0002423 t. \quad (10)$$

De análoga manera ha llegado Hann a la fórmula siguiente, deducida de observaciones efectuadas en los Alpes:

$$1 + f(e) = 1 + 0,377 \frac{e}{p} = 1 + 0,00154 + 0,000341 t. \quad (11)$$

Como se ve, las fórmulas (10) y (11), indicada la primera para Baden y la segunda para los Alpes, no se diferencian mucho entre sí. Demos forma general a estas expresiones y tendremos:

$$1 + f(e) = 1 + 0,377 \frac{e}{p} = 1 + \alpha' + \beta' t \quad (12)$$

y sustituyendo esta expresión en la fórmula completa (1) resultará:

$$h = 18400 (1 + \alpha t) \left\{ \begin{array}{l} [1 + f(e)] \log(\dots) (1 + \beta \cos 2\varphi) (1 + \dots) \\ (1 + \alpha t) [1 + f(e)] = (1 + \alpha t) (1 + \alpha' + \beta' t) \end{array} \right\} \quad (13)$$

$$= (1 + \alpha') [1 + (\alpha + \beta') t] \text{ (aprox.)}. \quad (14)$$

El factor $(1 + \alpha')$ entra a formar parte de la constante $K = 18400$, y los valores de α y β' se suman para formar un solo factor; en la fórmula (11) de Hann para los Alpes, es $\alpha' = 0,00154$ y $\beta' = 0,000341$, luego sustituyendo valores en (14) se tendrá:

$$h = 18428 (1 + 0,004006 t) (\log B - \log b) (1 + \beta \cos 2\varphi) (1 + \dots). \quad (15)$$

El tener en cuenta la humedad del aire hace subir de 18400 a 18428, es decir, en un 0,15% la constante K , y también el coeficiente de dilatación del aire pasa de 0,003665 a 0,004, como ya hallaron Laplace y Biot. Si los dos últimos factores, considerados como constantes, se refunden con el primero con $\varphi = 50^\circ$ y $H = 500$, se tiene:

$$h = 18423 (1 + 0,004 t) (\log B - \log b). \quad (16)$$

Esta fórmula (16) tiene, técnicamente, ciertas ventajas sobre la anterior (8), pero que no tienen la menor importancia para las necesidades ordinarias de la práctica. Si sólo se trata del cálculo de tablas que deben servir para la mayor parte de los casos, parece expuesto variar el coeficiente $\alpha = 0,003665$. El aumento de 0,003665 a 0,004 que se ve en la fórmula (16) es resultado de una aproximación, que aunque recoge el período único de la temperatura del aire y de la humedad, no obedece a la variación diaria de la temperatura para humedad aproximadamente constante. Una tabla barométrica calculada con la fórmula (8) puede servir, con una pequeña tabla suplementaria de corrección, para todos los valores más o menos bien conocidos de la humedad y para cualquier época del año; pero no puede decirse lo mismo de la fórmula (16).

Finalmente, la fórmula (8) o la tabla que con su aplicación se calcule, puede hacerse utilizable para una humedad distinta del modo más sencillo, con sólo variar la temperatura t , consiguiéndose así una mayor precisión de dicha fórmula. De este modo hemos encontrado que la fórmula (8) o sus tablas correspondientes puede adaptarse a la ley de la humedad de Hann (11), con sólo tomar la temperatura, entre 15° y 20° , un grado más alta de lo que se obtiene por observación directa. Por todas estas razones, y siempre en el supuesto de que corresponde a regiones próximas a Europa central, seguiremos empleando la fórmula (8).

I. Altitudes sobre el mar. El cálculo de altitudes sobre el mar mediante la fórmula barométrica, se hace de la manera más fácil, por diferencias, asignando a la superficie del mar una altura barométrica fija hipotética. En Europa central la altura barométrica media al nivel del mar es de unos 762 mm; la fórmula (8) conviene escribirla del modo siguiente, para hacer intervenir esta presión:

$$h = 18464 (1 + 0,003665 t) [(\log 762 - \log b) - (\log 762 - \log B)].$$

Pongamos ahora:

$$18464 (1 + 0,003665 t) (\log 762 - \log b) = H_1 \quad (17)$$

y

$$18464 (1 + 0,003665 t) (\log 762 - \log B) = H_2, \quad (18)$$

con lo cual se tiene:

$$h = H_2 - H_1. \quad (19)$$

Tomemos, como aplicación, un caso práctico:

$$\begin{array}{l} \text{Estación inferior: } B = 752,7 \text{ mm} \\ \text{superior: } b = 720,4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Temp. } t_1 = 16^\circ \\ t_2 = 14 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} B \\ b \end{array}} \right\} \text{Media } t = 15^\circ.$$

La tabla XVII del Apéndice da, para $t = 15^\circ$, los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} \text{Para } 752,7 \text{ mm} \\ \text{ } 720,4 \end{array} \quad \begin{array}{l} H_1 = 103,9 \text{ m} \\ H_2 = 474,9 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \end{array}} \right\} h = 371,0 \text{ m}. \quad (20)$$

En esta tabla damos únicamente los valores H para un solo caso, $t = 15^\circ$, y para presiones B comprendidas entre 720 mm y 764 mm. En ediciones separadas hemos publicado tablas barométricas completas, para todas las temperaturas comprendidas entre 0° y 35° , y para todas las lecturas barométricas entre 630 mm y 775 mm (*).

Temperatura reducida. También puede calcularse la altitud con la fórmula barométrica completa [pág. 197, fórmula (20)], tomando en vez de la temperatura media del aire una temperatura reducida. Este procedimiento fué empleado por primera vez por Angot («Annales du Bureau central météorologique de France. Mémoires 1896, Paris 1898»), quien reunía los tres factores $(1 + \alpha t) \left(1 + 0,377 \frac{e}{p}\right) (1 + \beta \cos 2\varphi)$ en uno solo, de la forma $1 + \alpha \theta$, calculando tablas de manejo sencillo para θ . Estas tablas se encuentran también en las «Tablas para el cálculo barométrico de desniveles» por A. de Quervain, Estrasburgo, 1904.

(*) Tablas barométricas de Jordan, 3.^a ed. Stuttgart; J. B. Metzler, 1917.

Tablas barométricas de Jordan para países bajos y para grandes alturas hasta de 8000 m. 2.^a ed. Hannover, 1914.

Tabla barométrica para $t = 15^\circ$, con tablilla de corrección para t ; figura en las Tablas matemáticas y geodésicas de Jordan; 10.^a ed. Hannover, Helwin, 1914.

Tablas barométricas gráficas, de Vogler, para hallar el desnivel por simple sustracción. Dibujadas por Feld. Brunsviga, 1880.

Tomando logaritmos, y desarrollando en serie logarítmica el numerador y denominador del segundo miembro, se tiene (con $\mu = 0,43429$):

$$\begin{aligned} \log B - \log b &= \mu \left[+ \left(\frac{B-b}{B+b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3 - \dots \right] \\ &\quad - \mu \left[- \left(\frac{B-b}{B+b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3 - \dots \right] \\ \log B - \log b &= 2\mu \left[\left(\frac{B-b}{B+b} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

y sustituyendo esta expresión en (24), resulta:

$$h = 2\mu K (1 + \alpha t) \left[\frac{B-b}{B+b} + \frac{1}{3} \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3 + \dots \right] \quad (28)$$

Despreciando aquí el segundo término, se tiene la fórmula aproximada (26); es decir, que este segundo término representa el error de dicha fórmula aproximada; que designado con Δh , será:

$$\Delta h = \frac{2}{3} \mu K (1 + \alpha t) \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3 \quad (29)$$

Para apreciar la precisión basta con considerar el caso $t = 0$; con esta hipótesis, la fórmula anterior se convierte en esta otra:

$$\Delta h = \frac{2}{3} \mu K \left(\frac{B-b}{B+b} \right)^3$$

y la (26) en esta otra:

$$h = 2\mu K \frac{B-b}{B+b}$$

Sustituyendo en la expresión de Δh este valor de h , se tiene:

$$\Delta h = \frac{1}{12} \frac{h^3}{\mu^2 K^2} = 1,296 \left(\frac{h}{1000} \right)^3$$

Como se ve, el despreciar el último término de (28) da lugar a un error que varía con la tercera potencia del desnivel, en la proporción siguiente:

$h = 100$ m	500 m	1000 m	1500 m	2000 m	3000 m
$\Delta h = 0,001$	0,16	1,3	4,4	10,4	35,0.

El cálculo aproximado hecho con la fórmula (26) es más que suficiente para las diferencias de nivel menores de 1000 m, que es el caso más frecuente en la práctica: sobre los 1000 m resulta inadmisibles el error que se obtiene con dicha fórmula.

Para aplicar la fórmula (26) conviene escribirla del modo siguiente:

$$h = \frac{\mu K (1 + \alpha t)}{B} \Delta B = \frac{8019}{B} (1 + \alpha t) \Delta B \quad (30)$$

donde B es la altura barométrica media y ΔB la diferencia barométrica: pero así y todo no resulta fácil el cálculo directo con esta fórmula, por lo cual se prepara de modo que sus dos primeros factores puedan tabularse; para ello escribiremos:

$$\begin{aligned} \text{Desnivel } (\Delta h_1) &= \frac{\mu K}{B} (1 + \alpha t) = \frac{8019}{B} (1 + \alpha t) \\ h &= (\Delta h_1) \Delta B. \end{aligned}$$

En la tabla XVIII del Apéndice damos el valor del desnivel (Δh_1) en función de B y de t .

En el ejemplo dado en la página 201, tenemos $B - b = 752,7$ mm - 720,4 mm = 32,3 mm; la altura barométrica media es = 736,5 mm, y la temperatura media del aire $t = 15^\circ$. La tabla XVIII del Apéndice da para estos valores un desnivel = 11,49 m, y por lo tanto:

$$h = 11,49 \times 32,3 = 371,0 \text{ m.} \quad (31)$$

Este cálculo resulta extremadamente sencillo empleando la regla de cálculo.

§ 54. Práctica de la nivelación barométrica: observación y cálculo

Una vez descritos los instrumentos y la teoría de la nivelación barométrica, veamos, con ejemplos, el método a seguir en la práctica, observaciones y cálculo, para llevar aquélla a cabo.

En el párrafo anterior, fórmulas (19), (20) y (31) hemos visto un sencillo ejemplo de determinación barométrica de una altitud. Desde luego se da por supuesto que las lecturas en los dos puntos se hacen en el mismo instante, con dos instrumentos exactamente comparados, y ya hecha la corrección de presión; o bien, que se hacen las dos lecturas con el mismo instrumento y sin que varíe la presión atmosférica en el intervalo que medie entre una y otra.

Cuando se sigue el método de observaciones sucesivas, y no siendo muy grande el intervalo entre una y otra, se mide dos veces el desnivel volviendo al punto de partida, y así puede apreciarse y tenerse en cuenta el cambio posible de la presión atmosférica; como ejemplo vamos a reseñar la medición de la altura de la pirámide Cheops, efectuada por el autor con dos barómetros aneroides:

Fecha	Estaciones	Naudet	Goldschmid	Temp. del aire
27 nov. 1873				
3 h 42 min	Pie de la pirámide	761,77 mm	760,47 mm	20,5°
3 58	Vértice » »	749,44	747,98	—
4 37	» » »	749,50	748,14	19,8
4 47	Pie » »	761,06	759,78	19,9

Ya estas lecturas llevan las correcciones instrumentales y cada dato es promedio de tres a cuatro lecturas. Las ocho observaciones, convenientemente agrupadas, dan las medias siguientes:

	abajo	arriba	diferencias	
Naudet	761,77 mm	749,44 mm	12,33 mm	} subida
Goldschmid	760,47	747,98	12,49	
Naudet	761,06	749,50	11,56	} bajada
Goldschmid	759,78	748,14	11,64	
Medias	760,77 mm	748,76 mm	12,01 mm	

Para el cálculo tomamos, pues, como lecturas inferior y superior respectivamente 760,77 mm y 748,76 mm, con la temperatura media de 20°. La altura barométrica media es $B = 755$ mm, en números redondos.

Según la tabla XVIII del Apéndice, a la presión $B = 755$ mm y a la temperatura $t = 20^\circ$ corresponde un desnivel = 11,40 m, luego la altura de la pirámide Cheops es:

$$h = 11,40 \times 12,01 = 136,9 \text{ m.} \quad (1)$$

En vez de tomar, como aquí se ha hecho, el promedio de la subida y la bajada, se puede también suponer que la presión atmosférica varía proporcionalmente al tiempo, y

llevar a las lecturas del barómetro una corrección que aumenta con el tiempo. Este método es particularmente ventajoso cuando es muy variable el tiempo transcurrido entre dos observaciones consecutivas, y cuando desde el punto de partida se hacen varias lecturas en puntos intermedios.

Como ejemplo, damos el siguiente extracto del que describiremos con todo detalle en la página 209, referente a una nivelación barométrica efectuada en Hameln. El itinerario partía de una señal de nivelación *N.B.* y volvía al mismo punto. La presión atmosférica varió, desde las 3^h 35^m en que comenzó la operación hasta las 5^h 36^m en que terminó, en 0,4 mm. Como altura barométrica de partida se toma la primera lectura, hecha a las 3^h 35^m; con el factor de reducción para un minuto $\frac{0,4}{121}$ tomado en la regla de cálculo, se van calculando (con 0,1 mm de aproximación) las alturas barométricas reducidas que figuran en dicho ejemplo (cuadro de la página 210), y con éstas y la temperatura $t = 15^\circ$ se hallan, mediante la tabla barométrica, las alturas H , que con la cota de partida $N.B. = 71,4$ m dan las altitudes respecto al nivel cero. Para los puntos (10) y (63) se hizo una nivelación taquimétrica, a fin de comparar sus cotas con las resultantes de la barométrica.

Punto	Hora	Baróm.	Baróm. reduc.	Tabla barom.	Altitud sobre el cero normal
	h min min	mm	mm	m	m
N. B.	3 35 0	760,8	0,0 = 760,8	13,3	71,4
(10)	4 32 57	749,1	+ 0,2 = 749,3	142,2	200,3 (comp. 201,5)
(63)	5 06 91	753,9	+ 0,3 = 754,2	87,0	145,1 (" 147,3)
N. B.	5 36 121	760,4	+ 0,4 = 760,8	13,3	71,4
Temperatura media		0,4			
= 15°		121			

También se puede hacer la reducción, no en las alturas barométricas, sino en las altitudes resultantes de aquéllas, y corregir estas alturas, referidas a la de partida, según el tiempo transcurrido entre las observaciones correspondientes; o también al hacer el cálculo de los desniveles, se reducen las diferencias barométricas (o también los desniveles) según los intervalos de tiempo transcurridos, de modo que la suma de todos los desniveles debe ser cero.

Interpolación barométrica. Sin necesidad de teoría alguna pueden interpolarse entre dos puntos fijos varios intermedios, con la sola hipótesis de admitir que las alturas barométricas varían aproximadamente en proporción con las altitudes, como se ve en el siguiente ejemplo:

Punto	Alt dadas H	Alt. barom. observadas B	δB	$11,81 \delta B$ $= \delta H$	Alt. calculadas H	Desnivel
P_2	728,9	704,1 mm				
a		707,0	2,9 mm	34,2 mm	728,9 m	257,5
b		716,4	9,4	111,1	694,7	21 8
c		718,4	2,0	23,6	583,6	= 11,81
d		721,2	2,8	33,1	560,0	
P_1	471,4	725,9	4,7	55,5	526,9	
	257,5 $= \Delta H$	21,8	21,8	257,5 $= \Delta H$	471,4	
		$= \Delta B$				

El desnivel resultante de las observaciones es $257,5 : 21,8 = 11,81$ m, y, por consiguiente, se tiene $\delta H = 11,81 \times 2,9 = 34,2$ m, etc. Este valor δH como mejor se calcula es con la regla de cálculo, y en este caso hasta sin calcular el desnivel, sino directamente:

$$\frac{257,5}{21,8} 2,9 = 34,2, \quad \frac{257,5}{21,8} 9,4 = 111,1, \text{ etc}$$

Este cálculo de interpolación resulta ventajoso sobre el empleo de las tablas barométricas de desniveles, únicamente cuando se trata de altitudes moderadas y si se utiliza la regla de cálculo.

Si no se quiere hacer esta interpolación sobre la hipótesis antes admitida (véase en la página 213 la correspondiente ley de errores), se hace mediante el empleo de las tablas barométricas, con las cuales se deduce, en primer lugar, el valor de las alturas, con interpolación de la temperatura del aire, o se calculan éstas en función de los desniveles, y después se reparte proporcionalmente el error residual resultante. De este modo se procede en el ejemplo de la página 210.

En las tablas citadas en primer lugar al pie de la página 201 damos también unas instrucciones para poder interpolar, con la tabla, entre límites cualesquiera, prescindiendo de momento de la temperatura del aire realmente observada, y tomando una temperatura tal, que los valores de la tabla se correspondan, sin desviación alguna, con los intervalos de alturas desniveles.

Después del sencillo ejemplo que hemos considerado, nos queda todavía por indicar el método a seguir en nivelaciones de más extensión; la posición de los puntos se fija, generalmente, como para las nivelaciones superficiales (§ 6), con un mapa o plano de la región de que se trate (véase página 211). Las oscilaciones barométricas se determinan con lecturas continuadas de un barómetro fijo, o con cierres repetidos en puntos dados de cota fija.

Nivelación con barómetro fijo. El 6 de julio de 1887 se efectuó en Nenndorf una nivelación barométrica, que comprendía alturas hasta de 200 m, y para hallar los errores de aquélla, se determinaron también estas alturas por nivelación trigonométrica.

Como la operación requería varias horas, se instaló un barómetro fijo, para comparar los resultados, en Nenndorf (Hotel Cassel), donde quedó un observador que a cada cuarto de hora leía la altura barométrica y la temperatura del barómetro, y tomaba la temperatura del aire exterior con un termómetro suspendido a la sombra.

Para las observaciones en el campo se emplearon dos instrumentos, aunque en la Memoria que oportunamente presentamos sólo nos referíamos a uno (Bohne), para mayor claridad.

En el equipo de campo figuraba también un termómetro-honda con el cual se tomaba la temperatura del aire de media en media hora (véase § 51).

Antes de salir al campo se hizo la comparación del barómetro fijo B_0 con el de campo B_2 , y esta comparación se repitió al volver de nuevo a la ciudad. También al empezar, se pusieron los relojes de perfecto acuerdo. El resultado de la primera comparación fué $B_2 - B_0 = -1,37$ mm, y el de la segunda, al terminar el trabajo de campo, fué de $-1,51$ mm; la diferencia entre uno y otro fué de 0,14 mm, y el promedio de ambos, es decir, $-1,44$ mm = c , se tomó como reducción constante del barómetro fijo para toda la nivelación. En la primera columna del cuadro siguiente se ve el cálculo de esta reducción constante c ; las lecturas barométricas que figuran en el mismo llevan ya en sí todas las correcciones instrumentales, y son promedios de varias lecturas repetidas.

Para las correcciones de temperatura y escala, llevaba la libreta de campo columnas especiales, y las observaciones reducidas y las resultantes de los promedios de las repetidas son las que figuran en el cuadro, para los cálculos consiguientes:

Nivelación barométrica de Nenndorf, 6 Julio 1887

Compar. de los baróm. $B_2 - B_0 = c$	Observaciones en la estación fija			Observaciones en el campo				Cálculo de alturas			
	Baróm. B_0	Temp. exterior t_1	Baróm. reduc. $B_0 + c = B_1$	Sitio y hora	Baróm. B_2	Temp. del aire t_2	$\frac{t_1 + t_2}{2} = t$	Tablas baróm.		$H_0 - H_1' = d$	$\frac{H_0}{H_1' + d} = H$
mm	mm		mm	h m	mm			m	m	m	sobre 0. m
- 1,37	757,12			Hotel Cassel 2 50	755,75						86,2
	757,11	19,8°	755,67	Galenberg 3 15	752,20	16,6°	18,2°	71,1	110,3	+ 15,1	125,4
	757,27	19,3	755,83	Kamm. Brunnen 3 49	750,30	15,0	17,2	69,3	131,8	+ 16,9	148,7
	757,60	19,2	756,16	Schiesshütte 4 30	741,33	18,0	18,6	65,5	234,2	+ 20,7	254,9
	757,68	18,5	756,24	Heisterburg 4 46	735,04	17,5	18,0	64,7	306,9	+ 21,5	328,4
	758,09	17,2	756,65	Schiesshütte 5 30	741,60	16,4	16,8	60,0	231,2	+ 26,2	257,4
	758,16	17,2	756,72	Kamm. Brunnen 5 52	751,01	15,8	16,5	59,3	123,8	+ 26,9	150,7
	758,33	16,8	756,89	Galenberg 6 25	753,50	16,0	16,4	57,1	95,6	+ 29,1	124,7
- 1,51	758,64			Hotel Cassel 6 45	757,13						86,2
Media							17,4°				
- 1,44							Media				
= c											

Las presiones y temperaturas observadas se compensan gráficamente, según las observaciones hechas en la estación fija; por ejemplo, en este caso se ve que la presión atmosférica cambió, durante la tarde, de 757,12 mm a 757,64 mm. La curva barométrica y la de temperatura del aire se llevan a una cuadrícula preparada de antemano, y para cada momento en que se ha observado en el campo se deducen de estas curvas los valores B_0 y t_1 para la estación fija.

Una vez llenas de este modo las columnas B_0 , t_1 , B_2 y t_2 del cuadro anterior, se empieza el cálculo, sobre el cual poco hay que aclarar; las observaciones en la estación fija B_0 se reducen con la constante c , $B_0 + c = B_1$; se toma la media aritmética de las temperaturas del aire t_1 y t_2 , $\frac{t_1 + t_2}{2} = t$, y se calcula el promedio 17,4° de todas las temperaturas medias t así obtenidas.

Si esta media general (17,4° en este caso) no difiere en más de 1° ó 2° de las temperaturas de que procede (columna t), puede considerarse aquélla como constante durante toda la nivelación; de no ser así se hace el cálculo por grupos, con temperatura distinta para cada uno. De todos modos no debe procederse con demasiada escrupulosidad en este respecto, pues las temperaturas tomadas con el termómetro-honda siempre están afectadas por circunstancias puramente locales, que no pueden llevarse al cálculo; por ejemplo, a las 3^h 49^m, en la garganta tan fría de Kammerratsbrunnen había 15°, y a las 4^h 20^m, a 100 m más alto, en la Schiesshütte, 18°. Se tomó como temperatura constante durante todo el tiempo (desde las 3^h 15^m hasta las 6^h 25^m) $t = 17°$. Con las tablas citadas en primer lugar al pie de la página 201 (de las cuales reproducimos en la XVII del Apéndice la parte correspondiente a $t = 15°$) calculamos, con $t = 17°$, las alturas sobre el mar H_1' y H_2' . Siendo H_0 la altitud sobre el nivel cero de la estación fija (Hotel Cassel), se obtiene

la altitud H_2 sobre el nivel cero de cada estación hecha en el campo, en función de las altitudes H_1' y H_2' , mediante la fórmula:

$$H_2 = H_0 + (H_2' - H_1') \tag{1}$$

o más sencillamente:

$$H_2 = H_2' + d, \text{ donde } d = H_0 - H_1'. \tag{2}$$

En vez de la altitud de la estación fija, puede darse la de cualquier otro punto, que se refiere a aquélla.

Si la presión atmosférica, es decir, la altura barométrica B_0 o B_1 , permanece sensiblemente invariable durante la nivelación, también se mantiene aproximadamente constante la diferencia d , y la fórmula (2) resulta, aparte otras ventajas, de mucho más fácil aplicación que la (1).

Una vez calculadas así todas las altitudes, puede haber casos en que haya que introducir reducciones para la altura del instrumento; en este ejemplo no hubo necesidad de ello. Conviene, en general, hacer la observación con el instrumento siempre a la misma altura sobre el suelo, de 1 m aproximadamente, tanto en la estación fija como en las de campo.

Para ver la precisión obtenida en esta nivelación, de la cual sólo damos siete puntos, como ejemplo, se hace una doble comparación: primero, nivelando tres puntos en una y otra dirección, y segundo, determinando todos los puntos trigonómicamente. A continuación se ven los resultados obtenidos en las dos comprobaciones:

Punto	Nivelación barométrica			Nivelación trigonométrica	Error barométrico
	ida	vuelta	media		
Galenberg.	123,4 m	124,7 m	125,0 m	124,3 m	+ 0,7 m
Kammerratsbrunnen	148,7	150,7	149,7	148,7	+ 1,0
Schiesshütte	254,9	257,4	256,2	252,8	+ 3,4
Heisterburg		328,4 m	328,4	326,3	+ 2,1
				Media	+ 1,8

Este ejemplo, tomado al azar, da una idea de la precisión general obtenida en las nivelaciones barométricas, pues el error medio de éstas oscila entre 1 y 2 m, como ya veremos en el párrafo 55. Obsérvese que todas las desviaciones o errores son del mismo signo.

Para el método de *observaciones correspondientes* aquí empleado puede utilizarse un barógrafo, en vez de destinar un ayudante a la observación reiterada del barómetro de mercurio. Las correcciones de los barógrafos se determinan como las de los aneroides ordinarios.

Nivelación con cierres en puntos fijos. En muchos casos (triangulaciones previas para levantamientos topográficos) se dispone, en el terreno que se ha de nivelar, de una serie de puntos fijos con cota conocida; en estos casos se aplica el método anterior, juntamente con el de interpolación.

A continuación damos un ejemplo, tomado de una nivelación muy extensa efectuada en las montañas del Weser, cerca de Hameln, en el verano de 1900.

En el curso de la nivelación se hacían lecturas en todos los puntos fijos que se encontraban al paso, tanto a la ida como a la vuelta. Los itinerarios deben tomarse de tal manera que a cada media hora (y con tiempo inseguro con más frecuencia aún) se tenga un cierre en un punto fijo. También en estos puntos fijos se corrigen convenientemente las observa-

ciones de temperatura del aire. Los puntos fijos deben estar bien repartidos entre las partes más altas y las más bajas del terreno que se trata de nivelar.

Nivelación barométrica en las cercanías de Hameln, 1 junio 1900
(cielo cubierto; viento en calma; después llovió)

Punto	Hora		Temp. del aire	Aneroide (corregido)	Tablas barom. h	Altitudes dadas H	$H - h$	Correc. de tiempo (gráfica) τ	Altura sobre 0 $(h + \tau)$	Error de cierre v
	h	m								
N. B.	3	35	16,2	760,8	13,3	71,4	58,1	59,4	72,7	-1,3
Δ Fresno		46		59,4	28,9	88,9	60,0	59,1	88,0	+0,9
\odot F. B.		56	16,0	56,8	57,9	117,6	59,7	59,0	116,9	+0,7
(390)	4	03		56,1	65,8			58,4	124,6	
\odot 10	4	32	15,5	49,1	144,5	201,5	57,0	57,9	202,4	-0,9
(327)		54		52,1	110,6			56,9	167,5	
\odot 63	5	06	14,8	53,9	90,4	147,3	56,9	56,2	146,6	+0,7
Δ 46		09		53,3	97,1	154,0	56,9	56,0	153,1	+0,9
Δ Arbusto		17	15,5	56,2	64,6	122,0	57,4	55,6	120,2	+1,8
Δ Fresno		25		58,9	34,5	88,9	54,4	55,0	89,5	-0,6
N. B.	5	36	15,0	60,4	17,8	71,4	53,6	54,5	72,3	-0,9
Media			15,4 = 15°							

Los puntos *F. B.* (10) y (63) fueron determinados taquimétricamente. Las alturas de los vértices, para los cierres, se determinaron con una nivelación trigonométrica; la señal *N. B.* es una placa de nivelación. El aneroide empleado fué un Bohne, de 11 cm de diámetro con divisiones de 0,2 mm. Las temperaturas del instrumento oscilaron dentro de los 2°; las correcciones de temperatura y de escala se toman de las tablillas de corrección, se suman y se redondean a $\frac{1}{10}$ mm. Las temperaturas del aire se tomaron con un termómetro-honda; la temperatura media para el cálculo se tomó en grados enteros, igual a 15°.

Comparando los valores h obtenidos en las tablas barométricas, con las altitudes dadas H , se tienen las diferencias $H - h$, que en un papel cuadrículado se toman como ordenadas, tomando como abscisas las horas de observación. Trazando una línea de compensación (curva muy abierta, con cierres en *F. B.*, 10, 63) se tiene para cada punto representativo del tiempo u hora de observación, la corrección τ , que con h da la altura sobre el nivel cero. En la última columna se tienen los errores de cierre. El límite máximo de error se fijó en 3 m para el instrumento empleado, con cierres en puntos fijos a cada media hora. La mayor variación observada en toda la nivelación fué de 2,6 m (para un aneroide de bolsillo, 4,1 m).

Corrección isobárica. La aplicación de la fórmula barométrica a puntos que no están situados en la misma vertical, supone que las superficies de igual presión atmosférica son paralelas a la del mar. Tratándose de distancias pequeñas, puede perfectamente admitirse esta hipótesis; pero en grandes distancias, puntos que están a igual altura sobre el nivel del mar presentan entre sí considerables diferencias de presión atmosférica. A la diferencia de presión correspondiente a 111 Km (longitud del arco de 1° terrestre) se llama gra-

diente barométrico o de presión atmosférica; es decir, que si entre dos puntos situados entre sí a 10 Km de distancia, el gradiente barométrico es de 5 mm (valor no muy raro por cierto), la diferencia de presión entre los dos puntos será, en números redondos, 0,5 mm. Disponiendo de largas series de observaciones, de las cuales puedan obtenerse medias mensuales y anuales, se deducen de los mapas de isobaras las correcciones necesarias; este sistema tiene el inconveniente de que en regiones poco exploradas, se cometen con su aplicación grandes errores en el cálculo de las altitudes.

A. E. Kohlschütter se debe un estudio completo del cálculo de las nivelaciones barométricas en grandes distancias teniendo en cuenta las oscilaciones periódicas y la corrección de isobaras («Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen, tomo V, 1907»).

Medios auxiliares de cálculo, gráficos y mecánicos. Para operar con tablas barométricas, pueden emplearse algunos medios auxiliares de gran eficacia; por ejemplo, la tabla de desniveles, XVIII del Apéndice, se puede emplear con la regla de cálculo ordinaria; éste nos parece el mejor procedimiento, teniendo sobre todo en cuenta que el desnivel, cuyo promedio es de unos 11,5 m, permanece invariable para un gran número de cálculos.

Para este objeto puede prepararse una regla de cálculo especial. Muy interesantes son, a este respecto, los siguientes trabajos de los autores que a continuación se citan: Koppe («Zeitschr. f. Verm.», 1874 y «Zeitschr. des Hann. Ing.- u. Arch.-Vereins», 1888); Vogler (*Sobre el modo de construir diagramas*, Berlín, 1877); Bischoff (*La regla de cálculo en la nivelación barométrica*, «Zeitschr. f. Verm.», 1891); Hammer (*Medios auxiliares para el cálculo de alturas con el empleo de tablas barométricas de desniveles*, «Zeitschr. f. Instr.», 1896); Werkmeister (*Reglas de cálculo*, «Zeitschr. f. Verm.», 1911); Hohenner (*Sobre un nuevo dispositivo de cálculo*, etc., «Zeitschr. f. Verm.», 1913).

Como ejemplo de cálculo gráfico de una gran serie de observaciones, debemos citar la nivelación barométrica efectuada por el autor en el desierto de Libia, con unas 1000 lecturas (*). Las alturas barométricas se llevaron a una larga cuadrícula, formando una especie de perfil longitudinal, tanto para las observaciones en el campo como para las estaciones fijas correspondientes, de modo que cada diferencia entre las ordenadas de dos puntos de igual abscisa, uno perteneciente a la curva de viaje y otro a la de la estación fija, daba la medida del desnivel correspondiente a los puntos considerados. La temperatura del aire se consideraba como constante en las alturas pequeñas, de modo que bastaba con una escala para convertir las ordenadas en alturas. En los demás casos hubo que hacer varias escalas de alturas.

Reducción al horizonte de distancias inclinadas, por diferencia entre lecturas del aneroide. La fijación sobre un mapa de los puntos correspondientes a alturas determinadas con barómetro, es problema en general independiente de la nivelación misma, pero hay un caso en que dicha fijación guarda estrecha relación con la misma medida barométrica, a saber, cuando se trata de reducir al horizonte una distancia inclinada con ayuda de las lecturas de un aneroide en los dos extremos de aquélla. Este problema tiene aplicación especial en el levantamiento de perfiles longitudinales con aneroide y cinta métrica o podómetro. Tomando como constante el desnivel correspondiente a 1 mm del barómetro e igual aproximadamente a 11,5 m, tendremos que para una distancia inclinada S , que pre-

(*) *Geografía física y Meteorología del desierto de Libia*, por Jordan. Kassel, 1876.

sente una diferencia b de lectura en el anerode entre los puntos inicial y final, el desnivel será $h = 11,5 b$, y la distancia s reducida al horizonte:

$$s = \sqrt{S^2 - h^2} = \sqrt{S^2 - (11,5 b)^2}.$$

Si, por ejemplo, $S = 95$ m y $b = 3,5$ mm, h será $= 40,25$ m y $s = 86,1$ m. La tabla XIX del Apéndice sirve para este cálculo de distancias reducidas. Hammer calculó unas tablas muy extensas para este mismo objeto («Zeitschr. f. Verm.», 1892 y 1900).

La reducción al horizonte de distancias inclinadas medidas con cinta es bien fácil: mucho más complicada y difícil es esta reducción de distancias medidas a pasos en pendientes (elevaciones o depresiones), y con la diferencia de altura barométrica (observada con anerode) entre sus extremos. Ya en el tomo I, páginas 76 a 79, tratamos de esta medición de distancias a pasos, y dimos la reducción de un paso al horizonte, para distintas pendientes.

En las nivelaciones barométricas no se obtiene directamente el ángulo de elevación o depresión del tramo medido a pasos, sino de modo indirecto, por la diferencia barométrica en los puntos de partida y final del mismo, y para el objeto propuesto se convierte en metros multiplicándola por 11,5. Procediendo de este modo hemos calculado la tabla XX del Apéndice para el paso corriente de 77 cm en llano. Su uso lo explica el siguiente ejemplo: se han dado 60 pasos hacia arriba (subiendo); la lectura barométrica en el punto de partida es 752,4 mm, y en el final del tramo, 751,8 mm, es decir, que entre ambos hay una diferencia o desnivel barométrico de $-0,6$ mm; la proyección horizontal del tramo recorrido, según la tabla, será de 36 metros.

Los valores consignados para la reducción de pasos en la página 78 del tomo I, a los cuales se refiere la tabla XX del Apéndice, se determinaron, como allí dijimos, por comparación entre 136 tramos, medidos con cinta, y cuya inclinación se midió con un eclímetro de mano; después se midieron a pasos (al mismo tiempo se hicieron las lecturas del anerode).

Este procedimiento, que dimos a conocer en 1884 («Zeitschr. f. Verm.», 1884), ha tenido después gran aceptación y se empleó en el levantamiento topográfico del Gran Ducado de Hessen; J. Heil calculó y publicó, a la sazón, unas tablas para la conversión de pasos en metros; en la reseña de sus trabajos hacía constar el autor que habiendo ensayado el sistema de medición por pasos, estudiado por vez primera por el profesor Jordan, lo encontró de tanta utilidad práctica que fué utilizado en los levantamientos, quedando confirmada su eficacia («Zeitschr. f. Verm.», 1893).

§ 55. Ley de los errores y precisión de la nivelación barométrica

La ley teórica de los errores en una nivelación barométrica se deduce fácilmente diferenciando la fórmula barométrica, cuya expresión fundamental es, como ya sabemos (páginas 159 y 198):

$$h = K(\log B - \log b)(1 + \alpha t). \quad (1)$$

Diferenciada primero en B esta ecuación, y después sucesivamente en b y en t , se tienen los tres errores parciales correspondientes:

$$dh_B = \frac{\mu K}{B} dB(1 + \alpha t) \quad dh_b = -\frac{\mu K}{b} db(1 + \alpha t) \quad (2)$$

$$dh_t = h \alpha dt. \quad (3)$$

Las expresiones (2) son las mismas deducidas anteriormente (§ 53) al tratar de los desniveles barométricos, y sus valores numéricos están dados en la tabla XVIII del Apéndice.

En el cuadro siguiente puede verse una serie de errores de altura en función de la presión y la temperatura, para dB o $db = \pm 0,1$ mm.

Error de las alturas h para un error barométrico dB ó $db = \pm 0,1$ mm

t	$B = 760$	$B = 730$	$B = 700$	$B = 60$	$B = 600$	$B = 550$	$B = 500$	$B = 450$
	m	m	m	m	m	m	m	m
0°	1,06	1,10	1,15	1,23	1,34	1,4	1,6	1,7
10	1,09	1,14	1,19	1,28	1,38	1,5	1,6	1,8
20	1,13	1,18	1,23	1,32	1,44	1,6	1,7	1,9
30	1,17	1,22	1,27	1,37	1,48	1,6	1,8	2,0

Entre estos límites tan dilatados (para alturas hasta de 4000 a 5000 metros) oscila este error entre 1 m y 2 m, para 0,1 mm; pero tratándose de alturas moderadas, puede considerarse este error como constante, teniéndose:

$$dh_B = dh_b = \pm 1,1 \text{ m para } dB \text{ o para } db = \pm 0,1 \text{ mm.} \quad (5)$$

La fórmula (3) proporciona otra ley para el error dh_t referente a la temperatura del aire: este error no es constante, sino que varía proporcionalmente a la altura. Poniendo $dt = \pm 1^\circ$ y $\alpha = 0,003665$, se tiene:

$$dh_t = \pm 0,003665 h \quad \text{o sea} \quad = 0,3665 \% \text{ de la altura.} \quad (6)$$

De los errores parciales (5) y (6) puede deducirse una sencilla fórmula teórica de los errores que comprenda a aquellos dos; el error (5) se comete en realidad dos veces (arriba y abajo), y, por consiguiente, el error total será:

$$\Delta h = \sqrt{2(1,1)^2 + (0,003665 h)^2} = \sqrt{2,42 + 0,00001343 h^2}. \quad (7)$$

Para tener una idea general de la importancia de este error, damos el siguiente cuadro:

<i>Error probable medio Δh de una altura h medida con barómetro</i>					
$h = 0$ m	$\Delta h = \pm 1,6$ m	$h = 500$ m	$\Delta h = \pm 2,4$ m	$h = 1000$ m	$\Delta h = \pm 4,0$ m
100	1,6	600	2,7	2000	7,3
200	1,7	700	3,0	3000	11,1
300	1,9	800	3,3	4000	14,7
400	2,1	900	3,6	5000	18,9
500	2,4	1000	4,0	6000	22,0

Estas cifras, y mejor aún la gráfica correspondiente, ponen de manifiesto la marcha del error; se ve, que para alturas pequeñas el error es casi constante (de 1 a 2 m), y que para grandes alturas, sobre 1000 m, aumenta muy rápidamente.

Para alturas muy grandes no es suficiente la ley anterior; en primer lugar, hay que dar un valor superior a la parte constante del error [véase el cuadro (4) de esta página], y, en segundo lugar, hay que tener en cuenta que para grandes alturas, las temperaturas del aire dan lugar a errores mayores de los correspondientes a $dt = \pm 1^\circ$.

Para determinar los errores cometidos en la interpolación a que se refiere el ejemplo de la página 206, partamos de las dos fórmulas siguientes:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = K \log \frac{B_1}{B_2} = K \log \left(1 + \frac{B_1 - B_2}{B_2} \right)$$

$$\delta H = H_2 - H = K \log \frac{B}{B_2} = K \log \left(1 + \frac{B - B_2}{B_2} \right)$$

En la constante K entra, con otros, el factor $(1 + \alpha t)$, suponiendo constante también la temperatura del aire; representando, para simplificar, las diferencias $B_1 - B_2$ y $B - B_2$, con los símbolos ΔB y δB , se tiene:

$$\Delta H = K \log \left(1 + \frac{\Delta B}{B_2} \right) = \mu K \left[\frac{\Delta B}{B_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta B}{B_2} \right)^2 \right] = \mu K \frac{\Delta B}{B_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{B_2} \right)$$

$$\delta H = K \log \left(1 + \frac{\delta B}{B_2} \right) = \mu K \left[\frac{\delta B}{B_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta B}{B_2} \right)^2 \right] = \mu K \frac{\delta B}{B_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta B}{B_2} \right)$$

y dividiendo la segunda igualdad por la primera:

$$\frac{\delta H}{\Delta H} = \frac{\delta B}{\Delta B} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta B}{B_2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{B_2} \right)} = \frac{\delta B}{\Delta B} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta B}{B_2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{B_2} \right)$$

o sea

$$\frac{\delta H}{\Delta H} = \frac{\delta B}{\Delta B} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta B - \delta B}{B_2} \right) = \frac{\delta B}{\Delta B} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta B'}{B_2} \right)$$

de donde:

$$\delta H = \frac{\Delta H}{\Delta B} \delta B + \frac{1}{2} \frac{\Delta H \delta B \cdot \delta B'}{B_2 \cdot \Delta B} \quad (9)$$

El segundo término del segundo miembro de esta ecuación representa el error que se comete al hacer la interpolación por simple proporcionalidad. Este valor alcanza su valor máximo cuando son iguales los dos factores del producto $\delta B \cdot \delta B'$, es decir, cuando se tiene:

$$\delta B \cdot \delta B' = \frac{\Delta B}{2} \cdot \frac{\Delta B}{2} = \frac{(\Delta B)^2}{4}$$

y el error máximo será:

$$f_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{B_2} \cdot \frac{\Delta B}{4} = \frac{1}{8} \frac{(\Delta H)^2}{\mu K} = 0,156 \left(\frac{\Delta H}{100} \right)^2 \quad (10)$$

En esta fórmula se ha puesto $\frac{\Delta B}{B_2} = \frac{\Delta H}{\mu K}$. Como se ve, el error varía proporcionalmente al cuadrado del desnivel ΔH entre los puntos de cierre, y sus valores, en función de éste, resultan ser:

Para $\Delta H = 100$ m	200 m	300 m	400 m	500 m	1000 m
$f_{\text{máx}} = 0,16$	0,6	1,4	2,5	7,8	15,6

Son muchos los trabajos experimentales llevados a cabo sobre la precisión de las nivelaciones barométricas, sobre todo para aneroides y desniveles medianos; entre aquéllos merecen citarse los de Koppe («Zeitschr. f. Verm.», 1874), que para 248 cierres en puntos directamente nivelados, encontró un error medio de $\pm 1,6$ m. Análogas investigaciones realizaron Schoder, Bauernfeind y Schreiber.

De todos estos estudios, así como de los verificados por nosotros mismos, resulta que en una nivelación cuidadosamente hecha con barómetros aneroides, el error medio no pasa de 1 a 2 m para alturas de unos 200 m. Esto nos dice que en nivelaciones relativamente pequeñas, el anerode es preferible al barómetro de mercurio, que, en cambio, tiene su aplicación indicada para nivelaciones con grandes diferencias de alturas.

En interpolaciones con alturas medianas y no muy grandes intervalos de tiempo, hechas con barómetro anerode, el error medio resulta aun menor de 1 a 2 m. Muchas veces hemos encontrado, al hacer tales interpolaciones, errores medios inferiores a 1 m, aunque también en tales interpolaciones hemos hallado errores sueltos mucho mayores, tratándose de itinerarios con cambios bruscos, elevaciones y depresiones, en terrenos poco practicables.

En el párrafo 57 trataremos de los errores que se cometen, en particular, en las nivelaciones de grandes alturas.

§ 56. Nivelación barométrica sin observaciones correspondientes

Las observaciones correspondientes son necesarias a causa de la variación continua de las condiciones atmosféricas. Ahora bien, cuando no se dispone de observaciones correspondientes, ni de cierres en puntos fijos, hay que saber también salir del paso. El método más sencillo, tratándose de intervalos no muy largos (especialmente para determinación de desniveles locales), consiste en volver al punto de partida, como hicimos al medir la altura de la pirámide de Cheops (§ 54, página 205).

También pueden sustituirse las observaciones correspondientes (§ 54) por el cierre en un segundo punto fijo, en vez de volver nuevamente al de partida.

Si se hace una nivelación barométrica sin observaciones correspondientes y sin volver al punto de partida o cerrando en un segundo punto fijo, todo radica en la suposición de que la presión atmosférica permanece constante durante toda la nivelación. Cuando la duración de ésta es corta y el tiempo es estable, es frecuente ver cumplida dicha condición. Para tener una idea del error que así puede cometerse hay que disponer de suficiente número de observaciones barométricas (en estaciones meteorológicas) para fijar la oscilación anua de la presión en el lugar de que se trate. Por ejemplo, para nuestros trabajos tomamos la variación anua de la presión en Karlsruhe, donde las lecturas se hacían (1869) diariamente a las 7^h, a las 14^h y a las 21^h, es decir, de siete en siete horas durante el día. La media de las variaciones correspondientes a cada período de siete horas eran las siguientes:

Enero	$\pm 1,4$ mm	Julio	$\pm 0,9$ mm	Promedio = $\pm 1,5$ mm para siete horas, o bien = $\pm 0,2$ mm para una hora.
Febrero	1,6	Agosto	1,0	
Marzo	2,0	Septiembre	1,4	
Abril	1,5	Octubre	1,5	
Mayo	1,4	Noviembre	1,9	
Junio	1,2	Diciembre	1,9	

Como se ve en este resumen, la variación es menor en verano que en invierno. La variación máxima fué de 7,9 mm, el 9 de diciembre, entre las 7^h y las 14^h. En todo el año hubo 15 variaciones mayores de 5 mm, correspondiendo una sola al período comprendido entre los meses de abril y agosto.

Las mayores variaciones tuvieron lugar en los días de mal tiempo, en los cuales no se acostumbra salir al campo a nivelar; la variación media en siete horas correspondiente a los días utilizables para la observación de campo, resultaba por bajo de 1 mm, y la variación en una hora, sólo de 0,1 mm aproximadamente (correspondiente a un error de altura de 1 m).

Notable es, a este respecto, el trabajo de Schreiber sobre los cambios bruscos de presión en el transcurso de un cuarto de hora («Meteorologische Zeitschrift», 1889), tomando los datos de 19 años (1870-1888), con 665760 cuartos de hora; en estos 19 años sólo 324 días acusaron oscilaciones que pudiéramos llamar anormales, es decir, 17 días por año.

Determinación directa de altitudes (alturas sobre el mar). Veamos, a la ligera, otro método de nivelación barométrica sin observaciones correspondientes, que consiste en determinar la altura absoluta sobre el mar (altitud) suponiendo que la altura barométrica en el nivel del mar tiene un cierto valor perfectamente fijado por observaciones repetidas en determinados puntos. También puede observarse directamente el barómetro en el mar, y calcular después la altura barométrica reducida al nivel del mar, de un punto cualquiera, cuya altitud sea conocida, mediante la aplicación de la fórmula barométrica (despejada en B , en función de h). Pero se desconoce la temperatura de la columna de aire comprendida entre el lugar de la observación y la superficie del mar, por lo cual hay que tomar para ella un valor aproximado, sabiendo que la temperatura aumenta, de ordinario, hacia abajo a razón de $0,5^\circ$ por 100 m; con este valor puede ya hacerse la reducción correspondiente.

Para el sur de Alemania determinamos la media de las alturas barométricas reducidas al nivel del mar, por compensación de las medias barométricas y de las alturas de 26 estaciones, y obtuvimos el valor siguiente, una vez hecha la corrección de gravedad:

$$B_0 = 762,56 \text{ mm} \pm 0,10 \text{ mm.}$$

La primera serie importante de observaciones barométricas encaminadas a este objeto se debe a Alejandro Buchan, en su Memoria titulada *The mean pressure of the atmosphere and the prevailing winds over the globe, for the months and for the year* (*), publicada en los «Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh», vol. XXV, abril 1869, con tres mapas de isobaras. Muy interesante es también el *Atlas de Meteorología* de Hann, con 12 mapas en colores y 61 figuras, editado por Justus Perthes en 1887, especialmente las láminas de isobaras y vientos en el año, en enero y en julio. Un trabajo importante para el estudio de la distribución de la presión atmosférica sobre el Globo, es hoy el del *Réseau mondial*, en cuyos resúmenes se comprenden las presiones medias, mes por mes, habiéndose adoptado, para definir las condiciones de cada cuadro de diez grados geográficos de lado, dos estaciones meteorológicas normales situadas dentro de él.

A continuación damos algunos promedios mensuales y anuales para diferentes puntos de la Tierra:

Presión atmosférica reducida al nivel del mar (corregida de gravedad)

Mes	Tortosa	Hamburgo	Berlín	Viena	Buenos Aires	Habana	Valparaíso
Enero	765,3	761,8	763,0	765,5	758,9	766,4	760,9
Febrero	763,7	761,6	762,1	764,0	759,8	766,1	761,1
Marzo	761,6	760,2	760,4	761,2	760,8	765,3	761,3
Abril	760,8	760,7	760,8	760,7	762,2	764,4	762,0
Mayo	761,8	761,3	761,2	760,4	762,8	763,3	762,7
Junio	762,7	761,2	761,5	761,3	763,9	763,9	763,5
Julio	762,7	760,9	761,1	761,4	764,2	764,9	763,6
Agosto	762,6	760,7	761,2	761,6	764,0	764,0	764,2
Septiembre	763,2	761,9	762,4	763,4	763,8	762,8	763,8
Octubre	762,7	760,6	761,7	763,1	762,5	762,4	763,4
Noviembre	762,4	760,6	761,1	762,9	760,5	764,6	762,4
Diciembre	763,9	761,1	762,0	764,5	758,8	765,7	761,3
Media anual	762,8	761,1	761,5	762,4	761,8	764,5	762,5

(*) La presión atmosférica media y los vientos dominantes sobre la superficie terrestre, para todos los meses y para el año.

Estos trabajos se refieren a la Tierra en general; para Europa, merece citarse la obra del doctor Hann, publicada en 1887 y titulada: *Distribución de la presión atmosférica sobre el centro y el sur de Europa, deducida de las medias mensuales y anuales de 30 años (1851-1880); estudio de la constancia de la presión media, y de los periodos de varios años.*

En la Meseta Ibérica, debido a su clima marcadamente continental, la variación anual de la presión atmosférica es muy acentuada, alternando altas presiones en invierno con bajas en verano, como se ve en las figuras 158a y 158b.

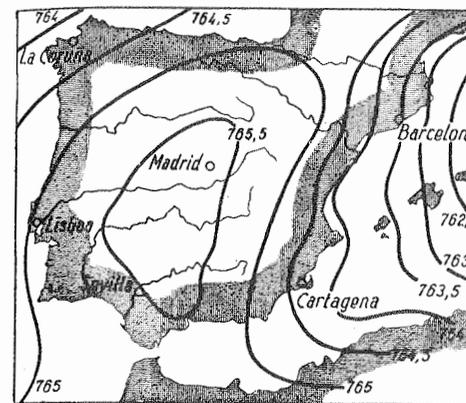
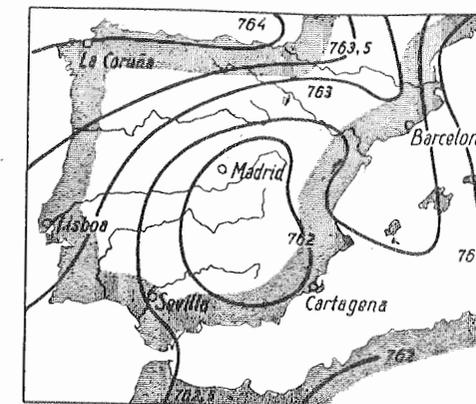


Fig. 158a.— Distribución de presiones en la Península Ibérica durante el invierno



§ 57. Error periódico de las alturas barométricas

Ya hemos indicado antes de ahora que los errores en la nivelación barométrica verificada por los métodos ordinarios no son todos accidentales, sino que obedecen a ciertas leyes, presentando períodos referidos, particularmente, a diversas horas del día. Por ejemplo, en 1808 encontró ya Ramond, para una misma altura medida en distintas horas, los valores siguientes:

Hora del día:	7 ^h mañana	12 ^h mediodía	3 ^h tarde	9 ^h noche
Altura:	251 m	258 m	254 m	252 m

Plantamour utilizó observaciones de un decenio (1841-1850) en Ginebra y San Bernardo, agrupadas en medias mensuales; calculó las temperaturas del aire deducidas de las observaciones barométricas y de las altitudes conocidas, y las comparó con las temperaturas directamente observadas.

En Alemania, quien primero estudió esta cuestión fué Bauernfeind, en su obra titulada: *Observaciones y discusión de la precisión de las nivelaciones barométricas*, publicada en Munich en 1862. Esta discusión la llevó a cabo comparando las temperaturas del aire (deducidas mediante la fórmula barométrica de los desniveles determinados previamente con toda exactitud y de las alturas barométricas leídas), con la media aritmética de las temperaturas del aire observadas en las estaciones superior e inferior. Llamaremos θ a la temperatura deducida de la fórmula barométrica, y t a la media de las temperaturas observadas; la diferencia $\theta - t$ representa un error sistemático en el transcurso del día, de cuyo valor podemos formarnos idea con un ejemplo práctico, tomado de las observaciones realizadas por Bauernfeind en el «Gross Miesing», entre las estaciones I y V; la primera tenía una altura de 815,36 m sobre el nivel del mar, y la V 1883,53 m, es decir, que la altitud media era $H = 1349$ m, y el desnivel, $h = 1068,17$ m.

Las observaciones se efectuaron en los días 22 a 28 de agosto de 1857, con una temperatura media de $13,5^\circ \text{R} = 16,8^\circ \text{C}$: los valores hallados para $\theta - t$ fueron:

Hora	Mañana			Mediodía			Tarde				
	8 ^h	9 ^h	10 ^h	11 ^h	12 ^h	1 ^h	2 ^h	3 ^h	4 ^h	5 ^h	6 ^h
$\theta - t$	+1,8°	+1,0°	+0,3°	-0,3°	-0,9°	-1,3°	-1,4°	-1,1°	-0,2°	+1,0°	+2,2°
$h' - h$	-7,0 m	-3,6 m	-1,1 m	+1,1 m	+3,2 m	+4,8 m	+5,3 m	+3,9 m	+0,8 m	-3,7 m	-8,6 m

Bauernfeind deducía de estos resultados que el termómetro acusaba hasta las 10 de la mañana temperaturas demasiado bajas ($t < \theta$), entre las 10 de la mañana y las 4 de la tarde, demasiado altas ($t > \theta$), y desde esta hora volvía a dar temperaturas bajas ($t < \theta$), indicando así que las mejores horas para las observaciones barométricas de alturas son las 10 de la mañana y las 4 de la tarde.

Siendo h el desnivel verdadero correspondiente a la temperatura calculada θ , y h' el desnivel erróneo, correspondiente a la temperatura observada t , se tiene:

$$\begin{aligned} h &= K(\log B - \log b)(1 + \alpha \theta) & y & & h' &= K(\log B - \log b)(1 + \alpha t) \\ h : h' &= (1 + \alpha \theta) : (1 + \alpha t) & y & & h - h' &= \alpha h (\theta - t). \end{aligned} \quad (2)$$

Como $\alpha = 0,003665 = 1 : 273$, y h , en el ejemplo anterior, es igual a 1068, se tiene para αh el valor 3,9, con el cual se pueden comprobar los resultados numéricos dados en (1).

Esta discusión fué continuada por Rühlmann (*Nivelaciones barométricas*, Leip-

zig, 1870), que determinó los errores barométricos periódicos diarios y anuales deducidos de una serie de observaciones propias realizadas en Sajonia, y de las medias de seis años verificadas por Plantamour en Ginebra y en San Bernardo. Los valores de Rühlmann coinciden bastante aproximadamente con los de Bauernfeind, como puede verse en el resumen siguiente (para un desnivel $h = 2070$ m):

Hora	Medianoche			Mañana			Mediodía			Tarde		
	12 ^h	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h	12 ^h	2 ^h	4 ^h	6 ^h	8 ^h	10 ^h
$\theta - t$	+0,8°	+1,5°	+1,5°	+0,4°	-1,9°	-3,4°	-4,1°	-4,0°	-3,3°	-2,0°	-0,6°	+0,2°

Del mismo modo resultaron los siguientes errores periódicos en el transcurso del año:

Meses	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sept.	Oct.	Nvr.	Db.
	$\theta - t$	+1,8°	+1,1°	+0,1°	-0,1°	-0,3°	-1,1°	-1,3°	-0,7°	+0,3°	+1,2°	+1,3°

Como se ve, en los meses de verano y en las horas de más calor del día, la corrección $\theta - t$ es negativa, es decir, que se debe rebajar la temperatura t leída en el termómetro, hasta el valor θ , que da el desnivel barométrico verdadero h .

El valor de θ así calculado se llama «temperatura verdadera del aire», denominación que no responde a la realidad y que puede dar lugar a confusiones: la única definición que de θ debe darse es la que se obtiene de la fórmula barométrica, donde θ es constante, supuesta inmóvil y homogénea la columna de aire entre las dos estaciones.

De los estudios de Guido Grassi (*Sobre la influencia de la época en las nivelaciones barométricas*), resulta para julio, agosto y septiembre la misma regla anterior, es decir, que las alturas calculadas aumentan por la mañana hasta la hora de la máxima temperatura, disminuyendo después continuamente por la tarde. Con lluvia, frío y viento, se obtienen alturas erróneas por defecto, y la marcha de la curva de alturas es casi inversa a la indicada, o sea, que a mediodía la diferencia es menor que en mañana y tarde.

Trabajos posteriores de Reina, efectuados en Roma y Monte Cavo, con un desnivel $h = 898$ m, entre mayo y julio de 1895, dieron los siguientes resultados:

Hora	Mañana									
	T	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	-0,0
$h' - h$	+2 m	+3 m	+5 m	+6 m	+7 m	+8 m	+8 m	+9 m	+9 m	+9 m
$\theta - t$	-0,6°	-0,9°	-1,3°	-1,8°	-2,1°	-2,4°	-2,4°	-2,7°	-2,7°	-2,7°

Hora	Tarde									
	T	+0,0	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5	+0,6	+0,7	+0,8
$h' - h$	+9 m	+9 m	+9 m	+9 m	+8 m	+8 m	+6 m	+5 m	+3 m	+3 m
$\theta - t$	-2,7°	-2,7°	-2,7°	-2,7°	-2,4°	-2,4°	-1,8°	-1,5°	-0,9°	-0,9°

Las horas T están dadas en partes de semicírculo diurno, correspondiendo $T = -1,0$ a la salida del Sol, y $T = +1,0$ a la puesta del mismo. Los errores de las alturas ($h' - h$) son todos positivos, y por término medio resultan las altitudes erróneas por exceso en 7 m. No sucede lo mismo en Alemania, donde, según Bauernfeind, la diferencia $h' - h$ es igual a cero dos veces al día, una a las 10 de la mañana y otra a las 4 de la tarde. Pero tanto en Italia como en Alemania, $h' - h$ alcanza su valor máximo hacia mediodía verdadero, disminuyendo este valor por la mañana y por la tarde.

Como resultado principal y resumen de lo expuesto damos la ley dada por Rühlmann, que dice: El aire no se calienta con la intensidad ni la rapidez que indica el termómetro; el aire sólo participa, en pequeña cantidad y lentamente, de la oscilación diaria de la temperatura y en una mínima proporción en la oscilación anual de aquélla; los valores extremos de la temperatura del aire van siempre considerablemente retrasados respecto a las temperaturas extremas dadas por el termómetro.

En el cálculo de las nivelaciones barométricas efectuadas por Kohlschüter en el Africa oriental, encontró éste, para grandes distancias, un error periódico de más consideración, consistente en oscilaciones periódicas diurnas y anuas, del gradiente barométrico y de la corrección de isobaras. La variación diaria del gradiente barométrico coincidía aproximadamente con la diferencia entre las oscilaciones barométricas en los dos puntos. Para distancias comprendidas entre 600 y 800 Km, la amplitud del período hallado fué de 1,5 mm aproximadamente.

Teorías sobre los errores periódicos de la nivelación barométrica. En primer lugar debe citarse la teoría expuesta por Bauernfeind, según la cual la temperatura que sobre la superficie terrestre se toma con los termómetros de mercurio, no representa, en general, la verdadera temperatura del aire. Ésta ha sido, durante mucho tiempo, la única teoría seria sobre los errores periódicos barométricos, pero no nos parece suficiente.

Más reciente es la teoría que sostiene la necesidad de no admitir en el desarrollo de la fórmula barométrica, la hipótesis corriente de la constancia de la temperatura, sino partir de otra suposición menos forzada que aquella. Así lo hemos hecho nosotros, dando a t la siguiente forma:

$$t = t_0 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \quad (5)$$

donde t_0 es la temperatura del aire a la mitad de la columna de aire, y x la altura de un punto, contado arriba y abajo a partir de dicha mitad, en que la temperatura del aire sea t . Después de muchos ensayos con esta fórmula hemos obtenido para la diferencia $\theta - t$ una explicación más satisfactoria que con la antigua hipótesis, aunque por este procedimiento no creemos que se llegue a una aclaración suficiente de dicha anomalía.

Indudablemente hay que buscar la causa de este error en la variación de la temperatura con la altura, cuya ley, aun determinada con globos libres, globos sondas, etc., no sería concluyente, porque además del efecto *estático* que en la densidad del aire produce el calor, hay que tener en cuenta el efecto *dinámico* a que éste da lugar, consistente en la formación, a diversas horas del día, de corrientes verticales de aire, tanto ascendentes como descendentes.

Una corriente de aire que suba con cierta aceleración, da en el barómetro de mercurio una presión menor que una columna de aire en calma o animada de movimiento uniforme.

En el *Tratado de Meteorología*, de Sprung (Hamburgo, 1885), se estudia la influencia del movimiento del aire sobre la distribución vertical de la presión, con la hipótesis de una aceleración $\frac{dw}{dh}$ en la columna vertical de aire; llegando a deducir que «en la atmósfera libre, debe considerarse como magnitud despreciable el efecto del movimiento sobre la distribución vertical de la presión».

Ahora bien, en estos cálculos se supone que la aceleración del movimiento vertical del aire es *constante* en toda la altura considerada; pero si suponemos esta aceleración *variable*, en el sentido de que si en uno de los extremos de la columna de aire (arriba o abajo) tiene un cierto valor $\frac{dw}{dt}$, y en el extremo opuesto (abajo o arriba) sea cero, los resultados cambian radicalmente. Con esta idea hemos hecho un cálculo análogo al de Sprung, pero representando la aceleración total del modo siguiente:

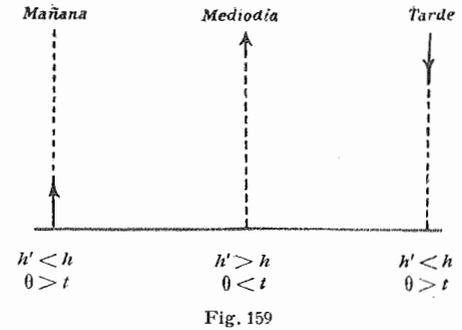
$$g = g_0 (1 + \gamma H + \gamma' H^2 + \dots),$$

donde g_0 es la aceleración correspondiente al aire en calma, y los términos siguientes $g_0 \gamma H$, etc., corresponden al movimiento vertical del aire a la altura H . Aquí se ve que la hipótesis de una velocidad mucho menor para el aire, basta para explicar el error de altura barométrica, mejor que si se toma para la altura total una aceleración constante.

Para esta clase de investigaciones no hay que tener en cuenta los cambios de temperatura, la condensación del vapor de agua, etc.; sólo hay que saber si el efecto puramente dinámico de una columna de aire ascendente o descendente puede explicar los errores de la nivelación barométrica, que son del mismo orden de magnitud que los errores periódicos diarios ya conocidos.

A esta pregunta puede contestarse afirmativamente, y siempre puede hacerse coincidir el signo de los errores periódicos conocidos, con la explicación dinámica anterior, como se ve en el esquema representado en la figura 159, en el cual los signos de $h' - h$ y de $\theta - t$ corresponden a los datos del *Gross Miesing* (1) y del *San Bernardo* (3).

La interpretación de este esquema es como sigue: por la mañana sube el aire de la tierra caliente hacia arriba, mientras en lo alto está aún en calma, resultando que la lectura barométrica abajo es menor de lo que debiera ser en realidad, y la altitud calculada h' es pequeña en comparación con la verdadera h . A mediodía, en que la



ascensión del aire se hace más pronunciada en lo alto, resulta h' demasiado grande, y por la tarde, en que empieza a descender el aire desde lo alto mientras que abajo está en calma, h' resulta demasiado pequeña. Por la noche las condiciones son intermedias entre las correspondientes a la mañana y la tarde, y el resultado es $h' < h$. La experiencia ha demostrado plenamente que las alturas medidas con barómetro presentan este período.

§ 58. Bibliografía sobre nivelación barométrica

Es tan extensa la bibliografía sobre nivelación barométrica, que a continuación sólo damos los trabajos conocidos más importantes.

1805. LAPLACE. *Tratado de Mecánica celeste*, tomo IV, París, 1805. Primera fórmula barométrica completa:

$$r = 18336 (1 + 0,002845 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{t+t'}{2} 0,00375\right) \left[\left(1 + \frac{r}{a}\right) \log \frac{(h)}{h} + \frac{r}{a} 0,868589\right]$$

donde a es el radio de la Tierra = 6366198; las alturas barométricas son (h) y h , y su corrección de gravedad está dada por el término $0,868589 \frac{r}{a} = + \frac{2Mr}{a}$. La constante de Laplace 18336 no fué determinada teóricamente, sino por comparación de alturas medidas barométrica y trigonométricamente por Ramond. En el factor $\left(1 + \frac{r}{a}\right)$, que corresponde a nuestro $\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$, se supone igual a cero la altitud del punto inferior.

1808. RAMOND. *Memoria sobre la fórmula barométrica*. París, 1808.

1811. BIOT. *Tablas barométricas portátiles, con la historia de la fórmula barométrica*, etc. París, 1811. En la Introducción se ve el cálculo del efecto que en la densidad y presión del aire ejerce el vapor de agua [como ya hemos visto en el párrafo 52, fórmulas (13) a (18)]. La tensión

tomada por BIOT para el vapor de agua, es $2,561 \text{ mm} + 0,43245 t$; a este valor corresponde nuestra fórmula (9) de la página 200, y el resto del cálculo de BIOT es, en esencia, el mismo de LAPLACE y BIOT que vimos en las fórmulas (9) a (12) del párrafo 53. BIOT llegó de este modo a obtener para el coeficiente de temperatura el valor 0,0039127, que hizo entrar, aproximado a 0,004, en el término $\frac{4}{1000} \frac{T+t}{2} = \frac{2(T+t)}{1000}$. La fórmula final de BIOT es:

$$X = 18334 (1 + 0,002837 \cos 2\varphi) \left[\left(1 + \frac{2r}{a} \right) \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000} \right) \left(1 + \frac{X}{h} \right) \left(\log \frac{H}{h} + 2 \log \left(1 + \frac{X}{a} \right) \right) \right]$$

1818. GAUSS. *Tablas para la medición de alturas con barómetro*. Anuario Astronómico de Berlín para 1818. Las tablas corresponden con toda exactitud a la fórmula de Laplace.

1850. BABINET. *Nivelaciones barométricas; modificación de la fórmula de Laplace para evitar el empleo de logaritmos y de tablas*. La fórmula de Laplace que considera es:

$$\xi = 18393 \text{ m} (\log H - \log h) \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000} \right).$$

Para alturas menores de 1000 m (y también para alturas mucho mayores, cuando sólo se necesitan resultados aproximados), esta fórmula se puede transformar en la siguiente:

$$\xi = 16000 \text{ m} \frac{H-h}{H+h} \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000} \right).$$

Sigue un ejemplo, pero sin razonamiento («Comptes rendus, etc.», tomo 30, enero-junio 1850). En esta misma publicación, en el tomo 52 correspondiente al primer semestre de 1861, da BABINET un desarrollo análogo al que hemos expuesto en el párrafo 53 [fórmulas (27) y (28), páginas 203 y 204], pero sin el término que da el error Δh (29). BIOT tomó para la constante 2μ 18393 = 15976, en números redondos = 16000.

1851. PLANTAMOUR. *Resumen de las observaciones de temperatura y presión realizadas en el Observatorio de Ginebra y en el Gran San Bernardo*. Ginebra, 1851.

1862. BAUERNFEIND. *Observaciones y discusión de la precisión en las nivelaciones barométricas, y variaciones de la temperatura y la humedad de la atmósfera*. Munich, 1862. La fórmula obtenida por BAUERNFEIND es la siguiente:

$$h = 18404,9 (1 + 0,0026 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2\xi + h}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{8} f \right) (1 + 0,003665 t) \\ \times \left(\log \frac{B}{b} + \log \left(1 - \frac{T'-t'}{5550} \right) + 86859 \frac{h}{r} \right).$$

En el último paréntesis van las dos lecturas barométricas B y b , cuya corrección de gravedad, lo mismo que en la fórmula de Laplace, está en el término $0,86859 \frac{h}{r}$, llevando además una reducción para las temperaturas T' y t' del mercurio. El error por humedad $1 + \frac{3}{8} f = 1 + \frac{3}{8} \frac{e}{B}$ está dado como en la fórmula de Biot. La constante 18404,9 resulta de la densidad del aire, según las determinaciones de Regnault, y de la densidad del mercurio.

1864. RADAU. En el «Moniteur scientifique rédigé par Quesneville, 1864», da RADAU alturas sobre el nivel del mar para $B_0 = 760 \text{ mm}$; Jelinek calculó una tabla, con la fórmula de RADAU, para $B_0 = 762 \text{ mm}$, que publicó en sus «Instrucciones Meteorológicas». Según RADAU, tratándose de altitudes aproximadas, puede suprimirse el término $\left(1 + \frac{2H}{r} \right)$ de la fórmula completa.

1870. RÜHLMANN. *La nivelación barométrica y su importancia en la Física de la atmósfera*. Leipzig, 1870. La constante tomada por RÜHLMANN es 18400,2; la diferencia tan pequeña entre este valor y el de la constante de Bauernfeind (18404,9), es debida a tener en cuenta el ácido carbónico del aire [véase § 52, fórmulas (17) y (18), página 196]. En el último término toma RÜHLMANN $\frac{5}{4} \frac{Mh}{r}$ en vez de $\frac{2}{r} \frac{Mh}{r}$, para hacer entrar en la corrección por gravedad los estratos geológicos entre las dos estaciones. (Véase HELMERT, «Teorías matemáticas y físicas de la Geodesia superior», II.)

1875. WEILENMANN. *Sobre un barómetro aneroides modificado, y relación entre la presión, temperatura y altura en la atmósfera*. (Publicación trimestral de la Sociedad de Naturalistas de Zurich, año 1875.)

1876. JORDAN. *Geografía física y Meteorología del desierto de Libia*. Kassel, 1876.
1876. GRASSI. *Estudio de las variaciones bruscas (saltos) en los barómetros aneroides*. Meteorología italiana, 1874.
1876. GRASSI. *Sobre la medición de alturas con el barómetro*. Milán, 1876.
1877. KOPPE. *El aneroides de Goldschmid y la nivelación barométrica*. Zurich, 1877.
1877. JELINEK. *Sobre las constantes del aneroides y sobre el aneroides con escala de alturas*. Repertorio de Física experimental y técnica.
1877. SCHREIBER. *Tratado de nivelación barométrica*. Weimar, 1877.
1877. VOGLER. *Nota sobre los experimentos hechos con el aneroides de Brandet* («Zeitschr. f. Verm. 1877»); variaciones bruscas, hasta de 1 mm.
1879. JORDAN. *Tablas barométricas*. 1.^a ed. Stuttgart, 1879. 3.^a ed., que comprende hasta los 35°, Stuttgart, 1917.
1881. HARTL. *Sobre el coeficiente de temperatura del aneroides de Brandet*. «Memorias del Instituto geográfico militar de Viena», 1881.
1883. BAUERNFEIND. *Nuevas observaciones sobre el periodo diario de las alturas medidas con barómetro*. Munich, 1883.
1884. HARTL. *Instrucciones para la nivelación con barómetros de mercurio y con aneroides*. Viena, 1884.
1884. HANN, JELINEK. *Instrucciones para las observaciones meteorológicas*. Viena, 1905 y 1910.
1884. HELMERT. *Teorías matemáticas y físicas de la Geodesia superior*. Parte II, 1884.
1887. REINHERTZ. *Elasticidad remanente en los aneroides*. («Zeitschr. f. Instr.», 1887.)
1888. KOPPE. *Métodos y cálculo de las nivelaciones barométricas*. («Zeitschr. des Hann. Arch.- und Ing.-Vereins», 1888.)
1888. PERNTNER. *Sobre las fórmulas barométricas*. («Repert. d. Physik», 1888.)
1890. WIEBE. *Estudio de la corrección de temperatura del aneroides Vidi-Naudet*. («Zeitschr. f. Instr.», 1890.)
1891. WHYMPER. *Modo de usar el aneroides*. Londres, 1891.
1892. HAMMER. *Práctica de la nivelación*. («Zeitschr. f. Verm.», 1892.)
1894. SCHREIBER. *Estado de equilibrio de una columna de aire; fórmula barométrica para la medición de alturas*. («Civil Ingenieur», 1893-1894.)
1896. HAMMER. *Medios auxiliares para el cálculo de desniveles medidos con barómetro*. («Zeitschr. f. Instr.», 1896.)
1896. JORDAN. *Tablas barométricas para países bajos y para grandes alturas*. 2.^a ed. Hannover, 1914.
1898. ANGOT. *Sobre la fórmula barométrica*. («Ann. du Bureau Central Météorologique 1896»; «B. Mémoires», París, 1898.)
1900. HEBE. *Verificación de los aneroides*. («Zeitschr. f. Instr.», 1900.)
1901. WIEBE. *Funcionamiento del aneroides a baja temperatura*. («Zeitschr. f. Instr.», 1901.)
1904. J. LIZNAR. *Nivelación barométrica*. Leipzig y Viena, 1904.
1904. A. DE QUERVAIN. *Tablas para el cálculo de alturas medidas con barómetro, según Angot*. Estrasburgo.
1905. GROSSMANN. *La fórmula barométrica y su aplicación*. («Ann. d. Hydrog. u. marit. Meteor.», año 33.)
1907. A. SCHREIBER. *Precisión de las nivelaciones de vías férreas con un aneroides de Bohne*. («Zeitschr. f. Verm.», 1907.)
1907. E. KOHLSCHÜTTER. *Resultados de la expedición al África oriental*. Tomo I. Nivelación. («Abh. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen».)
1909. E. ALT. *Una nueva forma de la fórmula hipsométrica*. («Met. Zeitschr.», 1909.)
1914. HIRSCH. *Diagrama para el cálculo de alturas medidas con barómetro*. («Met. Zeitschr.», 1911.)
1915. SCHLEIN. *Instrucciones meteorológicas*, 6.^a ed., Viena y Leipzig, 1915.
1915. STAIKOFF. *Nivelación barométrica*. («Met. Zeitschr.», 1915.)
1915. LIZNAR. *Nueva fórmula barométrica de E. Alt*. («Met. Zeitschr.», 1917.)
1926. SVENSSON. *Sobre psicrometría*. («Met. Zeitschr.», 1926.)
1927. MONTIGEL. *Nivelación barométrica en los trópicos*. Tablas numéricas y diagramas. Weltedredon, 1928.

distancia del retículo p (tomo I, § 65). Para la teoría diastimométrica no hay que tener en cuenta esta distancia, ya que el ocular desempeña un papel muy secundario en aquélla.

CAPÍTULO IV

Taquimetría

§ 59. Aparatos diastimométricos con miras (estadímetros)

En el tomo I tratamos de los levantamientos planimétricos y en los capítulos I a III de este segundo tomo hemos estudiado los alimétricos. Vamos ahora a ocuparnos de los métodos topográficos empleados para determinar a la vez, en posición y altura, la situación de los puntos del terreno. Estas mediciones tienen su especial aplicación en los trabajos previos necesarios para el trazado de carreteras, vías férreas, canales, etc., con los cuales se hacen los proyectos correspondientes. Estos métodos constituyen también la base de los levantamientos topográficos para la formación de planos a pequeñas escalas, destinados a usos militares, fines de turismo y otros muchos y muy variados.

La Taquimetría fija la posición de un punto en el terreno por coordenadas polares y da al mismo tiempo la altura de aquél, es decir, hace simultáneos los levantamientos planimétrico y alimétrico del terreno. La medición de las distancias necesarias para estos levantamientos no se hace directamente con reglones ni cintas; tampoco está indicado, en

Taquimetría, el empleo de estadímetros de doble imagen (mira horizontal) descritos en el tomo I, §§ 74 y 75; son otros los métodos que conviene utilizar, siendo el principal el consistente en el empleo de anteojos diastimométricos, con los cuales se lee sobre una mira la parte interceptada por dos hilos paralelos del retículo.

Los anteojos diastimométricos sólo se diferencian de los anteojos ordinarios de los teodolitos, en que en vez de llevar una simple cruz filar como estos últimos, llevan por lo menos dos hilos horizontales en su retículo. La figura 160 representa el retículo estadimétrico más corriente, que lleva además del hilo horizontal M que hay en todos los retículos, otros dos hilos paralelos a aquél, U y O ; la distancia $OU = p$ entre estos dos hilos desempeña un papel fundamental en la medición de las distancias.

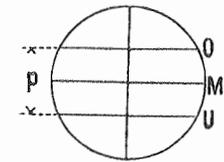


Fig. 160

Los anteojos diastimométricos sólo se diferencian de los anteojos ordinarios de los teodolitos, en que en vez de llevar una simple cruz filar como estos últimos, llevan por lo menos dos hilos horizontales en su retículo. La figura 160 representa el retículo estadimétrico más corriente, que lleva además del hilo horizontal M que hay en todos los retículos, otros dos hilos paralelos a aquél, U y O ; la distancia $OU = p$ entre estos dos hilos desempeña un papel fundamental en la medición de las distancias.

I. Anteojo simple y anteojo de Ramsden. Vamos a estudiar la teoría óptica de los anteojos diastimométricos, empezando por el caso más sencillo. Supongamos un anteojo ordinario (fig. 161) provisto de retículo con dos hilos horizontales, cuya distancia p corresponde a la indicada en la figura 160. En O se ve el objetivo y en A el ocular; el tubo portaocular puede correrse enchufado en el portaobjetivo, arrastrando en su movimiento al ocular y al retículo p , según sea la distancia D a la mira; para distancias D relativamente cortas, el tubo portaocular debe sacarse más que cuando se trata de distancias D más largas. El objetivo da en p una imagen de la mira l invertida y más pequeña que ésta, pero que se ve aumentada con el ocular A ; para ello debe estar el ocular a cierta

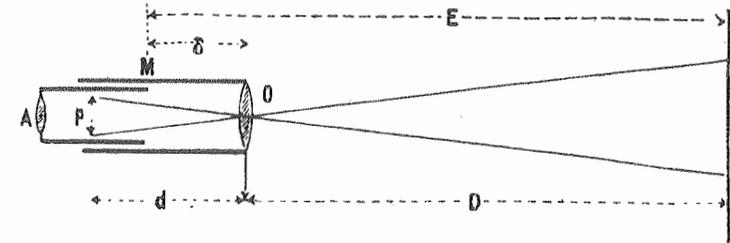


Fig. 161

Puesto que los rayos que pasan por el centro óptico O no experimentan cambio alguno en su dirección, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{p}{d} = \frac{l}{D} \tag{1}$$

y por ser p y l imágenes conjugadas, la distancia focal f del objetivo debe satisfacer la condición siguiente:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f} \tag{2}$$

Estas dos ecuaciones contienen todo lo necesario para hallar la relación entre las magnitudes D y l ; y por tratarse de expresar D en función de l , hay que eliminar d entre estas dos ecuaciones, que para este objeto se escriben de este otro modo:

$$\frac{1}{d} = \frac{l}{Dp} \quad \text{y} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df}$$

y de aquí resulta directamente:

$$\frac{l}{Dp} = \frac{D-f}{Df}, \quad \text{de donde} \quad D-f = \frac{f}{p} l. \tag{3}$$

Es decir, que $D-f$ es proporcional a l , o sea, que la distancia de la mira al foco anterior del objetivo (y no la distancia D) es proporcional a la parte de mira l comprendida entre las proyecciones de los hilos del retículo. A esta parte de mira l , diferencia entre las lecturas hechas con los dos hilos, se llama *número generador*.

Cuando la distancia a la mira no se cuenta desde el objetivo O , sino desde el punto medio M del anteojo (fig. 161), es decir, cuando se tiene la distancia E , hay que aumentar a D un pequeño segmento δ , y en este caso se tendrá:

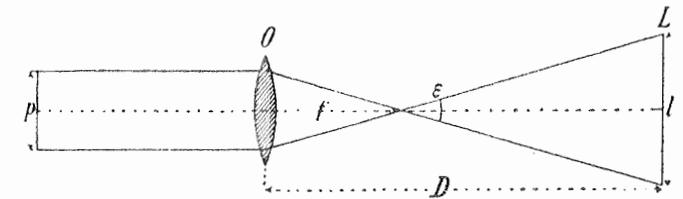


Fig. 162

$$E = D + \delta = (f + \delta) + \frac{f}{p} l \tag{4}$$

$$E = c + kl, \quad \text{donde} \quad c = f + \delta \quad \text{y} \quad k = \frac{f}{p} \tag{5}$$

o sea

La constante de adición c sólo alcanza aproximadamente 0,5 m y a veces se desprecia. La constante de multiplicación k puede hacerse igual a 100 para facilitar los cálculos, y se llama también coeficiente diastimométrico.

También se llega a la ecuación (5) deduciéndola directamente de la figura 162, donde se ven los rayos correspondientes a los puntos de intersección de los hilos horizontales con el hilo vertical del retículo (tomo I, pág. 258); en efecto, en esta figura se verifica la siguiente proporción:

$$D - f = \frac{f}{p} l$$

o sea

$$D - f = k l,$$

que es la misma ecuación (3) antes hallada.

También puede expresarse la constante k en función del ángulo ϵ , cuyo vértice es el foco anterior del objetivo, pues como se ve en la misma figura:

$$k = \frac{f}{p} = \frac{1}{2} \cot \frac{\epsilon}{2}. \tag{6}$$

La ecuación (5) es aplicable al anteojo ordinario y al de Ramsden, ya que el ocular de este último no hace variar en nada la teoría anterior. El ángulo ϵ se conoce con el nombre de *ángulo diastimométrico*.

II. Anteojo de Huygens. Entre el objetivo O y el retículo p (fig. 163) hay una lente colectora C (véase tomo I, pág. 262), que se encuentra a distancia constante y del retículo para cualquier distancia de mira a que se enfoque el ocular. La lente colectora C ,

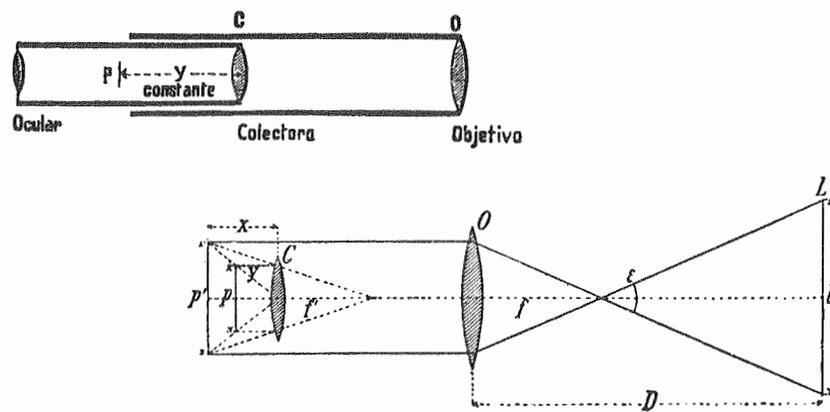


Fig. 163 — Anteojo de Huygens ($y = \text{constante}$)

llamada también *analítica*, da una imagen virtual de los dos hilos del retículo distantes entre sí p' , y esta imagen virtual sustituye en un todo a los hilos reales, pudiéndose ya aplicar a este anteojo el mismo razonamiento que al anterior. Para determinar p' tenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \quad \text{y} \quad \frac{p'}{p} = \frac{x}{y},$$

de las cuales resulta:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{y}{f'} \right). \tag{7}$$

Ahora bien, en la misma figura 163 se tiene:

$$D - f = \frac{f}{p'} l = \frac{f}{p} \left(1 - \frac{y}{f'} \right) l \tag{8}$$

donde puede escribirse:

$$k = \frac{f}{p} \left(1 - \frac{y}{f'} \right). \tag{9}$$

Aquí se ve que la fórmula (3) es válida también para este caso, con sólo poner en vez de la distancia focal f del objetivo, la distancia focal reducida $f \left(1 - \frac{y}{f'} \right)$.

Esta teoría del anteojo de Huygens se basa en que la distancia y (fig. 163) entre la lente colectora C y el retículo p debe ser constante; para ello es preciso que el enfoque del ocular a la distancia de la visión distinta (tomo I, pág. 253) no se haga corriendo el retículo para separarlo o acercarlo al ocular, sino como se hace en esta clase de anteojos, moviendo la lente del ocular más próxima al ojo, que a este fin va montada en un tubo roscado que según se gire en uno u otro sentido se acerca o se separa de la segunda lente, fija, del ocular (fig. 164).

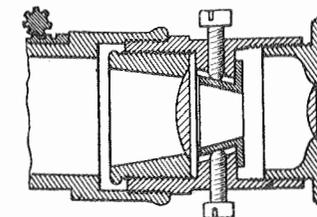


Fig. 164

III. Anteojo de Porro. El anteojo de Porro, cuya disposición se ve en la figura 165, lleva, como el de Huygens, entre el objetivo O y el retículo p una lente colectora C ,

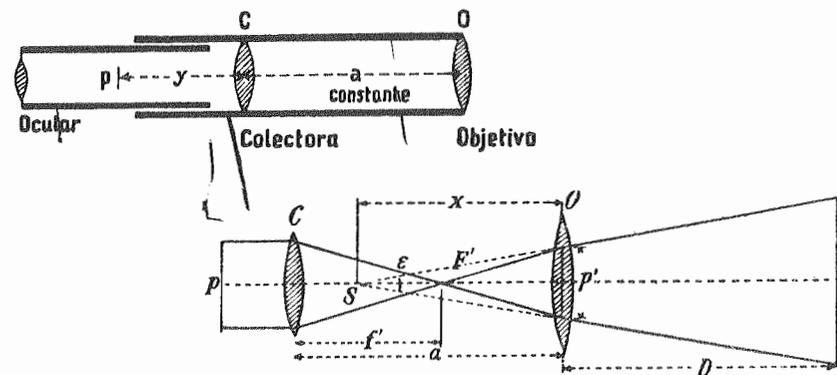


Fig. 165. — Anteojo de Porro ($a = \text{constante}$, $y = \text{variable}$)

situada a distancia constante a del objetivo, pero cuya distancia y al retículo varía al enfocar a diferentes distancias de mira.

Los rayos correspondientes a los dos hilos del retículo paralelos al eje principal del anteojo, se cortan, al atravesar la lente analítica C , en el plano focal anterior F' de esta última y al refractarse nuevamente a través del objetivo O salen de éste formando un ángulo aparente ϵ . Por ser constante la distancia a del objetivo a la colectora, constante será también la posición del vértice S de este ángulo ϵ .

En la figura 165 se tiene:

$$p' = \frac{a - f'}{f'} p \tag{10}$$

y como S es la imagen virtual de F' dada por el objetivo, se verifica que

$$\frac{1}{a-f'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

de donde

$$\frac{1}{x} = \frac{f+f'-a}{f(a-f')} \tag{11}$$

Pero $D+x = x \frac{l}{p'}$, y sustituyendo en (11) el valor de x de aquí despejado, se deduce de la ecuación (10) la siguiente:

$$D = -\frac{f(a-f')}{f+f'-a} + \frac{ff'}{f+f'-a} \cdot \frac{1}{p} l \tag{12}$$

La constante k comprende aquí la expresión:

$$k = \frac{ff'}{f+f'-a} \cdot \frac{1}{p} \tag{13}$$

La teoría del anteojo de Porro, expuesta directamente en las fórmulas (10) a (13), puede también desarrollarse partiendo de las leyes generales sobre focos y puntos principales en un sistema de dos lentes (tomo I, § 59).

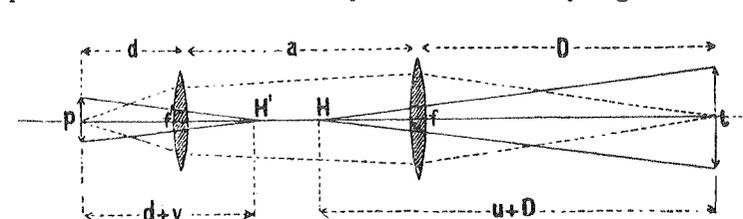


Fig. 166

Supongamos, para ello, que se tienen dos lentes (figura 166) cuyas distancias focales respectivas son f y f' ; en este sistema se obtiene una ima-

gen p de la mira l , y los puntos principales H y H' del mismo, según las leyes citadas, satisfacen a las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{p}{d+v} = \frac{l}{D+u} \quad \text{y} \quad \frac{1}{d+v} + \frac{1}{D+u} = \frac{1}{f''} \tag{14}$$

Para eliminar aquí $d+v$ basta igualar el valor de $\frac{1}{d+v}$ deducido de la primera ecuación con el dado por la segunda,

$$\frac{1}{d+v} = \frac{l}{(D+u)p} = \frac{1}{f''} - \frac{1}{D+u} = \frac{D+u-f''}{f''(D+u)}$$

o sea

$$D+u-f'' = \frac{f''}{p} l \tag{15}$$

donde, según vimos en el tomo I, página 238, f'' y u tienen el significado siguiente:

$$f'' = \frac{ff'}{f+f'-a} \quad u = \frac{af}{f+f'-a} \tag{16}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (15) se tiene la misma ecuación (12). La cantidad f'' es la *distancia focal equivalente* del sistema de lentes f y f' , y respecto a la constante k , el anteojo de Porro es exactamente igual que uno simple con distancia focal única f'' .

Volviendo a la fórmula anterior (12), vemos que para tener la distancia E de la mira al punto medio del aparato, hay que sumar a D la distancia entre este punto medio y el punto S (fig. 165), que es el punto *analático*.

Si llamamos δ a esta pequeña distancia, se tiene:

$$E = \delta - \frac{f(a-f')}{f+f'-a} + \frac{ff'}{f+f'-a} \cdot \frac{1}{p} l \tag{17}$$

Esta fórmula puede escribirse como sigue:

$$E = c + kl,$$

donde

$$c = \delta - \frac{f(a-f')}{f+f'-a} \quad \text{y} \quad k = \frac{ff'}{f+f'-a} \cdot \frac{1}{p} = \frac{f''}{p} \tag{18}$$

Se ve claramente que dando valores apropiados a f, f' y a es posible hacer $c=0$, es decir, que el punto analático caiga en el eje vertical del aparato. Esta es la ventaja principal del anteojo diastimométrico de Porro. En general basta con que c no pase de dos centímetros, como veremos en el § 60.

IV. Anteojo con lente móvil de enfoque. En el tomo I (págs. 269 a 272), al tratar del eje óptico de esta clase de anteojos, se supuso que el centro de la cruz filar y el centro del objetivo estaban respectivamente a distancias p y q de la recta sobre la cual se mueve el centro de la lente de enfoque. Supongamos ahora enfocado el anteojo al infinito, y que para la distancia constante e_∞ entre las dos lentes, se mueva el retículo sobre dicha recta; así tendremos un anteojo con teleobjetivo (tomo I, pág. 261), cuyo eje óptico es una línea recta. Según se demostró en el tomo I (página 272), empleando lentes apropiadas se puede conseguir que el eje óptico del anteojo con lente móvil de enfoque sea paralelo al eje óptico del teleobjetivo, al cual llamaremos en lo sucesivo eje de colimación.

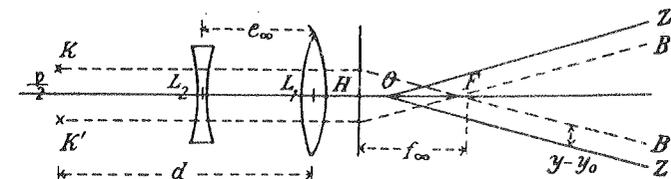


Fig. 167

En la figura 167 se ven las dos lentes, distantes entre sí e_∞ ; para mayor sencillez, se considera el centro del objetivo L_1 sobre la recta a lo largo de la cual se mueve la lente de enfoque. La distancia entre el punto de intersección K de un hilo horizontal del retículo con el vertical del mismo y esta recta, la vamos a llamar $\frac{p}{2}$. Si H es el punto principal anterior y F el foco anterior del sistema óptico constituido por las dos lentes L_1 y L_2 , a distancia e_∞ entre sí, la dirección del eje de colimación será FB . La paralela OZ será el eje óptico, cuya distancia al eje de colimación, medida según la perpendicular a la recta o eje de traslación de la lente de enfoque, será, según se vió en el tomo I, página 271:

$$y - y_0 = \frac{f_1(e_\infty + f_2 - d)}{f_2(2e_\infty - f_1 - d)} \cdot \frac{p}{2} \tag{19}$$

El valor de $y - y_0$ es negativo para todos los sistemas ópticos empleados en estos anteojos, lo cual significa que el eje óptico OZ cae siempre por debajo del eje de colimación FB .

Consideremos ahora un segundo punto reticular K' a la misma distancia $\frac{p}{2}$ que el primero K , del eje de traslación de la lente de enfoque, pero al otro lado de ésta, al cual

corresponden el eje óptico OZ' y el de colimación FB' . Si hacemos la distancia total p entre los dos puntos reticulares K y K' igual a $\frac{f_\infty}{100}$, siendo f_∞ la distancia focal equivalente de las dos lentes para la distancia e_∞ , tendremos un estadímetro con la constante de multiplicación igual a 100, es decir, con un coeficiente diastimométrico igual a 100.

Para determinar el punto analítico O , tenemos en primer lugar:

$$OF = -100(y - y_0). \quad (20)$$

Después tenemos, para la distancia del foco F al objetivo y para la distancia focal equivalente, según las fórmulas (14) y (13) de la página 238 del tomo I:

$$L_1 F = \frac{f_1(f_2 - e_\infty)}{f_1 + f_2 - e_\infty}, \quad f_\infty = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e_\infty}.$$

Sustituyendo en (20) el valor de $y - y_0$ dado en la fórmula (19) y teniendo en cuenta que $100 p = f_\infty$, se tendrá para $L_1 O = L_1 F - OF$ la siguiente expresión:

$$L_1 O = \frac{f_1(f_2 - e_\infty)}{f_1 + f_2 - e_\infty} + \frac{f_1(e_\infty + f_2 - d)}{f_2(2e_\infty - f_1 - d)} f_\infty.$$

Llamando δ a la distancia entre el objetivo y el punto medio del anteojo, se tienen las siguientes constantes:

$$c = \delta + \frac{f_1(f_2 - e_\infty)}{f_1 + f_2 - e_\infty} + \frac{f_1(e_\infty + f_2 - d)}{f_2(2e_\infty - f_1 - d)} f_\infty, \quad k = 100. \quad (21)$$

Ejemplo primero. Como aplicación de esta teoría calcularemos la constante aditiva c para el anteojo citado en la página 269 del tomo I, cuyas características ópticas y estadimétricas eran:

$$f_1 = 149 \text{ mm}, \quad f_2 = -500 \text{ mm}, \quad d = 165 \text{ mm} \\ e_\infty = 67,2 \text{ mm}, \quad f_\infty = 178,15 \text{ mm}.$$

Con estos datos numéricos se tiene:

$$\frac{f_1(f_2 - e_\infty)}{f_1 + f_2 - e_\infty} = 202,1 \text{ mm}, \quad \frac{f_1(e_\infty + f_2 - d)}{f_2(2e_\infty - f_1 - d)} f_\infty = -176,7 \text{ mm}$$

o sea

$$c = \delta + 25,4 \text{ mm}.$$

Es decir, que en este anteojo, el punto analítico está a 2,5 cm de distancia del objetivo, por fuera del anteojo.

Ejemplo segundo. Tomemos las características de otro anteojo (del Tratado de Agrimensura de Wilski):

$$f_1 = 179,2 \text{ mm}, \quad f_2 = -78,6 \text{ mm}, \quad d = 218,8 \text{ mm} \\ e_\infty = 139,8 \text{ mm}, \quad f_\infty = 359,3 \text{ mm}.$$

Para este anteojo se tiene:

$$\frac{f_1(f_2 - e_\infty)}{f_1 + f_2 - e_\infty} = 958,4 \text{ mm}, \quad \frac{f_1(e_\infty + f_2 - d)}{f_2(2e_\infty - f_1 - d)} f_\infty = -1681,2 \text{ mm}$$

de donde:

$$c = \delta - 82,8 \text{ mm}.$$

El punto analítico, en este anteojo, está a 8,3 cm de distancia del objetivo, por dentro del anteojo. Como el eje de giro del anteojo cae precisamente en este punto, resulta que la constante de adición c es igual a cero.

La teoría de los anteojos con lente móvil de enfoque puede desarrollarse de muchos modos. A continuación citamos algunos de los trabajos publicados sobre la misma:

WILD; *Nuevos aparatos para la nivelación* («Zeitschr. f. Instr.», 1909).

KLINGATSCH; *Anteojos diastimométricos con lente de enfoque* («Zeitschr. f. Instr.», 1912).

BAESCHLIN; *Anteojos diastimométricos con lente de enfoque* («Zeitschr. f. Instr.», 1913).

EGGERT; *El anteojo de Wild-Zeiss como estadímetro* («Zeitschr. f. Verm.», 1913).

KÖNIG; *Diastimometría con anteojo provisto de lente de enfoque* («Zentral-Ztg. f. Opt. u. Mech.», 1920).

UHINK; *Anteojo diastimométrico de longitud invariable* («Mitt. a. d. Markscheidewesen», 1926).

EGGERT; *Contribución al estudio de la teoría de los anteojos con lente de enfoque* («Zeitschr. f. Verm.», 1929).

SAMEL; *Teoría de las líneas de colimación y de la diastimometría* («Allg. Verm.-Nachr.», 1930).

WILSKI; *Tratado de Agrimensura*, Berlín, 1932.

Al ingeniero Hohenner se debe un aparato con anteojo diastimométrico de lente de enfoque que ofrece la particularidad de no tener longitud constante, sino fijo el plano imagen, mediante el movimiento del objetivo. La lente móvil de enfoque sirve para variar el tamaño de la imagen, y de este modo, con el movimiento conveniente del objetivo y de la lente de enfoque, se puede obtener una imagen bien clara y de un tamaño determinado. Los dos hilos horizontales del retículo se colocan en el medio de un trazo de la mira, y así se obtiene la mayor precisión posible.

V. Estadímetro de Heckmann-Breithaupt. Los estadímetros hasta aquí descritos se emplean siempre con mira vertical. Pero también pueden disponerse los dos hilos del retículo paralelos al hilo vertical y hacer la lectura sobre una mira horizontal. Este procedimiento tiene la ventaja de que el efecto de la refracción queda casi excluido por completo (§ 64). En la obra de Heines sobre levantamientos catastrales («Tijdschr. v. Kad. en Landmeetk.», 1927) se estudia el empleo de estos estadímetros con una mira de Dieperink (fig. 51, pág. 42).

En 1932 construyó la casa Breithaupt, por indicación de Heckmann, un nuevo estadímetro, que se emplea con una mira horizontal de divisiones transversales (fig. 50); el plano imagen del anteojo se puede variar con un dispositivo análogo al representado en la figura 164. El hilo horizontal y el doble hilo vertical corresponden al retículo ordinario del teodolito; para la medición de las distancias van otros dos hilos, uno vertical a la izquierda y otro a la derecha inclinado en un 1:10 (fig. 168).

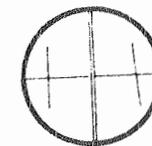


Fig. 168

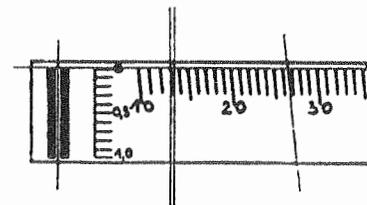


Fig. 169

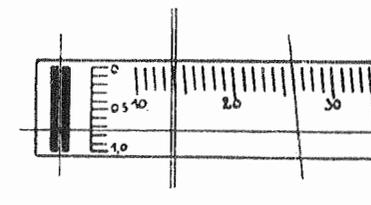


Fig. 170

La mira (figs. 169 y 170) lleva en el cero de su escala una señal de referencia y junto a ésta una pequeña escala vertical, cuyas divisiones van numeradas de 0 a 1,0 y cuya longitud total es igual a 10 divisiones de la escala principal. Las rayas de esta última tienen la misma inclinación que el hilo de la derecha del retículo.

La lectura se hace sobre la mira con los puntos de intersección del hilo horizontal del

retículo y de los dos hilos laterales, procediéndose del modo siguiente: se coloca el hilo de la izquierda en el cero de la mira, a la vez que el hilo horizontal sobre el cero de la escalilla vertical, como se ve en la figura 169, donde la lectura aproximada correspondiente a la posición de los hilos en ella representada es de unos 26 cm; para medir ahora la distancia del hilo inclinado a la división 26, se inclina el anteojo con el tornillo de llamada, hasta que el hilo de la derecha coincida con la división 26, como se ve en la figura 170; basta hacer la lectura del hilo horizontal sobre la escalilla y sumarla a la anterior; en el caso de la figura, la segunda lectura es 0,74 cm y la lectura total es 26,74 cm.

En la figura 171 se ve una de estas miras tales como son en realidad, y en las cuales se aplica el principio del enrase en cuña (véanse § 9, figura 31, y § 14, página 73).



Fig. 171

Las divisiones inclinadas de la mira están representadas por las bisectrices de los espacios angulares blancos que se ven en aquélla. Para sostener la mira se emplea un trípode análogo a los representados en las figuras 360 y 366 del tomo I.

El estadímetro de Heckmann-Breithaupt, como todos los demás, es independiente de la disposición óptica del anteojo, por lo cual puede aplicarse a cualquier anteojo; si éste no es analítico hay que tener en cuenta una constante aditiva además del coeficiente diastimométrico; la lectura sobre la mira da la distancia inclinada entre ésta y el aparato, que se reduce al horizonte por medio del ángulo de pendiente observado.

Sobre la reseña histórica del estadímetro, nos referimos a la obra de C. M. Goulier titulada *Études théoriques et pratiques sur les levers topométriques et sur la tachéométrie*, París, 1892, según la cual el principio de la medición estadimétrica se debe a William Green (1778), óptico de Londres, y fué aplicado en 1812 en Flesinga por ingenieros franceses; en 1816 siguieron este sistema los ingenieros piemonteses en el levantamiento de la zona fronteriza entre Saboya y Francia. Los italianos remontan la invención de la estadía al 1674; el anteojo diastimométrico, descrito en aquel entonces, de Geminiano Montanari, tenía una escala micrométrica formada por hilos equidistantes, y el número de intervalos filares que cubrían el objeto dado (mira) servía para medir la distancia a este último; esta descripción se encuentra en *La livella diottrica del dottore G. Montanari*, Venecia, 1680; también se ve en *Instrumenti e metodi moderni di Geometria applicata*, por Angelo Salmoiraghi, Milán, 1834. Sobre la historia del estadímetro escribió Hammer una Memoria en la «Zeitschr. f. Verm.», 1891 y en «Zeitschr. f. Instr.», 1892; también Schmidt se ocupó de la misma materia («Zeitschr. f. Verm.», 1893) y Vogler, en su *Tratado de Geometría práctica*, de 1894.

Según otra Memoria de Hammer («Zeitschr. f. Instr.», 1897), ya en 1771, quien lo saca de una biografía del inventor de la máquina de vapor J. Watt (*Vida de James Watt*, por James Patrick Muirhead, nueva edición, 1859, 3.º tomo), unos cuantos años antes que Green, empleó Watt para la medición de distancias, en los proyectos de canales, un retículo ocular fijo y una mira graduada.

Aparecen, pues, en la historia de la invención y aplicación del estadímetro tres nombres principales: Montanari, 1674, Watt, 1771, y Green, 1778, de los cuales el que más

precisión obtuvo y más aplicaciones hizo fué Watt. En Alemania corresponde el mérito de haber introducido y perfeccionado este principio al mecánico y óptico Reichenbach, de Munich, hacia el 1810 («Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover», 1884).

§ 60. Determinación de las constantes diastimométricas

Según la teoría expuesta en el párrafo anterior, la ecuación fundamental para todos los taquímetros es de la forma siguiente:

$$E = c + kl \quad (1)$$

donde E es la distancia desde el punto medio del anteojo a la mira (fig. 172), c es una constante de unos 50 cm, l (número generador) es la parte de mira que se ve entre los dos hilos del retículo que constituyen la estadía propiamente dicha, y k es una constante, llamada coeficiente diastimométrico, a la que debe siempre darse un valor expresado en números redondos, por ejemplo $k = 100$.

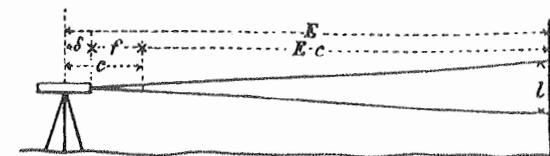


Fig. 172

I. Determinación de la constante aditiva c . Conociendo las características ópticas de un anteojo estadimétrico, es de la mayor sencillez la determinación de c . En un anteojo ordinario o provisto de ocular de Ramsden o de Huygens se tiene que $c = f + \delta$, donde f es la distancia focal del objetivo y δ la mitad, aproximadamente, de la longitud del anteojo, y como δ es con mucha aproximación igual a $0,5f$, resulta $c = 1,5f$.

La distancia focal f del objetivo se puede determinar exactamente con sólo recibir la imagen del Sol, bien recortada, sobre un papel, y midiendo después la distancia f de este papel al objetivo. Si el anteojo tiene ocular de Ramsden, basta enfocararlo al infinito, y en estas condiciones la distancia del retículo al objetivo es igual a la distancia focal buscada f .

Claro está que si se trata de un anteojo de Porro se tiene que la constante $c = 0$, que es el caso más sencillo.

Ahora bien, si no se tiene seguridad sobre la clase de anteojo del aparato en cuestión, por ejemplo, si se duda de que en un anteojo supuesto de Porro coincida el punto analítico con el punto medio del anteojo, hay que determinar c y k a la vez, como veremos más adelante, en el caso III (pág. 235).

II. Determinación de la constante de multiplicación (coeficiente diastimométrico) k . Cuando se conocen exactamente las distancias focales y todas las dimensiones y características del anteojo estadimétrico, se puede calcular la constante k para cada caso, aplicando las fórmulas (5), (9) o (18) del párrafo 59; pero no resulta exacto el cálculo; la determinación micrométrica del ángulo paraláctico o diastimométrico no es posible hacerla sin contar con medios auxiliares especiales de los que no es fácil disponer. Mejor es determinar experimentalmente el valor de k , por comparación entre la distancia directamente medida E y la obtenida con el anteojo estadimétrico, como se ve en la figura 173.

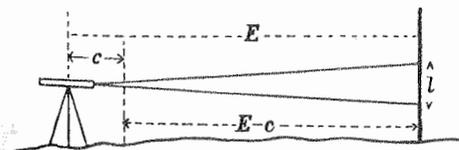


Fig. 173

En el cuadro siguiente se ven los resultados de un ejemplo numérico correspondiente a un cierto taquímetro cuya constante aditiva es $c = 0,57$ m; la distancia se midió, como indica la figura 172, tomando primero $c = 0,57$ m a partir del punto medio del anteojo, hacia delante, y midiendo después con reglas las distancias $E - c$, de 50 m, 100 m, 150 m y 200 m. Esta medición con reglas se hizo escrupulosamente, con ida y vuelta repetidas varias veces, por lo cual su resultado puede considerarse exento de error. Al hacer esta clase de mediciones es absolutamente necesario contrastar las reglas empleadas.

Sobre la distancia total así subdividida, se leyó para cada punto cinco veces la mira, unas al ir y otras al volver, obteniéndose los resultados siguientes:

$E - c$	Lecturas de la mira					Media	$\frac{100l}{E - c}$	v	v^2
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	l			
m	m	m	m	m	m	m	m		
50	0,501	0,501	0,501	0,502	0,500	0,5010	1,0020	- 5	25
100	1,000	1,000	1,000	1,001	1,002	1,0006	1,0006	+ 9	81
150	1,501	1,503	1,501	1,500	1,502	1,5014	1,0009	+ 6	36
200	2,005	2,007	2,002	2,005	2,005	2,0048	1,0024	- 9	81
						Suma	4,0059		223

$$\text{Media } \frac{100}{k} = \frac{4,0059}{4} = 1,0015, \quad \text{o sea } k = \frac{100}{1,0015} = 99,85. \quad (3)$$

El cálculo representado en el cuadro anterior no necesita explicación alguna; únicamente hay que tener en cuenta, para que no extrañe la formación de la simple media aritmética de los cuatro valores $\frac{100l}{E - c}$, que l tiene evidentemente distinto error medio para diferentes distancias, por lo cual pueden considerarse los cocientes $\frac{l}{E - c}$ ó $\frac{100l}{E - c}$ en la casi totalidad de los casos como de pesos iguales, sobre todo no tratándose de observaciones especiales en que se hayan de tener en cuenta los pesos.

Haciendo el cálculo de la precisión en el cuadro anterior, encontramos para valor del error medio m_1 de una determinación de $\frac{100l}{E - c}$ el siguiente:

$$m_1 = \sqrt{\frac{223}{3}} = 8,6$$

de la última clase de unidades, es decir:

$$m_1 = \pm 0,00086 \quad (4)$$

y el error medio de la media

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{4}} = 0,0004. \quad (5)$$

Por consiguiente, se tendrá:

$$\frac{100}{k} = 1,0015 \pm 0,0004, \quad \text{o sea } k = 99,85 \pm 0,04. \quad (6)$$

La constante k es, como se ve, bastante menor que 100, ya que la diferencia alcanza a 0,15, es decir, a unas cuatro veces el error medio 0,04. El mecánico tuvo la intención de hacer $k = 100$, pero no pudo conseguir la exactitud propuesta.

Se logra una mayor precisión en estas mediciones colocando la mira, no a las distancias justas de 50 m, 100 m, etc., sino corriéndolas hacia atrás o hacia delante, en los puntos

correspondientes, hasta que los dos hilos horizontales del retículo caigan en el punto medio de un trazo de la mira, moviendo para ello convenientemente el tornillo de llamada que hace variar la inclinación del anteojo. La posición de la mira se fija con cinta metálica. Al cabo de pocas observaciones de esta clase se aprecia perfectamente la superioridad del método de coincidencia sobre el de lectura (Egerer, Zeitschr. f. Verm., 1913).

En el párrafo 61 veremos los procedimientos que hay para facilitar las multiplicaciones cuando la constante k no es un número entero.

III. Determinación simultánea de k y c . Cuando no se conocen las características ópticas del anteojo, no se puede determinar por sí sola la constante aditiva, y lo que se hace es determinarla juntamente con k , de un modo indirecto. Se miden para ello dos distancias diferentes E_1 y E_2 con reglas o con cinta métrica, y se hacen al mismo tiempo, con el estadímetro, las correspondientes lecturas de mira l_1 y l_2 . Según la fórmula (1) se tienen así dos ecuaciones:

$$\begin{cases} E_1 = c + l_1 k \\ E_2 = c + l_2 k \end{cases} \quad (7)$$

entre las cuales se despejan c y k . Pero veamos la precisión con que resultan así calculadas las dos constantes c y k .

El coeficiente diastimométrico, deducido de las ecuaciones (7), viene dado por la expresión siguiente:

$$k = \frac{E_2 - E_1}{l_2 - l_1} \quad (8)$$

Si las dos lecturas de una mira están afectadas respectivamente por los errores Δl_1 y Δl_2 , el error de la constante k será:

$$\Delta k = \frac{E_2 - E_1}{(l_2 - l_1)^2} (\Delta l_1 - \Delta l_2) = \frac{k}{l_2 - l_1} (\Delta l_1 - \Delta l_2)$$

y si m_1 y m_2 son los errores medios de l_1 y l_2 , el error medio de k se deducirá de la expresión siguiente:

$$m_k^2 = \frac{k^2}{(l_2 - l_1)^2} (m_1^2 + m_2^2). \quad (9)$$

De aquí resulta que para la mejor determinación de k , conviene que la diferencia $l_2 - l_1$ sea todo lo más grande posible.

La constante aditiva c se deduce de las ecuaciones (8) y (7):

$$c = E_1 - \frac{E_2 - E_1}{l_2 - l_1} l_1 \quad (10)$$

y tomando incrementos se tiene:

$$\Delta c = \frac{E_2 - E_1}{(l_2 - l_1)^2} (l_1 \Delta l_2 - l_2 \Delta l_1)$$

y

$$m_c^2 = \frac{k^2}{(l_2 - l_1)^2} (l_2^2 m_1^2 + l_1^2 m_2^2). \quad (11)$$

También para la determinación de c es necesario que la diferencia $l_2 - l_1$ sea lo mayor posible. Además, el paréntesis de (11) se hace muy pequeño tomando la distancia E_1 todo lo corta que permita la salida del ocular, haciendo con toda exactitud la lectura l_1 . Esta precisión se facilita fijando en la mira una escala milimétrica, con la cual se puede apreciar perfectamente la décima de milímetro en la lectura de l_1 .

Ejemplo. Para el taquímetro de Hildebrand representado en la figura 190 (pág. 257), se determinaron las constantes por el método anterior. En cada posición de la mira se hizo una serie de lecturas, cuya media y cuyo error medio se calculaba seguidamente. Los resultados numéricos obtenidos fueron:

$$E_1 = 2,214 \text{ m} \quad l_1 = 0,0178 \text{ m} \pm 0,035 \text{ mm}$$

$$E_2 = 49,000 \text{ m} \quad l_2 = 0,4357 \pm 0,370$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (8) y (10) se tiene:

$$k = \frac{46,786}{0,4679} = 99,991$$

$$c = 2,214 - 99,991 \times 0,0178 = 0,434 \text{ m.}$$

Y según (9) y (11) los errores medios correspondientes son:

$$m_k = \pm \frac{99,991}{0,4679} \sqrt{\frac{0,035^2 + 0,370^2}{1000^2}} = \pm 0,079$$

$$m_c = \pm \frac{99,991}{0,4679} \sqrt{0,486^2 \times 0,035^2 + 0,0178^2 \times 0,370^2} = \pm 3,89 \text{ mm.}$$

La expresión completa de la distancia E es, por lo tanto:

$$E = 0,434 + 99,991 l$$

$$\pm 0,004 \pm 0,079.$$

Aunque este método basta para la determinación práctica de las dos constantes, vamos a aplicarlo a más de dos distancias, haciendo la compensación por el método de los mínimos cuadrados.

Por ser el coeficiente diastimométrico aproximadamente igual a 100, se puede escribir:

$$k = 100 + y \quad \text{y al mismo tiempo hacer} \quad c = x. \quad (12)$$

Es decir, que

$$E = x + (100 + y) l, \quad \text{o sea} \quad E - 100 l = x + l y.$$

El error será:

$$v = x + l y + (100 l - E) \quad (13)$$

y la ecuación del error, en su forma general, será:

$$v = a x + b y - \lambda \quad (14)$$

donde los coeficientes son:

$$a = 1, \quad b = l, \quad \lambda = E - 100 l. \quad (15)$$

Designamos aquí con λ el término independiente, y no con l como se hace de ordinario, porque con esta letra se designa aquí la lectura hecha sobre la mira.

La ecuación (14) puede considerarse como ecuación de errores, porque $\lambda = E - 100 l$ tiene todos los caracteres de una observación.

En cuanto al peso p de dicha ecuación (14), debe verificarse que:

$$p = \frac{1}{l^2}, \quad (16)$$

pues siendo proporcional el error medio de una observación a la distancia E , puede también considerarse proporcional al número generador o parte de mira l comprendida entre los hilos del retículo.

De las fórmulas (15) y (16) pueden deducirse los coeficientes de las ecuaciones normales (tomo I, § 10, pág. 26), a saber:

$$[p a a] = \left[\frac{1}{l^2} \right] \quad [p a b] = \left[\frac{1}{l} \right] \quad [p a \lambda] = \left[\frac{\lambda}{l^2} \right]$$

(n = número de observaciones)

$$[p b b] = n \quad [p b \lambda] = \left[\frac{\lambda}{l} \right]$$

$$[p \lambda \lambda] = \left[\frac{\lambda^2}{l^2} \right].$$

Una vez calculados estos coeficientes se resuelven las dos ecuaciones:

$$[p a a] x + [p a b] y - [p a \lambda] = 0$$

$$[p a b] x + [p b b] y - [p b \lambda] = 0.$$

El resto del cálculo se hace como se indica en el ejemplo siguiente:

Con un taquímetro de los llamados «Cleps» (representado en la figura 193) se leyó una mira colocada en siete puntos distintos correspondientes a otras tantas distancias, comprendidas entre 25 m y 300 m, perfectamente medidas con reglas. El aumento del anteojo es de 25 diámetros. Las distancias se cuentan desde el punto medio del anteojo. En el cuadro siguiente se ven los valores medios (resultantes cada uno de cuatro lecturas hechas por dos observadores), y los de λ y p :

distancia $E =$	25 m	50	100	150	200	250	300 m
lectura $l =$	0,2501 m	0,5000	1,0006	1,5016	2,0021	2,5058	3,0060 m
$100 l - E = \lambda =$	+ 0,01	+ 0,00	+ 0,06	+ 0,16	+ 0,21	+ 0,58	+ 0,60
$1 : l^2 = p =$	16,00	4,00	1,00	0,44	0,25	0,16	0,11

Núm.	p	a	b	λ	$p a b$	$p a \lambda$	$p b b$	$p b \lambda$	$p \lambda \lambda$
1.	16,00	1,00	0,25	-0,01	4,00	-0,16	1,00	-0,04	0,002
2.	4,00	1,00	0,50	-0,00	2,00	-0,00	1,00	-0,00	0,000
3.	1,00	1,00	1,00	-0,06	1,00	-0,06	1,00	-0,06	0,004
4.	0,44	1,00	1,50	-0,16	0,67	-0,07	1,00	-0,11	0,011
5.	0,25	1,00	2,00	-0,21	0,50	-0,05	1,00	-0,10	0,011
6.	0,16	1,00	2,50	-0,58	0,40	-0,09	1,00	-0,23	0,054
7.	0,11	1,00	3,00	-0,60	0,33	-0,07	1,00	-0,20	0,040
Sumas:	21,96	7,00	10,75	-1,62	8,90	-0,50	7,00	-0,74	0,122

$$\text{Ecuaciones normales: } + 21,96 x + 8,90 y + 0,50 = 0$$

$$+ 8,90 x + 7,00 y + 0,74 = 0$$

$$\underline{\underline{0,122}}$$

La solución de estas ecuaciones da:

$$x = + 0,041 \quad y = - 0,158 \quad [\lambda \lambda \cdot 2] = 0,025 = [p v v].$$

$$\pm 0,021 \quad \pm 0,038$$

$$c = + 0,04 \text{ m} \pm 0,02 \text{ m}, \quad k = 100 + y = 99,842 \pm 0,038, \quad m = \sqrt{\frac{0,025}{5}} = \pm 0,070. \quad (17)$$

La fórmula de la distancia será, pues:

$$E = 0,04 \text{ m} + 99,842 l. \quad (18)$$

El valor tan pequeño de $c = x = 0,04 \text{ m}$, con el error medio $\pm 0,02 \text{ m}$, indica que el anteojo es suficientemente analítico, y que para todas las aplicaciones prácticas puede considerarse $c = 0$.

Como resultado práctico de interés general fijémosnos en el error medio $m = \pm 0,070$ m, que es el error medio estadimétrico por 100 m de distancia (para el peso $p = 1$). Como se hicieron ocho lecturas en cada medición, el error medio de una de éstas será:

$$m_1 = 0,070 \sqrt{8} = \pm 0,20 \text{ m por } 100 \text{ m.} \quad (19)$$

Puede decirse, por lo tanto, que el error medio de una determinación de distancia hecha con este aparato es de un $\pm 0,2\%$ de la distancia medida.

Como comprobación de los cálculos, deduzcamos finalmente el error residual v , por la fórmula

$$v = 0,041 + 99,842l - E,$$

donde l es la lectura de mira y $E = 25 \text{ m}, 50 \text{ m}, \dots 300 \text{ m}$, es la distancia dada. Los siete valores de v así calculados son:

$$v = +0,01 \quad -0,04 \quad -0,06 \quad -0,04 \quad -0,03 \quad +0,22 \quad +0,17$$

y de aquí resulta $[pvv] = 0,024$, valor que coincide casi exactamente con el de $[\lambda\lambda \cdot 2] = 0,025$ antes obtenido (17).

Compensación gráfica. En vez de la compensación analítica puede determinarse gráficamente el valor de las dos incógnitas x, y , tomando l como abscisa y $\lambda = E - 100l$ como ordenada, según se ve en la figura 174. En los puntos así obtenidos, se anotan, en la misma figura, sus pesos respectivos, y después se traza la recta compensada correspondiente a los puntos y a sus pesos.

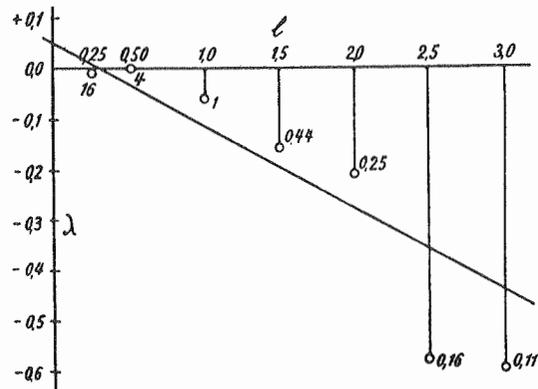


Fig. 174

Determinación gráfica de las constantes estadimétricas

Como se ve, los valores resultantes para x, y , coinciden con los obtenidos anteriormente por el cálculo.

§ 61. Cálculo de $c + kl$

Estando verticalmente colocada la mira y siendo horizontal el eje de colimación del anteojo, se deduce la distancia E de la ecuación:

$$E = c + kl. \quad (1)$$

Vamos ahora a ocuparnos de los diferentes medios auxiliares que facilitan el cálculo de esta expresión; pero antes digamos algo más sobre las constantes c y k .

I. Constante aditiva c . 1. La constante c vale, por término medio, 0,5 m, por lo cual en muchos casos se prescinde simplemente de la misma, sobre todo en levantamientos topográficos a escalas comprendidas entre 1 : 25000 y 1 : 5000, pues en estas escalas tan

pequeñas no tiene realmente representación la longitud de 0,5 m. Mientras mayor es la escala y por lo tanto la precisión del levantamiento, tanto menos puede permitirse el despreciar la constante c .

2. Se puede, al menos, tener una idea del error cometido al despreciar c , variando algo la constante k , es decir, escribiendo la ecuación (1) del modo siguiente:

$$E = c + kl = \left(\frac{c}{l} + k\right)l = k'l, \quad \text{donde} \quad k' = k + \frac{c}{l}. \quad (2)$$

Dando aquí a l un valor medio, por ejemplo $l = 1,0$, se tiene:

$$k' = k + c. \quad (3)$$

Se calculan las distancias con esta nueva constante k' ; de este modo se ve que para distancias poco diferentes de los 100 m es mínimo el error cometido al despreciar c .

3. La ecuación fundamental (1) puede también escribirse de este otro modo:

$$E = \left(\frac{c}{k} + l\right)k = k'l', \quad \text{donde} \quad l' = l + \frac{c}{k}. \quad (4)$$

Cuando el cero de la mira, sobre el cual se enfila siempre uno de los hilos, se corre hacia arriba en la pequeña longitud $\frac{c}{k}$, resulta la primera división de la mira en $\frac{c}{k}$ más corta que todas las demás; por ejemplo, para $k = 100$ y $c = 0,5 \text{ m}$, hay que acortar la primera división de la mira en 0,5 cm.

II. Coeficiente diastimométrico o constante de multiplicación k . En el ejemplo antes descrito (págs. 237 a 238) la constante k era igual aproximadamente a 100. Ordinariamente se hace k igual a 100, a 50, a 200 ó a otro número redondo conveniente. Pero el constructor, al colocar los hilos del retículo, sólo puede conseguir para k un valor aproximado, resultando de aquí que el coeficiente por el cual hay que multiplicar las lecturas tiene por ejemplo un valor $k = 99,842$, demasiado complicado para tantas y tantas multiplicaciones. Para hacer que la constante k tome un valor entero se emplean varios procedimientos.

1. Regulación de la distancia entre los hilos del retículo. Según las leyes ópticas que estudiamos en el párrafo 59, la constante k depende de la distancia p entre los hilos estadimétricos; en el caso más sencillo, del ocular de Ramsden, $k = \frac{f}{p}$. Si se hace variar la distancia p con un tornillo de regulación, como se ve en la figura 175, se puede con toda facilidad dar a k un valor múltiplo de 10. Pero esta regulación ofrece el inconveniente, mejor dicho, el peligro, de que se altere la separación de los hilos en el transporte del instrumento.

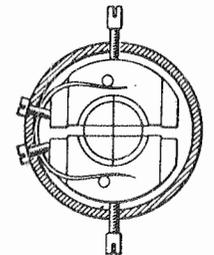


Fig. 175

Afinación de la distancia entre los hilos

2. Regulación de la distancia entre las lentes. Para el ocular de Huygens vimos en el párrafo 59, fórmula (9), que la constante k tiene la siguiente expresión:

$$k = \frac{f}{p} \left(1 - \frac{y}{f'}\right)$$

en la cual y es la distancia entre el retículo y la lente colectora (véase figura 163). Si se corre un poco el retículo, se puede dar a k exactamente un valor entero y múltiplo de 10; el enfoque necesario del retículo con el ocular se consigue, para vistas distintas, introdu-

ciendo o sacando un poco la lente inmediata al ojo, sin tener que mover para nada la lente colectora.

En el anteojo de Porro se puede dar a k el valor 100 fundándose en el mismo principio, pero variando la distancia a entre el objetivo y la lente colectora [véanse figura 165 y fórmula (13) de la página 228]. Hay que tener en cuenta que al variar esta distancia, varía también la constante aditiva c , según indica la primera de las fórmulas (18) de la página 229.

3. División especial de la mira. Se puede dividir la mira, no del modo ordinario, sino con la unidad $\frac{100}{k}$, y tomar después para k , en vez de su valor real, el valor redondo $k = 100$. Por ejemplo, si se tiene un coeficiente diastimométrico $k = 66,67$, se toma en la mira, en vez de 1 m, un intervalo de 1,5 m, dividido en las mismas partes que aquél estaría dividido en una mira corriente.

Este sencillo procedimiento ha sido siempre muy empleado: tiene la ventaja de que, según la disposición óptica del aparato, la constante puede tener un valor pequeño, comprendido entre 50 y 100; pero tiene, en cambio, el inconveniente de que requiere el empleo de una mira especial, inservible para otros aparatos.

III. Cálculo de $c + kl$. Puede simplificarse mucho el cálculo exacto de la distancia, aun teniendo en cuenta la constante aditiva c , y sin variar el valor de k (es decir, sin reducirlo a múltiplo de 10), empleando medios auxiliares adecuados.

Si el coeficiente diastimométrico k tiene un valor aproximado a 100, se forma una tabla numérica del modo siguiente. Se hace

$$k = 100 + \varepsilon$$

y la fórmula fundamental será:

$$E = c + kl = 100l + c + \varepsilon l$$

o sea

$$E = 100l + \Delta$$

El término de corrección $\Delta = c + \varepsilon l$ se deduce fácilmente para distintos valores de l ; por ejemplo, si $c = 0,57$ y $k = 99,85$ ($\varepsilon = -0,15$), se obtiene la siguiente tabla para Δ .

l	Δ
0,0	+ 0,6
0,13	+ 0,5
0,80	+ 0,4
1,47	+ 0,3
2,13	+ 0,2
2,80	+ 0,1
3,47	0,0
4,13	- 0,1
4,80	- 0,2

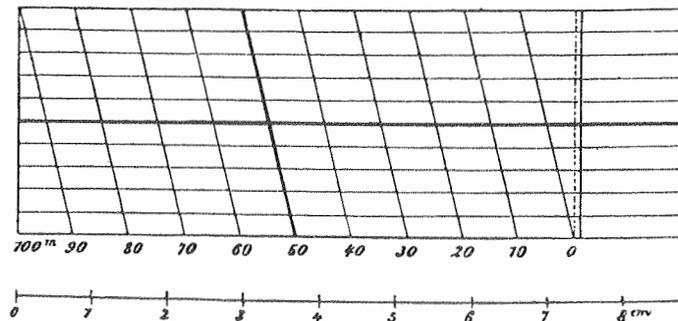


Fig. 176. — Escala de transversales 1:1000 para una constante $k = 73,16$

Si la lectura de mira es $l = 1,785$, el valor correspondiente de Δ , según la tabla es $\Delta = +0,3$, y la distancia exacta será:

$$E = 178,5 + 0,3 = 178,8.$$

En vez de la tabla numérica se puede construir una escala de transversales como la representada en la figura 176 para el valor $k = 73,16$ de un cierto anteojo. Se multiplica la

lectura de mira por 100, y el número resultante se toma sobre la escala que da el verdadero valor de la distancia en escala 1 : 1000. La constante aditiva c está tenida en cuenta, en este diagrama, por el corrimiento del cero de la escala.

También las tablas auxiliares que se emplean para el cálculo de distancias y de alturas con visuales inclinadas, pueden tener en cuenta, a la vez, las constantes k y c de un aparato determinado.

§ 62. Visuales inclinadas

Hasta ahora hemos supuesto en todo cuanto llevamos expuesto sobre los anteojos diastimométricos, que la visual a la mira es muy aproximadamente horizontal; este es el caso de los equialtímetros provistos de retículo estadimétrico. Pero en Taquimetría lo corriente es operar con visuales inclinadas, y la distancia puede medirse con dos posiciones distintas de la mira: a) mira normal a la visual y por lo tanto para visual inclinada, mira también inclinada; b) mira siempre vertical.

a) *Mira inclinada, perpendicular a la visual* (fig. 177). Si la visual forma un ángulo α con la horizontal, se obtiene primero la distancia inclinada E' por la fórmula:

$$E' = c + kl, \tag{1}$$

y la distancia horizontal (reducida al horizonte) será:

$$E = E' \cos \alpha = (c + kl) \cos \alpha. \tag{2}$$

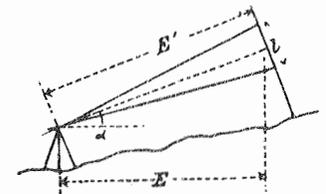


Fig. 177

Observación con mira inclinada

Como medio auxiliar para la colocación inclinada de la mira, lleva ésta fijada perpendicularmente a su longitud y a la altura media del anteojo, una alidada cd (fig. 201), por la cual debe mirar el peón portamira hasta que inclinando la mira vea el anteojo en la dirección de cd .

b) *Mira vertical* (fig. 178). De la lectura l hecha sobre la mira colocada verticalmente, se puede calcular la parte de mira l' perpendicular a la visual, correspondiente a la primera lectura, conociendo para ello el ángulo de pendiente α . En efecto, se tiene aproximadamente:

$$l' = l \cos \alpha. \tag{3}$$

A esta parte de mira l' corresponde una distancia inclinada

$$E' = c + kl' = c + kl \cos \alpha, \tag{4}$$

y la distancia horizontal será:

$$E = E' \cos \alpha = c \cos \alpha + kl \cos^2 \alpha. \tag{5}$$

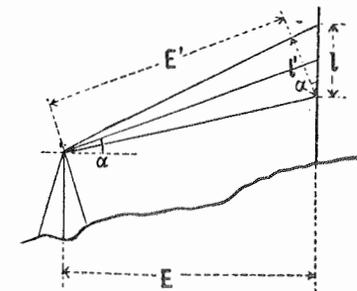


Fig. 178. — Observación con mira vertical

También conviene tener la expresión del desnivel h entre el eje del anteojo y la lectura de mira correspondiente al ángulo de elevación α ; este desnivel, como se ve en la figura, está dado por la ecuación:

$$h = E' \sin \alpha = c \sin \alpha + kl \cos \alpha \sin \alpha. \tag{6}$$

Estas fórmulas (5) y (6) no resultan de fácil aplicación en la práctica, y por tratarse en la mayoría de los casos de valores muy pequeños del ángulo de pendiente α y por ser la constante c también muy pequeña (unos decímetros nada más), se puede sustituir, sin

cometer error apreciable, en la fórmula (5) el término $c \cos \alpha$ por $c \cos^2 \alpha$, y en la (6) el término $c \sin \alpha$ por $c \sin \alpha \cos \alpha$; y de este modo las dos ecuaciones se convierten en estas otras:

$$\begin{aligned} E &= (c + kl) \cos^2 \alpha \\ h &= (c + kl) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

o también

$$h = \frac{1}{2}(c + kl) \sin 2\alpha. \tag{8}$$

Seguidamente trataremos del error de aproximación que suponen las fórmulas (3), (7) y (8). Si comparamos las dos posiciones de la mira (figs. 177 y 178), se ve que la inclinada ofrece muchos inconvenientes en la práctica, por lo cual sólo se utiliza cuando no puede rehuirse su empleo, como sucede con el taquímetro de corredera o de proyección de Wagner-Fennel, que forzosamente requiere mira inclinada (véase figura 203). Y si bien es verdad que cuando la mira se puede mantener en su debida posición inclinada, tan firme como pudiera mantenerse en la vertical, las oscilaciones siempre inevitables son menos perjudiciales que en esta última posición, como puede deducirse de la fórmula (16) y de la tabla (17) que veremos más adelante, esta ventaja no es suficiente para compensar los demás inconvenientes, por lo cual, en la práctica, puede decirse que únicamente se opera con la mira en posición vertical.

Fórmulas exactas. Ya hemos visto todo lo necesario para las aplicaciones prácticas y vamos ahora a hallar las fórmulas taquimétricas exactas para juzgar así de la precisión de las fórmulas aproximadas anteriores. Sean α el ángulo de pendiente de la visual

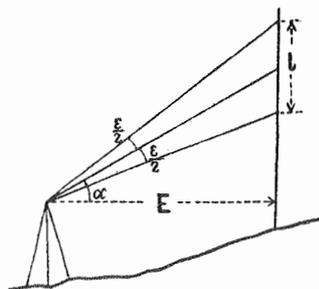


Fig. 179

media y ϵ el ángulo diastimométrico (fig. 179), y supongamos que el punto analítico cae sobre el eje horizontal de giro del anteojo. Llamemos η a la mitad del ángulo ϵ , es decir, $\frac{\epsilon}{2} = \eta$. El ángulo de pendiente de la visual superior será $\alpha + \eta$, y el de la inferior $\alpha - \eta$; la lectura de mira será:

$$l = E \operatorname{tg}(\alpha + \eta) - E \operatorname{tg}(\alpha - \eta)$$

o sea

$$l = E \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \eta} - E \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \eta}.$$

Esta fórmula puede transformarse del modo siguiente:

$$l = E \frac{2 \operatorname{tg} \eta + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \eta} = 2E \frac{\operatorname{tg} \eta}{\cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \eta)}.$$

De aquí resulta:

$$2E = l \cot \eta \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \eta)$$

o también

$$2E = l \cot \eta \cos^2 \alpha - l \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tg} \eta. \tag{9}$$

Ahora bien, según la fórmula (6) de la página 226,

$$k = \frac{1}{2} \cot \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{2} \cot \eta, \tag{10}$$

y sustituyendo este valor en (9) se tiene:

$$E = kl \cos^2 \alpha - \frac{1}{4k} \operatorname{sen}^2 \alpha. \tag{11}$$

El último término del segundo miembro, para $k = 100$, $l = 1$ m y $\alpha = 45^\circ$ vale solamente 0,001 m, por lo cual se puede siempre despreciar por insignificante.

Si en vez de suponer, como acabamos de hacer, que el anteojo sea de Porro, consideramos el caso de un anteojo ordinario o con ocular de Huygens, hay que introducir en la fórmula anterior el término $c \cos \alpha$, es decir:

$$E = c \cos \alpha + kl \cos^2 \alpha, \tag{12}$$

y por ser el desnivel $h = E \operatorname{tg} \alpha$, se tendrá:

$$h = c \operatorname{sen} \alpha + kl \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \tag{13}$$

Estas dos ecuaciones (12) y (13) pueden ponerse en esta otra forma:

$$\left. \begin{aligned} E &= (c + kl) \cos^2 \alpha + c \cos \alpha - c \cos^2 \alpha \\ h &= (c + kl) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + c \operatorname{sen} \alpha - c \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

y también en esta otra:

$$\left. \begin{aligned} E &= (c + kl) \cos^2 \alpha + 2c \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \\ h &= (c + kl) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

El último término del segundo miembro en estas dos ecuaciones (15), para $c = 0,50$ m y $\alpha = 45^\circ$ vale solamente 0,10 cm, por lo cual puede despreciarse en los trabajos taquimétricos ordinarios. De este modo se ve que las fórmulas aproximadas (7) y (8) son también aplicables aun en el caso de precisar los cálculos hasta el límite a que los hemos llevado.

Sobre esta materia son dignos de mención los trabajos de Hammer y Werkmeister, publicados en la «Zeitschr. f. Verm.» en los años 1905, 1906 y 1911.

Error por falta de verticalidad en la mira. La figura 180 representa el caso de una mira que forma un pequeño ángulo δ con la vertical; la lectura de mira realmente hecha es l , y se trata de averiguar el error con que resulta calculada la distancia horizontal E en función de esta lectura l . Pero vamos a hacer la discusión no de modo riguroso, por innecesario, sino con la aproximación que supone el considerar como iguales las dos longitudes l y l' , que casi lo son en realidad.

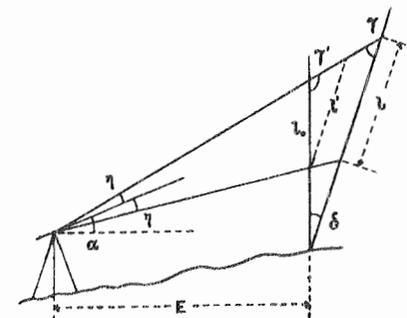


Fig. 180

Conociendo l' se deduce inmediatamente el valor de l_0 , es decir, de la lectura que se tendría si la mira estuviera vertical; los ángulos γ y γ' , empleando la misma notación anterior, serán:

$$\gamma = 90^\circ + \alpha + \eta \quad \gamma' = 90^\circ - (\alpha + \eta + \delta)$$

y

$$l_0 = l' \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \gamma'} = l \frac{\cos(\alpha + \eta + \delta)}{\cos(\alpha + \eta)}.$$

Pero por ser δ un ángulo pequeño puede escribirse:

$$l_0 = l' \frac{\cos(\alpha + \eta) - \delta \operatorname{sen}(\alpha + \eta)}{\cos(\alpha + \eta)} = l - l \delta \operatorname{tg}(\alpha + \eta),$$

y la distancia horizontal E tendrá por expresión:

$$E = k l_0 \cos^2 \alpha = k l \cos^2 \alpha - k l \cos^2 \alpha \delta \operatorname{tg}(\alpha + \eta).$$

En el último término del segundo miembro de esta ecuación puede substituirse $kl \cos^2 \alpha$ por E , y además puede suprimirse el ángulo η , ya que sólo se trata de un cálculo aproximado, y tendremos finalmente:

$$E = kl \cos^2 \alpha - E \delta \operatorname{tg} \alpha. \quad (16)$$

Esta expresión nos dice que cuando se hace una lectura l sobre la mira inclinada un ángulo δ sobre la vertical, el error que se comete en la distancia horizontal E es igual a $E \delta \operatorname{tg} \alpha$.

Si en vez de hacer el cálculo aproximado se hubiera hecho con toda precisión, se habría llegado a una fórmula que se diferenciaría de la anterior solamente por la presencia de términos de segundo grado, muy pequeños en comparación con el lineal que interviene en la fórmula (16).

En la tabla siguiente pueden verse los valores del error, calculados con la fórmula (16), expresados en tanto por ciento de la distancia E :

Corrección de distancia por inclinación δ de la mira

Inclinación de la mira		Angulo α de pendiente de la mira					
		0°	5°	10°	20°	30°	45°
δ	$\delta \rho$	%	%	%	%	%	%
1:100	0° 34'	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0
1:50	1 9	0,0	0,2	0,4	0,7	1,2	2,0
1:25	2 18	(0,0)	0,3	0,7	1,5	2,3	4,0

El último valor de $\delta = 1:25$, aproximadamente de 2°, corresponde al caso de una inclinación exagerada, por sostener la mira con las manos y colocarla verticalmente a ojo; empleando un nivel esférico puede mantenerse δ siempre por debajo del $1/100$, y si se utilizan bastones o barras de apoyo para la mira, puede hacerse casi nulo el error debido a la inclinación δ .

Mientras más pendiente sea la visual, tanto más cuidadosamente se debe colocar la mira en posición vertical.

§ 63. Medios auxiliares de cálculo para $\cos^2 \alpha$ y para $1/2 \operatorname{sen} 2\alpha$

Para la mira en posición vertical, las fórmulas que dan la distancia horizontal E y el desnivel h entre la proyección sobre la mira del hilo medio del retículo y el eje horizontal del anteojo, son las (7) y (8) de la página 242:

$$\left. \begin{aligned} E &= (c + kl) \cos^2 \alpha \\ h &= 1/2 (c + kl) \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Para la determinación de la cantidad entre paréntesis $(c + kl)$, hemos descrito varios métodos en el párrafo 61, y vamos ahora a ocuparnos de los medios auxiliares o artificios de cálculo empleados para la aplicación fácil y rápida de las dos fórmulas fundamentales anteriores.

Diagramas. Para simplificar substituiremos en lo sucesivo la expresión $c + kl$ por la letra d .

Para la determinación de $d \cos^2 \alpha$, hemos ideado el diagrama representado en la figura 181; de un punto A parten distintos rayos $A \cdot 0^\circ$, $A \cdot 5^\circ$, $A \cdot 10^\circ$, etc., que no forman con el eje AX los ángulos indicados 5° , 10° , etc., sino otros ángulos φ determinados de tal modo que el rayo correspondiente a un ángulo α , que se lee sobre el arco graduado 5° , 10° , etc., forma en realidad un ángulo φ con AX tal que $\cos \varphi = \cos^2 \alpha$. Es decir, que para tener el valor de $\cos^2 \alpha$ se lee el ángulo α en este arco y el ángulo correspondiente será el φ que cumple con la condición

$$\cos \varphi = \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Supongamos que al rayo AB , que representa la distancia d , corresponda el ángulo de pendiente $\alpha = 12^\circ$; se toma la longitud d a partir de A sobre el rayo que termina en el número correspondiente al ángulo α , y haciendo centro en el punto resultante B se describe un arco de círculo tangente al eje Ay . Aunque no se conozca exactamente la posición del punto de tangencia c , se tiene que $BC = d \cos^2 \alpha$.

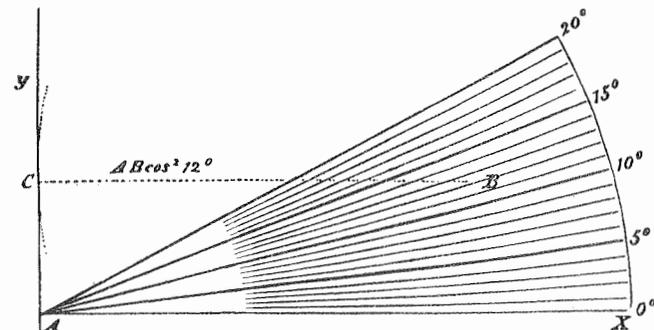


Fig. 181
El rayo AB es el correspondiente a α ; $\angle XAB = \varphi$; $\cos \varphi = \cos^2 \alpha$

Por ser ángulos muy pequeños α y φ , no resulta práctica la fórmula (2) para el cálculo de φ , por lo cual se hace la siguiente transformación que permite obtener aquel valor con toda la precisión necesaria:

$$1 - \cos \varphi = 1 - \cos^2 \alpha, \quad \text{o sea} \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

También puede determinarse gráficamente la diferencia de altura h entre el eje de giro del anteojo y el punto de la mira enfilado con el hilo central del retículo, ya que la ecuación $h = E \operatorname{tg} \alpha$ es aplicable a un triángulo rectángulo cuyos catetos son E y h y en el cual el ángulo opuesto a h es el ángulo de pendiente α . Pero como el ángulo α es de ordinario muy pequeño, y además se procura obtener el desnivel h con más precisión que la distancia E , se toma en los diagramas para el cálculo de $h = E \operatorname{tg} \alpha$ una escala mayor para las alturas que para las distancias. Por ejemplo, la figura 182 representa un diagrama de esta clase, en que la escala de las alturas h (eje vertical) es diez veces más grande que la de distancias E (eje horizontal); en este diagrama la escala horizontal es de 1:2500 y la vertical es de 1:250.

Para usar este diagrama se toma sobre el eje horizontal $OA = E$, es decir, la distancia horizontal entre el anteojo y la mira, y se levanta por el punto A una perpendicular hasta que encuentre, en B , al rayo correspondiente al ángulo de pendiente α ; la ordenada del punto B nos dará:

$$AB = 10 \cdot OA \operatorname{tg} \alpha,$$

o sea, en el caso particular de la figura:

$$AB = 10 \cdot OA \operatorname{tg} 4^\circ 55'. \quad (4)$$

Este valor geométrico de AB puede convertirse en valor numérico mediante la escala vertical representada a la izquierda del eje de ordenadas del diagrama, y al mismo tiempo puede tenerse la altura sobre el nivel cero, marcando en esta escala el punto P correspon-

diente a la altitud 505,7 de la estación; tomando sobre la misma escala una longitud $PQ = AB$ se tiene la cota de $Q = 521,4$.

El empleo de este diagrama supone el conocimiento de la distancia *horizontal* E , no importando que se haya obtenido con datos taquimétricos (multiplicando la distancia inclinada por $\cos^2 \alpha$) o que se haya tomado directamente sobre un plano del terreno en que se

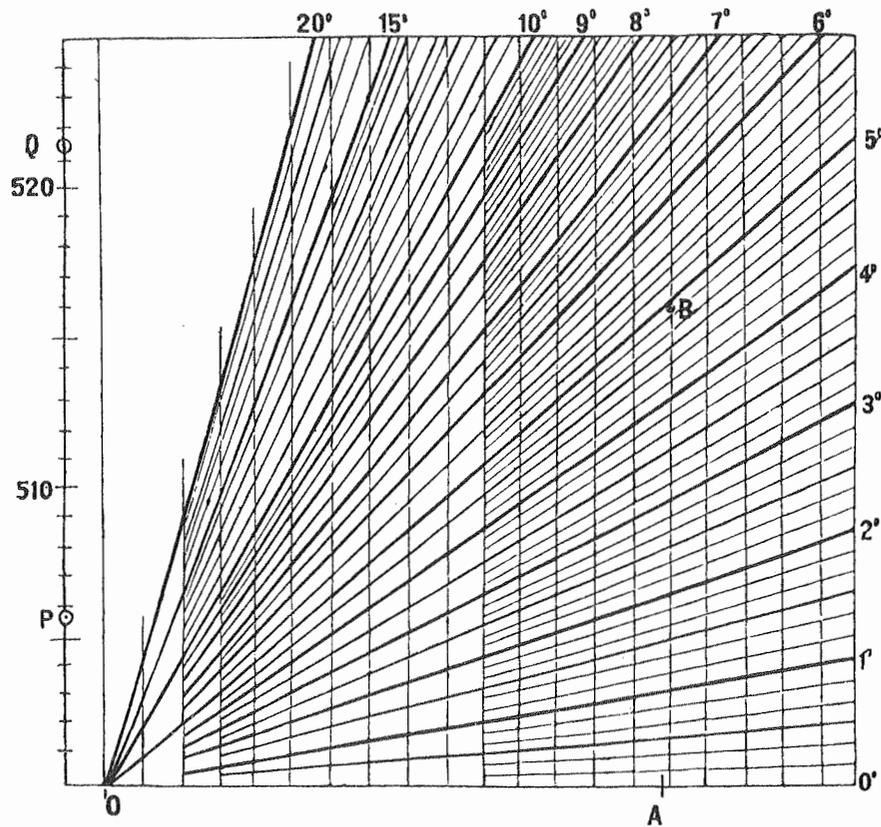


Fig. 182

Diagrama para $h = E \operatorname{tg} \alpha$. Escala horizontal = 1:2500; escala vertical = 1:250

está operando. El diagrama anterior tiene su aplicación especialmente indicada, por su sencillez, a este último caso, que es el que con más frecuencia se presenta en las nivelaciones de terrenos con levantamiento planimétrico previo.

También puede obtenerse el desnivel h , correspondiente a una lectura de mira l y a un ángulo de pendiente α , sin necesidad de pasar por el cálculo de $d \cos^2 \alpha$, empleando el diagrama de la figura 183.

Este diagrama da la función $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$; por ejemplo, para el punto A , se tiene:

$$AB = \frac{1}{2} OA \operatorname{sen} (2 \times 6^\circ 30')$$

La escala vertical es de 1:20 y la horizontal de 1:100, es decir, que la primera es cinco veces mayor que la segunda. Para emplear este diagrama se toma con el compás, a partir de O y sobre el rayo correspondiente al ángulo α ($6^\circ 30'$) la distancia d ; dejando fija en A la punta derecha del compás se describe el arco tangente a OC para tener la altura $AB = h$, que se lleva sobre OD obteniéndose así el desnivel $h = 9,0$.

Si hay que aplicar este diagrama a mayores ángulos de pendiente, hasta de 20° , es necesario reducir la escala ampliada de las alturas, mientras que en el diagrama de la figura 182 puede adoptarse la escala ampliada que se quiera.

A Piat se debe la construcción de un dispositivo mecánico correspondiente a nuestros dos diagramas representados en las figuras 181 y 182 («Zeitschr. f. Verm.», 1891).

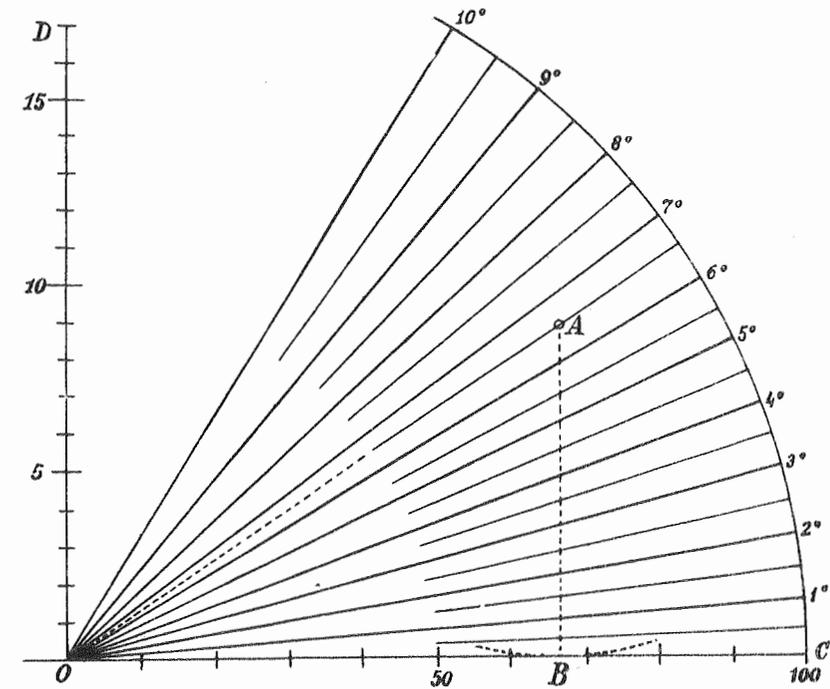


Fig. 183

Diagrama radial para $h = \frac{1}{2} kl \operatorname{sen} 2\alpha$. Escala horizontal = 1:100; escala vertical = 1:20

También pertenece a esta clase de dispositivos el círculo taquimétrico de Puller («Zeitschr. f. Verm.», 1896 y 1901), y el círculo de cálculo del ingeniero geógrafo español J. M. de la Puente.

A Vogler se deben unas gráficas muy sencillas, que consisten en un sistema de coordenadas rectangulares, sobre cuyos ejes se toman, a cualquier escala, pero la misma para ambos, los valores de d y α , con lo cual a todo punto del cuadrante corresponden determinados valores de d y α como coordenadas. Mediante curvas apropiadas se unen todos los puntos que tienen idénticos valores de $d \cos^2 \alpha$ y de $0,5 d \operatorname{sen} 2\alpha$. Por medio de una transformación logarítmica se pueden convertir estas líneas curvas en rectas (*Modo de construir tablas gráficas*, Vogler, Berlín, 1877).

Fundándose en este principio construyó Wenner sus *Tablas gráficas taquimétricas* (Darmstadt, 1905), de las cuales damos en la figura 184 la correspondiente a la determinación de alturas, a escala menor que a la original.

Werkmeister ha construido, según el método de las alineaciones de d'Ocagne, una gráfica para el cálculo taquimétrico, con el ángulo de pendiente expresado en divisiones sexagesimales. Esta gráfica está representada en la figura 185 («Zeitschr. f. Verm.», 1908). Con una reglilla transparente de celuloide que lleva una línea de fe en toda su longitud

se toman los argumentos $E = c + kl$ y α ; la intersección de esta línea con la escala del centro, da el valor del desnivel h ; por ejemplo, para $E = 20$ m y $\alpha = 10^\circ$, resulta $h = 3.6$ m.

Entre los ábacos pueden también citarse el de Teischinger («Zeitschr. f. Instr.», 1884) y el de Puller.

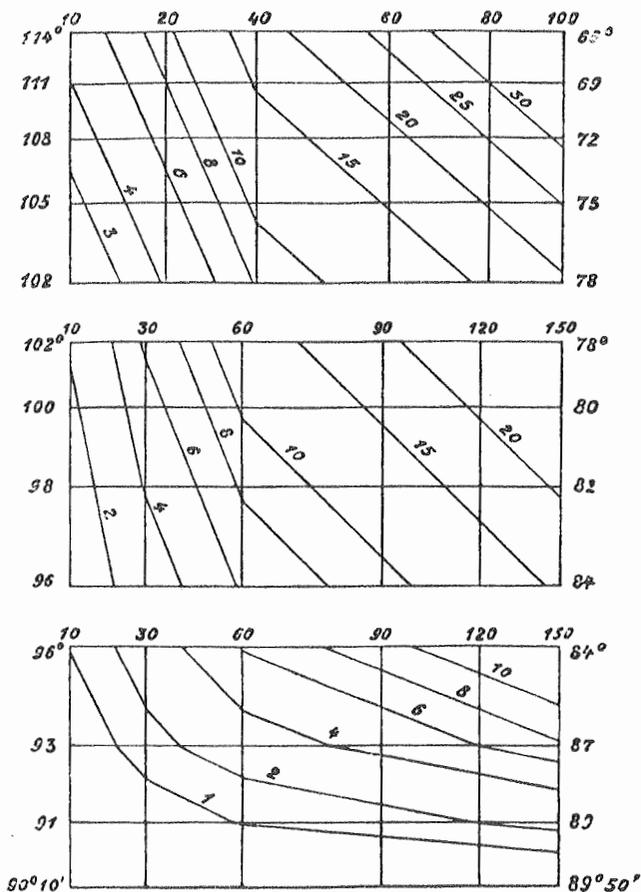


Fig. 184

Diagramas taquimétricos de Wenner, para la determinación de alturas

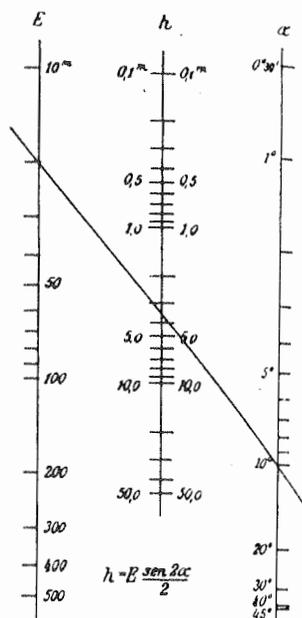


Fig. 185

Ábaco taquimétrico de Werkmeister

Regla de cálculo taquimétrica. Como ya se vió en el tomo I, página 102, las reglas de cálculo ordinarias llevan al dorso de la reglilla móvil divisiones para sen , cos y tg ; por lo tanto, con estas reglas corrientes es posible hacer las reducciones $d \cos^2 \alpha$ y $0,5 d \sin 2 \alpha$. Pero resulta más práctico el empleo de reglas especiales, de las cuales la primera fué construída por el profesor Wild, de Zúrich, en 1843 (talleres Kern, de Aarau), con 22 cm de longitud. Porro, Moinot y más tarde Werner hicieron reglas de 50 cm construídas de metal, madera y papel.

En la figura 186 se ve el esquema teórico de una regla de Werner (construída en Viena por Ostheimer, con papel y madera), con la cual, en una sola posición de la reglilla móvil, se obtienen los dos valores propuestos: la reducida al horizonte abajo y el desnivel arriba. Las dos escalas de la regla fija corresponden, como en las reglas ordinarias, a los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 1000; en el borde inferior de la reglilla y hacia el medio de la misma va una señal Z, a la izquierda de la cual se tiene una escala con los valores de $\log \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; la escala superior de la reglilla corresponde a los de $\frac{1}{2} \sin 2 \alpha$. Esta escala va dispuesta de tal modo sobre el borde superior que la señal Z de la escala

de los \cos^2 cae exactamente frente a la división $5^\circ 46'$ de aquélla. El manejo de esta regla es bien sencillo: se corre la reglilla de manera que la señal Z caiga sobre la división correspondiente a la distancia d , tomada en la escala de abajo de la regla fija; se lleva entonces el cursor (no representado en la figura) sobre el valor de α , en la escala inferior de la reglilla, y se lee directamente en la regla fija el valor $d \cos^2 \alpha$ (puesto que $\log d - \log \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \log d + \log \cos^2 \alpha$). Se lleva después el cursor, sin mover la reglilla, sobre el valor de α , en la escala superior de esta última, y en la escala de arriba de la regla fija se lee

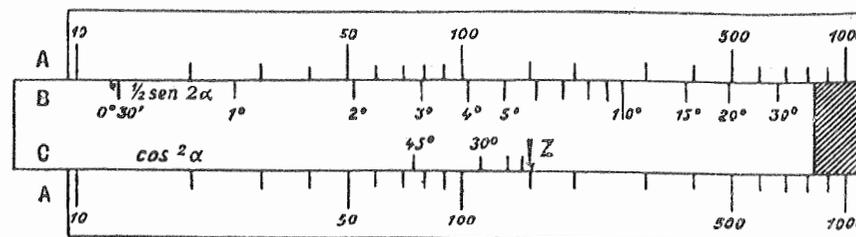


Fig. 186. - Regla de cálculo taquimétrica

directamente el valor de $d \cdot \frac{1}{2} \sin 2 \alpha$ (puesto que la parte de escala fija comprendida entre el cero y la línea de fe del cursor es igual a $\log d + \log \frac{1}{2} \sin 2 \alpha - \log \frac{1}{2} \sin 2 (5^\circ 46')$, y como $\frac{1}{2} \sin 2 (5^\circ 46') = 0,1$, su logaritmo, prescindiendo de la coma, es igual a cero).

Tablas numéricas. Son muchas las tablas calculadas para hallar los valores de las funciones $d \cdot \cos^2 \alpha$ y $\frac{1}{2} d \cdot \sin 2 \alpha$ cuando se dan d y α ; pero en la mayor parte de estas tablas hay que hacer interpolaciones o sumas.

Las tablas más detalladas, hasta ahora, son las nuestras (*Tablas auxiliares taquimétricas*, Jordan; Stuttgart, J. B. Metzler, 7.ª edición) para distancias de 10 m a 250 m, y ángulos α de $3'$ en $3'$, de $2'$ en $2'$ y de $1'$ en $1'$, como se ve en las páginas de muestra que damos en el Apéndice (tablas XXI a XXIV). Para distancias pequeñas se toma el ángulo de pendiente con menos precisión que para las grandes distancias, pues siempre sucede que a las distancias cortas corresponden ángulos de pendiente mayores que para las largas. Las tablas tienen la disposición siguiente:

	de 10 m a 100 m	de 100 m a 175 m	de 175 m a 250 m
Ang. de pend. α .	de 0° a 30°	de 0° a 20°	de 1° a 10°
Intervalo $\Delta \alpha$.	$3'$	$2'$	$1'$

El manejo de las tablas no puede ser más sencillo; si se tiene, por ejemplo, una distancia $d = 175$ m y un ángulo de pendiente $\alpha = 11^\circ 20'$, la tabla da directamente (tabla XXIII del Apéndice) $175 \cos^2 \alpha = 168,2$ m y $175 (\frac{1}{2} \sin 2 \alpha) = 33,72$ m. En las ediciones 2.ª y 3.ª de estas tablas dábamos también los valores de $100 (\frac{1}{2} \sin 2 \alpha)$ y $100 \cos^2 \alpha$ entre 0 y 10° , de $1'$ en $1'$, así como la reducida $100 \sin^2 \alpha$ entre 0° y 12° , de minuto en minuto, obteniendo todos los resultados con tres cifras decimales.

Acerca de la precisión que dan estas tablas cuando no se hace interpolación, sino que se toma el valor más aproximado para d o α , hicimos el cálculo completo en la tercera edición de esta obra; los resultados finales obtenidos fueron los siguientes:

error medio para la distancia = $\pm 0,26$ m
 error medio para el desnivel = $\pm 0,04$ m.

Este resultado se obtiene sin interpolación; con interpolación puede lograrse una precisión en las distancias de 0,1 m y en los desniveles de 0,01 m.

Como complemento a estas tablas publicó F. Reger en 1910 (J. B. Metzler, Stuttgart) sus *Tablas taquimétricas complementarias de las de Jordan*, en las cuales el ángulo de pendiente, para el cálculo del desnivel, varía del modo siguiente:

	de 251 m a 350 m	de 10 m a 101 m
Ang. de pend. α .	de 0° a 10°	de 30° a 45°
Intervalo $\Delta \alpha$.	1'	3'

Estas tablas presentan, en cuanto al cálculo de reducidas al horizonte, la misma disposición que las nuestras antes citadas.

A continuación damos un resumen bibliográfico sobre Taquimetría y Tablas taquimétricas:

1822. «Mémorial du Dépôt général de la guerre, 1826, Paris». Nota sobre la estadía. Una tabla pequeña de valores $100 \cos^2 \alpha$ de 5° a 34° y otra para $100 \operatorname{tg} \alpha$ de grado en grado, entre 2° y 30°.
1838. PROSS. Tratado de Geometría práctica. Tablas de reducción para $d \cdot \cos \alpha$, que hay que aplicar dos veces para tener $d \cdot \cos^2 \alpha$.
1850. «Dinglers Polytechnisches Journal, tomo 116». Memoria de Decher sobre diastimometría, con tablas de reducción.
1858. BAUERNFEIND. Elementos de Topografía, 1.ª ed., tomo II. Tablas de reducción de distancias al horizonte, para mira inclinada.
1868. Tablas para el cálculo de altitudes relativas, de la Dirección de Montes del Cantón de Berna; da $l \operatorname{tg} \alpha$ para graduación centesimal.
1873. STÜCK. Medición de distancias y alturas. Tablas para $d \cdot \cos^2 \alpha$ y $0,5 d \cdot \operatorname{sen} 2 \alpha$; la distancia d hasta 150 m; el ángulo α , hasta de 30°, varía de 5' en 5'.
1873. «Zeitschr. d. Österr. Ing.-u. Arch.-Vereins. Tinter»; tablas para $200 \cdot l \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$ y para $200 \cdot d \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cot \alpha$.
1875. SCHÜTZE. Tablas para el cálculo de senos y cosenos de ángulos de 5' en 5'.
1876. MARCKS Y BALKE. El relieve del terreno, su levantamiento, etc., con tablas.
1876. Tabla de cotas para la plancheta; Instrucciones topográficas de Prusia.
1877. EREDA. Celerimensura con aparatos ordinarios: tablas para $k \cdot \cos^2 \alpha$ y $k \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
1880. RINALDO. Tabla de reducción al horizonte de distancias leídas en la mira, desde 0° 15' a 40° sexagesimales.
1880. JORDAN. Tablas taquimétricas. Stuttgart, 1880 (7.ª ed. 1921); $l \cdot \cos^2 \alpha$ y $0,5 l \cdot \operatorname{sen} 2 \alpha$, hasta $l = 250$ m.
1884. CUARTERO. Tablas taquimétricas con distancias reducidas al horizonte y tangentes o diferencias de nivel de todos los ángulos desde 70° a 130°, calculadas de 1' en 1' para generadores de 1 a 400 m, etc. Madrid, 1884.
1885. Tablas logarítmico-taquimétricas, para el taquímetro logarítmico, patent. Tichy y Starke, Viena, 1885. Valores tabulares $A = \log (\cos^2 h [1 + 0,01 \operatorname{tg} h])$ y $B = \log (\operatorname{sen} h \cos h [1 + 0,01 \operatorname{tg} h])$. («Zeitschr. f. Verm.», 1893).
1890. Tablas gráficas logarítmicas y de las líneas trigonométricas naturales para reducir al horizonte distancias medidas con estadía y calcular las coordenadas rectangulares de puntos determinados con instrumentos de graduación centesimal o sexagesimal, por RICARDO CODORNIO Y STÁRICO, Ing. de Montes, Cartagena, 1890. («Zeitschr. f. Verm.», 1894).
1891. PONS. Tablas taquimétricas. París.
1892. SOLDATI. Tablas taquimétricas sustitutivas de las escalas logarítmicas en los cálculos de celerimensura. Turín, 1892.
1893. Tablas auxiliares para el cálculo de las nivelaciones trigonométricas y taquimétricas, para graduación centesimal, por J. Heil. Darmstadt. («Zeitschr. f. Verm.», 1893).
1893. «Rivista di topografia e catasto». Febrero 1893 y marzo 1894. Tablas para la reducción al horizonte de las lecturas sobre mira vertical: $k \cos^2 \alpha$: graduación sexagesimal y centesimal. («Zeitschr. f. Verm.», 1893).

1893. Tablas taquimétricas centesimales, por el Prof. N. JADANZA, Turín: $g \cos^2 \alpha$ y $g \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$. («Zeitschr. f. Verm.», 1893).
1895. HAMMER. Tablas para el cálculo de las diferencias de nivel en función de la distancia horizontal y del ángulo de pendiente, en grados sexagesimales: $a \operatorname{tg} \alpha$.
1898. BORLETTI. Tablas centesimales para taquimetría. Milán, 1898.
1900. Tablas taquimétricas sexagesimales; N. JADANZA. Turín, 1900 (2.ª ed. 1904).
1903. ORLANDI. Nuevas tablas taquimétricas centesimales y sexagesimales para calcular las distancias reducidas al horizonte, las diferencias de nivel, etc. París, 1903.
1904. ORLANDI. Nuevas tablas taquimétricas centesimales y sexagesimales. Roma, 1904.
1905. WENNER. Tablas gráficas taquimétricas. Darmstadt, 1905.
1906. WERKMEISTER. Tablas taquimétricas gráficas sexagesimales. Stuttgart, 1906.
1909. N. JADANZA. Tablas taquimétricas centesimales. Stuttgart, 1909.
1910. REGER. Tablas taquimétricas complementarias de las tablas de Jordan. Stuttgart, 1910.
1916. HANISCH. Tablas para diastimómetros. Stuttgart, 1911.
1917. HORNOS. Tablas de desniveles de 1' en 1' y de 1 a 900 m para un cuadrante sexagesimal: con un apéndice para la distancia horizontal de 10' en 10'. Palencia, 1917.
1918. SIGG. Nuevas tablas auxiliares taquimétricas. San Gallen, 1918.
1919. GORRÍA. Tablas taquimétricas sexagesimales y centesimales, para levantamientos topográficos y trazado de curvas en el terreno, en edición de bolsillo muy práctica para el uso en el campo: da los valores naturales de sen , tg , \cos^2 , colg , \cos , $\operatorname{sen} \operatorname{ver}$, $\cos \operatorname{ver}$, sec , cosec , arco y compl. del arco para todos los ángulos de 5' en 5'. 3.ª edición, Barcelona, 1937.
- RUIZ AMADO. Tablas taquimétricas sexagesimales y centesimales: da los valores de $\operatorname{sen}^2 \varphi$ y $\cot \varphi$ de 5' en 5', y los senos naturales de media circunferencia de 5' en 5'.
- BÁRCENA. Tablas taquimétricas centesimales, para senos y cosenos de 1' en 1', tg y \cos^2 , \cot y sen^2 .

§ 64. Precisión de las mediciones estadimétricas

La precisión con que se obtiene la medida de una distancia depende, aparte las circunstancias exteriores, de la disposición del anteojo y de la división de la mira. Hasta ahora no ha podido hallarse una ley general sobre la relación entre el error y la distancia; solamente es posible establecer dicha ley para un determinado aparato. Ordinariamente, y de acuerdo con la ecuación (4) de la página 310 del tomo I para la medición de distancias con retículo fijo, el error resultante para la distancia es proporcional a esta distancia, y puede expresarse en tanto por ciento de la misma.

Si representamos el error medio con la letra m y en forma de función, es decir, si $m(D)$ significa el error medio de D , y $m(l)$ el error medio de l , podemos escribir, prescindiendo de la pequeña constante aditiva c :

$$D = kl \quad \text{y de aquí} \quad m(D) = km(l). \quad (1)$$

Admitiendo la proporcionalidad entre el error de lectura de mira $m(l)$ y la distancia D , se tendrá, para un error de visual δ :

$$m(l) = D\delta, \quad (2)$$

y sustituyendo este valor en (1):

$$m(D) = kD\delta \quad \text{de donde} \quad \frac{m(D)}{D} = k\delta. \quad (3)$$

A la constante diastimométrica k corresponde un ángulo paraláctico ε ligado a aquella por la siguiente igualdad:

$$k = \frac{1}{2} \cot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $k = 100$, el ángulo ε valdrá $0^\circ 34' 23''$.

Influencia de la constante k . De las fórmulas (1) y (3) se desprende que para la mayor precisión conviene que k sea pequeña o que el ángulo paraláctico ϵ sea grande. Los valores que más se emplean son $k=100$ y $\epsilon=0^\circ 34' 23''$, debido a la facilidad de la multiplicación por 100. Para distancias cortas se puede también adoptar para k el valor 50 ($\epsilon=1^\circ 8' 45''$), obteniéndose doble precisión que con $k=100$.

Ahora bien, la distorsión que sufren las imágenes en los bordes del campo visual del anteojo, impone un límite a la disminución de k , y en este respecto, no puede bajar k de 100 en los anteojos estadimétricos ordinarios, razón que abona más aún el empleo general de la constante $k=100$. Si se aumentara la superficie aprovechable del retículo, habría que disponer el ocular de modo que pudieran enfocarse por separado y sucesivamente los hilos de aquél, cosa que no se aplica en los taquímetros, más que nada porque desaparecería la enorme ventaja que reporta la toma de lectura de una sola vez. En aquellos aparatos especiales en que hay que enfocar dos veces el ocular, se mueve este último con una palanca kd de fácil manejo (fig. 210).

Mientras menor sea k , tanto más larga tiene que ser la mira; por ejemplo, para $k=100$, basta para una distancia de 300 m con una mira de 3 m, mientras que para $k=200$ la misma longitud de mira 3 m sirve para distancias hasta de 600 m, y con $k=50$, la mira de 3 m sólo cubre 150 m de distancia.

La mira representada en la figura 198 está calculada para $k=200$ y sirve para una distancia máxima de 600 m, teniendo la misma longitud (3 m) que la representada en la figura 197 calculada para $k=100$.

Los retículos estadimétricos llevan todos un hilo central, como se vió en la figura 160, y según se haga la lectura con los dos hilos excéntricos o con el hilo medio y uno de los otros (el de arriba o el de abajo) se opera con k o con $2k$, ya que por ser equidistantes los hilos excéntricos del central, es igual que se lea con el medio y el superior, que con el medio y el inferior, teniéndose en los dos casos la constante $2k$.

Sin necesidad de este análisis teórico, todos los operadores saben que para distancias muy largas y, sobre todo, cuando no se ve la mira en toda la parte correspondiente a los dos hilos excéntricos, basta hacer la lectura con el hilo medio y uno de los excéntricos y multiplicarla por dos, o también (y es mejor sistema) leer primero con el hilo medio y el superior, después con el medio y el inferior, y sumar ambas lecturas.

De la fórmula (3) que da el error se puede deducir la precisión teórica con que se obtienen las distancias, con sólo dar valores a k y δ ; por ejemplo, para $k=100$ y $\delta=1''$ o sea $\delta=1:206265$, se tiene, según dicha fórmula (3):

$$\frac{m(D)}{D} = \frac{100}{206265} = 0,0005, \quad \text{o sea el } 0,05\% \quad (4)$$

Es decir, que cuando el error de enfilación para los dos hilos es de $1''$ (y, por lo tanto, para un solo hilo será $1:\sqrt{2}=0,7''$), y si la constante diastimométrica k es igual a 100, las distancias pueden medirse con un $0,05\%$ de aproximación.

Esta precisión fué comprobada en una serie de experimentos realizados por R. Wagner (*Zeitschr. f. Verm.*, 1886), con un anteojo de 27 mm de abertura, 34 cm de distancia focal, ocular de Ramsden con 25 aumentos, y constante $k=100$; la mira estaba dividida en centímetros, con una señal bien marcada en el cero, y se mantenía perpendicularmente a la visual con dos caballetes, procurando que las circunstancias externas fueran las más convenientes. En una serie se obtuvieron 24 lecturas con distancias variables entre 97 m y 103 m, y de ellas se dedujo para el error medio de enfilación el valor $\delta = \pm 1,18$, o sea

$\delta_1 = 1,18:\sqrt{2} = 0,8''$ para un solo hilo. El error medio para la distancia resulta, con $k=100$:

$$\frac{m(D)}{D} = \frac{100 \times 1,18}{206265} = 0,00057, \quad \text{o sea el } 0,057\% \quad (5)$$

Estos experimentos ponen de relieve la gran precisión que puede lograrse cuando se procede con todo esmero en las operaciones correspondientes. Pero cabe preguntar si para los trabajos taquimétricos ordinarios se necesita tanta precisión teniendo en cuenta la pérdida de tiempo que ello supone y la excesiva atención que requieren. Vamos, pues a limitarnos en esta investigación a las necesidades de la práctica, y para ello volvamos a tomar el error medio deducido del cálculo de k según las fórmulas (2) a (6) del párrafo 60, donde vimos, en la fórmula (4), que el error medio de una determinación de $100 l:(E-c)$ era $\pm 0,00086$, no debiendo perder de vista que esta determinación era la media aritmética de cinco lecturas; por lo tanto, empleando la misma notación m para el error medio, tendremos:

$$\frac{m(100 l)}{E-c} = 0,00386\sqrt{5} = \pm 0,00192 = \pm 0,192\% \quad (6)$$

Este es el error medio de una determinación de distancia, en tanto por ciento de esta misma distancia: es decir, que si $k=100$, será $100 l=D$, y en esta fórmula podemos poner D en vez de $E-c$, pudiéndose al mismo tiempo considerar el denominador $E-c$ o D como exento de error; la ecuación (6) podrá escribirse, pues, del modo siguiente:

$$\frac{m(D)}{D} = \pm 0,00192, \quad \text{o sea el } 0,192\% \quad (7)$$

Resultado parecido obtuvimos en la ecuación (19) de la página 238 para el anteojo de Porro, pues el error medio que allí hallamos fué de 0,20 m por 100 m. De estos dos resultados podemos deducir, con cierta seguridad, que la distancia obtenida con un diastimómetro cuya constante sea $k=100$, y una mira dividida en centímetros, está afectada de un error medio igual al $0,2\%$ ó a $1:500$, es decir, que

$$\frac{m(D)}{D} = \pm 0,002, \quad \text{o sea el } 0,2\% \quad (8)$$

Partiendo de este resultado y calculando, a la inversa, el error de enfilación δ correspondiente, podemos decir que el error medio de la distancia, del $0,2\%$, para $k=100$, obedece a un error de enfilación $\delta=4''$ para los dos hilos, o sea, $\delta=4:\sqrt{2}=2,8''$ para un solo hilo.

En el cuadro siguiente damos los resultados comparativos de nuestros experimentos sobre precisión de distancias, y los obtenidos por Helmert y Stambach (*Zeitschr. f. Verm.*, 1874 y 1875).

Observador	Distancia D	Error medio $m(D)$	Constante k	$\frac{m(D)}{D}$ reducido a $k=100$
Helmert	100 m	$\pm 0,50$ m	200	$\pm 0,0025 = 0,25\%$
Stambach	100	$\pm 0,25$	100	$\pm 0,0025 = 0,25$
Jordan	100	$\pm 0,23$	100	$\pm 0,0023 = 0,23$

Como se ve, para distancias pequeñas, de unos 100 m, con un coeficiente diastimométrico $k=100$ y una mira dividida en centímetros, puede fijarse el error medio en $\pm 0,25\%$,

o sea, en $\frac{1}{4}\%$ de la distancia medida. En estos ensayos se supone que la visual era casi horizontal.

Para distancias mayores y gran inclinación de la visual, se pierde bastante en precisión. Por ejemplo, con Sol despejado y a las horas del mediodía no es posible obtener una imagen tranquila de la mira, y aun con cielo cubierto y aire no muy movido resulta más difícil leer la mira a gran distancia que a distancias más cortas, como se ve en la serie siguiente de resultados, deducidos de nuestras observaciones:

Distancia D	10 m	50 m	100 m	200 m	300 m
Error en %	0,15	0,19	0,23	0,31	0,40.

Estos datos y resultados corresponden a la práctica ordinaria taquimétrica, con aparatos de tamaño mediano y miras centimétricas, tales como se emplean para proyectos y levantamientos topográficos representados en escalas grandes, ordinariamente de 1 : 2000 ó 1 : 2500 (en general entre 1 : 1000 y 1 : 5000).

En los levantamientos topográficos con representación a escalas menores de 1 : 5000, (de las cuales las más empleadas son las de 1 : 10000 y 1 : 25000), la precisión resultante para la distancia es aún menor; por ejemplo, en los trabajos alemanes de Mapa con la constante $k = 200$ y la mira representada en la figura 198, dividida en medios decímetros, sólo se leen metros enteros para la distancia.

Merece citarse el trabajo de Lüdemann sobre la precisión de las medidas de distancias con estadía y teodolito de tamaño mediano («Zeitschr. f. Instr.», 1927).

Movimiento del aire (aire caliginoso). Todos los operadores saben que con cielo despejado y en las horas de más Sol, los rayos luminosos próximos al suelo sufren tal movimiento y oscilan de tal modo que la lectura de mira se hace con muy escasa precisión, y tratándose de distancias largas y a mediodía es a veces imposible hacer la lectura. Las figuras 187 y 188 representan, según Smith, las imágenes de la mira dadas por el anteojo; la primera con aire en calma y la segunda con aire caliginoso, muy movido.

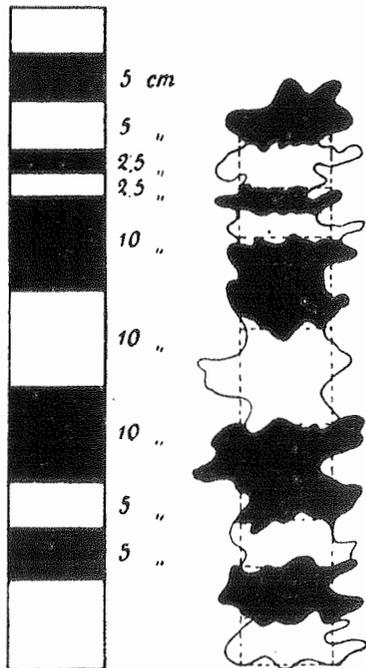


Fig. 187
Mira vista con el anteojo con aire en calma

Fig. 188
Mira vista con el anteojo con aire muy turbulento

La mira, dividida en centímetros, estaba pintada por el dorso, en una altura de 2 m, del modo indicado en la figura 187, a saber, en trozos alternativamente blancos y negros de anchura variable comprendida entre 2,5 y 10 cm, y fué observada a distancias de 100 a 150 pasos con un anteojo taquimétrico hasta una distancia total de 800 m. Después de leer la distancia en la cara delantera de la mira, se veía en la trasera el trozo de anchura aproximadamente igual a la deformación de la imagen en sentido vertical, y esta anchura se tomaba como medida de la oscilación en este sentido. Los movimientos laterales de la imagen, que en los bordes de la mira semejan fases de movimiento ondulatorio (fig. 188) fueron menos estudiados que los verticales, por ser más perjudiciales en las observaciones de ángulos acimutales que en las taquimétricas. El mo-

vimiento vertical de la imagen dada por el anteojo se descompone en otros dos, llamados oscilación primaria y oscilación secundaria, y que se aprecian perfectamente en la figura 189. El primer movimiento es de mayor amplitud y período que el segundo. Las oscilaciones primarias parece que son menos regulares que las secundarias, y ejercen mayor efecto que éstas sobre la precisión de las mediciones diastimométricas. El movimiento ondulatorio del aire no es mayor en las horas de mayor temperatura del aire, sino cuando es máxima la diferencia entre la temperatura del aire y la del suelo. Esta máxima diferencia tiene lugar, ordinariamente, en el verano, entre las 10 y las 11 de la mañana. Por la tarde disminuye el movimiento del aire, pero más lentamente que aumenta por la mañana, hasta las 6^h de la tarde en que deja de notarse toda vibración en el aire. En el verano se observa un máximo secundario a la salida del Sol. Sobre esta materia merecen especial mención los trabajos de Petzold («Zeitschr. f. Verm.», 1896).

vimiento vertical de la imagen dada por el anteojo se descompone en otros dos, llamados oscilación primaria y oscilación secundaria, y que se aprecian perfectamente en la figura 189.

El primer movimiento es de mayor amplitud y período que el segundo. Las oscilaciones primarias parece que son menos regulares que las secundarias, y ejercen mayor efecto que éstas sobre la precisión de las mediciones diastimométricas.

El movimiento ondulatorio del aire no es mayor en las horas de mayor temperatura del aire, sino cuando es máxima la diferencia entre la temperatura del aire y la del suelo. Esta máxima diferencia tiene lugar, ordinariamente, en el verano, entre las 10 y las 11 de la mañana. Por la tarde disminuye el movimiento del aire, pero más lentamente que aumenta por la mañana, hasta las 6^h de la tarde en que deja de notarse toda vibración en el aire. En el verano se observa un máximo secundario a la salida del Sol.

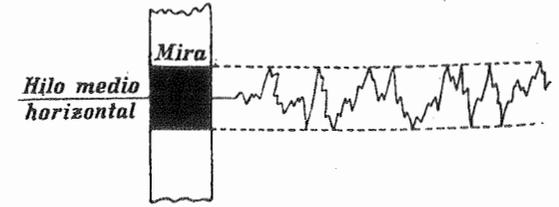


Fig. 189.—Oscilaciones primaria y secundaria

Sobre esta materia merecen especial mención los trabajos de Petzold («Zeitschr. f. Verm.», 1896).

Influencia de la refracción atmosférica. El temblor de la imagen en el anteojo sólo produce un error accidental en la distancia, pero las visuales próximas al suelo dan lugar a un error sistemático debido a que la temperatura en las capas bajas de la atmósfera no varía de abajo hacia arriba de modo regular y uniforme, y los rayos luminosos correspondientes a los dos hilos del retículo no experimentan igual refracción, produciendo una deformación longitudinal en la imagen de la parte de mira comprendida entre aquéllos, que falsea la verdadera lectura y por ende la verdadera distancia medida.

La primera investigación práctica de este error ha sido dada a conocer por Smith, que encontró para distancias de 300 m a 500 m un error por defecto de un 0,5 % por término medio, con visuales muy cercanas al suelo.

Para estudiar a fondo este error realizamos en el año 1910 algunos experimentos, cuyo detalle publicamos en la «Zeitschr. f. Verm.», 1911; en cuatro días distintos del verano de aquel año medimos repetidas veces un tramo de 135 m con el retículo de un nivel grande y de tal modo que cada vez se leía sobre un sitio distinto de la mira. El hilo medio se enfilaba aproximadamente sobre las divisiones 0,7 m, 1,1 m, 1,5 m y 2,3 m. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Hilo central	Día 1.º	Día 2.º	Día 3.º	Día 4.º
	Distancias medidas			
0,7 m	133,27 m	133,39 m	133,23 m	133,93 m
1,1	133,78	133,89	133,74	134,05
1,5	133,98	134,14	133,85	134,11
2,3	133,98	134,23	134,06	134,07

La longitud medida exactamente con reglones era:

$$E = 134,29 \text{ m.}$$

En este cuadro de resultados se ve claramente que las lecturas hechas en la parte baja de la regla están más afectadas por la refracción que las restantes, pues se ve que

entre la distancia dada por la parte baja y la dada por la parte alta de la mira, en los tres primeros días hay casi 1 m de diferencia.

Tampoco las lecturas en el centro de la mira están libres del efecto producido por la refracción. Las tres primeras series de observaciones se llevaron a cabo en días despejados, y la cuarta después de una lluvia persistente y con cielo cubierto. En este último día fueron casi coincidentes las cuatro lecturas, siendo apenas perceptible el efecto producido por la refracción.

Acerca de la posible variación del efecto debido a la refracción a lo largo del día, realizamos observaciones cuyos resultados fueron los consignados en la tabla siguiente, correspondientes al mismo tramo antes citado, de 134,29 m.

Hora	Abajo	Centro	Arriba
mañana 8 h 40 m	133,35 m	134,25 m	134,11 m
9 40	133,09	134,07	133,93
10 50	133,08	134,13	134,29
11 40	132,98	133,93	134,19
tarde 12 40	133,01	133,95	134,13
2 10	133,09	134,15	134,21
3 20	133,10	134,09	134,09
4 10	133,25	134,07	134,21
5 20	133,31	134,05	134,07
6 20	133,41	134,07	134,29
Promedios	133,17	134,08	134,15

En las lecturas hechas sobre la parte baja de la mira es donde se observa el mínimo efecto de la hora en que se hicieron aquéllas; las distancias a mediodía fueron las menores de todas las leídas. Se aprecia perfectamente la gran diferencia que existe entre las lecturas hechas sobre la parte baja de la mira y las correspondientes al medio y a la parte superior de la misma.

Estos resultados nos dan como norma práctica la de que siempre que sea posible debe hacerse la lectura en la parte alta de la mira.

Acerca de la influencia de la refracción sobre las mediciones estadimétricas, son dignos de mención los trabajos de Aregger y Lüdemann («Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1925 y 1926) y el de Löffler (Universidad de Frankfurt, 1928).

§ 65. Teodolito taquimétrico o taquímetro

Se llama teodolito taquimétrico, o simplemente taquímetro, a un teodolito que además de los elementos necesarios para la observación y medida de los ángulos acimutales, va provisto de los dispositivos precisos para la determinación de distancias horizontales y de diferencias de nivel. Difieren entre sí los teodolitos taquimétricos por la construcción de estos dispositivos. Ordinariamente llevan también los taquímetros una pequeña brújula. Como en los trabajos ordinarios de taquimetría, proyectos y levantamientos topográficos, se da preferencia a la rapidez sobre la precisión, las diversas partes y piezas de los taquímetros están construidas atendiendo más a la solidez y manejabilidad que a la finura y exactitud de las mismas: por ejemplo, basta con que los limbos y niveles aprecien minutos; en cambio, debe hacerse la lectura de una sola vez.

Como taquímetro goniométrico (con limbo acimutal y limbo vertical) puede emplearse cualquier teodolito con círculo cenital y cuyo anteojo esté provisto de retículo estadimétrico; y puesto que un aparato de esta clase puede utilizarse en todas las aplicaciones propias de los teodolitos y de los taquímetros, ocupa el primer lugar entre todas las clases de taquímetros conocidos.

En las figuras 190 a 193 están representados varios teodolitos taquimétricos, que se pueden utilizar como taquímetros y como teodolitos para todas las operaciones topográficas. En el tomo I, capítulo VII, se estudió todo lo referente a la observación y medida de ángulos horizontales o acimutales; para la observación y medida de los ángulos verticales o cenitales, véase lo expuesto en los párrafos 24 y 25 de este segundo tomo.

Todos estos taquímetros van provistos de retículo estadimétrico para la medición de distancias.

En las operaciones puramente taquimétricas, para economizar trabajo y tiempo, sólo se hacen de ordinario las lecturas de los círculos cenital y acimutal con un solo nonio de los dos que lleva cada limbo, por lo cual es conveniente que este nonio esté provisto de un índice auxiliar, que puede consistir en una raya marcada fuera de la escala del nonio, a una distancia del cero que no sea un número exacto de divisiones, y con este índice se hace fácilmente la lectura.

Tratándose de terrenos llanos, casi todas las visuales son horizontales y el cálculo de las distancias resulta muy simplificado (§ 61). Por esta razón los taquímetros representados en las figuras 190 a 193 van provistos de nivel sobre el anteojo. Pero en estos casos puede emplearse un equaltímetro que tenga círculo acimutal y retículo estadimétrico; las figuras 195 y 196 representan taquímetros nivelantes de Fennel y Zeiss respectivamente.

Taquímetro pequeño de Hildebrand. Este taquímetro, cuyo tamaño natural es unas cuatro veces el de la figura, se presta, por su poco peso y su sencillez de manejo, a ser usado lo mismo como teodolito que como taquímetro en todas las observaciones de poligonales. El círculo horizontal tiene 12 cm de diámetro y el vertical 9,5 cm, y sus nonios aprecian respectivamente 30'' y 1'. Como en las operaciones taquimétricas sólo se lee un nonio, lleva éste grabada una señal después de la última división, y con este índice auxiliar se pueden comprobar todas las lecturas con gran facilidad. Los nonios del círculo cenital van montados entre puntas, como se ve en la figura; estas puntas, que son regulables, están atornilladas en una pieza que forma cuerpo con el soporte del anteojo. El círculo vertical no lleva nivel propio. El anteojo tiene 24 cm de longitud y 12 aumentos; este aumento, relativamente pequeño, se debe a que el anteojo es de sistema Porro.

Se podría prescindir del nivel unido al anteojo si al mismo tiempo no sirviera de contrapeso al ocular, que sale más o menos del anteojo, según la distancia a que hay que enfocar; el extremo objetivo va sobrecargado con la lente colectora de Porro.

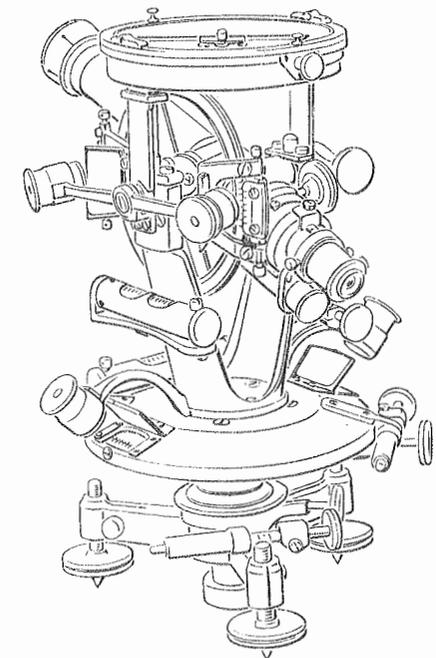


Fig. 190. — Taquímetro pequeño de Hildebrand

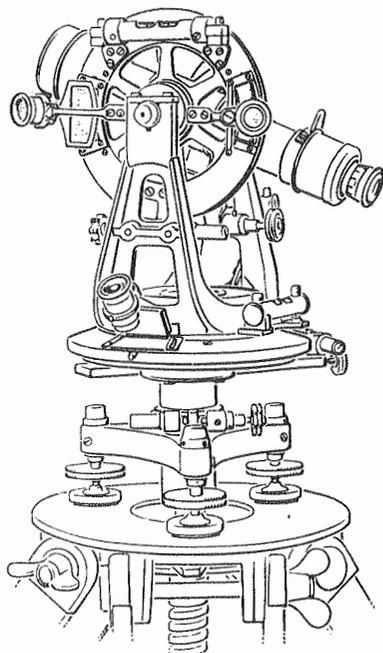


Fig. 191
Teodolito taquimétrico de Otto Fennel

Sobre las muñoneras del eje de giro del anteojo puede colocarse una brújula.

Taquímetro de Otto Fennel (Kassel). Tiene un círculo acimutal de 12 cm y uno cenital de 10 cm de diámetro. La alidada del círculo vertical va provista de nivel propio y de movimiento lento. Los nonios de los dos círculos aprecian 30" cada uno. El anteojo lleva lente móvil de enfoque, y su longitud es de 21,5 cm. La abertura del objetivo es de 30 mm, y el aumento es de 20 diámetros. El retículo (cruz filar e hilos estadimétricos) consiste en una laminilla de cristal con las rayas grabadas. El punto analítico del diastimómetro cae sobre el eje horizontal de giro del anteojo.

Además del nivel del círculo cenital, van otros dos niveles, cruzados, sobre el círculo acimutal, y uno reversible sobre el anteojo.

La disposición del eje vertical de este taquímetro es la misma que la de un teodolito repetidor, por lo cual los tornillos de coincidencia tienen su cabeza de forma especial para que puedan distinguirse entre sí.

Este taquímetro presenta otras novedades, actualmente en uso en casi todas las casas constructoras de aparatos de esta clase, como por ejemplo, el ajuste, hermético al polvo, de los tornillos nivelantes; la protección de los tornillos de corrección del retículo, cubiertos con un manguito roscado en el extremo ocular del anteojo; la diferencia de forma en los tornillos de llamada, etc.

También este aparato está especialmente indicado por su tamaño y construcción para el empleo como teodolito en todas las operaciones topográficas que requieren el uso especial de un aparato de esta clase.

Teodolito taquímetro de F. W. Breithaupt (Kassel). Este aparato, llamado taquímetro de tránsito, tiene el círculo acimutal con 9 cm de diámetro, el cenital con 8,5 cm, y ambos están completamente cubiertos. Las lecturas se hacen, en los dos limbos, con nonios que aprecian 30". El círculo vertical tiene el limbo sobre su borde cilíndrico, de modo que el primer nonio está muy cerca del ocular del anteojo, y el observador puede leerlo sin separarse de este último. También puede el observador, sin cambiar de posición, leer el primer nonio del círculo horizontal. El círculo acimutal lleva dos niveles cruzados, el

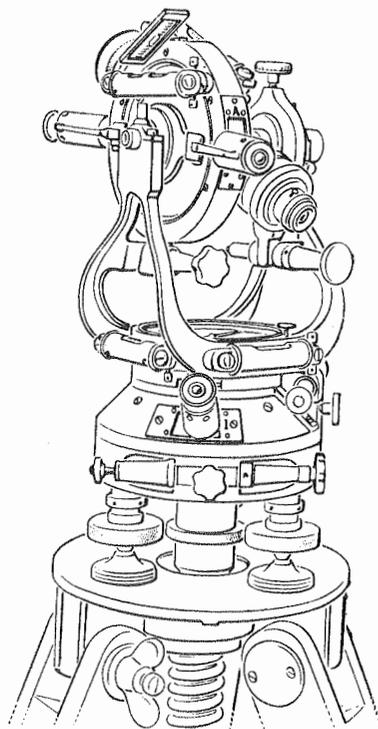


Fig. 192
Teodolito taquimétrico de Breithaupt

círculo cenital lleva otro nivel, y el anteojo va provisto de un cuarto nivel reversible. La observación del nivel del círculo vertical se hace, desde el mismo ocular, mediante un espejo que puede inclinarse a voluntad.

El anteojo, que es analítico, tiene una longitud de 135 mm, un aumento de 24 diámetros, y el enfoque se hace con una lente interior móvil.

En medio del soporte del anteojo va dispuesta una brújula, para cuando quiera utilizarse el aparato como brújula estadimétrica.

Taquímetro-cleps Porro, de Salmoiraghi (Milán). Este aparato es un teodolito repetidor, que se sujeta a la plataforma del trípode mediante una placa giratoria con tres brazos, por los cuales pasan los tornillos nivelantes. Los dos círculos van dentro de cajas completamente cerradas (tipo Cleps), con diámetro de 70 y 64 mm respectivamente; las lecturas se hacen con dos microscopios para cada círculo, y como índice lleva cada microscopio un retículo de tres hilos; los dos limbos son centesimales y las divisiones son décimas de grado, por lo cual, si se aprecia una vigésima de intervalo, se podrá leer hasta 0,005g (= 16" aprox.). La lectura se hace con el hilo del medio, y cuando se trata de me-

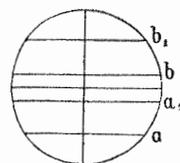


Fig. 194

diciones de precisión se hace la lectura, además, con los dos hilos excéntricos y se toma el promedio de las tres lecturas.

El retículo del anteojo tiene, además del hilo vertical, cinco hilos horizontales, dispuestos del modo indicado en la figura 194. Para una distancia de mira de 100 m, se leerá sobre esta última: $ab = a_1b_1 = 100$ cm; $aa_1 = bb_1 = 60$ cm; $a_1b = 40$ cm; también se tiene la constante $k = 100$ para ab y a_1b_1 , y $k = 250$ para a_1b . Como comprobación pueden hacerse las dos lecturas ab y a_1b_1 .

Taquímetro nivelante de Otto Fennel. Este aparato pertenece al grupo de los equíalímetros simples con nivel de anteojo y tornillo de inclinación. El anteojo es de lente interior de enfoque, la abertura del objetivo es de 32 mm, la longitud total de 31 cm y el aumento es de 31 diámetros.

El nivel del anteojo tiene una sensibilidad de 30". Para poder poner prontamente el aparato en estación lleva éste un nivel esférico sobre el eje vertical. Para los levantamientos taquimétricos lleva este nivel un círculo horizontal de 10 cm de diámetro, provisto de dos nonios que aprecian 1'.

El retículo consiste en una lámina de cristal que lleva grabada la cruz filar y las rayas estadimétricas para una constante diastimométrica igual a 100. El punto analítico del anteojo cae sobre el eje vertical, de modo que la constante aditiva es cero.

Para que el aparato quede centrado sobre la estación, como se requiere en la observación de ángulos acimutales, lleva el tornillo de sujeción del trípode un gancho para suspender una plomada

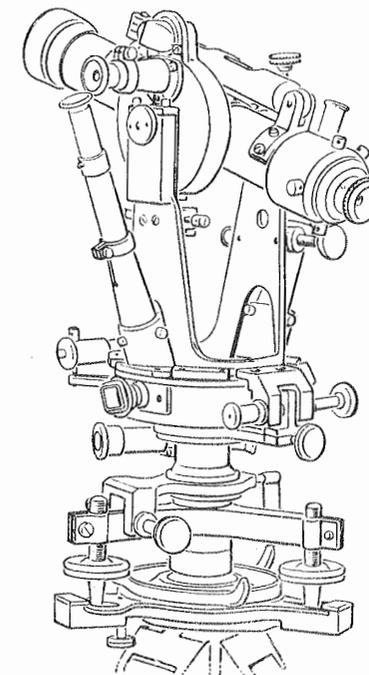


Fig. 193
Taquímetro-cleps Porro, de Salmoiraghi

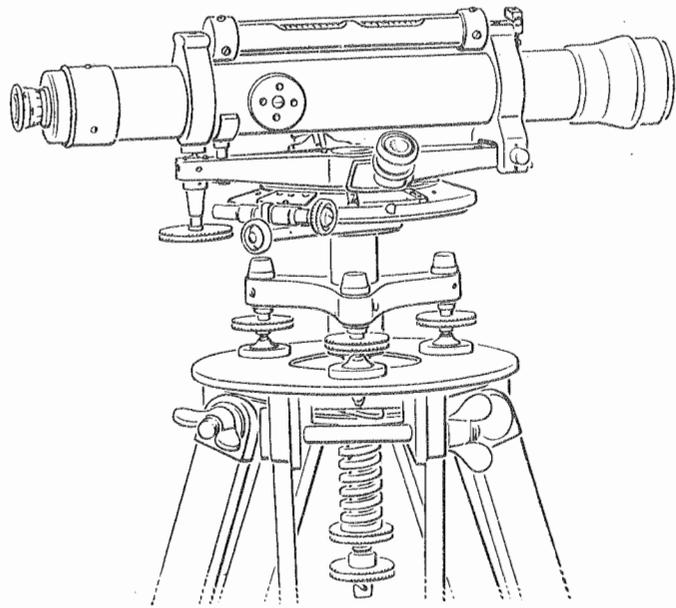


Fig. 195. — Taquímetro nivelante de Otto Fennel

Resulta también conveniente colocar sobre el anteojo una brújula. Tratándose de terrenos ligeramente ondulados constituye este taquímetro nivelante un aparato muy práctico por la sencillez con que se calculan las distancias y los desniveles.

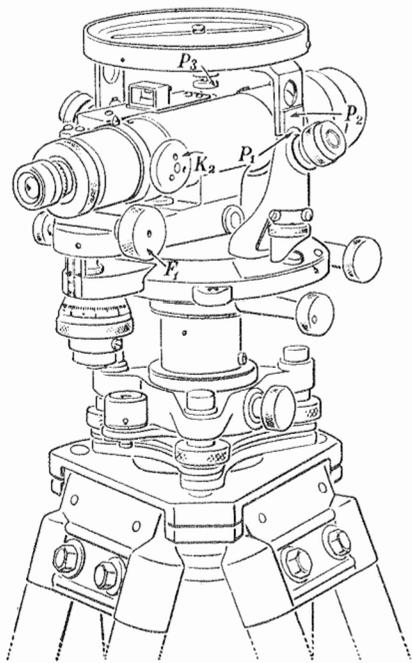


Fig. 196. — Taquímetro nivelante de Zeiss

Taquímetro nivelante de Zeiss (Jena). Tiene un anteojo con 30 aumentos, lente móvil de enfoque y constante diastimométrica igual a 100; las líneas estadimétricas están marcadas, como en todos los aparatos de la casa Zeiss, sobre una lámina de cristal situada en el plano-imagen del sistema dióptrico equivalente.

El nivel de aire está provisto del dispositivo de prismas descrito en la página 20.

En vez de un simple tornillo de inclinación lleva el anteojo un tornillo con tambor micrométrico, con el cual puede darse a aquél una inclinación de $\pm 10^\circ$.

El círculo horizontal está provisto de un microscopio con escala interior, con el cual se leen directamente los dobles minutos y pueden apreciarse los 12 segundos.

Para la observación de itinerarios de brújula puede disponerse sobre los soportes de los microscopios una brújula, como se ve en la figura.

En el tomo I, párrafo 69, hemos visto el sistema de sujeción del aparato al trípode y la construcción de la base nivelante en el teodolito Zeiss.

§ 66. Miras para taquímetros

Las figuras 197 a 200 representan las miras más empleadas en los levantamientos taquimétricos.

Hay que tener presente, en primer lugar, que todas las miras de nivelación (véase párrafo 10) pueden emplearse como miras taquimétricas: cuando la constante diastimométrica k es igual a 100, cada centímetro de la mira corresponde a un metro de distancia. Pero ni la distribución de las divisiones y colores ni la numeración son las mismas, en general, para



Fig. 197. — Mira ordinaria de nivelación con redondeles A, B, C para la medición de distancias



Fig. 198. — Mira sin cifras, del Servicio topográfico alemán

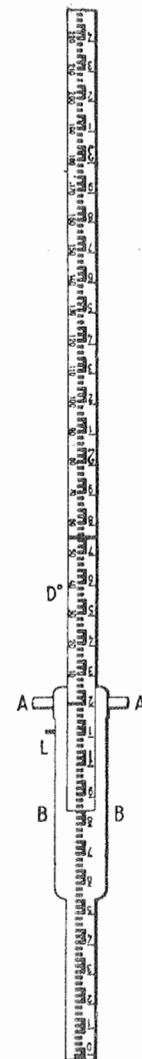


Fig. 199. — Mira articulada de Kreuter. L, nivel; A, eje de giro

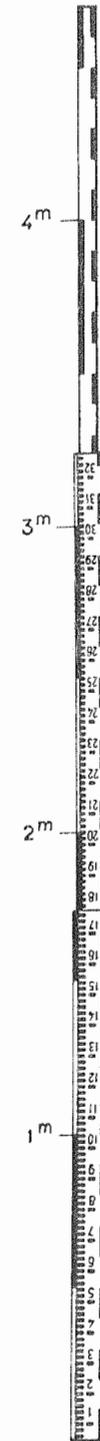


Fig. 200. — Mira enchufable

las miras de nivelación y para las estadimétricas, pues las primeras se leen ordinariamente a distancias menores de 50 m, mientras que las segundas se colocan, generalmente, entre 50 y 100 m y con frecuencia hasta los 300 m. De aquí resulta que pueden hacerse nivelaciones aun con aire caliginoso, pero tratándose de levantamientos taquimétricos, al hacer una lectura a larga distancia (entre 250 y 300 m) sobre la mira de nivelación, se desvanecen los números de ésta si hay aire caliginoso, por lo cual no pueden hacerse lecturas a tales distancias aun cuando el tiempo esté bueno y despejado.

Claro está que para lecturas a grandes distancias lo mejor es emplear miras sin números, como la representada en la figura 198 y utilizada en los levantamientos topográficos de Alemania. Las miras de nivelación (fig. 197) pueden también emplearse para grandes distancias, marcando los metros con unos redondeles *A*, *B*, *C* de 5 cm de diámetro (consistentes en discos pintados y sujetos con un tornillo a la mira): de este modo no hay confusión en la lectura de los metros, correspondientes a distancias de 100 m; los decímetros llevan el número al lado y los centímetros se pueden apreciar perfectamente aun a gran distancia. La señal cuadrada *S* tiene por objeto marcar la altura del aparato (comprendida de ordinario entre 1,3 m y 1,4 m), para que al calcular los desniveles no haya necesidad de hacer reducción alguna para la altura del aparato y la altura de mira: esta señal cuadrada desempeña el mismo papel que la redonda que se ve en la figura 202.

Los trazos alternativamente blancos y negros de la mira representada en la figura 198, tienen de anchura 5 cm, correspondientes a 10 m de distancia para $k = 200$. Las cuatro señales rojas *R* sirven para marcar distancias enteras de 200 m.

La figura 199 representa la mira de Kreuter, que se emplea con el taquímetro de proyección; en *A* lleva esta mira una articulación gracias a la cual puede inclinarse la parte superior, mientras la parte inferior *B* se mantiene verticalmente con el nivel esférico *L*. En *D* se ve una alidada para visar el aparato, dispuesta normalmente a la mira.

Finalmente, en la figura 200 se ve una mira enchufable, construída por Fennel, que puede utilizarse también como mira de nivelación: la parte inferior, que tiene 11×7 cm de sección y 1,75 m de longitud, es hueca y en su interior se aloja otra parte también hueca, que lleva dentro la parte tercera y última de la mira; estando completamente sacadas las partes segunda y tercera resulta la mira con una longitud total de 4,7 m. La parte superior puede servir como mira estadimétrica dividida sólo en decímetros.

También se hacen buenas lecturas sobre miras de divisiones lineales y señales en los metros y medios metros.

Para tener una idea de la facilidad o dificultad con que pueden leerse las miras de la página 261 a gran distancia, obsérvese que estas figuras están dibujadas a escala 1 : 25. y con un anteojo de 30 aumentos se obtendrá, por consiguiente, una imagen de las miras 750 veces más grande que la que a simple vista se obtiene de las figuras anteriores; es decir, que a una distancia de 300 m da el anteojo una imagen de igual tamaño que estas figuras observadas a simple vista a una distancia igual a $\frac{300}{750} = 0,4$ m. Luego, colocando

la página 261 a 0,4 m de distancia de los ojos, se verá una imagen igual a la que se vería con un anteojo de 30 aumentos al observar las miras reales a 300 m de distancia, dando por supuestas las buenas condiciones de observación y atmosféricas, sobre todo la calma del aire, sin oscilaciones ni movimientos de convección.

En la figura 201 se ve una mira con alidada *cd*, por la cual enfila el portamiras al anteojo, de modo que la mira queda perpendicular a la visual; con el soporte *ab* se mantiene la mira normal a la visual, es decir, inclinada respecto a la vertical (véase figura 177,

página 241). También este soporte sirve para mantener la mira verticalmente, como representa la figura 201.

Para que las miras no se muevan, y siempre que se trate de medidas de precisión, conviene emplear las varillas de sujeción de que ya se habló al ocuparnos de las miras de nivelación (véase figura 54, página 45).

En la figura 214 se ve una pequeña mira francesa, que se emplea con el taquímetro de Sanguet representado en la 213; esta mira es extraordinariamente ligera, se compone de dos piezas, su sección recta es sólo de 4×2 cm y cumple perfectamente su cometido, sin fatigar al portamiras, como sucede con muchas miras sobrecargadas con mucho peso innecesario.

Las miras taquimétricas deben llevar un disco bien destacado, de unos 3 a 6 cm de diámetro, a la altura *i* del taquímetro, como se ve en la figura 202, donde $z = i$. Sobre este disco se enfila el hilo central del retículo, antes de leer el ángulo vertical, que interviene en el cálculo de los desniveles. Cuando se sigue un itinerario sencillo, haciendo en cada estación una sola lectura de espalda y otra de frente, no tiene cuenta poner cada vez el disco a la altura $i = z$: en tal caso resulta más conveniente medir en cada estación la altura *i* del anteojo sobre el suelo y enfilar el hilo medio del retículo sobre la mira a la altura *i* antes de leer el

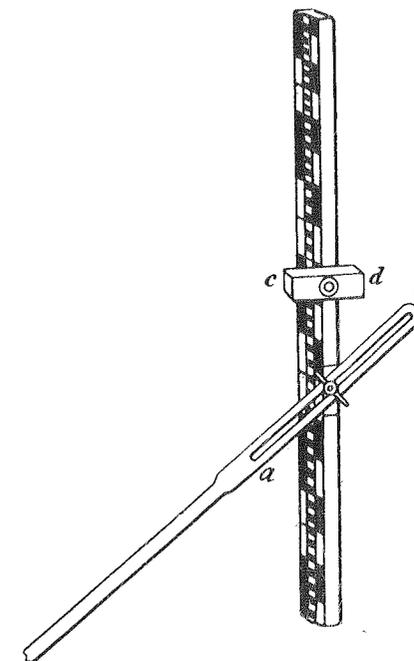


Fig. 201
Mira estadimétrica con alidada *cd* y soporte *ab*

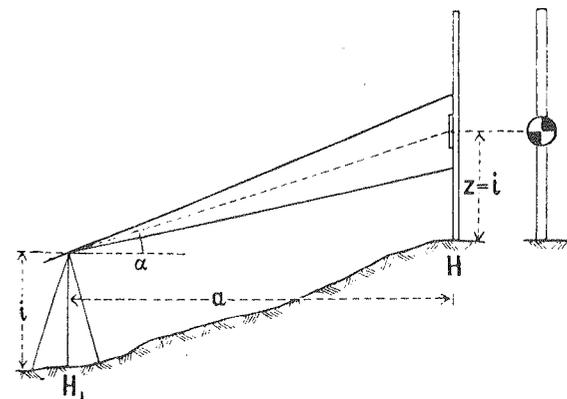


Fig. 202

ángulo central; también se puede enfilar siempre a una altura fija cualquiera, por ejemplo, a 1,50 m o a un disco indicador de metros enteros, como, por ejemplo, al disco *B*, situado en el 2,0 (fig. 197).

Ahora bien, en los trabajos taquimétricos ordinarios, en los cuales es frecuente hacer lecturas de mira sobre 20 a 30 puntos desde una misma estación (método de radiación), resulta más práctico colocar el disco, para cada estación, a una altura $z = i$. También es corriente el empleo de miras con una

§ 67. Taquímetros reductores y autorreductores

Al extenderse la Taquimetría a levantamientos topográficos de todas clases, se ha procurado disponer de aparatos que proporcionen directamente la distancia horizontal

y la altura o desnivel, sin necesidad de cálculo alguno ni de medios auxiliares de ningún género.

Taquímetro de proyección o de corredera. La idea de un aparato en que se leyera directamente sobre escalas a propósito tanto la distancia como la altura, fué ya expuesta en 1865 por Kiefer (en Colonia) y realizada por Breithaupt, como demostró Puller en un trabajo publicado en la «Zeitschr. f. Verm.» en 1896.

Casi al mismo tiempo aparecieron, poco después, dos inventos de esta clase, uno debido a Franz Kreuter (1874), y otro a C. Wagner (1876), llamado por su autor taquígrafómetro.

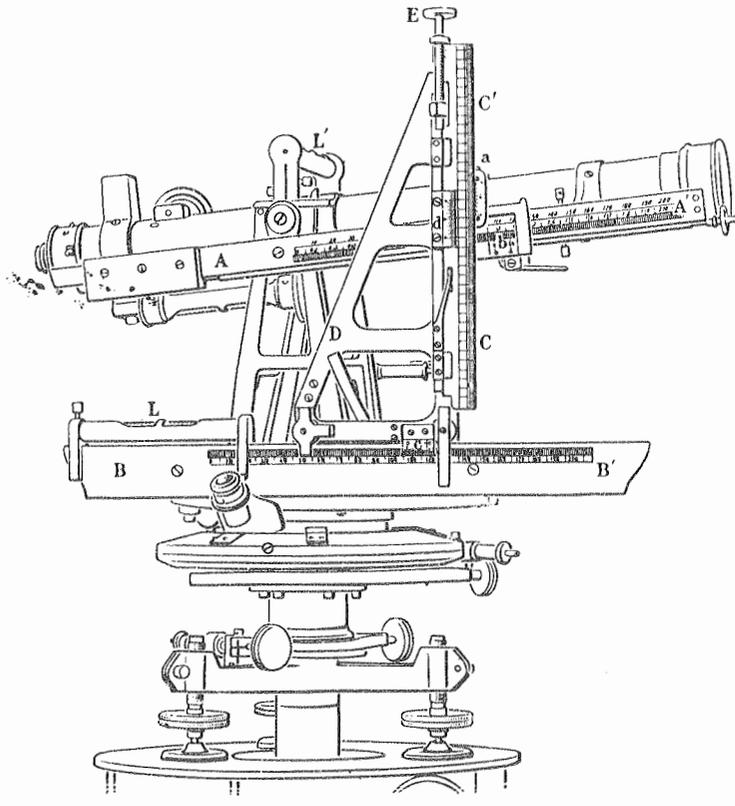


Fig. 203. - Taquímetro de corredera de Wagner-Fennel

Este último aparato está representado, a escala 1 : 4, en la figura 203, construido por Fennel, y es, en realidad, un teodolito que en vez de círculo cenital lleva una escala AA' (para las distancias inclinadas) unida al anteojo, una escala horizontal BB' (para las distancias horizontales) fijada al soporte del anteojo, y una pieza triangular $CC'D$ que puede correr sobre BB' y a lo largo de AA' . El anteojo lleva retículo telemétrico y al hacer la lectura l sobre una mira LA (fig. 204) perpendicular a la visual JA , se obtiene la distancia JA que se toma sobre la escala unida al anteojo, y la distancia JA' así representada en esta escala, da directamente en JB' la distancia horizontal, y en $B'A'$ la altura. Pasemos ahora a la figura 203: la lectura hecha sobre la mira normal a la visual se toma, con el nonio b sobre la escala AA' , se adapta la escala CC' de la corredera $C'D$ al nonio a (que se mueve con el b y que puede a la vez girar alrededor de un eje horizontal), y se lee con

el nonio d la altura y con el c la distancia horizontal sobre la escala BB' . Dando a la escala de alturas una numeración conveniente, pueden leerse también directamente las cotas o alturas sobre el nivel de referencia que se haya tomado.

Este taquímetro de proyección requiere el empleo de mira inclinada, lo cual constituye un inconveniente en la práctica. La casa Breithaupt construye un taquímetro de proyección ideado por Puller («Zeitschr. f. Verm.», 1893) para mira vertical, cuyo funcionamiento y teoría se ven claramente en las figuras 205 y 206; el retículo del anteojo lleva, además de la cruz filar, un solo hilo horizontal excéntrico para la lectura de mira, que determina con el eje de colimación el ángulo paraláctico ω .

Supongamos que el eje de colimación forma con la horizontal un ángulo α (fig. 205), y que la lectura de mira sea l ; llamando D a la distancia del punto analítico del anteojo a la mira, se tiene:

$$D : \cos \alpha = \frac{l \operatorname{sen} \omega}{\cos (\alpha + \omega)}$$

de donde:

$$D = \frac{l}{\operatorname{sen} \omega} \cos \alpha \cos (\alpha + \omega). \quad (1)$$

Pero según la misma figura:

$$E = D + c \cos \alpha \quad \text{y} \quad h = D \operatorname{tg} \alpha + c \operatorname{sen} \alpha$$

y sustituyendo aquí el valor (1) de D , y poniendo $\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} = k$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} E &= [kl \cos (\alpha + \omega) + c] \cos \alpha \\ h &= [kl \cos (\alpha + \omega) + c] \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

La realización mecánica de esta disposición teórica está representada esquemáticamente en la figura 206; el eje horizontal de giro del anteojo lleva unido sólidamente un

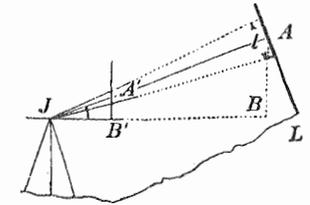


Fig. 204

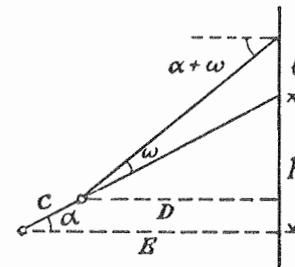


Fig. 205

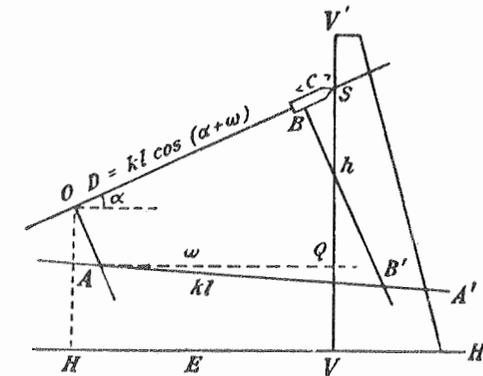


Fig. 206

brazo OA perpendicular a este último: al girar el anteojo, este brazo hace correrse en la dirección de su propia longitud a la escala AA' , que forma un ángulo ω con la horizontal: otro brazo BB' , paralelo al OA , puede correr a lo largo del anteojo.

Si la lectura de mira es l , se corre el brazo BB' hasta tomar sobre la escala AA' la distancia $AB' = kl$, cuya proyección sobre el eje del anteojo, dada por los dos brazos OA y BB' , es igual a $D = kl \cos (\alpha + \omega)$. La corredera con la cual se desliza el brazo BB' a

lo largo del anteojo, lleva una prolongación BS de longitud igual a c , de modo que $OS = kl \cos(\alpha + \omega) + c$.

El soporte del anteojo lleva unida una escala horizontal HH' (como el de la figura 203), sobre la cual puede deslizarse una corredera provista de escala vertical VV' , cuyo cero cae en Q y que se hace tocar en S con la pieza BS , resultando así, según las fórmulas (2), que en HV se leerá la distancia horizontal E , y en QS el desnivel h .

El taquímetro de proyección puede servir también para transportar directamente los puntos del terreno observados; para ello, en vez del círculo acimutal (fig. 203) lleva el taquímetro un disco horizontal de 30 a 40 cm de diámetro, sobre el cual se puede sujetar un papel de dibujo, levantando la parte superior del aparato. La corredera triangular $CC'D$ lleva un lápiz por debajo del nonio c , montado de manera especial, con el cual se van marcando en el papel los puntos visados.

Se han hecho muchos ensayos comparativos para ver si los taquímetros de proyección aventajan a los taquímetros-teodolitos ordinarios (con círculo cenital), y los resultados favorecen a estos últimos, con los cuales sólo hay que hacer en el campo lecturas fijas, sin coincidencias ni lecturas sobre escalas corredizas, aunque haya que calcular después las distancias y desniveles.

En las revistas alemanas «Zeitschr. f. Verm.» (1901 y 1903) y «Zentralblatt der Bauverwaltung» (1893) figuran trabajos muy interesantes sobre el valor relativo de los taquímetros de proyección y de los taquímetros ordinarios.

Taquímetro con tornillo de elevación (inclinométrico). Ya vimos en el párrafo 13 (página 59) la aplicación del tornillo eclimétrico a los niveles, para poder nivelar con visual inclinada. Si se dota a un instrumento de esta clase de un círculo acimutal, puede emplearse como taquímetro, y a causa de su gran rendimiento en terrenos movidos es preferible a los taquímetros nivelantes antes descritos (págs. 259 y 260). El taquímetro nivelante de Zeiss (fig. 196) va provisto de tornillo inclinométrico para los casos en que no es posible hacer la lectura con visual horizontal.

Las figuras 207 y 208 representan respectivamente los casos de medición de distancia y desnivel con el tornillo de elevación vertical o con este mismo tornillo en posición horizontal.

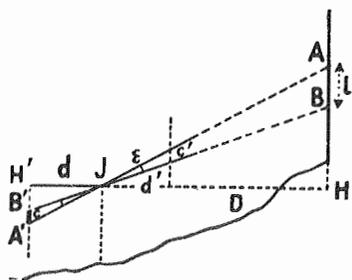


Fig. 207

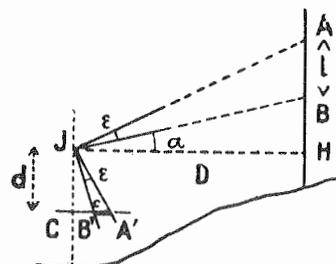


Fig. 208

cual habrá sido necesario hacer subir el tornillo inclinométrico una parte $A'B' = c$, la distancia a la mira será, en función de la lectura de mira l ,

$$D = \frac{d}{c} l$$

y si d es igual a cien veces el paso del tornillo, se tendrá:

$$D = 100 l. \quad (3)$$

Si el espacio $B'H'$ de la figura 207, o el correspondiente $B'C$ de la figura 208 se expresa en vueltas del tornillo, los números resultantes darán la inclinación de la visual en tanto por ciento, y el desnivel será:

$$h = D \frac{B'H'}{100} \quad \text{y} \quad h = D \frac{B'C}{100}$$

y sustituyendo el valor de D (3), se tendrá:

$$h = B'H' \times l \quad \text{y} \quad h = B'C \times l. \quad (4)$$

En la figura 209 se ve representado a escala 1:3 un taquímetro con tornillo inclinométrico construido por Meissner, de Berlín; este aparato es, en esencia, un teodolito repetidor cuyo círculo acimutal, de 11 cm de diámetro, lleva el limbo en la pared cilíndrica vertical que constituye su borde propiamente dicho. El círculo cenital tiene también 11 cm de diámetro, y los nonios de ambos círculos aprecian $1'$. Sobre el círculo horizontal va una brújula encerrada en caja de cristal, y con el limbo también cilíndrico, sobre el cual se mueve la aguja imanada. El anteojo es de Porro (§ 59), con la constante diastimométrica $k=100$ y puede girar dentro de collares adecuados; sobre el anteojo va un nivel caballero con espejo para su lectura. Es decir, que este instrumento constituye un nivel con anteojo de collares y nivel caballero (fig. 11, pág. 16) y puede usarse como taquímetro nivelante prescindiendo del empleo del círculo cenital.

Este taquímetro va provisto también de tornillo inclinométrico, que se ve a la izquierda de la figura, montado sobre un bastidor indeformable unido al soporte del anteojo, y que por medio del brazo horizontal que se ve en la parte superior obra sobre el anteojo. Al subir el tornillo vertical hace correr sobre este brazo la pieza-corre-

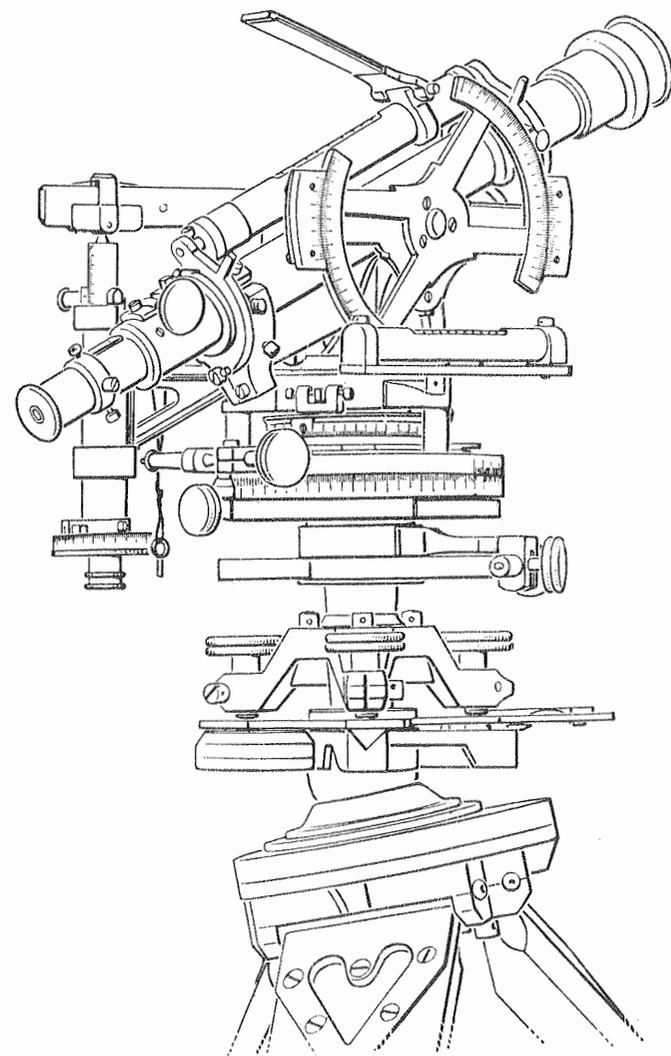


Fig. 209. — Taquímetro de Meissner

Método logarítmico-taquimétrico de Tichy. La aplicación de este método requiere el empleo de una mira con escala logarítmica, y el anteojo del teodolito con tornillo micrométrico en el ocular. La figura 212 representa una mira con doble escala: la de la izquierda es logarítmica y la de la derecha es una escala corriente dividida en decímetros, con puntos en el segundo metro para evitar toda confusión. La escala logarítmica empieza con el logaritmo de 10 m, correspondiente a 1 dm, y continúa con los logaritmos de cien veces la lectura métrica que corresponde en la escala de decímetros. Las características van señaladas con puntos y las mantisas pueden leerse, hasta con dos cifras, en la escala logarítmica; para una lectura de mira 1,7, se tiene en esta escala el valor 2,23. Para leer sobre esta mira se enfila el hilo fijo sobre el cero del extremo superior de la mira y se lee con el hilo móvil, después de haber dado cinco vueltas completas al tornillo del ocular. La mira logarítmica tiene la ventaja de que cualquiera que sea la distancia, las lecturas de mira se hacen siempre sobre intervalos de igual tamaño aparente. En efecto, si llamamos i a una división cualquiera y li a su distancia al cero, es evidente, según lo expuesto, que

$$\log 100 l_i = i, \quad \text{o sea} \quad 10^i = 100 l_i.$$

La señal anterior será $i - 0,01$, y por idéntica razón se tendrá:

$$10^{i-0,01} = 100 l_{i-0,01}.$$

Por lo tanto, la longitud del trozo comprendido entre las dos señales será:

$$\Delta l = \frac{1}{100} (10^i - 10^{i-0,01}) = \frac{10^i}{100} \left(1 - \frac{1}{10^{0,01}}\right) = 0,02276 l_i,$$

es decir, que el intervalo entre dos divisiones varía proporcionalmente a la distancia al punto cero. La anchura del intervalo sobre que se hace la lectura con el hilo móvil, varía proporcionalmente a la distancia de mira s , por lo cual la relación entre este intervalo y esta distancia, es decir, el tamaño o diámetro aparente del intervalo (espacio entre dos señales consecutivas) es constante.

Ahora bien, por ser $k = 100$, se tiene:

$$\frac{l_i}{s} = \frac{1}{100},$$

y sustituyendo en la expresión de Δl el valor de l_i deducido de esta proporción, resulta:

$$\frac{\Delta l}{s} = \frac{0,02276}{100}$$

y el diámetro aparente del intervalo entre señales será:

$$\frac{0,02276}{100} \rho'' = 46,95''.$$

Fig. 212
Mira
logarítmica
Tichy-Starke

Este ángulo constante, bajo el cual se ve el intervalo de mira a cualquier distancia, sirve para poder agregar dos cifras decimales más al logaritmo directamente leído en la escala de la izquierda de la mira. Para ello, el índice para la lectura del tambor micrométrico (fig. 211) lleva una pequeña escala con diez divisiones; cuando el cero del tambor recorre estas diez divisiones, la visual correspondiente al hilo móvil habrá descrito exactamente un ángulo de $46,95''$, es decir, el diámetro aparente del intervalo entre señales.

La lectura de mira se hace del modo siguiente: el hilo fijo se enfila sobre el cero de la mira, y después de dar cinco vueltas completas al tornillo micrométrico, se lee el logaritmo de la parte de mira métrica comprendida entre los hilos, con dos cifras decimales, sobre la escala logarítmica. Se hace girar entonces en sentido inverso al anterior, el tornillo micrométrico, hasta que el hilo móvil coincida con la señal anterior de la escala logarítmica, y se leen con el cero del tambor, sobre la escala que éste lleva por encima, otras dos cifras decimales del logaritmo anterior. Con el $\log(100 \cdot l)$ así hallado y las tablas de Starke antes citadas (pág. 269), se calcula la distancia horizontal y la diferencia de alturas.

Sobre este método logarítmico merecen especial mención los trabajos siguientes:

JOSEF FRIEDRICH, «*Diastimometría y medición directa de distancias*» (Viena, 1881).

ANTON SCHELL, «*Métodos taquimétricos con empleo de un tornillo micrométrico ocular*» (Viena, 1883).

«*Taquimetría de precisión y nuevos instrumentos*», por A. TICHY («*Zeitschr. d. Ost. Ing. u. Archit.-Vereins*», 1892).

«*El método logarítmico-taquimétrico de A. TICHY plenamente consolidado en la actualidad*» («*Zeitschr. d. Ost. Ing.- u. Archit.-Vereins*», 1913).

«*La adopción del método logarítmico-taquimétrico de A. TICHY en Viena*» («*Organ für die Fortschritte des Eisenbahwesens*», 1915).

Tornillo de Stampfer. En el párrafo 13, página 60, se trató del nuevo tornillo de Stampfer, aplicable a nivelación y diastimometría, que se halla descrito con todo detalle en la obra de S. Stampfer titulada *Instrucciones para el uso de niveles de anteojo*, etc., Viena, 1839.

Ya hemos visto que en los tornillos inclinométricos ordinarios, tanto si dan sólo la pendiente como si dan también la distancia, el tornillo conserva siempre una misma posición, horizontal o vertical, de modo que su recorrido c (figs. 207 y 208) representa la tangente del ángulo que hace describir al anteojo, por lo cual se le llama también tornillo tangencial. En cambio, el tornillo de Stampfer no se mantiene en una posición fija e invariable, y la relación entre su número de vueltas y el ángulo α , o entre dicho número y la distancia D , no es tan sencilla como para el tornillo tangencial y hay que determinarla experimentalmente: este tornillo de Stampfer pudiera llamarse tornillo secante.

Para la teoría del tornillo de Stampfer véase Vogler, «*Tratado de Geometría práctica, Segunda parte*». Brunswick, 1893.

Es muy antiguo el principio del tornillo aplicado a mediciones. La primera aplicación del tornillo tangencial se encuentra reseñada en el libro de Hogrewe titulado *Práctica de la nivelación*, etc., Hannover, 1800. El nivel de Stampfer ha dado gran impulso al empleo de los tornillos micrométricos en Topografía. En una Memoria de Doergens, publicada en «*Zentralblatt der Bauverwaltung*» en 1893, sobre *Taquímetros con tornillo tangencial*, se citan los ensayos e inventos anteriores a base de tornillos micrométricos: Hogrewe, 1800; Breithaupt, 1844; Stampfer, 1845; Bohn, 1866; Börsch, 1871; Hahn, 1876; Decher, 1890; y Vogler, 1891.

En resumen, puede decirse que así como el tornillo inclinométrico constituye un complemento muy útil en los niveles, el tornillo micrométrico para distancias no resulta práctico aplicado a los taquímetros, pues sólo pueden servir excepcionalmente para medir distancias muy grandes, a las cuales no sea aplicable la medición estadimétrica con mira corriente. Los taquímetros conviene que vayan provistos de tornillo vertical de afinación, que se emplea como tornillo inclinométrico.

Taquímetros de contacto o de tope. El principio del tornillo puede aplicarse también a dos puntos fijos A' y B' (figs. 207 y 208) a distancia invariable uno de otro, que puedan correrse a lo largo de una escala vertical u horizontal. Si el anteojo (fig. 207) o un brazo rígidamente unido al mismo (figura 208) se pone en contacto sucesivamente con los puntos A' y B' , se tendrá una lectura de mira l que dará la distancia.

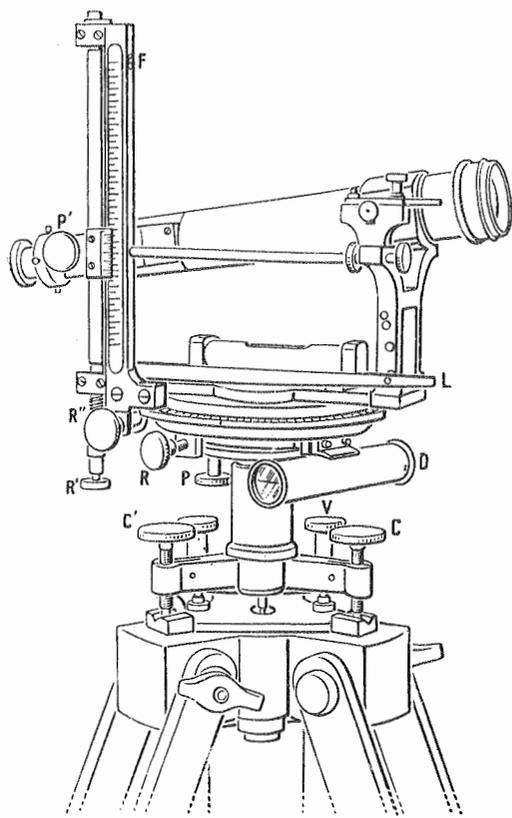


Fig. 213. — Taquímetro de tope de Sanguet

se empieza por dirigir el anteojo al cero de la mira, que se habrá colocado a la altura del instrumento; se aprieta el tornillo P' y se lee con el nonio la escala F , cuyo cero corresponde a la posición horizontal del anteojo. El ángulo diastimométrico se forma moviendo la palanca L desde el tope más bajo que corresponde a su posición de reposo, hasta el inmediato superior; al subir esta palanca baja la columna de la izquierda con el anteojo a ella sujeto en un pequeño espacio, igual a la centésima parte de su distancia al eje de giro del anteojo. En esta posición se lee la mira, y la distancia a ésta será igual a cien veces su lectura, y el desnivel [según la fórmula (4) de la pág. 267] se obtendrá multiplicando la lectura de mira por la lectura de la escala F . Para que los resultados tengan mayor precisión se hacen otras dos lecturas de mira, subiendo la palanca L un tope para cada una; estos dos últimos topes están dispuestos de tal modo, que la suma de las tres lecturas de mira, dividida por 3, da la lectura normal.

En 1912 ideó el ingeniero Balu, también francés, un nuevo taquímetro, fundado en el mismo principio que el de Sanguet, y que fué construído por la casa Kern, de Aarau (Suiza) («Zeitschr. f. Instr.», 1915).

Los taquímetros de contacto posteriores a los citados no llevan la escala vertical, a causa de las dificultades de construcción que ello supone, y responden en su teoría y funcionamiento a la disposición representada en la figura 208.

Para la determinación del desnivel, en vez de medir el segmento rectilíneo $A'H'$ (figura 207) o el $A'C$ (fig. 208), se lee este mismo sobre la escala vertical u horizontal respectivamente.

Fundados en este principio se han ideado y construído distintos taquímetros llamados de contacto o de tope. El aparato más antiguo de esta clase es el representado en la figura 213, con su mira especial (fig. 214), debido al ingeniero francés Sanguet, que lo construyó en el año 1865, y que corresponde a la disposición de la figura 207. El extremo ocular del anteojo resbala sobre una columna vertical, a la cual puede fijarse sólidamente apretando el tornillo de presión P' . Se empieza

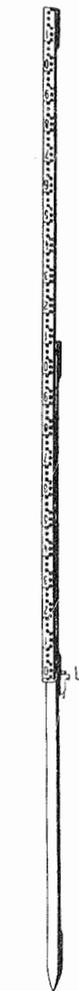


Fig. 214
Mira del
taquímetro
Sanguet

El primer taquímetro de tope conocido con escala horizontal es el que se ve en la figura 215, construído en 1898 por la casa Max Hildebrand, por indicación de Vogler, y perteneciente en la actualidad a la Escuela Superior Técnica de Berlín. Este taquímetro es, en realidad, un teodolito repetidor cuyo anteojo lleva rígidamente unido un brazo perpendicular a su eje de colimación; este brazo es accionado por un cursor que puede moverse sobre una barra con cremallera, dando vueltas al botón que se ve en la figura un poco a la izquierda sobre la cara delantera de aquél. La llave que se ve a la derecha de este botón sirve para inmovilizar el cursor y hacerlo solidario con la barra dentada; al mismo tiempo pasa un punzón por un vano de la cremallera, de modo que el cursor queda automáticamente fijado sobre un vano de aquella y no en cualquier otra posición; a cada vano corresponde un número en la escala que hay por encima y que puede verse por una ventanilla practicada en el cursor, leyéndose directamente la pendiente del eje de colimación en tanto por ciento. Para facilitar la lectura van los números dispuestos en dos filas. En el extremo de la izquierda de la barra dentada se ve un botón que sirve para mover un tornillo entre dos topes fijos; de este modo se puede correr la barra dentada con el cursor a ella sujeto, de tal modo que la pendiente del eje de colimación aumenta en 1 %.

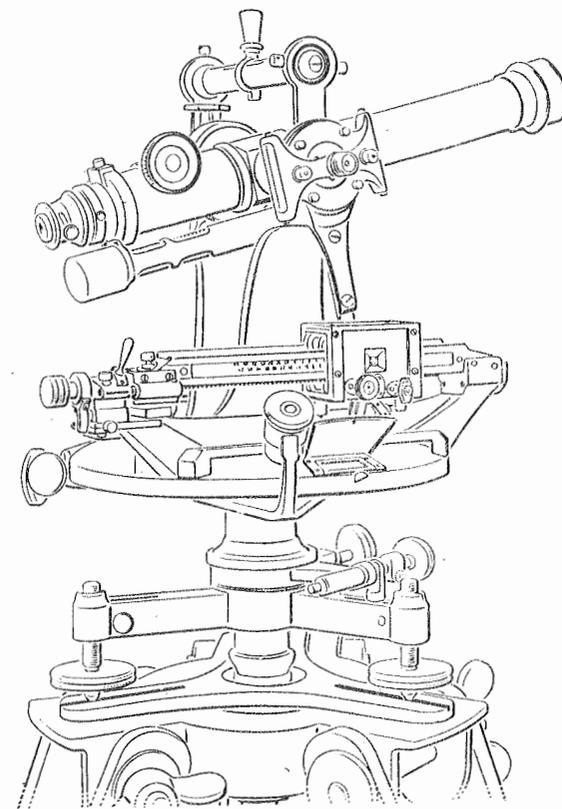


Fig. 215. — Taquímetro de tope de Vogler-Hildebrand

El manejo de este taquímetro para la determinación de distancias y desniveles es bien sencillo: corriendo el cursor se da al anteojo la inclinación conveniente, y se hace la lectura U de mira; al mismo tiempo se lee la pendiente con el cursor; se mueve el botón de la izquierda de la barra dentada para aumentar la pendiente del anteojo en 1 % y se hace otra lectura O sobre la mira. Multiplicando por 100 el trozo de mira $O - U$ se tiene la distancia, y el producto de esta diferencia de lecturas por la pendiente leída es igual a la altura del punto U de la mira sobre el anteojo.

Girando la empuñadura que se ve sobre el extremo izquierdo de la barra dentada, se hace avanzar ésta en un espacio correspondiente al 1 % de la pendiente, con lo cual se comprueba, con una nueva lectura de mira, la diferencia antes leída.

Para utilizar el taquímetro en triangulaciones o poligonales, se suelta el brazo del anteojo sin el menor trabajo, para poder hacer las observaciones angulares con toda facilidad.

Taquímetro de contacto de Doergens. En la figura 216 se ve, en esquema, el taquímetro ideado por Doergens y construído por A. Meissner, que también se encuentra en la

Escuela Superior Técnica de Berlín. En el soporte del anteojo van fijados dos manguitos HH , que sirven de guía a una barra dentada Z que pasa por su interior; esta barra, al moverse, arrastra al brazo L por medio del manguito M , giratorio alrededor del punto P .

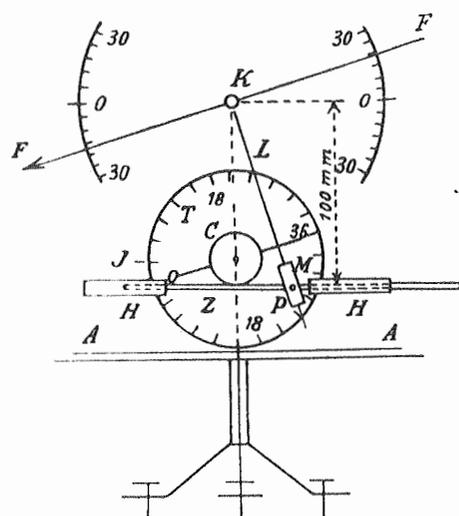


Fig. 216

Con la barra dentada engrana un piñón C , cuyo eje también va fijado al soporte del anteojo y que lleva unido un tambor graduado T . Este tambor, que se lee con el índice fijo J , tiene 72 mm de circunferencia, y como está dividido en 72 partes, al hacerlo girar solo en una de estas partes o divisiones, la barra dentada, y con ella el punto P , se mueve recorriendo 1 mm. La distancia entre la barra dentada y el eje de giro K del anteojo es de 100 mm, por lo cual la lectura del tambor indicará la pendiente del eje de colimación FF .

La lectura de mira necesaria para la medición de la distancia se hace después de girar el tambor en una división. El aparato de la Escuela Superior Técnica de Berlín lleva un dispositivo de contacto o tope (no representado en la figura) con el cual, al mover una palanca, se hace girar el tambor en una sola división; este aparato está provisto de anteojo de Porro y de un dispositivo reductor, de corredera, análogo al del taquímetro de Wagner-Fennel (fig. 203).

Taquímetro de tope, de Kern. La figura 217 representa un taquímetro moderno de contacto, construido por Kern y fundado en el mismo principio que el de Vogler-Hildebrand (fig. 215), es decir, con escala horizontal para la lectura de la inclinación del anteojo. Para girar el anteojo lleva éste un brazo unido a su eje horizontal, y el extremo inferior de aquél resbala sobre una corredera horizontal, sobre la cual puede inmovilizarse apretando un tornillo de presión. La posición del cursor sobre la corredera se lee en la escala horizontal J con un nonio, haciéndose la lectura desde el ocular por medio de la lente prismática K . Cada división de la escala es igual a la centésima parte de la distancia entre la corredera y el eje de giro del anteojo; la lectura cero corresponde a la posición horizontal de la visual, de modo que el nonio da la pendiente de esta visual en tanto por ciento. En la parte inferior de la izquierda, H , del bastidor que lleva la corredera y la escala, se ve un botón giratorio, que va unido a una

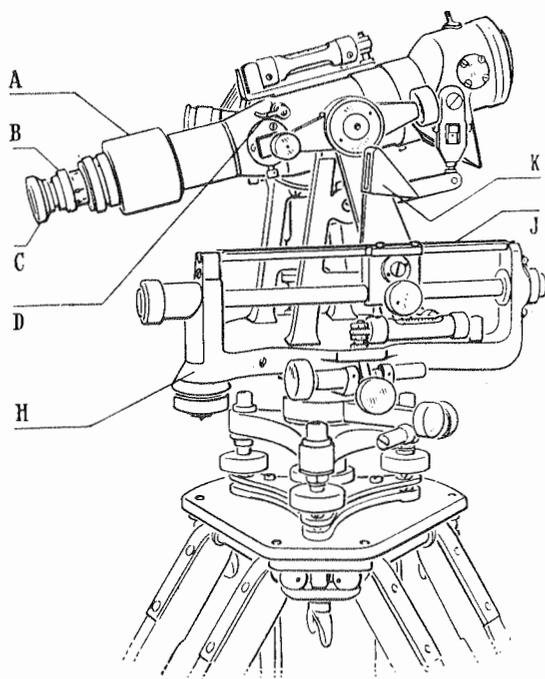


Fig. 217. — Taquímetro de tope, de Kern

excéntrica de tal manera que al hacerlo girar avanza la corredera, con el cursor amordazado a ella, en una longitud correspondiente a un aumento de 1 % en la pendiente del eje de colimación. El cálculo de la distancia horizontal y del desnivel se hace del mismo modo que con el taquímetro de Vogler-Hildebrand (fig. 215).

El anteojo puede soltarse del brazo con toda facilidad, para utilizar el aparato como teodolito repetidor, y con el círculo cenital y un ocular de Porro en el anteojo, puede emplearse también como taquímetro-teodolito ordinario.

Este aparato va provisto de un estadímetro de doble imagen (tomo I, párrafo 75), que, con una mira horizontal, sirve para levantamientos de planos por el método de coordenadas polares.

Taquímetro de Szepessy. Este aparato, fundado también en la aplicación del tornillo inclinométrico, fué construido en 1925 por la casa F. Süss, de Budapest; consiste, en esencia, en un teodolito repetidor, con anteojo provisto de lente móvil de enfoque, círculo cenital de gran diámetro, que no se mueve al girar el anteojo y que lleva un nivel y un tornillo de afinación. Este círculo cenital lleva la graduación en su borde exterior cilíndrico.

Para la lectura del círculo cenital, lleva el anteojo, en su extremo ocular, un microscopio de tal modo montado que el ocular del anteojo es al mismo tiempo el ocular del microscopio lector. De esta manera, en el campo visual del anteojo (dividido en dos partes por la arista de un prisma) se ve a la izquierda la escala del círculo cenital y a la derecha la mira, como se aprecia perfectamente en la figura 218. La lectura se hace con un doble hilo a la izquierda, y uno simple a la derecha: los dos hilos que constituyen el par de la izquierda están entre sí a tal distancia que comprenden exactamente una división del círculo cenital. Las divisiones de este último no son grados, sino pendientes en tanto por ciento; es decir, que si el par de hilos cae sobre la división 15, la pendiente del eje de colimación del anteojo es de un 15 %.

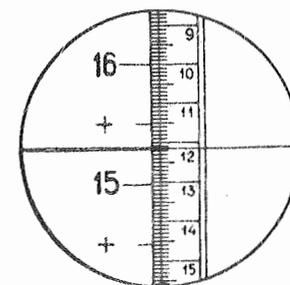


Fig. 218

Para hacer una observación se procede del modo siguiente: se inclina el anteojo de modo que el hilo doble caiga sobre una división del círculo cenital, por ejemplo, sobre la 15, y se hace la lectura de mira con el hilo simple: se lleva entonces el doble hilo sobre la división inmediata, es decir, sobre la 15,5, y se vuelve a leer la mira, teniéndose así una diferencia l de lecturas, con la cual pueden calcularse la distancia horizontal D y el desnivel h , que en el ejemplo actual serán:

$$D = 100 l \quad \text{y} \quad h = 15 l.$$

Otros taquímetros de tornillo micrométrico. Vamos a terminar con algunas referencias sobre otros dispositivos. El nivel de Gordian responde a la figura 207, y la distancia c se lee sobre una corredera vertical con escala y nonio; este aparato está descrito por Hunäus en su trabajo titulado *Instrumentos geométricos*, Hannover, 1804, y en la *Zeitschr. f. Instr.*, 1894. El *taquígrafo* de Ziegler-Hagers (Luxemburgo, 1894), se funda también en la disposición de la figura 207, pero en vez de medirse la distancia c , se mide la c' , a la derecha de J ; mediante una corredera vertical con tornillo de presión se puede dirigir el anteojo hacia A (sin mover el tornillo c'), y después, con el tornillo inclinométrico (que recorre el espacio c'), se dirige aquél hacia B . Este aparato se encuentra descrito por Hammer en la *Zeitschr. f. Instr.*, 1894. Merece también citarse el aparato de R. Jähns, de

igual fundamento que el anterior, descrito en la revista «Deutsche Bauzeitung», de 1875. A la disposición representada en la figura 208 responde el *omnímetro de Eckhold*; las visuales JA , JB y JH del anteojo, son respectivamente perpendiculares a las posiciones JA' , JB' y JC del eje óptico de un microscopio, que se desvían con un prisma de modo que los dos oculares quedan uno junto a otro; en $CB'A'$ va una escala horizontal sobre la cual se lee la longitud c , que se afina más aún con un movimiento micrométrico de la escala. La descripción de este aparato se encuentra en la revista «Zeitschr. f. Verm.» del año 1875 y en la «Zeitschr. f. Instr.» del 1895.

§ 68. Taquímetro de Hammer-Fennel

La figura 219 representa el taquímetro de Hammer-Fennel, provisto de un dispositivo reductor completamente automático; con una sola puntería se obtiene directamente la distancia horizontal y el desnivel. La lectura se hace con un diagrama cuya imagen se forma en el mismo plano-imagen del anteojo y que cambia automáticamente al variar la inclinación del anteojo. Este diagrama va grabado en una lámina de cristal situada fuera del

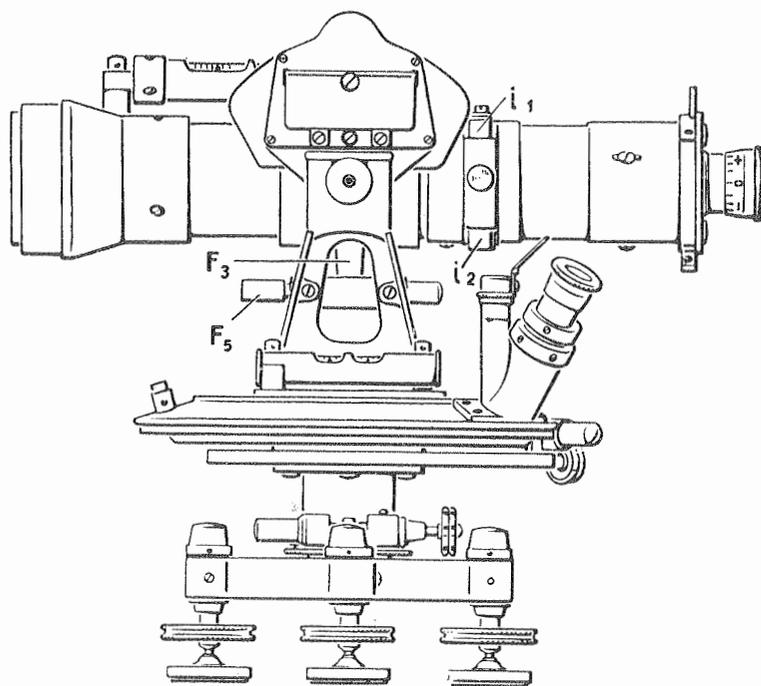


Fig. 219. — Taquímetro autorreductor de Hammer-Fennel

anteojo, en posición vertical dentro de una caja, que puede girar alrededor del eje horizontal del anteojo y que mediante una palanca provista de tornillo de presión y muelle antagonista puede inmovilizarse cuando se quiera. En la figura se ve en F_3 la palanca portadiagrama (representada en D en la figura 220), y en F_5 el tornillo de presión. Para iluminar el diagrama lleva la caja un cristal blanco inclinado 45° , y para evitar que entre polvo va tapada la caja con una lámina horizontal de vidrio.

En la figura 220 se ve la estructura mecánica de este taquímetro y en la 221 el campo visual del anteojo; la mitad D de la izquierda está ocupada por la imagen del diagrama dado por el prisma P_2 (fig. 222), y la imagen de la mira aparece tocando la arista de este último; NN es un hilo horizontal, llamado *hilo-cero*, que se enfila sobre el cero de la mira. El diagrama está compuesto de tres curvas de las cuales la superior G es un arco de círculo tangente en el punto medio al hilo-cero NN ; la curva inferior EE es la curva de distancias y da con el hilo-cero una lectura de mira que multiplicada por 100 es igual a la distancia horizontal; la curva intermedia HH , con el hilo-cero da una segunda lectura de mira, que multiplicada por 20 da la diferencia de nivel. En la figura 221 las dos lecturas son respectivamente 0,330 y $+0,067$, y por lo tanto, $D = 33,0$ m y $h = +1,34$ m.

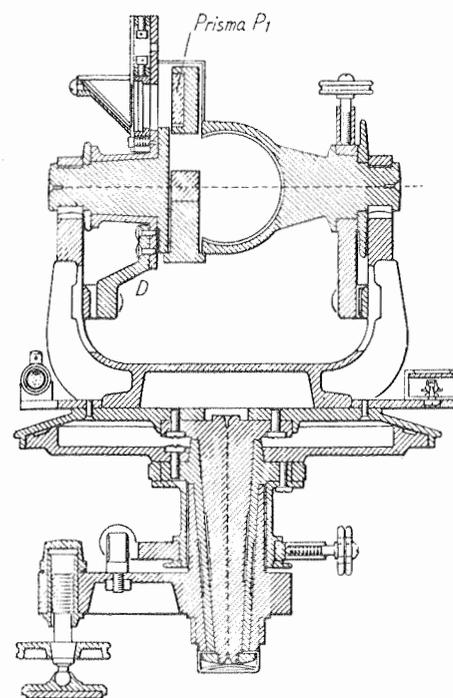


Fig. 220

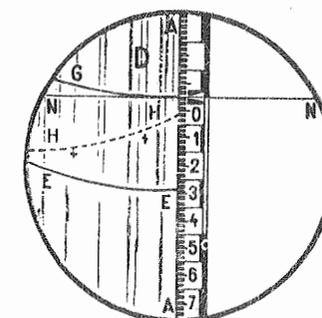


Fig. 221

La parte central del diagrama cae frente a una abertura rectangular practicada en la pared del anteojo y dentro de este último se halla un prisma de reflexión total P_1 (figs. 220 y 222) mediante el cual los rayos luminosos que atraviesan el diagrama son reflejados

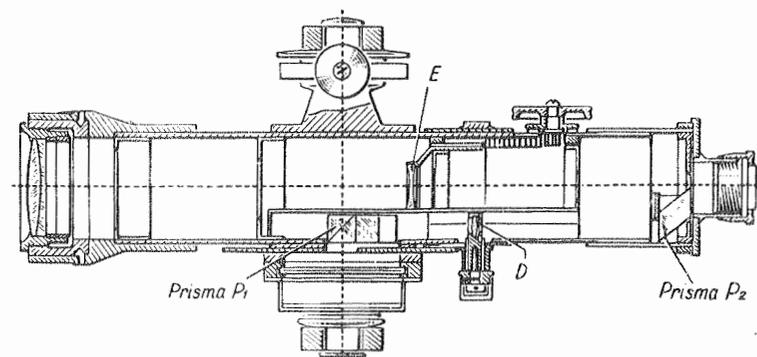


Fig. 222

primero hacia abajo hasta el eje de giro del anteojo y después en dirección al ocular, pero en esta última parte pasan por una lente D (fig. 222), que los recoge para dar lugar a una imagen real, que por doble reflexión en el prisma P_2 se forma en el plano-imagen

del anteojo; esta es la imagen que ocupa la mitad de la izquierda del campo visual del anteojo (fig. 221).

El anteojo lleva una lente interior de enfoque E (fig. 222) y las dos curvas de distancias (G y E) representan un estadímetro de Porro, cuya distancia interfilar varía con la inclinación del anteojo, ya que a cada posición de éste aparece una parte distinta del diagrama en el borde del prisma que se ve en el campo del anteojo.

Vamos a explicar la teoría y construcción del diagrama. Sea O (fig. 223) el eje de giro del anteojo, sobre el cual cae también el punto analítico del mismo, y sean N , E y H respectivamente las lecturas hechas con el hilo-cero, con la curva de distancias, y con la curva de alturas (véase la figura 221); es decir, que $NE = l_1$ es la parte de mira en función de la cual hay que calcular la distancia horizontal D . Llamando k_1 a la constante diastimométrica se tendrá:

$$D = k_1 l_1$$

Pero en la figura 223 se ve que

$$s = \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon_1} l_1$$

y como $D = s \cos \alpha$, sustituyendo aquí este valor de s , la distancia horizontal será:

$$D = \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_1) \cos \alpha}{\sin \varepsilon_1} l_1$$

o bien

$$D = l_1 (\cos \alpha \cot \varepsilon_1 - \sin \alpha) \cos \alpha,$$

y comparando esta expresión de D con la primera, resulta para k_1 el valor siguiente:

$$k_1 = (\cos \alpha \cot \varepsilon_1 - \sin \alpha) \cos \alpha,$$

de donde:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1)$$

Llamemos ahora f a la distancia focal equivalente del objetivo con la lente de enfoque E (fig. 222) enfocada al infinito, y P_1 a la distancia entre la curva de distancias y el círculo-base G (fig. 221), medida en la dirección de un radio de este último; según la fórmula (6) de la página 226 se tendrá:

$$p_1 = 2f \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_1}{2} \quad (2)$$

Por medio de las ecuaciones (1) y (2) puede calcularse el valor de P_1 correspondiente a cada inclinación α , conocida que sea f , y ya puede trazarse la curva de distancias.

Para el cálculo de la diferencia de nivel, se toma la parte de mira $NH = l_2$, que multiplicada por una cierta constante k_2 debe dar el desnivel h , es decir, que se ha de tener

$$h = k_2 l_2.$$

Pero en la figura se ve que

$$h = s \sin \alpha = \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_2) \sin \alpha}{\sin \varepsilon_2} l_2$$

luego k_2 será:

$$k_2 = \frac{\cos(\alpha + \varepsilon_2) \sin \alpha}{\sin \varepsilon_2}$$

y de aquí se deduce:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_2 + \sin^2 \alpha} \quad \text{y} \quad p_2 = 2f \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_2}{2} \quad (3)$$

Para el caso de visuales dirigidas hacia abajo, se obtienen del mismo modo fórmulas análogas, correspondientes a la figura 224, en la cual haremos también $NE = l_1$ y $NH = l_2$, y en la que se ve que los valores de s en función de l_1 y de l_2 son los que siguen:

$$s = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon_1)}{\sin \varepsilon_1} l_1 \quad \text{y} \quad s = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon_2)}{\sin \varepsilon_2} l_2$$

y por idéntico razonamiento al anterior se llega a las fórmulas finales:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 - \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_2 - \sin^2 \alpha} \quad (4)$$

$$p_1 = 2f \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad p_2 = 2f \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_2}{2} \quad (5)$$

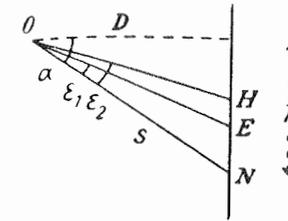


Fig. 224

En la figura 225 se ve en escala natural el diagrama que por método fotográfico se reproduce en la lámina de cristal D del taquímetro Hammer-Fennel. Los radios del círculo-base GG (30 mm) dibujados de trazos no figuran en el diagrama, y sólo se emplean para la construcción de este último; el punto h es el centro del círculo GG , que cae exactamente sobre el eje de giro del anteojo. Cuando la visual es horizontal, la línea OE_0 coincide con la arista del prisma, de modo que la parte de mira l_2 resulta igual a cero. Si el anteojo tiene una inclinación cualquiera $+\alpha$ ó $-\alpha$, la arista del prisma corta al diagrama en la línea $A''B''$ o en la AB , por verse la imagen de éste invertida en el anteojo.

Verificación y correcciones del taquímetro Hammer-Fennel. La indudable eficacia y exacto funcionamiento del dispositivo reductor de este taquímetro, suponen la perfecta perpendicularidad entre el eje horizontal de giro del anteojo y el eje vertical del aparato, y el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1. Las dos constantes k_1 y k_2 son respectivamente iguales a 100 y a 20.
2. El hilo horizontal está sobre el plano-imagen del anteojo.
3. El eje de colimación es perpendicular al eje de giro del anteojo.
4. La arista del prisma, en el plano imagen, ha de ser perpendicular (cruzada) al eje de giro del anteojo.
5. El eje del nivel es paralelo al eje de colimación.
6. El centro del círculo-base cae sobre el eje de giro del anteojo y la imagen de este círculo es tangente al hilo horizontal en todas las posiciones del anteojo.
7. El punto de intersección de las dos curvas de alturas cae sobre la arista del prisma cuando la visual es horizontal.

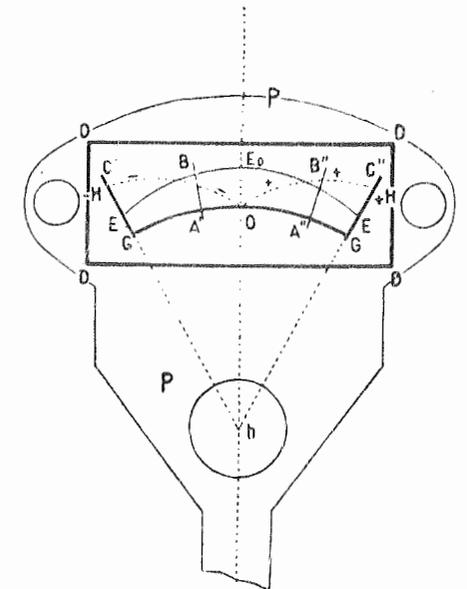


Fig. 225

La verificación y ajuste del taquímetro se hace del modo siguiente, para cada condición anterior:

1. Basta con ver que una de las constantes tiene el valor debido, pues por la construcción misma del diagrama, la segunda constante ha de tener forzosamente el valor que le corresponde. Cuando la constante observada no tiene el valor correcto que debe tener, basta con correr un poco la lente E (fig. 222) en la dirección del anteojo, para lo cual se aflojan tres tornillos de sujeción alojados en el soporte de la lente, uno de los cuales se ve en la parte superior del mismo en la figura 219.

2. Al correr la lente anterior, se produce también un corrimiento del plano-imagen del anteojo; para llevar nuevamente el hilo horizontal al plano-imagen, se aflojan los tres tornillos de sujeción del ocular y ya puede correrse éste como convenga. El tubo portaocular en vez de llevar agujero para la punta de los tornillos, lleva hendiduras longitudinales. En la figura 219 se ven dos de estos tornillos.

3. El centro de la cruz filar está dado por la intersección del hilo horizontal con la arista del prisma. El eje de colimación se comprueba como se dijo en el tomo I (§ 76), y tanto para invertir el anteojo en sus muñoneras como para darle la vuelta de campana, se quita la tapa de los cojinetes del eje de giro, aflojando los tornillos de sujeción de la misma; pero no hay que procurar eliminar o compensar el error de colimación sino ajustar desde luego el prisma P_2 (fig. 222) y el objetivo de tal modo que no se produzca dicho error.

4. Se descubre fácilmente cualquier inclinación de la arista del prisma haciendo bascular un poco el anteojo después de nivelar perfectamente el eje vertical del aparato y sin dejar de visar un punto fijo. Para hacer desaparecer este error, en caso de existir, se gira un poco la última parte del tubo portaocular, a la cual va fijado el prisma P_2 ; para ello lleva esta pieza unos tornillos horizontales de corrección en un saliente de la misma, que se ve en la figura 219.

5. La verificación y corrección del nivel del anteojo se hace del modo ya indicado en el párrafo 8 (pág. 23, fig. 23).

6. El diagrama va fijo en su soporte y al moverse un poco en sentido vertical la lente E (fig. 222) por medio de los tornillos i_1 e i_2 (fig. 219), se mueve también verticalmente la imagen del diagrama. Una vez colocado el centro del círculo base sobre el eje de giro del anteojo, se ajustan de tal modo los tornillos i_1 e i_2 , que dicho círculo sea tangente al hilo horizontal.

7. El portadiagrama puede inmovilizarse apretando el tornillo F_5 , provisto de muelle antagonista, sobre la palanca F_3 (fig. 219). Estando calado el nivel del anteojo se mueve el tornillo F_5 de tal modo que el punto de intersección de las dos curvas de alturas caiga sobre la arista del prisma. De esta corrección depende la precisión con que se midan los desniveles, por lo cual debe considerarse como la más importante y repetirse de cuando en cuando.

Las ecuaciones fundamentales (1) y (3) ó (4) del taquímetro Hammer-Fennel (pág. 278); pueden también aplicarse a un teodolito con círculo cenital sin estadímetro, formando una tabla que dé para cada ángulo vertical α (elevación o depresión) los ángulos $\alpha + \varepsilon_1$ y $\alpha + \varepsilon_2$. El método operatorio consiste en hacer sobre la mira la lectura N correspondiente al ángulo de inclinación α (figs. 223 y 224), ver después en la tabla los valores $\alpha + \varepsilon_1$ y $\alpha + \varepsilon_2$, tomar sucesivamente estos ángulos sobre el círculo cenital y hacer sobre la mira las lecturas E y N . Este procedimiento coincide, en esencia, con el sistema seguido en el taquímetro Tichy Starke, descrito en la página 269.

Taquímetro teodolito autorreductor. La figura 226 representa un teodolito construido por Breithaupt que sirve para triangulaciones y poligonales, y que también puede emplearse como taquímetro, estando provisto además del dispositivo reductor de Hammer-Fennel. El círculo acimutal de este aparato tiene 13 cm de diámetro y el cenital 11 cm, provistos de nonios que aprecian 30". El círculo horizontal lleva además un índice sencillo para lecturas rápidas taquimétricas. El anteojo, con lente móvil de enfoque, tiene 23,5 cm de longitud, una abertura de objetivo de 34 mm y un aumento de 24 diámetros. Fijado al anteojo va un nivel reversible de 30" de apreciación; el círculo cenital lleva otro nivel, y además en el círculo acimutal van dos niveles cruzados y uno esférico. El ocular es de Porro, con constante diastimométrica igual a 100. El retículo está constituido por una lámina de vidrio con tres rayas horizontales grabadas y una vertical que pasa por su centro; las tres rayas horizontales se ven en la mitad de la derecha del campo visual del anteojo (fig. 227), y en la mitad de la izquierda aparece la imagen del diagrama autorreductor. El diagrama va en la alidada del círculo cenital, y se ajusta para cada lectura por medio del nivel de este círculo, uniendo el tornillo de llamada de este último. En la figura 227 se ve el campo visual de anteojo, con las imágenes del diagrama y del retículo, correspondientes a la posición horizontal del eje de colimación.

Para utilizar el aparato como taquímetro ordinario, se determina el eje de colimación por la intersección del hilo vertical con el horizontal del centro, y el nivel del círculo cenital se ajusta de modo que para la visual horizontal, sea de 90° la lectura sobre este último (véase párrafo 25, página 109).

Para el empleo del taquímetro como autorreductor, se determina el eje de colimación por la intersección de la raya horizontal superior con la arista del prisma; por este mismo punto pasa también el círculo-base del diagrama. Como se ve, la distancia angular entre los dos ejes de colimación es de 17'; por lo cual, este último será horizontal cuando, estando calado el nivel del círculo vertical, la distancia cenital sea 89° 43'. En esta posición, el punto de intersección de las dos curvas de alturas debe caer sobre la arista del prisma.

El eje de colimación cuando el taquímetro se usa como autorreductor, no es perpendicular al eje de giro del anteojo, pero el pequeño error de colimación correspondiente no tiene trascendencia alguna en los trabajos taquimétricos.

También la casa Fennel ha construido un taquímetro-teodolito con el dispositivo reductor de Hammer-Fennel, que tiene la forma de un teodolito repetidor con círculo cenital y con retículo estadimétrico.

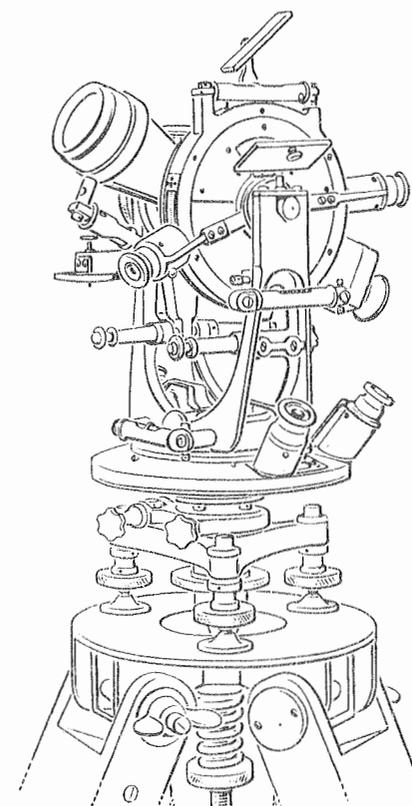


Fig. 226
Taquímetro autorreductor de Breithaupt

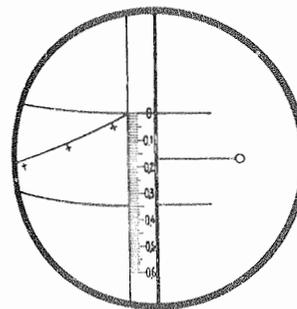


Fig. 227

Datos históricos. En la historia del taquímetro autorreductor descuellan en primer lugar los *estudios sobre Taquimetría* de Goulier (París, 1892), y en la revista italiana «Rivista di topografia e catasto», tomos VIII-XII, 1895-1900, figura una amplia reseña de las construcciones de este género.

Estos aparatos italianos fueron la causa de una serie de ensayos e investigaciones llevados a cabo por Hammer, y publicados en la revista alemana «Zeitschr. f. Instr.», 1898, con el título de *Proyecto de un taquímetro-teodolito para lectura directa de distancias horizontales y diferencias de nivel*. En el plano-imagen del anteojo iba una lámina de cristal sobre la cual estaban grabadas curvas para las distancias y para los desniveles, construídas según las expresiones $\cos^2 \alpha$ y $\sin \alpha \cos \alpha$; al inclinar el anteojo se producía automáticamente una desviación lateral de la lámina de cristal, por medio de dos correderas convenientemente dispuestas. El modelo construído por Tesdorpf, de Stuttgart, en el año 1896, no dió resultados satisfactorios, por lo cual se abandonó este sistema.

En el año 1899 propuso Fennel sustituir la lámina de cristal colocada en el plano-imagen del anteojo, por la imagen de esta lámina situada fuera de dicho plano; esta idea fué realizada por Fennel, en unión con Hammer, y en septiembre de 1900 construyeron el primer aparato de esta clase, con el cual se hicieron experimentos que demostraron su eficacia, y que fué descrito con todo detalle por Hammer en su Memoria titulada *El teodolito-taquímetro de Hammer-Fennel y el taquímetro-plancheta*, publicada en Stuttgart en 1901.

De entre los muchos trabajos publicados sobre el taquímetro Hammer-Fennel, considerado hasta el día como la mejor solución del problema de la reducción automática, mencionaremos algunos de los más interesantes:

Hammer: *Nuevo teodolito-taquímetro para la lectura directa sobre mira de la distancia horizontal y de la diferencia de nivel* («Zeitschr. f. Instr.», 1900 y «Zeitschr. f. Verm.», 1901).

Hammer: *Precisión de las mediciones efectuadas con un taquímetro de Hammer-Fennel* («Zeitschr. f. Verm.», 1903).

En nuestros *Elementos de Geodesia* (Leipzig, 1907) puede verse la teoría y correcciones del taquímetro de Hammer-Fennel.

En el año 1927 apareció este aparato con una nueva disposición, tal como lo hemos descrito anteriormente. Se encuentra una descripción muy detallada del mismo en el trabajo de G. Schewior, publicado en Kassel en 1930 y titulado *El taquímetro Hammer-Fennel y su empleo como teodolito taquimétrico, brújula taquimétrica, topómetro y grafómetro taquimétrico*.

Merece especial mención el taquímetro autorreductor inglés de Jeffcott, construído en los talleres de Cooke, Troughton & Simms. En el plano-imagen del anteojo, en vez de los hilos para la lectura de la mira, van tres índices en forma de puntas de alfiler; una de las puntas es fija y su punto extremo determina el eje de colimación; otra punta se acerca o se aleja de la fija al inclinar el anteojo en uno u otro sentido, de tal modo que multiplicando por 100 la parte de mira comprendida entre ambas puntas se tiene la distancia horizontal; la tercera punta también se mueve al inclinar el anteojo, y la parte de mira comprendida entre ella y la punta fija, multiplicada por 10, da la diferencia de nivel.

El movimiento de las dos puntas es producido por dos discos unidos al eje de giro del anteojo, que no toman parte en el movimiento de éste y que llevan apoyados entre sus bordes, mediante unos muelles, los extremos de dos palancas, que en el otro extremo llevan las puntas de enfilación. Estos discos están dispuestos de tal modo que para cualquier

inclinación del anteojo, las puntas móviles quedan a la distancia debida de la punta fija.

En las Memorias del Instituto de Ingenieros civiles de Irlanda (vol. XLI, 1915) se encuentra descrito con todo detalle el taquímetro autorreductor de Jeffcott. También las partes principales de este taquímetro están estudiadas en las Instrucciones de Cooke, Troughton & Simms sobre el uso y correcciones del taquímetro autorreductor de Jeffcott.

Por último, merecen citarse los siguientes trabajos publicados sobre taquímetros autorreductores:

Zwicky: *Un nuevo anteojo diastimométrico para la lectura directa de distancias horizontales, y sus aplicaciones* («Geometerzeitung», 1912, y «Bauzeitung», 1914, Suiza).

Strohschneider: *Taquímetro de curvas* («Zeitschr. f. Instr.», 1930).

Hugershoff: *Un nuevo taquímetro autorreductor (taquímetro de tres imágenes)* («Zeitschr. f. Instr.», 1930).

§ 69. Aguja y declinación magnéticas

Si se dispone una aguja magnética, es decir, una varilla muy fina de acero imanado, de modo que pueda moverse libremente sobre su punto medio, el par magnético terrestre la coloca en una cierta dirección que se llama meridiano magnético del lugar de que se trate. La dirección del meridiano magnético no coincide con la verdadera orientación Norte-Sur, es decir, con el meridiano astronómico; el ángulo que forma con este último la aguja magnética se llama *declinación* de la misma, que se dice que es *oriental* (+) u *occidental* (—), según que el extremo norte de la aguja caiga al este o al oeste de la dirección Norte-Sur.

La declinación magnética se puede determinar con un teodolito provisto de brújula (como el representado en la figura 190), fijando previamente la dirección Norte-Sur, por procedimientos astronómicos o trigonométricos, habida cuenta de la convergencia de los meridianos.

Para la determinación exacta de la declinación se emplean aparatos especiales, ordinariamente provistos de dispositivo registrador, que se montan en estaciones preparadas para ello en las estaciones u observatorios meteorológicos en que se hacen estudios de magnetismo terrestre.

La declinación magnética no es constante en cada punto de la Tierra, sino que experimenta variaciones periódicas y continuas en el transcurso del tiempo. En las primeras se distingue un período diario, dependiente de la rotación terrestre, y otro anual, que obedece al movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La variación continua del valor medio anual se llama variación secular de la declinación.

Ni las variaciones periódicas ni la secular son uniformes, sino que continuamente presentan oscilaciones, como se ve, por ejemplo, en la tabla de la página siguiente, que da la variación secular de la declinación magnética en Potsdam, entre 1891,5 y 1930,5.

La declinación magnética en Alemania va disminuyendo cada año en 11'. En España va también disminuyendo en unos 9', en promedio, de un año a otro.

No basta con las observaciones hechas en los pocos Observatorios magnéticos existentes para estudiar el curso de la declinación con seguridad y precisión. En España se ocupan de estos estudios el Instituto Geográfico y Catastral, así como el Observatorio de Marina de San Fernando y el Observatorio del Ebro, en Tortosa; pero sería preciso en todos los países intensificar los trabajos magnéticos de campo para determinar en un gran

Declinación magnética occidental media en Potsdam

Año	Declin.	Var.	Año	Declin.	Var.	Año	Declin.	Var.
1891,5	10° 42,2'	6,0'	1904,5	9° 39,4'	4,9'	1917,5	7° 58,2'	9,1'
1892,5	10 36,2	4,9	1905,5	9 34,5	1,9	1918,5	7 49,1	9,6
1893,5	10 31,3	5,9	1906,5	9 29,6	5,5	1919,5	7 39,5	10,3
1894,5	10 25,4	5,5	1907,5	9 24,1	6,1	1920,5	7 29,2	10,5
1895,5	10 19,9	5,6	1908,5	9 18,0	7,4	1921,5	7 18,7	11,3
1896,5	10 14,3	4,6	1909,5	9 10,6	7,7	1922,5	7 7,4	10,7
1897,5	10 9,7	4,7	1910,5	9 2,9	8,6	1923,5	6 56,7	11,9
1898,5	10 5,0	4,3	1911,5	8 54,3	8,6	1924,5	6 44,8	11,8
1899,5	10 0,7	4,4	1912,5	8 43,7	9,5	1925,5	6 33,0	12,0
1900,5	9 56,3	4,2	1913,5	8 36,2	9,8	1926,5	6 21,0	11,9
1901,5	9 52,1	4,1	1914,5	8 26,4	9,5	1927,5	6 9,1	10,8
1902,5	9 48,0	4,2	1915,5	8 16,9	9,5	1928,5	5 58,3	10,5
1903,5	9 43,8	4,4	1916,5	8 7,4	9,2	1929,5	5 47,8	10,5
1904,5	9 39,4		1917,5	7 58,2		1930,5	5 37,3	

número de puntos los elementos magnéticos y compararlos con los obtenidos en los Observatorios en las mismas épocas.

Los resultados de estas observaciones se representan mediante mapas magnéticos, de los cuales sólo nos interesan aquí los de líneas isógonas, es decir, los de las líneas que unen puntos de igual declinación.

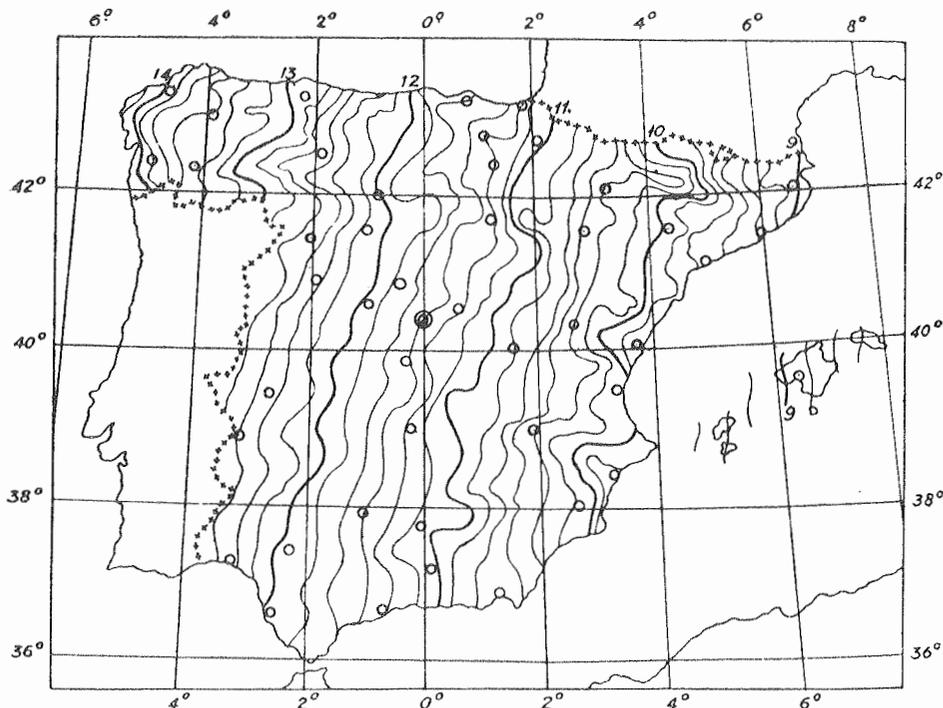


Fig. 228. — Mapa de la declinación magnética en España, reducido a la fecha 1934,0

En la figura 228 se ve el mapa de líneas isógonas en España correspondiente a 1934; como se ve en esta figura, la declinación en toda España es occidental y su valor oscilaba, en dicha época, entre 9° y 14°.

La figura 229 representa el mapa de isógonas de toda la Tierra en 1922, tomado del Tratado de Física experimental de Angenheister y Bartels (Leipzig, 1928).

También interesa al topógrafo la variación diaria de la declinación, ya que en los levantamientos se supone constante durante todo el tiempo de su duración; el valor máximo

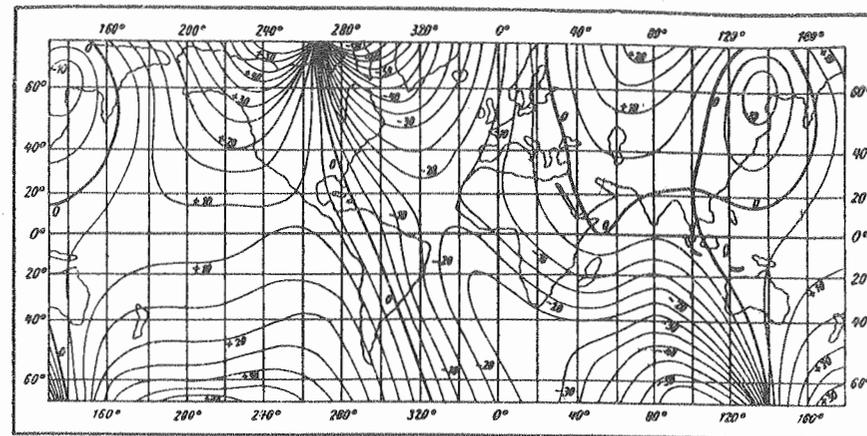


Fig. 229. — Mapa de la declinación magnética sobre el Globo, en 1922

de la declinación en el transcurso del día, tiene lugar hacia el mediodía, a la 1 de la tarde, y el valor mínimo hacia las 8 de la mañana. La amplitud de la oscilación varía según la época del año. En la tabla siguiente se ven las oscilaciones medias de la declinación en las cuatro estaciones del año, según los datos tomados en Munich:

Hora	Invierno	Primavera y otoño	Verano	Hora	Invierno	Primavera y otoño	Verano
0 h medianoche	-1,0'	-1,0'	-1,0'	12 h mediodía	+2,0'	+3,5'	+4,0'
2	-0,5	-1,0	-1,0	2	+2,0	+4,0	+5,0
4	0	-1,0	-1,5	4	+0,5	+2,0	+2,5
6 mañana	0	-1,0	-3,0	6 tarde	0	0	0
8	-0,5	-2,5	-3,5	8	-1,0	-0,5	0
10	+0,5	-1,0	0	10	-1,5	-1,0	-0,5
12 mediodía	+2,0	+3,5	+4,0	12 medianoche	-1,0	-1,0	-1,0

El signo + indica un aumento de la declinación occidental y el signo - una disminución de la misma.

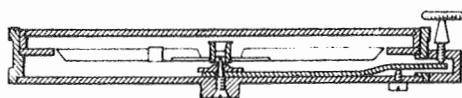
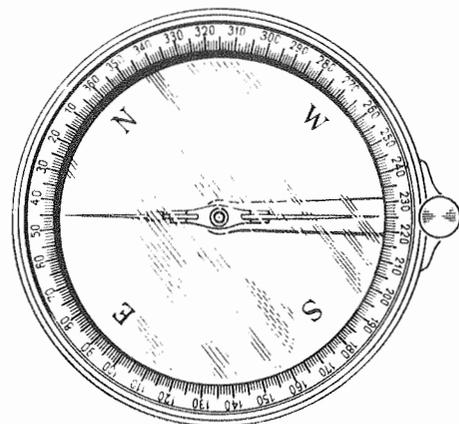
La máxima oscilación diaria fué, en el verano, de 8,5', y en el invierno, de 3,5'. Además de estas variaciones regulares, se verifican otras accidentales que pasan, a veces, de 1°. En general, las oscilaciones de la declinación no tienen importancia alguna, comparadas con los errores de medición propios de las operaciones taquimétricas. En el párrafo 71 volveremos a tratar de la declinación y de los errores en las observaciones con brújula.

Sobre esta materia son dignas de mención las obras de A. Nippoldt sobre magnetismo terrestre, publicadas la primera en la «Sammlung Göschel», tomo n.º 175 (Berlín, 1921), y la segunda en el «Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik», tomo 5, 11.ª ed. (Brunswiga, 1928).

En el libro de Goulier titulado «Estudios teóricos y prácticos sobre los levantamientos topométricos, etc.» (París, 1892), se encuentran todos los detalles referentes a las mediciones con brújula.

§ 70. Brújulas

Las figuras 230 y 231 representan, vista por encima la primera y en sección vertical la segunda, una brújula simple circular, a escala $\frac{1}{2}$ de la natural, igual que la que se ve en la figura 190 sobre el taquímetro de Hildebrand. La caja cilíndrica tiene de 10 a 15 cm de diámetro; en el fondo va roscado un tornillo



Figs. 230 y 231. — Brújula vista por encima y en sección vertical (escala 1:2)

terminado en punta muy fina, sobre la cual va suspendida la aguja magnética mediante un pequeño casquete de ágata montado en su punto medio. La caja lleva interiormente un anillo plano con una escala en medios grados cuya numeración (al contrario de lo que sucede en los teodolitos) no va de izquierda a derecha (normal), sino de derecha a izquierda (anormal), para que al girar el instrumento a la derecha, la aguja vaya dando lecturas crecientes.

La aguja puede estar suspendida de cara o de canto; esta última forma de suspensión, que es la representada en la figura 230, puede considerarse como la mejor de las dos.

El magnetismo terrestre produce también en la aguja imanada una desviación vertical que se llama *inclinación magnética*, que varía según los lugares; con una ligera corredera, como contrapeso, se mantiene horizontal la

aguja magnética, no habiendo necesidad de cambiar aquélla de sitio sobre la aguja en grandes extensiones de terreno, como Alemania entera, Francia o España.

Para inmovilizar la aguja magnética y que no grave sobre la punta del tornillo, lleva la caja un dispositivo de escape, consistente en una palanca (figs. 230 y 231) que al apretar por fuera un tornillo, eleva con su extremo de dentro la aguja apretando su casquillo central contra la tapa de cristal de la caja.

En un aparato con brújula no puede haber pieza alguna de hierro; los muelles, en vez de acero, deben ser de latón forjado o de plata alemana (maillechort); tampoco el trípode ha de tener piezas de hierro, a no ser las puntas o zunchos para fijar sus patas en el suelo, y que por estar aproximadamente a 1,5 m por debajo del instrumento y simétricamente dispuestas respecto a su centro, no producen perturbación alguna apreciable.

La primera verificación de una brújula consiste en hallar la sensibilidad de su aguja; para ello, estando la brújula fija en un soporte y la aguja en reposo, se acerca un hierro, y se ve si después de oscilar se para siempre en la misma posición (con $0,1^\circ$ de aproximación), una vez retirado el hierro. De no ser así, o la aguja está poco imanada, o hay rozamiento en su punto de suspensión, y debe corregirse el error según la causa productora del mismo.

Si la brújula va montada en un teodolito, como se tiene en casi todos los taquímetros (por ejemplo, en el de Hildebrand, figura 190), se hace esta comprobación con gran facilidad, pues basta, con ayuda del limbo acimutal del teodolito, hacer que su aguja dé la vuelta completa sobre su limbo, de 10° en 10° , y ver si siempre describe el mismo ángulo.

A continuación damos un ejemplo de esta verificación, cuyo fundamento estriba en el hecho experimental de que estando el aparato bien horizontal, si se gira con cuidado la alidada con la brújula, permanece inmóvil la aguja y puede hacerse la lectura en cuanto se termina el giro; pero el rozamiento de la aguja sobre su pivote da lugar a un error constante en la posición de aquélla, como se descubre en seguida haciendo girar la brújula en sentido contrario al primero. Los números de la columna encabezada con la palabra *Limbo* en la tabla siguiente, indican que la alidada del teodolito se fué colocando sucesivamente en las divisiones $0^\circ, 20^\circ, 40^\circ \dots$ del círculo horizontal; las lecturas correspondientes en la brújula figuran en la columna *Aguja, I*. Después se hizo recorrer a la alidada la misma serie de divisiones pero partiendo de la 360° , en sentido inverso a la primera, y las correspondientes lecturas de la brújula figuran en la columna *Aguja, II*. Las lecturas en la brújula se hicieron con los dos polos, mas para mayor claridad se consigna sólo la media de cada par:

Limbo	Aguja, I	Aguja, II	II - I	Limbo	Aguja, I	Aguja, II	II - I
0°	14,3°	15,2°	+ 0,9°	180°	193,7°	194,1°	+ 0,4°
20	34,0	35,0	+ 1,0	200	213,8	214,2	+ 0,4
40	53,8	54,8	+ 1,0	220	233,9	234,5	+ 0,6
60	74,4	75,2	+ 0,8	240	253,9	254,9	+ 1,0
80	94,1	94,3	+ 0,2	260	273,8	274,5	+ 0,7
100	113,9	114,2	+ 0,3	280	294,1	294,2	+ 0,1
120	133,3	134,1	+ 0,8	300	314,3	314,5	+ 0,2
140	153,9	153,9	+ 0,3	320	333,2	333,7	+ 0,5
160	174,4	174,7	+ 0,3	340	353,8	354,1	+ 0,3
				Media	$3,91^\circ$	$4,45^\circ$	+ 0,54°

Como se ve, resulta un valor considerable, $0,54^\circ$ en promedio, para la diferencia entre las lecturas en uno y otro sentido, lo cual pone de manifiesto la existencia de un error de inercia de $0,27^\circ$, siendo así que el error medio accidental de lectura debe ser a lo sumo de $\pm 0,1^\circ$. Por consiguiente, tratándose de observaciones de importancia, hay que hacer las lecturas dos veces, correspondientes a sentidos contrarios en la rotación de la alidada.

Hay un procedimiento que permite librar casi por completo a la aguja del error constante de inercia, y que consiste en la observación de las oscilaciones de aquélla. Si la aguja, al oscilar, va tomando sucesivamente las posiciones extremas $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \dots$, se calcula la posición de reposo x o equilibrio por las fórmulas siguientes:

$$x = \frac{a_1 + 2b_1 + a_2}{4}, \quad \text{o bien} \quad x = \frac{b_1 + 2a_2 + b_2}{4}, \quad \text{etc.}$$

es decir, que la posición de reposo x es igual a la media de tres desviaciones consecutivas, pero multiplicando por 2 la segunda, como si fueran dos iguales.

En las brújulas empleadas en los levantamientos taquimétricos, cuyas agujas oscilan muy poco, resulta impropio el método anterior, por lento y pesado, por lo cual se hacen las lecturas con la aguja parada, pero procediendo con todo cuidado a causa del error constante que estamos considerando.

Al empezar a trabajar con brújula, aun tratándose de las portátiles de bolsillo, que vamos a describir a continuación, debe observarse la regla práctica siguiente: se orienta la caja de la brújula, con la aguja sujeta, de modo que ésta quede aproximadamente sobre el meridiano magnético, y se afloja el tornillo de sujeción para que aquélla pueda oscilar

libremente; de esta manera, al cabo de muy pocas y pequeñas oscilaciones, se para la aguja y puede hacerse la lectura. Siempre que haya que trasladar la brújula de un punto a otro, se debe sujetar la aguja con la palanca correspondiente.

La excentricidad de la aguja se elimina leyendo con sus dos extremos, como se hace con el teodolito (tomo I, § 80, página 332).

Brújula de bolsillo. La forma más sencilla de brújula simple es la llamada de bolsillo, que se ve en la figura 232. Esta clase de brújulas se encuentra en el comercio, en todas

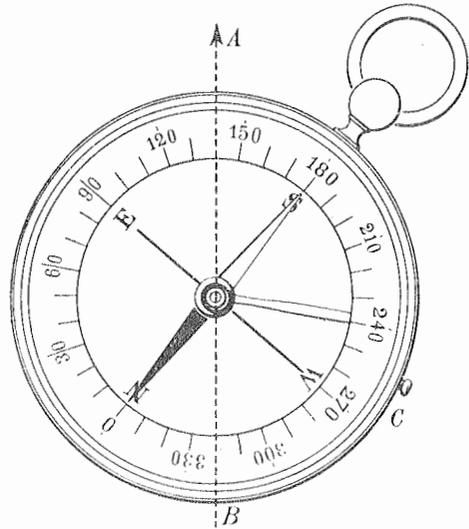


Fig. 232. — Brújula de bolsillo

esta marque la dirección 0°-180°, y se mira a simple vista por encima del limbo, hacia el punto cuyo rumbo se quiere hallar; por ejemplo, en la figura 232, la visual *BA* tiene por rumbo 140°. Este método parece a primera vista demasiado burdo, pero haciendo algunos experimentos es fácil convencerse de que aun procediendo con rapidez y en circunstancias poco favorables, se obtienen los rumbos con pocos grados de error, no pasando éste de los 5° a 10°.

Las brújulas de bolsillo llevan, con frecuencia, un índice movable que se puede colocar sobre la división correspondiente a la declinación del lugar en que se opere; para tomar rumbos, se gira la brújula hasta que la aguja coincida con el índice, y de este modo se obtiene directamente el acimut de la visual, es decir, el ángulo que ésta forma con la verdadera dirección Norte-Sur o meridiano astronómico.

Brújula con alidada de pínulas. La figura 233 representa una brújula con alidada para dirigir visuales; la caja circular de esta brújula tiene 12 cm de diámetro, y se emplea ordinariamente montada en un bastón o en un trípode plegable.

La alidada de pínulas *AB* determina las visuales *ab*; en *C* se ve el dispositivo para inmovilizar la aguja; las lecturas se hacen sobre el limbo dividido en grados, y se aprecia 1°.

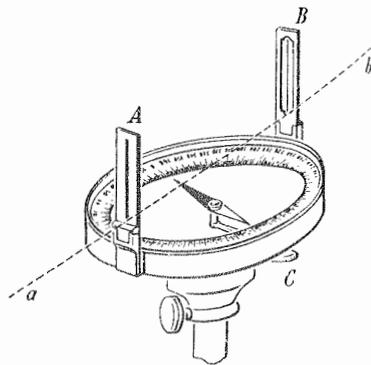


Fig. 233. — Brújula de pínulas

En los dos primeros tercios del siglo XIX desempeñaron un papel muy importante en los levantamientos topográficos las brújulas de gran tamaño, con alidada de pínulas, montadas sobre una base nivelante en un trípode, como los teodolitos.

En la figura 234 se ve, a escala 1/2, una forma especial de brújula con alidada de pínulas, construida por Schmalcalder en el año 1812; la aguja lleva unido un anillo plano de cartulina o aluminio, dividido en grados, y cuyo cero coincide con el polo norte de la aguja. En la pínula ocular de la alidada va fijo un prisma con la cara hipotenusa espejular, y para que pueda verse el hilo de la otra pínula está rayada la capa de plata de esta cara, dejando al descubierto una banda muy estrecha de la misma. Al dirigir la visual al punto de que se trate se ve al mismo tiempo, con el prisma, la parte de limbo que está por debajo, y la raya de la cara espejular sirve como índice para la lectura, por lo cual se hace simultáneamente la puntería y la lectura. La cara inferior del prisma es convexa, es decir, obra como una lente, para que pueda verse el limbo con toda claridad.

La brújula de prisma de Schmalcalder tiene el inconveniente de que la aguja, sobrecargada con el limbo, resulta mucho más pesada que sin este aditamento, con la consiguiente pereza en sus oscilaciones y su aumento de inercia. Para levantamientos expeditivos resulta más práctica la brújula ordinaria de pínulas.

No hace mucho han empezado a usarse bastante las brújulas con líquido, en las cuales la caja va llena de un líquido, ordinariamente alcohol diluido. A causa de la gran dilatabilidad térmica del líquido, debe ser muy elástica la caja de la brújula, que a este fin se hace de láminas prensadas concéntricas. Para sostener el estilo sobre el cual va suspendida la aguja, lleva la caja interiormente un bastidor en forma de cruz; además, como con esta construcción resulta difícil aplicar un dispositivo de sujeción, la aguja va siempre suspendida, pero provista de un flotador, quedando así casi completamente descargado el estilo, y no siendo de temer deterioro alguno en la suspensión. El líquido amortigua tanto las oscilaciones, que la aguja queda parada sin oscilar apenas.

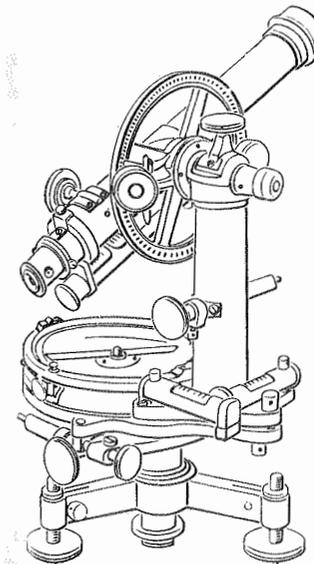


Fig. 235. — Brújula de anteojo

retículo estadimétrico y va provisto de círculo cenital, por lo cual se llama también a este aparato brújula taquimétrica o estadimétrica.

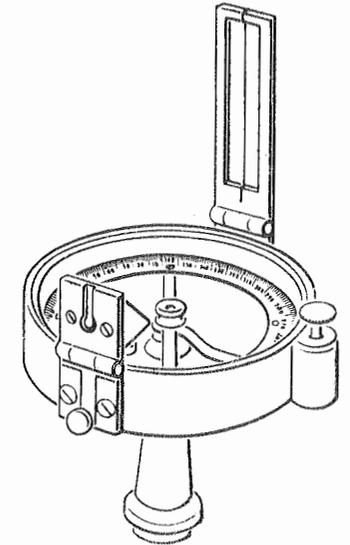


Fig. 234
Brújula de prisma, de Schmalcalder

Aunque los errores axiales no tienen en la brújula igual importancia que en los teodolitos, va provista aquélla de los tornillos de corrección necesarios; el error de colimación se corrige corriendo lateralmente el retículo, y el error de horizontalidad del eje de giro del anteojo se corrige inclinando un poco la columna entera, en el sentido conveniente, por medio de tornillos de llamada colocados en el pie de la misma.

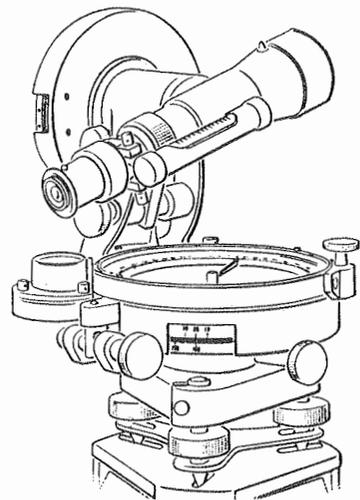


Fig. 236. — Brújula de anteojo

La figura 236 representa una brújula de anteojo, de G. Heyde, que, además del limbo propio de la brújula circular, tiene un círculo horizontal de 10 cm de diámetro con la graduación en el canto, y que por medio de un nonio puede leerse con 1' de apreciación. El círculo vertical, que también lleva la graduación en su borde, tiene 8 cm de diámetro y un nonio que aprecia 1'. El anteojo de este aparato es de lente interior de enfoque, tiene 163 mm de longitud y aumento de 16 diámetros.

Muchos teodolitos pueden emplearse como brújulas estadimétricas, disponiendo en ellos una brújula simple, como en el aparato de Hildebrand (fig. 190, página 257), que lleva una brújula sobre el eje de muñones del anteojo. En muchos casos, el taquímetro-teodolito lleva una

brújula que forma parte del mismo, y puede, por lo tanto, emplearse directamente como brújula estadimétrica; tal sucede en el taquímetro-teodolito de Breithaupt (figura 192, página 258) y en el taquímetro universal de Meissner (figura 209, página 267).

Citaremos, por último, las brújulas con anteojo de Fennel y de Breithaupt, provistas del dispositivo autorreductor de Hammer-Fennel, para la lectura directa de la distancia horizontal y de la diferencia de nivel.

Declinatoria. Cuando hay que utilizar un teodolito como brújula, no es preciso que la aguja magnética vaya en una caja cilíndrica con limbo completo de 0° a 360°, como en las figuras 190 y 196, sino que basta con un arco dividido de pocos grados, que juntamente con la aguja, va dentro de una caja estrecha, de forma rectangular, que recibe el nombre de *declinatoria*. En la figura 237 se ve una de estas declinatorias, que puede montarse sobre el eje de muñones del anteojo, como la brújula circular caballera que se ve en la figura 190. Para precisar bien la lectura de la aguja sobre los arcos graduados, lleva la caja un brazo giratorio en cuyos extremos van dos lentes, uno para la lectura de cada polo de la aguja.

La figura 238 representa una declinatoria perfeccionada, montada en un teodolito repetidor por debajo del limbo acimutal y rígidamente unida a este último: sobre el punto medio de la aguja se encuentra verticalmente situado un espejito, al cual está dirigido un pequeño anteojo lector. En el plano-imagen de este anteojo hay una lámina de cristal que lleva una escala horizontal en la parte superior y una raya-índice, para la lectura, en la inferior; al reflejarse la escala en el espejito, se forma su imagen en la parte inferior del campo del anteojo, es decir, que la raya-índice cae dentro de la escala: al oscilar la aguja, oscila también la imagen de la escala a uno y otro lado, y basta girar el círculo acimutal hasta que el cero de la escala coincida con la raya-índice.

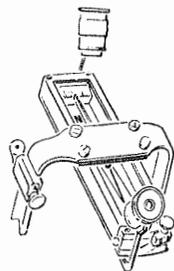


Fig. 237

En las figuras 193 y 213 se ven aparatos provistos de declinatorias de forma tubular. Si se trata de declinatoria montada sobre el eje de giro del anteojo (fig. 237), se gira la alidada del aparato hasta que la aguja coincida con la división central de los dos arcos graduados, y se hace la lectura sobre el círculo acimutal. De este modo se tiene ya orientado este círculo en una dirección fija de partida, para todas las lecturas que haya que hacer. Si el aparato es un teodolito repetidor, se puede colocar primero la alidada en el cero del limbo, y después girar éste hasta que la aguja señale la división central de su graduación.

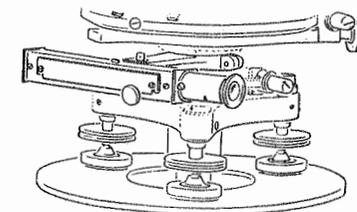


Fig. 238

Si la declinatoria va unida al limbo acimutal (figura 238), lo está generalmente de tal modo, que cuando la aguja está en su posición céntrica y la alidada en el cero del limbo, el plano de colimación es paralelo a la aguja.

§ 71. Itinerarios de brújula

Rumbos y acimutes. Conociendo la declinación magnética en un punto dado, se puede hallar el acimut de la visual a un punto cualquiera, con una sencilla brújula de bolsillo (fig. 232). Pero en los levantamientos topográficos se emplean, casi exclusivamente, las brújulas de anteojo o los teodolitos con declinatoria para la observación de acimutes. Para pasar de los rumbos leídos directamente en la brújula a los acimutes, hay que conocer el ángulo que forma el eje de colimación con la dirección Norte de la cuadrícula, cuando la aguja está en la posición 0°-180°. Este ángulo coincide con la declinación de la aguja, pero con mucha frecuencia se observa una pequeña desviación entre el plano de colimación y el diámetro 0°-180° de la brújula; por esta causa se llama a dicho ángulo *declinación o desviación del eje de colimación*.

Para determinar esta desviación o declinación se dirigen visuales desde un vértice de triangulación o de poligonal, a otros puntos, siendo conocidos los acimutes correspondientes a estas visuales. Por ejemplo, en la observación del vértice *A* (fig. 117, en la página 119), se hizo esta determinación para un taquímetro estacionado en el vértice *E*, y los resultados fueron consignados en el cuadro siguiente:

Punto visado	Brújula N	Brújula S	Promedio m	Acimut α	Declinación d = α - m
A	{ 134,2° 134,2 }	{ 313,9° 314,1 }	134,10°	121,21°	- 12,89°
D	{ 284,5 284,5 }	{ 104,3 104,6 }	284,48	271,43	- 13,05
I	{ 287,8 288,1 }	{ 107,9 108,2 }	288,00	275,10	- 12,90
II	{ 315,9 316,3 }	{ 135,9 136,3 }	316,10	303,12	- 12,98
C	{ 9,4 9,7 }	{ 189,5 189,4 }	9,50	356,78	- 12,72
					Media - 12,91°

Según este resultado, para transformar los rumbos leídos por esta brújula en acimutes, en la época en que se hizo esta determinación, había que restar la declinación 12,9° de dichos rumbos.

A causa de la variación que experimenta la declinación de la aguja según la hora del día, conviene declinar el aparato de que se trate (es decir, determinar la *declinación* de su eje de colimación) varias veces en el mismo día.

Itinerarios. Una vez indicada la manera de hallar el acimut con la brújula, veamos el modo de medir una poligonal con brújula y cinta métrica o cadena de agrimensor. La observación de una poligonal con brújula se diferencia de la misma observación hecha con teodolito, en que en esta última el acimut de cada tramo se mide dos veces, una en cada sentido, mientras que con la brújula sólo se miden una vez. Cuando se observa cada tramo una sola vez, puede procederse de dos modos, llamados por *estaciones alternas* y por *estaciones continuas*.

El método de *estaciones alternas* consiste en estacionar la brújula en un punto sí y en otro no del itinerario, observando desde cada estación el tramo anterior y el siguiente; de este modo queda observado cada tramo una sola vez, y los puntos en que no se ha estacionado son simples puntos de mira o de paso, no habiendo error alguno de centrado.

El sistema de *estaciones continuas* consiste en estacionar sucesivamente en todos los puntos, observando en cada uno de ellos el tramo que lo une con el siguiente, siempre en el mismo sentido. Con este método no es preciso señalar con estacas las estaciones.

Por la poca precisión en las lecturas de la brújula, es necesario estudiar los errores inherentes a estas observaciones, como haremos seguidamente.

Para la compensación de un itinerario de brújula entre dos puntos permanentes se procede del mismo modo que en la compensación aproximada de un itinerario de teodolito (tomo I, párrafo 110, página 471). La distribución de los errores de cierre e_y y e_x entre todas las diferencias de coordenadas en función de los lados de la poligonal, da lugar a una compensación muy exacta, por el método de los mínimos cuadrados.

Las observaciones de itinerarios con brújula y cadena, eran antes muy empleadas en los deslindes y demarcaciones; mediciones realizadas con teodolito han demostrado la exactitud de aquellos levantamientos que se tuvieron como aproximados.

Actualmente van sustituyéndose los itinerarios de brújula en los levantamientos catastrales parcelarios, por itinerarios de teodolito (taquimétricos), que con el mismo trabajo dan un rendimiento mucho mayor, aun en condiciones desfavorables. Resulta, por lo tanto, antieconómico el empleo de la brújula en esta clase de levantamientos; en cambio, en muchos casos, como, por ejemplo, en el interior de bosques, arbolado, etc., es insustituible la brújula, por las distancias de mira necesariamente cortas de que se componen los itinerarios correspondientes.

Itinerarios de taquímetro. Los itinerarios de brújula desempeñan un papel muy importante en los levantamientos con taquímetro en que las distancias se miden con estadía. Siguiendo el método de las estaciones alternas antes citado, sólo hay que colocar la mira en los puntos de paso. La determinación taquimétrica de los desniveles va arrastrando la diferencia de nivel de unos puntos a otros, y si se mide la altura del taquímetro en cada estación se tienen las alturas de todos los puntos, entre los cuales se reparte el error de cierre, en altura, entre los dos puntos extremos del itinerario.

Se consigue mayor exactitud tomando entre dos estaciones *dos* puntos de paso, pues así se tienen dos itinerarios de brújula con las dos estaciones como puntos comunes.

La declinación se determina como se dijo anteriormente (pág. 291), en los dos puntos extremos del itinerario.

El cálculo de las coordenadas se hace con cuatro cifras decimales en los logaritmos, o con máquina de calcular y tablas logarítmicas de cuatro cifras, para lo cual nos remitimos al tomo I, párrafo 109.

Errores en los itinerarios de brújula. El par magnético terrestre obra sobre la aguja imanada del mismo modo que la gravedad sobre una plomada o sobre el líquido de un nivel. La ley de los errores en un itinerario de brújula es, por lo tanto, la misma que en un itinerario de nivelación.

Supongamos, para formarnos idea de la importancia de estos errores, que se tiene un itinerario de brújula aproximadamente rectilíneo, de longitud L , con n puntos y $n-1$ tramos de igual longitud s . Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ los errores correspondientes a los distintos rumbos leídos en la brújula; en el último punto de cada tramo se tendrá una desviación transversal igual respectivamente a $s\varepsilon_1, s\varepsilon_2 \dots$. La desviación η del punto final de todo el itinerario será:

$$\eta = s\varepsilon_1 + s\varepsilon_2 + \dots + s\varepsilon_{n-1}, \quad (1)$$

y si designamos con el símbolo $\pm m$ el error medio de un rumbo expresado en grados, se tendrá para la desviación *media* total del último punto, según la ley de acumulación de los errores (tomo I, párrafo 5, página 11), la siguiente expresión:

$$q = \pm \sqrt{s^2 \frac{m^2}{\rho^2} + s^2 \frac{m^2}{\rho^2} + \dots} = \pm s \frac{m}{\rho} \sqrt{n-1}, \quad (2)$$

y como por hipótesis se tiene que

$$(n-1)s = L \quad (3)$$

resulta, sustituyendo en (2):

$$q = \pm \frac{m}{\rho} \sqrt{Ls} \quad (4)$$

o también:

$$q = \pm \frac{m}{\rho} \frac{L}{\sqrt{n-1}}. \quad (5)$$

Para la debida comparación, tomemos la fórmula que da el error de un itinerario de igual longitud L , observado con teodolito, que según la ecuación (8) del párrafo 117 del tomo I, será, llamando m' al error angular medio:

$$q' = \pm \frac{m'}{\rho} L \sqrt{\frac{n'(2n'-1)}{6(n'-1)}}. \quad (6)$$

Por consiguiente, la relación entre los dos errores totales será:

$$\frac{q}{q'} = \frac{m}{m'} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n'-1}} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n'(2n'-1)}}. \quad (7)$$

Pongamos ahora para la brújula $s = 50$ m, y para el teodolito $s' = 200$ m, de modo que $(n-1) = 4(n'-1)$: la relación anterior tomará el siguiente valor:

$$\frac{q}{q'} = \frac{m}{m'} \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{n'(2n'-1)}}. \quad (8)$$

Dando valores a L , tendremos los correspondientes de $\frac{q}{q'}$, deducidos de esta fórmula, y resumidos en el cuadro siguiente:

$L = 400$ m	800 m	1200 m	1600 m	2000 m	3000 m	} (9)
$\frac{q}{q'} = 0,32 \frac{m}{m'}$	$0,18 \frac{m}{m'}$	$0,13 \frac{m}{m'}$	$0,10 \frac{m}{m'}$	$0,08 \frac{m}{m'}$	$0,06 \frac{m}{m'}$	

El itinerario aquí supuesto sólo tiene un punto extremo permanente, fijado por coordenadas. Supongamos ahora que el itinerario de brújula empieza y termina en puntos fijados por coordenadas, y que los puntos intermedios, marcados con estacas, están a la misma distancia unos de otros. El error medio transversal en el punto medio del itinerario debe ser el mismo, una vez hecha la compensación, que si se midiera dos veces la mitad del itinerario comprendida entre el punto de partida y dicho punto medio. Si el itinerario completo tiene $n - 1$ tramos, y su longitud total es L , tendremos para el error en el punto medio, según la fórmula (5):

$$q = \pm \frac{m}{\rho} \frac{L}{\sqrt{2(n-1)}}$$

y para la media de dos mediciones:

$$q = \pm \frac{m}{\rho} \frac{L}{2\sqrt{n-1}} \quad (10)$$

Para el punto medio del itinerario observado con teodolito y con cierre en sus dos extremos, tenemos, según la fórmula (25) del párrafo 117 del tomo I (pág. 498):

$$q' = \pm \frac{m'}{\rho} L \sqrt{\frac{n'^4 + 2n'^2 - 3}{192n'(n'-1)^2}}$$

Supongamos nuevamente que $s = 50$ m y $s' = 200$ m, es decir, que $n - 1 = 4(n' - 1)$, y tendremos:

$$\frac{q}{q'} = \frac{m}{m'} \sqrt{\frac{12n'(n'-1)}{n'^4 + 2n'^2 - 3}} \quad (11)$$

Y para distintas longitudes L , se deducen de esta fórmula los siguientes valores de $\frac{q}{q'}$:

$$\left. \begin{array}{cccccccc} L = 400 \text{ m} & 800 \text{ m} & 1200 \text{ m} & 1600 \text{ m} & 2000 \text{ m} & 3000 \text{ m} & 4000 \text{ m} & 5000 \text{ m} \\ \frac{q}{q'} = 0,87 \frac{m}{m'} & 0,60 \frac{m}{m'} & 0,45 \frac{m}{m'} & 0,36 \frac{m}{m'} & 0,30 \frac{m}{m'} & 0,20 \frac{m}{m'} & 0,16 \frac{m}{m'} & 0,13 \frac{m}{m'} \end{array} \right\} \quad (12)$$

El valor de $\frac{m}{m'}$ en (9) y (12) depende de la precisión con que se hayan hecho las observaciones. En una brújula de limbo completo, puede suponerse el error medio m de un rumbo igual a $\pm 6'$. Si para la observación angular con teodolito se toma $m' = \pm 0,5'$, se tiene que $\frac{m}{m'} = 12$. Con este valor numérico sustituido en (9) se ve que en itinerarios de brújula con cierre en un solo extremo, y de más de 2000 m de longitud, la desviación media transversal del último punto es menor que en un itinerario de igual longitud observado con teodolito. En cambio, los valores numéricos (12) nos dicen que en los itinerarios con cierre en sus dos extremos, dentro de las longitudes más usadas en la práctica, son más exactos los levantamientos con teodolito que con brújula.

Resultados algo diferentes se obtienen con el empleo de una declinatoria, en la cual puede tomarse como error medio de un ángulo el valor $m = \pm 2'$. Para $m' = \pm 0,5'$ se tiene $\frac{m}{m'} = 4$, y en (9) se ve que en itinerarios con cierre o amarre en un solo extremo, en cuanto se pasa de unos 500 m aventaja la brújula al teodolito. En itinerarios con cierre en sus dos extremos, se ve en (12) que la brújula también aventaja al teodolito desde los 2500 m en adelante, a igualdad de longitud total recorrida.

El itinerario de brújula ofrece aún la gran ventaja de que operando con estaciones alternas no es preciso centrar con exactitud ni el aparato ni la mira, ya que el error de excentricidad (falta de centrado sobre el punto del terreno) no tiene trascendencia alguna en este caso, resultando tan despreciable como en un itinerario de teodolito con centrado obligado.

§ 72. Transportadores

Para representar en el papel los ángulos observados con la brújula (o con el teodolito), hay que utilizar un transportador, llamado también radiador, con el cual se pueden tomar aquellos ángulos con rapidez y exactitud.

Hay muchas clases de transportadores; en la figura 239 se ve uno de los más sencillos (Weitbrecht, «Zeitschr. f. Verm.» 1890); el centro C del semicírculo se fija, con una aguja, sobre el punto del papel representativo de la estación de que se trate, y una vez trazada la meridiana verdadera CX , es decir, el eje de las X , que se toma como origen de los ángulos, se hace coincidir con esta dirección la división del transportador correspondiente a cada ángulo; por ejemplo, si se tiene un ángulo de $68,0^\circ$, se gira el transportador hasta que la división 68° caiga sobre la meridiana X ; de este modo queda la recta CB orientada según el acimut 68° , y basta tomar sobre la escala CB la distancia que corresponde al punto visado para poder representar éste sobre el papel. Este transportador es de papel, cartulina, pasta, cuerno, cristal o metal.

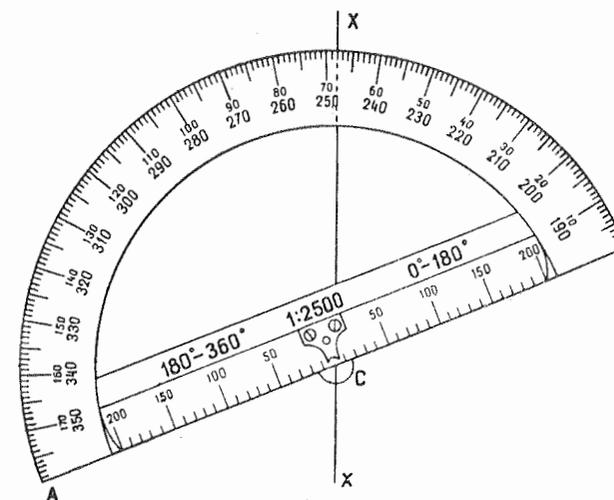


Fig. 239

Transportador sin centro, de Jordan. La operación más engorrosa y la que da lugar a más errores en el desarrollo con transportador, es, sin duda alguna, el centrado de éste sobre cada punto, siendo muchos los dispositivos especiales ideados con objeto de facilitar esta operación, como el de Teisinger («Zeitschr. f. Verm.», 1883).

En cambio, desde hace años empleamos nuestro transportador representado en la figura 240 (a escala $1/2$), que no hay que centrar sobre las estaciones en el dibujo, análogamente a lo que se hace con la escuadra ordinaria para el trazado de ángulos rectos, cuyo vértice no hay que colocar sobre el punto que ha de ser vértice del ángulo recto a trazar, sino que basta con trasladar aquella paralelamente a cada borde o cateto hasta que uno primero y otro después pasen por dicho punto. Con este transportador se opera con los bordes de EF y $E'F'$ y no con el centro C del círculo.

Presenta también este transportador la particularidad de que puede tomarse de una vez para todas la declinación correspondiente a cada levantamiento, por medio del arco BD , con centro en A , y el brazo LL' que puede girar alrededor de este mismo punto A . Por ejemplo, si el aparato con que se ha hecho el trabajo de campo tiene 12° de declinación occidental, se coloca el índice Z en los 12° de la graduación BD , y de este modo el radio 12° del transportador propiamente dicho queda perpendicular a LL' .

El manejo de este transportador es bien sencillo: se apoya el borde LL' sobre una regla en T , y si el rumbo leído es de 50° (o de 230°) se coloca el brazo CE sobre la divi-

sión $50^\circ - 230^\circ$, como se ve en la figura, y es indudable que toda recta trazada por los bordes de dentro o de fuera de EF y $E'F'$ tendrán el verdadero acimut correspondiente al rumbo 50° ó 230° , según se tome la dirección de C hacia E o al contrario.

Para llevar el borde EF o el $E'F'$ a un punto dado del papel, se corre el transportador a lo largo de la regla LL' , o se mueve ésta paralelamente a sí misma de abajo hacia arriba.

Los primeros modelos llevaban el limbo de metal; el representado en la figura 240 lo tiene de celuloide, como las escalas de las reglas de cálculo, y comprende 220° .

Tratándose de levantamientos expeditivos, como los hechos con brújula de bolsillo (proyecto, croquis, etc.) resulta inadecuado el desarrollo con el transportador de la

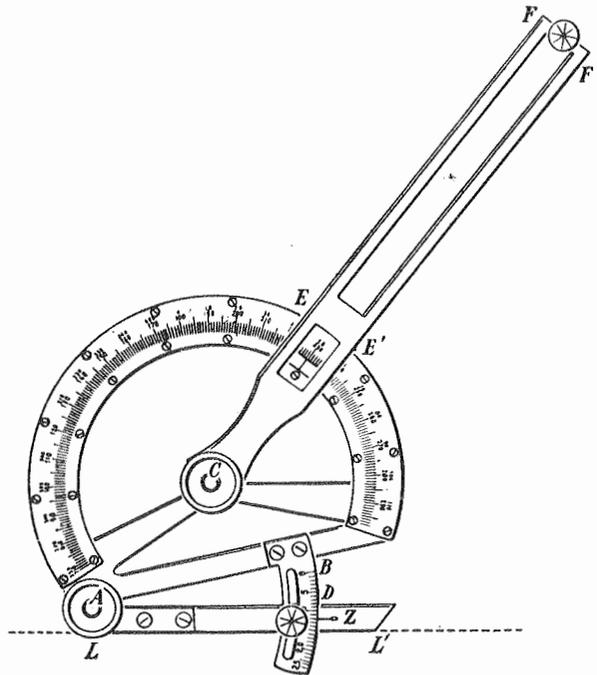


Fig. 240. — Transportador sin centro

figura 240; en estos casos debe emplearse un transportador semicircular, como el representado en la figura 239, y hacer el desarrollo en papel milimétrico o cuadrículado, de modo que el borde AB se puede orientar en cualquier punto, y en vez de pinchar el centro C , se coloca éste sobre el punto de que se trate y con el lápiz se toman las distancias sobre la escala AB .

También hay transportadores provistos de brújula, con los cuales se desarrolla girando el círculo graduado hasta que la aguja señale la misma división leída en el campo y tomando la distancia correspondiente. Estos transportadores tienen el inconveniente que supone la inestabilidad de la aguja magnética, por las oscilaciones producidas al mover el círculo, y además hay que tener

gran cuidado con que no se hallen objetos de hierro, tijeras, cortaplumas, etc., a distancia que puedan perturbar las indicaciones de aquélla.

Para hacer los desarrollos sobre papel tela o papel cebolla (transparente) se coloca debajo el papel ordinario milimétrico o cuadrículado. Algunos modelos de nuestro transportador (fig. 240) llevan sobre las reglas EF y $E'F'$ un cursor, cuyos bordes achaflanados tienen una escala para tomar las distancias. Una vez colocado el brazo CF en la posición correspondiente al ángulo leído, se corre el cursor hasta que el cero de su escala coincida con el punto-estación considerado, y se toma sobre esta misma escala la distancia que separa a esta estación de la siguiente. De este modo no hay que emplear doble decímetro ni compás. Cuando, a falta del cursor, se utiliza el compás para tomar las distancias, resulta muy práctico el disponer sobre el brazo EF una pequeña escala.

Merecen citarse, entre otros, los siguientes transportadores especiales: El transportador con dispositivo de centrado, por Teischinger; el de Lorber; el transportador de alidada, de Nagel; el de Decher; el taquígrafo geodésico de Schlesinger; el trans-

portador para levantamientos taquimétricos, de Miller; el de Tichy; el de Starke y Kammer; el transportador de Wötzel; el transportador universal de Schleicher; el de Ritter, etc. (*).

§ 73. Itinerarios medidos con cinta métrica o cadena y observados con brújula de alidada y eclímetro de mano

En los terrenos con arbolado espeso o con maleza alta, y siempre que haya dificultad de dirigir visuales a puntos relativamente distantes, se obtienen muy buenos resultados, sobre todo en levantamientos altimétricos para el trazado de curvas de nivel, con itinerarios simples de brújula cuyos tramos se toman todos iguales, por ejemplo, de la longitud de una cinta métrica de acero (20 m), y cuyos rumbos se determinan, con 1° de aproximación, con una brújula de alidada fijada en un bastón; la inclinación de los tramos sobre el horizonte se obtiene con un eclímetro de mano.

En el tomo I (§ 19, páginas 52 y 53) se ha descrito la cinta métrica y la cadena; para distancias mayores puede emplearse el cable metálico o el rodete de 50 m.

En la página 288 hemos descrito la brújula de alidada; el bastón o chuzo sobre que va montada se utiliza con frecuencia para sujetar el extremo de la cinta o cadena, práctica defectuosa, porque la brújula no está todo lo quieta que debe estar para hacer la lectura

con la aguja, que tarda mucho tiempo en quedar parada. El chuzo o bastón de la brújula va marcando los puntos del itinerario, y la cinta o cadena se pone al lado, con lo cual no se altera en nada la medición de la distancia.

En el tomo I (§ 19, páginas 53 a 56) hemos descrito varios eclímetros y clisímetros, de los cuales el más indicado para este objeto, según nuestra propia experiencia, es el moderno eclímetro representado en la figura 241, a escala $\frac{1}{2}$ de la natural. La alidada para la lectura lleva un solo trazo como índice, con el cual se leen directamente los grados, apreciándose a estima la décima de grado. (En la figura 241 el índice marca aproximadamente $+12,0^\circ$.) La teoría y estructura mecánica de este eclímetro son las mismas descritas en el tomo I (pág. 55, figs. 63 y 64) correspondientes al instrumento allí considerado, en un todo análogo al de la figura 241.

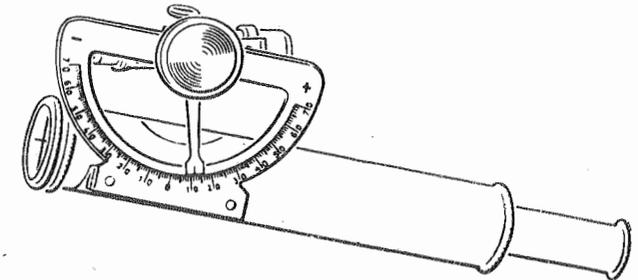


Fig. 241. — Escala 1:2

(*) Recientemente ha sido patentado y construido por el ingeniero geógrafo D. José María Mantero, del Instituto Geográfico y Catastral Español, un transportador rápido para coordenadas polares, en que automáticamente se hace el centrado y la coincidencia con el índice del cero del círculo transportador propiamente dicho; este índice puede correrse para desarrollar con el Norte verdadero, según la declinación del aparato empleado. Con este transportador se evitan los dos errores principales en los desarrollos, que son el centrado y la coincidencia y lectura de ángulos. Estas operaciones, que son también las que más tiempo absorben, se realizan, en este aparato, de modo instantáneo: el mismo cursor con que se toman las distancias, marca los puntos y los une con trazo de lápiz. El manejo de este transportador es muy cómodo, por el sistema de suspensión y de arrastre (paralelogramos articulados), y su rendimiento es elevadísimo, pudiéndose hacer los desarrollos de itinerarios y de radiaciones en cualquier escala, para lo cual acompaña al aparato un juego completo de escalas usuales que se montan con toda facilidad. — N. del T.

En la figura 242 se ve el mismo aparato anterior pero provisto de anteojo, cuyo aumento basta con que no pase de 5 diámetros. El nonio y la escala interior, que da la pendiente en tanto por ciento, sobran realmente en esta clase de levantamientos. Cuando se quiere usar este instrumento como clisímetro se hace la lectura sobre la escala de pendientes, en vez de utilizar la de inclinaciones (ángulo de elevación o depresión).

Para determinar la altura a que debe dirigirse la visual, se emplea un disco de mira, de unos 20 cm de diámetro, que se fija en un palo a la altura de los ojos del observador, y que se coloca frente al eclímetro. Este disco no debe ser de hierro, por la posible proximidad a la brújula que se emplee en el levantamiento.

En vez del disco de mira, tratándose de mediciones de poca precisión, puede visarse la cabeza, los ojos, etc., del peón que lleva el jalón o el palo con que va señalando los puntos del itinerario, según la altura relativa de observador y peón. Pero siempre ofrece más garantía el uso del disco, que en terreno de maleza o mala visibilidad se distingue muy bien por lo llamativo de sus colores, ordinariamente blanco y rojo.

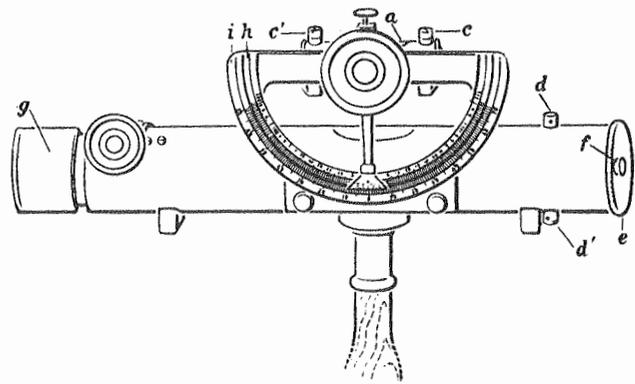


Fig. 242

El error de índice de un eclímetro se puede determinar por observación recíproca entre dos puntos (tomo I, página 56), o de otro modo adecuado cualquiera, y se elimina con los tornillos de corrección dispuestos al efecto. También puede eliminarse el error de índice, sin dispositivo alguno especial, en el campo, tomando la media de una doble observación; así se elimina también el pequeño error constante de colimación, por lo cual el mejor método consiste en observar todos los tramos del itinerario dos veces, en sentidos opuestos, y tomar después para el cálculo la media de cada par de observaciones. Mientras los dos peones tienden la cinta o la cadena, y el operador encargado de la brújula toma el rumbo correspondiente, tiene tiempo el observador del eclímetro de leer el ángulo de inclinación del primer punto al segundo, de trasladarse a éste y de leer desde aquí el ángulo de inclinación de la visual al primer punto.

Así se ve inmediatamente si la diferencia entre las lecturas directa e inversa es menor de $0,5^\circ$, y a lo sumo de 1° , y en caso preciso se repite la observación.

Para el cálculo del itinerario, se halla para cada longitud de tramo l , la proyección horizontal $l \cos \alpha$ y la diferencia de nivel $l \sin \alpha$. En la tabla XX del Apéndice se tienen estos valores para $l = 20$.

Para mayor claridad, damos a continuación un ejemplo, con todo el cálculo detallado, donde los ángulos α son las medias de cada dos observaciones recíprocas.

Punto	Datos del campo			Cálculo, con la tabla XX del Apéndice				Punto
	Rumbo φ	Long. l	Inclin. α	$l \cos \alpha$	$l \sin \alpha$ con la corrección	$l \sin \alpha$ corregido	Altitud sobre el nivel cero	
(0)	309°	20 m	+ 7,2°	19,9 m	2,51-2	2,49	179,20	(0)
(1)	312	20	+ 1,8	20,0	0,63-2	0,61	181,69	(1)
(2)	314	20	- 1,0	20,0		0,35-2	182,30	(2)
(3)	312	20	- 3,4	20,0		1,19-2	181,93	(3)
(4)	318	20	+ 9,8	19,7	3,40-2		180,72	(4)
(5)	323	20	+ 10,8	19,6	3,75-2		184,10	(5)
(6)	311	20	+ 13,4	19,5	4,63-2		187,83	(6)
(7)	318	20	+ 20,5	18,8	7,00-2		192,44	(7)
(8)	302	20	+ 18,7	18,9	6,41-2		199,42	(8)
(9)	286	20	+ 19,2	18,9	6,58-2		203,81	(9)
(10)	290	20	+ 21,6	18,5	7,36-2		212,37	(10)
(11)	282	20	+ 28,6	17,5	9,57-3		219,71	(11)
(12)	301	20	+ 32,9	16,8	10,86-3		229,25	(12)
(13)	300	20	+ 28,8	17,5	9,64-3		240,08	(13)
(14)	304	18,0	+ 15,4	17,4	4,78-2		249,69	(14)
(15)		298,0 m		283,0 m	+ 77,12 - 1,54	+ 76,83 - 1,58	254,45	(15)
					+ 75,58	+ 75,25	75,25	
					Debe ser 75,25			
					Error 0,33			

Para levantamientos de cierta extensión, conviene disponer de formularios impresos.

Las altitudes sobre el nivel cero 179,20 m y 254,45 m, correspondientes respectivamente al punto de arranque y al último del itinerario, se conocen directamente, por nivelación anterior. El error 0,33 m se reparte entre los 15 tramos, correspondiendo a cada uno 2 cm, y excepcionalmente 3 cm, a alguno de éstos.

En cuanto a la precisión de los desniveles, tenemos que para $l = 20$ m de distancia inclinada (sobre el terreno), el desnivel es $h = 20 \sin \alpha$, con un error $dh = \frac{20}{\rho} \cos \alpha d\alpha$, que para $d\alpha = 0,2^\circ$ es aproximadamente $dh = 0,07$ m. Para un itinerario de 50 tramos (1 kilómetro), el error medio probable del desnivel entre el punto inicial y el final será:

$$0,07 \text{ m} \sqrt{50} = 0,5 \text{ m.}$$

Esta precisión la hemos obtenido, en la práctica, en unos ensayos hechos con 25 itinerarios de esta clase, con un recorrido total de 13 kilómetros y unos 2000 m de desnivel. Y téngase en cuenta que los desniveles así obtenidos se representan en el plano sólo con 0,1 m de aproximación, y que al hacer un replanteo en malezas, bosques, etc., sólo sería posible encontrar los puntos con 0,1 m de aproximación en altura, y dada la gran velocidad con que se hacen estos levantamientos (500 m en una hora), los resultados obtenidos son excelentes.

También es bastante exacta la representación del punto en el plano, en cuanto a posición del mismo se refiere; el itinerario se desarrolla según los rumbos leídos, con el transportador (fig. 240), y con las distancias reducidas $l \cos \alpha$ (que se diferencian en general muy poco de l), y si el punto final no coincide con este mismo punto determinado previamente de otro modo, se repite el desarrollo en sentido contrario, y forzando un poco el

primer itinerario, se llega en seguida a la compensación. También se puede desarrollar primero en papel cebolla.

En general, puede decirse, en vista de los resultados prácticos obtenidos en muchos años, que este sistema de levantamiento es de una sencillez y precisión sorprendentes para quien lo aplica por primera vez.

La tabla XX que damos en el Apéndice, es para los rodetes más corrientes de 20 metros. Hammer calculó tablas análogas a éstas para $l = 25$ m y $l = 30$ m, y también dio a conocer una escala para $l \cos \alpha$ (fig. 243).

Resulta verdaderamente práctico disponer sobre el brazo $EFE'F'$ del transportador de la figura 240, una de estas escalas, en vez de la escala ordinaria. También hemos montado sobre este brazo del transportador una escala de corredera especial, a manera de

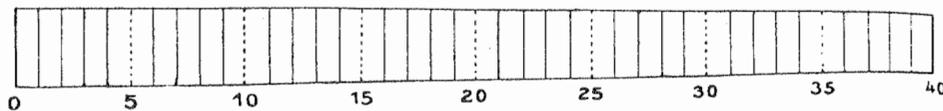


Fig. 243. — $l \cos \alpha$ para $l = 20$ m en 1:2000, o bien $l = 25$ m en 1:2500

regla de cálculo, con una reglilla corrediza que lleva una escala para el ángulo α , de modo que con un cursor provisto de hilo (raya sobre el cristal) se puede tomar directamente la longitud $l \cos \alpha$.

También pueden levantarse itinerarios de brújula empleando una regla nivelada de 5 m de longitud, provista de nivel (que se coloca horizontalmente), y una mira de nivelación, que hace de cateto vertical.

Las lecturas de la brújula en los itinerarios de esta clase no tienen comprobación, y por lo tanto, cuando se comete un error grosero, se inutiliza todo el itinerario. El libretista, que debe hacer un croquis al mismo tiempo que anota los datos de observación en la libreta de campo, puede precaverse contra estos errores en los rumbos, siguiendo el itinerario de atrás hacia adelante, y no perdiendo de vista que cuando aquél se dirige a la derecha, el rumbo aumenta, y cuando el itinerario cambia a la izquierda, éste disminuye. No debe nunca olvidarse la regla práctica dada en la página 287: soltar primero la aguja, después de haberla colocado aproximadamente en la dirección del meridiano magnético.

§ 74. Levantamiento taquimétrico

Una vez descritos los diferentes aparatos y métodos que se emplean en los levantamientos taquimétricos, queda tan sólo ocuparnos de éstos en conjunto y del modo general de llevarlos a la práctica.

El taquímetro, mediante la lectura de mira entre los dos hilos del retículo (número generador), la del círculo cenital y la del acimutal o de la brújula, determina la posición de los puntos visados respecto a la del punto estación, en coordenadas polares, quedando cada punto identificado por una distancia, un rumbo (o un acimut) y un desnivel, es decir, que dada una estación, se puede fijar la posición de los puntos visados desde ella, calculando las coordenadas correspondientes, o situando directamente el punto en el plano con un transportador y una escala. Por lo tanto, veamos, en primer lugar, cómo han de deter-

§ 74. LEVANTAMIENTO TAQUIMÉTRICO

minarse los puntos permanentes o principales del levantamiento, desde donde van los demás puntos del terreno que han de figurar en el plano.

Puntos permanentes. Los puntos permanentes de los itinerarios deben determinarse por triangulación y nivelación trigonométrica, o por nivelación por alturas; también se pueden relacionar unos con otros con el levantamiento. Éstos son los dos casos extremos, y entre ellos, según las condiciones y las características propias de cada levantamiento, caben infinidad de combinaciones, según la densidad con que se tomen los puntos permanentes, la mayor o menor dificultad en unirlos entre sí y la mayor o menor precisión con que deba hacerse el plano correspondiente.

Con una pequeña red de triangulación y nivelación trigonométrica simultáneas, hecha con el teodolito, basta para determinar los puntos principales, con los cuales se unen los puntos permanentes secundarios mediante itinerarios de taquímetro.

La colocación de las estaciones en una red trigonométrica dada, se hace más frecuentemente mediante el desarrollo gráfico que por cálculo de coordenadas. Para los puntos determinados por intersección (trisección o vértice de pirámide) puede emplearse una especie de transportador llamado *estacógrafo* (fig. 244) como el utilizado por los marinos, que miden los ángulos con el sextante. Se pueden también utilizar más de tres rayos a la vez, fijando el vértice con el mayor número posible, en caso de no concurrir todos exactamente en el mismo punto.

En la figura 245 se ve el estacógrafo empleado en la Marina alemana y construido por Sprenger, de Berlín.

Cuando se trata del levantamiento de una faja de terreno de 200 a 500 m de anchura, se puede seguir como base una poligonal, como se hace en los estudios de vías férreas,

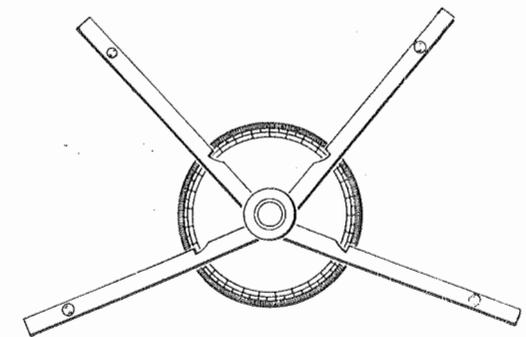


Fig. 244

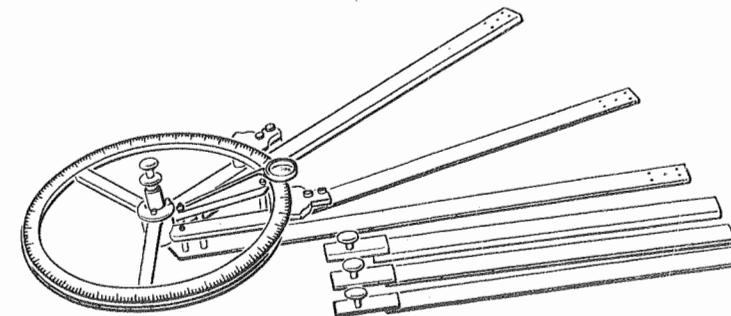


Fig. 245

carreteras, etc. La nivelación se puede hacer por alturas o por pendientes según la importancia de los desniveles; en terrenos llanos u ondulados se nivela por alturas, pero en terreno montuoso resulta este procedimiento muy pesado, por lo cual se lee, con el teodolito, el ángulo de pendiente de cada tramo a la vez que el ángulo horizontal. Lo mejor es

leer el ángulo de pendiente dos veces para cada tramo, desde sus puntos extremos, y una vez en un sentido y otra en el contrario.

Las distancias, en estos levantamientos de mediana precisión no se miden con regla, sino con la cinta métrica metálica. Si los tramos así medidos son de longitud l (en pendiente), y el ángulo de inclinación es α , se tiene $l \cos \alpha$ para la distancia horizontal y $l \sin \alpha$ para el desnivel, suponiendo que la cinta tome la misma pendiente en toda su longitud; si no es así, se emplean los medios auxiliares descritos en el tomo I (§ 19, págs. 53 a 57) y con las distancias horizontales s así halladas se calculan los desniveles con la expresión $s \operatorname{tg} \alpha$.

En terrenos escarpados o impracticables en que no puede medirse con cinta, se emplea la mira y entonces se observa todo el itinerario con el taquímetro. En este caso puede medirse cada tramo en dos sentidos opuestos, pero es mejor tomar hacia el medio del tramo dos puntos distantes entre sí un par de metros, y desde éstos medir la distancia a cada extremo. De este modo resulta medido dos veces el mismo tramo, pero con mayor precisión que haciendo las lecturas desde sus extremos. Los dos puntos intermedios pueden también servir de estaciones para la doble medición del desnivel.

Muy práctico resulta también el levantamiento con brújula, como ya se vió anteriormente (§ 71, pág. 291).

El itinerario taquimétrico principal o base del levantamiento puede hacerse a la vez que el relleno o toma de detalles, pero es mejor numerar primero los puntos permanentes principales, al unirlos con el itinerario base, y si el cierre resulta admisible se procede después al relleno. Conviene siempre tomar todos los puntos fijos que se encuentren, como hitos kilométricos, esquinas de edificaciones, etc., que sirven para comprobaciones o replanteos ulteriores.

Puntos secundarios o de relleno. Aunque haya libertad para la elección de los puntos de relleno, deben siempre tenerse en cuenta las dos reglas siguientes:

1. Se deben tomar todos los puntos que sirvan para caracterizar la forma del terreno.

Desde luego hay que considerar como formas principales la saliente y la entrante, correspondiendo a la primera la *divisoria de aguas*, llamada así porque está constituida por una línea de partición de aguas a un lado y a otro, llamándose *laderas* a estos lados: a la forma entrante corresponde la *vaguada* o *talweg* (*camino del valle*). Tanto las *divisorias de aguas* como las *vaguadas* deben tomarse con todo cuidado y detalle y de este modo quedarán claramente representadas todas las elevaciones y depresiones del terreno (crestas, colinas, lomas, collados, valles, cañadas, barrancos, hoyos, hondonadas, etc.).

2. A ser posible deben llevarse los itinerarios por las divisorias de aguas, y en la dirección de las mayores pendientes (líneas de máxima pendiente).

Todo cambio de dirección, en sentido vertical u horizontal, de cualquier línea característica del terreno debe representarse tomando el número suficiente de puntos, sin dejar atrás los puntos sobre colinas, regatos, cañadas, etc., y de este modo quedarán representados todos los detalles que dan la configuración del suelo.

En el trazado de las curvas de nivel (§ 75) se aprecia la utilidad y eficacia de la regla segunda anterior, que aconseja para la dirección de los itinerarios la de divisorias de aguas y la de líneas de máxima pendiente.

Para hacer un levantamiento según estas reglas, debe primero recorrerse el terreno y hacer una inspección ocular para conocer las divisorias de aguas y las vaguadas, que se indican en un croquis a mano alzada.

Croquis. Para facilitar las operaciones de gabinete e incluso el buen orden del levantamiento, hay que hacer en el campo un croquis que dé la posición relativa de los puntos y marque los principales accidentes, puntos permanentes, etc.; en este croquis, que en realidad es un plano levantado a ojo, figuran los puntos con el mismo número de orden que en la libreta de observación.

La formación del croquis, la elección de puntos y el mando de los portamiras para la colocación de éstas en aquéllos, es el trabajo principal del levantamiento, que debe estar a cargo del ingeniero o jefe de la brigadilla operadora, mientras que las lecturas y anotación de éstas en el cuaderno de campo corren de cuenta de uno o dos ayudantes. A cada quince o veinte puntos debe comprobarse la coincidencia entre la numeración del croquis y la de la libreta, ya sea mediante señales o cantando los números correspondientes a una estación en uno y otro registro de campo. Teniendo alguna práctica puede un solo operador encargarse de dos portamiras.

Cuando en un levantamiento taquimétrico se encuentran detalles muy complicados, como grupos de edificaciones u otros en que no sea posible utilizar el taquímetro, se representan directamente en el croquis acotando éste con los números resultantes de una medición especial hecha con un rodete, o a pasos, y con una brújula de bolsillo (anchuras de caminos, de arroyos, zanjas, taludes dados por su anchura y su altura, etc.).

También conviene trazar en el croquis, a ojo, algunas curvas de nivel, que después servirán de guía para el trazado de las definitivas; del mismo modo deben señalarse en el croquis las divisorias de aguas, las vaguadas, las lindes, arroyos, etc., y muy conveniente resulta también dibujar los perfiles longitudinales y transversales.

El croquis se hace a ojo, a ser posible a escala, y desde luego orientado, con el *norte* en la parte superior, y no en otra dirección, aunque no resulte tan cómodo para algunas estaciones.

La numeración de los puntos, idéntica en croquis y en libreta, se hace siguiendo la serie natural, es decir, (1), (2)..., (213), (214). Daría lugar a muchas confusiones volver a empezar por la serie (1), (2)..., en cada nuevo itinerario, o señalar éstos con letras: (a), (b), (c)..., que al repetirse en distintos puntos originarían embrollos en el gabinete.

Los puntos en que se hace estación no deben llevar número especial (por ejemplo, I, II...), sino los que les correspondan como tal estación, pero con el signo \odot . En caso necesario pueden emplearse paréntesis distintos para hacer resaltar la clase de punto de que se trate; por ejemplo: los números sin paréntesis pueden indicar puntos radiados o destacados, como 218, 219, 220; los puntos de un itinerario llevarán el paréntesis ordinario (221), y si además son estaciones se indican así: [221]. Los puntos destacados se señalan con el signo \times .

Después de estas ideas generales sobre la práctica del levantamiento, puede ya interpretarse perfectamente el croquis que damos en la figura 246, con la hoja correspondiente del cuaderno de campo.

La lectura del círculo cenital se hace visando la mira con el hilo medio horizontal, a la altura del anteojo, para lo cual se dispone sobre aquélla el disco de mira ya conocido (§ 66, página 263, figura 202). La distancia horizontal $l \cos^2 \alpha$ y los desniveles $\frac{1}{2} l \sin 2 \alpha$ se hallan con las tablas taquimétricas (véanse las tablas XXI a XXIV del Apéndice). Los rumbos se toman con la brújula; si en vez de hacerlo así se hacen las lecturas sobre el círculo acimutal, hay que tener por lo menos un acimut fijo y conocido para el cierre.

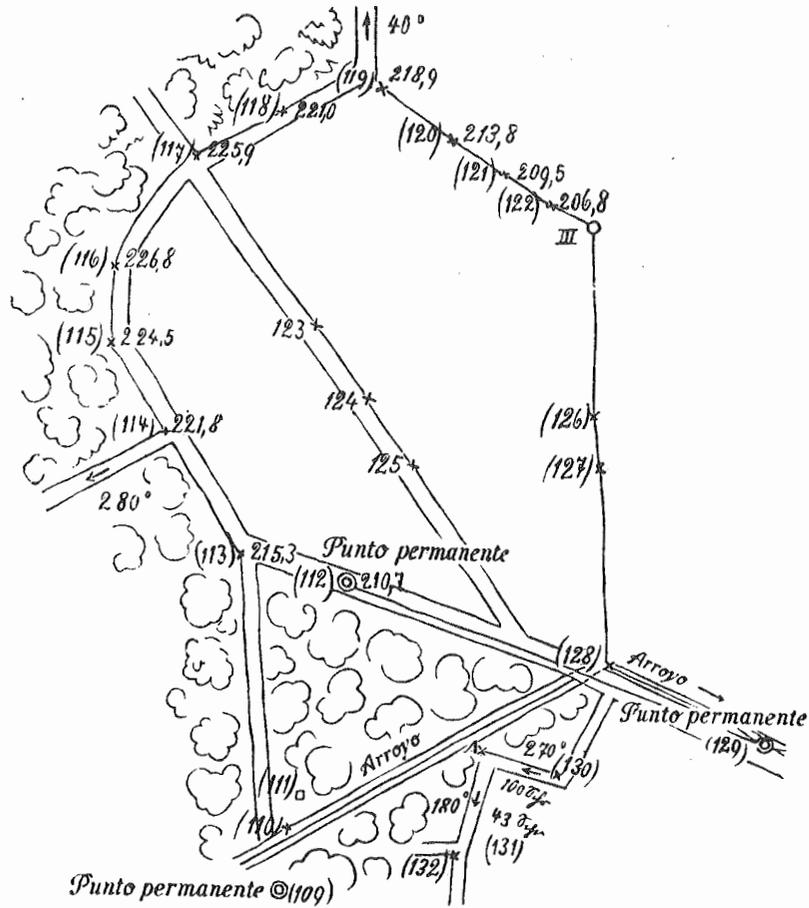


Fig. 246. — Croquis de un levantamiento taquimétrico correspondiente al cuaderno de campo siguiente

Cuaderno de campo (hoja correspondiente al croquis de la figura 246)

Punto N.º	Mira l	Rumbo	Ángulo cenital	Ángulo de inclin. α	Distancia horizontal $l \cos^2 \alpha$	Desnivel $1/2 l \sin 2 \alpha$	Altitud (sobre cero)
Estación © (112)					Tabla taquimétrica		210,7 m
113	28 m	279,8°	80° 22'	+ 9° 38'	27 m	+ 4,6 m	215,3
114	66	334,9	80 12	+ 9 48	64	+ 11,1	221,8
115	83	335,7	80 15	+ 9 45	81	+ 13,8	224,5
116	128	1,1	82 42	+ 7 18	126	+ 16,1	226,8
117	132	8,2	83 20	+ 6 40	130	+ 15,2	225,9
118	160	30,7	86 18	+ 3 42	160	+ 10,3	221,0
119	178	37,6	87 21	+ 2 39	178	+ 8,2	218,9
120	160	49,4	88 54	+ 1 6	160	+ 3,1	213,8
121	150	63,1	90 27	- 0 27	150	- 1,2	209,5
122	147	71,4	91 32	- 1 32	147	- 3,9	206,8

En este ejemplo se han redondeado las distancias a metros enteros, como se hace generalmente en los levantamientos taquimétricos ordinarios; si se necesita mayor precisión se lee sobre la mira hasta el milímetro, y se calcula la distancia horizontal también

con más exactitud. En la tabla siguiente puede verse un ejemplo en el que figuran comprobaciones de las lecturas de mira y de los ángulos vertical y horizontal. Como mira taquimétrica se emplea una mira ordinaria de nivelación sin disco de mira, sobre la cual se enfila el hilo medio horizontal del retículo a la altura 1,4, media de las alturas del anteojo.

Después de hecha la lectura del círculo cenital, se coloca el hilo inferior del retículo sobre la división más próxima de decímetros completos, y se lee con el hilo superior; después se dispone el hilo superior sobre una división de decímetros enteros y se lee con el inferior, de modo que se obtiene dos veces el número generador $O_1 - U_1$ y $O_2 - U_2$. A continuación se lee el círculo acimutal (o el rumbo, en la brújula). La lectura de los dos círculos se hace primero con el nonio, y como comprobación se repite con el índice auxiliar (§ 65, pág. 257). En el registro de campo se hace constar la distancia entre el cero del nonio y el índice auxiliar, en ambos círculos.

Cuaderno de campo ($c = 0,43$, $k = 99,94$)

Punto	Ang. horiz. (ind. aux.)	M	O_1 U_1	O_2 U_2	$O_1 - U_1$ $O_2 - U_2$	$c + k l$	Ang cenit. (ind. aux.)	Distancia	Des-nivel	Altitud (sobre cero)
	(13° 47') = Dist. del ind. aux.		(13° 52') = Dist. del ind. aux.							
	Estación © (54). Alt. del instr 1,44									54,27
	Alt para el cálculo = Horiz. - 1,4 = 54,27 + 1,44 - 1,4									54,31
© (23)	217° 44' 231 30									
(57)	154 23 163 12	1,4	1,847 1,000	1,800 09,52	0,847 0,848	85,1	86° 34' 100 24	84,8	+ 5,09	59,40
(58)	191 48 205 35	1,4	1,782 1,000	1,800 1,018	0,782 0,782	78,6	87 42 101 35	78,5	+ 3,15	57,46
(59)	136 33 150 19	1,4	1,724 1.100	1,700 1,077	0,624 0,623	62,7	85 19 99 09	62,3	+ 5,10	59,41

Densidad de una red taquimétrica y velocidad del levantamiento. Es muy difícil dar cifras concretas sobre el número de estaciones y destacados que deben tomarse en un levantamiento taquimétrico; de nuestros trabajos sobre este asunto, publicados en la 'Zeitschr. f. Verm.', 1890, tomando como base los levantamientos que realizamos desde el año 1883 al 1890, resulta que en 11,77 kilómetros cuadrados se tomaron 7811 puntos, es decir, un promedio de 664 puntos por kilómetro cuadrado levantado (en planimetría y altimetría). Las escalas en que se desarrollaron estos trabajos de campo fueron de 1:2000 y de 1:2500. Este resultado concuerda con todos cuantos hemos contrastado, y podemos calcular que, para el estudio taquimétrico del proyecto de una vía férrea, hay que tomar de 500 a 1000 puntos por kilómetro cuadrado, según el terreno.

En cuanto a la velocidad del levantamiento, es decir, al número de puntos que pueden tomarse en un día, se han hecho numerosos estudios, de los cuales se deduce que los datos en ellos contenidos pueden ser tratados de muy diferentes maneras, dando lugar a resultados bien distintos, según el método seguido en cada levantamiento.

Por ejemplo, en la revista 'Zivilingenieur', de 1888, se registra el número máximo de 700 puntos en un día, pero haciendo constar que hubo que tomar los puntos muy apretados, es decir, con una gran densidad, y de este modo es evidente que no hay más que hacer lecturas y más lecturas sin perder tiempo en elección de puntos, etc. Lo mismo puede

decirse del rendimiento de 60 puntos por hora, que se cita en una nota de la Dirección alemana de ferrocarriles, de mayo de 1892, concerniente a un taquímetro de proyección Fennel-Wagner.

En realidad no depende el rendimiento del simple número de puntos, sino de la elección de éstos en el campo y de la clase de los mismos (estaciones o destacados).

Para la densidad de puntos antes indicada, de 500 a 1000 puntos por kilómetro-cuadrado, y teniendo en cuenta el tiempo que se invierte en la elección de estaciones, de puntos destacados, etc., resulta un rendimiento bastante menor que los acabados de citar. Por término medio puede calcularse («Zeitschr. f. Verm.», 1890) que con nuestros métodos, es posible tomar 1861 puntos en 17 medios días de 3 horas y 40 minutos de trabajo en cada uno, es decir, 1861 puntos en 3740 minutos, o sea unos 30 puntos por hora, incluyendo todos los trabajos propios del levantamiento (paso de una estación a otra, tiempo perdido en colocación de miras, etc.) aparte del puramente invertido en la observación y lectura. Los ángulos cenitales, se suponen leídos con nonio, lo cual aumenta el tiempo empleado en esta lectura, y si para ello se usara un microscopio lector unifilar, aún se invertiría más tiempo.

Por último, debe siempre tenerse en cuenta que generalmente, y de modo casi exclusivo, los datos taquimétricos se utilizan vertidos al plano, es decir, en desarrollos gráficos, y por lo tanto la elección y el número de puntos dependen de la escala a que haya de representarse la parte de terreno levantada. Para escalas muy grandes, por ejemplo 1 : 1000 ó 1 : 500, necesarias para alguna aplicación especial, hay que tomar elevaciones y depresiones generalmente despreciables por insignificantes; la regla que en estos casos puede seguirse es que análogamente a lo que se hace en los perfiles, las líneas que unen puntos consecutivos o inmediatos entre sí deben adaptarse al suelo con tanta precisión como se determine la posición de los puntos (en acimut y altura), de tal modo que la superficie del terreno, a lo largo de cada una de estas líneas, pueda sustituirse por una poligonal y así podrán interpolarse cuantos puntos sean precisos entre los tomados taquimétricamente en el campo.

Como resumen y a manera de pauta general, vamos a indicar sumariamente las operaciones que hay que seguir en un levantamiento taquimétrico-trigonométrico, suponiendo que se dispone de una triangulación topográfica con altitudes determinadas trigonómicamente.

1. Determinación de un punto trigonométrico por trisección directa (tomo I, § 92, ejemplo de la página 388), o por trisección inversa (tomo I, § 95, formulario pág. 402). Hay que hacer, por lo menos, una comprobación; por ejemplo, en la trisección inversa tomando un acimut más de los necesarios (tomo I, § 95, pág. 404, o § 91, pág. 382). Se hace la compensación gráfica (tomo I, § 102).

2. Con la observación de los ángulos acimutales se suele simultanear la de los cenitales. Para cada visual se cala con todo esmero el nivel y se mide la altura i del aparato y la z del punto visado (figura 115 de la página 116), y se calculan las alturas con la fórmula (2) de la página 116 y utilizando las tablas II ó III del Apéndice, en función de las distancias a deducidas de la triangulación horizontal. Se hace la comprobación con 0,1 m de aproximación. La compensación se hace por el promedio aritmético o por cierre entre puntos permanentes.

3. Colocación de las coordenadas calculadas en la hoja cuadrículada en que haya que desarrollar el levantamiento, a escala 1 : 2000 ó 1 : 2500.

4. Se empieza el trabajo de taquimetría poniendo en estación el taquímetro sobre

los nuevos vértices, cuyos esquemas de observación se hacen en el campo, para determinar la declinación magnética del eje de colimación (párrafo 71, ejemplo de la página 291: $\delta = 12,9^\circ$).

5. Unión de dos vértices o puntos trigonométricos con un itinerario taquimétrico de brújula, comprobando en el campo todos los tramos, en distancia, rumbo y pendiente, mediante observaciones recíprocas (§ 71, pág. 292) Cálculo del itinerario con tablas taquimétricas ($l \cos^2 \alpha$ y $0,5 l \sin 2 \alpha$) y desarrollo con transportador (§ 72, fig. 240, pág. 296) o por coordenadas, empleando de preferencia este último sistema para los itinerarios principales.

6. Levantamiento puramente taquimétrico desde cada estación de los itinerarios, para el relleno, con croquis bien detallado.

7. Itinerarios de brújula con eclímetro (§ 73), cerrados sobre puntos de poligonales taquimétricas. Levantamiento de masas forestales (tabla auxiliar, n.º XX del Apéndice). Para nivelaciones barométricas, véase párrafo 54.

8. Al hacer el desarrollo gráfico del levantamiento, se traza en todos los puntos tomados, con la bigotera y tinta china, un circulito de 1 mm de diámetro. Los números correspondientes a libreta y croquis se escriben a la izquierda de estos círculos con lápiz, a menos que se refieran a estaciones o vértices y en este caso se anotan con tinta china, también a la izquierda del punto. Las alturas (cotas) calculadas en la libreta de campo, se escriben con tinta roja a la derecha del punto (aproximadas a 0,1 m).

9. Hay que anotar todas las irregularidades que puedan observarse en el funcionamiento del taquímetro, brújula, miras, etc., para hacer la corrección necesaria.

Nivelación sobre planimetrías. Puede también emplearse con gran rendimiento el taquímetro, cuando se trate de nivelar un terreno del que ya se tenga un plano ordinario no acotado (planimetría). Se empieza para ello por colocar en estación el aparato, en un punto que figure en el plano (mojón de lindes, hito kilométrico, etc.), y se van identificando en el plano los puntos que se van tomando, como se dijo en el párrafo 6 al tratar de la nivelación de superficies. Los puntos que falten en el plano se determinan con un itinerario taquimétrico entre puntos ya identificados en aquél. Las cotas de las estaciones se obtienen partiendo de las correspondientes a puntos fijos y conocidos (vértices de triangulación). Los desniveles h se calculan por la fórmula $h = s \operatorname{tg} \alpha$, donde s es la distancia tomada en el plano, y α el ángulo vertical leído, empleando para este cálculo una tabla de desniveles o un diagrama análogo al representado en la figura 182 (pág. 246).

§ 75. Curvas de nivel

El neerlandés Cruquius fué quien, en 1729, empleó por primera vez las curvas horizontales o curvas de nivel, para representar la forma del terreno, y después, en 1737, el francés Buache utilizó también estas curvas con el mismo objeto; tanto uno como otro agregaban a las curvas de nivel las líneas batimétricas. La aplicación de las curvas de nivel a la representación de las formas del terreno y la resolución de problemas dependientes de ésta, se debe principalmente al ingeniero francés Ducarla (1765). Para más detalles históricos sobre las curvas de nivel, puede verse el trabajo de Licka publicado en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1880.

El problema de la nivelación puede definirse, en general, diciendo que consiste en tomar tantos puntos característicos en el terreno como sean necesarios para representar

la forma general de aquél, pudiendo intercalar otros puntos secundarios que acaben de dar el detalle de esta forma.

Para representar la forma de la superficie terrestre, una vez hecha la nivelación, hay que trazar en el plano las líneas de intersección de aquélla con una serie de planos horizontales equidistantes entre sí, que son precisamente las curvas de nivel.

Toda curva de nivel tiene la propiedad de que en cualquier punto de la misma su tangente es horizontal y normal a la máxima pendiente. Prescindiendo de la curvatura de la superficie terrestre, puede considerarse una curva de nivel como contenida en un plano horizontal.

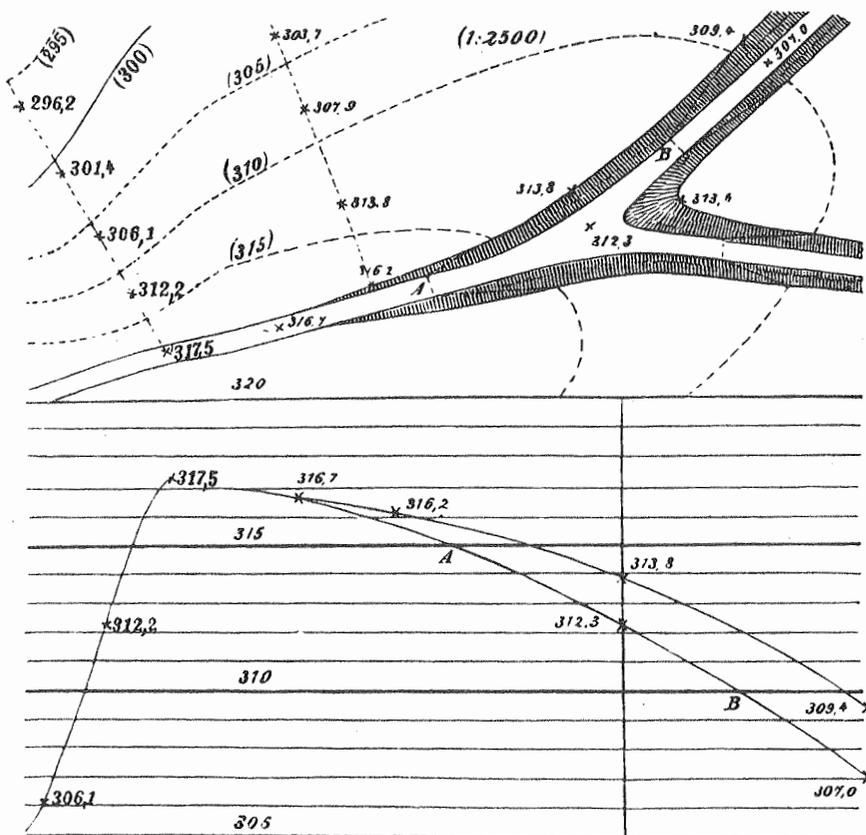


Fig. 247

Si se toman bastantes puntos y bien situados, es muy sencilla la construcción de las curvas de nivel. La determinación directa, sobre el terreno, de las curvas de nivel, valiéndose del nivel de visual fija o equaltímetro, con levantamiento posterior, es un trabajo muy penoso que hace inaplicable este método como norma general operatoria.

Para el trazado de las curvas de nivel damos por sentado que todos los puntos del plano llevan escritas sus correspondientes cotas, y que si alguna parte del terreno presenta una forma irregular que rompa la marcha general de los desniveles, como desfiladeros, etc., esté perfectamente acusada esta irregularidad en el croquis de campo, mediante curvas auxiliares, rayado de las escarpas, dibujos detallados, etc.

El trazado de las curvas de nivel es un problema de Geometría descriptiva, que consiste en intercalar cotas entre puntos directamente nivelados, es decir, de cota conocida.

El mejor medio auxiliar lo proporciona la construcción de perfiles, que pasen por las series de puntos tomados en el terreno; para ello hay que disponer previamente una red de líneas horizontales y verticales (fig. 247), que puede ser simplemente un papel mili-

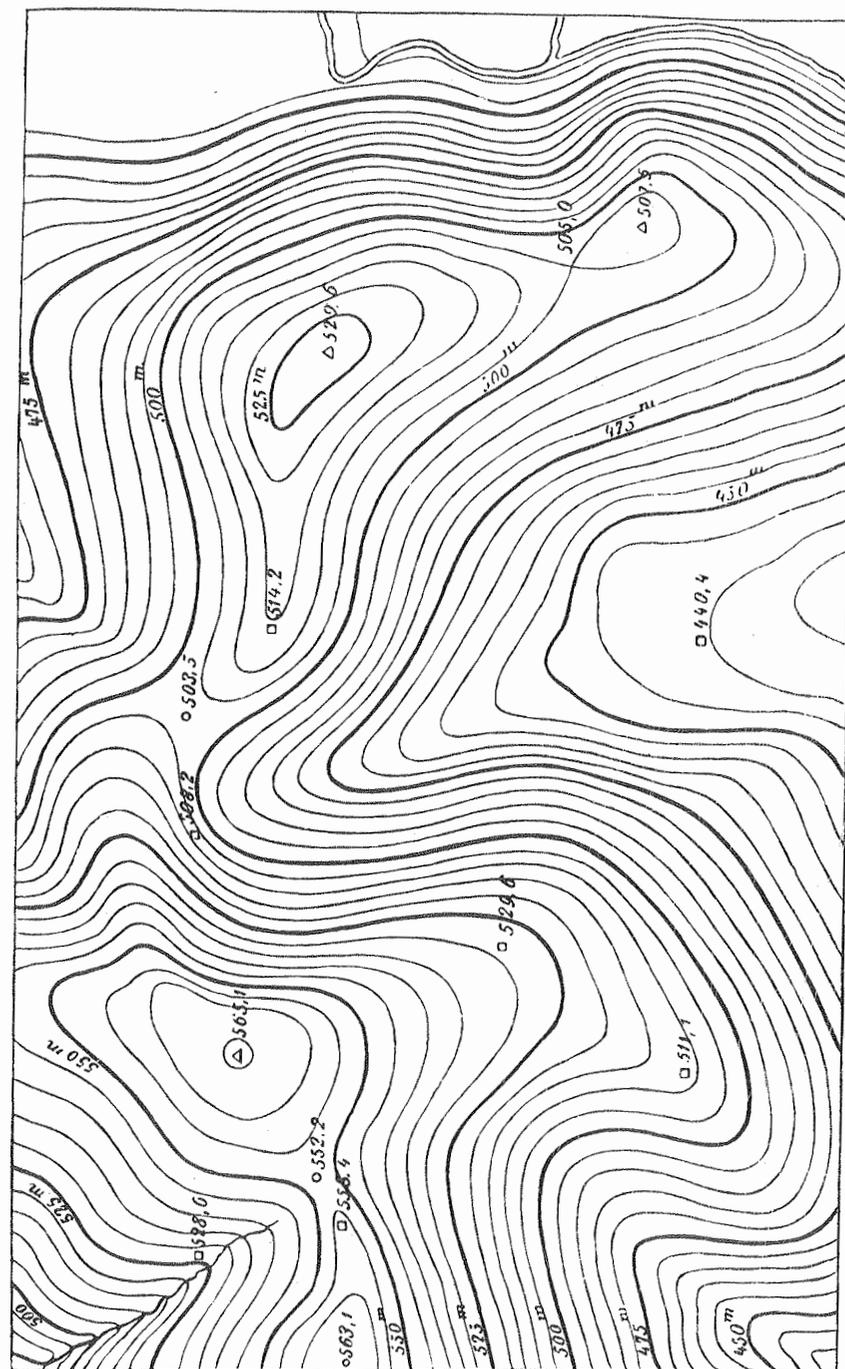


Fig. 248. — Curvas de nivel. Escala 1:5000. Equidistancia de las curvas = 5 m

métrico o un papel cuadrulado corriente, pero teniendo en cuenta que la escala vertical en los perfiles es siempre mayor (5 a 10 veces) que la horizontal, por lo cual una misma retícula puede servir para distintas escalas horizontales.

Si para determinar un perfil se emplean sólo dos puntos, se unen éstos con una línea recta; pero si en un mismo perfil figuran tres o más puntos, tanto si están sobre una alineación o sobre una línea no muy curva (como así se procura al elegir los puntos en el terreno), se utilizan todos ellos en la construcción del perfil, y uniéndolos a mano alzada se pueden descubrir, por la marcha del mismo, si se han cometido errores groseros o equivocaciones en la toma de datos.

Trazando en el perfil las líneas horizontales correspondientes a cotas enteras, por ejemplo 305 m, 310 m, 315 m, etc., se obtienen, por su intersección con el primero, unos puntos, que pertenecen a las respectivas curvas de nivel y que pueden llevarse, con el compás, al plano. De este modo se señala sobre el plano una serie de puntos de las curvas de nivel, que se unen a mano alzada, teniendo en cuenta las líneas auxiliares y el sombreado dibujados en el campo con el desarrollo de los perfiles a la vista y recordando la forma del terreno, con lo cual se puede hacer el trazado con error relativamente pequeño, por ejemplo, con una pendiente en el terreno del 1 : 20, se obtienen las curvas de nivel con un error probable en altura, de $\frac{1}{4}$ m, y de 5 m en posición horizontal.

En la figura 247 se ve un ejemplo de construcción de curvas de nivel: la escala del levantamiento planimétrico es de 1 : 2500, y la escala vertical para el perfil es 10 veces mayor; los puntos señalados con una crucecita y con la cota escrita a su derecha están tomados directamente en el terreno. Se empieza por construir el perfil longitudinal del camino *AB*, para lo cual se toman los puntos 307,0, 312,3 y 316,7 en la retícula inferior y se unen, con lo cual ya se tiene el perfil dibujado: se toman desde el punto del plano 312,3 respectivamente a izquierda y a derecha las distancias horizontales de los puntos *A* y *B* a la línea vertical de la retícula, y así se tienen los puntos del terreno en que el camino que figura en el plano es cortado por las curvas de nivel (315) y (310). Se continúa con el perfil que va por el borde norte del camino, después con el que parte del punto 317,5 y sigue por los 312,2 y 306,1, y así sucesivamente. Los primeros perfiles que se trazan son los de las divisorias y las vaguadas.

En la figura 248 se ve un ejemplo de trazado completo de curvas de nivel, que se dibujan con tinta sepia. En un plano con curvas de nivel se tiene en cada punto la cota, la dirección de la máxima pendiente (curso de las aguas) y la cuantía de los desniveles.

Medios auxiliares para la construcción de las curvas de nivel. Cuando no se construyen los perfiles y se trazan las curvas por simple interpolación entre cada dos puntos unidos por rectas, pueden emplearse muchos medios auxiliares, en parte mecánicos y en parte calculatorios, de los cuales citamos algunos a continuación:

HAAS. *Sobre levantamientos alimétricos en escalas 1 : 2500 y 1 : 25000* (Stuttgart, 1878).

REITZ. *El «metrotoph», medio auxiliar para la construcción de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1877).

WEHN. *Escalas de interpolación para las curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1880).

SCHMELING. *Trazador de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1881).

Instrumento para tomar puntos para el trazado de curvas de nivel. («Deutsche Bauzeitung», 1882).

WAGNER. *Tablas de interpolación para las curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1886).

HAMMER. *Escalas de reducción para el trazado de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1888).

VOSYKA y GERKE. *Escalas de reducción para la construcción de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1888).

RÖDDER. *Instrumentos auxiliares para el trazado de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1888).

JORDAN. *Compás interpolador.* («Zeitschr. f. Verm.», 1888).

ZWICKY. *Diagrama para la interpolación gráfica de las curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1891).

MERL. *Construcción de curvas de nivel.* («Zeitschr. f. Verm.», 1892-1902).

SIKORSKI. *El estratificador* (Zeitschr. f. Verm., 1894); en la misma revista, véase: LANGE (1898), HALLER (1901), PULLER (1902), LÖSCHNER (1904), y TRUCK (1905).

El medio auxiliar más sencillo para el trazado de curvas de nivel consiste en dibujar sobre un papel de calcar (papel cebolla) una serie de rectas paralelas equidistantes; este papel se coloca sobre el plano taquimétrico de modo que, para cada par de puntos, las rectas paralelas formen con la recta que los une el ángulo necesario para que quede dividida por éstas en las partes previstas.

En algunos casos y en circunstancias especiales puede hacerse la interpolación a ojo.

El mejor procedimiento para obtener curvas de nivel muy aproximadas a la realidad consiste en trazar aquéllas con lápiz, por el sistema del papel transparente, y marchar al campo con el plano, donde a la vista del terreno se da a aquéllas su forma definitiva.

Diferentes formas de curvas de nivel. Teniendo una idea clara geométrica sobre las curvas de nivel y no olvidando nunca que una misma curva no puede ser tangente a sí misma, no es difícil hacer el trazado correcto aun para formas muy complicadas del terreno. Sin embargo, se encuentran con frecuencia en algunos planos curvas de nivel de forma francamente imposible, como, por ejemplo, las representadas en la figura 249, que fueron objeto de un estudio crítico publicado en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1880.

Las curvas de nivel de la figura 248 responden a un trazado bien hecho y de acuerdo con la realidad del terreno, pero conviene fijar la atención particularmente en los tres puntos 505,0, 503,5 y 552,2, correspondientes a otros tantos collados; es fácil comprender que la superficie curva matemática más sencilla representativa de un collado es el paraboloide hiperbólico, y que si se corta esta superficie por una serie de planos paralelos, se obtendrán otras tantas hipérbolas, algunas de las cuales, en el límite, pueden reducirse a sus dos asíntotas, como se ve en la curva de nivel en forma de ∞ , que pasa por el punto 505,0.



Fig. 249
Formas imposibles de las curvas de nivel

Precisión de las curvas de nivel. El error propio de los puntos tomados en el campo, se refleja en las curvas de nivel, en posición y en altura; efectivamente, para una pendiente n del terreno, por ejemplo $n = \frac{1}{20}$, un error de 1 m en la posición del punto da lugar a un error de altura de $\frac{1}{20}$ m, y al contrario, un error de altura de $\frac{1}{4}$ m, produce un error en la posición de los puntos de la curva de nivel correspondiente, igual a $20 \times \frac{1}{4} m = 5 m$. Además, las curvas, y por lo tanto la representación de las formas del terreno, dependen del número y distribución de los puntos observados. Para el levantamiento topográfico de Brunswick (territorio) da Koppe una fórmula para expresión del error, de la forma $a + b n$, que relaciona el error en altura del plano con curvas de nivel, con la pendiente n del terreno; en este levantamiento, en escala 1 : 10000, el error medio en altura es de $\pm (0,3 + 3n)$ metros, y por lo tanto, el error límite será $(\pm 1,0 + 10 n)$ metros. En el levantamiento topográfico de Prusia, a escala 1 : 25000, se encontró un error de vez y media a dos veces el anterior. En los levantamientos taquimétricos a escala 1 : 2000 ó 1 : 2500, puede, aproximadamente, fijarse el error máximo en $\pm (0,5 + 5 n)$ metros, no conociéndose, hasta el día, trabajos de investigación de este género referentes a esta clase de levantamientos. Estos errores

máximos o límites, dan también una norma para la distancia vertical mínima que debe haber entre las curvas de nivel, y que ha de ser, por lo menos, igual al doble del error máximo.

§ 76. Plancheta

En los levantamientos taquimétricos, el desarrollo gráfico de los datos, es decir, la formación del plano, es posterior al trabajo de campo, y se hace con entera independencia de éste; en cambio, en los levantamientos con plancheta, se dibuja el plano en el campo, a la vez que se hace la observación.

La plancheta se compone de dos partes esenciales: el tablero, y la plancheta propiamente dicha. Para disponer horizontalmente el tablero se utiliza un nivel, ordinariamente esférico y de poca sensibilidad (1' a 2'). En la figura 250 se ve el tablero (a escala 1:5),

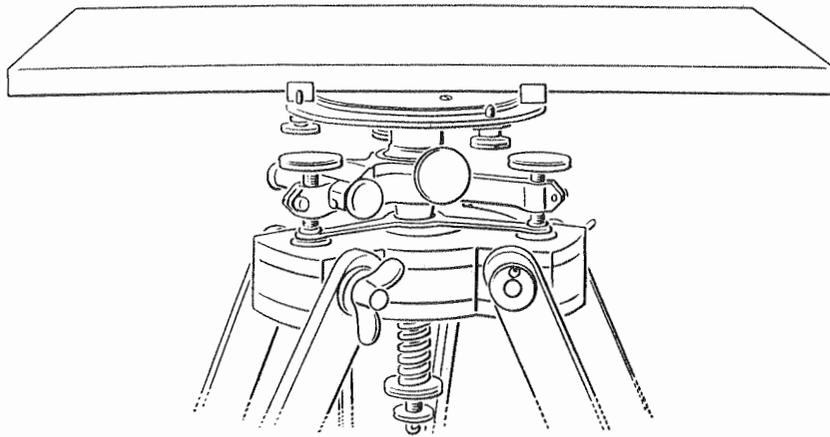


Fig. 250. — Tablero de la plancheta (escala 1:5)

montado sobre el trípode, con plataforma nivelante, igual que la de los teodolitos, y que puede girarse libremente o con tornillo de llamada; para mayor claridad sólo está representado medio tablero en esta figura, que corresponde al modelo construido por Hildebrand, de Friburgo.

En la figura 251 se ve la plancheta, modelo Fennel, de Kassel, con la cual pueden trazarse los ángulos horizontales y medirse las distancias y los ángulos verticales. Sobre una regla metálica, provista de un borde biselado para el dibujo, va una columna vertical, que lleva en su parte superior el eje horizontal de giro del anteojo, al cual va unido un círculo vertical, que puede leerse con dos nonios. Sobre el eje de giro se ve el tornillo de presión para detener el movimiento libre de rotación del anteojo; el brazo correspondiente va por dentro de la columna; el movimiento lento se efectúa con el tornillo horizontal de llamada que se ve a la izquierda de la columna. Con otro tornillo, situado junto a este último, se mueven los nonios del círculo cenital (como en la figura 98, página 105). Una vez enfilado el anteojo sobre el punto de que se trate, y antes de hacer la lectura del círculo cenital, se cala el nivel de la alidada de este último, valiéndose del segundo de los tornillos antes mencionados; de este modo, el ángulo vertical se hace independiente de la horizontalidad del tablero, que no hay que tener en cuenta para nada en la medición de desniveles.

Al pie de la columna va montado otro nivel, en dirección perpendicular a la del anteojo, que sirve para disponer horizontalmente el eje de giro de este último, independientemente de la posible inclinación del tablero, para lo cual la regla está provista de un tornillo nivelante, situado en la parte opuesta al borde biselado de la misma.

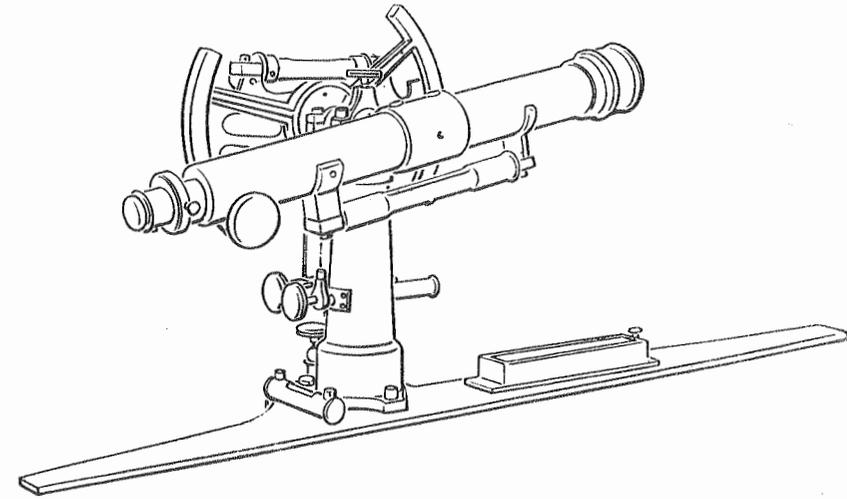


Fig. 251. — Plancheta

El anteojo, que es estadimétrico, lleva también un nivel reversible, de importancia secundaria. Para la verificación y ajuste exacto de la plancheta, lleva ésta tornillos de corrección en los tres niveles y en el retículo del anteojo.

Finalmente, sobre la regla y unida a ésta, hay una declinatoria magnética (véase página 290), de gran utilidad en los levantamientos con plancheta.

Verificaciones y correcciones de la plancheta. *a)* Para las observaciones acimutales u horizontales, las condiciones que deben verificarse en la plancheta son las dos siguientes:

1. Que el eje de colimación del anteojo sea perpendicular al eje de giro del mismo.
2. Que el eje de giro del anteojo sea horizontal, cuando el nivel transversal esté calado.

La primera condición se comprueba haciendo bascular el anteojo, como si se tratara de un teodolito, según el método *d)* descrito en la página 321 del tomo I. Para ello se señala un punto en el tablero y se coloca la plancheta de modo que el borde biselado de la regla pase por aquél; al girar en 180° esta última alrededor de dicho punto, sigue pasando su borde biselado por el mismo, lográndose así el mismo efecto que al girar el teodolito 180° alrededor de su eje vertical.

Para comprobar la segunda condición, se coloca horizontalmente el eje de giro del anteojo valiéndose del tornillo nivelante que hay en la regla. Para ello se observa la esquina vertical de algún edificio, o el hilo de una plomada suspendida desde un punto a cierta altura, o en general, una línea cualquiera vertical, y se dispone el eje de giro del anteojo de tal modo, que al bascular éste, se mantenga siempre la cruz filar sobre la línea vertical observada, cualquiera que sea la inclinación del anteojo.

Mejor es proyectar con la plancheta un punto alto sobre una mira horizontal, en las dos posiciones del anteojo (tomo I, pág. 323), para lo cual se mantiene el borde biselado de la regla sobre un mismo punto, antes y después de girar la plancheta 180°. En las dos

3. *Intersección inversa* (fig. 255) (*). Supongamos que se tienen dibujados en el tablero los tres puntos A , B y C ; se trata de determinar en el papel un cuarto punto P , colocando la plancheta sobre el mismo en el terreno. Son varias las soluciones que pueden darse a este problema, de las cuales sólo describiremos las principales.

3a. Se coloca sobre el tablero un papel transparente, que se sujeta por sus bordes, y una vez centrado aquél sobre el punto del terreno que se trata de determinar, se mira desde el punto del tablero situado en la vertical de aquél, a los tres puntos dados del terreno y se trazan los rayos correspondientes; se suelta entonces el papel cebolla y se corre sobre el tablero de modo que estos rayos pasen por los respectivos puntos antes dibujados en el tablero, y así puede determinarse sobre éste la posición del cuarto punto buscado. De este modo pueden emplearse más de tres puntos para la determinación por intersección inversa.

3 b. *Triángulo de posición*. Después de orientado el tablero a estima, o con una brújula, se miran los tres puntos del terreno, pero colocando la plancheta de modo que para cada visual pase el borde de la regla por el punto correspondiente a aquéllos en el tablero.

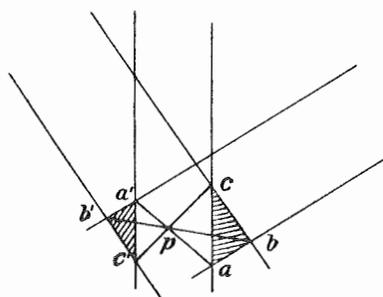


Fig. 256

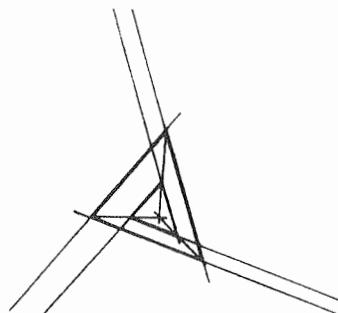


Fig. 257

Si la orientación no es exacta, se formará un triángulo abc (fig. 256) que se llama triángulo de posición o de error. Se gira entonces un poco el tablero, y se vuelven a trazar los rayos de igual modo que antes, de modo que los ángulos formados por los rayos del primer haz serán iguales a los que entre sí forman los del segundo: por lo tanto, los puntos de intersección de los rayos correspondientes a cada par de puntos visados, a saber, a y a' ,

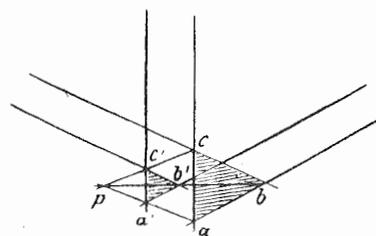


Fig. 258

b y b' , c y c' , deben estar sobre un mismo círculo con dichos dos puntos del terreno; es decir, que las rectas de unión aa' , bb' y cc' son cuerdas de estos tres círculos (una de cada uno), y su punto común de intersección p será el punto buscado, representativo del punto del terreno.

El mejor caso que puede presentarse es el de caer un triángulo de posición dentro del otro (fig. 257), lo cual depende de la posición relativa de los puntos en el

terreno, según la ley de Lehmann que damos seguidamente; de no verificarse este caso, siempre se puede conseguir que, por lo menos, caiga el punto buscado p entre los dos triángulos de posición, como se ve en la figura 256. Al contrario: debe evitarse el caso representado en la figura 258, hasta haciendo tanteos si fuera preciso.

(*) El método de intersección inversa es conocido también con los nombres de *trisección*, *vértice de pirámide* y *problema de Pothenot*. — N. del T.

La ley de Lehmann dice: que el punto buscado p caerá dentro o fuera del triángulo de posición, según que el punto P que se trata de determinar, esté dentro o fuera del triángulo ABC formado por los tres puntos dados.

En las figuras 259 y 260 se ve un caso particular del triángulo de posición, que se tiene cuando el punto P que se quiere determinar está en línea recta con dos de los puntos dados A y C , no resultando triángulo de error, sino dos rectas casi paralelas cortadas por una tercera; en la figura 260 se ve el resultado de dos observaciones y el modo de unir los puntos de intersección obtenidos: en vez de tres rectas, sólo aparecen dos, aa' y cc' , pues los puntos de intersección b y b' (que caen en A y C) no son utilizables, como es natural.

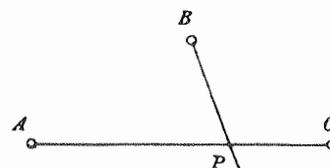


Fig. 259

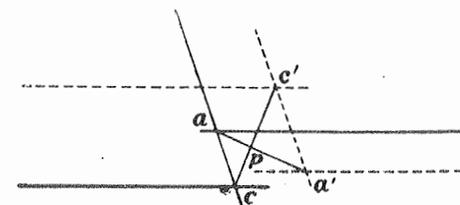


Fig. 260

Aunque el punto P no caiga exactamente sobre la línea AC , sino muy cerca de ella, se tiene en la práctica el mismo caso particular que acabamos de considerar (fig. 259).

4. *Intercalación de dos puntos*. Supongamos que se tienen en el terreno dos puntos inaccesibles P_1 y P_2 (en la posición indicada en la figura 461 de la página 425 del tomo I), por ejemplo, los vértices de dos torres, que quedan representadas en el tablero por los puntos P_1 y P_2 , cuando se estaciona la plancheta en los puntos A y B ; aproximadamente, o de modo arbitrario, se toman dos puntos a' y b' del tablero para A y B , y se determina por intersección directa un cuadrilátero $a'b'p_1p_2$, que será semejante al ABP_1P_2 del terreno, y que debe ser también semejante al cuadrilátero abp_1p_2 que se trata de representar en el tablero. Por consiguiente, basta completar este último, tomando en p_1 y p_2 los ángulos p'_1 y p'_2 , ya sea con un papel transparente, o con un compás o de cualquier otra manera gráfica.

También la solución dada en el tomo I (pág. 429, figura 464) con el punto auxiliar de Collins, es aplicable a la plancheta, con la cual se toman los ángulos $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ sobre la base AB , y los puntos P_1 y P_2 se determinan por intersección inversa desde AQ_1B y AQ_2B respectivamente.

5. *Empleo de la declinatoria*. Para utilizar la declinatoria, se orienta el tablero sobre un punto conocido, y estando calada la aguja magnética, se marca con la plancheta la dirección correspondiente, que se señala sólo en los bordes del papel. Con esta línea puede ya orientarse el tablero en cualquier punto del terreno, pues basta disponer la plancheta sobre aquélla y girar el tablero hasta que la aguja quede calada. Para determinar las estaciones basta con tener dos puntos ya dados en el terreno y en el tablero, o también uno solo, suponiendo que puede medirse directamente la distancia.

6. *Poligonales*. Con la plancheta pueden hacerse también poligonales o itinerarios de brújula, trazando los ángulos con la regla y midiendo las distancias con cinta o con estadía. El error de cierre de los itinerarios se elimina por simple compensación gráfica. En general, este procedimiento es muy pesado y poco práctico.

Trabajo de campo. La elección de los puntos en el terreno se hace del mismo modo que para la Taquimetría (§ 74, página 301); todas las distancias y desniveles se van calcu-

lando al hacer la observación, para ir situando los puntos en el plano, los cuales sirven de base al trazado de las curvas de nivel, que se dibujan a la vista del terreno para tomar todos los detalles necesarios. Así se obtiene una representación más fiel del terreno que con los datos numéricos de la Taquimetría, en la cual se sustituye con un croquis la vista directa del primero.

Para el cálculo de las distancias horizontales y de los desniveles pueden emplearse todos los medios auxiliares pertinentes, ya descritos en el párrafo 63. También pueden aplicarse a la plancheta los dispositivos usados para la reducción mecánica o automática, descritos en los párrafos 67 y 68, y adaptables a este instrumento.

Ahora bien, como la mayor parte de aquellos dispositivos resultan de difícil acoplamiento a la plancheta, que carece de la estabilidad y fijeza necesarias para ello, se han construido instrumentos especiales para el levantamiento desde una estación, por coordenadas polares, semejantes a los teodolitos, pero que en vez del círculo acimutal llevan un disco horizontal de 30 a 40 cm de diámetro. Sobre este disco se coloca una hoja de papel, que se renueva para cada estación: en vez de alidada lleva este instrumento una regla, que juntamente con el anteojo se mueve alrededor del eje vertical, y cuyo borde está en el plano vertical de colimación de aquél. Al dirigir el anteojo a un punto del terreno, se puede determinar el punto sobre el papel, mediante la distancia leída sobre la mira.

A esta clase de instrumentos pertenecen los siguientes:

El taquigrafómetro de Wagner-Fennel. El dispositivo de corredera (§ 67, figura 203) va aplicado a una plancheta.

La plancheta rápida de Puller-Breithaupt. El dispositivo de corredera y proyección está calculado para mira vertical (véase párrafo 67, página 264).

El topómetro de Hammer-Fennel. El dispositivo reductor de Hammer-Fennel (véase párrafo 68, página 276, figura 219), está montado de modo que puede girar alrededor del centro de un tablero circular; sobre una regla graduada horizontal resbala un cursor con el cual se marca directamente el punto en el papel.

El taquímetro de Koch. Un taquímetro ordinario lleva fijado lateralmente un pequeño tablero, alrededor de cuyo centro puede girar una regla graduada que por medio de un engranaje va unida a la alidada del teodolito, de modo que describe exactamente el mismo ángulo que esta última, al girar el teodolito.

Reseña histórica sobre la plancheta. Se atribuye la invención de la plancheta al profesor Prätorius, de Altdorf (1537-1616), o por lo menos se sabe que fué éste quien primero la empleó, no teniéndose igual certeza respecto a la invención propiamente dicha.

Otro alemán meridional, el geodesta Schickhardt (1529-1635) cita el principio de la plancheta como la cosa más natural, diciendo textualmente que cuando no se dispone en el campo de círculos con limbos graduados, o cuando no se puede emplear la brújula, se puede salir del paso fijando un papel sobre una tabla, clavando un par de alfileres sobre una regla, y trazando líneas correspondientes a cada visual dirigida por esta alineación.

Como se ve, el principio o teoría de la plancheta se conoce desde hace tres siglos.

Mas, recientemente, en el siglo XIX, alcanzó la plancheta su apogeo, facilitando considerablemente el desarrollo de la Cartografía y dando lugar a levantamientos sistemáticos y continuados, que comenzaron con dicho siglo. En Alemania y Austria de manera especial, fué la plancheta el principal instrumento topográfico para los trabajos catastrales y levantamientos ordinarios, durante la primera mitad del siglo XIX, y aun hoy se emplea mucho en los levantamientos topográficos.

El trabajo más importante realizado en aquellos tiempos con la plancheta, fué indudablemente el levantamiento topográfico de Sajonia, sobre el cual publicó Lehmann dos obras, una en Leipzig en 1799 y otra en Dresden en 1820.

Muy importante es también el Catastro parcelario de Baviera, a escala 1 : 5000, realizado entre 1808 y 1837 con plancheta provista de estadímetro.

También se empleó la plancheta en los trabajos del Catastro de Württemberg (1818-1840), en escala 1 : 2500, aunque realmente sólo se empleó aquella como tal en la determinación de las divisorias de aguas: en el resto se siguió el sistema de alineaciones con escuadra (véase en el tomo I, párrafo 25, página 85, el método de alineaciones paralelas).

A partir de entonces ha venido perdiendo importancia la plancheta en los trabajos catastrales, siendo en Sajonia donde más se ha empleado para este objeto. En los trabajos de Catastro actuales y en los futuros, queda la plancheta por completo excluida de la serie de aparatos utilizables en aquéllos.

En cambio, aun en nuestros días, se emplea mucho la plancheta en los levantamientos topográficos (mapa) a escala 1 : 25000, en Baden, Sajonia y Prusia, especialmente en esta última, donde se completa el plano llevando al mismo, convenientemente reducidos, los detalles levantados en los trabajos catastrales, tanto de rústica como de urbana, de Obras Públicas, Montes, etc., apoyados en los puntos permanentes que figuran en el levantamiento con la plancheta.

A principios del siglo XX se empezó en Brunswick un nuevo levantamiento topográfico a escala 1 : 10000, para el cual se dispuso el empleo de la plancheta. También en el mapa de Hessen, comenzado en 1901, se utilizó la plancheta, y es muy frecuente, aun hoy, el empleo de ésta en vez del teodolito para los estudios de caminos, vías férreas, etc., en escalas de 1 : 5000 y 1 : 2500, sobre todo en terrenos montañosos.

Acerca de la comparación entre el levantamiento con plancheta y la taquimetría con teodolito, merecen citarse los trabajos de Koppe y Wilski publicados en la «Zeitschr. f. Verm.» de los años 1902 y 1897 respectivamente.

§ 78. Telémetros de reflexión

Como complemento a lo antes expuesto sobre Taquimetría, en la que desempeña papel tan importante la medición óptica de las distancias (diastimometría), vamos a describir otros tipos de distanciómetros, que se emplean, en parte para la resolución de ciertos problemas topográficos, y en parte para levantamientos y otras aplicaciones prácticas.

Hasta aquí hemos estudiado los distanciómetros que requieren el empleo de una mira, colocada sobre el punto visado; ahora nos ocuparemos de aquellos que no necesitan miras, pero que precisan siempre una base, para poder medir la distancia al punto observado.

El principio más simple de distanciómetros sin miras, conocido desde siglos atrás, y de tiempo en tiempo vuelto a estudiar y a discutir, es el que responde al empleo de una regla-base con dos anteojos, como representa la figura 261: $AB = b$ es la regla, P el punto lejano cuya distancia E se quiere hallar, y ϵ es el ángulo que forman entre sí las dos visuales AA' y BB' , o sea, una de ellas AA' y la paralela AA'' a la otra. Conociendo b y ϵ , se tiene:

$$E = \frac{b}{\epsilon}, \quad \text{o también} \quad E = \frac{b}{\epsilon} \rho. \quad (1)$$

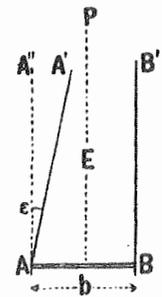


Fig. 261

En el tomo I, página 309, vimos la ley que determina el error correspondiente a esta medición, dada por la fórmula (2), que aplicada al caso de la figura 261, con su misma notación nos da:

$$dE = \frac{E^2}{b} d\varepsilon, \quad \text{o en segundos,} \quad dE = \frac{E^2}{b} \frac{d\varepsilon}{\rho} \quad (2)$$

o sea:

$$\frac{dE}{E} = \frac{E}{b} d\varepsilon, \quad \text{o también} \quad \frac{dE}{E} = \frac{E}{b} \frac{d\varepsilon}{\rho}$$

Aplicando esta fórmula al caso límite $d\varepsilon = 1''$ y $b = 1$ m, resultan para diversas distancias los siguientes valores del ángulo paraláctico ε :

Distancia E	Paralaje $\varepsilon = \frac{b}{E} \rho$	Errores medios		$dE : E = 1 : n$
		dE	$100 \frac{dE}{E}$	
50 m	1° 8' 45"	± 0,012 m	± 0,024 ‰	1 : 4125
100	34 23	0,048	0,048	1 : 2063
500	6 52	1,21	0,24	1 : 413
1000	3 26	4,85	0,48	1 : 206
5000	0 41	121,2	2,42	1 : 41

Cuando se cumple la condición supuesta de que el error medio de paralaje $d\varepsilon = \pm 1''$, resulta muy práctico el método expuesto, para muchas aplicaciones; por ejemplo, se puede determinar una distancia de 1000 metros sin necesidad de mira ni trabajo previo alguno y con un error de unos 5 m (el 0,5 ‰), lo cual es suficiente para muchos objetos.

La paralaje ε puede medirse de varios modos: con un arco de círculo graduado, con un ocular micrométrico, etc.

Todos los teodolitos con anteojo excéntrico, como los de las figuras 322 y 328 del tomo I (págs. 320 y 330), pueden emplearse como telémetros sin mira, ya que con ellos se puede determinar la paralaje por observación con el anteojo en sus dos posiciones (vuelta de campana y giro de 180° alrededor del eje vertical), siendo en este caso la base igual al doble de la excentricidad. Por ejemplo, en el caso estudiado en el tomo I, página 331, se tenían los ángulos 2φ y 2ψ como paralajes correspondientes a los puntos visados A y B respectivamente.

Este es el fundamento del aparato descrito por Pulfrich («Zeitschr. f. Instr.», 1907), que consiste en un teodolito equipado con dos anteojos excéntricos y paralelos, con los cuales se visa, uno tras otro, el punto de mira: el ángulo que es preciso hacer girar al instrumento, que es igual al ángulo paraláctico, se mide con un tornillo micrométrico.

El escrito más antiguo referente al telémetro de dos anteojos es el de P. Mayer (Mannheim, 1767) titulado «Pantometrum Paceccianum seu instrumentum novum pro elicenda ex una statione distantia loci inaccessa, inventado por el Conde Pacecco de Ucedos». Esta pantómetra consistía simplemente en dos anteojos paralelos y distantes entre sí de 1 a 2 m.

El telémetro construido por Breithaupt en 1770 consistía en una regla de 1 m de longitud con un anteojo en cada extremo, y ha sido descrito y estudiado por Coester y Gerland, encontrándose actualmente en el Museo de Kassel.

En una Memoria de Schell, publicada en 1878, se encuentran recopilados los telémetros de esta clase y otros varios instrumentos. Starke construyó un aparato con una regla

de 1,518 m de longitud que llevaba un anteojo en cada extremo, provistos de tornillos micrométricos, cuyos errores eran:

$E = 500$ m	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m
$\varepsilon E = \pm 2$ m	± 8 m	± 31 m	± 69 m	± 123 m	± 192 m.

También merece especial mención el telémetro de Cerebotani, en el cual se medía la paralaje ε por el movimiento de una palanca especial. Los dos anteojos, de 20 aumentos cada uno, con su caballete de acero, formaban un aparato de 17,5 Kg de peso, y el error medio de la paralaje era de $\pm 2,5''$.

Sobre estos instrumentos se han hecho y publicado numerosos trabajos, calculando su apreciación y errores, trabajos que tienen gran valor, porque han servido para poner de manifiesto que no pueden aquéllos utilizarse en levantamientos ni mediciones de terrenos. En cambio, estos mismos aparatos son de un interés excepcional para la Artillería, que se ha ocupado de perfeccionarlos todo lo posible.

Puede verse una reseña y estudio de los telémetros más empleados para fines militares en la Memoria publicada en los «Extraits du Mémorial de l'artillerie de la marine» de Francia, por Jacob de Marre, teniente de la Armada (París, Ch. Tanera, 1880). También puede verse la revista alemana «Zeitschr. f. Verm.» de 1898, que trata de estos aparatos.

Con más extensión, y numerosos datos numéricos, se estudian los telémetros en las Memorias de Artillería e Ingenieros militares, publicadas por el Comité técnico-militar de Viena en 1898: *Medición de distancias en operaciones de guerra*, por el capitán Víctor Ritter Niesiolowski-Gawin, de Niesiolówice.

Posterior a esta fecha, merecen citarse los siguientes trabajos:

Teleóptica. Por el Dr. Chr. von Hofe. Leipzig, 1911.

El anteojo y el telémetro. Por el Dr. A. König, de la casa Zeiss. Berlín, 1923.

Tratado de telemetría. Por el capitán P. Mazuir. Ediciones de la «Revue d'Optique théorique et instrumentale». París, 1931.

En la revista científica alemana «Zeitschrift für Vermessungskunde» se encuentran descritos y estudiados los telémetros, en parte en Memorias sobre instrumentos ópticos y en parte en los trabajos sobre Taquimetría.

Telémetro de reflexión. En estos telémetros, en que los dos rayos luminosos procedentes del punto lejano y correspondientes a cada extremo de la base se unen, por reflexión, como en un sextante, se evita un grave inconveniente de los telémetros de base fija, que consiste en la necesidad del montaje perfectamente rígido e invariable de los anteojos sobre la base.

El principio de los telémetros de reflexión fué expuesto por el teniente Fallon en 1802, en la «Revista mensual de Geografía y Astronomía» (Gotha, 1802, tomo VI), y desde entonces han sido muchos los ensayos y estudios hechos sobre estos instrumentos.

En la figura 262 se ve nuestro telémetro de reflexión, en el cual la regla-base L tiene de longitud $b = 1$ m; esta regla lleva una alidada A con un espejo S en uno de sus extremos; el centro de rotación de la alidada es el punto medio de S . En el otro extremo de la base L va fijo un anteojo F perpendicularmente a aquélla, delante del cual hay un espejo pequeño s , también fijo sobre L , e inclinado respecto a la dirección del anteojo.

Un punto cualquiera P , alejado del telémetro, envía rayos luminosos tanto al espejo S (que por reflexión sobre éste y sobre el segundo espejo s pasa al anteojo, recorriendo la trayectoria $PSsF$), como también directamente, al anteojo, pasando por encima del espejo s ; es decir, que la disposición fundamental es la misma que en un sextante.

La alidada A tiene una longitud total r , medida entre el eje de giro S hasta la escala sobre la cual se lee la rotación efectuada en cada caso, y que se ve en la figura a la dere-

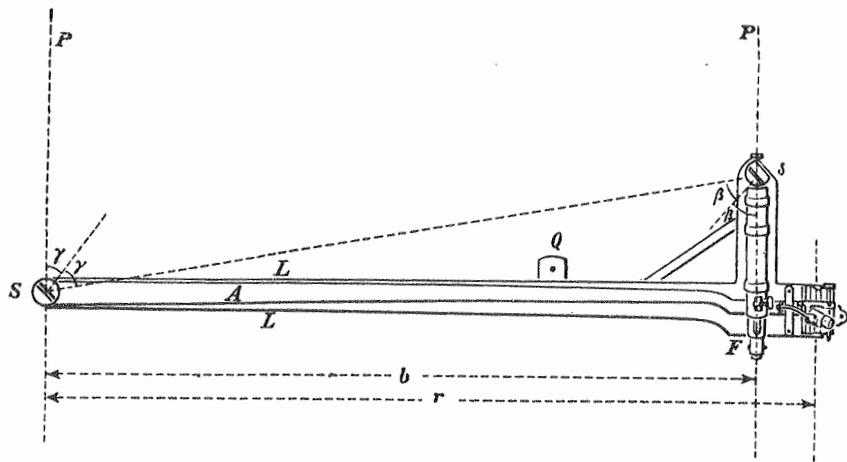


Fig. 262. — Telémetro de reflexión, de base $b = 1$ m

cha de L , donde va también un dispositivo corriente de tornillos de presión y coincidencia, y una lente para la lectura. El aparato se sostiene, para la observación, por su centro de gravedad Q .

Veamos ahora la relación entre la distancia a medir E (figura 263) y la lectura $n - i$ sobre la alidada; si la lectura directa es n , hay que determinar también, al mismo tiempo, la lectura i que corresponde a una distancia infinita, y así se obtiene la diferencia $n - i$ que es la lectura definitiva para el cálculo; como se ve, i es el valor que en el sextante se llama error de índice. Si la distancia E fuera infinita, el rayo incidente sobre el espejo S , y procedente del punto visado, tendría la dirección $B'S$, y la alidada, que gira a la vez que el espejo S , ocuparía la posición SB , mientras que al rayo PS corresponde la posición SA de la alidada. Estas dos posiciones SB y SA forman entre sí el ángulo $\frac{\epsilon}{2}$, que es el mismo formado por los espejos S y s , ya que cuando la distancia E es infinita los dos espejos son paralelos.

Ahora bien, el ángulo formado por los espejos $\frac{\epsilon}{2}$, es realmente la mitad de la paralaje ϵ (como en el sextante), y por lo tanto, se puede deducir directamente de la figura 263:

$$\text{triángulo } PSs; \quad \epsilon + 2\gamma + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ,$$

de donde

$$\epsilon = 2\beta - 2\gamma;$$

$$\text{triángulo } \frac{\epsilon}{2} Ss; \quad \frac{\epsilon}{2} + (90^\circ + \gamma) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ, \quad \text{de donde} \quad \epsilon = 2\beta - 2\gamma.$$

Fig. 263
Teoría del telémetro de reflexión

Siendo b la longitud de la regla-base, r la de la alidada, $n - i$ la lectura corregida del error de índice y E la distancia que se quiere medir, se tendrá:

$$b = E\epsilon, \quad n - i = r \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{y de aquí} \quad E = \frac{br}{2(n - i)} \quad (4)$$

La base L puede colocarse horizontal o verticalmente.

Telémetros de Adie-Christie y de Barr-Stroud. El primero de estos telémetros, representado en la figura 264, consiste en un tubo A , cuya longitud, que constituye la base, es de 4,5 pies (= 1,372 m), y en el modelo reducido, de 2 pies (= 0,610 m). En B y B^2 se ven dos espejos, inclinados 45° sobre el eje del tubo A , que reflejan los rayos luminosos

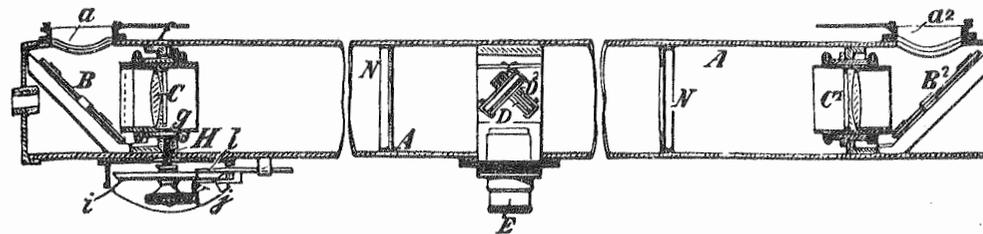


Fig. 264. — Telémetro inglés de Adie y Christie

procedentes del punto visado y que a través de los objetivos C y C^2 van a reflejarse nuevamente en la escuadra central de reflexión DD^2 , de donde pasan al ocular E , y se hacen coincidir las dos imágenes, girando el tornillo K , que obra sobre el objetivo C ; la lectura de la distancia se hace sobre la escala i .

En el mismo principio está fundado el telémetro de Barr y Stroud, más perfeccionado que el anterior en su conjunto y en los detalles, y representado, en esquema, en la figura 265. Los rayos procedentes del punto visado son desviados en ángulo recto por dos

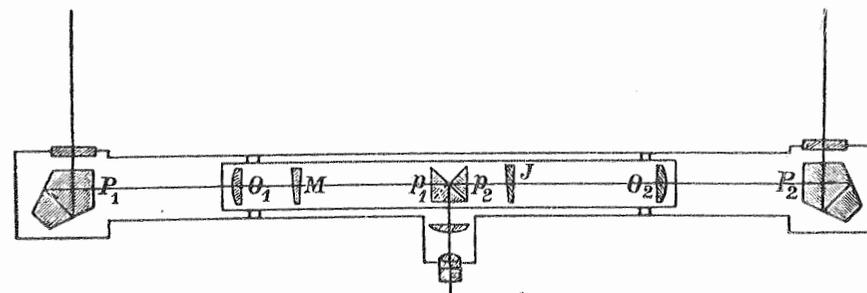


Fig. 265. — Telémetro de Barr y Stroud

prismas de sección pentagonal y pasan por los objetivos O_1 y O_2 que dan dos imágenes del objeto mirado; por medio de los dos prismas p_1 y p_2 pasan estas imágenes al ocular, ocupando la izquierda la mitad superior, y la derecha la mitad inferior. Las imágenes se ven separadas, y para hacerlas coincidir se corre el prisma M en la dirección del tubo; ahora bien, el prisma M desvía en un ángulo constante al rayo procedente del espejo de la izquierda, de modo que la traslación paralela del mismo producirá un corrimiento lateral de la imagen superior, que será tanto más grande, cuanto más diste el prisma M del p_1 . Al prisma M va unido un índice, con el cual se lee la distancia al punto visado, sobre una

escala empírica. El prisma *J*, que puede correrse un poco en la dirección del tubo, sirve para eliminar todo error posible de índice.

El telémetro de coincidencia, de Zeiss, responde a una disposición análoga al anterior, pero con la diferencia de que el prisma de la derecha está de tal modo colocado que produce una inversión de la imagen, viéndose en el ocular una imagen directa y otra invertida del objeto, que se pueden hacer coincidir. Según los trabajos de Löschner, la precisión con que pueden medirse distancias de hasta 7600 m es del 3 al 4 %.

También la casa Goerz, de Friedenau, ha construido telémetros fundados en el mismo principio que el de Barr y Stroud, pero con prismas de reflexión de distinta forma y disposición.

Acerca del telémetro de Barr y Stroud representado en la figura 265, publicó Taylor un trabajo crítico sobre las causas de errores, en la revista inglesa «Engineering», de 1908; la curvatura del tubo exterior da lugar a inclinaciones opuestas en ambas imágenes; la curvatura del tubo interior produce, para visuales inclinadas, un error en el ángulo paraláctico. El cristal de que están hechos los prismas (crown-glass) es un mal conductor del calor, pero tiene un gran coeficiente de dilatación, por lo cual al calentarse parcialmente (no de modo uniforme en toda la masa) se altera la forma del prisma, y como consecuencia inmediata, aumenta o disminuye el ángulo de 45°. A causa del largo recorrido de los rayos luminosos por dentro de los prismas, absorben éstos gran cantidad de luz, y es necesario, por consiguiente, que tengan una abertura bien grande; pero resulta muy difícil obtener prismas de gran tamaño sin irregularidades, de modo que los rayos experimentan en el interior de aquéllos varias desviaciones, además de las producidas por un posible calentamiento parcial de los mismos prismas.

Para más detalles sobre los telémetros anteriores, nos remitimos de nuevo a la obra de A. König titulada *El antejo y el telémetro* (Berlín, 1923).

§ 79. Otros telémetros sin mira

I. Telemetría con base corta. Para usos militares se establecen con frecuencia bases de poca longitud, de 50 a 100 m, medidas con cinta o de cualquier otro modo, y también a pasos simplemente, sobre las cuales se hace una especie de triangulación para medir distancias sin miras.

Para mediciones de esta clase debemos citar el prisma telemétrico de Bauernfeind, isósceles y casi rectángulo; el ángulo φ formado por las dos caras iguales no es recto, sino que vale exactamente $89^\circ 25' 40''$; el modo de operar con este prisma para medir una distancia consiste en formar un triángulo isósceles alargado, cuyos dos ángulos en la base sean a su vez iguales al ángulo φ del prisma; entre la base y los lados de tal triángulo existe una relación constante (aproximadamente de 1 : 100), es decir, que la longitud de uno de estos lados es un múltiplo de la base. Análogo a éste es el telémetro de E. Grimsehl, así como el del sueco Unge, y también el prisma de Hensoldt (véase la figura 29 del tomo I, página 39).

Como ejemplo explicativo de esta clase de telémetros, que se apoyan en una base pequeña medida o contada a pasos, vamos a describir el telémetro de campaña de Souchier,

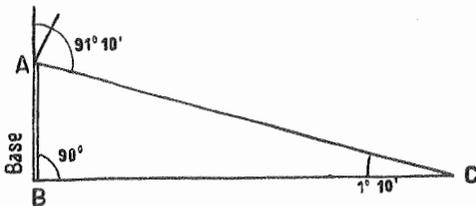


Fig. 266

cuya teoría consiste simplemente en formar un triángulo *ABC* (fig. 266), en el cual la base (lado menor) *BA* tenga por ángulos adyacentes $B = 90^\circ$ y $A = 88^\circ 50'$, de modo que el ángulo opuesto será $C = 1^\circ 10'$. Ahora bien, como aproximadamente se tiene que $\text{tg } C = 1 : 50 = 0,02$, bastará multiplicar por 50 la base *AB* para tener la distancia *BC*; pero en realidad, la $\text{tg } 1^\circ 10' = 0,020365$, y el ángulo cuya tangente es 0,020000, es $C = 1^\circ 8' 45''$, por lo tanto, cuando el ángulo *C* sea efectivamente de $1^\circ 10'$ y quiera procederse con precisión, habrá que emplear la constante 1 : 49,204, para lo cual se calcula una tabla especial, que acompaña a cada instrumento.

Para tomar los dos ángulos *B* y *A* se emplea un prisma, representado en la figura 267 en tamaño igual a los $\frac{3}{4}$ del natural. Se supone que el objeto cuya distancia se quiere medir, está a la derecha de la cara *AB*. El prisma tiene dos ventanillas *V* y *P*, que pueden

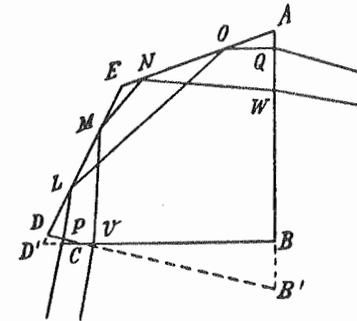


Fig. 267

<i>A</i>	=	67° 30'
<i>E</i>	=	135 0
<i>D'</i>	=	67 30
<i>B</i>	=	90 0

		360° 0'
<i>D</i>	=	69 45
<i>C</i>	=	177 45

abrirse y cerrarse alternativamente, y por su forma es un prisma de Wollaston, que ya se describió en el tomo I, página 40, para el trazado de ángulos rectos. El prisma de la figura 267 presenta la particularidad de tener la arista *D'* matada, de modo que en vez de la cara *BC*, puede emplearse también para mirar la cara *DC*.

La marcha del rayo en el interior del prisma de Wollaston *ABD'E*, nos es ya conocida (tomo I, página 46), y es tal, que el rayo incidente en *V* y el emergente por *W* forman entre sí un ángulo recto.

Pero si consideramos la marcha del rayo luminoso a través del prisma *AB'DE*, hemos de tener en cuenta que el ángulo en *C* es casi llano, es decir, que varía muy poco de 180° , como si el prisma fuera una pequeña deformación del de Wollaston, y al cual es aplicable la teoría de errores expuesta en el tomo I, párrafo 17; según se vió allí, no estando deformado el ángulo en *C* (figura 48 del tomo I), habrá que hacer $\tau = -\frac{x}{2}$, y en la

fórmula que daba el ángulo φ formado por los rayos incidente y emergente, se suponía que el ángulo de incidencia α era muy pequeño, de modo que podía ponerse $\sec \alpha = 1$. Por lo tanto, puede escribirse:

$$\varphi = 90^\circ + \alpha - \alpha n,$$

y si se supone que $n = 1,5$, se tiene:

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Luego si el rayo que entra en el prisma por *P* (fig. 267) debe formar un ángulo de $91^\circ 10'$, ó más exactamente, de $91^\circ 8' 45''$, con el que sale por *Q*, tendrá que verificarse que $\alpha = 2^\circ 17' 30''$, es decir, que el ángulo *C* del prisma será de $177^\circ 42' 30''$, de acuerdo con los datos consignados en la figura 267, dentro de la falta de precisión de *n*.

La observación se hace del modo siguiente: se abre la ventanilla P de la izquierda (figura 267) y se marca un objeto o punto lejano que coincida con la imagen del punto cuya distancia se quiere medir, dada por reflexión, en el prisma. Así se tiene el ángulo A de la figura 266; se cierra entonces la ventanilla P (fig. 267), se abre la V y se marcha, hacia atrás, en la dirección de A , hacia el punto lejano anterior, hasta llegar al punto B (figura 266), en el cual deben verse en coincidencia el punto lejano y el C . La base AB , que se habrá recorrido andando hacia atrás, se multiplica por 50 para tener la distancia BC . Claro está que del mismo modo puede recorrerse la base andando hacia adelante, pero entonces se abre primero la ventanilla de la derecha y después la de la izquierda.

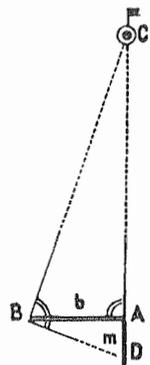


Fig. 268

También pueden emplearse para medir distancias las escuadras de reflexión y los prismas descritos en el tomo I, párrafos 14 y 15, para el trazado de alineaciones perpendiculares. En efecto, para determinar la distancia AC (fig. 268) se marca en A el ángulo recto CAB , y después en B el también recto CBD , teniéndose:

$$AC = \frac{b^2}{m}$$

Si se dispone en m una escala dividida según esta relación, correspondiente a una base constante (por ejemplo de 20 m), se puede leer directamente desde B la distancia buscada sobre dicha escala. En este principio se funda el telémetro de Paschwitz («Zeitschr. f. Verm.», 1902).

II. Telemetría por ángulos de depresión. Si desde un punto situado a una altura h sobre la superficie del mar, se mide el ángulo de depresión correspondiente a un punto de este último, por ejemplo, a la estela de un barco, se puede determinar la distancia s del punto visado, con la fórmula (11) del párrafo 32 (pág. 131). Para medir el ángulo de depresión T se puede emplear un círculo cenital o un nivel de visual libre, como el representado en la figura 11 (pág. 16), provisto de un tornillo especial para la medición de pequeños ángulos de elevación o depresión.

También pueden disponerse la observación y el cálculo de tal modo que no se mida directamente el ángulo de depresión T , sino la diferencia $T - t$, siendo t la depresión del horizonte.

III. Telemetría por enfoque del ocular en los anteojos. Se ha intentado muchas veces utilizar el movimiento del ocular, en los anteojos, para la medición de distancias, habiéndose construído algunos telémetros basados en este principio, como es el de Emsmann y el de Merz.

Para apreciar la viabilidad de este principio, hemos hecho ciertos experimentos, consistentes en determinar con toda exactitud la posición del ocular para diferentes distancias. Para ello, utilizamos el antejo, sin retículo, de un teodolito de Hildebrand (de distancia focal 27 cm, abertura de objetivo 28 mm y aumento de 23 diámetros), en el cual se medía con una escala milimétrica la distancia entre una señal hecha sobre el tubo portaocular y otra sobre el tubo exterior del antejo, a la vez que se enfocaba perfectamente una mira colocada en puntos situados a distancias diferentes. Para cada distancia D se medía tres veces la separación ε entre señales, y se tomaba la media aritmética, que figura en la tabla siguiente en la columna de valores *observados*, antes de los *compensados*; las columnas cuarta y quinta corresponden a los errores residuales v y a sus cuadrados v^2 .

Distancia D	Separación del ocular ε		v	v^2
	Observ.	Compens.		
5 m	22,63 mm	22,57 mm	- 0,06 mm	0,0036
10	14,23	14,22	- 0,01	1
20	10,35	10,31	- 0,04	16
30	9,00	9,04	+ 0,04	16
38	8,47	8,52	+ 0,05	25
49	8,00	8,08	+ 0,08	64
60	7,85	7,80	- 0,05	25
79	7,52	7,50	- 0,02	4
100	7,32	7,30	- 0,02	4
131	7,08	7,13	+ 0,05	25
180	6,97	6,98	+ 0,01	1
				0,0217

Las distancias D están calculadas desde el centro del instrumento; las distancias desde el objetivo son 0,16 m más cortas. Para la compensación, llamemos x al valor de ε correspondiente al infinito, y si b es la distancia entre el objetivo y la imagen del punto visado, tendremos, según la fórmula (1) de la página 235 del tomo I:

$$\frac{1}{D - 0,16} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

de donde:

$$b - f = \frac{bf}{D - 0,16}$$

Pero como

$$b - f = \varepsilon - x$$

se tiene:

$$\varepsilon = x + \frac{bf}{D - 0,16}$$

y el error residual será:

$$v = -\varepsilon + x + \frac{bf}{D - 0,16} \quad (1)$$

La distancia focal f determinada con todo cuidado fué $f = 270,6$ mm. Para x podemos tomar el valor aproximado 6,9 mm, deducido de la tabla anterior, y así tendremos para b el siguiente valor:

$$b = f + \varepsilon - 6,9 = 277,5 + \varepsilon$$

Sustituido este valor en la fórmula (1), y calculada ésta para las once observaciones, resulta para x el valor 6,57: los valores correspondientes de v , v^2 y los compensados de ε son los que figuran en la tabla. La suma de los cuadrados v^2 , es 0,0217, y por ser ε valor promedio de tres mediciones, se tendrá para el error medio de una observación:

$$m = \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{0,0217}{10}} = \pm 0,08 \text{ mm.} \quad (2)$$

Si llamáramos D a la distancia entre el punto visado y el objetivo, tendríamos, según la misma fórmula del tomo I antes citada:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

y diferenciando en D y b :

$$\frac{dD}{D^2} + \frac{db}{b^2} = 0, \quad \text{o sea, aproximadamente,} \quad dD = -\frac{D^2}{b^2} db$$

La diferencial db corresponde al error medio $\pm m$; luego el error medio de la distancia será:

$$M = \pm \frac{D^2}{f^2} m. \tag{3}$$

En números redondos, para la distancia focal anterior $f = 270,6$ mm se tendrá:

$$M = \pm \frac{D^2}{900} = \pm \left(\frac{D}{30}\right)^2 \tag{4}$$

Con esta fórmula puede calcularse el valor de M correspondiente a D :

Distancia	$D = 5$ m	10 m	50 m	100 m	200 m	300 m
Error medio $M = 0,03$		0,1	2,78	11	44	100

De aquí se deduce que la posición del ocular sólo puede utilizarse, en telemetría, para pequeñas distancias. Cuanto mayor sea la distancia focal, tanto mejor se puede aplicar este procedimiento a la medición de distancias.

Para hacer más practicable el principio de la telemetría por enfoque del ocular se podría construir un anteojo con una distancia focal *muy* grande, y por medio de varias reflexiones evitar la excesiva longitud del instrumento, como ya se hizo en el anteojo de prismas o prismático, descrito en el tomo I (pág. 267, fig. 289).

IV. Telémetro estereoscópico de Zeiss. La casa Zeiss, de Jena, construyó a fines del siglo pasado un telémetro fundado en la visión estereoscópica con ambos ojos. Esta visión proporciona al hombre un telémetro natural, cuya base es la distancia entre los dos ojos, que es por regla general de unos 65 mm.

La agudeza visual, o facultad de la apreciación de distancias por la visión natural estereoscópica (simple vista con ambos ojos) es de una gran precisión, como se comprueba colocando varillas de diferentes tamaños, unas junto a otras perpendicularmente al eje visual; como resultado de experimentos de esta clase, calculó Helmholtz en 1' el límite de la agudeza visual expresado en medidas angulares, que corresponde al límite del ángulo visual (poder separador) estudiado en el tomo I (§ 63, página 247); experimentos más recientes señalan para dicho límite el valor $1/2'$.

Esta agudeza visual se aumenta considerablemente con el empleo de un anteojo doble, en el cual sea muy grande la distancia entre los objetivos, tal como se ve en la figura 269, donde $a = OO'$, que es la distancia entre los ojos, se amplía hasta $\Delta = AA'$, aparte del aumento V del anteojo.

El aumento de la agudeza visual viene dado por la expresión $\frac{\Delta}{a} V$ (efecto plástico total). El anteojo tiene un sistema prismático de Porro y da la imagen directa; en la figura 269 sólo se ve el esquema del instrumento, en la parte que afecta al aumento de la distancia entre ojos OO' . Los dos prismas D y D' , que no intervienen en este aumento, llenan un fin secundario que veremos poco después.

Se puede comprender muy bien la construcción del telémetro estereoscópico, del modo siguiente: supongamos que se clavan en el terreno, en línea recta, una serie de jalones de 100 en 100 m, provisto cada uno de una tablilla que lleve anotada la distancia que lo separa del punto de partida: desde este último se fotografía toda la serie de jalones con una cámara estereoscópica. Mirando la prueba resultante, con un estereoscopio, se ve igual que se vería directamente la serie de jalones a simple vista, con ambos ojos; en particular la distancia entre jalones se aprecia exactamente lo mismo que al natural, a simple

vista. Las dos imágenes estereoscópicas se reducen y se reproducen en cristal (diapositivas) de tal modo que puedan disponerse en el plano-imagen de un doble anteojo terrestre; al mirar por el anteojo se verá otra vez la serie de jalones como si realmente estuvieran en el terreno, con la misma separación y la misma sensación de *relieve* que mirados a simple vista. Si se dirige el anteojo a un objeto cualquiera del terreno, por ejemplo a un árbol, se verá éste en la misma alineación que los jalones y puede precisarse rápidamente entre qué

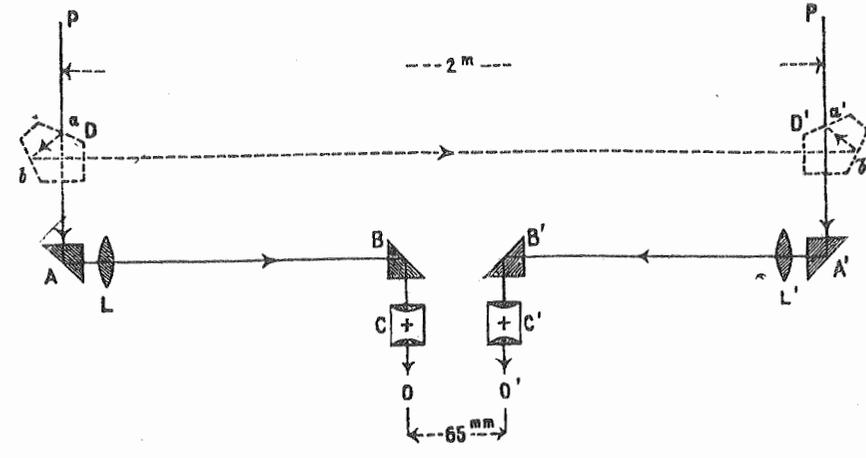


Fig. 269

par de jalones se encuentra; basta leer las tablillas correspondientes para tener la distancia que separa al árbol del observador. Con semejante dispositivo es posible también determinar la distancia de un objeto en movimiento, como, por ejemplo, un aeroplano, un pájaro volando, etc

En el telémetro estereoscópico de Zeiss se observan dos perfeccionamientos principales del principio anterior: en primer lugar, el doble anteojo ordinario está sustituido por otro con distancia entre objetivos muy aumentada, con lo cual, como ya hemos visto, aumenta también la sensación y la apreciación del relieve estereoscópico; en segundo lugar, no emplea las señales en línea recta, sino dispuestas en zig-zag, lográndose así una mayor claridad en la apreciación de las posiciones de los puntos visados. Las fotografías, de tamaño grande, se reducen y reproducen fotográficamente sobre cristal, y las diapositivas así obtenidas van en el plano-imagen del doble anteojo.

Existen otros telémetros estereoscópicos fundados en el principio de las «imágenes flotantes»; si en el plano-imagen de los dos oculares C y C' (fig. 269) van colocadas dos señales, a las cuales corresponden los dos rayos PA y PA' , se verán en el espacio, al mirar por el anteojo, dos imágenes flotantes, a distancia infinita. Si una de las señales, por ejemplo, la del ocular de la derecha C' , se corre un poco a la derecha, se acerca la imagen flotante en el espacio, y para una desviación δ de la señal C' , la distancia E de aquella será:

$$E = \frac{\Delta}{\delta} f,$$

donde Δ es la distancia AA' entre los rayos visuales y f es la distancia focal. La desviación δ se mide con un tornillo micrométrico.

La igualdad anterior $E = \frac{\Delta}{\delta} f$ expresa también la relación que deben guardar las divisiones de la escala de distancias dispuesta en el plano-imagen del anteojo.

Se ocurre ahora preguntar cómo puede conocerse el error de índice, es decir, el enf. que del telémetro al infinito; este error de índice corresponde a la lectura i para $E = \infty$ en el telémetro de las figuras 262 y 263. Para ello ideó Abbe el empleo de dos prismas D y D' , representados en la figura 269 (de forma igual a la indicada en la figura 29 del tomo I, página 39) y dispuestos de tal modo, que un hilo iluminado, que hay en el ocular de la izquierda C , se ve en el ocular de la derecha C' , como si fuera la imagen de un objeto situado a distancia infinita: el rayo correspondiente al hilo de C recorre la trayectoria $CBAab \dots b'a'A'B'C'$ entre C y C' , como se ve claramente en la figura.

En el plano-imagen (junto a las escalas de distancias) hay dos señales de ajuste, constituidas, una por el centro de un circulito y otra por una raya: para corregir el telémetro basta hacer coincidir la raya de uno de los anteojos con el centro del circulito del otro, por medio de los tornillos de corrección correspondientes.

El telémetro estereoscópico se fabrica en tres tamaños, con distancias entre objetos de 50 cm, 87 cm y 144 cm, y anteojos con aumento de 8, 14 y 23 diámetros respectivamente.

Según Hecker («Zeitschr. f. Verm.», 1901), con telémetro de tamaño medio, y tomando $30''$ como límite de la percepción estereoscópica, la precisión obtenida, según la distancia, es la siguiente, en metros y en tanto por ciento:

	Distancias:	500 m	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	8000 m
Error	en metros	3	12	50	110	300	800
	en %	0,6	1,2	2,5	3,7	5,0	10,0

§ 80. Levantamientos expeditivos

Terminaremos el capítulo de Taquimetría con algunas consideraciones sobre los levantamientos expeditivos, especialmente acerca de los realizados con brújula y podómetro, tan frecuentes en exploraciones, viajes, campañas, etc.

Supondremos, en primer lugar, que la brújula empleada sea una simple brújula de bolsillo o con alidada de pínulas (figs. 232 y 233, página 288). En el tomo I (págs. 76 a 80) y en este tomo II (pág. 212) nos hemos ocupado de la medición a pasos, y en las figuras 76 y 77 del primero (pág. 79) se ve un podómetro, que, como es sabido, cuenta mecánicamente el número de pasos dados.

Es evidente que valiéndose de una brújula para las direcciones y contando a pasos las distancias, se pueden llevar a cabo levantamientos de poca extensión. Como ejemplo, damos en la figura 270 el plano del oasis Farafrah, del desierto de Libia, levantado por Jordan en 1.º de enero y en 12 de mayo de 1874.

Tanto el poblado (*Gassr*) como el bosque de palmeras se rodearon con un polígono, cuyos lados se observaron y midieron con la brújula y el podómetro, representando los detalles por croquisación a ojo. Estos detalles hubieran podido también situarse con la brújula y el podómetro una vez cerrado el polígono, si hubiera sido precisa una mayor exactitud.

La brújula empleada fué la de bolsillo representada en la figura 232 (pág. 288), con sólo 5° a 10° de aproximación. De haber hecho dicho levantamiento en la actualidad, y después de la experiencia adquirida, hubiéramos empleado la brújula con alidada de pínulas (fig. 233, pág. 288), que da 1° de aproximación y que tiene además la ventaja de dejar libres para el dibujo las dos manos, una vez clavada en el suelo. En la figura 270

va anotado el número de pasos de cada tramo; los rumbos dados por la brújula están indicados con puntas de flecha. Las distancias correspondientes a detalles, expresadas en

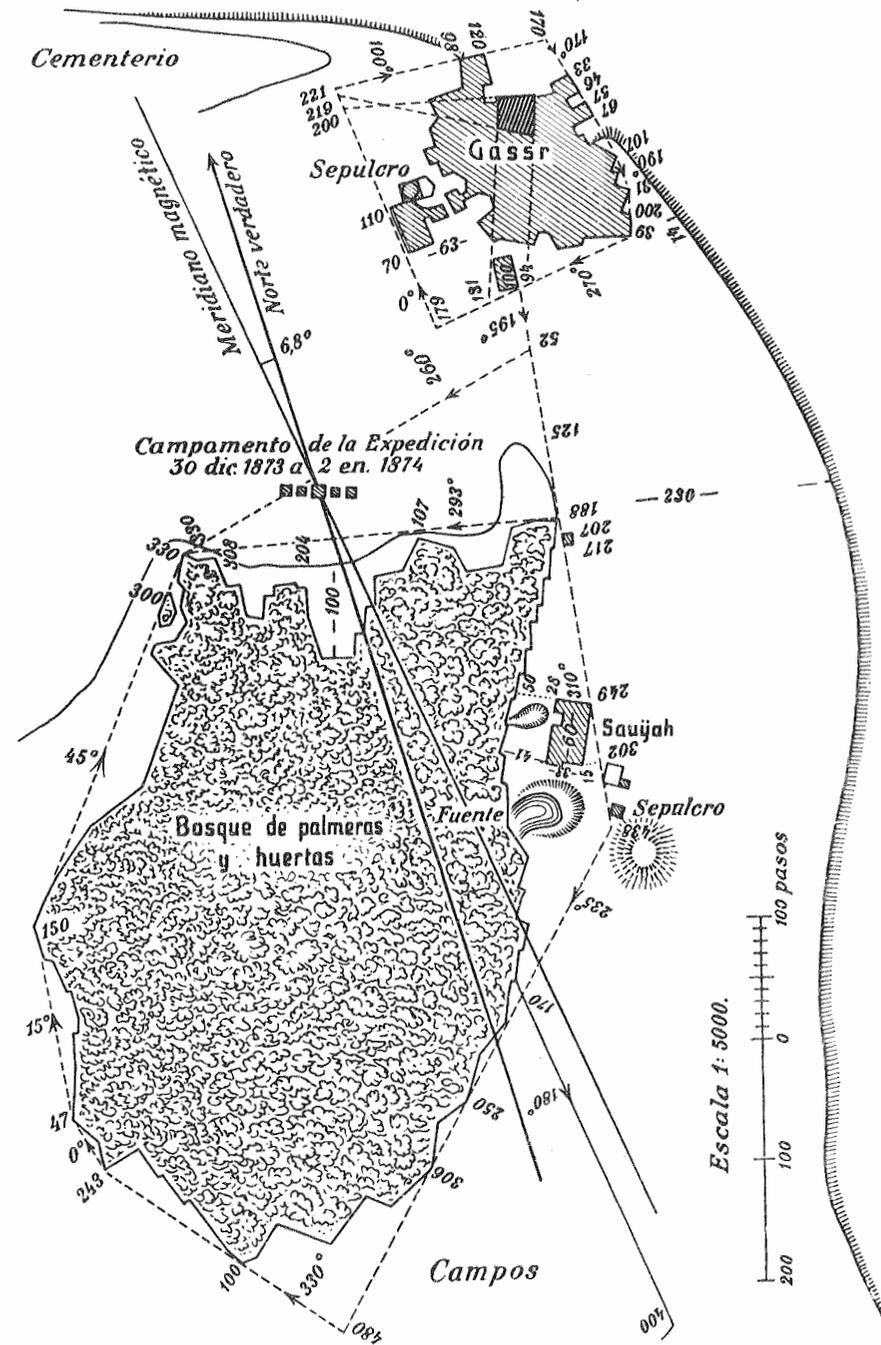


Fig. 270. — Levantamiento del oasis Farafrah, por pasos y rumbos

número de pasos, se indican entre guiones (por ejemplo — 60 — y — 33 —, dimensiones de la edificación *Saujah*), para diferenciarlas de las propias del polígono de rodeo. En la figura faltan bastantes detalles, omitidos para mayor claridad del dibujo.

Al polígono de rodeo del poblado (*Gassr*) corresponden los siguientes datos de campo, siendo el punto de partida el vértice sud-este del mismo:

179 pasos con rumbo	270°
221 » » » »	0
170 » » » »	100
107 » » » »	170
31 » » » »	190
39 » » » »	200

Análogamente se rodeó el bosque de palmeras con otro polígono, unido al anterior por una alineación de 188 pasos y 195° de rumbo, y una de cierre de 330 pasos y rumbo de 260°.

Con estos datos, un transportador y una escala conveniente, pueden ya dibujarse los polígonos. El error de cierre resultante se reparte y compensa como mejor parezca. Una vez dibujados los polígonos se pasan al papel todos los detalles que figuren en el croquis, estén o no tomados con la brújula y el podómetro. La nivelación puede hacerse con barómetro, o con un eclímetro de mano (§ 73).

También pueden hacerse los levantamientos rápidos sobre un tablero con una alidada y una declinatoria (§ 77).

Ferguson ha inventado un instrumento, el podógrafo, que traza automáticamente un itinerario recorrido a pasos; para ello se coloca el podógrafo con su eje longitudinal en la dirección del camino o itinerario que se recorre, y el papel donde ha de dibujarse este último se mantiene constantemente en una misma dirección, por medio de una brújula. El dispositivo trazador, que se mueve con movimiento uniforme, mediante un podómetro, en la dirección del itinerario, va dibujando sobre el papel de orientación fija el camino recorrido.

Al mismo inventor se debe otro instrumento, el ciclógrafo, que se atornilla sobre una bicicleta: el número de vueltas de las ruedas de ésta sirve para medir las distancias; el camino recorrido queda dibujado sobre un papel, que, al igual que en el podógrafo, se orienta siempre en la misma dirección con una aguja magnética.

Estos instrumentos se encuentran descritos con todo detalle en la Memoria de F. Koll sobre Instrumentos automáticos de medida, publicada en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1905, y en la de E. Hammer, en la «Zeitschr. f. Instr.» de 1903.

En levantamientos de itinerarios de gran longitud, como se presentan en terrenos desconocidos cartográficamente, o para completar mapas defectuosos, se emplean con éxito para determinar las direcciones, la brújula (de bolsillo o con chuzo) y para las distancias la duración de las marchas como ya se vió en el § 23 del tomo I (pág. 79). Es decir, que se trata de unir puntos dados (determinados astronómicamente, o sobre el plano o por triangulación) mediante itinerarios de brújula recorridos a pasos, para lo cual nos remitimos a lo dicho en los §§ 70 y 71, y para la reducción de longitud del itinerario (por error de cierre), al tomo I, § 109, página 467. Algunos de estos itinerarios son de gran longitud (de varios días de marcha). La determinación de alturas en esta clase de levantamientos se hace con barómetro; si se trata de hallar el desnivel de puntos destacados o radiados, puede emplearse un eclímetro de mano (§ 73).

Para levantamientos de más precisión, pero siempre rápidos y con medios auxiliares sencillos (instrumentos de campaña), se siguen los métodos ordinarios taquimétricos, si es necesario partiendo de una triangulación expeditiva, con bases medidas con regla o cinta métrica.

En nuestra obra titulada *Introducción a las observaciones científicas en campaña*

(3.ª ed. puesta al día por Peter Vogel, Hannover, 1906), damos con todo detalle la descripción de los métodos más empleados en topografía expeditiva.

Merecen citarse, en este respecto, la obra de Larminat titulada *Topografía práctica de reconocimiento y de exploración, con nociones elementales prácticas de geodesia y astronomía de campaña* (París, 1907) y la de Hugerhoff e Israel, titulada *Levantamientos cartográficos y situación geográfica en campaña*. Tomo I (Sammlung Göschen, N.º 607, Berlín, 1925) (*).

§ 81. Bibliografía sobre Taquimetría

A continuación damos una serie de obras, las más importantes, sobre Taquimetría, limitándonos, en cuanto a las más recientes, a las que no se han citado en este capítulo IV, a lo largo del texto de sus diferentes párrafos. Las Tablas taquimétricas quedaron ya reseñadas en el § 63 (pág. 249).

1680. *El nivel dióptrico del Dr. G. Montanari*, Venecia. Primera aplicación del retículo diastimométrico, con longitud constante de mira y escala filar.
1778. *Descripción y uso de un telescopio de reflexión y de refracción, y escalas para los levantamientos topográficos*, por WILLIAM GREEN, Londres, 1778. Diastimómetro con distancia interfilar constante y mira de longitud variable. (Véase en la página 232, la cita de James Watt.)
1813. *Introducción del retículo diastimométrico en Baviera*, por STEPPES («Zeitschr. des Hannov. Ing.- u. Arch.-Vereins», 1884). En mayo de 1813 construyó el relojero y mecánico Benedicto Liebherr, de Landshut, seis distanciómetros; también construyó otros tantos José Liebherr, mecánico de Munich, que fundó en 1804 el «taller matemático» con Reichenbach y Utzschneider.
1822. *Mémorial du Dépôt général de la guerre, imprimé par ordre du ministre; tomo IV, en 1826*. París, 1828. Nota sobre la estadía. La idea de medir las distancias por medio de un micrómetro no es nueva; este sistema habría sustituido desde mucho tiempo atrás a la cadena de agrimensor si se hubiera dispuesto de un artificio sencillo y económico para su aplicación; un ingeniero italiano (Negretti) presentó uno hace años, que consiste en visar una mira graduada bajo un ángulo constante.

En la página 457 de este mismo memorial se encuentra la reducción $l \cos^2 \alpha$ para la posición vertical de la mira, y una tabla para los valores $100 \cos^2 \alpha$. También se ve en dicha nota el diagrama representado en la figura 271, donde se tiene:

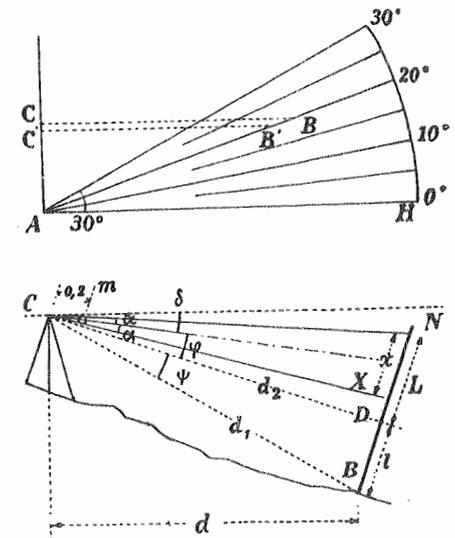
$$\begin{aligned} BC &= AB \cos \alpha, & BC &= AB', \\ B'C' &= AB' \cos \alpha, & B'C' &= AB \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

La corrección $\cos^2 \alpha = \cos \alpha \times \cos \alpha$ resulta mediante una doble proyección gráfica.

1832. *Teoría, construcción y aplicaciones del distanciómetro*. Imprenta y Librería de Chr. Th. Gross, Karlsruhe.

1850. DECHER. *Sobre el diastimómetro de Reichenbach*. «Dinglers Polyt. Journ.», 1850. Tomo 116.

(*) Muy práctico es el manual de «Topografía usual», de E. Liger. (G. Gili, Barcelona). — N. del T.



Figs. 271 y 272

Las divisiones de la mira no son todas iguales, sino que obedecen a la ecuación (fig. 272):

$$\frac{x}{d} = (d_2 - 0,2) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \varphi}$$

La distancia horizontal es:

$$d = \frac{d_2}{\cos \psi} \cos (\delta - [\varphi + \psi]).$$

1853. STEINHEIL. *Dinglers Polyt. Journ.* 1853, Tomo 129.

1856. BAUERNFEIND. *Elementos de Topografía*, 1.^a ed., Munich, 1856 Tomo I, Teoría del distanciómetro de Reichenbach, y Tomo II, Apéndice (Tablas para la reducción de distancias al horizonte, tanto para el antejo dirigido hacia arriba como hacia abajo).

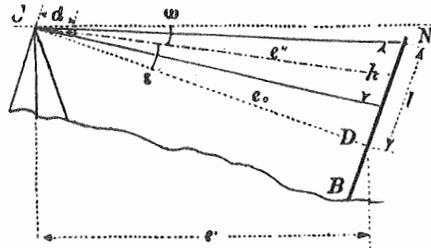


Fig. 273

Las divisiones de la mira son todas iguales, y la reducción se hace con la fórmula siguiente (fig. 273):

$$e = d + kh, \quad e_0 = e \cos^2 \varepsilon$$

$$\operatorname{sen} 2\varepsilon = \frac{2l - h}{e}$$

$$e' = e \cos^2 \varepsilon \cos (\omega \pm \varepsilon).$$

1865. *Levantamiento de planos con estadia*, por MOINOT, ingeniero encargado del estudio de la red central de Orleans (Perigueux), 1865.

1871. HEUSER. *Levantamiento topográfico con estadimetro, para los proyectos de vías férreas, con aplicación del método de Moinot* («Zeitschr. d. Hannov. Ing. - und Arch.-Vereins», 1871).

1873. *La taquimetría en los estudios de vías férreas*, por WERNER, Comisario de la Inspección General de Ferrocarriles de Austria. Viena, 1873.

1874. KREUTER. *El nuevo taquímetro del Instituto Reichenbach, de Ertel* (Munich), instrumento universal del ingeniero. Brünn, 1876.

1875. HELMERT. *Efecto de la inclinación de la mira en la medición de distancias* («Zeitschr. d. Osterr. Ing.- u. Arch.-Vereins», 1875).

1876. *Taquímetro de Wagner* (Taquiografómetro). («Zeitschr. f. Verm.», 1878).

1878. *El nuevo taquímetro de Tichy y Starke* («Wochenschr. des Osterr. Ing.- u. Arch.-Vereins», 1878).

1880. SCHELL. *La Taquimetría, con estudio especial del taquímetro de Tichy y Starke*.

1881. SCHELL. *Levantamientos topográficos con la plancheta taquimétrica de Tichy y Starke*. Viena, 1881.

1881. *Los distanciómetros ópticos, etc.*, por J. FRIEDRICH. Viena, 1881.

1882. DECHER. *Regla de cálculo para los levantamientos taquimétricos y barométricos, en Topografía general y en estudios de vías férreas*. Munich, 1882.

1883. SCHELL. *Aplicación a la Taquimetría de un micrómetro ocular*. Viena, 1883.

1884. JORDAN. *Métodos taquimétricos; estudio histórico y comparativo* («Zeitschr. d. Hannov. Ing. u. Arch.-Vereins», 1884).

1884. SALMOIRAGHI. *Nota sobre los nuevos taquímetros llamados cleps*. Milán, 1884.

1885. JEAN MEYER. *Memoria sobre la estadia topográfica y su aplicación*. París, 1885.

1886. LORBER. *Efecto de la inclinación de la mira en la medición de distancias y precisión de los micrómetros diastimométricos* («Zeitschr. f. Instr.», 1886).

1890. JORDAN. *Diferentes estudios experimentales sobre Taquimetría* («Zeitschr. f. Verm.», 1890).

1890. WILLIAM FORD STANLEY, óptico, Londres. «Descripción teórica y práctica de los instrumentos empleados en Agrimensura y Nivelación».

1891. HAMMER. *Nota sobre la práctica de la nivelación* («Zeitschr. f. Verm.», 1890).

1891. HAMMER. *Estudio histórico de la medición de distancias y de la Taquimetría* («Zeitschr. f. Verm.», 1891).

1892. GOULIER. *Estudio teórico y práctico de los levantamientos topográficos y en particular de los taquimétricos*, París, 1892.

1893. PULLER. *Taquímetro de corredera o de proyección* («Zeitschr. f. Verm.», 1893).

1893. USENER. «Analático, analático o analático?» («Zeitschr. f. Verm.», 1893).

1894. JADANZA. *Historia de la Celerimensura: extracto de la «Rivista di Topografia e Catasto»*. Roma, 1894 (Montanari 1680, Green 1778, Porro, Reichenbach).

1895. ORLANDI. *Taquimetría. Curso práctico de Topografía*.

1895. SANGUET. *La Taquimetría en Francia y en el extranjero* («La Réforme Cadastrale», 1895).

1896. HAMMER. *Práctica de los levantamientos de itinerarios con brújula y cinta métrica* («Zeitschr. f. Verm.», 1896).

1903. SCHULZE. *Levantamientos de planos estratégicos*. Leipzig y Berlín, 1903.

1906. D'ANGELO. *La Taquimetría y sus aplicaciones a los levantamientos de planos y al trazado de vías férreas*. París, 1906.

1917. MÜLLER. *Instrucciones para los levantamientos taquimétricos*, 3.^a edic. Viena, 1917.

1926. *Topografía y Cartografía. Guía para planos estratégicos*. Berlín, 1926.

1929. MILIUS. *Topografía moderna* («Osterr. Zeitschr. f. Verm.», 1929).

1930. WERKMEISTER. *Topografía* (Berlín, 1930).

1940. PASINI. *Tratado de Topografía*, 2.^a ed. (G. Gili, Barcelona).

CAPITULO V

Fotogrametría

§ 82. Objeto principal de la fotogrametría

La fotogrametría tiene por objeto la representación planimétrica y altimétrica del terreno por medio de fotografías de éste convenientemente obtenidas.

Prescindiendo de la deformación producida por el objetivo fotográfico, puede decirse que las imágenes fotográficas son proyecciones centrales del terreno sobre el plano-imagen de la cámara, siendo el centro de proyección el punto nodal posterior del objetivo.

Supongamos la placa en posición vertical (fig. 274), y sea O el centro de proyección o punto de vista; los rayos principales procedentes de dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 del terreno, cortan al plano-imagen en p_1 y p_2 , de modo que éstas son respectivamente las imágenes de aquéllos.

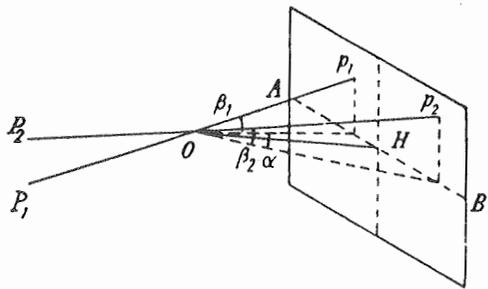


Fig. 274

Para la interpretación de la imagen hay que conocer la proyección del punto O sobre el plano-imagen, es decir, el *punto principal* H , así como la *distancia focal principal* OH . La intersección AB del plano horizontal que pasa por O con el plano-imagen se llama la *línea de horizonte*. Proyectando los dos puntos p_1 y p_2 sobre la línea de horizonte, se tiene que el ángulo α es el ángulo acimutal correspondiente a los dos puntos del terreno P_1 y P_2 , y los ángulos β_1 y β_2 son respectivamente los ángulos de altura de P_1 y P_2 (de signo contrario).

Es decir, que con una fotografía a la vista se pueden determinar, conociendo el punto principal, la línea de horizonte y la distancia focal principal, los ángulos acimutales entre puntos cualesquiera del terreno, y también los ángulos de altura que corresponden a estos mismos puntos.

En vez de los ángulos acimutales que forman entre sí las proyectantes de los puntos del terreno, pueden obtenerse los acimutes correspondientes respecto al punto principal H , de acimut cero.

Con una fotografía de esta clase se tienen los acimutes y ángulos de inclinación de todos los puntos del terreno representados en aquélla y correspondientes al punto O como estación, lo cual nos dice que todos los problemas trigonométricos que pueden presentarse en el terreno y en cuya solución intervengan ángulos horizontales o verticales, pueden resolverse por este método fotogramétrico.

Cuando la placa fotográfica no es vertical sino que forma un ángulo ω con esta posición, hay que conocer este ángulo ω además de la *orientación interior* (punto principal, línea de horizonte y distancia focal principal).

Según que las fotografías se hagan sobre el mismo terreno o desde aeroplano, se dice que la fotogrametría es terrestre o aérea.

Reseña histórica de la fotogrametría hasta 1900. El sistema de formación de planos por medio de imágenes obtenidas por perspectivas del terreno se empleó ya en el siglo XVIII. Por ejemplo, los exploradores franceses Beautemps-Beaupré, en los años 1791-1793, utilizaron, para el levantamiento de las islas Tasmann y Santa-Cruz, las perspectivas dibujadas a mano por ellos desde el barco en que navegaban; la distancia aparente de los objetos visados se medía con el sextante, para facilitar su dibujo y aumentar la precisión del mismo. A pesar de los buenos resultados obtenidos en aquellos levantamientos, se extendió poco tal sistema. En el año 1850 volvió a aplicarlo el comandante francés Laussedat, que empleó la cámara oscura para el dibujo de las perspectivas; utilizó también Laussedat la cámara fotográfica, entonces en sus comienzos, y construyó un aparato tomavistas especial, compuesto de una cámara fotográfica con un instrumento de medida.

En Alemania fué empleada por primera vez la fotogrametría en el año 1865 por el arquitecto Meydenbauer, para la representación de edificaciones de gran valor arquitectónico. Cuando la guerra de 1870-71 estaba ya tan desarrollada la fotogrametría que fué aplicada con éxito por ambas partes combatientes.

De gran importancia en el desenvolvimiento de la fotogrametría fueron los trabajos realizados por Jordan en el año 1874, en una expedición por el desierto de Libia. Sobre todo la teoría de los instrumentos contribuyó considerablemente al progreso de la fotogrametría.

Mucho desarrollo alcanzó la fotogrametría en Italia, donde desde 1878 fué empleada por el Estado Mayor para un gran número de levantamientos. A éstos siguieron los trabajos del Instituto Geográfico Militar de Viena, que pusieron de manifiesto la eficacia del método en los terrenos montañosos.

Finalmente, citaremos los trabajos de Koppe en Brunswick, que dieron lugar a la construcción de un nuevo fototeodolito y a la introducción de un método nuevo de reducción de la fotografía.

A la par con el desenvolvimiento de la práctica de la fotogrametría, se fué extendiendo y perfeccionando la teoría, mereciendo nombrarse en primer lugar los trabajos de S. Finsterwalder, de Munich.

En el siglo XIX empieza una época nueva para la fotogrametría, de cuyos perfeccionamientos nos ocuparemos en el § 88.

A continuación damos una reseña de publicaciones sobre fotogrametría.

JORDAN. *Sobre la aplicación de la fotografía a los levantamientos geométricos (fotogrametría), con un levantamiento fotogramétrico del poblado Gassr-Dachel, del oasis Farafrah, en el desierto de Libia* («Zeitschr. f. Verm.», 1876).

JORDAN. *Geografía física y Meteorología del desierto de Libia*. Kassel, 1876.

KOPPE. *La fotogrametría*. Weimar, 1889.

SCHEPP. *La fotogrametría en Italia*, por L. P. Paganini («Rivista di Topografia e Catasto», 1889).

STEINER. *La fotogrametría al servicio de los ingenieros*. Tratado de fotogrametría, Viena, 1891 y 1894.

SCHIFFNER. *La fototopografía o fotogrametría*. Halle, 1892.

DOLEZAL. *Aplicación de la fotografía a la topografía*. Halle, 1896.

RUMMER. *La fotogrametría en la cartografía militar* («Mitt. d. k. u. k. Milit.-geogr. Institutes XVI», 1896).

S FINSTERWALDER. *Práctica fotogramétrica* («Zeitschr. f. Verm.», 1896).

S. FINSTERWALDER. *El Vernagtferner, su historia y su topografía en los años 1888 y 1889*. Graz, 1889.

S. FINSTERWALDER. *Fundamento geométrico de la fotogrametría* («Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung», 1898).

HÜBL. *Levantamientos fotogramétricos* («Mitt. d. k. u. k. Milit.-geogr. Institutes XIX», 1899).

LAUSSEDAT. *Instrumentos, métodos y dibujo topográficos*. París, 1898-1903.

PAGANINI. *Fotogrametría*. Milán, 1901.

S. FINSTERWALDER. *Fotogrametría* («Enzykl. d. math. Wissenschaften, tomo VI, 1. Leipzig, 1906).

R. HUGERSHOFF. *Fotogrametría terrestre y aérea. Tratado de fotografía teórica y aplicada*. Tomo VII, Viena, 1930.

GRUBER. *Cursillo sobre fotogrametría*. Stuttgart, 1930.

P. GAST. *Curso de fotogrametría*. Leipzig, 1930.

K. RUBE. *Fotogrametría*. Barcelona, 1943.

§ 83. Fototeodolito, fototaquímetro o fotográmetero

En los primeros levantamientos fotogramétricos se empleaban cámaras fotográficas ordinarias, y la orientación interior de la placa se obtenía por mediciones auxiliares. Pero en seguida se ocurrió unir la cámara fotográfica a un teodolito, de modo que con un mismo

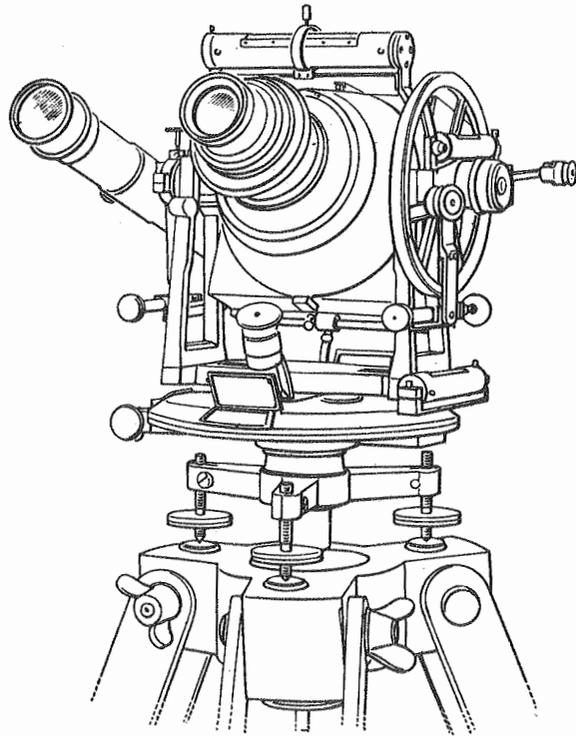


Fig. 275. - Fototeodolito de Koppe

aparato se pudiera obtener la fotografía y tomar los ángulos acimutales y cenitales, a la vez que fuera posible colocar verticalmente el eje principal de aquél y medir la inclinación de la placa sensible.

En las figuras 275 a 280 se ven varios fotográmeteros que reúnen estas condiciones. Como en los trabajos fotogramétricos siempre se trata de distancias grandes, no hay que variar la posición de la placa para lograr el enfoque, y por consiguiente, se pueden emplear cámaras rígidas, cuya distancia focal principal será igual a la distancia focal del objetivo. El *chassis* que lleva la placa sensible, y que constituye el fondo de la cámara, presenta un saliente en el punto medio de cada lado, que al impresionarse aquélla queda reproducido en la misma. Las dos rectas que unen estos puntos dan la línea de horizonte y la vertical, y por su intersección, el punto principal. A la

recta de unión de este punto principal con el centro de perspectiva, que es el punto nodal posterior del objetivo, le llamaremos *eje de la cámara*.

En la descripción de los fototeodolitos nos limitamos a la parte necesaria para la interpretación y reducción de la vista fotográfica, sin ocuparnos de los detalles de

construcción y ajuste, que pueden verse en cualquier tratado especial de fotogrametría. («Cursillo de fotogrametría», por Gruber, Stuttgart, 1930; «Fotogrametría», por Kurt Rube, Barcelona, 1943).

La figura 275 representa uno de los fototeodolitos más antiguos, el de Koppe, construido por Günther y Tegetmeyer, que sirve para obtener fotografías con cualquier inclinación del eje de la cámara; por estar la cámara montada directamente en el teodolito puede llamarse a este aparato fototeodolito universal. Consiste realmente este instrumento en un teodolito de anteojo excéntrico, con una cámara montada y centrada sobre el eje de muñones de aquél y que gira al mismo tiempo que el anteojo alrededor de este eje. La cámara es metálica y rígida, y puede fácilmente montarse y desmontarse, así como fijarse en su posición normal. La distancia focal principal es constante e igual a 153,75 mm; la placa sensible, de 10 × 10 cm, va apretada en su soporte con un muelle adecuado. El soporte del anteojo lleva un nivel para la verticalidad del eje principal del teodolito, la alidada lleva otro nivel para las lecturas del círculo cenital y sobre el eje de muñones del anteojo va un nivel caballero para la verificación del aparato. El limbo acimutal tiene 15 cm de diámetro, y el vertical 13 cm, con nonios de 20" de apreciación. Algunos modelos disponían de un almacén de placas para tomar diez vistas.

La casa Breithaupt construyó un fototeodolito semejante, pero con la cámara fija sobre el eje de muñones del anteojo.

También ha construido la casa Zeiss un fotográmetero, proyectado por Hugershoff, en el cual la cámara fotográfica puede girar alrededor del eje horizontal de giro del anteojo, como en el de Koppe, y hasta dar la vuelta entera de campana. El *chassis* porta-placas, que constituye el fondo de la cámara, lleva un ocular con retículo, que con el objetivo de la cámara forma el anteojo del teodolito. Con este anteojo pueden visarse los puntos para la medición de ángulos acimutales y cenitales. Paralelamente al eje horizontal de giro de la cámara va montado otro anteojo, en la parte baja del soporte de aquélla, y delante de su objetivo lleva un prisma de reflexión total, que al girar permite dar al eje de colimación la inclinación que se quiera. Este segundo anteojo sirve para la orientación del plano en levantamientos estereofotogramétricos.

En la figura 276 se ve un aparato moderno de esta clase, pero en el cual la placa es siempre vertical. En este fototeodolito de Hugershoff va la cámara fija sobre una plataforma nivelante, y puede girar alrededor del eje vertical del aparato; para poder fotografiar partes más altas o más bajas del terreno, va montado el objetivo sobre una corredera, que se mueve con un mecanismo de piñón y cremallera, y cuya posición se lee sobre una escala milimétrica. Este movimiento arrastra también a las dos señales laterales o referencias del *chassis*, de modo que la línea de horizonte es la correspondiente en todo momento a la altura del objetivo. Las placas son de 9 × 12 cm y el objetivo tiene 13,5 cm de distancia focal.

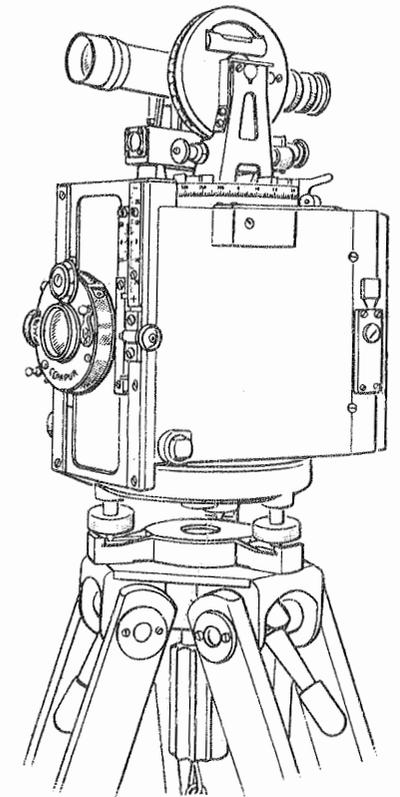


Fig. 276. - Fototeodolito de Hugershoff (Zeiss-Aerotopograph)

El teodolito que hay sobre la cámara es de un minuto de precisión en la lectura de sus dos limbos. Entre los soportes del anteojo hay una declinatoria. El anteojo tiene 15 aumentos y está provisto de retículo diastimométrico.

Para los usos estereofotogramétricos tiene la alidada del teodolito unos topes, con los cuales se coloca el anteojo directamente en los 60° , 90° y 120° , para poder disponer las cámaras en dos trípodes, exactamente perpendiculares a la base, o formando con ésta ángulos iguales.

Las figuras 277 y 278 representan el fototeodolito de precisión de Zeiss, construido especialmente para estereofotogrametría, y en el cual se obtienen las fotografías con el eje de la cámara siempre horizontal. La cámara va montada en la plataforma nivelante del trípode según el principio del teodolito desmontable (tomo I, § 73, pág. 307). El tornillo K

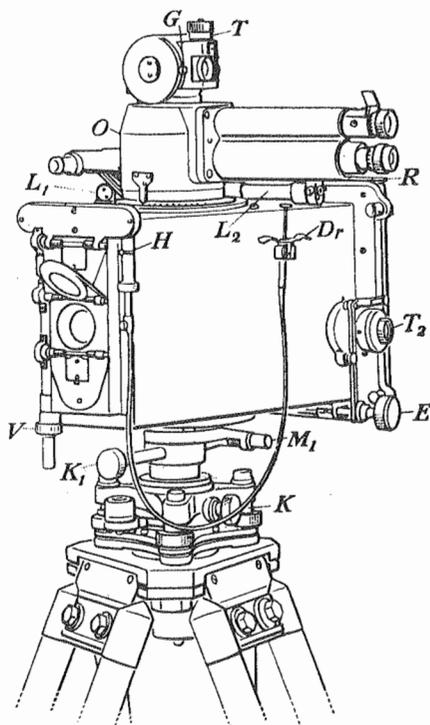


Fig. 277. — Fototeodolito de Zeiss

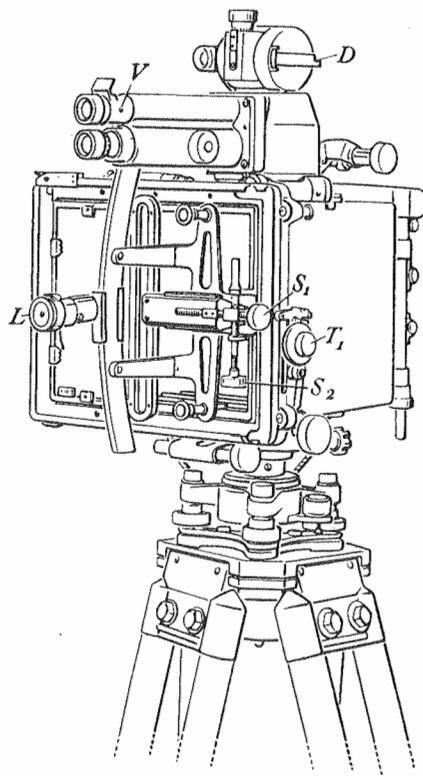


Fig. 278. — Fototeodolito de Zeiss

sirve para sujetar la cámara en dicha plataforma, y K_1 y M_1 son respectivamente los tornillos de fijación y de coincidencia. Con los dos niveles cruzados L_1 y L_2 , fijados sobre la cámara, se puede colocar verticalmente el eje principal del aparato.

La cámara tiene tres objetivos, uno sobre otro, de los cuales tanto el de arriba como el de abajo distan 35 mm del central. El objetivo inferior abarca un ángulo de depresión de 25° . Para impresionar las placas se abre el objetivo con el disparador D_r , que obra sobre uno u otro objetivo según la posición del botón V . También puede abrirse el obturador con la palanca H , cuando la exposición haya de ser muy larga o para hacer alguna verificación. El *chassis* lleva dos referencias para la línea vertical y seis laterales para las tres líneas de horizonte correspondientes a los tres objetivos. El botón T_1 (fig. 278) sirve

para marcar el número que queda impresionado sobre cada placa. El objetivo tiene 19 cm de distancia focal y las placas son de tamaño 13×18 cm.

El fiador R impide que pueda salirse el almacén de placas, que entra a corredera en su alojamiento, y con el botón E se aprietan las placas contra el bastidor o *chassis*.

Sobre la cámara va un dispositivo para la orientación de las vistas respecto a la base, fundado en el principio de la autocolimación. Para ello lleva la cámara en su parte superior un prisma de sección octogonal, cuyas caras verticales están plateadas para que sirvan de espejo; alrededor de este prisma pueden girar dos anteojos horizontales superpuestos, de los cuales, el superior, al girar alrededor del eje vertical del prisma, llega a disponerse de modo que se ve el hilo vertical de su retículo confundido con la imagen del mismo, reflejada por una de las caras especulares. Una vez el anteojo en esta posición, se aprieta el tornillo de presión y se gira toda la cámara alrededor de su propio eje vertical hasta que con el anteojo de abajo se enfile el otro extremo de la base, en el cual se habrá colocado un disco de mira sobre un trípode con plataforma nivelante. Con este dispositivo pueden tomarse las dos fotografías perpendicularmente a la base, o formando un mismo ángulo con ésta, sin dejar de ser paralelas entre sí las dos posiciones del eje de la cámara. En la figura 281 pueden verse más detalles de este sistema orientador.

La figura 279 representa un fototeodolito muy moderno de Wild, construido en Heerbrugg (Suiza), con el cual pueden obtenerse las fotografías con la cámara horizontal o inclinada.

En la plataforma nivelante puede montarse el soporte de la cámara o el teodolito. El soporte de la cámara consiste en un estribo de acero que lleva los cojinetes para el eje horizontal de giro de aquélla. Las placas sensibles tienen 10×15 cm de tamaño y por medio de una varilla especial pueden darse a la cámara inclinaciones de $+12^\circ$, $+6^\circ$, 0° , -6° , -12° y -18° . El bastidor trasero lleva señales para la línea de horizonte y para la vertical; además, a un lado del bastidor va una ruedecilla con números, con la cual se marca el número de orden de cada fotografía, que queda impresionado en la placa al tomar la vista correspondiente. El equipo completo consta de dos cámaras, una de 165 mm y otra de 240 mm de distancia focal.

El teodolito va fijado sobre el estribo-soporte de la cámara, de tal modo que el círculo acimutal fijo marca 0° cuando el eje de la cámara está sobre el plano de colimación del anteojo. El teodolito puede montarse directamente sobre la plataforma nivelante, en vez

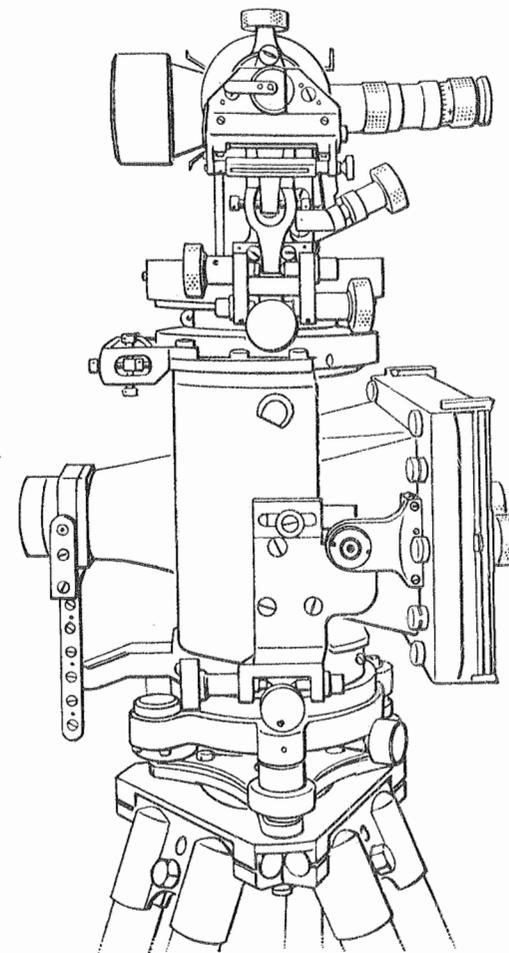
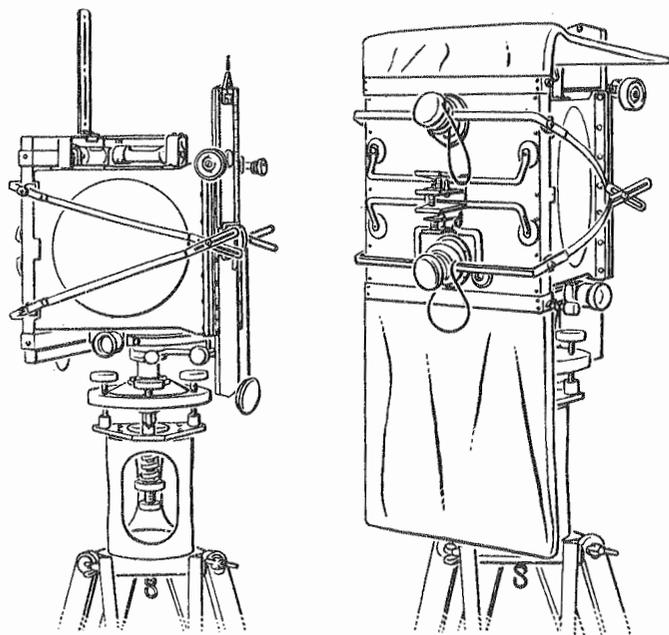


Fig. 279. — Fototeodolito de Wild

del estribo de la cámara, y entonces se emplea como teodolito repetidor para triangulaciones y trabajos taquimétricos. Los limbos, grabados en cristal, tienen 95 y 50 mm de diámetro, respectivamente, y están divididos en tercios de grado sexagesimal o en quintos de grado centesimal. El anteojo tiene 23 aumentos.

Por lo demás, la construcción del teodolito es, en esencia, la misma del representado en la figura 329 del tomo I (pág. 292).

En las figuras 280 *a* y *b* se ve el teodolito de Finsterwalder, construido por Zeiss, especialmente indicado, por su poco peso, para los trabajos fotogramétricos de exploración. El objetivo tiene 16 cm de distancia focal y puede moverse verticalmente sobre una corredera, según requiera la inclinación del terreno. En vez de círculo vertical lleva la corredera



Figs. 280 *a* y *b*. — Fototeodolito de Finsterwalder, de la casa Zeiss

una escala que da directamente la tangente del ángulo vertical. Para no aumentar el peso del aparato, no lleva éste anteojo propiamente tal, sino que en el fondo de la cámara van dispuestos dos oculares con retículo, que al correrse el objetivo arriba o abajo quedan automáticamente dirigidos al centro de este último, gracias a un sencillo dispositivo de varillas de transmisión. Se emplea el ocular de arriba o el de abajo, según que el objetivo se corra hacia arriba o hacia abajo. Para la medición de ángulos acimutales hay un círculo horizontal sobre la plataforma nivelante, por debajo de la cámara.

Para poner y quitar las placas se emplean dos bolsas de cuero que se sujetan al fondo de la cámara, una arriba y otra abajo: la de arriba constituye el almacén propiamente dicho, y en la de abajo van reuniéndose las placas impresionadas. Mediante unas guías metálicas se hace que la placa caiga en el *chassis* en la posición debida, manteniéndose inmóvil gracias a un muelle. Para que la bolsa inferior no pueda chocar con el trípode al girar el aparato alrededor de su eje vertical, entorpeciendo así el manejo de aquél, lleva el trípode sólidamente unido a su plataforma una especie de pedestal bastante alto, sobre el cual va la plataforma nivelante.

Este fototeodolito es realmente una modificación, muy perfeccionada, del antiguo

teodolito fotogramétrico de Finsterwalder, construido por la casa Ott, de Kempten, en el año 1895.

En la figura 281 se ve con todo detalle el mecanismo del dispositivo orientador del fototeodolito de las figuras 277 y 278: *P* es el prisma de sección octogonal, fijado sobre la cámara, en el medio del soporte o zócalo *St*; las ocho caras especulares del prisma forman entre sí los ángulos que se indican en la parte inferior de la figura para las normales a aquéllas. El anteojo autocolimador *F*, tiene en *O*₂ su objetivo y en *S* el retículo, que se ilumina con el pequeño prisma *P*₁. El anteojo visor *F*₂ tiene el objetivo en *O*₁, por encima del prisma *P*₂, de modo que considerando la marcha inversa de un rayo luminoso se ve que este prisma lo refleja hacia arriba, por dentro del prisma hueco *P*, y al llegar al prisma *P*₃ vuelve a tomar su dirección primitiva. El prisma *P*₃ puede girar un poco alrededor de un eje horizontal, mediante el tornillo *Trh*, para dirigir visuales más o menos inclinadas en uno u otro sentido, leyéndose la inclinación en la escala *G* y en el tambor micrométrico *T* (fig. 277). La lente móvil *F*₀, dentro del anteojo *F*₂, sirve para enfocar a diferentes distancias.

Ambos anteojos van fijos a la caja *G*, que gira alrededor del soporte *St* del prisma *P*.

Verificación y corrección del dispositivo orientador. El prisma principal debe estar colocado de tal modo sobre la cámara, que cuando el anteojo superior esté autocolimado, el eje de colimación del inferior esté en el plano determinado por la línea vertical de la placa y por el punto nodal posterior del objetivo de la cámara. La corrección lógica consistiría en mover convenientemente el prisma, pero por lo poco practicable de la misma se recurre a hacerla moviendo el retículo del anteojo visor. Para la verificación se emplea un dispositivo especial, que como se ve en la figura 278, se puede atornillar sobre el *chassis* o bastidor de las placas; este dispositivo consiste en un soporte que lleva una especie de cursor con una lámina de cristal, la cual por medio de los tornillos de llamada *S*₁ y *S*₂ puede colocarse de tal manera que una doble raya vertical en ella grabada, coincida con las señales de arriba y de abajo del bastidor de las placas. Esta coincidencia se aprecia con el microscopio simple *L*, que entra más o menos en un mango. Si la lámina de cristal está en su posición exacta, puede considerarse la cámara como un anteojo, cuyo objetivo es el de aquélla, el ocular es la lente *L* y la doble raya del cristal es el hilo vertical del retículo.

Con este anteojo se enfila un objeto lejano, y después de hecha la autocolimación, se corre el retículo del anteojo visor situado sobre la cámara hasta que se enfila el mismo objeto. Así se tiene verificado y corregido el dispositivo orientador.

El teodolito. Para la observación angular, aneja al levantamiento fotogramétrico, se emplea un teodolito repetidor especial, con idéntico alojamiento en su plataforma nivelante que la cámara, de modo que pueda cambiarse por ésta o por el disco de mira. El

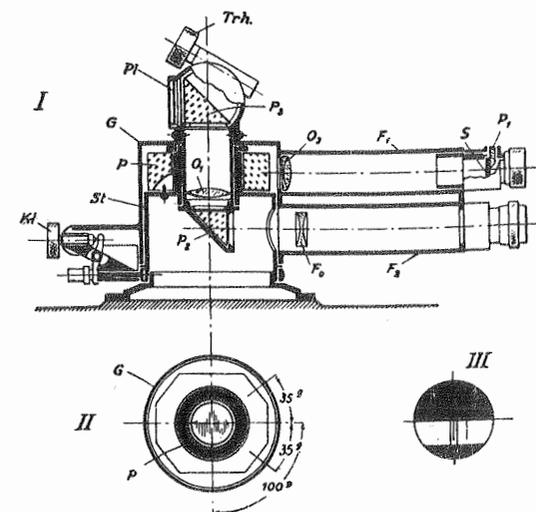


Fig. 281. — Dispositivo orientador del fototeodolito

anteojo tiene retículo diastimométrico, por lo cual puede utilizarse el teodolito como taquímetro si así se precisa.

El tornillo de coincidencia del círculo acimutal es un tornillo micrométrico, de funcionamiento análogo al de los tornillos de pendientes o de tangentes (§ 13, pág. 60), y que juntamente con una mira horizontal de longitud constante, sirve para determinar la longitud de la base en los levantamientos estereofotogramétricos.

El equipo completo de campo está compuesto por el teodolito, la cámara fotográfica, el disco de mira, la mira y tres trípodes.

Fototeodolito basculante de Zeiss. La figura 282 representa otro fototeodolito de Zeiss, que análogamente al de Wild (fig. 279) lleva sobre la plataforma nivelante el soporte de la cámara, la cual puede tomar inclinaciones de -10g , 0 , $+10\text{g}$ y $+21\text{g}$, que se leen sobre un sector graduado. Sobre el soporte de la cámara va montado el dispositivo orientador de la figura 281, cuyo prisma principal, unido a dicho soporte, puede corregirse directamente de modo bien sencillo.

En vez del dispositivo orientador puede montarse sobre el soporte de la cámara un teodolito (por ejemplo el de la figura 325 del tomo I), orientándose el círculo acimutal respecto al eje de la cámara con un dispositivo especial de colimación. También puede colocarse el teodolito directamente sobre la plataforma nivelante, en vez del

soporte de la cámara. A cada fototeodolito corresponde un equipo de dos cámaras, una de 16,5 cm de distancia focal y otra de 25 cm; el tamaño de las placas, en ambas cámaras, es de 13×18 cm.

Verificación y corrección de los fototeodolitos. Según la construcción del fototeodolito, así se verifica y corrige. En los de Koppe (fig. 275) y Breithaupt (pág. 339) se empieza por hacer la verificación considerando el aparato como simple teodolito: es decir, se corrigen los niveles que indican la verticalidad del eje principal y la horizontal del eje de muñones del anteojo, y se elimina el error de este eje y el del eje de colimación, del modo descrito en el tomo I (§§ 56 y 76).

En cuanto a la corrección del error de índice en el círculo cenital hay que tener en cuenta la posición de la cámara. Es preciso, en primer lugar, colocar verticalmente el plano-imagen de la cámara, para lo cual puede seguirse el siguiente procedimiento: se nivela el fototeodolito, y una vez conseguida la verticalidad de su eje principal, se coloca en el *chassis* en vez de la placa sensible, una placa de cristal de caras perfectamente paralelas y con la interior plateada; a cierta distancia del teodolito se dispone un nivel y una mira de nivelación; después de hecha sobre esta última la lectura con el nivel horizontal, se dirige éste hacia el teodolito y se gira alrededor de su eje vertical y del horizontal de muñones, hasta que se vea en el espejo la imagen de la mira; si la placa espejular está verticalmente colocada, la visual horizontal del nivel dará sobre la mira vista en aquella la misma lectura que vista directamente.

Para fijar esta posición del plano-imagen se coloca en 0° (o en 90°) la alidada del

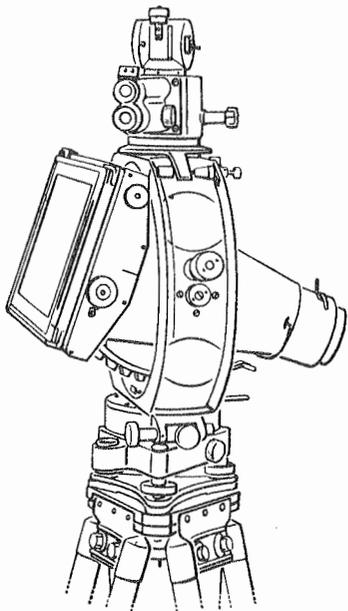


Fig. 282

Fototeodolito basculante de Zeiss

círculo cenital por medio del tornillo de coincidencia correspondiente, y se cala el nivel de esta alidada con sus tornillos de corrección. De este modo el limbo cenital dará directamente la inclinación del plano-imagen para cualquier posición de la cámara.

También debe tenerse la lectura 0° (ó 90°) en el círculo cenital, cuando la visual del anteojo es horizontal, lo cual se consigue midiendo un ángulo vertical cualquiera en las dos posiciones del anteojo, para determinar la corrección de índice (§ 25, página 106); así se halla el verdadero ángulo de inclinación del punto visado, y en este ángulo se fija la alidada del círculo cenital, y por medio de los tornillos de corrección del retículo se hace que el anteojo enfile el punto antes visado.

§ 84. Orientación interior del fototeodolito

Después de hechas todas las correcciones referentes a la medición de ángulos horizontales y verticales, hay que determinar la orientación interior del fototeodolito, es decir, la distancia focal principal, la posición del punto principal, la línea de horizonte y la línea vertical de la placa. La definición de los elementos de la orientación interna, dada en el párrafo 82 (pág. 336) es aplicable solamente a la cámara fotográfica aislada; cuando esta última está unida al teodolito, aquella definición puede resultar defectuosa y en algunos casos inadecuada.

Fototeodolito con cámara basculante. En estos aparatos, en que la cámara puede girar alrededor de un eje horizontal (figs. 275 y 279), tiene que ser paralelo el plano-imagen al eje de giro de la cámara. En el caso en que esta condición no se cumpla exactamente, hay que tomar como punto principal de la placa la intersección con ésta de la horizontal trazada por el punto principal interior del objetivo perpendicularmente al eje de giro de la cámara, suponiendo vertical la placa. Más adelante veremos el efecto que la falta de paralelismo entre el plano-imagen y el eje de giro de la placa puede producir en el levantamiento fotogramétrico.

El punto principal así definido se determina dirigiendo el anteojo, una vez hechas todas las correcciones, a un punto lejano bien marcado, y haciendo una fotografía: la imagen de este punto da el punto principal buscado.

Fototeodolito con placa vertical. En estos aparatos (figs. 276 y 277) hay que comprobar ante todo que el plano-imagen es vertical cuando el eje principal del teodolito también lo es, o que, aun estando nivelado el instrumento, aquel plano forma un ángulo v con la vertical. Esta prueba puede hacerse por el procedimiento ya indicado (pág. 344) para determinar la verticalidad del plano-imagen de la cámara. Si la lectura hecha sobre la imagen de la mira dada por el espejo se diferencia en Δ de la lectura directa, y si s es la distancia entre la mira y el fototeodolito, se tendrá:

$$v = \frac{\Delta}{2s} \rho.$$

En el supuesto de que el ángulo v es siempre muy pequeño, la línea de horizonte es la intersección del plano-imagen con el plano horizontal que pasa por el punto principal interior del objetivo. El pie de la perpendicular bajada desde este segundo punto principal del objetivo a la línea de horizonte, es el punto principal de la placa.

En los fototeodolitos modernos, y gracias a la precisión de los medios mecánicos auxiliares, siempre es posible colocar el plano-imagen casi exactamente paralelo al eje de giro de la cámara y al eje vertical del aparato, de tal modo que los errores que pudieran cometerse serían despreciables. Por consiguiente, vamos a determinar los elementos de la orientación interior, dando por supuesta la falta de errores en el acoplamiento del teodolito con la cámara.

Determinación de la orientación. La determinación de la distancia focal principal, de la posición del punto principal y de la línea de horizonte, se puede hacer sin necesidad de medios auxiliares especiales, con sólo hacer la fotografía midiendo al mismo tiempo los ángulos horizontales y los verticales. Para la orientación completa se necesitan tres puntos de mira distantes, que al hacer la fotografía queden perfectamente destacados en ésta y cuyos acimutes y alturas se habrán medido también con los círculos horizontal y vertical del fototeodolito. En la fotografía obtenida se proyectan los tres puntos sobre la línea de mira de los dos índices o señales laterales del bastidor, que suponemos colocada aproximadamente horizontal al hacer la fotografía.

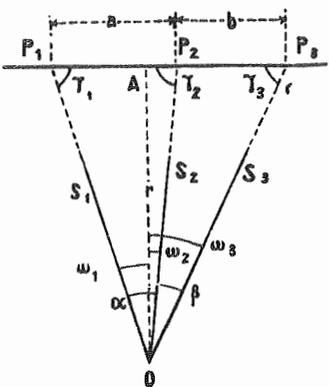


Fig. 283

Sean P_1, P_2, P_3 (fig. 283) las proyecciones de los tres puntos, cuyas distancias $P_1P_2 = a$ y $P_2P_3 = b$ se miden directamente. Además, de la medición de los acimutes se deduce el valor de los ángulos $P_1OP_2 = \alpha$ y $P_2OP_3 = \beta$,

y con estos datos hay que determinar la posición del punto A y la distancia focal $OA = f$.

En realidad, tenemos que resolver el problema de la trisección inversa (Pothenet), con la simplificación que supone el estar los tres puntos en línea recta. Según sabemos, se tiene:

$$s_2 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma_1 = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma_3, \text{ de donde } \frac{\sin \gamma_3}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \operatorname{tg} \lambda \quad (1)$$

y de aquí:

$$\frac{\sin \gamma_1 - \sin \gamma_3}{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_3} = \frac{1 - \operatorname{tg} \lambda}{1 + \operatorname{tg} \lambda} = \cot (45^\circ + \lambda) \quad (2)$$

o sea:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2} \cot (45^\circ + \lambda). \quad (3)$$

Ahora bien, por ser conocidos α y β también lo es la suma $\gamma_1 + \gamma_3 = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, y ya pueden conocerse también γ_1 y γ_3 . También puede expresarse el valor (3) en función de α y β , del modo siguiente:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2} = \cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cot (45^\circ + \lambda). \quad (4)$$

De todos modos, una vez conocidos γ_1 y γ_3 , resulta inmediatamente el valor de γ_2 , y las tres distancias s_1, s_2 y s_3 vendrán dadas por estas tres fórmulas:

$$s_1 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma_2, \quad s_2 = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma_1 = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma_3, \quad s_3 = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma_2.$$

Los ángulos ω_1, ω_2 y ω_3 que los tres rayos convergentes en O forman con OA , se deducen también directamente de las siguientes igualdades:

$$\omega_1 = 90^\circ - \gamma_1, \quad \omega_2 = 90^\circ - \gamma_2, \quad \omega_3 = 90^\circ - \gamma_3.$$

La distancia focal $OA = f$ puede expresarse de tres maneras, a saber:

$$f = s_1 \sin \gamma_1 = s_2 \sin \gamma_2 = s_3 \sin \gamma_3$$

o sea:

$$f = s_1 \cos \omega_1 = s_2 \cos \omega_2 = s_3 \cos \omega_3$$

o también, en función de a, b y ω :

$$f = \frac{a \cos \omega_1 \cos \omega_2}{\sin (\omega_2 - \omega_1)} = \frac{b \cos \omega_2 \cos \omega_3}{\sin (\omega_3 - \omega_2)} \quad (5)$$

Las distancias respectivas de los tres puntos P_1, P_2, P_3 al punto A , serán:

$$\left. \begin{aligned} AP_1 &= s_1 \sin \omega_1 & AP_2 &= s_2 \sin \omega_2 & AP_3 &= s_3 \sin \omega_3 \\ &= f \operatorname{tg} \omega_1 & &= f \operatorname{tg} \omega_2 & &= f \operatorname{tg} \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Además de los ángulos acimutales se miden también los de altura de los tres puntos, que sirven para determinar la posición de la línea de horizonte. En efecto, designando estos ángulos con η_1, η_2 y η_3 , y una vez conocidos los valores de s_1, s_2 y s_3 , podremos calcular las tres ordenadas del modo siguiente:

$$y_1' = s_1 \operatorname{tg} \eta_1, \quad y_2' = s_2 \operatorname{tg} \eta_2, \quad y_3' = s_3 \operatorname{tg} \eta_3. \quad (7)$$

Se miden en la fotografía las distancias de los tres puntos a la recta que une las dos señales laterales del bastidor porta-placas, obteniéndose los tres valores y_1, y_2, y_3 , de modo que las diferencias

$$y_1' - y_1, \quad y_2' - y_2, \quad y_3' - y_3$$

darán el valor medio de la corrección de las dos señales laterales del bastidor. Los tres valores de estas diferencias indican al mismo tiempo si la línea de unión de las referencias puede considerarse aproximadamente horizontal.

Se traza en la fotografía la recta que une la señal de arriba con la de abajo, que por su intersección con la de unión de referencias laterales, da el punto A_0 , que llamaremos centro de la fotografía. Se miden las abscisas

$$A_0P_1, \quad A_0P_2, \quad A_0P_3,$$

y las diferencias

$$AP_1 - A_0P_1, \quad AP_2 - A_0P_2, \quad AP_3 - A_0P_3$$

dan la distancia entre el centro y el punto principal de la fotografía.

Ejemplo. Con un fototeodolito de Zeiss, modelo antiguo, de placa vertical, hicimos un levantamiento que comprendía bastantes puntos perfectamente conocidos y determinados en el terreno; para la orientación interior del aparato por las fórmulas (1) a (7), se eligieron tres puntos, cuyas coordenadas se midieron en la fotografía, tomando como eje de abscisas la recta de unión de las referencias laterales, y el punto de intersección de las dos rectas de unión, o sea, el centro de la placa, como origen de coordenadas. Con un coordinatómetro o comparador de placas (pág. 354) se obtuvieron los siguientes valores:

$$\begin{aligned} x_1 &= -75,271 \text{ mm} & y_1 &= +0,220 \text{ mm} \\ x_2 &= +5,977 & y_2 &= +4,069 \\ x_3 &= +51,019 & y_3 &= +4,565. \end{aligned}$$

Se midieron también los ángulos acimutales y de altura correspondientes a los puntos del terreno elegidos en la fotografía, cuyos valores eran:

$$\begin{aligned} \alpha &= 23^\circ 28' 03'' & \eta_1 &= 0^\circ 04' 07'' \\ \beta &= 13 \ 15 \ 57 & \eta_2 &= 1 \ 14 \ 38 \\ & & \eta_3 &= 1 \ 20 \ 30. \end{aligned}$$

Las distancias a y b (fig. 283) entre los puntos, medidas sobre la fotografía, fueron:

$$a = 81,248 \text{ mm}, \quad b = 45,042 \text{ mm}.$$

Y aplicando valores numéricos en las fórmulas (1) y (4), resulta:

$$\lambda = 46^\circ 06' 22'', \quad 45^\circ + \lambda = 91^\circ 06' 22'', \quad \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{2} = -3^\circ 19' 42'',$$

y como por otra parte

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2} = 71^\circ 38' 00'',$$

se tiene:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 = 68^\circ 18' 18'' & \gamma_2 = 88^\circ 13' 39'' & \gamma_3 = 74^\circ 57' 42'' \\ \omega_1 = 21 \ 41 \ 42 & \omega_2 = 1 \ 46 \ 21 & \omega_3 = 15 \ 02 \ 18. \end{array}$$

De las dos ecuaciones (5) se obtiene para f el mismo valor:

$$f = 189,483 \text{ mm}.$$

Las ecuaciones (6) dan, con los anteriores valores numéricos:

$$\begin{array}{lll} AP_1 = -75,382 \text{ mm} & AP_2 = +5,864 \text{ mm} & AP_3 = +50,906 \text{ mm} \\ x_1 = -75,271 & x_2 = +5,977 & x_3 = +51,019 \\ \hline + 0,111 \text{ mm} & + 0,113 \text{ mm} & + 0,113 \text{ mm} \end{array}$$

Estos resultados nos indican que la línea vertical está 0,11 mm a la derecha del centro de la fotografía.

Por último, aplicando las fórmulas (7), se tiene:

$$\begin{array}{lll} y_1' = +0,244 \text{ mm} & y_2' = +4,116 \text{ mm} & y_3' = +4,595 \text{ mm} \\ y_1 = +0,220 & y_2 = +4,069 & y_3 = +4,565 \\ \hline -0,024 \text{ mm} & -0,047 \text{ mm} & -0,030 \text{ mm} \end{array}$$

Es decir, que la línea de horizonte está a 0,03 mm por debajo del centro de la fotografía.

Si se tratara de un teodolito con cámara basculante, se sustituiría el punto principal determinado por el cálculo por el obtenido directamente al hacer la fotografía (pág. 345), y la distancia entre ambos puntos daría a conocer el ángulo ω formado por el plano-imagen y el eje de giro de la cámara; ya que si esta distancia fuera σ , se tendría evidentemente:

$$\omega = \frac{\sigma}{f} \rho. \tag{8}$$

Conforme indicamos en la página 345, vamos a estudiar el efecto producido por un ángulo ω sobre la determinación de los ángulos acimutales calculados en función de las abscisas medidas en la fotografía, y de la distancia focal principal. Sea FH el eje de la cámara (fig. 284), que forma un ángulo φ con el plano-imagen HB . Para un punto cualquiera P , cuya abscisa x se mide en la placa, se tiene la siguiente fórmula, que relaciona esta abscisa con la distancia focal f y con los ángulos α y φ :

$$\frac{f}{x} \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \varphi).$$

Diferenciando esta ecuación, cuyas variables son α y φ , se tiene:

$$\frac{f}{x} \cos \alpha d\alpha = \cos (\alpha + \varphi) (d\alpha + d\varphi),$$

de donde

$$\left[\frac{f}{x} \cos \alpha - \cos (\alpha + \varphi) \right] d\alpha = \cos (\alpha + \varphi) d\varphi. \tag{9}$$

Aplicando esta ecuación al caso considerado, en que $\varphi = 90^\circ$ y $d\varphi = \omega$, y despejando $d\alpha$, resulta:

$$d\alpha = -\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{f \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha} \omega. \tag{10}$$

Pero según se ve en la figura 285, los términos de la fracción del segundo miembro de esta ecuación son respectivamente:

$$x \operatorname{sen} \alpha = p', \quad f \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha = p + p',$$

y sustituyendo en (10):

$$d\alpha = -\frac{p'}{p + p'} \omega. \tag{11}$$

Ahora bien, de la misma figura 285 se deduce que

$$p' = f \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha, \quad p + p' = \frac{f}{\cos \alpha},$$

y sustituyendo en (11), se tiene finalmente:

$$d\alpha = (\operatorname{sen}^2 \alpha) \omega. \tag{12}$$

Si tomamos para α un valor de $26^\circ 30'$, que en la práctica no se suele alcanzar, y mucho menos sobrepasar, se tiene para $d\alpha$

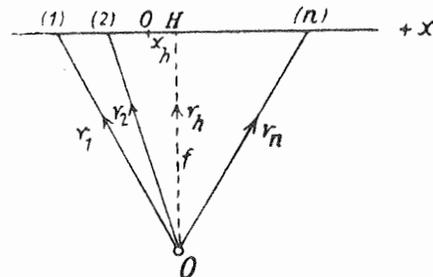
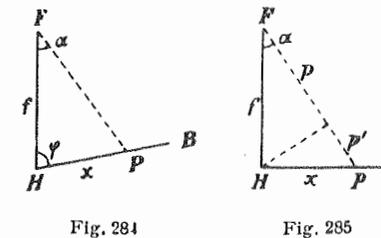
$$d\alpha = -0,2 \omega.$$

Con esta expresión es fácil apreciar la importancia que puede tener el ángulo ω en cada caso particular.

Determinación de la orientación interior por compensación. Ordinariamente no se limitan las observaciones anteriores a tres puntos, sino a muchos más, no sólo para aumentar la precisión del resultado, sino también para conocer el error medio cometido. Se trata, pues, de un sencillo problema de compensación, que puede resolverse del modo siguiente. Sean x_1, x_2, \dots, x_n (figura 286) las abscisas de n puntos de la placa, y r_1, r_2, \dots, r_n los acimutes de los puntos correspondientes del terreno medidos con el círculo horizontal del fototeodolito. Como eje de las abscisas se toma la línea que une las referencias laterales, y como origen de coordenadas la intersección de las dos líneas de unión de señales, es decir, el centro O de la placa. Llamando r_h al acimut del punto H , proyección del punto principal de la placa sobre el eje de las abscisas, y x_h a la abscisa de H , se tiene, evidentemente:

$$\begin{aligned} x_h - x_1 &= f \operatorname{tg} (r_h - r_1) \\ x_h - x_2 &= f \operatorname{tg} (r_h - r_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Tanto las abscisas x_1, x_2, \dots que aquí figuran, como los acimutes r_1, r_2, \dots se obtienen por medición directa, por lo cual deben ir afectados de sus errores correspondientes; supo-



niendo que las abscisas se miden con una aproximación de 0,01 a 0,02 mm y los acimutes con unos 5'', se ve claramente que la precisión de los acimutes *medidos* es mucho más grande que la precisión de los acimutes *calculados* o deducidos de las ecuaciones anteriores. Por consiguiente, en la compensación sólo hay que tener en cuenta los errores residuales de las abscisas: designando estos errores, como de ordinario, con la letra *v*, se tienen las siguientes ecuaciones de errores:

$$\left. \begin{aligned} x_h - x_1 - v_1 &= f \operatorname{tg} (r_h - r_1) \\ x_h - x_2 - v_2 &= f \operatorname{tg} (r_h - r_2) \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{ o también } \left. \begin{aligned} v_1 &= -x_1 + x_h - f \operatorname{tg} (r_h - r_1) \\ v_2 &= -x_2 + x_h - f \operatorname{tg} (r_h - r_2) \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Para dar a estas ecuaciones forma lineal, pongamos *f* y *r_h* en función de unos valores aproximados *f⁰* y *r_h⁰*, es decir, escribamos:

$$f = f^0 + \delta, \quad r_h = r_h^0 + \zeta. \quad (14)$$

Sustituyendo estas expresiones en (13), se tiene la primera ecuación lineal de errores:

$$v_1 = -x_1 - f^0 \operatorname{tg} (r_h^0 - r_1) + x_h - \operatorname{tg} (r_h^0 - r_1) \delta - \frac{f^0}{\rho \cos^2 (r_h^0 - r_1)} \zeta. \quad (15)$$

Pongamos aún, para simplificar:

$$\left. \begin{aligned} -x_1 - f^0 \operatorname{tg} (r_h^0 - r_1) &= -l_1 & \text{y} & & -\operatorname{tg} (r_h^0 - r_1) &= a_1 \\ & & & & -\frac{f^0}{\rho \cos^2 (r_h^0 - r_1)} &= b_1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

y empleando las mismas letras, con los subíndices correspondientes, para las demás observaciones, tendremos en definitiva las ecuaciones de errores:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -l_1 + x_h + a_1 \delta + b_1 \zeta \\ v_2 &= -l_2 + x_h + a_2 \delta + b_2 \zeta \\ \dots \dots \dots \\ v_n &= -l_n + x_h + a_n \delta + b_n \zeta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

De aquí pueden formarse ya las ecuaciones normales y calcular las tres incógnitas *x_h*, *δ* y *ζ*.

El método representado por las ecuaciones (1) a (7) para la determinación de la distancia focal y de la posición del punto principal de la placa fué propuesto, desarrollado y aplicado por primera vez por el autor de esta obra («Zeitschr. f. Verm.», 1876).

Acerca de la verificación de aparatos fotogramétricos merecen citarse los trabajos siguientes:

DOERGENS. a) *Sobre un sencillo aparato fotogramétrico*, b) *Verificación y correcciones de los aparatos fotogramétricos*, c) *Determinación de las constantes de un aparato fotogramétrico*. Estos estudios fueron publicados en las «Photogr. Mitteilungen» de los años 1885 y 1886.

HOHENNER. *Teodolito universal de Günther y Tegetmeyer, su verificación y correcciones* («Int. Arch. f. Photogramm. V», 1919).

HUGERSHOFF y CRANZ. *Fotogrametría aérea*. Stuttgart, 1919.

KLINGATSCH. *Determinación de las constantes de orientación interior* («Int. Arch. f. Photogramm. VI», 1923).

GRUBER. *Determinación de la orientación interior de las cámaras fotogramétricas* («Int. Arch. f. Photogramm. VI», 1923).

DOLEZAL. *El fototaquímetro Dolezal-Rost* («Int. Arch. f. Photogramm. VI», 1923).

HORNOCH. *Determinación de la distancia focal para fotografías inclinadas* («Zeitschr. f. Instr.», 1928).

BAESCHLIN. *Resolución del problema de la determinación de la orientación interior de un fototeodolito* («Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1929). En este estudio se hace la compensación teniendo en cuenta no sólo los errores residuales de los acimutes observados sino también los de las coordenadas medidas en la fotografía.

WERKMEISTER. *Determinación de la orientación interior de la cámara de un fototeodolito* («Zeitschr. f. Instr.», 1930). Aquí se estudia de modo diferente la solución de Baeschlin.

GAST. *Conferencias sobre fotogrametría*. Leipzig, 1930.

Ejemplo. Los datos utilizados para el cálculo de la página 347, constituyen sólo parte de una gran serie de mediciones, de las cuales vamos ahora a tomar las correspondientes a siete puntos, para hacer nuevamente el cálculo de las constantes mediante la compensación. Los valores medidos de *x* y *r* (siguiendo la misma notación de la figura 286), fueron, para estos siete puntos:

<i>x</i> ₁ = -75,271 mm	<i>r</i> ₁ = 0° 00' 00"
<i>x</i> ₂ = -21,087	<i>r</i> ₂ = 15 09 03
<i>x</i> ₃ = -13,452	<i>r</i> ₃ = 17 36 33
<i>x</i> ₄ = + 5,977	<i>r</i> ₄ = 23 28 03
<i>x</i> ₅ = + 33,683	<i>r</i> ₅ = 31 44 15
<i>x</i> ₆ = + 51,019	<i>r</i> ₆ = 36 44 00
<i>x</i> ₇ = + 78,482	<i>r</i> ₇ = 44 13 00

Como valores aproximados de las incógnitas *f* y *r_h* tomaremos:

$$f^0 = 189,500 \text{ mm} \quad \text{y} \quad r_h^0 = 21^\circ 40' 00''.$$

El valor de *f⁰* es el mismo deducido del cálculo en la página 348, redondeando a cero sus dos últimas cifras decimales: el valor de *r_h⁰*, también redondeado a cero en las segundas, se deduce de una de las ecuaciones (13), haciendo *v* = 0 y *x_h* = 0.

En la tabla siguiente se ve el cálculo de los coeficientes y de los términos independientes de las ecuaciones de errores (17):

<i>r_h⁰ - r</i>	<i>f⁰ tg (r_h⁰ - r)</i>	- <i>l</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
+ 21° 40' 00"	+ 75,283 mm	- 0,012 mm	- 0,3973	- 0,06382
+ 6 20 57	+ 21,085	+ 0,002	- 0,1113	- 0,05581
+ 4 03 27	+ 13,442	+ 0,010	- 0,0709	- 0,05540
- 1 48 03	- 5,958	- 0,019	+ 0,0314	- 0,05518
- 10 04 15	- 13,655	- 0,028	+ 0,1776	- 0,05686
- 15 04 00	- 51,012	- 0,007	+ 0,2692	- 0,05912
- 22 33 00	- 78,688	+ 0,206	+ 0,4152	- 0,06463

Para que los coeficientes *a* y *b* tengan igual forma en los demás cálculos, pongamos $\zeta = 100 \zeta'$, con lo cual las ecuaciones de errores serán:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -0,012 + x_h - 0,3973 \delta - 6,382 \zeta' \\ v_2 &= +0,002 + x_h - 0,1113 \delta - 5,581 \zeta' \\ v_3 &= +0,010 + x_h - 0,0709 \delta - 5,540 \zeta' \\ v_4 &= -0,019 + x_h + 0,0314 \delta - 5,518 \zeta' \\ v_5 &= -0,028 + x_h + 0,1776 \delta - 5,686 \zeta' \\ v_6 &= -0,007 + x_h + 0,2692 \delta - 5,912 \zeta' \\ v_7 &= +0,206 + x_h + 0,4152 \delta - 6,463 \zeta' \\ 0 &= +0,152 + 7x_h + 0,3139 \delta - 41,082 \zeta' \end{aligned} \right\}$$

Eliminando *x_h* por medio de la ecuación resultante de la suma de las siete anteriores, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -0,034 - 0,44 \delta - 0,51 \zeta' \\ v_2 &= -0,020 - 0,16 \delta + 0,29 \zeta' \\ v_3 &= -0,012 - 0,12 \delta + 0,33 \zeta' \\ v_4 &= -0,041 - 0,01 \delta + 0,35 \zeta' \\ v_5 &= -0,050 + 0,13 \delta + 0,18 \zeta' \\ v_6 &= -0,029 + 0,22 \delta - 0,04 \zeta' \\ v_7 &= +0,184 + 0,37 \delta - 0,59 \zeta' \end{aligned} \right\}$$

De aquí ya pueden formarse las ecuaciones normales

$$+ 0,4359 \delta - 0,0638 \zeta' + 0,07521 = 0$$

$$+ 0,9577 \zeta' - 0,12317 = 0$$

$$\delta = -0,154 \text{ mm}, \quad \zeta' = +0,11755', \quad \zeta = +11,76' = +11' 46'', \quad x_h = +0,675 \text{ mm.}$$

Los pesos de x_h y δ son:

$$p_1 = \frac{1}{2,32} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{1}{36,44}$$

Por consiguiente, los valores de f y r_h serán:

$$f = 189,500 - 0,154 \text{ mm} \quad f = 189,346 \text{ mm}$$

$$r_h = 21^\circ 40' 00'' + 11' 46'' \quad r_h = 21^\circ 51' 46''$$

Para determinar la precisión del resultado, se calculan también los errores residuales v y el error medio:

v	vv	
-0,026 mm	0,000676	$m = \pm \sqrt{\frac{0,0145}{4}} = \pm 0,06 \text{ mm}$ $m_1 = \pm 1,52 m = \pm 0,09 \text{ mm}$ $m_2 = \pm 6,04 m = \pm 0,36 \text{ mm.}$
+0,039	1521	
+0,045	2025	
+0,002	4	
-0,049	2401	
-0,068	4624	
+0,057	3249	
0,000	0,014500	

El resultado de la compensación es, pues:

$$f = 189,35 \pm 0,09 \text{ mm}, \quad x_a = +0,68 \pm 0,36 \text{ mm.}$$

Queda aún por correr la altura de la línea de horizonte sobre el origen de coordenadas (intersección de las dos líneas de unión de las señales en la placa), para lo cual se utilizan los ángulos verticales observados η , correspondientes a los puntos del terreno, y las ordenadas y medidas sobre la placa. Para las distancias del punto 0 a los puntos (1), (2) ... (figura 286), tenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{f}{\cos(r_h - r_1)}, \quad \frac{f}{\cos(r_h - r_2)} \dots$$

y llamando y_h a la ordenada del punto principal de la fotografía, se tiene:

$$y_1 - y_h = f \frac{\text{tg } \eta_1}{\cos(r_h - r_1)}$$

de donde

$$y_h = y_1 - f \frac{\text{tg } \eta_1}{\cos(r_h - r_1)}$$

y análogamente

$$y_h = y_2 - f \frac{\text{tg } \eta_2}{\cos(r_h - r_2)}$$

$$y_h = y_3 - f \frac{\text{tg } \eta_3}{\cos(r_h - r_3)}$$

.....

En la tabla siguiente se resume todo el cálculo de ordenadas:

y	η	$f \frac{\text{tg } \eta}{\cos(r_h - r)}$	y_h
0,220 mm	0° 04' 07"	0,244 mm	-0,024 mm
2,415	0 44 08	2,447	-0,032
0,468	0 08 45	0,483	-0,015
4,069	1 14 39	4,113	-0,044
4,398	1 19 23	4,439	-0,041
4,565	1 20 30	4,583	-0,023
3,516	0 59 38	3,552	-0,036
			-0,215 mm

Valor medio $y_h = -0,031 \text{ mm.}$

Es decir, que las coordenadas del punto principal de la fotografía son:

$$x_h = +0,68 \text{ mm} \quad y_h = -0,03 \text{ mm.}$$

En el trabajo de Gruber citado en la página 350 se demuestra que, con este procedimiento, el resultado queda influido por la deformación que puede producir el objetivo fotográfico.

§ 85. Medición de las fotografías

Prescindimos aquí de la parte puramente fotográfica, que puede estudiarse con todo detalle en cualquier manual o tratado de técnica fotográfica. Sólo diremos que nunca se será demasiado exigente en que las imágenes resulten perfectamente limpias, para lo cual deben siempre emplearse placas de la mejor calidad, en cristal y con emulsión lo más fina posible.

Las coordenadas de los puntos se miden directamente con toda exactitud sobre las negativas, que no se deforman apenas nada con el revelado y el fijado. Con una aguja muy fina se unen las señales para marcar sobre la placa la línea de horizonte y la línea vertical: si no resultan marcadas estas líneas con la precisión deseada se determina el error cometido, que se lleva sobre todas las ordenadas y abscisas que se midan. Para la medición de las placas es necesario que éstas se hallen iluminadas convenientemente.

Para la medición de las coordenadas puede emplearse una escalilla graduada; pero resulta mucho más ventajoso el empleo de un disco de cristal con dos escalas milimétricas perpendiculares entre sí, cuyos ceros coinciden con su punto de intersección. Se dispone este disco sobre la fotografía de modo que una de las escalas coincida con la línea de horizonte, y la otra pase por el punto cuyas coordenadas se quiere medir; la lectura correspondiente a este punto da la ordenada, y la hecha con el punto principal, la abscisa de aquél.

Coordinatómetro de Zeiss. La figura 287 representa un aparato especial para la medición de placas fotogramétricas de tamaño 9 x 12 cm: el coordinatómetro de Hegershoff, construido por la casa Zeiss.

Consiste este aparato en un zócalo muy pesado de hierro colado; en la parte superior, que presenta un hueco bastante grande, va el soporte de la placa, que puede hacerse girar

De aquí ya pueden formarse las ecuaciones normales

$$+ 0,4359 \delta - 0,0688 \zeta' + 0,07521 = 0$$

$$+ 0,9577 \zeta' - 0,12317 = 0$$

$$\delta = -0,154 \text{ mm}, \quad \zeta' = +0,11755', \quad \zeta = +11,76' = +11' 46'', \quad x_h = +0,675 \text{ mm.}$$

Los pesos de x_h y δ son:

$$p_1 = \frac{1}{2,32} \quad y \quad p_2 = \frac{1}{36,44}$$

Por consiguiente, los valores de f y r_h serán:

$$f = 189,500 - 0,154 \text{ mm} \quad f = 189,346 \text{ mm}$$

$$r_h = 21^\circ 40' 00'' + 11' 46'' \quad r_h = 21^\circ 51' 46''$$

Para determinar la precisión del resultado, se calculan también los errores residuales v y el error medio:

v	vv	
-0,026 mm	0,000676	$m = \pm \sqrt{\frac{0,0145}{4}} = \pm 0,06 \text{ mm}$ $m_1 = \pm 1,52 m = \pm 0,09 \text{ mm}$ $m_2 = \pm 6,04 m = \pm 0,36 \text{ mm.}$
+0,039	1521	
+0,045	2025	
+0,002	4	
-0,049	2401	
-0,068	4624	
+0,057	3249	
0,000	0,014500	

El resultado de la compensación es, pues:

$$f = 189,35 \pm 0,09 \text{ mm}, \quad x_a = +0,68 \pm 0,36 \text{ mm.}$$

Queda aún por correr la altura de la línea de horizonte sobre el origen de coordenadas (intersección de las dos líneas de unión de las señales en la placa), para lo cual se utilizan los ángulos verticales observados η , correspondientes a los puntos del terreno, y las ordenadas y medidas sobre la placa. Para las distancias del punto 0 a los puntos (1), (2) ... (figura 286), tenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{f}{\cos(r_h - r_1)}, \quad \frac{f}{\cos(r_h - r_2)} \dots$$

y llamando y_h a la ordenada del punto principal de la fotografía, se tiene:

$$y_1 - y_h = f \frac{\text{tg } \eta_1}{\cos(r_h - r_1)}$$

de donde

$$y_h = y_1 - f \frac{\text{tg } \eta_1}{\cos(r_h - r_1)}$$

y análogamente

$$y_h = y_2 - f \frac{\text{tg } \eta_2}{\cos(r_h - r_2)}$$

$$y_h = y_3 - f \frac{\text{tg } \eta_3}{\cos(r_h - r_3)}$$

.....

En la tabla siguiente se resume todo el cálculo de ordenadas:

y	η	$f \frac{\text{tg } \eta}{\cos(r_h - r)}$	y_h
0,220 mm	0° 04' 07"	0,244 mm	-0,024 mm
2,415	0 44 08	2,447	-0,032
0,468	0 08 45	0,483	-0,015
4,069	1 14 38	4,113	-0,044
4,398	1 19 23	4,439	-0,041
4,565	1 20 30	4,583	-0,023
3,516	0 59 38	3,552	-0,036
			-0,215 mm

Valor medio $y_h = -0,031 \text{ mm.}$

Es decir, que las coordenadas del punto principal de la fotografía son:

$$x_h = +0,68 \text{ mm} \quad y_h = -0,03 \text{ mm.}$$

En el trabajo de Gruber citado en la página 350 se demuestra que, con este procedimiento, el resultado queda influido por la deformación que puede producir el objetivo fotográfico.

§ 85. Medición de las fotografías

Prescindimos aquí de la parte puramente fotográfica, que puede estudiarse con todo detalle en cualquier manual o tratado de técnica fotográfica. Sólo diremos que nunca se será demasiado exigente en que las imágenes resulten perfectamente limpias, para lo cual deben siempre emplearse placas de la mejor calidad, en cristal y con emulsión lo más fina posible.

Las coordenadas de los puntos se miden directamente con toda exactitud sobre las negativas, que no se deforman apenas nada con el revelado y el fijado. Con una aguja muy fina se unen las señales para marcar sobre la placa la línea de horizonte y la línea vertical: si no resultan marcadas estas líneas con la precisión deseada se determina el error cometido, que se lleva sobre todas las ordenadas y abscisas que se midan. Para la medición de las placas es necesario que éstas se hallen iluminadas convenientemente.

Para la medición de las coordenadas puede emplearse una escalilla graduada; pero resulta mucho más ventajoso el empleo de un disco de cristal con dos escalas milimétricas perpendiculares entre sí, cuyos ceros coinciden con su punto de intersección. Se dispone este disco sobre la fotografía de modo que una de las escalas coincida con la línea de horizonte, y la otra pase por el punto cuyas coordenadas se quiere medir; la lectura correspondiente a este punto da la ordenada, y la hecha con el punto principal, la abscisa de aquél.

Coordinatómetro de Zeiss. La figura 287 representa un aparato especial para la medición de placas fotogramétricas de tamaño $9 \times 12 \text{ cm}$: el coordinatómetro de Hegershoff, construido por la casa Zeiss.

Consiste este aparato en un zócalo muy pesado de hierro colado; en la parte superior, que presenta un hueco bastante grande, va el soporte de la placa, que puede hacerse girar

un poco por medio de un botón situado a la izquierda. De este modo pueden colocarse exactamente la línea de horizonte y la vertical en coincidencia con las guías de los cursores respectivos. El cursor principal, que se desliza sobre una varilla cilíndrica horizontal, puede moverse con un tornillo sin fin mandado por el volante que se ve a la derecha: sobre este cursor principal se mueve, perpendicularmente a la corredera de aquél, un segundo cursor, provisto de un microscopio de enfilación. Los dos cursores llevan escala y nonio para la lectura de sus respectivos movimientos.

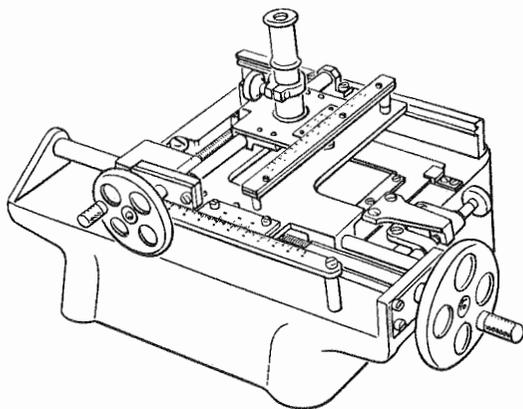


Fig. 287. - Coordinatómetro de Hegershoff

de mayor tamaño, con microscopios de lectura y otros perfeccionamientos.

Determinación de ángulos acimutales y de altura. En vez de las coordenadas rectangulares se utilizan en muchos casos los acimutes y alturas de los puntos de la placa, que tienen la misma aplicación que los acimutes y alturas observados directamente en el terreno. Los acimutes se cuentan a partir del punto del terreno (como origen) que corresponde al punto principal de la placa. Para la determinación de los ángulos verticales o de altura hay que conocer la inclinación de la placa.

Supongamos, en primer lugar, que la placa sea vertical (figura 288); unamos el punto de vista O con el pie p' de la ordenada de un punto cualquiera de la placa. El ángulo α representa el ángulo acimutal entre el punto principal H de la placa y el punto p de la misma: levantemos en p' la ordenada y , unamos también p'' con O , y tendremos que β será el ángulo vertical (altura) del punto p de la placa. Para calcular α y β , se tienen las dos ecuaciones siguientes, que se deducen directamente de la figura 288:

$$\text{tg } \alpha = \frac{x}{f}, \quad \text{tg } \beta = \frac{y}{f} \cos \alpha. \quad (1)$$

En la figura 289 se ven, en planta y en elevación, las coordenadas de un punto p de la fotografía, suponiendo inclinada la placa y siendo α y β los ángulos horizontal y vertical respectivamente. Si la placa está inclinada en un ángulo ω , se tendrá:

$$\begin{aligned} O(p) &= f \cos \omega - y \sin \omega \\ y' &= f \sin \omega + y \cos \omega \end{aligned}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{x}{f \cos \omega - y \sin \omega} \\ \text{tg } \beta &= \frac{f \sin \omega + y \cos \omega}{f \cos \omega - y \sin \omega} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

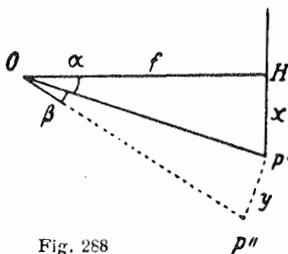


Fig. 288

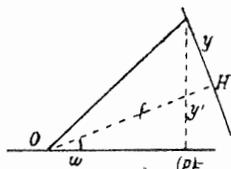


Fig. 289

Para preparar estas fórmulas para el cálculo logarítmico, introduzcamos dos magnitudes auxiliares m y M , haciendo para ello:

$$f = m \cos M \quad \text{e} \quad y = m \sin M. \quad (3)$$

El valor del ángulo auxiliar M puede deducirse de la ecuación

$$\text{tg } M = \frac{y}{f}. \quad (4)$$

Sustituyendo en (2) las expresiones (3) resulta:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{x}{m \cos (M + \omega)} = \frac{x \cos M}{f \cos (M + \omega)} \\ \text{tg } \beta &= \text{tg } (M + \omega) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diagramas para la determinación de los ángulos acimutales y verticales. De las ecuaciones (1) se deduce, despejando x e y :

$$x = f \text{tg } \alpha \quad y = f \frac{\text{tg } \beta}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Con estas ecuaciones se puede calcular el punto de la fotografía que corresponde a un par de valores dados α y β , y de aquí nació la idea de trazar sobre la placa curvas de valores iguales de α y de β , formándose así una especie de canevas, con el cual pueden leerse directamente para todo punto de la placa los valores de sus ángulos α y β .

Para la aplicación práctica de esta idea, se trazan estos canevas sobre placas de cristal, tanto para fotografías verticales como para inclinaciones de 10° , 20° , 30° , etc. Si se toman las vistas con estas inclinaciones, se pueden determinar, con el canevas correspondiente, los ángulos horizontal y vertical de cualquier punto de la fotografía.

Fué E. Deville quien primero dió la construcción de diagramas para la reducción de placas fotogramétricas, en su obra titulada *Levantamientos fotográficos, con elementos de Geometría descriptiva y Perspectiva* (Ottawa, 1895).

Las fórmulas (6) a (8) fueron desarrolladas por Jordan en la «Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen», Hannover, 1898.

Merecen citarse los siguientes trabajos sobre canevas de reducción de placas:

HUGERSHOFF. *Construcción del fotogrametro de Heyde*. Dresden, 1912.
 HUGERSHOFF y CRANZ. *Fotogrametría aérea*. Stuttgart, 1919.
 HAERPFER. *Tablas gráficas fotogramétricas* («Zeitschr. f. Verm.», 1923).
 HAMMER. *Los canevas en fototopografía* («Zeitschr. f. Verm.», 1923).

Teodolito comparador. En el año 1896 dió a conocer Koppe un procedimiento nuevo para la medición directa de los ángulos acimutales y de altura sobre placas fotográficas. Consiste este sistema en colocar la placa (ya impresionada, revelada y fijada) en la cámara, dando a esta última exactamente la misma inclinación que tuviera al hacer la fotografía sobre el terreno. La cámara va montada sobre un teodolito especial, con cuyo anteojo puede verse la placa, a través del objetivo fotográfico.

Por coincidir el plano-imagen de la cámara con el plano focal de su objetivo, los rayos procedentes de los puntos de la placa salen del objetivo paralelos al rayo principal: por lo tanto, para ver con el anteojo algún punto de la placa a través del objetivo de la cámara, hay que enfocar al infinito. Es evidente que el eje de colimación del anteojo no debe pasar necesariamente por el punto nodal anterior del objetivo fotográfico. En caso de no

coincidir exactamente el plano-imagen de la cámara con el plano focal de su objetivo, no saldrán paralelos los rayos procedentes de la placa, y para que los ángulos horizontales y los verticales resulten bien medidos, habrá que hacer coincidir el eje de colimación del anteojo con el rayo principal del punto visado.

En la figura 290 se ve esquemáticamente, en planta y en alzado, la unión de este dispositivo con el teodolito de Koppe de la figura 275 (pág. 338). Después de desmontar de éste el eje de muñones del anteojo, con el anteojo y el círculo cenital, se sujeta a la columna central de la plataforma nivelante un soporte *T* que termina por su parte superior en una horquilla, sobre la cual descansa el eje de giro de la cámara (que pasa por el punto nodal anterior del objetivo). El plano-imagen de la cámara puede colocarse con la inclinación que se quiera, mediante la varilla *t*, provista de tornillo de movimiento lento *h*. En los cojinetes del eje horizontal del teodolito se colocan, como se ve en la figura, los muñones de un pequeño anteojo, provisto de círculo vertical.

Una vez dispuesto el eje de colimación de este anteojo con la inclinación ω que tenía la placa al tomar la vista fotográfica (para lo cual sirve el círculo cenital), se inclina la cámara con la varilla *t* hasta que el punto principal de la placa coincida con el centro del retículo del anteojo. Al dirigir después el anteojo a un punto cualquiera de la fotografía, se miden en los círculos acimutal y cenital los mismos ángulos α y β que se deducirían de las coordenadas x e y , en las fórmulas (2) a (5).

La medición de los ángulos resulta, pues, de una gran sencillez, comparada con el cálculo de los mismos en función de las coordenadas; además, el error de formación de la imagen fotográfica, aunque pequeño en los objetivos empleados para estos usos, es siempre apreciable en la medición de las coordenadas, pero resulta despreciable en la de los ángulos, porque los rayos que penetran en el anteojo lo hacen exactamente con la misma orientación que en la toma de la fotografía.

Teodolito comparador de Zeiss. En el mismo principio del teodolito comparador de Koppe, está fundado el de Hegershoff (fig. 291), construido por la casa Zeiss; teniendo en cuenta que el estado actual de la Óptica permite construir objetivos de iguales características ópticas, no es preciso emplear en el comparador el mismo objetivo fotográfico empleado en la toma de vistas, sino otro igual, no siendo, por lo tanto, necesario llevar la cámara misma al comparador.

Sobre la base del aparato van dos soportes para el eje de giro del dispositivo porta-placa; en el extremo de la izquierda lleva este eje un pequeño círculo cenital para dar a la placa la inclinación necesaria, y en ambos extremos van dispuestos contrapesos para equilibrar aquel dispositivo, en cuyo fondo está colocado el marco o bastidor para la placa, que puede hacerse girar hasta darle la posición que se quiera (cuando se trate de fotografías aéreas), que se lee sobre un círculo graduado, claramente visible en la figura. Sobre

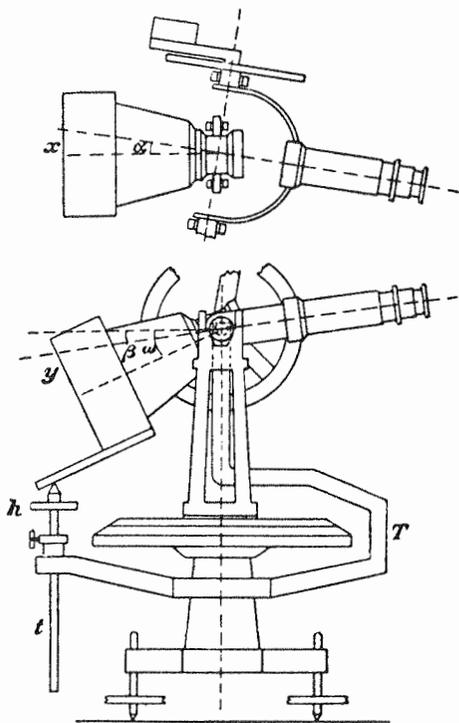


Fig. 290. — Teodolito comparador de Koppe

el dispositivo porta-placa va montado, en un estribo, el objetivo analizador, igual al fotográfico empleado en el campo.

El teodolito comparador propiamente dicho tiene su círculo acimutal en la plataforma general del aparato; sobre la alidada de este círculo, que se hace girar con la manivela

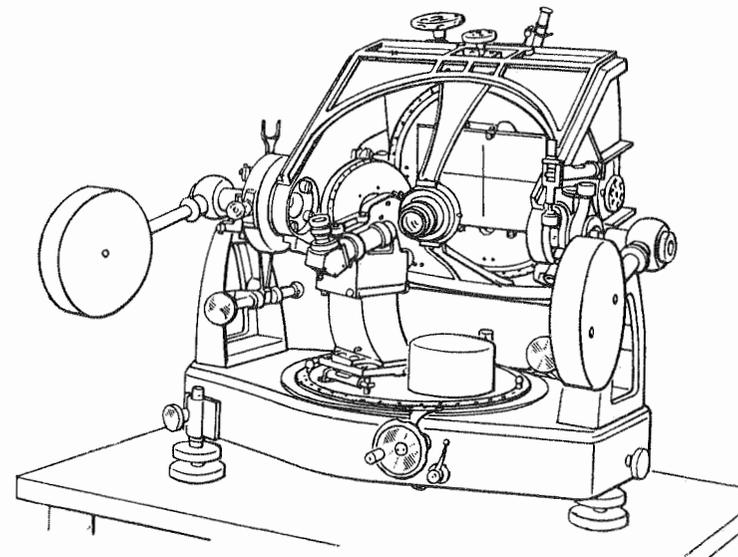


Fig. 291. — Teodolito comparador de Hegershoff

que se ve en la parte delantera de la plataforma, va fijada una columna en cuya parte superior se aloja el eje de giro del anteojo. Este anteojo, respondiendo al principio del teodolito comparador de Koppe, está dispuesto de tal modo que el punto nodal anterior del objetivo analizador cae sobre el eje de la alidada que debe coincidir con el eje de giro del dispositivo porta-placa, debiéndose cumplir, por lo tanto, la siguiente condición en esta clase de comparadores; el eje de giro del porta-placa, el eje de la alidada y el eje de colimación del anteojo, han de cortarse en el punto nodal anterior del objetivo analizador.

El eje horizontal de giro del anteojo lleva también un círculo vertical para medir los ángulos de altura, y un contrapeso para el equilibrio respecto al eje de la alidada.

Reseña histórica sobre los teodolitos comparadores. La idea de medir los ángulos por observación de la fotografía con el objetivo empleado en la toma de la vista, fué expuesta por primera vez por Porro, que en 1871 construyó un *fotogoniómetro*, representado en la figura 292. La diferencia esencial entre este instrumento y el de Koppe consiste en que en

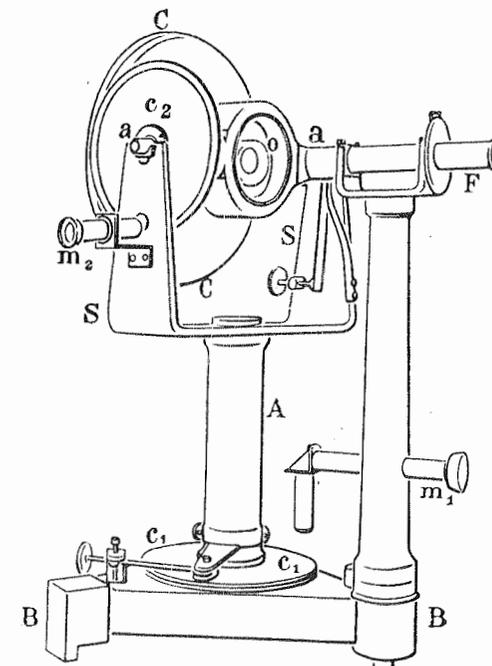


Fig. 292. — Fotogoniómetro de Porro

el de Porro, el anteojo F analizador es fijo y va montado en un soporte que forma cuerpo con la plataforma general del aparato, mientras que la cámara puede girar alrededor de un eje vertical y de otro horizontal, provisto cada cual de su correspondiente círculo C_1 y C_2 , para la medición de los ángulos acimutales y de altura. Para enfilar un punto de la placa, se mueve la placa alrededor de los dos ejes hasta que aquél coincida con la cruz filar del anteojo.

Hay que tener en cuenta que los ángulos leídos en ambos círculos no corresponden exactamente a los ángulos acimutales y a la altura, como sucede en el aparato de Koppe; efectivamente, supongamos descrita alrededor del centro O del objetivo (fig. 293), una esfera de radio arbitrario, sobre la cual se proyectará, en H , el punto principal de la placa

supuesta vertical. La cámara debe colocarse de modo que el centro de la cruz filar coincida con dicho punto principal, es decir, con el eje óptico en la dirección OH . Un punto P de la placa tiene, respecto a H , un ángulo acimutal α y un ángulo de altura β , indicados en la figura por sus respectivos arcos de círculo máximo. Si se enfila el punto P con el anteojo del teodolito, se leerán en los limbos de éste los ángulos α y β ; pero si, al contrario, suponemos fijo el anteojo en su posición primitiva, y se balancea la cámara alrededor del eje QQ' hasta que P caiga en el plano horizontal,

vemos que este punto P ha descrito un arco de paralelo $PP' = \beta'$: si se gira después la cámara alrededor del eje vertical ZO hasta que P' caiga sobre H , este punto P' habrá descrito un cierto ángulo α' , que es el leído en el limbo horizontal, así como β' es el leído en el vertical, y que no son realmente los verdaderos ángulos acimutal α y de altura β .

De la figura 293 se deduce inmediatamente la relación entre los ángulos α y β por una parte, y α' y β' por otra; en efecto, el arco de paralelo β' es la medida del ángulo Q' ; además $QP = QP' = 90^\circ - \alpha'$, y $QN = 90^\circ - \alpha$; y en el triángulo rectángulo QPN se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \operatorname{sen} \beta' \cos \alpha' \\ \cos \alpha &= \operatorname{tg} \beta \cot \beta' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Por consiguiente, de los ángulos leídos con el goniómetro de Porro, sólo mediante el cálculo, se pueden deducir los valores de los ángulos acimutales y de altura.

Se encuentran más detalles sobre el aparato de Porro en el folleto titulado *La fotogrametría y el taquímetro fotográfico*, de la casa «La Filotécnica», del ingeniero A. Salmoiraghi, de Milán.

El dispositivo comparador de Koppe fué descrito por su autor en la obra *Fotogrametría y observación internacional de las nubes*, Brunswick, 1896.

En 1910 construyó Zeiss un nuevo teodolito comparador, descrito someramente por nosotros en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1928. Más detallado estudio se encuentra en la obra de Pulfrich *Sobre fotogrametría aérea y sus aparatos*, Jena, 1919, y en la de Fischer *Sobre el cálculo de la trisección inversa en levantamientos desde aeroplanos y estudio de la precisión con el teodolito comparador de Pulfrich*, Jena, 1921.

§ 86. Levantamiento fotogramétrico

El método más antiguo y más sencillo seguido en los levantamientos fotogramétricos, es el de *intersecciones* o de la *plancheta*, llamado así porque la determinación de los

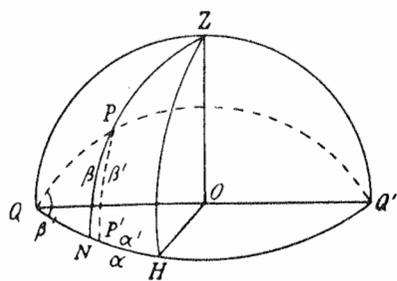


Fig. 293

puntos del terreno se hace como con la plancheta: por intersección directa. Si desde dos puntos de estación se toman vistas fotográficas de una parte del terreno y se conoce en ambos puntos la orientación de la placa, se pueden deducir de la fotografía los ángulos acimutales de todos los puntos, por los métodos expuestos en el § 85, y por intersección de los rayos correspondientes puede determinarse la posición de estos puntos.

Al levantamiento fotográfico debe preceder la determinación de los puntos de estación, lo cual se hace de ordinario por triangulación o poligonación. También deben determinarse las alturas de los puntos por nivelación (por pendientes o por alturas). Para tener la *orientación exterior* de la vista, hay que conocer el acimut del eje de la cámara, para lo cual se miden uno o varios acimutes correspondientes a vértices dados, ya sean de triángulos o de poligonales, leyendo no solamente el círculo acimutal, sino el cenital y tomando la altura del instrumento sobre el punto de estación. También se emplea la brújula para esta orientación, sobre todo en trabajos puramente topográficos o en levantamientos de exploración.

Antes de proceder a la comparación de las placas, hay que buscar los puntos comunes en ellas: la elección de puntos se hace como en Taquimetría, ya que casi siempre se trata de obtener planos topográficos, determinando todos los puntos característicos del terreno.

La búsqueda de puntos correspondientes en distintas fotografías requiere alguna práctica, que una vez adquirida permite hacer la identificación con toda rapidez y facilidad. Este trabajo se simplifica y facilita considerablemente, tomando desde cada estación, además de la vista ordinaria otra estereoscópica, que después se lleva a un estereoscopio ordinario para ver el terreno en relieve. Para ello se puede emplear una cámara estereoscópica, o colocar el fototeodolito en dos posiciones; en este último caso, la distancia entre ambas posiciones debe ser mayor que la que separa los ojos, para aumentar el efecto plástico.

La construcción del plano se empieza marcando el punto de estación, que ordinariamente se fija por coordenadas rectangulares.

Para transportar los demás puntos se pueden calcular las coordenadas en función del ángulo acimutal (§ 85), por el método de intersección simple o directa, pero este procedimiento sólo se aplica en casos excepcionales, tratándose de algunos puntos importantes. Generalmente lo que se hace es dibujar para cada estación las visuales dirigidas a los demás puntos y señalar los puntos de intersección de cada par de rayos correspondientes.

Si se trata de vistas verticales, se traza, a partir del punto de estación, una recta con la dirección dada por la orientación exterior del eje de la cámara, y sobre aquélla se toma la distancia focal f ; por el extremo de ésta se le traza una perpendicular, que se divide en milímetros, y sobre la cual basta tomar las abscisas de los puntos de la fotografía y unir los puntos resultantes con el de estación para tener la dirección de las correspondientes visuales.

Si las vistas son inclinadas, se hace una construcción análoga a la figura 289; sobre una línea OA (fig. 294) que se toma como base, se forma un ángulo igual al de inclinación ω y en el lado superior de éste se toma la distancia focal principal f ; en el extremo de ésta se levanta una perpendicular, que se divide en milímetros, teniéndose así la escala de ordenadas. Como escala de abscisas sirve uno de los catetos, dividido en milímetros, de

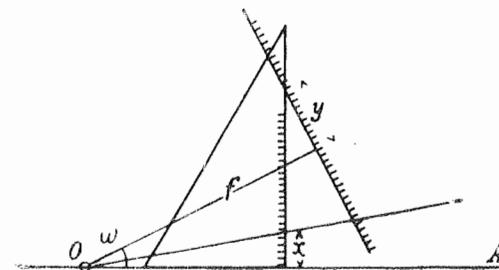


Fig. 294

una escuadra, cuyo otro cateto se coloca sobre la base OA . Si las coordenadas de un punto de la fotografía son y y x , se toma primero sobre la escala de ordenadas el valor de y , se corre la escuadra hasta que su cateto graduado pase por el punto correspondiente a este valor, y sobre este mismo cateto se toma la abscisa x . Basta ya unir el punto extremo de x con la estación O , para tener la orientación, es decir, la visual del punto del terreno considerado.

Cuando en vez de abscisas y ordenadas se hayan medido en la placa los ángulos acimutales y de altura, con un teodolito comparador, se pueden tomar directamente con un transportador los acimutes referidos al eje de la cámara.

Como comprobación de los puntos así determinados, se puede calcular su altura desde dos estaciones por medio de los ángulos de altura y de las distancias medidas sobre el plano; la altura resultante debe ser siempre la misma para cada punto considerado. Pero la mejor prueba la proporciona la identificación de cada punto en tres vistas por lo menos, ya que los rayos correspondientes deben cortarse en el plano, en un mismo punto.

Los puntos así transportados en el plano constituyen el esqueleto para la reproducción del terreno; se trazan las líneas principales, y el relleno de detalles se toma de las mismas fotografías, determinando las divisorias de aguas, las vaguadas, las líneas de máxima pendiente, las crestas, las hondonadas, etc., que constituyen la base para el trazado de las curvas de nivel. También para el relleno resultan de gran utilidad las vistas estereoscópicas antes citadas.

Para la construcción de las curvas de nivel se utilizan todos los perfiles dados por la fotografía; cada perfil determina, con el punto de estación, una superficie cónica, cuyas curvas de nivel pueden trazarse midiendo el ángulo de altura β de los diferentes puntos del perfil y calculando la distancia $h \cot \beta$, donde h es el desnivel entre el punto de estación y la curva de nivel de que se trate. Se llevan las distancias así obtenidas sobre las direcciones acimutales que parten de la estación, y se unen entre sí sus extremos. Cada curva de nivel así trazada debe tocar a la correspondiente del terreno en un punto y de este modo se tiene ya la base para la construcción de estas últimas.

Puntos límites. Supongamos que desde dos puntos de estación se toman dos vistas verticales de un trozo de terreno; uniéndose los dos puntos de vista o centros de proyección O_1 y O_2 (fig. 295), es decir, los puntos nodales posteriores del objetivo en ambas estaciones, la recta resultante cortará a los dos planos de proyección (placas) en dos puntos K_1 y K_2 que se llaman *puntos límites*; la recta de unión de estos dos puntos $K_1 K_2$ es el *eje límite*. Unamos ahora los dos puntos de vista O_1 y O_2 con un punto cualquiera del terreno P ; las dos visuales determinarán un plano que pasa por el eje límite y que se llama, a su vez, *plano límite*. Este plano corta a las dos placas en dos rectas $K_1 p_1$ y $K_2 p_2$, que pasan por los puntos límites y que reciben el nombre de *rayos límites*. El punto de intersección S de estos dos rayos, se halla

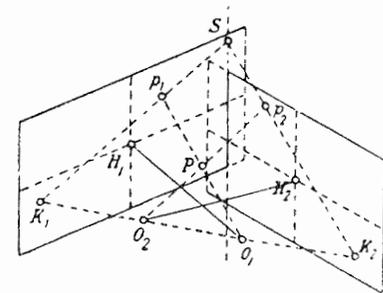


Fig. 295

sobre la arista del ángulo diedro formado por los planos de las dos placas.

Haciendo idénticas consideraciones para otros puntos cualesquiera del terreno $P' P'' \dots$, tendremos, al unir cada uno de ellos con los dos puntos de vista O_1 y O_2 , un nuevo plano límite y dos nuevos rayos límites para cada uno.

El conjunto de planos límites forma un haz de planos, cuyo eje es el eje límite. El sistema de rayos límites contenido en cada plano de proyección constituye un haz, cuyo vértice o centro es el punto límite de dicho plano. Los rayos límites de ambos haces correspondientes a cada punto, se cortan en la arista del ángulo diedro formado por los planos de proyección.

Hemos supuesto que las vistas eran verticales; pero fácilmente se comprende que el levantamiento puede extenderse al caso de vistas inclinadas.

La posición del punto límite en una placa se determina con toda sencillez conociendo la orientación interior y la exterior. Si para un cierto punto el ángulo acimutal entre éste y el punto principal de la vista es igual a α , y el ángulo de altura para la línea de unión de ambos puntos es igual a β , se tendrán las coordenadas del punto límite por las fórmulas (6) del § 85, tratándose de vista vertical:

$$x = f \operatorname{tg} \alpha \quad y = f \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$$

Si el plano-imagen forma el ángulo ω con la vertical, se tienen las coordenadas, por las fórmulas (7) y (8) del § 85:

$$x = f \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \omega \cos \alpha + \operatorname{sen} \omega \operatorname{tg} \beta}$$

$$y = f \frac{\cos \omega \operatorname{tg} \beta - \operatorname{sen} \omega \cos \alpha}{\cos \omega \cos \alpha + \operatorname{sen} \omega \operatorname{tg} \beta}$$

Una vez conocidas las coordenadas se puede situar el punto límite en la placa.

Los rayos límites constituyen un medio excelente para la identificación de los puntos comunes en dos vistas. Según las leyes de la Geometría de la Posición, los dos haces de rayos límites son proyectivos entre sí, por lo cual puede establecerse una relación bien simple entre ellos; cortando cuatro rayos de uno de los haces con una recta cualquiera, los cuatro puntos de intersección A, B, C y D forman una serie proyectiva, cuya doble relación

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

es constante, cualquiera que sea la recta secante. Siendo proyectivos entre sí los dos haces, tienen la misma relación proyectiva. Es decir, que si se conocen tres rayos en cada placa, homólogos dos a dos, se puede hallar para un rayo límite cualquiera de una de las vistas, el correspondiente u homólogo en la otra. El método más sencillo para llevar a la práctica este procedimiento, consiste en cortar el haz de cuatro rayos dados por una recta cualquiera, y los puntos de intersección resultantes se llevan a una tira de papel, que se mueve sobre la otra fotografía de modo que los tres rayos dados pasen por los puntos correspondientes, y el cuarto punto de la tira de papel determinará la dirección del cuarto rayo buscado (véase § 95).

Para aplicar este método a la identificación de puntos de las vistas, se procede del modo siguiente: se traza por un punto de una vista el rayo límite, y el homólogo de éste en la otra vista es un lugar geométrico del punto homólogo al primero. Este método se aplica especialmente a las líneas del terreno claramente visibles en las dos fotografías (camino, linderos, etc.), pues los rayos límites correspondientes a estas líneas se cortan en puntos homólogos. Se da por supuesto, desde luego, que en las dos fotografías se conocen tres puntos del terreno, además del punto límite.

Esta aplicación de los puntos límites sólo resulta fácil cuando es pequeño el ángulo

formado por los planos de las dos fotografías, pues en caso contrario el punto límite cae demasiado distante del punto principal.

Más adelante volveremos a tratar de la utilidad de los puntos límites.

El método de la plancheta en fotogrametría tiene hoy muy poca aplicación, y por lo tanto, también se aplica poco actualmente el sistema de medición de las placas detallado en el § 85, aunque constituye el fundamento de las teorías modernas, de las cuales trataremos en el § 88; el teodolito comparador forma parte principal de todos los actuales comparadores fotogramétricos.

Levantamiento fotogramétrico del oasis Dachel, del desierto de Libia. Como ejemplo práctico de aplicación del método de intersecciones o de plancheta, damos uno de los trabajos más antiguos de fotogrametría, como fué el levantamiento hecho por Jordan, en la expedición Rohlfs al desierto de Libia, en enero de 1874, con la ayuda del fotógrafo Remelé, y cuyo plano correspondiente está reproducido en la figura 296.

Las fotografías fueron tomadas con una cámara ordinaria, con placas verticales, en los puntos de estación O_1 y O_2 , y eran en realidad vistas panorámicas unidas resultantes de nueve placas desde O_1 y de ocho desde O_2 (una placa abarcaba aproximadamente 45°).

De estas 17 placas sólo cinco están representadas en la figura 296, que son

A 6, A 7 y A 8 desde O_1 , y A 8 y A 9 desde O_2 .

La distancia focal media fué para todas las placas $d = 191,6$ mm.

Como base trigonométrica se utilizó una pequeña triangulación (con determinación astronómica del acimut), cuyo primer triángulo y puntos principales se ven en la figura.

Los dos vértices trigonométricos principales, al mismo tiempo puntos de estación fotogramétricos, son O_1 y O_2 , unidos directamente entre sí por el triángulo base O_1BC , cuyos lados O_1B y BC miden respectivamente 294,8 m y 117,5 m; a estos dos puntos se refieren los B, C, O_2 , etc.

Además, se toman como vértices de la triangulación los tres minaretes I, II y III , la casa-alojamiento de la expedición, una gran tumba de jeque (10) y una palmera aislada P . Prescindiendo de los puntos auxiliares B y C , damos a continuación para los otros ocho puntos las observaciones desde O_1 y O_2 y sus coordenadas rectangulares, referidas a la casa-alojamiento como origen, con el eje $+x$ hacia el Norte y el $+y$ hacia el Este:

Estación O_1 $H = 133$ m sobre el mar				Estación O_2 $H = 132$ m sobre el mar			
Punto visado	Acimut	Ang. de altura	Distancia	Punto visado	Acimut	Ang. de altura	Distancia
Punto-base O_2	$62^\circ 50'$		792,6 m	Palmera P	$194^\circ 12'$	$-1^\circ 17'$	701,4 m
Jeque (10)	$85^\circ 32'$	$-4^\circ 40'$	467,4	Minarete III	$208^\circ 49'$	$-1^\circ 12'$	758,9
Palmera P	$120^\circ 48'$	$-1^\circ 48'$	620,9	Minarete II	$215^\circ 25'$	$-1^\circ 3'$	853,4
Minarete III	$131^\circ 43'$	$-2^\circ 11'$	454,6	Jeque (10)	$216^\circ 19'$	$-5^\circ 19'$	403,9
Minarete II	$147^\circ 37'$	$-2^\circ 21'$	385,8	Minarete I	$222^\circ 12'$	$-1^\circ 6'$	963,7
Casa-alojmt.	$168^\circ 42'$		189,3	Casa-alojmt.	$230^\circ 32'$	$-1^\circ 44'$	875,5
Minarete I	$170^\circ 30'$	$-3^\circ 12'$	357,4	Punto-base O_1	$242^\circ 56'$	$+0^\circ 50'$	792,6

Coordenadas rectangulares con $+x$ al Norte y $+y$ al Este

Punto	x	y	Altura sobre el mar
Casa-alojamiento	0,0 m	0,0 m	108 m (cubierta)
Punto O_1 de la base.	$-37,2$	$+186,1$	133 (suelo)
Punto O_2 id. id.	$+668,0$	$+548,0$	132 (»)
Minarete I	$+21,3$	$-166,5$	115 (Pico)
» II	$+173,8$	$-147,6$	118 (»)
» III	$+301,9$	$-116,7$	118 (»)
Jeque (10)	$+428,8$	$+222,5$	106 (») (Suelo = 97 m)
Palmera P	$+496,0$	$-132,0$	116 (»)

Si en función de estas coordenadas se calcularan los ángulos acimutales (en este caso, acimutes verdaderos), se encontrarían diferencias hasta de minutos con los observados directamente desde O_1 y O_2 y consignados en el resumen anterior; pero esto se debe a que en realidad se hicieron en la triangulación muchas más observaciones repetidas, antes de calcular las coordenadas. Los resultados que se emplearon coinciden todos, con suficiente exactitud, con los deducidos analíticamente.

Los ocho puntos considerados pueden ya, como es natural, llevarse al plano, como se les ve representados en la figura 296. Después de situados estos puntos quedaba por determinar el acimut del eje de la cámara en las distintas posiciones de la misma; por ejemplo, en la vista $A7$ se midió en la fotografía para el minarete III , $x = -37,18$ mm, que con $d = 191,6$ mm dió [fórmula (1) del § 85] el ángulo acimutal $\alpha = -10^\circ 59'$, y puesto que el acimut O_1-III , según el resumen anterior era de $131^\circ 43'$, resultó para O_1-A7 un acimut igual a $131^\circ 43' + 10^\circ 59' = 142^\circ 42'$, y ya pudo trazarse el rayo O_1-A7 , y situarse el punto $A7$.

Alrededor de los puntos O_1 y O_2 se describieron círculos con radios iguales a la distancia focal d , tangencialmente a los cuales, en los puntos $A6, A7$, etc., se dispusieron las líneas de horizonte de las vistas; sobre estas tangentes se proyectaron los diversos puntos de aquéllas, como se ve en la figura, y al unir estas proyecciones con los puntos de estación se obtuvieron rayos sobre los cuales habían de encontrarse los correspondientes puntos del plano. En la figura están marcados los puntos idénticos en las diferentes vistas con el mismo número, encontrándose el punto del plano en la intersección de los rayos de igual número.

En la figura 296 están rebatidas sobre el plano las vistas fotográficas, para la mejor inteligencia del procedimiento: para la aplicación del método en gran extensión hay que limitarse a representar las líneas de horizonte con las abscisas de los puntos en ellas indicadas.

Hay que advertir que el ejemplo anterior, que no puede considerarse actualmente como modelo desde el punto de vista práctico, constituye un excelente ejercicio de cálculo y construcción para quien quiera iniciarse en estos trabajos, y tiene el mérito indiscutible de ser una de las primeras aplicaciones del método teórico, realizada por Jordan sin el antecedente de ninguna otra llevada a la práctica que pudiera servirle de guía.

En vez de la reducción puramente gráfica, puede hacerse también una determinación analítica de los puntos, para lo cual se calculan los ángulos acimutales de los rayos en las fotografías, y después se hallan las coordenadas rectangulares de los puntos determinados por intersección directa.

Se encuentran muy detalladas las operaciones de campo y de gabinete relativas a los

levantamientos fotogramétricos en las obras siguientes: S. Finsterwalder, *Historia y topografía del Vernagtferner en los años 1888 y 1889*, Graz, 1897; Arthur von Hübl, *Los levantamientos fotogramétricos* (Mitt d. k. u. k. Milit.-geogr. Inst., tomo XIX, año 1899); Rosenmund, *Estudio sobre la aplicación a los levantamientos topográficos de los métodos fotogramétricos*, Berna, 1896; Koppe, *La fotogrametría*, Weimar, 1889; Koppe, *Fotogrametría y observaciones internacionales de nubes*, Brunswick, 1896; Koppe, *Estudios fotogramétricos y su aprovechamiento en el proyecto de un camino por la Jungfraubahn* («Schweizerische Bauzeitung», 1896, tomos 27 y 28); Kahle, «Zeitschr. f. Instr.», 1897.

§ 87. Levantamientos expeditivos por fotogrametría

También encuentra poca aplicación la fotogrametría ordinaria en los levantamientos expeditivos, como reconocimientos, exploraciones, etc., pues casi únicamente se emplea en estos trabajos la estereofotogrametría, que estudiaremos en los párrafos 88 a 91. Aquí vamos a limitarnos a la determinación de la orientación exterior en los levantamientos expeditivos, común a ambos métodos fotogramétricos.

Para determinar los puntos de estación debe procederse, siempre que sea posible, por métodos trigonométricos. A veces se tropieza con dificultades para colocar señales en los puntos más indicados para la triangulación. En muchos casos pueden utilizarse las mismas vistas para la triangulación, deduciendo de éstas los acimutes por los métodos expuestos en el párrafo 85. Sobre todo, tratándose de terrenos montañosos, es fácil identificar en las vistas puntos notables, entre ellos de preferencia los picos de las montañas, que se toman como vértices de triángulos. Es de gran importancia ordenar la toma de vistas desde cada estación de tal modo, que constituyan un panorama, que se orienta con la brújula.

La orientación de la red de triángulos se hace por observaciones astronómicas, que son bien fáciles de llevar a cabo, ya que sólo se trata de la determinación de latitudes y acimutes. La determinación de longitudes se puede hacer por el método, poco exacto por cierto, de observaciones lunares, pero es mejor disponer de un receptor para las señales horarias.

La orientación astronómica proporciona también un medio excelente para la fijación de las estaciones; si en dos puntos no situados en el mismo paralelo se miden sus latitudes geográficas y se refieren uno al otro por medio de la medición astronómica de sus acimutes, quedan determinadas sus posiciones recíprocas. De este modo se puede fijar la situación de una red de puntos por observación y medición de acimutes. Dada la precisión de los levantamientos expeditivos puede despreciarse la convergencia de las verticales en los diferentes puntos del terreno.

En las Memorias de Gruber y R. Finsterwalder sobre la expedición al Pamir se encuentran descritos con todo detalle los métodos fotogramétricos rápidos empleados en aquellas montañas; dichas Memorias fueron publicadas en «Int. Archiv. f. Potogramm», VI, 1923, «Bildm. u. Luftbildw.», 1929, «Allg. Verm.-Nachr.», 1930. También se encuentran reseñados dichos métodos en los *Resultados científicos de la expedición Alai-Pamir 1928; parte primera, por el Dr. R. Finsterwalder*, Berlín, 1932.

Vamos a indicar ahora dos métodos para determinar la orientación exterior de manera puramente fotogramétrica, muy interesantes desde el punto de vista teórico y también de gran utilidad en la práctica. Se da por supuesto, en estos métodos, que se conoce la orientación interior del aparato tomavistas, así como la inclinación de la placa respecto a la vertical.



rwalder, *Historia y topo.*
 ; Arthur von Hübl, *Los*
 st., tomo XIX, año 1899);
topográficos de los méto.
 eimar, 1889; Koppe, *Foto.*
 k, 1896; Koppe, *Estudios*
ino por la Jungfraubahn
 tschr. f. Instr.», 1897.

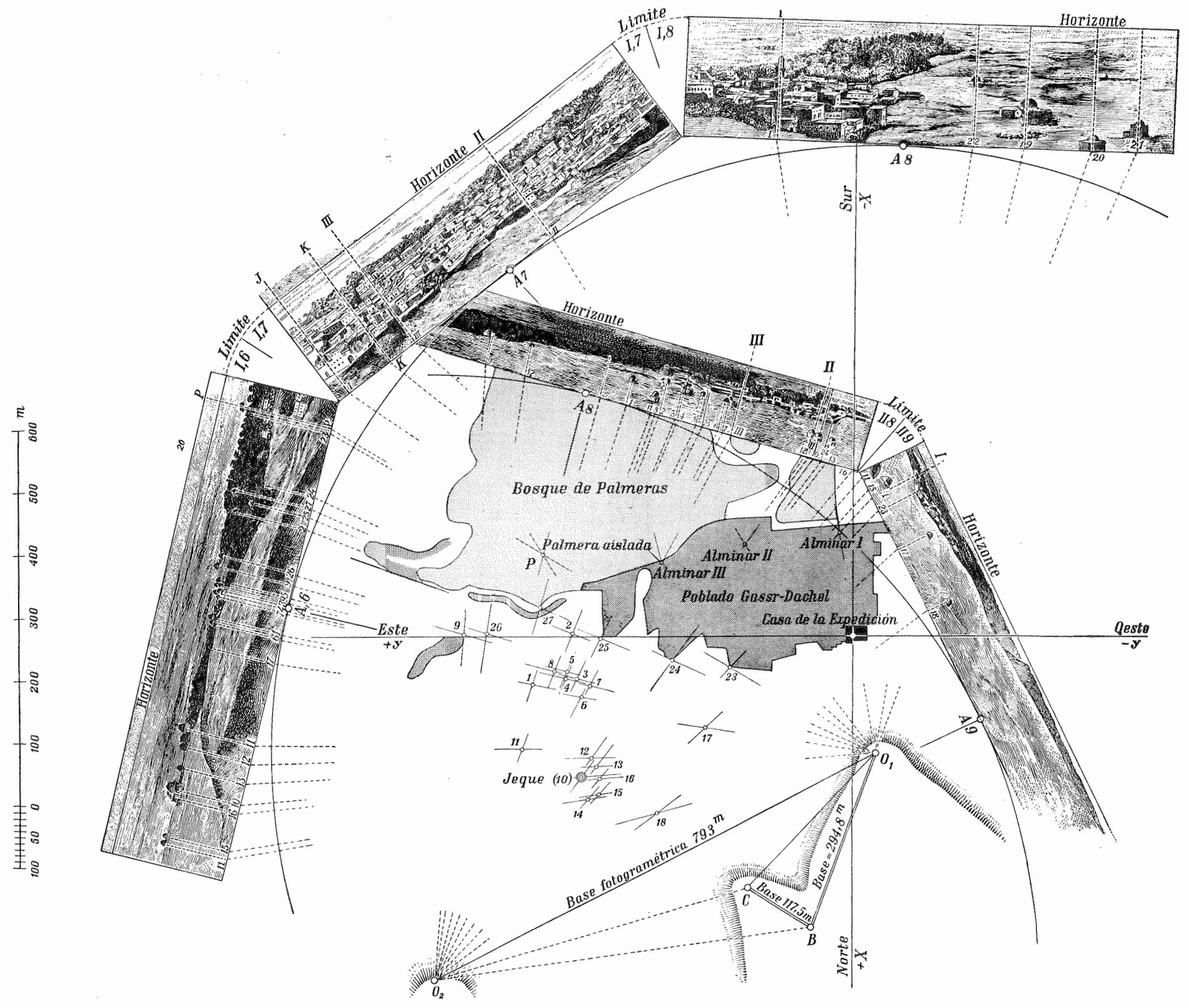
ogrametría

aria en los levantamientos
 si únicamente se emplea
 los párrafos 88 a 91. Aquí
 or en los levantamientos

mpre que sea posible, por
 ara colocar señales en los
 den utilizarse las mismas
 or los métodos expuestos
 , es fácil identificar en las
 montañas, que se toman
 la toma de vistas desde
 se orienta con la brújula.
 nes astronómicas, que son
 ción de latitudes y acimu-
 lo, poco exacto por cierto,
 para las señales horarias.
 excelente para la fijación
 elo se miden sus latitudes
 astronómica de sus acimu-
 do se puede fijar la situa-
 tes. Dada la precisión de
 cia de las verticales en los

a expedición al Pamir se
 icos rápidos empleados en
 . Archiv. f. Potogramm»,
 1930. También se encuen-
 de la expedición Alai-
 in, 1932.

tación exterior de manera
 vista teórico y también de
 , que se conoce la orienta-
 laca respecto a la vertical.



Determinación de la orientación exterior con dos fotografías. Supongamos conocidas la orientación interior, la inclinación del eje de la cámara y su rumbo, es decir, el ángulo que forma con el meridiano magnético. Sean O_1 y O_2 (fig. 297) los dos puntos de estación, $O_1 H_1$ y $O_2 H_2$ la dirección del eje de la cámara en ellos, y φ_1 y φ_2 los rumbos de este eje respecto al meridiano magnético. Sean P y Q dos puntos identificados en ambas fotografías. De la primera vista podemos deducir (§ 85, pág. 354) el ángulo acimutal entre los rayos $O_1 P$ y $O_1 Q$, la dirección de $O_1 H_1$ y el ángulo de altura de los dos rayos sobre la horizontal. Estos mismos valores se deducen de la segunda placa para los rayos $O_2 P$ y $O_2 Q$.

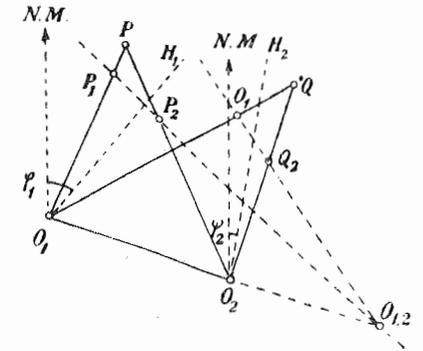


Fig. 297

Supongamos trazado un plano horizontal, a altura arbitraria, que cortará a los cuatro rayos en los puntos P_1, Q_1, P_2, Q_2 y a la prolongación de la base en el punto $O_{1,2}$. Es evidente que las dos rectas $P_1 P_2$ y $Q_1 Q_2$ prolongadas pasan por el punto $O_{1,2}$, pues se sabe que el plano horizontal considerado corta a todos los planos que pasan por $O_1 O_2$ en rectas concurrentes en el punto $O_{1,2}$. Lo mismo sucede para los rayos correspondientes a puntos cualesquiera del terreno.

Si trasladamos los dos rayos $O_2 P$ y $O_2 Q$ paralelamente a sí mismos de modo que su punto de intersección permanezca sobre la recta $O_1 O_2$, veremos que también sus puntos de intersección con el plano horizontal auxiliar se mantienen sobre las rectas $P_1 O_{1,2}$ y $Q_1 O_{1,2}$, aun en el caso de llegar a coincidir los dos puntos $O_1 O_2$.

En efecto, supongamos trazado el plano horizontal auxiliar a distancia h por encima o por debajo de O_1 , y calculemos la posición de los puntos de intersección P_1 y Q_1 ; para ello basta hallar las distancias horizontales, sabiendo que los ángulos de altura de los rayos $O_1 P$ y $O_1 Q$ son respectivamente β_p y β_q ; dichas distancias serán:

$$O_1 P_1 = h \cot \beta_p \quad O_1 Q_1 = h \cot \beta_q.$$

Del mismo modo se determinan los puntos de intersección P_2 y Q_2 para el caso en que coincida O_2 con O_1 ; si los ángulos de altura son β'_p y β'_q se tendrá:

$$O_1 P_2 = h \cot \beta'_p \quad O_1 Q_2 = h \cot \beta'_q.$$

Una vez trazados los cuatro rayos desde un punto cualquiera, según los rumbos dados por la brújula, y después de tomar sobre aquéllos las longitudes calculadas del modo indicado, se une P_1 con Q_1 , y P_2 con Q_2 , y la intersección de las dos rectas resultantes da el punto $O_{1,2}$. La recta $O O_{1,2}$ nos da la dirección de la base, cuya inclinación se calcula con la fórmula:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{h}{O O_{1,2}}.$$

De este modo se orientan las dos vistas respecto a la base, y sólo queda por conocer la longitud de esta base para tener completamente determinada la orientación exterior.

Si no se tuviera el rumbo del eje de la cámara, también se podría aplicar el método anterior, pero identificando tres puntos en cada una de las dos rectas. Supongamos trazado un plano horizontal cualquiera que cortará a los tres pares de rayos en los puntos $P_1 Q_1 R_1$ y $P_2 Q_2 R_2$ (fig. 298), los cuales estarán sobre dos rectas que se cortan en un punto $O_{1,2}$ de la prolongación de la base $O_1 O_2$.

Para determinar la orientación se calcula, con las fórmulas anteriores, la posición de los puntos $P_1 Q_1 R_1$ y $P_2 Q_2 R_2$, y se extiende el cálculo al caso en que coincidan O_1 y O_2 .

Se dibuja el primer haz plano de rayos en el papel en que vaya a construirse el plano, y el segundo en un papel cebolla; se coloca el punto O_2 sobre el O_1 y se gira el segundo haz de modo que las rectas de unión $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$ y $R_1 R_2$ se encuentren en un punto, que es el $O_{1,2}$.

En los dos casos, con o sin orientación magnética, conviene identificar más de dos o de tres puntos respectivamente, para tener una comprobación definitiva de la posición del punto $O_{1,2}$.

La solución que acabamos de exponer se debe a S. Finsterwalder (Anales de la Academia de Ciencias de Munich, tomo 34, 1904). La solución analítica conduce a una

ecuación de sexto grado. También K. Fuchs da otra solución analítica en su trabajo sobre *Fotogrametría sin teodolito* («Zeitschr. f. Verm.», 1905).

Levantamiento con más de dos estaciones. El método anterior es aplicable también cuando se toman las vistas desde más de dos estaciones y no es posible unir éstas entre sí trigonométricamente. En las fotografías deben escogerse los puntos de tal modo que cada dos de aquéllas contengan por lo menos tres puntos comunes. De este modo, por medio de la orientación interior y de la orientación respecto a la vertical, pueden determinarse el acimut referido al punto principal de la vista, y el ángulo vertical. Las fotografías se pueden orientar, por pares, una respecto a otra y deducir así los ángulos acimutales de las líneas de unión de los puntos identificados respecto al punto principal, y los ángulos de inclinación correspondientes. La serie de puntos de estación constituye una red de triángulos, que se puede representar gráficamente en cuanto se conozca uno de los lados. También pueden deducirse las alturas gráfica o analíticamente.

Este procedimiento puede también servir para comprobar la orientación recíproca de las fotografías, viendo si aquélla satisface las condiciones geométricas de la triangulación, y haciendo la compensación consiguiente, como vamos a indicar a continuación.

Proyección gnomónica. Supongamos que las líneas de unión de los puntos de estación, o sea los ejes límites (pág. 360) se trasladan paralelamente a sí mismos hasta que todos pasen por un mismo punto cualquiera O , que es el centro de la proyección gnomónica. Cortemos este haz de rayos por un plano horizontal convenientemente elegido, que es el cuadro o plano de proyección. A los puntos de intersección de los rayos con este plano los designaremos con el nombre de puntos gnomónicos de los rayos límites. Ahora bien, así como los puntos de intersección $P_1 P_2$ y $O_{1,2}$ (figs. 297 y 298) de los tres lados del triángulo $O_1 O_2 P$ con el plano auxiliar están en línea recta, del mismo modo, los puntos gnomónicos de tres ejes límites, que forman un triángulo, estarán también sobre una recta, que es la de intersección del plano del triángulo con el plano de proyección.

Una vez situados estos puntos gnomónicos en el plano que se trata de construir, se

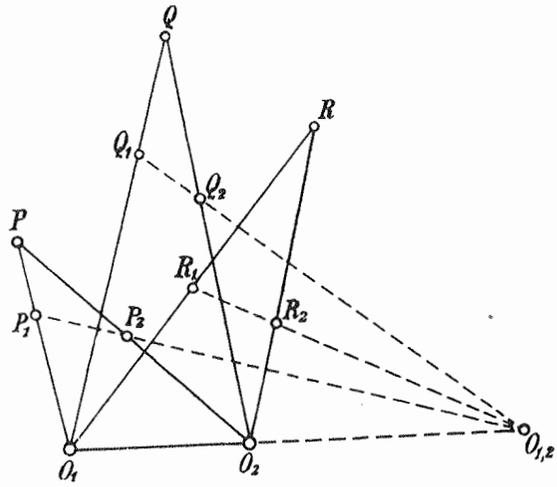


Fig. 298

puede trazar una recta compensada por cada tres puntos correspondientes; la posición definitiva de los puntos estará dada por la intersección de cada dos rectas.

La proyección gnomónica se encuentra en los trabajos de S. Finsterwalder antes citados; también este mismo autor da un ejemplo de aplicación de este método en una comunicación presentada en el tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Heidelberg en 1904; en este último trabajo se discute el caso de terrenos con muy pocos desniveles, y de rayos con muy poca inclinación, en los cuales la imagen o proyección gnomónica se forma en el infinito. Para evitar esta dificultad, recurre Finsterwalder a la *proyección recíproca*; si a una cierta dirección, representada en el plano, se le traza por el centro O de proyección un plano perpendicular, su intersección con el plano de proyección se llama imagen *recíproca* de aquella dirección. Por otra parte, la imagen recíproca de un plano es el punto en que la normal a aquél trazada por el punto de vista, corta al plano de proyección. Con este sistema de representación se tienen entre los rayos las mismas relaciones que en la representación gnomónica; pero la proyección recíproca es menos clara que la gnomónica.

Estos métodos se encuentran perfectamente tratados en el trabajo de S. Finsterwalder sobre los mismos, publicados en los «Intern. Arch. f. Photogrammetrie», tomo VI 1919-1923, Viena, 1923.

Determinación de la orientación exterior en terrenos llanos. Como ponen de manifiesto las construcciones anteriores, no resulta practicable la aplicación de la representación gnomónica cuando el terreno ofrece escasos desniveles, pues gracias a los ángulos verticales o de altura resulta posible hacer la orientación. Por lo tanto, estos métodos quedan limitados a fines especiales, como, por ejemplo, a levantamientos en zonas montañosas.

En los levantamientos fotogramétricos de terrenos llanos no basta para la construcción del plano con dos fotografías de orientación exterior deficiente. Si sólo se da el ángulo que forma la placa con la vertical, son precisas por lo menos cuatro fotografías con cuatro puntos identificados; si se puede utilizar la brújula para la orientación del eje de la cámara, basta con tres fotografías y tres puntos permanentes. Estos dos casos se conocen con el nombre de problema de Lambert de los ocho y de los seis puntos respectivamente. La solución analítica de los mismos se encuentra en la obra de Lambert titulada: *Contribución al empleo de las matemáticas*.

Aquí vamos a dar solamente una solución del problema de los seis puntos, la fundada en el empleo del punto de Collins. Sean S_1 , S_2 y S_3 (figura 299) tres estaciones fotogramétricas desde cada una de las cuales se han visado los tres puntos Z_1 , Z_2 y Z_3 ; se suponen conocidos los ángulos de inclinación de la placa (respecto a la vertical) y el rumbo de los rayos principales, este último dado por una brújula. Una vez medidos en las vistas los ángulos acimutales se pueden calcular los rumbos de los nueve rayos. En la figura sólo están dibujados los tres rayos correspondientes al punto Z_2 , y de sus rumbos respectivos se deduce el valor de los ángulos α y β . Hagamos pasar por los tres puntos Z_2 , S_1 y S_3 el círculo por ellos determinado en cuya circunferencia se encontrará el punto auxi-

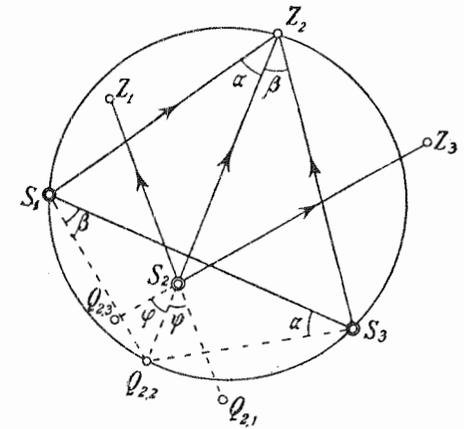


Fig. 299

liar $Q_{2,2}$, en la prolongación de $Z_2 S_2$; con los ángulos α y β puede ya construirse el triángulo $S_1 S_3 Q_{2,2}$. De manera análoga puede determinarse el punto auxiliar $Q_{2,1}$ mediante los tres rayos dirigidos hacia Z_1 y el círculo que pasa por S_1, S_3 y Z_1 ; y por último, se halla el punto auxiliar $Q_{2,3}$ correspondiente al punto de mira Z_3 , teniéndose así la situación relativa de los puntos $S_1, S_3, Q_{2,1}, Q_{2,2}$ y $Q_{2,3}$. Ahora bien, como de la diferencia entre los ángulos acimutales observados se deducen los dos ángulos φ y ψ , se puede fijar la posición del punto S_2 por el método de intersección inversa (Pothénot) desde los tres puntos $Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}$. Aplicando este mismo método se pueden también situar los tres puntos de mira Z_1, Z_2 y Z_3 .

También puede plantearse el problema de los ocho puntos con tres estaciones y cinco puntos visados comunes; pero únicamente puede resolverse por el método de las aproximaciones sucesivas.

Antes de terminar el estudio de la fotogrametría ordinaria, debemos advertir que en terrenos llanos apenas se emplean los levantamientos fotogramétricos, al menos desde estaciones sobre el suelo, por lo cual raramente se presenta en la práctica el problema de los seis o de los ocho puntos.

§ 88. Estereofotogrametría

Uno de los adelantos más grandes introducidos en la fotogrametría consiste en la utilización de la visión estereoscópica aplicada a los levantamientos de aquella clase, abriendo nuevos horizontes, sobre todo, a la fotogrametría terrestre cuyo máximo desarrollo se había conseguido a fines del siglo pasado.

Si se toman en el terreno dos vistas fotográficas, con las placas verticales y a igual altura sobre el suelo, pero a cualquier distancia entre sí, las fotografías obtenidas tienen propiedades estereoscópicas, es decir, que si se colocan las positivas correspondientes en un estereoscopio ordinario, se ve en relieve la parte del terreno fotografiada.

Las vistas estereoscópicas ordinarias se hacen con dos objetivos cuyos ejes, paralelos entre sí, distan sobre poco más o menos lo mismo que los ojos de un observador. Las fotografías hechas desde los extremos de una base mayor que la distancia inter-ocular, producen un efecto plástico más grande al ser observadas en un estereoscopio, que el obtenido con fotografías tomadas con cámara estereográfica (de dos objetivos); el efecto es el mismo que se tendría mirando, a simple vista, una reproducción plástica del terreno; la escala reducida a que habría que hacer esta reproducción es igual a la relación entre la distancia inter-ocular normal y la que separa las dos estaciones, que es la base del levantamiento.

No es absolutamente necesario que las dos estaciones estén a idéntica altura sobre el suelo, ya que puede producirse el efecto estereoscópico en las fotografías, aunque esté algo inclinada la base (línea de unión de las estaciones). Tampoco la orientación de las placas, o sea el eje de la cámara, ha de ser rigurosamente paralelo en una y otra estación, como veremos más adelante. Por lo pronto, sólo vamos a considerar el caso normal en que el eje de la cámara sea horizontal en ambas estaciones y perpendicular a la base. Los fototeodolitos de las figuras 276 a 279 están provistos de dispositivo especial para la obtención de vistas estereoscópicas, mediante el cual puede siempre disponerse el eje de la cámara formando el ángulo que se quiera con la base.

Esta orientación se consigue, en primer lugar, con el empleo de las plataformas nive-

lantes como dispositivo de centrado (tomo I, pág. 307), colocando un trípode en cada estación y centrando exactamente en una de ellas el teodolito y en la otra la señal de mira. Para orientar el eje de la cámara respecto a la base, se emplea en los teodolitos de Zeiss (figuras 277 y 278) el dispositivo orientador descrito en la página 243 (fig. 281). En el fotogrametro de Wild (fig. 279) va dispuesto el teodolito comparador de tal modo sobre el soporte de la cámara, que para la posición *cero* de la alidada el plano de colimación del teodolito pasa por el eje de la cámara.

El teodolito universal de Zeiss está provisto de un anteojo orientador, ya conocido, cuyo eje de colimación es perpendicular al eje de la cámara.

La base puede medirse como se hace de ordinario con las distancias entre puntos del terreno, con cinta, cadena o reglones. Es muy frecuente, sin embargo, la medición indirecta con mira horizontal y goniómetro.

Teoría de la estereofotogrametría normal. Disponiendo de dos fotografías obtenidas con la cámara colocada de modo que su eje sea horizontal y perpendicular a la base, se pueden hallar las coordenadas rectangulares en el espacio necesarias para determinar la proyección horizontal y la altura o cota de los puntos del terreno.

Supongamos, en primer lugar, que una vez identificados los puntos, se miden las coordenadas sobre la placa con un coordinatómetro, del modo indicado en el párrafo 85 (pág. 353). El cálculo de las coordenadas de los puntos del terreno se hace del modo siguiente: sea O_1 y O_2 (fig. 300) el punto nodal anterior del objetivo en una y otra estación, y H_1 y H_2 los puntos principales de las placas respectivas; sobre las placas pueden medirse las abscisas x_1 y x_2 de las imágenes p_1 y p_2 de un mismo punto P del terreno, así como la ordenada y correspondiente a la imagen en la placa izquierda; con estos valores x_1, x_2, y pueden ya calcularse las coordenadas en el espacio X (abscisa), Y (cota o altura), Z (ordenada o distancia) del punto P respecto a O_1 como origen, pues como se ve en la figura, se tiene directamente:

$$\text{(abscisa): } X = x_1 \frac{Z}{f} \quad \text{(altura): } Y = y \frac{Z}{f}$$

y también:

$$\frac{Z}{f} = \frac{b}{x_1 - x_2}$$

o sea, poniendo $x_1 - x_2 = \Delta$:

$$\text{(distancia): } Z = f \frac{b}{\Delta} \quad (1)$$

Es decir, que las tres coordenadas en el espacio son:

$$X = x_1 \frac{b}{\Delta}, \quad Y = y \frac{b}{\Delta}, \quad Z = f \frac{b}{\Delta} \quad (2)$$

A la cantidad Δ , mediante la cual se determina la distancia Z , se la conoce con el nombre de *paralaje estereoscópica*.

El estereomicrómetro. Las consideraciones anteriores, puramente geométricas, sobre los levantamientos estereofotogramétricos no ponen de manifiesto las muchas ven-

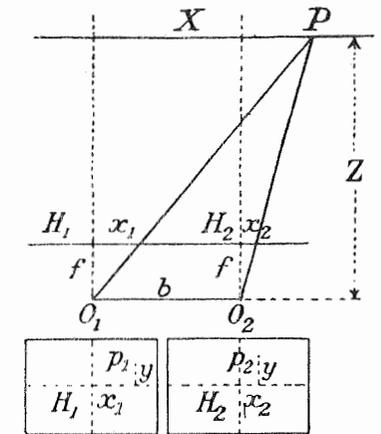


Fig. 300

tajas de este método, una de las cuales consiste en que las vistas obtenidas pueden mirarse en un estereoscopio, con lo cual desaparece toda dificultad en la investigación de los puntos comunes en ambas placas.

Pero la principal ventaja radica en que la comparación o medición de las fotografías puede hacerse también en el estereoscopio. La figura 301 representa el estereomicrometro, cuyo marco o bastidor *R* se coloca sobre las dos vistas montadas ya en el estereoscopio (fig. 302): al mirar por las lentes de este último, además de la reproducción en

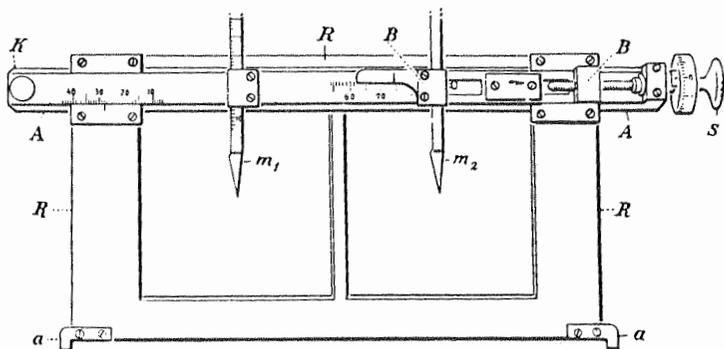


Fig. 301. — Estereomicrometro

relieve del terreno, se ven los dos índices m_1 y m_2 como una punta flotante en el espacio. Corriendo la regla *A* se pueden mover estos índices en sentido horizontal, y a través de esta misma regla pueden moverse verticalmente; además, el índice m_2 puede moverse independientemente del m_1 , por medio del tornillo micrométrico *S*, leyéndose la distancia entre ambos índices sobre una escala y sobre el tambor del tornillo *S*.

El procedimiento para medir las coordenadas con este aparato consiste, en primer lugar, en mover horizontal y verticalmente los índices, haciendo girar a la vez el tornillo micrométrico hasta que la señal flotante coincida con el punto del terreno que se quiere determinar. Las lecturas de las escalas de la regla *A* y del estilete o índice m_1 dan directamente los valores de x e y , mientras que las lecturas en la escala de la derecha y en el tambor micrométrico dan la paralaje $\Delta = x_1 - x_2$.

Para comprobar los valores obtenidos, se llevan los índices m_1 y m_2 sobre los puntos principales de las placas, y si las lecturas en las escalas de las x y de las y

no son iguales a cero, en esta posición de los índices, hay que restarlas de todas las otras lecturas. Del mismo modo, la lectura sobre la escala de paralajes y sobre el tambor micrométrico correspondiente a dicha posición de los índices, y que dan la distancia entre éstas para enfoque al infinito, debe restarse de todas las demás lecturas.

Si se emplean directamente las negativas para la medición en el coordinatómetro,

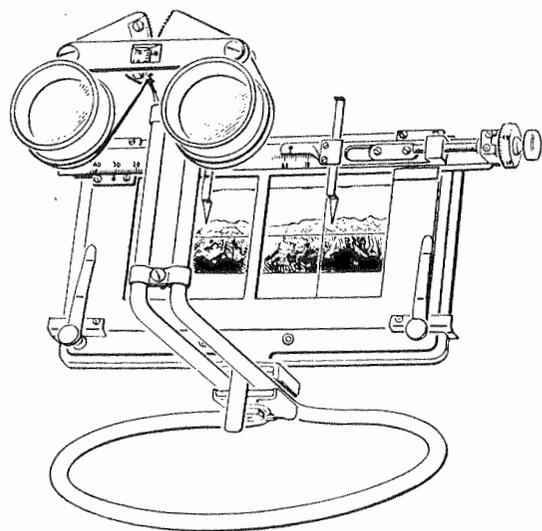


Fig. 302. — Estereoscopio de Zeiss, con estereomicrometro

pueden obtenerse los valores de x y de y con una aproximación de 0,1 mm, y la paralaje con unas centésimas de milímetro, suponiendo bien corregido y mejor manejado el estereomicrometro. Claro está que a causa de la poca distancia que separa nuestros ojos, sólo pueden emplearse en este aparato placas de poco tamaño, por lo cual queda reducida la aplicación del estereomicrometro principalmente a trabajos demostrativos para la preparación del personal que haya de operar en fotogrametría.

Estereocomparador de Pulfrich, construido por Zeiss. La figura 303 representa, a escala $\frac{1}{5}$ del natural, el estereocomparador de Pulfrich-Zeiss, fundado en el mismo principio que el estereomicrometro, pero dispuesto para placas de mayor tamaño y lecturas de más precisión. El movimiento del índice virtual flotante, para diferentes distancias, que se consigue en el estereomicrometro corriendo lateralmente uno de los estiletos, se logra aquí moviendo también lateralmente una de las fotografías, permaneciendo inmóviles los dos índices o estiletos; el efecto estereoscópico es el mismo en ambos casos.

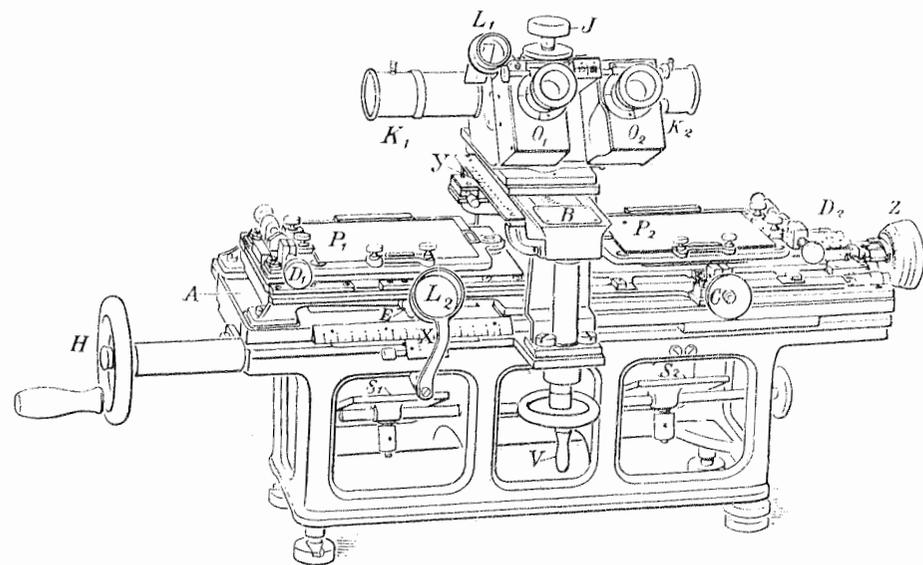


Fig. 303. — Estereocomparador Pulfrich-Zeiss

El basamento del aparato está constituido por una especie de mesa de cuatro pies, sobre la cual puede correrse un cursor o carretón *A*, por medio de la manivela *H*; se mide la traslación de este cursor sobre la escala *X*. Sobre este carretón principal van otros dos secundarios, que también se mueven en la misma dirección que aquél, y que llevan sendos marcos para alojar las placas fotográficas; el cursor secundario de la izquierda puede inmovilizarse mediante el fiador *E*, mientras que el de la derecha se mueve con el tornillo micrométrico *Z*; este segundo cursor puede también correrse perpendicularmente a la dirección del primer movimiento por medio del tornillo *C*, para poder corregir la diferencia de altura de las imágenes de un mismo punto en ambas vistas, en los casos en que los dos puntos de estación no estén en la misma horizontal. Por último, los tornillos de coincidencia D_1 y D_2 sirven para dar a las placas pequeños movimientos de rotación. Las placas P_1 y P_2 se sujetan en sus marcos con mordaza de tornillos. Tanto la mesa-soporte como los carretones que sobre la misma se deslizan, presentan su parte central abierta,

de modo que las placas se iluminan por detrás, con los espejos S_1 y S_2 situados dentro del soporte general del aparato.

Sobre la misma mesa va el soporte del estereomicroscopio; este último puede deslizarse sobre una corredera B (normal a la dirección de los cursores anteriores) por medio de la manivela V , y su movimiento se lee sobre la escala Y . Cuando hay que trasladar el aparato se suelta el tornillo J para desmontar el microscopio. En K_1 y K_2 van los objetivos, que pueden taparse con un obturador giratorio (capuchón), y en O_1 y O_2 están los oculares del microscopio binocular de seis aumentos; en el plano-imagen de cada cual va el correspondiente índice. Con el espejo L_1 y la lente que se halla por delante del mismo, y que puede recambiarse a voluntad, se lee cómodamente la escala Y .

Para la medición sobre dos vistas es necesario en primer lugar que las líneas de horizonte y las verticales en ambas placas sean respectivamente paralelas a las dos direcciones principales del aparato, es decir, que los ejes coordenados de las dos placas sean paralelos a la dirección del movimiento de los cursores; en segundo lugar es preciso que al colocar los puntos principales de las vistas en coincidencia con el índice del microscopio, por medio de las manivelas H y V y de los tornillos C y Z , se tenga la lectura cero en las escalas X , Y y Z . Se hace cumplir la primera condición por medio de los tornillos de llamada D_1 y D_2 ; la segunda condición se satisface moviendo convenientemente la placa P_1 en su corredera y sujetándola con el fiador E ; después se ajustan los nonios de X e Y , así como el tambor micrométrico de Z .

Una vez hechas estas correcciones se procede a la medición propiamente dicha; con las manivelas H y V y el tornillo micrométrico Z se lleva el índice flotante sobre un punto cualquiera del terreno, y basta leer los nonios X e Y y el tambor micrométrico Z , para tener las coordenadas x , y y la paralaje Δ ; con estos datos pueden ya calcularse las coordenadas en el espacio del punto observado (v. pág. 369).

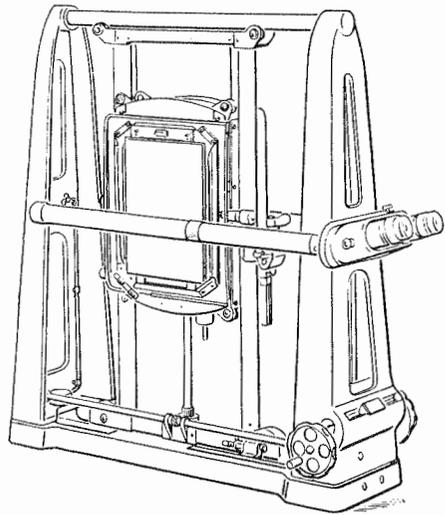


Fig. 304. — Estereocomparador de Hugershoff

correr en un cursor de paralaje, de manera que el método operatorio para la medición de las coordenadas y de la paralaje es el mismo que en el estereocomparador de Pulfrich.

Longitud de la base. De la distancia entre las dos estaciones, es decir, de la longitud de la base, depende la precisión con que pueden determinarse los puntos más distantes del terreno en el levantamiento estereofotogramétrico. La ecuación (1) de la página 369,

$$Z = f \frac{b}{\Delta} \quad (3)$$

nos da, por diferenciación:

$$dZ = -f \frac{b}{\Delta^2} d\Delta, \quad \text{o sea} \quad dZ = -\frac{Z^2}{fb} d\Delta,$$

y prescindiendo de los signos se tiene:

$$b = \frac{Z^2 d\Delta}{f dZ} \quad (4)$$

Expresando b en milímetros, y tomando para $d\Delta$ el valor aproximado 0,01 mm, resulta:

$$b = \frac{1}{100} \frac{Z^2}{f dZ}$$

Si, por ejemplo, se quiere que el error relativo sea $\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{1000}$, se tendrá:

$$b = 10 \frac{Z}{f} \quad (5)$$

donde Z está expresado en metros y f en milímetros. Poniendo en esta fórmula en vez de Z la mayor distancia que pueda presentarse, se obtiene la longitud que debe tener la base.

Hay que advertir que para las menores distancias, la paralaje Δ no debe pasar de unos 40 mm, pues en caso contrario resulta muy difícil y penosa la visión en relieve de estos puntos cercanos. Por esta razón debe también ponerse en la expresión (3) el valor de la paralaje para los puntos más próximos, y acortar la base en caso necesario.

Construcción de los planos. Para transportar al papel los puntos observados en las placas se deducen los valores de la abscisa X , de la ordenada Z y de la cota Y referidas a la estación de la izquierda, de las lecturas x , y , Δ , hechas en el estereocomparador, por medio de las fórmulas (2) de la página 369. Pero es más sencillo situar directamente los puntos mediante estos datos, y deducir también la cota o altura Y por métodos gráficos. Para ello se sigue el procedimiento ideado por Pulfrich («Zeitschr. f. Instr.», 1903), según el cual se empieza por situar en el plano el punto de estación O_1 (fig. 305), trazando seguidamente, a partir del mismo, la recta que indica la dirección del eje de la cámara; sobre esta recta se toma la distancia focal $f = O_1 H$ en milímetros, o en una escala mayor, y por H se levanta una perpendicular a $O_1 H$, que se divide en milímetros o en idéntica escala que f ; se traza después una paralela NN' al eje de la cámara, a una distancia de este último igual a diez veces (o en general, a n veces) la longitud de la base, en la escala en que se haya de construir el plano. Para situar en éste un punto P cuyos datos obtenidos en el estereocomparador son x , y , Δ , se toma sobre la escala horizontal, a partir de H , una distancia igual a diez veces (o a n veces) la paralaje Δ , por ejemplo, $n\Delta = HC$, y se une C con O_1 ; la normal al eje de la cámara trazada por el punto de intersección S , contendrá al punto buscado P , pues en la figura, donde $Z = AS$, se ve que

$$Z : nb = f : n\Delta, \quad \text{de donde} \quad Z = \frac{bf}{\Delta}$$

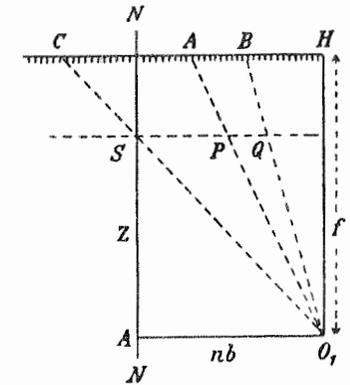


Fig. 305

Basta tomar en la escala horizontal el valor de la abscisa $x = HA$ y unir el punto resultante A con O_1 , para tener en P el punto buscado.

También se obtiene directamente la altura del punto tomando en la misma escala horizontal el valor de $y = HB$ y uniendo el punto B con O_1 ; la distancia del punto Q al eje de la cámara es igual a la altura del punto sobre la estación de la izquierda.

Para simplificar esta construcción ideó Pulfrich un dispositivo («Zeitschr. f. Instr.», 1903) consistente en una regla giratoria alrededor de uno de sus extremos, colocado sobre el punto O_1 , y cuyo borde pasa por este mismo punto O_1 . Con esta regla se trazan los rayos O_1C , O_1A y O_1B . Sobre el tablero hay otra regla fijada en el mismo de tal modo que sus bordes son paralelos al eje de la cámara; con una escuadra que se corre sobre esta segunda regla se traza la línea de posición SPQ .

A Pulfrich se debe también («Zeitschr. f. Instr.», 1921) un perfeccionamiento del método anterior, fundado en que, puesto que la determinación de la línea de posición SPQ depende solamente de la magnitud de la paralaje Δ , se puede calcular, en primer lugar,

por medio de la ecuación $Z = \frac{bf}{\Delta}$, la posición sobre la recta O_1H de los puntos corres-

pondientes a valores enteros de la paralaje, resultando así una *escala de paralajes*, con la cual, para un valor cualquiera de Δ , se puede trazar directamente la recta de posición que le corresponde, sin necesidad de dibujar primero el punto C ni de trazar la recta CO_1 .

Con este dispositivo, según los datos de Pulfrich, se emplean, por término medio, 1,5 minutos en la determinación de un punto.

Los puntos así determinados constituyen la red principal sobre la cual se hace el relleno de los detalles del terreno y se trazan las curvas de nivel, del mismo modo que se hace en los levantamientos topográficos con plancheta, pero en este caso facilita grandemente estas operaciones la visión en relieve del terreno, que da exactamente igual sensación plástica que la contemplación del mismo al natural.

Dock ha propuesto otro método para la determinación de puntos en sus estudios sobre la toma de datos con el estereocomparador en los levantamientos estereofotogramétricos terrestres («Bildm. u. Luftbildw.», 1927).

Puede considerarse como el fundador de los métodos estereofotogramétricos a F. Stolze, que en su Memoria sobre la orientación fotográfica sin cronómetro y la unión entre sí de los puntos así determinados («Photogr. Bibliothek», tomo I, Berlín, 1893) demuestra cómo pueden utilizarse las vistas estereoscópicas para la medición de distancias; en el estereoscopio, y sobre cada una de las dos vistas, se coloca una lámina de cristal reticulada de tal modo que las líneas horizontales queden a igual altura; las líneas verticales se ven en el estereoscopio como flotando o suspendidas en el espacio, y pueden colocarse a la distancia que se quiera, con sólo correr un poco una de las láminas de cristal. Aquí encontramos expuesto por primera vez el principio del índice flotante en el espacio, que no obtuvo de Stolze ninguna otra aplicación práctica.

En el mismo año 1893 presentó H. de Grousilliers a la casa Zeiss un proyecto de aparato fundado en el mismo principio; consistía este aparato en un anteojo doble terrestre con un índice en el plano-imagen de cada tubo. Uno de los índices podía correrse a voluntad en sentido lateral; en el anteojo se veía un índice o señal flotante que podía hacerse coincidir con un punto cualquiera del terreno, y de la distancia entre los índices, medida con un tornillo micrométrico, se deducía la distancia del punto de observación al punto visado. Pulfrich, colaborador científico de la casa Zeiss, partió de este principio, y después de varios años de investigaciones laboriosas y de penosos ensayos, logró primeramente

la construcción del telémetro estereoscópico ya descrito en el párrafo 79 (pág. 329). Pero ya entonces entrevió Pulfrich la importancia de este método aplicado a la fotogrametría, y en los primeros años del siglo xx se desarrolló con gran rapidez la *estereofotogrametría*, a impulsos principalmente de Pulfrich, relegando a segundo término primero y desterrando casi por completo después, la fotogrametría ordinaria, o por el método de la plancheta.

Más adelante veremos que el principio estereoscópico, con la idea fundamental del teodolito comparador (§ 85, pág. 356), tiene una gran importancia en la construcción de los aparatos transportadores para los levantamientos aéreos.

El primer modelo del estereocomparador Pulfrich-Zeiss fué construído en 1900/01; el representado en la figura 303 es uno especial para planos topográficos.

De las memorias y monografías referentes a estos estudios merecen especial mención las siguientes:

C. PULFRICH. *Sobre nuevas aplicaciones de la estereoscopia y sobre un nuevo estereocomparador* («Zeitschr. f. Instr.», 1902, 1903, 1904).

HÜBL. *La estereofotogrametría* («Mitt. d. k. u. k. Milit.-geogr. Inst.», 1902, 1903, 1904).

SELIGER. *Triangulación topográfica por estereofotogrametría* («Zeitschr. f. Verm.», 1905).

TRUCK. *Los métodos estereofotogramétricos y su aplicación a los proyectos de vías férreas* («Zeitschr. f. Verm.», 1906).

El aparato de Pulfrich como estadia en su aplicación a los levantamientos estereofotogramétricos («Zeitschr. f. Verm.», 1907).

H. LÜSCHER. *Sobre un levantamiento estereofotogramétrico en el proyecto de construcción del ferrocarril de Bagdad* («Int. Archiv f. Photogr.», tomo III) («Zeitschr. f. Verm.», 1913).

El estudio detallado de la estereofotogrametría se encuentra en las obras siguientes, aparte de las mencionadas en el párrafo 82 (pág. 338).

H. LÜSCHER. *Fotogrametría* (Leipzig y Berlín, 1920).

LÖSCHNER. *Nociones sobre fotogrametría* (Leipzig y Viena, 1930).

DOCK. *Desarrollo gráfico y analítico de los datos tomados por estereofotogrametría terrestre* (Viena y Leipzig, 1932).

Con toda amplitud están estudiados los principios matemáticos de la fotogrametría en la Memoria de F. SCHILLING sobre *Teoría geométrica de la estereofotogrametría* («Zeitschr. f. Verm.», 1911).

§ 89. Levantamientos estereofotogramétricos en general

El caso *normal* de la estereofotogrametría, que acabamos de estudiar, y en el cual se suponen los ejes de las cámaras paralelos entre sí y perpendiculares a la base, reduce a límites muy pequeños los levantamientos hechos desde una base. Para ampliar estos límites sin salirse de este caso normal, es preciso tomar desde un mismo punto varias bases, en distintas direcciones, o disponer éstas a continuación unas de otras formando una poligonal.

Pero puede también ampliarse el alcance del levantamiento con una sola base, renunciando a la perpendicularidad entre el eje de la cámara y la base y a la sencillez de las fórmulas (2) de la página 369 propias del caso normal. En el estereocomparador, de campo tan restringido, se puede percibir el relieve (visión estereoscópica) cuando los ejes de las fotografías, sin dejar de ser paralelos entre sí, sean oblicuos respecto a la base, siempre que el ángulo formado por aquéllos y esta última esté comprendido dentro de ciertos límites; lo mismo sucede en el caso en que los ejes formen entre sí un ángulo de convergencia o divergencia no muy grande. En estos casos hay que dar por supuesto que los

objetos del terreno quedan representados en las dos fotografías con tamaño igual o muy aproximado.

Con esta generalización del método operatorio es posible obtener, desde una sola base, una gran serie de pares de vistas que abarcarán una extensión considerable del terreno cuyo plano se trata de levantar. La medición, con el estereocomparador, de cada uno de estos pares de vistas, dará, como en el caso normal, las coordenadas x_1, y del punto-estación de la izquierda, así como la paralaje Δ , pero el valor de esta última no puede llevarse directamente a las ecuaciones (2) de la página 369.

Vamos a considerar a continuación los cuatro casos principales que se apartan del normal, según que los ejes sean horizontales y paralelos, horizontales y convergentes o divergentes, inclinados y paralelos, inclinados y no paralelos, que es el caso general, en que los ejes están de cualquier manera dirigidos.

I. *Ejes horizontales y paralelos, oblicuos a la base.* El método más sencillo para ampliar la zona de levantamiento consiste en tomar, desde los extremos de la base, no solamente las vistas normales, de ejes perpendiculares a aquélla, sino otros pares de vistas, cuyos ejes formen ángulos iguales con las respectivas normales, tanto a la derecha como a la izquierda de éstas. En el fototeodolito de Zeiss (figs. 277 y 278) se puede colocar directamente el eje de la cámara formando un ángulo de 30° (en división centesimal) con la base, gracias al dispositivo de autocolimación de que está provisto dicho fotogrametro.

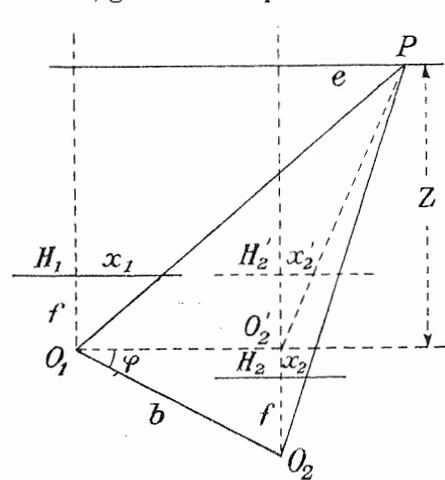


Fig. 306. — Ejes horizontales y paralelos oblicuos a la base

En los demás fototeodolitos se coloca el eje de la cámara en la posición requerida, por medio del círculo acimutal.

La figura 306 corresponde a este primer caso: el ángulo φ es el llamado de oblicuidad, o sea el formado por el eje de la cámara y la normal a la base. Para un punto cualquiera P del terreno pueden medirse la ordenada y , la abscisa x_1 y la paralaje Δ ; tomando además los valores auxiliares x_2 y c , se tiene, siendo Z la distancia normal:

$$\frac{x_2}{c} = \frac{f}{Z + b \operatorname{sen} \varphi}$$

Supongamos que el segmento $O_2 H_2$ se traslada en su propia dirección hasta ocupar la posición $O'_2 H'_2$, de modo que en H'_2 se tendrá un nuevo plano-imagen, coincidente con el H_1 , y una nueva abscisa x'_2 , deduciéndose directamente de la figura la siguiente proporción:

$$\frac{x'_2}{c} = \frac{f}{Z}$$

y sustituyendo aquí el valor de c deducido de la fórmula anterior, resultará, despejando x'_2 :

$$x'_2 = x_2 + \frac{b \operatorname{sen} \varphi}{Z} x_2 \quad (1)$$

A los dos puntos O_1 y O'_2 puede aplicarse la tercera de las fórmulas (2) de la página 369, teniéndose:

$$Z = f \frac{b \cos \varphi}{x_1 - x'_2}$$

Poniendo en esta fórmula en vez de x'_2 su valor (1), se obtiene mediante una sencilla transformación:

$$Z = b \frac{f \cos \varphi + x_2 \operatorname{sen} \varphi}{\Delta} \quad (2)$$

donde se ha sustituido $x_1 - x_2$ por el símbolo Δ .

Para eliminar en esta ecuación el valor x_2 , no medido en las placas, puede ponerse

$$x_2 = x_1 - \Delta$$

resultando así la expresión final:

$$Z = \frac{b}{\Delta} (f \cos \varphi + x_1 \operatorname{sen} \varphi - \Delta \operatorname{sen} \varphi) \quad (3)$$

donde son conocidos todos los términos del segundo miembro, permitiendo calcular directamente el valor de Z .

Cuando la oblicuidad es de sentido contrario al supuesto, o sea, cuando el eje de la cámara cae a la derecha de la normal a la base, el ángulo φ es negativo.

También se debe a Pulfrich un método gráfico para el transporte de puntos en el caso de ejes oblicuos a la izquierda o a la derecha de la normal («Zeitschr. f. Instr.», 1912 y 1921). También Lüscher indica otro procedimiento para el caso de ejes horizontales oblicuos («Zeitschr. f. Instr.», 1921).

II. *Ejes horizontales convergentes o divergentes.* La figura 307 representa el caso en que los ejes de las vistas, es decir, de la cámara en sus dos posiciones, forman entre sí un ángulo divergente δ ; el resto de la notación es igual que en la figura 306. Para reducir este caso al anterior (ejes oblicuos paralelos), hagamos girar al eje de la derecha con el plano-imagen correspondiente, en un ángulo δ , de modo que quede paralelo al de la izquierda, y así tendremos ambos ejes formando un ángulo φ con la normal. Sea x_2'' la abscisa de la imagen de P en la nueva posición de la placa de la derecha. Para reducir este caso

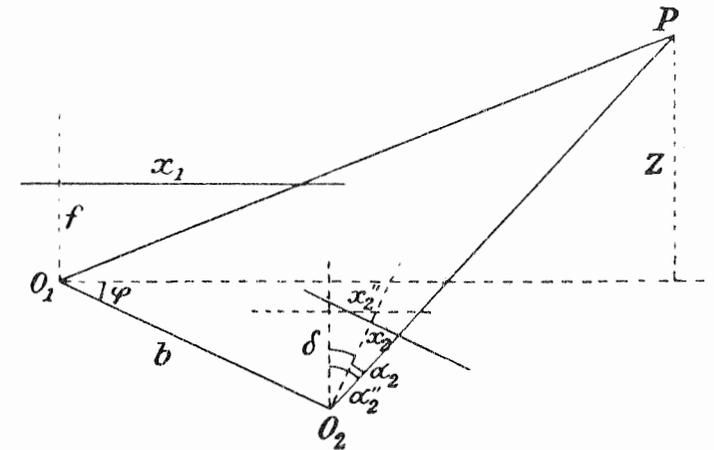


Fig. 307. — Ejes horizontales convergentes o divergentes

al anterior hay que calcular la nueva paralaje $\Delta' = x_1 - x_2''$; para ello llamemos α_2 al ángulo formado por el rayo $O_2 P$ con el eje de la derecha, y α_2'' al formado por el mismo rayo $O_2 P$ con el mismo eje después de haber girado en un ángulo δ ; según se ve en la figura, se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x_2}{f}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2'' = \frac{x_2''}{f}, \quad x_2 = x_1 - \Delta \quad (4)$$

y puesto que

$$\alpha_2'' = \alpha_2 + \delta$$

se tendrá:

$$x_2'' = f \operatorname{tg} (\alpha_2 + \delta) = f \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \delta} \quad (5)$$

o bien

$$x_2'' = f \frac{\frac{x_2}{f} + \operatorname{tg} \delta}{1 - \frac{x_2}{f} \operatorname{tg} \delta} \quad (6)$$

y como

$$x_2 = x_1 - \Delta \quad \text{y} \quad \Delta' = x_1 - x_2'' \quad (7)$$

se tiene para la distancia Z la siguiente expresión:

$$Z = \frac{b}{\Delta'} (f \cos \varphi + x_1 \operatorname{sen} \varphi - \Delta' \operatorname{sen} \varphi). \quad (8)$$

Esta ecuación es de forma idéntica a la (3), pero el cálculo de x_2'' con la fórmula (5) supone un trabajo bastante grande, y por esta razón se procede las más de las veces de este otro modo: se calcula el ángulo α_2 con la primera fórmula (4), y el ángulo α_1 , correspondiente al rayo O_1P , con la fórmula $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x_1}{f}$; en el triángulo O_1O_2P los ángulos en O_1 y en O_2 son respectivamente iguales a $90^\circ - (\alpha_1 - \varphi)$ y a $90^\circ - (\varphi - \alpha_2 - \delta)$, y por lo tanto,

$$O_1P = b \frac{\cos(\varphi - \alpha_2 - \delta)}{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2 - \delta)}$$

y

$$Z = b \frac{\cos(\varphi - \alpha_2 - \delta) \cos \alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2 - \delta)} \quad (9)$$

Se da por supuesto que tanto el ángulo de oblicuidad φ como el de convergencia δ se miden al hacer la toma de vistas.

Caso en que el ángulo δ de convergencia es muy pequeño. El cálculo anterior se simplifica considerablemente cuando el ángulo δ de convergencia es muy pequeño, como sucede al colocar aproximadamente paralelos los ejes para tomar las fotografías. En este caso tenemos:

$$x_2'' = f \operatorname{tg}(\alpha_2 + \delta) = f \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{f}{\cos^2 \alpha_2} \delta = x_2 + \frac{f}{\cos^2 \alpha_2} \delta$$

o sea:

$$x_2'' = x_2 + f \frac{\delta}{\rho} + f \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\delta}{\rho}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de la paralaje reducida Δ' se tiene:

$$\Delta' = x_1 - x_2'' = x_1 - x_2 - f \frac{\delta}{\rho} - f \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\delta}{\rho}$$

y finalmente:

$$\Delta' = \Delta - f \frac{\delta}{\rho} - f \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \frac{\delta}{\rho} \quad (10)$$

Esta expresión nos dice que cuando el ángulo de convergencia es pequeño, hay que aplicar a la paralaje medida Δ dos correcciones, de las cuales la principal es constante, y la segunda, mucho menor que la primera, depende de la dirección en que se halla el punto observado, respecto a la normal a la placa.

III. *Ejes paralelos, oblicuos e inclinados.* Hasta ahora hemos supuesto que los dos ejes eran horizontales; el caso en que éstos sean inclinados entraña más dificultades, aun cuando ambos estén en un mismo plano, es decir, con igual inclinación, como vamos a ver seguidamente. Supongamos que el ángulo de pendiente de los dos ejes sea ω ; en el caso

normal de la estereofotogrametría (ejes paralelos, horizontales y perpendiculares a la base), podemos imaginar un plano que pase por los dos puntos de estación, y cuyas líneas de máxima pendiente formen con la horizontal el ángulo ω . Con esto ya pueden aplicarse, sin más, las fórmulas (2) de la página 369.

Ahora bien, si los puntos de estación no están a igual altura, supongamos trazado un plano auxiliar por la estación de la izquierda y por la línea de horizonte de la placa correspondiente; proyectando la base sobre este plano se ve que los dos ejes no son perpendiculares a la proyección de la base, sino que forman con ésta un ángulo que es función de la inclinación de la base y de la inclinación de los ejes. Por lo tanto, podemos estudiar este caso a la vez que el propuesto, en que los ejes son paralelos, oblicuos a la base y con idéntica pendiente.

Sea b_0 la base cuya inclinación respecto a la horizontal es i , y respecto al plano auxiliar i' . Si b y b' son las proyecciones de la base sobre ambos planos, se tendrá evidentemente:

$$b_0 = \frac{b}{\cos i} = \frac{b'}{\cos i'} \quad (11)$$

Sea φ el ángulo de oblicuidad de los dos ejes en su proyección horizontal, y φ' en el plano auxiliar; la distancia entre ambos ejes paralelos entre sí será:

$$b \cos \varphi = b' \cos \varphi' \quad (12)$$

Si alrededor del extremo O_2 de la derecha de la base, como centro (fig. 308) se traza una esfera de radio cualquiera, cortará a la línea que va dirigida hacia el extremo de la izquierda en un punto O_1 , y a la que va al punto principal de la placa de la derecha en el punto H_2 . El punto Z es la intersección de la superficie esférica con el radio que pasa por el cenit de O_2 .

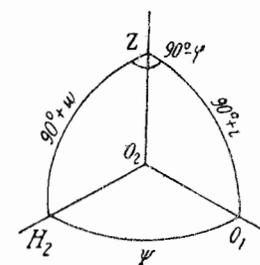


Fig. 308

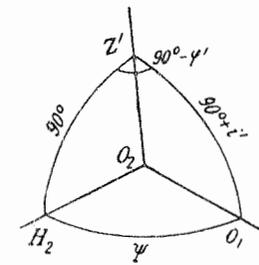


Fig. 309

En la misma figura están anotados los ángulos en ella formados; en el triángulo esférico O_1H_2Z se tiene, siendo ψ el ángulo plano comprendido entre los radios O_2O_1 y O_2H_2 :

$$\cos \psi = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \omega + \cos i \cos \omega \operatorname{sen} \varphi. \quad (13)$$

En la figura 309, obtenida análogamente a la anterior, el punto Z' representa la intersección de la superficie esférica con la normal trazada por O_2 al plano auxiliar. En vez de los ángulos φ e i , se tienen aquí la oblicuidad φ' respecto al plano auxiliar y la inclinación i' de la base respecto a este mismo plano. Y puesto que el eje de la cámara está contenido en el plano auxiliar, se tiene en esta figura el ángulo de 90° en vez del ángulo de $90^\circ + \omega$ que se tenía en la figura 308. Del triángulo esférico O_1H_2Z' (fig. 309) se deduce directamente:

$$\cos \psi = \cos i' \operatorname{sen} \varphi'. \quad (14)$$

Igualando los segundos miembros de las dos ecuaciones (13) y (14) resulta:

$$\cos i' \operatorname{sen} \varphi' = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \omega + \cos i \cos \omega \operatorname{sen} \varphi.$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de $\cos i$ y $\cos i'$ deducidos de (11), y mediante sencillas transformaciones se tiene:

$$b' \operatorname{sen} \varphi' = b \operatorname{tg} i \operatorname{sen} \omega + b \cos i \operatorname{sen} \varphi. \quad (15)$$

Para el cálculo de coordenadas, en vez de emplear el sistema utilizado anteriormente (§ 88, pág. 369), en que el plano de las X-Z era el horizontal y el eje de las Y la vertical, resulta más ventajoso otro sistema, cuyo plano de las X'-Z' sea el plano auxiliar, de inclinación ω, y cuyo eje de las Y' sea la normal a este plano. Para la distancia Z' se tiene, según la fórmula (2) de la página 377:

$$Z' = \frac{b'}{\Delta} (f \cos \varphi' + x_2 \sin \varphi') \quad (16)$$

y como se vió en la misma página 369, se tiene también:

$$X' = \frac{x_1}{f} Z' \quad Y' = \frac{y_1}{f} Z'$$

luego sustituyendo en estas expresiones el valor de Z' (11) resultará:

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{b'}{\Delta} (\cos \varphi' + \frac{x_2}{f} \sin \varphi') x_1 \\ Y' &= \frac{b'}{\Delta} (\cos \varphi' + \frac{x_2}{f} \sin \varphi') y_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

De aquí podemos deducir las coordenadas X, Y, Z, referidas al plano horizontal y a la vertical. Desde luego se tiene, evidentemente, que X = X'. Para la transformación de las coordenadas Y', Z' en las Y, Z, imaginemos el plano vertical que pasa por el eje de la cámara en el punto O₁ de la izquierda y supongamos que este plano es el de la figura 310; en este supuesto, la abscisa x₁ estará representada por el punto H₁, y la X = X' por el punto P', por ser ambas perpendiculares al plano del papel.

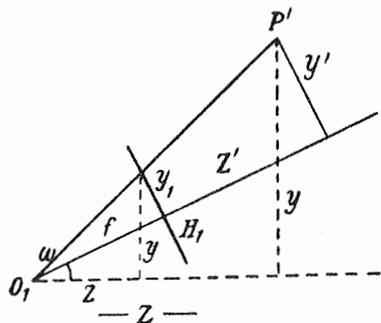


Fig. 310

Por una parte, es evidente la siguiente proporcionalidad:

$$X : x_1 = Y : y = Z : z$$

y por otra parte, se deducen inmediatamente de la figura las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} y &= f \sin \omega + y_1 \cos \omega \\ z &= f \cos \omega - y_1 \sin \omega \end{aligned}$$

De estas expresiones y la anterior proporcionalidad resulta:

$$\left. \begin{aligned} Y &= X \frac{y}{x_1} = \frac{X}{x_1} (f \sin \omega + y_1 \cos \omega) \\ Z &= X \frac{z}{x_1} = \frac{X}{x_1} (f \cos \omega - y_1 \sin \omega) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Pero como X = X', se tiene, según la primera de las fórmulas (17), teniendo además en cuenta la (12):

$$X = \frac{b}{\Delta} \left[\cos \varphi + \frac{x_2}{f} (\operatorname{tg} i \sin \omega + \cos \omega \sin \varphi) \right] x_1 \quad (19)$$

y sustituyendo este valor en las fórmulas (19):

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{b}{\Delta} \left[\cos \varphi + \frac{x_2}{f} (\operatorname{tg} i \sin \omega + \cos \omega \sin \varphi) \right] (f \sin \omega + y_1 \cos \omega) \\ Z &= \frac{b}{\Delta} \left[\cos \varphi + \frac{x_2}{f} (\operatorname{tg} i \sin \omega + \cos \omega \sin \varphi) \right] (f \cos \omega - y_1 \sin \omega) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Para simplificar estas expresiones pongamos:

$$\frac{b}{\Delta} \left[\cos \varphi + \frac{x_2}{f} (\operatorname{tg} i \sin \omega + \cos \omega \sin \varphi) \right] = \lambda \quad (21)$$

y se tendrá por último:

$$\left. \begin{aligned} (\text{abscisa}): \quad X &= \lambda x_1 \\ (\text{altura}): \quad Y &= \lambda (f \sin \omega + y_1 \cos \omega) \\ (\text{distancia}): \quad Z &= \lambda (f \cos \omega - y_1 \sin \omega) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

IV. *Ejes de direcciones cualesquiera.* Hasta ahora se ha supuesto que los dos ejes estaban en un mismo plano; sólo nos queda por considerar el caso más general en que los ejes están de cualquier modo dirigidos, es decir, desigualmente inclinados respecto a la horizontal y situados en planos verticales convergentes o divergentes. En este caso no son exactamente iguales en ambas placas las ordenadas (que corresponden a las alturas o cotas en el terreno), por lo cual llevan los modernos estereocomparadores el tornillo C (fig. 303) en forma de tornillo micrométrico para poder medir la paralaje vertical y₁ - y₂ del mismo modo que la horizontal x₁ - x₂. En este caso se miden las coordenadas x₁, y₁ del punto de que se trate, sobre la placa de la izquierda, así como las dos paralajes Δ_x y Δ_y. Con estos datos se calculan las coordenadas del mismo punto en la placa de la derecha, porque es evidente que:

$$x_2 = x_1 - \Delta_x \quad y_2 = y_1 - \Delta_y$$

Por ser conocida la orientación exterior en las dos estaciones se pueden calcular los ángulos acimutales y cenitales de los dos rayos O₁P y O₂P (§ 85, pág. 354), y por consiguiente también puede calcularse la distancia O₁P.

Cálculo de coordenadas. Para el cálculo de las coordenadas en el sistema general, en el cual se dan también las coordenadas de los dos puntos de estación O₁ y O₂, hay que calcular primero el ángulo α₁ de orientación de la placa por medio de la expresión $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{x_1}{f}$, así como la distancia O₁P = Z cos α₁. Como se conoce la orientación del eje en O₁, basta sumarle α₁ para tener la orientación del rayo O₁P, con lo cual pueden ya calcularse las diferencias entre las coordenadas de O₁ y P.

Cuando los ejes son horizontales, se calcula el desnivel entre los puntos O₁ y P por la segunda de las fórmulas (2) de la página 369.

Cuando haya que determinar con mucha exactitud la posición de los puntos observados, debe tenerse en cuenta que O₁ y O₂ son los puntos nodales anteriores de ambos objetivos, que no coinciden con el centro del fototeodolito, es decir, con el punto de intersección de los ejes vertical y horizontal (o de giro) del aparato, siendo necesario referir los puntos O₁ y O₂ al centro del fotogrametro en las dos estaciones.

Solamente se aplican en la práctica las fórmulas correspondientes al primer caso considerado, ejes horizontales paralelos y oblicuos a la base; las fórmulas expuestas y estudiadas en los demás casos tienen sólo un interés teórico, para mejor comprender el transporte mecánico de puntos, de que vamos a ocuparnos en el párrafo 90.

Las fórmulas correspondientes a los casos anteriores se encuentran desarrolladas con todo detalle en los siguientes trabajos:

HOCHSTEINER. *Levantamiento estereofotogramétrico con ejes de igual inclinación y oblicuidad* («Zeitschr. f. Instr.», 1919).

GRUBENMANN. *El cálculo de las vistas estereofotogramétricas* («Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1919).

F. PFEIFFER. *Posición y altura de un punto deducidas de dos vistas fotogramétricas* («Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. W., math.-naturw. Kl. Jahrg. 1919»).

H. LÜSCHER. *Métodos de transporte de vistas estereofotogramétricas cen ejes oblicuos* («Zetschr. f. Instr.», 1919).

§ 90. El estereoautógrafo

El estereoautógrafo de Zeiss permite construir de modo automático los planos correspondientes a los levantamientos estereofotogramétricos. Consiste este aparato, en esencia, en un estereocomparador que lleva un lápiz de tal manera dispuesto, que al mover el índice flotante de aquél se mueve también éste, y va trazando sobre una hoja de papel la proyección horizontal de la trayectoria que en el espacio sigue el índice virtual flotante. Si se va colocando este índice, uno tras otro, sobre los diferentes puntos del terreno identificados en las dos fotografías, el lápiz irá situando estos puntos en el papel, resultando así la representación planimétrica del terreno fotografiado. Con este aparato no hay necesidad de medir las coordenadas de los puntos en la placa de la izquierda, ni las paralajes, así como tampoco hay que calcular las distancias. Además, lleva este aparato un dispositivo especial que da automáticamente las alturas de los puntos y que permite dibujar también de modo automático cuantas curvas de nivel se quieran trazar.

Este aparato no sólo sirve para el caso normal de la estereofotogrametría, en el cual los ejes de las cámaras son paralelos y perpendiculares a la base, sino que puede emplearse en levantamientos con los ejes oblicuos, y con ejes convergentes o divergentes.

Vamos a estudiar por separado las partes principales del aparato, antes de describir su estructura de conjunto y su funcionamiento.

La figura 311 representa dos reglas giratorias alrededor de los puntos *I* y *II*, situados a distancia cualquiera entre sí; estas reglas van unidas por sus extremos inferiores a la placa de la izquierda y a la placa de la derecha respectivamente. Estas placas pueden correrse lateralmente a voluntad, dando lugar a un giro de las dos reglas alrededor de sus respectivos centros de rotación *I* y *II*. Por encima de las placas se mueve, siempre horizontalmente, un microscopio binocular, cuya distancia entre objetivos, ampliificada, es igual a la distancia entre los puntos *I* y *II*; en cada plano-imagen del doble microscopio se encuentra un índice fijo. Llamemos *f* a la distancia del microscopio a los puntos *I* y *II*, es decir, a la separación entre la línea de unión de los centros de ambos objetivos y la línea de unión de los puntos *I* y *II*, que es paralela a la primera. Colocando primero las placas de modo que sus puntos principales *H*₁ y *H*₂ coincidan con los índices del microscopio, se tiene en las reglas las lecturas *A*₀ y *B*₀. Si se corren las dos placas a la vez, de modo que el índice de la izquierda caiga sobre la imagen *P*₁ de un punto del terreno, la traslación de las placas será igual a *x*₁, y las dos reglas tomarán las direcciones paralelas *A* y *B*.

Para la determinación mecánica de las distancias sirve una tercera regla, que constituye el puente *QQ*, y que puede correrse paralelamente a la línea *I-II*; esta regla lleva un manguito-guía *A* fijo, para la primera regla, y otro móvil, para la segunda. Este segundo

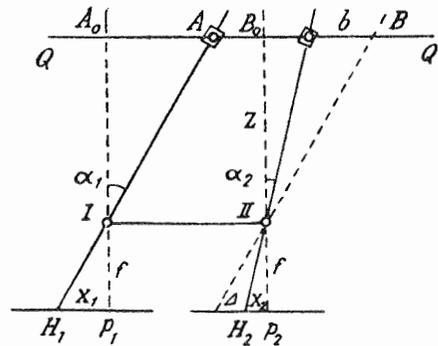


Fig. 311

manguito se coloca en una posición tal, que su distancia *b* a *B* sea igual a la longitud de la base, en la escala a que haya de dibujarse el plano, obligando a la placa de la derecha a correrse lateralmente por medio de la articulación que la une con la segunda regla.

Para colocar la imagen *P*₂ del punto en la placa de la derecha, exactamente bajo el índice del microscopio, se traslada el puente *QQ* paralelamente a sí mismo, manteniendo constante la dirección *IA*, y de este modo la placa de la derecha habrá recorrido un espacio *x*₂ a partir de su posición primitiva.

Siendo $\Delta = x_1 - x_2$ la paralaje del punto del terreno observado, tendremos, en los triángulos semejantes con vértice común en *II*:

$$Z = b \frac{f}{\Delta} \quad (1)$$

lo que nos dice que *Z* es igual a la distancia entre el punto observado y la recta *I-II*, en la escala del plano. Si suponemos provisto uno de los manguitos, por ejemplo el *A*, de un lápiz, quedará automáticamente dibujado el punto del terreno enfilado con el índice flotante.

Para el caso de ejes paralelos y oblicuos hay que modificar algo la construcción anterior. En la figura 312 está representada sólo la parte de la derecha de la figura anterior; la longitud *b* de la base no se toma en este caso sobre la recta *QQ*, sino sobre otra recta que forme con ésta un ángulo φ igual al de oblicuidad de los ejes; la parte *b'* que en la recta *QQ'* corresponde a la *b*, será:

$$b' = b \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \alpha_2$$

o sea:

$$b' = b \cos \varphi + \frac{b}{f} x_2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Pero como, análogamente al caso anterior, se tiene que

$$Z = b' \frac{f}{\Delta}$$

resultará para valor de *Z* en función de *b* el siguiente:

$$Z = b \frac{f \cos \varphi}{\Delta} + b \frac{x_2 \operatorname{sen} \varphi}{\Delta} \quad (2)$$

Esta fórmula es la misma (2) de la página 377.

El método operatorio consiste también en este caso en enfilar primero con el índice la imagen del punto del terreno en la placa de la izquierda; después se mueve el puente *QQ* de tal modo que la imagen del punto en la placa de la derecha quede también enfilada con el índice.

El caso de ejes convergentes o divergentes puede reducirse al anterior por medio de las fórmulas (5) o (6) de las páginas 377 y 378. Supongamos que los dos ejes formen entre sí un ángulo divergente δ (fig. 313); en este caso, en vez de la abscisa anterior *x*₂ del punto en la placa de la derecha, se tendrá la siguiente abscisa reducida:

$$x_2'' = f \operatorname{tg} (\alpha_2 + \delta)$$

y ya puede deducirse la paralaje reducida

$$\Delta' = x_1 - x_2''.$$

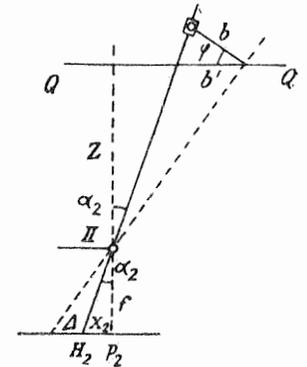


Fig. 312

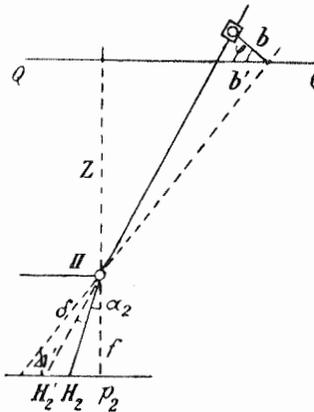


Fig. 313

En el estereoautógrafo se hace intervenir la convergencia o divergencia doblando la regla de la derecha por el punto *II*, de tal modo que el brazo más largo de la misma quede formando con el más corto el ángulo δ .

Al enfilar el punto-imagen de la derecha del modo antes indicado, se tiene la abscisa $H' p_2 = x_2''$ y la paralaje reducida $x_1 - x_2'' = \Delta'$. Se puede en este caso aplicar también la fórmula (2), sustituyendo x_2 por x_2'' , y Δ por Δ' , y la misma longitud Z de la figura 312 da la distancia entre el punto del terreno y la recta *I-II* en la escala del plano.

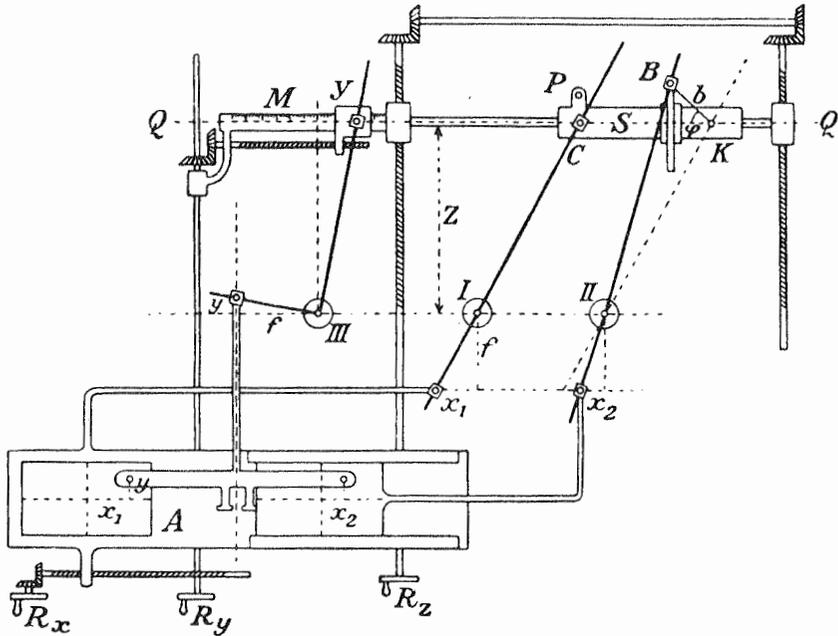


Fig. 314. — Disposición esquemática del estereoautógrafo

En la figura 314 se ve en esquema el estereoautógrafo completo, pudiéndose apreciar perfectamente el funcionamiento de cada una de sus partes principales.

La placa de la izquierda va fija sobre la corredera principal *A*, mientras que la de la derecha puede moverse en una corredera propia, deslizándose sobre la primera *A*. Sobre la misma corredera *A* va montado el microscopio, provisto de los dos índices y que puede moverse en la dirección del eje de las *y*. La corredera principal se mueve con la manivela R_x .

Ambas correderas van unidas a las reglas giratorias alrededor de los puntos *I* y *II*, por medio de dos varillas, cada una de las cuales lleva en su extremo un manguito giratorio.

Sobre el puente *QQ* se desliza un cursor grande *S* en cuya parte izquierda va fijado el manguito-guía, giratorio, de la regla de la izquierda; también sobre este puente se encuentra una doble corredera-guía, sobre la cual se toman, a partir del punto normal *K*, los dos segmentos $b \cos \varphi$ y $b \sin \varphi$, con lo cual el manguito giratorio *B* de la segunda regla se coloca a la distancia *b* del punto normal *K*, formando esta distancia un ángulo φ con *QQ*. También va unido a este cursor el lápiz trazador *P*, que no coincide con la intersección de la primera regla y el puente *QQ*, como se ve en la figura; este desplazamiento del lápiz sólo produce el efecto de una pequeña traslación paralela de todo el dibujo.

En el punto *II* va el dispositivo de flexión para doblar la regla de la derecha de modo

que la prolongación del brazo superior de la misma forme con el inferior el ángulo δ ; en la figura 314 está levemente doblada esta regla, correspondiendo a un ángulo δ muy pequeño.

La traslación paralela del puente *QQ* se verifica con la manivela R_z .

Para determinar las alturas o cotas sirve la palanca angular giratoria alrededor del punto *III*, que se mueve al correr el microscopio en la dirección del eje de las *y*. La distancia del punto *III* a la recta sobre la cual se mueve el centro del microscopio, es igual a la distancia focal *f* de las vistas. En la posición normal, en que el índice del microscopio cae sobre el eje de abscisas, la regla de alturas es perpendicular al puente. Al colocar el microscopio en la posición correspondiente a la ordenada *y* en la placa de la izquierda, la regla de alturas determina en el puente *QQ* un segmento *Y*, y se tiene evidentemente:

$$\frac{Y}{Z} = \frac{y}{f}, \quad \text{de donde} \quad Y = y \frac{Z}{f}.$$

Esta expresión nos dice que la longitud *Y*, que se lee sobre una escala *M* unida al puente *QQ*, es igual a la altura del punto del terreno *P* sobre el punto de estación O_1 de la izquierda. El microscopio no se coloca directamente sobre la ordenada *y*, sino que es la regla de alturas la que al correrse por medio de la manivela R_y , lleva al microscopio a aquella posición, como se ve en la figura 314.

El manejo del estereoautógrafo consiste, en líneas generales, en lo siguiente: se empieza por colocar el manguito *B* en la posición que debe ocupar, tomando para ello los segmentos $b \cos \varphi$ y $b \sin \varphi$, y en la articulación *II* se dobla la regla en el ángulo δ de convergencia o divergencia, según el caso; después, por medio de las manivelas R_x y R_y se enfila aproximadamente un punto de la placa de la izquierda con el índice del microscopio. Se corre entonces, con la manivela R_z , el puente *QQ*, con lo cual el manguito *C* se deslizará sobre la regla, inmóvil, de la izquierda; el cursor *S*, con el manguito *B*, se moverá también y arrastrará en su movimiento a la placa de la derecha; por lo tanto, moviendo convenientemente la manivela R_z se puede también llevar la imagen del mismo punto en la placa de la derecha a coincidir con el índice del microscopio, aunque sólo aproximadamente, ya que el movimiento del puente hace correrse también un poco al microscopio mismo; es preciso, para lograr la coincidencia exacta del índice flotante con la imagen estereoscópica del punto, volver a girar la manivela R_y . El lápiz *P* da la posición del punto en el plano del dibujo, y en la escala de alturas puede leerse su cota o altura.

En vez de hacer el transporte por puntos, se puede también hacer directamente el trazado de las curvas de nivel; para ello se coloca la regla de alturas en la posición correspondiente a la cota de que se trate, y se inmoviliza en esta posición. Basta mover a la vez las dos manivelas R_x y R_z de modo que el índice flotante vaya recorriendo los puntos de la superficie del terreno, para que el lápiz vaya automáticamente trazando la curva de nivel de cota igual a la propuesta.

En esta somera descripción sólo nos hemos ocupado de las partes fundamentales del aparato, que son las mismas representadas en el esquema de la figura 314. En la figura 315 se pueden apreciar los detalles de construcción del estereoautógrafo; el lápiz va montado en el extremo de una varilla, a la izquierda del puente y rígidamente unida a éste; mediante un hilo puede el observador levantar o bajar el lápiz con toda facilidad. En el borde inferior del tablero de dibujo hay un índice especial para señalar en el papel la posición del punto de estación de la izquierda; la recta de unión de esta señal con la punta del lápiz es siempre paralela a la regla articulada con la placa de la izquierda (*IC* en la figura 314).

Para la medición de un par de placas es preciso disponer de algunos puntos, además de los de estación, determinados trigonométricamente sobre el terreno, y que sirven para la orientación y comprobación del plano. Se transportan estos puntos, por coordenadas, y el punto resultante se coloca en el tablero de dibujo del estereoaquígrafo, de tal modo que el punto de estación de la izquierda caiga bajo el índice antes mencionado.

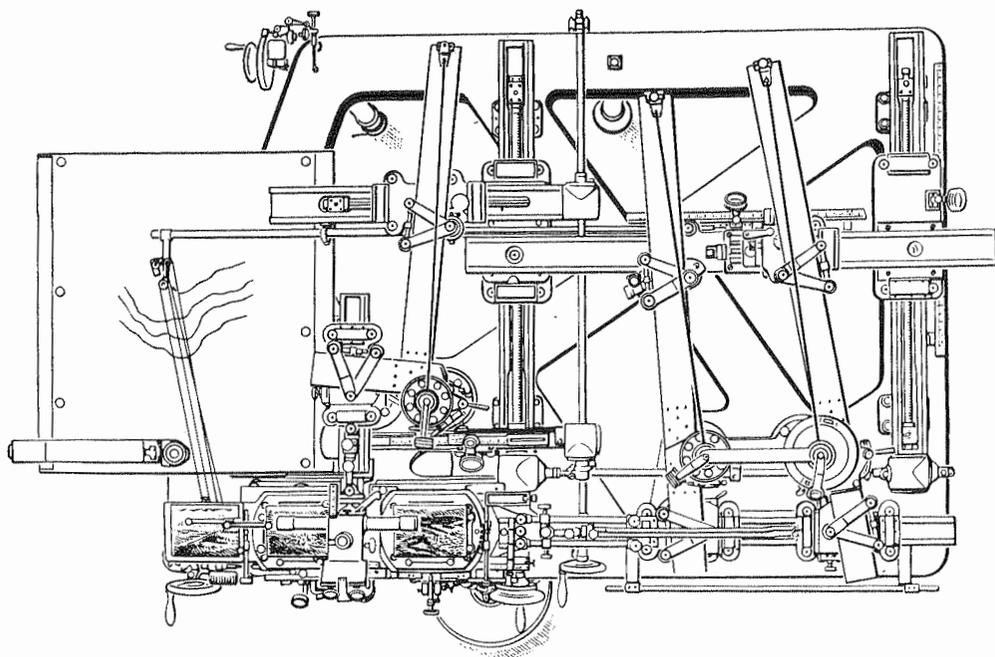


Fig. 315. — Estereoaquígrafo

Mirando con un solo ojo por el ocular de la izquierda del microscopio, se enfila con el índice correspondiente la imagen de uno de los puntos determinados trigonométricamente. La línea de unión de la estación de la izquierda, en el papel, con la punta del lápiz, da la dirección acimutal del punto trigonométrico. Al trasladarse el puente paralelamente a sí mismo, permanece esta dirección invariable, y moviendo la manivela R_2 a la vez que girando el plano alrededor del punto de estación ya señalado, se lleva el lápiz sobre el punto trigonométrico en cuestión, con lo cual queda ya orientado el plano.

Si se ha medido la base en el campo, se puede tomar directamente su longitud b , como se ve en la figura 314, teniendo en cuenta el ángulo de oblicuidad φ . Pero no es necesario medir la base, ya que puede hallarse su longitud b por medio de un punto trigonométrico auxiliar; para ello, después de situar el lápiz sobre este punto, del modo antes indicado, se mira por el microscopio, con los dos ojos, y se hace girar la regla de la derecha ($II-B$ de la figura 314) de modo que el índice flotante en el espacio coincida con el punto auxiliar; la distancia entre el manguito B y el punto K es igual a la base. Conviene disponer de varios puntos trigonométricos, mediante los cuales se puede comprobar tanto la orientación como la longitud de la base, afinando aún más las observaciones en caso necesario.

Este aparato, construido como acabamos de describir, sólo puede aplicarse a vistas de eje horizontal. Las construcciones ideadas para que el estereoaquígrafo sirva también para los demás casos de placas inclinadas y oblicuas, carecen de interés práctico, pues el

problema de la reducción de fotografías de ejes cualesquiera está resuelto de modo más sencillo en los aparatos que veremos más adelante (§§ 105-111), especiales para la fotogrametría aérea.

En cambio, mediante un dispositivo adicional, relativamente sencillo, puede hacerse utilizable el estereoaquígrafo para el caso de ejes inclinados, al menos dentro de ciertos límites, como se ve en la memoria de Gruber sobre el estereoaquígrafo de Orel-Zeiss, con dispositivo adicional para la reducción de vistas aéreas, publicada en el «Int. Archiv f. Photogrammetrie», de 1923.

Con todo detalle trata K. Domansky de la investigación y eliminación de pequeños errores de base y de convergencia en el estereoaquígrafo, etc., en su trabajo sobre *Práctica de la estereofotogrametría* («Int. Archiv f. Photogrammetrie», 1923).

Fotocartógrafo de Kern. La casa Kern, de Aarau, construye un aparato, inventado por el coronel español Ordovás, muy práctico para el transporte o desarrollo de los levantamientos estereofotogramétricos y que fué dado a conocer en el Congreso Internacional de Fotogrametría celebrado en Zurich en el año 1930. El fotocartógrafo de Kern se diferencia, en su construcción exterior, del estereoaquígrafo, en que las dos placas están colocadas una frente a otra, y el microscopio binocular se encuentra entre ellas. El fundamento teórico de este aparato guarda cierta semejanza con el de los primeros estereoaquígrafos (§ 91, pág. 390).

Este fotocartógrafo se encuentra descrito y representado en la obra de Lüscher sobre fotogrametría aérea, publicada en 1930.

§ 91. Levantamientos estereofotogramétricos. Reseña histórica de los estereoaquígrafos

Antes de terminar el estudio de la fotogrametría terrestre, vamos a hacer algunas indicaciones sobre la práctica de la estereofotogrametría.

Antes de empezar la toma de vistas en el campo, debe hacerse un reconocimiento del terreno, para elegir primeramente los puntos de estación y las bases. Para ello se toman los puntos más altos, que permiten abarcar una mayor extensión de terreno. Desde cada punto de estación hay que determinar la parte de terreno que puede levantarse con la cámara en posición normal y en posición oblicua a izquierda y a derecha, así como el número y disposición de las bases, en radiación o en poligonal (§ 89, pág. 375), y también en qué parte del terreno será preciso un levantamiento taquimétrico complementario del fotogramétrico.

Para cada punto de estación elegido se debe determinar la longitud y posición de las bases. Para los levantamientos normales hemos expuesto ya algunos datos (§ 88, pág. 372) respecto a la longitud de las bases, diciendo que para una distancia focal de la cámara, de unos 20 cm, la base no debe ser menor que el $\frac{1}{20}$ de la mayor distancia, ni mayor que el $\frac{1}{5}$ de la distancia menor. En el caso de placas de igual oblicuidad (ejes paralelos y oblicuos) puede emplearse esta misma regla, aplicada a la proyección de la base sobre la normal a la dirección oblicua del eje del levantamiento.

Además de los puntos de estación, son necesarios otros puntos del terreno, para la

orientación y comprobación de las vistas (pág. 386) cuya elección se hace al efectuar el reconocimiento del terreno.

Los puntos de estación y auxiliares elegidos se señalan en el terreno con pirámides de madera, y en las montañas con pirámides de piedras, provistas de tablillas convenientemente pintadas.

La determinación de los puntos de estación y puntos auxiliares puede hacerse por triangulación o por poligonación, de cuyos métodos correspondientes ya nos ocupamos en el tomo I con todo detalle. Los desniveles se determinan, de ordinario, por la observación de ángulos de altura, al hacer la triangulación o poligonación. En cada base, el segundo punto de estación se refiere al primero midiendo el ángulo acimutal, la distancia y el ángulo de altura. La distancia, o longitud de la base, dada su importancia, debe medirse con especial cuidado, con cinta, reglones o por observación angular sobre una mira horizontal. Al transportar, en gabinete, los puntos auxiliares, se tiene una medición indirecta de la longitud de la base, con lo cual queda perfectamente comprobada la directa hecha en el campo. Al tomar las vistas fotográficas debe procurarse que las placas sean lo más exactamente paralelas que sea posible, condición de importancia capital para el desarrollo con estereocomparador. Cuando se emplea el estereoautógrafo, no es tan importante esta condición, pero facilita considerablemente el trabajo de desarrollo o transporte de puntos.

La principal aplicación de la estereofotogrametría consiste en el levantamiento de terrenos montañosos, con perfiles bruscos, grandes escarpas, glaciares, alturas cubiertas de nieve, y praderas o lagunas extensas, aunque haya alguna maleza o arbolado que entorpezca la vista de conjunto. En todos estos casos, el desarrollo se hace con el estereoautógrafo. Cuando hay que hacer el plano de estos terrenos en escalas grandes para proyectos de caminos, saltos de agua, vías férreas, etc., aventaja el método estereofotogramétrico a todos los demás, y en muchos casos es el único aplicable.

Los bosques espesos no se prestan a estos levantamientos estereofotogramétricos con escalas grandes; pero si se trata de escalas más pequeñas, alrededor de 1 : 20 000, pueden trazarse las curvas de nivel por encima y después referirlas al suelo teniendo en cuenta la altura media de los árboles.

El levantamiento estereofotogramétrico presenta la gran ventaja sobre los demás métodos, de la reducción del tiempo necesario para las operaciones de campo, así como también la de permitir una comprobación ulterior completa de estos trabajos de campo, por medio del estereoautógrafo.

Pero no debe creerse que se puede aplicar el método estereofotogramétrico en todos los casos: hay veces, por ejemplo, cuando el terreno está salpicado de manchones de árboles, en que debe emplearse un método mixto. Además, en terrenos llanos, sólo puede aplicarse la estereofotogrametría cuando se puede hacer estación en puntos elevados, desde donde se domine bien el terreno objeto del levantamiento. Ordinariamente, cuando se aplica el método estereofotogramétrico solo, hay que recorrer después el terreno, con un taquímetro, para hacer mediciones complementarias, ya que con las fotografías no es posible saber si existen depresiones ocultas por los repliegues o arbolado del terreno.

Como se ve, la estereofotogrametría está muy indicada para los levantamientos de terrenos poco accesibles, como sucede casi siempre en los proyectos de carreteras de montaña, túneles, saltos de agua, etc. La experiencia ha demostrado que en estas aplicaciones la estereofotogrametría puede compararse, respecto a precisión, con los métodos directos topográficos, pero es muy superior a éstos en cuanto a economía se refiere.

Además, la estereofotogrametría desempeña un papel muy importante en los levanta-

mientos ordinarios topográficos sobre terrenos montañosos, aunque el gran desarrollo adquirido por la fotogrametría aérea ha hecho perder gran significación a su empleo. Los resultados obtenidos con esta última han puesto de manifiesto que actualmente se emplea con ventaja la estereofotogrametría para planos a escalas grandes, y la fotogrametría aérea para planos a escalas pequeñas, pudiendo señalar la escala de 1 : 5 000 como límite de separación para ambos métodos.

Con esto damos por terminadas estas notas sobre la práctica y aplicaciones de la estereofotogrametría; en el trabajo de O. Lacmann sobre esta materia publicado en la «Zentralblatt der Bauverwaltung», 1922, se encuentran muchos y valiosos datos sobre la toma de vistas y trabajos de campo en la estereofotogrametría, y desarrollo de aquéllas con el estereoautógrafo.

El Instituto Geográfico Militar de Viena realizó ya en el año 1903 una serie de ensayos estereofotogramétricos. Con el invento del estereoautógrafo, y la aplicación, en 1910, de este aparato al desarrollo o transporte de los levantamientos, empezó realmente a prosperar el método estereofotogramétrico, por el rendimiento que proporcionaba el estereoautógrafo.

Los trabajos que comprende un levantamiento topográfico con ayuda de la estereofotogrametría, se encuentran perfectamente tratados en la Memoria de K. Korzer sobre *La estereofotogrametría en los levantamientos topográficos*, publicada en las «Mitt. des k. u. k. Milit.-Geogr. Inst.», tomo XXXIII, 1913. Merecen también especial mención los trabajos siguientes:

DOMANSKY. *Organización y coste de los levantamientos estereofotogramétricos* («Int. Archiv f. Photogram.», tomo VI, 1923).

GRUBER. *Cursillo de fotogrametría*. Stuttgart, 1930.

GAST. *Conferencias sobre fotogrametría*. Leipzig, 1930.

Reseña histórica del estereoautógrafo. En la primavera del año 1908, aparecieron a la vez dos aparatos, en los cuales se tendía a transmitir el movimiento de algunas piezas del estereocomparador a un sistema trazador, para la fijación automática de los puntos identificados en aquél. Uno de estos aparatos fué el *Stereoplotter*, así llamado por su inventor el teniente inglés Thompson, y descrito por el mismo en mayo de 1908, en el «Journal of the Royal Geographical Society», volumen XXXI; consistía este aparato en un tablero de dibujo (fig. 316) fijado junto al estereocomparador y sobre el cual podían moverse dos reglas alrededor de puntos fijos *A* y *B*; la primera estaba unida al cursor principal, así como la segunda al cursor del microscopio, de tal modo que las dos se colocaban automáticamente en las posiciones correspondientes al ángulo acimutal α y al ángulo vertical β . Una tercera regla *CC* se corría paralelamente a *AB*, a lo largo de una escala perpendicular a la misma. Una vez leída la distancia en el estereocomparador, se tomaba esta distancia con la regla *CC* sobre la escala, y se tenía en *P* la posición del punto y en *y* su cota o altura.

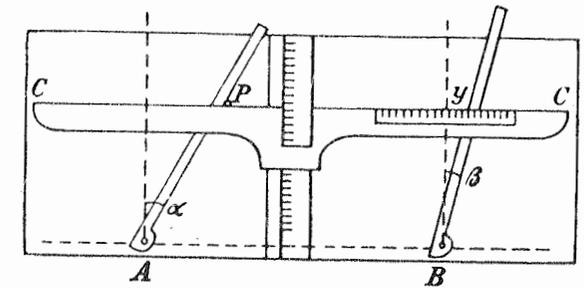


Fig. 316. — Stereoplotter de Thompson

El teniente austriaco Orel disponía el mecanismo de modo que la distancia quedaba automáticamente determinada y señalada; para ello construyó un dispositivo que traducía

gráficamente la fórmula para el cálculo de la distancia en función de la paralaje. El fundamento de este dispositivo se ve representado en la figura 317: se supone tomada la base $O_1 O_2$, a escala arbitraria, y a la distancia f , la paralaje a , ambas a escala también arbitraria; se emplea para el cálculo de E la fórmula $E = b \frac{f}{a}$, y como se ve en la figura,

resulta E en la misma escala que b , determinada por interpretación gráfica de esta ecuación. Pero esta determinación de E es poco exacta, a causa de la pequeñez del ángulo que

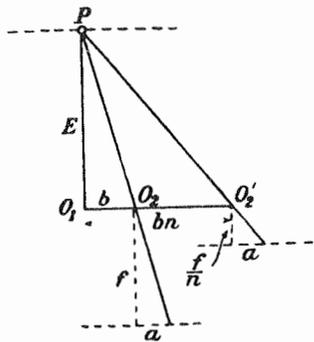


Fig. 317. — Determinación de la distancia, según Orel

forman las rectas que por su intersección dan el punto P ; por esta razón, varió Orel la figura fundamental de modo análogo al propuesto por Pulfrich en 1903 («Zeitschr. f. Instr.», 1903),

tomando nb en vez de b , y la fracción $\frac{f}{n}$ en vez de f . De esta manera no varía E , como demuestra la figura, pero el punto P queda determinado con más exactitud.

En la realización mecánica de esta idea, estaba representado el rayo $O_1 P$ por una regla fija, y el $O'_2 P$ por una giratoria, que se movía al correrse el cursor de paralajes del estereocomparador. De este modo se tenía para el punto del terreno un lugar geométrico en la paralela trazada por P a $O_1 O'_2$; y como la dirección acimutal del punto del terreno se tenía

automáticamente, se determinaba el punto de manera mecánica y precisa. La altura se hallaba con un aparato de cálculo especial, independiente del estereocomparador.

Este dispositivo de Orel, construido por la casa Rost, de Viena, fué dado a conocer por su autor en una sesión de la Sociedad Internacional de Fotogrametría, en abril de 1908.

Pero no pudo disponer Orel para sus experimentos más que del primer modelo del estereocomparador (1900/01), el cual era poco a propósito para el montaje del dispositivo trazador. Por esta razón, y a propuesta de su autor, construyó la casa Zeiss, en 1909, dicho dispositivo unido al nuevo estereocomparador (fig. 303), resultando así el primer estereoautógrafo, que representaba una combinación de las ideas de Thompson y de Orel.

El estereoautógrafo de 1909 sólo podía utilizarse en el caso normal de la estereofotogrametría, no pareciendo posible o hacedero el extender su empleo a los casos de ejes paralelos y oblicuos, y de ejes convergentes o divergentes; sin embargo, el problema fué resuelto en el invierno de 1909, en la casa Zeiss, por Bauersfeld y Pfeiffer, quienes introdujeron como nuevo fundamento geométrico el llamado *paralelogramo de Zeiss*: en vez de la base b se toma una distancia cualquiera k entre los puntos de estación O_1 y O_2 ; los dos rayos de O_1 y O_2 pasan por las imágenes del mismo punto del terreno en ambas vistas: se traza una paralela a $O_1 O_2$ a tal distancia que la parte de ella comprendida entre los dos rayos sea igual a $k - b$; de este modo puede considerarse el punto A como el punto del terreno en el plano, lo cual es evidente, como se ve trazando por A una paralela al segundo rayo, ya que se forma de nuevo la figura 300 (pág. 369). En vez de A se puede tomar cualquier otro

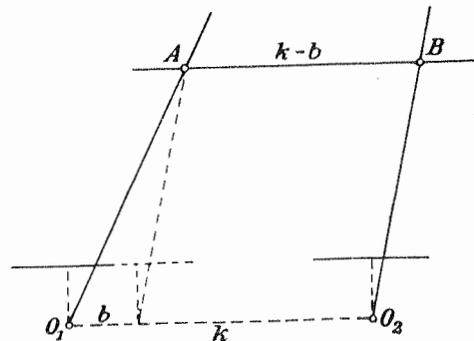


Fig. 318

punto, unido invariablemente a los puntos A y B , pues el único efecto que así se produce consiste en una traslación paralela del plano resultante.

Éste es el fundamento teórico del estereoautógrafo de 1914, descrito detalladamente en el párrafo 90.

En el *Cursillo de Fotogrametría*, de Gruber, ya citado, se encuentra muy bien estudiado el desarrollo del estereoautógrafo y una crítica sobre los trabajos de Orel y Pulfrich.

§ 92. Fotogrametría aérea

Las fotografías desde aeroplanos o dirigibles se prestan admirablemente a los trabajos fotogramétricos, por la situación, completamente despejada, de los puntos de vista o estaciones; tan antiguos como la fotogrametría misma son los ensayos hechos con globos libres y cautivos, y con cometas especiales, para su utilización en los levantamientos fotogramétricos. En ciertos casos, como para fines militares, resulta de valor inapreciable la fotografía aérea; pero en los trabajos sistemáticos corrientes, no encuentra este método tanta aplicación, a causa de las dificultades del mismo. A partir de la invención de los dirigibles, adquirió nuevo auge la fotogrametría aérea, pero actualmente van en cabeza los aviones en este respecto, ya que permiten obtener cuantas vistas se quieran de una extensión de terreno, con un gasto relativamente pequeño, formándose un plano fotográfico bien detallado que puede utilizarse para múltiples objetos. En todo cuanto sigue nos referiremos siempre a la fotogrametría desde aeroplanos.

Es evidente que en la fotogrametría aérea no hay que ocuparse de la medición de ángulos al tomar las vistas, por lo cual, el aparato toma-vistas consiste simplemente en una cámara rígida, de construcción análoga a la del fototeodolito, pero provista de dispositivos adecuados a la obtención de las fotografías desde el aeroplano.

En la fotogrametría terrestre se emplean únicamente las placas, pero en la aérea se emplean también en gran escala las películas. Las primeras tienen la ventaja de la invariabilidad de la capa sensible, pero tienen, en cambio, la enorme desventaja de su peso, sobre todo cuando se trata de obtener una larga serie de fotografías.

Las películas tienen el inconveniente de que al revelar se encogen un poco, cosa que puede despreciarse cuando se encogen por igual en todos sentidos; pero, en cambio, ofrecen la ventaja definitiva de su poco peso, que las hace imprescindibles en levantamientos de muchas vistas. En estos últimos años se ha conseguido fabricar películas prácticamente invariables, y que, por lo tanto, han sustituido casi por completo a las placas.

La cámara puede ir sobre un soporte especial fijado al aeroplano, o bien el observador la lleva con ambas manos para tomar las vistas, al mismo tiempo que maneja el obturador y cambia las placas o las películas. Pero cuando se trata de grandes series de vistas, se emplea una cámara automática, con la cual el observador se limita a vigilar y disponer la marcha general del levantamiento.

A continuación describimos las cámaras más empleadas en fotogrametría aérea.

Cámara de mano, de Zeiss. En las figuras 319 y 320 se ve la cámara fotogramétrica de Zeiss, provista de objetivo de 21 cm de distancia focal; el tamaño de las fotografías es de 13×18 cm. El obturador puede regularse con el botón G (fig. 320) para instantáneas de $\frac{1}{75}$ a $\frac{1}{160}$ de segundo: girando el botón estrellado V (fig. 319) se monta el obturador, que se abre apretando con el dedo índice de la mano derecha el disparador A ;

tanto con esta mano como con la izquierda se sujeta la cámara, por las asas *H*. Los botones *K*₁ y *K*₂ sirven para colocar dos filtros amarillos delante del objetivo. Para orientar la cámara se tiene el marco visor *R* y tres índices: se mira de modo que las puntas de los dos

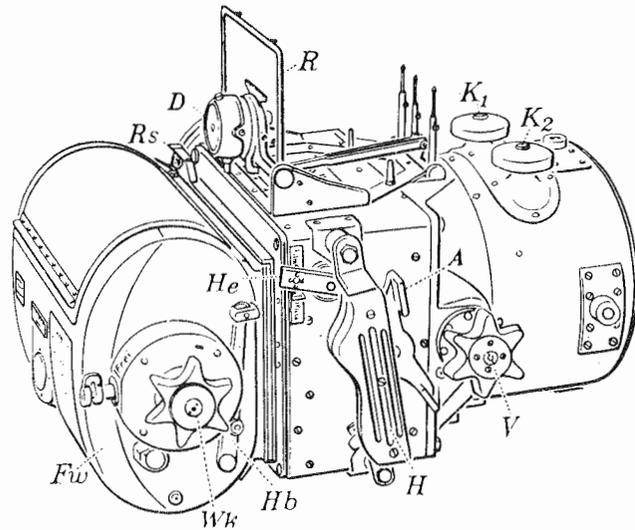


Fig. 319. — Cámara de mano, de Zeiss, para películas

índices laterales coincidan con las muescas de referencia que hay dentro del visor, sobre el nivel esférico *D*, y en esta posición la parte de terreno limitada por el marco es la que sale en la fotografía. Siempre debe observarse el nivel de burbuja al hacer la puntería: este nivel *D*, que en las figuras 319 y 320 está en posición correspondiente a vistas verticales, puede colocarse de modo que las vistas resulten inclinadas, hasta formar $\pm 20^\circ$ con la vertical que pasa por el nadir de la estación. Además, en el lado izquierdo de la cámara va un nivel tubular curvado *Ri* (fig. 320) que

sirve para colocar la cámara formando un ángulo determinado con la dirección vertical.

Las referencias para la determinación de las líneas de horizonte y vertical en las vistas se obtienen de modo óptico-fotográfico; para ello, sobre el objetivo de la cámara hay cuatro señalitas circulares, que por medio de otros tantos objetivos muy pequeños, quedan fotografiadas sobre la placa o la película al obtener cada vista.

Los dos salientes *P* (figura 320), así como el muñón *N* sirven para fijar la cámara en un dispositivo de suspensión que después describiremos.

La cámara de Zeiss puede equiparse con películas o con placas. En el primer caso se agrega a la cámara un almacén de películas *Fw* (figura 319), que se asegura con el pasador *R*_s; la palanca *He* se coloca en la indicación de «Film». Dentro del almacén se hace correr la película sobre dos rodillos o carretes, dando vueltas al botón *Wk* de forma estrellada. También lleva este almacén un contador que indica el número de *films* impresionados y sin impresionar.

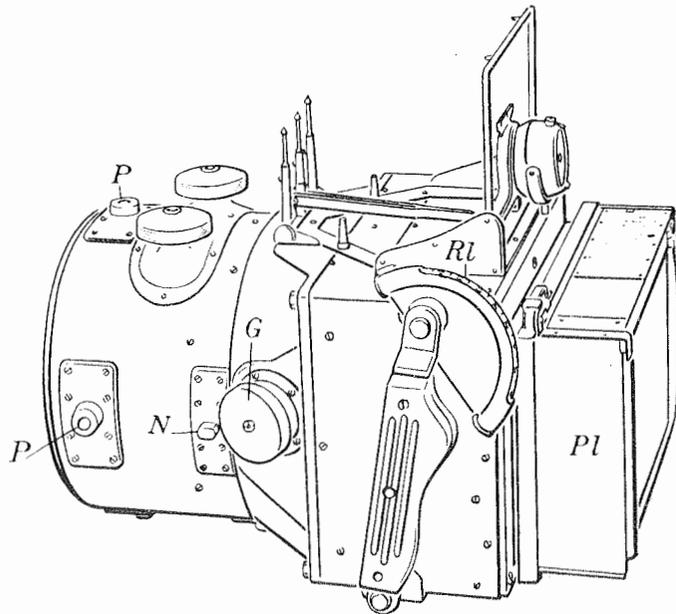


Fig. 320. — Cámara de mano, de Zeiss, con almacén de placas

Para que la película se adapte perfectamente al marco o bastidor de apoyo, al hacer las fotografías, hay dentro del almacén, por detrás de la película, una placa con muchos agujeros, detrás de la cual hay dispuesto un aspirador. Inmediatamente antes de tomar una vista se pone en marcha el aspirador, que al extraer el aire comprendido entre la película y la placa agujereada, hace que aquélla se adhiera a esta última, quedando así adaptada al marco de apoyo de la misma.

La longitud de una de las películas permite obtener hasta 120 fotografías consecutivas.

En las cámaras equipadas con placas el almacén contiene seis placas y tiene la forma y disposición corrientes en la fotografía ordinaria, como se ve en la figura 320.

Dispositivo de suspensión para la cámara de Zeiss. Cuando se trata de tomar un gran número de vistas resulta ventajoso el empleo de un dispositivo de suspensión para la cámara, como el representado en la figura 321. Este dispositivo está constituido por un bastidor rectangular de tubo de acero, fijado mediante unos rodillos de caucho en un soporte de madera que se sujeta sólidamente al cuerpo del aeroplano.

Este bastidor metálico lleva, en suspensión Cardan, un aro *Ri* también de tubo de acero, que por medio de dos tornillos de llamada (uno a la izquierda y delante, y el otro a la derecha y detrás, figura 321) puede colocarse de modo que se cale el nivel esférico de la cámara, y así puede mantenerse la verticalidad del eje de la cámara en pleno vuelo. Al tubo *Ri* va unido otro bastidor por medio de cuatro pares de rodillos (de sujeción y deslizamiento) en el cual se

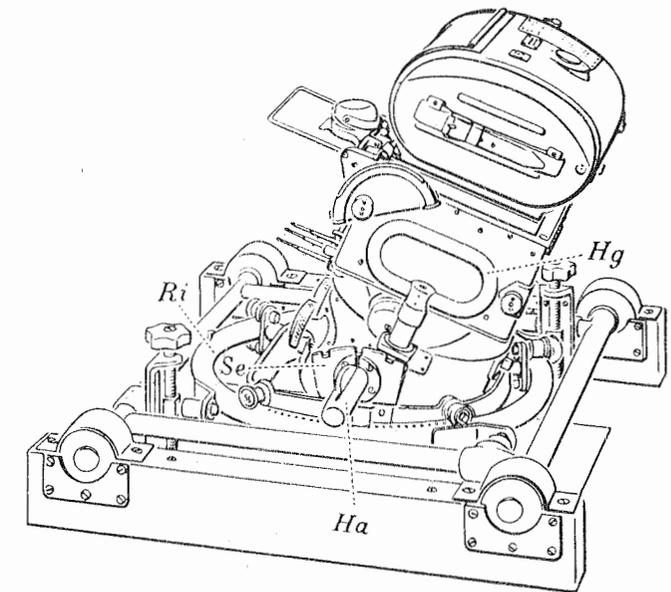


Fig. 321. — Cámara de Zeiss, con dispositivo de suspensión

monta la cámara. Cuando hay viento de costado, el aeroplano marcha con una cierta deriva, y para que en todo momento puedan colocarse los lados superior e inferior de la placa (o de la película) en la dirección real del vuelo, es decir, normales a la misma, hay que girar el bastidor interior sobre el anillo *Ri*, para lo cual sirve el mango *Ha*, que hace entrar un pequeño trinquete en los alojamientos que a este objeto tiene practicados el anillo *Ri*. Con este dispositivo de suspensión pueden también obtenerse fotografías inclinadas $+20^\circ$ ó -20° respecto a la vertical estación-nadir, como se ve en la figura 321. Para dar a la cámara la inclinación deseada, lleva el bastidor interior un segmento *Se* sólidamente fijado al mismo, en cuyo borde superior hay practicadas tres muescas; en estas muescas puede entrar un tetón con muelle, que se acciona por medio del asa *Hg*. Una vez colocada la cámara en la posición necesaria, y calado el nivel para esta posición, como se ve en la figura 321, se puede, en pleno vuelo, corregir aquélla con los tornillos de llamada antes indicados, del mismo modo que para las vistas de eje vertical.

Cámara de Wild. En las figuras 322 y 323 se ve la cámara de Wild (de Heerbrugg, Suiza), con objetivo de 165 mm, y para placas de 10×15 cm o de 13×13 cm. Con esta cámara sólo pueden emplearse placas, y lleva un almacén para diez de éstas.

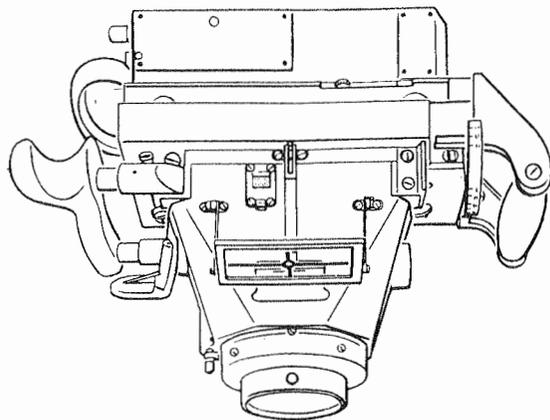


Fig. 322. — Cámara de mano, de Wild

No terminaremos la reseña de cámaras aéreas, sin citar la de Hugerhoff, construída por la casa Zeiss, provista de un objetivo de 18 cm de distancia focal, para fotografías de 13×18 cm. La construcción es análoga a la de la cámara de Zeiss antes descrita, y pueden emplearse con ella tanto placas como películas; en este último caso, la película va adaptada contra una placa de cristal de caras paralelas, que lleva señales de referencia para la línea de horizonte,

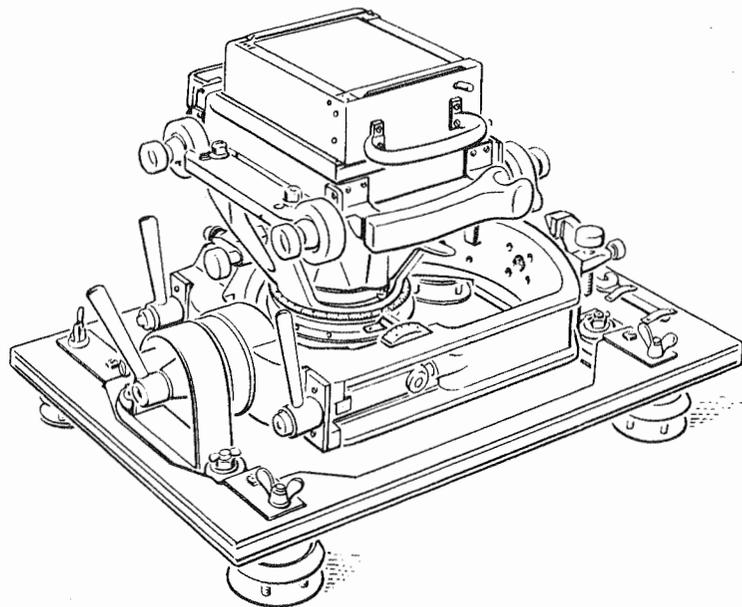


Fig. 323. — Cámara de Wild, con dispositivo de suspensión

la vertical y el punto principal. Al medir y transportar las vistas hay que tener en cuenta la refracción en la cara anterior de la placa de cristal, que da lugar a errores no despreciables. El modo más sencillo de eliminar estos errores consiste en colocar delante de la película una placa de cristal igual a la de la cámara, al medirla en el teodolito comparador.

Determinación de la orientación interior de la cámara. En las cámaras empleadas en los levantamientos aéreos, la determinación de la orientación interior queda reducida al conocimiento de la distancia focal del objetivo y de la posición del punto principal de la vista. Puesto que la cámara no va unida a ningún goniómetro, se entiende aquí por punto principal la proyección directa del punto nodal posterior del objetivo sobre el plano del marco de apoyo de la placa o de la película.

El procedimiento más sencillo para determinar el punto principal de la vista consiste en colocar en el marco de apoyo de la misma, un espejo reticulado, y delante del objetivo un anteojo que sea autocolimador para poderlo situar normalmente al espejo. De esta manera puede leerse directamente sobre la retícula la posición del punto principal de la vista; al mismo tiempo se lee sobre aquélla la posición de las señales de referencia y se fija el punto principal respecto a estas señales.

Para determinar la distancia focal puede aplicarse el método indicado en la página 346.

El punto principal puede determinarse por el método que acabamos de indicar o también con el expuesto en la página 347, pero es más precisa la determinación hecha por autocolimación.

§ 93. Cámaras cinematográficas simples y múltiples

Cuando hay que tomar una gran serie de fotografías en sucesión muy rápida, no es posible al observador ejecutar todas las manipulaciones, ni con cámara de mano ni fija. Por esta razón se han construído cámaras especiales cinematográficas (*toposeriógrafos*),

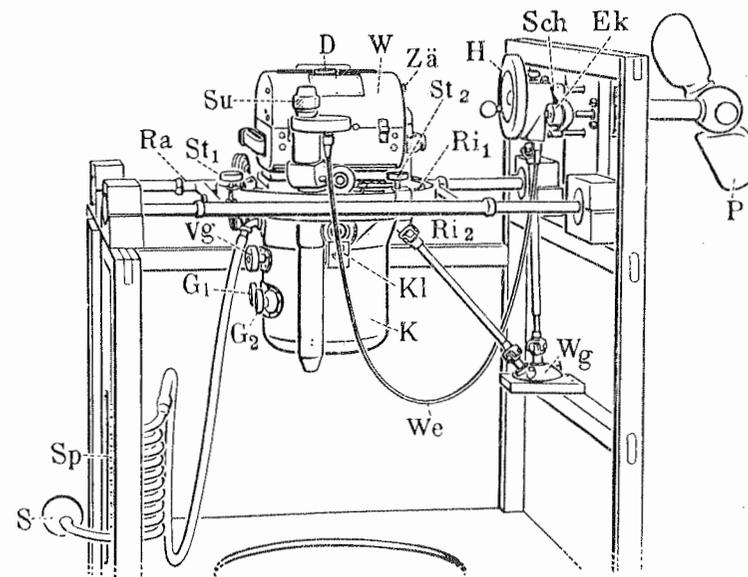


Fig. 324. — Cámara cinematográfica de Zeiss

en las cuales todas aquellas manipulaciones son efectuadas automáticamente, teniendo el observador que ocuparse nada más que de la vigilancia y buena marcha del levantamiento. En la figura 324 se ve una de estas cámaras, construída por Zeiss, montada en soporte de madera y que por ser de los primeros modelos difiere algo de los actuales.

La cámara *K* es, en esencia, la misma ya descrita anteriormente (fig. 319); G_1 y G_2 son los botones que sirven para intercalar dos diafragmas amarillos diferentes, y *Vg* es el regulador de velocidad para las instantáneas. El marco de apoyo de la película lleva cuatro señales ópticas (pág. 392) para determinar la orientación interior de la vista; además quedan registrados a la vez la distancia focal, el número de orden de cada vista y la posición de un nivel esférico.

La cámara va suspendida de modo análogo a como se ve en la figura 321. El bastidor *Ra*, que descansa sobre manguitos de caucho de paredes muy gruesas, lleva en suspensión Cardan dos anillos Ri_1 y Ri_2 , que mediante los tornillos de llamada St_1 y St_2 pueden moverse de modo que el observador puede corregir, en pleno vuelo, la posición de la cámara según indique el nivel esférico *D*. La cámara misma puede girar, con tres rodillos, sobre el anillo R_1 , y puede además girar alrededor de su eje para compensar la deriva. Una vez bien colocada la cámara, se sujeta con la mordaza *Kl*.

La cámara lleva un almacén *W* con 55 m de película, para la obtención de 285 vistas con 1 cm de espacio libre entre cada dos consecutivas. En el contador *Zü* se lee el número de vistas tomadas; un segundo contador indica el número de metros de película que aun quede por impresionar.

Para que la película esté perfectamente plana, se sigue el mismo sistema ya conocido (figura 319, página 392), consistente en el empleo de una placa de cristal colocada por detrás de aquélla; para que la película se adapte contra la placa, penetra en la cámara el aire a presión (debido al movimiento del aeroplano), a través del tubo metálico *S—Sp* y del tubo flexible que une a éste con la cámara.

Tanto la apertura como el cierre del obturador, así como el movimiento de la película, se efectúan automáticamente al girar la hélice *P*, que va por fuera del aeroplano, a uno de los costados del mismo. Para regular la velocidad de esta hélice, y con ella la velocidad con que se impresionan las vistas y el grado de cobertura o solapa (zona común en cada dos fotografías) de las mismas, se puede variar la inclinación de las paletas de la hélice por medio del botón *Ek*. En caso necesario puede utilizarse la manivela *H* en vez de la hélice. La unión de la hélice y del embrague *Sch* con la cámara la realiza la articulación angular *Wg*.

Al moverse la hélice una vez embragada, empieza a correr la película y al mismo tiempo penetra el aire por el tubo *S—Sp*.

El anteojo buscador. Parte muy importante de la cámara anterior es el anteojo buscador *Su*, con el cual se observá la marcha del levantamiento. El campo de este anteojo está calculado de tal modo que abraza una faja de terreno, a partir del nadir, igual hacia adelante a la altura de vuelo, hacia atrás igual a 0,47 de esta misma altura, y a los lados a 0,7 de la misma. La parte de terreno que se ve con el anteojo es la que recoge la fotografía. El campo del anteojo está atravesado por una raya, que representa la línea de vuelo y sobre la cual ha de mantenerse el aeroplano, por las indicaciones que el observador hace al piloto.

El anteojo lleva, además, un nivel esférico con dos círculos concéntricos, para calar la burbuja fácilmente; el círculo interior corresponde a la posición vertical de la cámara: cuando el centro de la burbuja cae sobre el círculo exterior, la cámara forma un ángulo de 4° con la vertical.

En el contorno del campo del anteojo se ven las puntas de una arandela giratoria, arrastrada en su movimiento por la hélice, por medio del cable flexible *We*. El observador puede regular la posición de las aletas de la hélice de tal modo que las puntas de la aran-

dela antes citada se muevan con la misma velocidad que el terreno en el anteojo. De esta manera se puede variar el intervalo entre las vistas, y por lo tanto, el grado de cobertura o zona común entre las mismas. Esta cobertura puede fijarse de antemano en el 30% ó el 60%.

Cámara cinematográfica doble, de Zeiss. En la figura 325 se ve un aparato con dos cámaras rígidamente unidas entre sí, formando sus ejes un ángulo de 36° . Las dos cámaras tienen 13,5 cm de distancia focal, y las fotografías que con ellas se obtienen son de tamaño 12×12 cm. Con estas cámaras, según su posición respecto a la línea de vuelo,

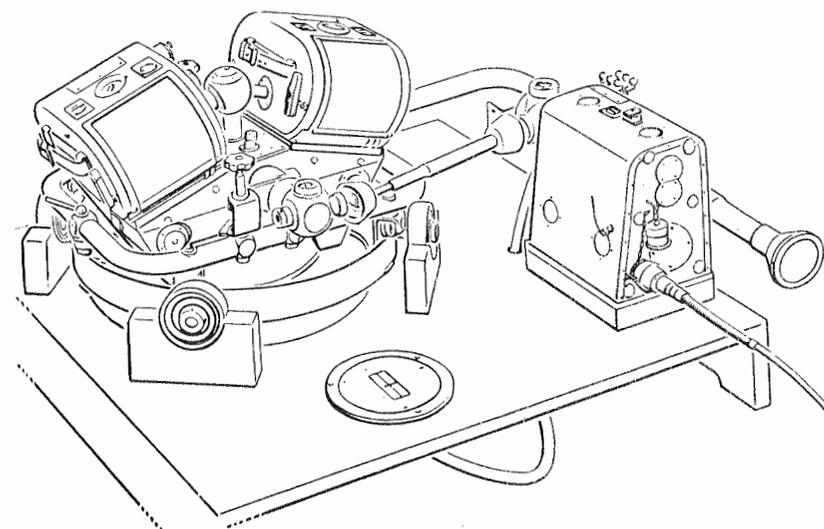


Fig. 325. — Cámara cinematográfica doble, de Zeiss

puede obtenerse una vista de una faja muy ancha de terreno, o dos vistas con gran zona de yuxtaposición (cobertura), para mediciones estereoscópicas.

Las cámaras son análogas a la ya representada en la figura 319, así como el dispositivo de suspensión presenta las mismas características que el de la figura 321; con este soporte, en el caso normal, forma cada cámara un ángulo de 18° con la vertical, y si se quiere puede colocarse una u otra en posición vertical.

Es de la mayor importancia que las instantáneas sean exactamente de igual duración en ambas cámaras, lo cual está garantizado por un dispositivo que opera simultáneamente los dos obturadores.

Los almacenes de las cámaras pueden contener películas de 60 m de longitud, con las cuales pueden obtenerse en cada cámara 460 vistas.

Las cámaras funcionan accionadas por un motor de corriente continua, que al mismo tiempo proporciona la presión necesaria para mantener bien tensas las películas durante su funcionamiento. En la figura 325, que representa un modelo ya antiguo, es producida esta presión por la entrada del aire durante la marcha del aeroplano, como en la cámara simple de la figura 324.

Otro motor pone en marcha el regulador de velocidad para la sucesión de vistas y para la cobertura de las mismas; en vez de anteojo buscador, lleva esta cámara un visor de cristal esmerilado, que se ve en la figura 325, en la parte delantera del soporte; por este

cristal esmerilado, y a través de un objetivo situado por debajo, se ve el terreno sobre que va volando el aeroplano, lo mismo que en el anteojo de la figura 324. Por debajo del cristal esmerilado pasa una tira dentellada, movida por un motor (como se aprecia con todo detalle en el visor de la figura 326) y el observador regula la velocidad de esta tira de modo que los dientes marchen a igual velocidad que el terreno en el visor. Una vez fijada con el motor la cobertura deseada, la toma de vistas se hace automáticamente, con los intervalos previamente fijados entre cada dos consecutivas. El cristal esmerilado lleva también marcada una línea de ruta, según la cual puede disponerse el visor girándolo alrededor de su eje, en la dirección de la deriva; la lectura de la deriva, hecha sobre una escala circular, sirve para orientar las cámaras en la dirección real del vuelo.

También se construye la cámara doble para ser llevada a mano, con 21 cm de distancia focal, y para fotografías de tamaño 18×18 cm; los ejes de las dos cámaras forman entre sí un ángulo de 27° . Además de un dispositivo de suspensión para montar la cámara en el aeroplano, lleva éste, en uno de los costados un soporte fijo, para poder tomar vistas con inclinaciones respecto a la vertical de 45° a 90° .

Zeller describe una cámara doble de Wild para fotografías de 13×13 cm, en la «Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1932.

Cámara cinematográfica cuádruple, de Zeiss. La figura 326 representa una cámara cuádruple de Zeiss, en la cual van dispuestas simétricamente cuatro cámaras simples de 13,5 cm de distancia focal, para fotografías de 12×12 cm, y que forman ángulos de 27° con la vertical. La construcción, suspensión, y manera de funcionar de estas cámaras, son análogas a las de la cámara doble de la figura 325.

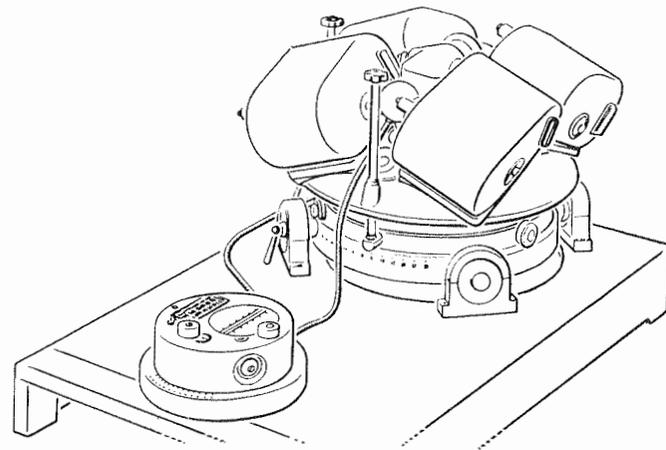


Fig. 326. — Cámara cinematográfica cuádruple, de Zeiss

para las vistas verticales, y otras varias simétricamente dispuestas a su alrededor y formando un cierto ángulo con la misma. Todas estas cámaras estaban rígidamente unidas entre sí y provistas de un dispositivo para el disparo simultáneo de todos los obturadores.

Determinación de constantes en las cámaras múltiples. En las cámaras múltiples hay que agregar a la determinación de la orientación interior de cada cámara, la de los ángulos formados por los ejes de las cámaras entre sí. Para la cámara doble, puede emplearse el método de la autocolimación, para lo cual se coloca la cámara con los marcos porta-vistas bien verticales, sobre un trípode, y el anteojo de un teodolito, situado delante de los objetivos, se dispone, por autocolimación, perpendicularmente a los dos marcos,

Más adelante (§ 98) vuelve remos a tratar de las cámaras múltiples, cuya máxima ventaja se obtiene con el empleo de aparatos autorreductores (autocartógrafo, etc.).

La idea de las cámaras múltiples fué ya utilizada hace muchos años para obtener fotografías que abarcaran la mayor extensión posible, desde globos; en 1898 construyó Scheimpflug una cámara panorámica, formada por una cámara central

uno tras otro (pág. 395); el ángulo formado por las dos posiciones del anteojo, es igual al ángulo que entre sí forman los ejes de las dos cámaras.

Este método puede aplicarse también a las cámaras cuádruples; pero en general sólo es posible llevarlo a la práctica en los laboratorios ópticos, mediante el material especial que con éstos cuentan.

§ 94. Levantamientos aéreos

En la fotogrametría aérea pueden utilizarse vistas inclinadas o verticales. Las primeras tienen la ventaja de la gran superficie de terreno que comprende cada una; por esta razón, en los años que siguieron a la primera guerra mundial, se consideraban como más convenientes los levantamientos con ángulos de inclinación de 60° entre el eje de la cámara y la vertical que va al nadir del punto de estación. A cambio de esta ventaja, presentan las vistas inclinadas el inconveniente de la rapidez con que éstas pierden claridad al aumentar la distancia. Ésta es la causa de que cada vez se hayan ido empleando menos los levantamientos inclinados, y del incremento adquirido por los verticales, hasta el punto que actualmente puede decirse que sólo se toman vistas verticales o con ángulos de inclinación muy pequeños.

En un solo vuelo se cubre con la fotografía una faja de terreno relativamente estrecha, por lo cual, cuando se trata de levantar una gran extensión, hay que realizar una serie de vuelos paralelos, procurando que las zonas levantadas se superpongan en parte (cobertura). Para evitar que queden *lagunas*, es decir, partes sin fotografiar, se disponen los vuelos de modo que la cobertura alcance del 20 al 30 %; para conseguir este objeto se dibuja un mapa de vuelo (si no se dispone de ninguno) sobre el cual se trazan las líneas de vuelo a la distancia necesaria unas de otras, y sobre las cuales ha de mantenerse el piloto en cada recorrido.

La cobertura de las vistas, dentro de cada faja de terreno se regula según el uso que ha de hacerse de ellas y el método de medición o restitución de las mismas. Si se trata de transformar o reducir las vistas, para obtener un mapa del terreno (§§ 95 a 97) basta con que las vistas consecutivas, en la dirección del vuelo presenten una cobertura de 20 a 30 %. Cuando las vistas han de servir para hacer una triangulación radial (§ 99), se necesita que la cobertura sea por lo menos de un 50 %. Aun mayor debe ser esta cobertura cuando se hace la medición o restitución por métodos estereoscópicos. En estos dos últimos casos, y para mayor seguridad, la cobertura ordinariamente empleada es del 60 %.

También la altura de vuelo depende del método empleado en la medición de las vistas. Cuando se trata de restituir éstas para la obtención de un mapa, el aeroplano debe volar tan alto como lo permita la claridad de la fotografía, mientras que si las vistas han de medirse en un aparato estereoscópico, hay que atender a la precisión con que se quiera obtener el mapa. En general, la altura de vuelo ha de ser tal, que la escala de la fotografía resulte aproximadamente igual a la mitad de la escala del mapa. Por ejemplo, con un objetivo de 0,21 m de distancia focal y para una escala del mapa de 1 : 5000, la escala de la vista deberá ser de 1 : 10000, y para ello, la altura de vuelo será de $0,21 \times 10000 = 2100$ m.

Una vez fijada la altura de vuelo, hay que determinar la distancia entre las vistas dentro de una misma faja; esta distancia, en la medición de las vistas representa la base del levantamiento. Supongamos que con una misma cámara vertical (fig. 327), se toman dos vistas consecutivas de tamaño 18×18 cm, siendo de 21 cm la distancia focal de aquélla.

Si las dos vistas deben cubrirse en el 60 %, la cobertura alcanzará 10,8 cm en cada vista, y la distancia entre las dos posiciones del objetivo será de 7,2 cm, es decir, igual, en números redondos, a $\frac{1}{3}$ de la distancia focal. La misma relación sirve para las fajas de terreno abarcadas por las fotografías; es decir, que para una cobertura del 60 %, la base debe ser igual a un tercio de la altura de vuelo. El mismo resultado se obtiene para una distancia focal de 13,5 cm y tamaño de vistas igual a 12×12 cm.

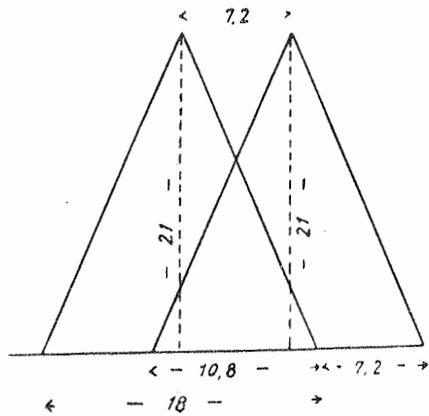


Fig. 327

Consideremos ahora el caso de una cámara doble en la cual el plano determinado por sus ejes sea paralelo a la dirección del vuelo; el campo angular de cada cámara es de unos 46° , y puesto que la inclinación del eje de cada una respecto a la vertical es de 18° , resulta que el campo angular de ambas cámaras juntas es de 82° , con una cobertura de 10° , como se ve en la figura 328, donde para una distancia focal de 13,5 cm se obtiene una vista total de unos 23,5 cm, con 2,5 cm de cobertura en ambas

vistas. Para que dos vistas de conjunto consecutivas se superpongan en un 60 %, es preciso que la cobertura lineal sea de 15 cm y la distancia entre objetivos de 8,5 cm, igual, aproximadamente, a las dos terceras partes de la distancia focal. De aquí se deduce que cuando se emplea la cámara doble, la base debe ser igual a dos tercios de la altura de vuelo.

Hay que tener en cuenta que la segunda vista de un levantamiento y la primera del siguiente quedan superpuestas casi en un 100 %, lo cual es de la mayor importancia para la medición estereoscópica.

Cuanto acabamos de decir para las dos cámaras, es aplicable a la cámara cuádruple, en lo referente a la distancia entre los levantamientos sucesivos, con la ventaja de la mayor anchura de la zona levantada.

Con la cámara doble cabe otra forma de levantamiento, a saber, con el plano determinado por los ejes de ambas cámaras, perpendicular a la dirección del vuelo. En este caso, la distancia entre cada dos vistas consecutivas

no será mayor que cuando se emplea una sola cámara, pero, en cambio, en un solo vuelo se levanta una zona de terreno que de otro modo requeriría dos vuelos. Y además, la cobertura lateral de dos fajas voladas es mucho más grande que la cobertura automática de las dos vistas en una cámara doble.

Al tratar de los métodos de transporte o desarrollo de las vistas para la obtención de planos o mapas, volveremos a ocuparnos de los diferentes sistemas de levantamientos.

Entre los trabajos previos a todo levantamiento aéreo figura el de señalamiento de puntos, que hay que determinar topográficamente sobre el terreno como puntos de apoyo o de referencia. Estos puntos se señalan con trozos de tela blanca, de un metro cuadrado aproximadamente, que se extienden sobre el suelo, donde se sujetan con estacas; también

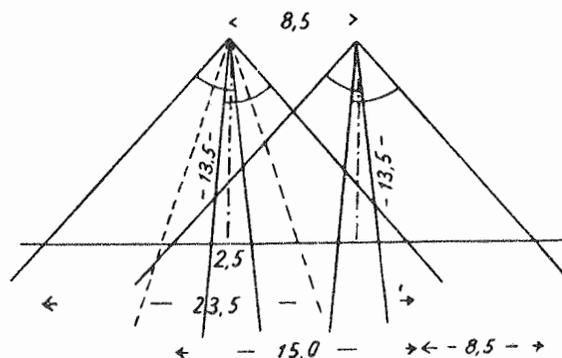


Fig. 328

pueden señalarse dichos puntos con piedras pintadas con lechada de cal. Pero raramente se hacen estos señalamientos, porque de ordinario los puntos de referencia se eligen y sitúan en el terreno después de tomadas las vistas y sirviéndose de éstas para la identificación.

Con todo detalle se encuentran descritos los levantamientos aéreos en los trabajos siguientes:

La fotogrametría y su aplicación a los trabajos catastrales y topográficos en general, en Suiza. (Conferencias de la Asociación de Geómetras suizos, en mayo de 1926, en la Escuela Superior Técnica de Zúrich.)

Sobre la práctica de la fotografía aérea, por M. J. UNGEWITTER («Bildmessung u Luftbildwesen», 1928).

Varios nomogramas y otros medios auxiliares para la medición de fotografías aéreas, por LACMANN («Zeitschr. f. Verm.», 1928).

Aplicación de los métodos fotogramétricos al Catastro de Suiza. (Conferencias a los Topógrafos federales y cantonales, y en la Sociedad suiza de Fotogrametría, marzo-abril 1931, en Zúrich y en Berna; «Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1931.)

Merecen citarse además las publicaciones del «Archivo Internacional de Fotogrametría» y la revista editada por la Sociedad alemana de Fotogrametría, titulada «Bildmessung u Luftbildwesen».

§ 95. Restitución de las fotografías aéreas

Supongamos que desde un aeroplano se toma una vista de un terreno horizontal, con el eje de la cámara en una posición inclinada cualquiera. La fotografía obtenida es una perspectiva del terreno, es decir, que todas las líneas que unen los puntos del terreno con sus correspondientes u homólogos en la fotografía, que son los rayos proyectantes, concurren en un punto, centro de la perspectiva, que es el centro del objetivo de la cámara.

A causa de la inclinación de la fotografía respecto al terreno, resulta aquella deformada, pero gracias a la relación geométrica entre vista y terreno, secciones de un mismo haz concurrente, es posible transformar la imagen deformada del terreno en otra semejante a éste, para obtener un plano o mapa del mismo con su verdadera forma. Esta transformación se conoce con el nombre de *restitución* de las vistas o fotografías.

Consideremos un plano paralelo al terreno, trazado a corta distancia y por debajo del centro de proyección (punto de vista de la perspectiva); la intersección de este plano con los rayos proyectantes da una imagen del terreno, que por ser de igual forma que éste constituye un mapa del mismo, y que al igual que la fotografía inclinada, es una perspectiva del terreno. La escala a que resulta este mapa es igual a la relación entre la distancia del plano auxiliar al centro de proyección y la altura del vuelo.

Sea P un punto cualquiera del plano del mapa (fig. 329), P' su homólogo en el plano de la fotografía, y O el centro del objetivo, considerado infinitamente delgado (véase tomo I, párrafo 59, página 238). Trácese desde P cuatro rectas cualesquiera en el mapa, que cortarán a la arista del ángulo diedro formado por los dos planos, en los puntos A, B, C y D . A estas cuatro rectas corresponden en la fotografía otras cuatro, que son las de unión

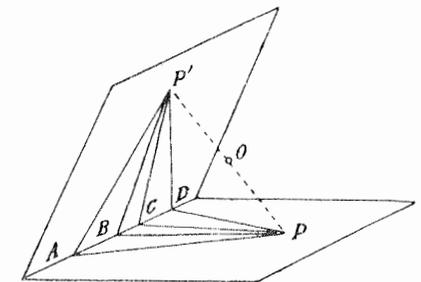


Fig. 329

de P' con estos mismos cuatro puntos, por ser comunes a los dos planos. Los dos haces así formados son perspectivos entre sí.

En la figura 330 se suponen colocados o rebatidos en un mismo plano el mapa y la fotografía, de modo que los dos haces aparecen en su verdadera forma y cortándose en puntos de la recta AD . A estos dos haces situados en un mismo plano, compuesto cada uno de cuatro rayos, y procedentes de una posición perspectiva o que pueden llevarse a esta posición, se les llama haces *proyectivos*, por existir entre ambos una relación proyectiva (pág. 361).

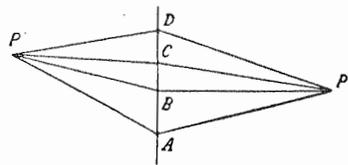


Fig. 330

Si se tiene un haz de cuatro rayos P' (fig. 331) y otro P con tres rayos, es fácil, según lo que antecede, trazar

en este segundo haz un cuarto rayo de modo que los dos haces sean proyectivos. Para ello se traza una secante cualquiera en el primer haz, que cortará a sus cuatro rayos en los puntos A, B, C, D ; se lleva esta serie de puntos sobre el segundo haz de manera que los puntos A, C y D caigan sobre los rayos correspondientes; uniendo P con B se tienen dos haces proyectivos, ya que pueden colocarse en dos planos que se corten según la recta AD , en posición perspectiva, como se ve en la figura 331.

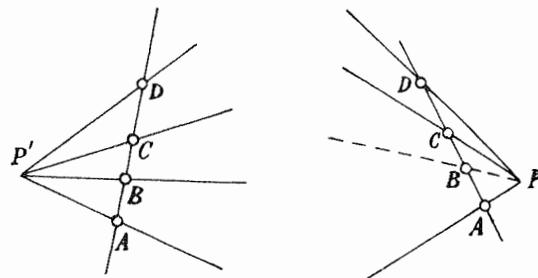


Fig. 331

Estas propiedades de los haces proyectivos pueden utilizarse para la restitución de las fotografías inclinadas. Para ello es preciso disponer por lo menos de cuatro puntos determinados en el terreno trigonómicamente o de otro modo cualquiera, y que puedan fácilmente identificarse en la fotografía. Se sitúan estos puntos por coordenadas, a la escala que se quiera, y sobre ellos se apoya toda la construcción del mapa. Mediante haces proyectivos convenientemente elegidos en la fotografía y en el mapa, se pueden situar en éste cuantos puntos se hayan identificado en aquélla.

Sean $ABCD$ (fig. 332) cuatro puntos dados del mapa y $A'B'C'D'$ sus homólogos en la fotografía; desde los puntos A y A' tracemos rayos a los otros tres puntos de modo que se formen dos haces de vértices A y A' ; tracemos el rayo $A'P'$ correspondiente a un punto de la fotografía y veamos el modo de llevar al mapa el rayo homólogo, para determinar el punto P . Para esto se traza en la fotografía una recta cualquiera $M'N'$ (como se hizo en la figura 331), y colocando sobre esta recta una tira de papel se toman en ésta los puntos de intersección de la recta con los cuatro rayos del haz; llevando esta tira sobre el haz A de modo que dichos puntos caigan

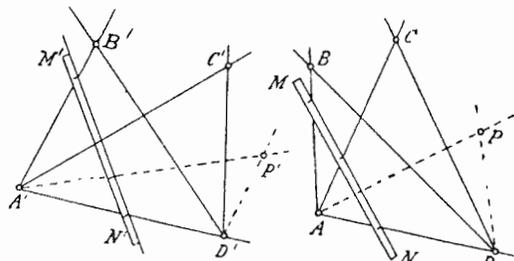


Fig. 332

sobre los rayos correspondientes u homólogos de este haz, se determina la dirección del cuarto rayo AP . Aplicando el mismo procedimiento a los haces de vértices D y D' , se tiene la dirección del rayo DP , homólogo en el mapa del $D'P'$ de la fotografía, y la intersección de los rayos AP y DP da la posición del punto P en el mapa.

Repitiendo la aplicación de este método, pueden representarse en el mapa todos los puntos de la fotografía, llegando a formar una red de puntos tan tupida, que los detalles del terreno pueden situarse a ojo en el mapa con toda la aproximación necesaria.

Reticula de restitución. En la mayor parte de los casos resulta ventajoso dividir el cuadrilátero $A'B'C'D'$ de la fotografía (fig. 333) en muchos cuadriláteros pequeños, por medio de una retícula, que se lleva después al mapa. Como se ve en las figuras 331 y 332, el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero de la fotografía, es homólogo del punto en que se cortan las diagonales del cuadrilátero homólogo en el mapa; trazando en la fotografía una recta cualquiera $P'Q'$, que pase por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $A'B'C'D'$, se puede situar en el mapa el punto P , homólogo del P' , por medio del haz de vértice D' y de rayos $D'A', D'P', D'B'$ y $D'C'$, y del haz de vértice D y de rayos DA, DB y DC ; de este modo se determina la dirección del rayo DP , que por su intersección con AB da el punto P . De igual manera puede situarse en el mapa la recta RS homóloga de la $R'S'$ de la fotografía. Los cuatro cuadriláteros así formados en la fotografía y en el mapa, pueden subdividirse a su vez en otros cuatro, como se ve en la figura 333, por medio del punto de intersección de sus respectivas diagonales. Esta subdivisión puede prolongarse hasta obtener retículas de mallas tan apretadas, que los detalles del terreno representados en la fotografía se pueden situar a ojo en cada cuadrilátero del mapa, con exactitud suficiente.

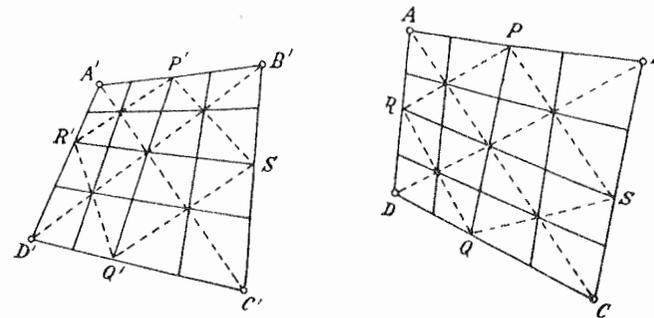


Fig. 333

Este método de restitución gráfica tiene su aplicación más indicada cuando se trata de pocas fotografías; en los levantamientos con muchas vistas sólo se emplean los métodos mecánicos de restitución, de los cuales vamos a ocuparnos seguidamente.

§ 96. Teoría de la restitución óptica

La restitución óptica, es decir, la obtención del mapa por métodos ópticos, dada una fotografía inclinada de un terreno horizontal, consiste, en teoría, en colocar el objetivo de la cámara en un aparato de proyección de tal modo, que la fotografía, el objetivo y el plano del mapa (fig. 334) ocupen la misma posición relativa que al tomar la vista desde el aeroplano ocupan la fotografía, el objetivo y el plano del terreno, con la única diferencia de que la distancia entre el objetivo y el terreno es igual a la altura de vuelo, mientras que en el aparato de proyección, la distancia h del objetivo al mapa es igual al producto de la altura de vuelo por la escala del mapa. Por esta razón, el objetivo, cuya distancia al plano de la fotografía es igual a la distancia focal F , no puede dar una proyección *enfocada*, es decir, detallada, de la fotografía, ya que las distancias a la lente de

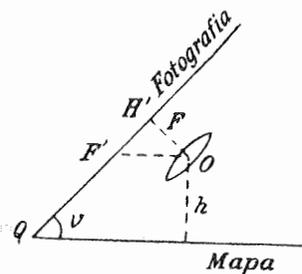


Fig. 334

un punto de la vista y de su proyección, no obedecen a la fórmula fundamental de las lentes [tomo I, fórmula (1) de la página 235].

Si para que un par de puntos homólogos cumplan con esta fórmula, se emplea otra lente especial, se tropieza con la dificultad de que para los demás puntos no resulta la proyección enfocada, por formar los dos planos entre sí un ángulo, indicado en la figura con la letra ν .

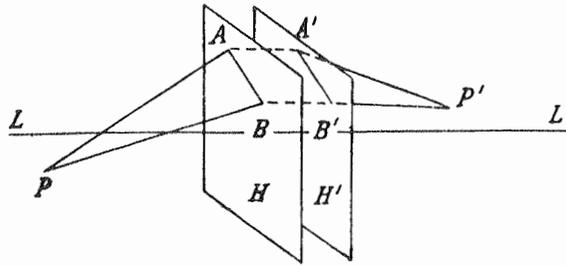


Fig. 335

Vamos, pues, a estudiar en qué condiciones se podrá conseguir con una lente una imagen clara de un objeto, cuando los planos en que se hallan respectivamente el objeto y su imagen estén inclinados entre sí, o sea, que formen un cierto ángulo uno con otro.

Sean H y H' (fig. 335) los dos planos principales de un sistema de lentes, cuyo eje es LL' ; supongamos que del punto P parten dos rayos que cortan al plano H en los puntos A y B ; estos rayos pasan de H a H' paralelamente al eje, y cortan al plano H' en los puntos A' y B' , a la salida del cual se cortan en un punto P' . A los tres puntos P, A, B situados en el mismo lado que el objeto, corresponden los tres puntos P', A', B' , en el lado de la imagen. Generalizando, puede decirse que a un plano-objeto corresponde un plano-imagen, es decir, que los planos PAB y $P'A'B'$ son conjugados.

De aquí se deduce que para la proyección de un plano sobre otro por medio de un sistema óptico, es preciso que los dos planos corten a los planos principales del sistema en dos rectas paralelas, cuyo plano sea paralelo al eje óptico de aquél.

Si el sistema consiste simplemente en una lente infinitamente delgada, puede expresarse la anterior condición, diciendo que los dos planos deben cortarse en el plano de la lente.

Esta ley, que resulta de la construcción geométrica de las imágenes, fué expresada por Scheimpflug en una Memoria sobre esta materia publicada en la «Photogr. Korrespondenz» en 1898, y por ello se conoce también con el nombre de condición o ley de Scheimpflug.

Una vez conocida la condición a que deben satisfacer dos planos que formen entre sí un cierto ángulo, para que la proyección de uno de ellos a través de un sistema dióptrico sea precisamente el otro, queda por ver la manera de llevar a la práctica esta condición teórica. Para ello es necesario, en primer término, estudiar las relaciones entre figuras entre sí perspectivas, situadas en dos planos cualesquiera.

Sean los dos planos E' y E (fig. 336), que forman entre sí un ángulo cualquiera ω : el punto de vista o centro O de la perspectiva se supone a distancias d' y d de los dos planos respectivamente, y sean H' y H las proyecciones ortogonales de O sobre ambos planos.

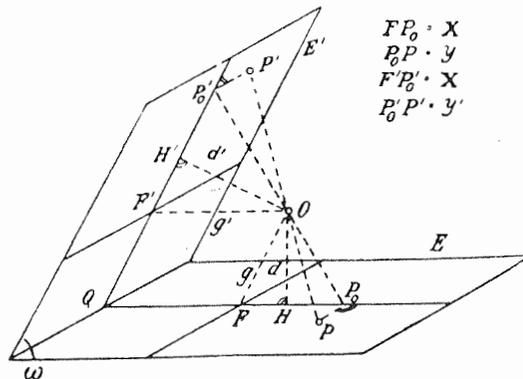


Fig. 336

$$\begin{aligned} FP_0 &= x \\ P_0P &= y \\ F'P'_0 &= x' \\ P'_0P' &= y' \end{aligned}$$

El plano $H'O'H$, que es *plano secante principal*, corta a los planos E' y E en las dos *secantes principales* $H'Q$ y HQ .

Un punto cualquiera P' del plano E' se proyecta en P sobre el plano E , siendo $P'O'P$ el rayo proyectante. Supongamos que el punto P' se aleja, en el plano E' , a una distancia infinita en una dirección cualquiera; el rayo proyectante será paralelo al plano E' y cortará al plano E en un punto de la paralela trazada por el punto F a la recta de intersección de los dos planos. A esta recta, trazada por F , lugar geométrico de las proyecciones de todos los puntos del plano E' infinitamente lejanos, se llama *línea de fuga* del plano E . Recíprocamente la recta trazada por F' paralelamente a la arista del diedro formado por los dos planos, es la *línea de fuga* del plano E' , porque en ella se encuentran las imágenes de todos los puntos del plano E , situados a distancia infinita de dicha arista.

Los puntos $QF'O'F$ forman un paralelogramo, cuyos lados son:

$$g' = \frac{d'}{\text{sen } \omega}; \quad g = \frac{d}{\text{sen } \omega} \tag{1}$$

Tomemos ahora en los dos planos E' y E , dos sistemas de ejes coordenados rectangulares, cuyas abscisas respectivas sean las secantes principales, y cuyos orígenes sean los puntos F' y F . Los dos puntos homólogos P' y P tendrán por coordenadas:

$$\begin{aligned} FP_0 &= x & P_0P &= y \\ F'P'_0 &= x' & P'_0P' &= y' \end{aligned}$$

En la figura 337 está representado aparte el plano secante principal de la figura 336; de los triángulos semejantes en ella formados, resulta:

$$x : g = g' : x' \tag{2}$$

En la figura 336 se tiene:

$$y : y' = P_0O : P'_0O$$

y sustituyendo la segunda relación de esta proporción por sus iguales, deducidas de dicha semejanza de triángulos en la figura 337, se tiene:

$$y : y' = g : x' = x : g' \tag{3}$$

y de las fórmulas (2) y (3) se deduce directamente:

$$x = \frac{g g'}{x'} \quad y = \frac{y' g}{x'} \tag{4}$$

$$x' = \frac{g g'}{x} \quad y' = \frac{y g'}{x} \tag{5}$$

Por lo tanto, conocidas que sean las constantes ω, d y d' , si se da un sistema de puntos en uno de los planos, se puede, aplicando las fórmulas (1), (4) y (5), transportar este sistema al otro plano de tal modo que ambos sistemas resulten perspectivas.

Supongamos, pues, que se tiene un par de sistemas perspectivas de puntos, uno en cada plano, con el centro en O ; veamos ahora si estos sistemas siguen siendo perspectivas al girar el plano E alrededor de la arista del diedro formado por E y E' , de modo que este ángulo en vez de ser ω sea ω_1 , es decir, vamos a ver si hay un punto O_1 en el cual se corten las rectas que unen todos los pares de puntos homólogos en ambos sistemas, situados ahora en los planos E' y E_1 (fig. 338).

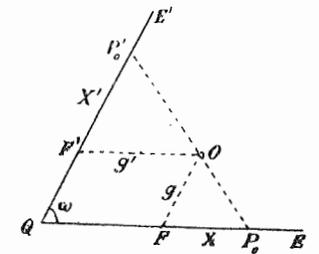


Fig. 337

De las ecuaciones (4) y (5) se desprende que en la relación o situación perspectiva de los dos sistemas de puntos nada se altera mientras permanezcan constantes g y g' , es decir, mientras los lados del paralelogramo $QF'O F$ no varíen, cualquiera que sea el valor del ángulo diedro ω : luego si se mantiene fijo el plano E' y se gira el E , el punto de vista o centro de la perspectiva O , deberá moverse describiendo un arco de círculo, con centro en F' . Y como en la nueva posición E_1 del plano E' , la línea de unión del nuevo punto de vista O_1 con F' es paralela también al plano E_1 , resulta que el punto F' sigue siendo el punto de fuga de este plano en la sección principal.

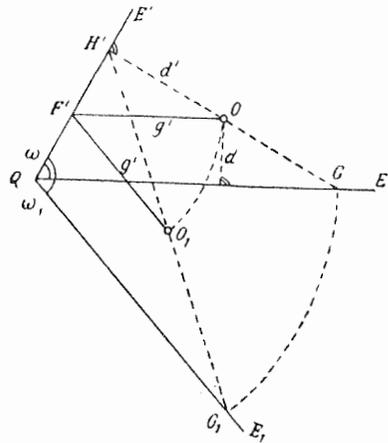


Fig. 338

En la figura 338 está representada la posición relativa de puntos y planos, viéndose también la proyección G del punto H' sobre el plano E : al girar el plano E y colocarse en E_1 no se altera nada en el sistema de puntos de este plano, por lo cual se tendrá que $QG_1 = QG$, es decir, que el punto G se mueve sobre un arco de círculo, y la línea de unión $H'G_1$ debe pasar por el nuevo punto de vista O_1 .

En esta misma figura 338 se tiene:

$$QH' = d' \cot \omega + \frac{d}{\sin \omega}$$

$$QG = QG_1 = \frac{QH'}{\cos \omega} = \frac{d'}{\sin \omega} + \frac{d}{\sin \omega \cos \omega}$$

o sea:

$$QH' = \frac{d' \cos \omega + d}{\sin \omega} \quad QG = QG_1 = \frac{d' \cos \omega + d}{\sin \omega \cos \omega} \quad (6)$$

Para aplicar todas estas relaciones y propiedades generales al problema de la restitución de fotografías inclinadas para la obtención de mapas, podemos resolver este problema del modo siguiente: en vez del objetivo de la cámara fotográfica, se emplea un objetivo especial de proyección, y en vez del plano del mapa se toma otro plano de proyección de tal modo que la proyección de la fotografía sobre este plano sea congruente con la proyección sobre el plano del mapa. Haciendo la proyección de este modo, los dos planos y el objetivo de proyección deben cumplir, según lo antes dicho, las tres condiciones siguientes:

1. El plano de simetría del objetivo debe pasar por la arista del diedro formado por el plano de la fotografía y el de proyección (condición de Scheimpflug).
2. Un punto cualquiera del plano de la fotografía y su correspondiente en el plano de proyección, deben obedecer a la ley fundamental de la Dióptrica (condición de distancias).
3. El centro del objetivo de proyección debe distar de la línea de fuga de la fotografía, lo mismo que distaba el centro del objetivo fotográfico al tomar la vista (condición de la línea de fuga).

El plano de la fotografía, el de proyección y el objetivo de proyección constituyen los elementos principales de la construcción de todo aparato o dispositivo de restitución (restituidores ópticos).

Las constantes del restituidor. Se llama así a las posiciones relativas de estos tres elementos. Para determinarlas se conoce la posición relativa del plano de la fotografía, la

del plano del mapa y la del objetivo fotográfico (fig. 334), así como la distancia focal F de este último y la distancia h del mapa, igual al producto de la altura de vuelo por la escala del mapa. El ángulo ν entre los dos planos (fotografía y mapa) es igual al ángulo de inclinación (respecto al horizonte) del plano de la fotografía al tomar la vista, igual también a la distancia angular del eje de la cámara al nadir.

Según las fórmulas (1), la distancia del centro del objetivo a la línea de fuga de la fotografía es $OF' = \frac{F}{\sin \nu}$, y la distancia de esta línea a la arista del diedro formado por los dos planos es $QF' = \frac{h}{\sin \nu}$.

En la figura 339 se ve la posición relativa del plano de la fotografía, del plano de proyección y del objetivo de restitución, de acuerdo con las tres condiciones anteriores; sean, en efecto, H' y G_1 el punto principal de la fotografía y su proyección, y F' el punto de fuga del plano de la vista. Por ser las distancias del punto F' a la arista Q y al centro del objetivo de proyección O_1 , las mismas que en la cámara, al tomar la vista, son aplicables las anteriores fórmulas, y se tiene:

$$QF' = \frac{h}{\sin \nu} \quad \text{y} \quad O_1F' = \frac{F'}{\sin \nu}$$

Ahora bien, el punto F' es la imagen (homólogo) de los puntos del infinito del plano de proyección, de modo que su distancia al plano de simetría de la lente deberá ser igual a la distancia focal del objetivo de proyección, que designaremos con la letra f . Así queda cumplida la segunda condición, referente a distancias.

Según estas notaciones, tendremos, en la figura 339:

$$\sin \nu_1 = \frac{f}{F'} \sin \nu \quad \sin \nu_2 = \frac{f}{h} \sin \nu \quad (7)$$

Sustituyendo ω por ν en la figura 338, se tendrá, según las fórmulas (6):

$$\frac{QH'}{QG} = \frac{QH'}{QG_1} = \cos \nu$$

y en la figura 339 se tiene:

$$\frac{QH'}{QG_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

de donde se deduce que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \cos \nu \quad (8)$$

Pero, por otra parte, en el triángulo $QH'G_1$ de la figura 339, se verifica la siguiente condición:

$$\nu_1 + \nu_2 + \alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$$

o sea

$$\beta - \alpha = \nu_1 + \nu_2 \quad (9)$$

Con las igualdades (8) y (9) pueden ya hallarse los valores de ángulos α y β , pues de la fórmula (8) se deduce directamente esta otra:

$$\frac{\sin \beta + \sin \alpha}{\sin \beta - \sin \alpha} = \frac{1 + \cos \nu}{1 - \cos \nu}$$

o sea

$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} \cot^2 \frac{\nu}{2} \quad (10)$$

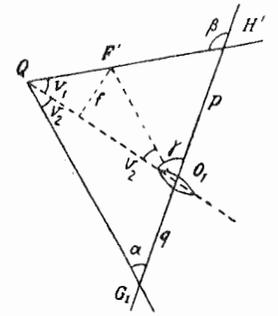


Fig. 339

Y en el triángulo QO_1H ,

$$\gamma = 180^\circ - \nu_1 - 180^\circ + \beta = \beta - \nu_1 = \alpha + \nu_2 \quad (11)$$

Finalmente, en los triángulos $QH'O_1$ y QO_1G_1 se tiene, por la proporcionalidad de senos y lados opuestos, y utilizando las fórmulas (6), pero sustituyendo en las mismas d' , d y ω por F , h y ν respectivamente:

$$p = \frac{F \cos \nu + h}{\sin \nu \sin \gamma} \sin \nu_1 \quad q = \frac{F \cos \nu + h}{\sin \nu \cos \nu \sin \gamma} \sin \nu_2 \quad (12)$$

Con esto queda ya conocido todo cuanto se necesita para la construcción de un aparato de restitución óptica. Efectivamente, se dan, en primer lugar, la altura de vuelo, la distancia focal F del objetivo fotográfico y la distancia ν al nadir del eje de la cámara; de la altura de vuelo y de la escala a que haya de construirse el mapa se deduce el valor de h . Para el objetivo de proyección se da también su distancia focal f , de modo que con el sistema de ecuaciones antes deducidas, pueden hallarse los valores de los ángulos α , β y γ , así como las distancias p y q , con lo cual se tiene la posición necesaria relativa del plano de la fotografía, del plano de proyección y del objetivo de restitución, para que la proyección resultante represente un mapa no deformado respecto al terreno fotografiado.

§ 97. El restituidor óptico

En la figura 340 se ve la disposición esquemática de un sencillo dispositivo para la restitución óptica, en el cual los rayos procedentes de un foco luminoso inciden sobre la fotografía después de atravesar una lente condensadora, y el objetivo de proyección L

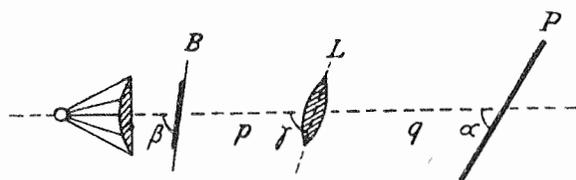


Fig. 340

da una imagen de la vista sobre el plano de proyección P . El marco soporte de la fotografía B , el objetivo L y el plano de proyección P pueden girar alrededor de ejes paralelos entre sí, con lo cual, y por medio de los sectores graduados de que aquéllos van provistos, pueden colocarse formando

respectivamente los ángulos β , γ y α con el eje principal del dispositivo. Además, los tres ejes de giro pueden correrse en la dirección de este eje principal, para hacer posible la colocación de los mismos guardando entre sí las distancias p y q .

El soporte de la fotografía va montado en un bastidor giratorio alrededor de un punto situado sobre el eje principal del restituidor, y la fotografía se dispone de tal modo que su punto principal coincida con aquel punto o centro de rotación. Girando el bastidor, o sea, inclinando lateralmente la fotografía, se coloca ésta de manera que su línea de horizonte sea paralela a los tres ejes de giro antes mencionados.

Ahora bien, para la aplicación de este restituidor se tropieza con la dificultad del cálculo de los tres ángulos α , β , γ y de las dos distancias p y q , ya que ni la distancia al nadir, ni la altura de vuelo se conocen con exactitud. Por esta razón es mucho mejor hacer la restitución conforme se vió en el párrafo 95, valiéndose de cuatro puntos dados en el plano de proyección; para ello se van moviendo, por tanteos, los elementos principales del aparato (fotografía, objetivo y pantalla de proyección), hasta que los cuatro puntos dados coincidan con la proyección de los cuatro puntos correspondientes en la fotografía. Hay

que procurar con todo esmero que la imagen en la pantalla de proyección sea bien precisa, es decir, que se vea bien enfocada, pues de este modo se tienen satisfechas todas las condiciones requeridas por la restitución.

Para facilitar la colocación debida del bastidor porta-vista, del objetivo, y de la pantalla de proyección, van unidas estas tres partes por un dispositivo especial de tal modo que sólo pueden moverse cumpliendo en todo momento con las tres condiciones anteriores.

Para conseguir este objeto lleva el aparato tres mecanismos distintos; el primero, llamado *mando de la fotografía*, une entre sí a los tres ejes de rotación paralelos, y hace que para cualquier movimiento de estos ejes se cumpla automáticamente la condición de las distancias (ley fundamental de la Dióptrica). La descripción detallada de este primer mando, que se conoce también con el nombre de *inversor*, se encuentra en el trabajo publicado por Gruber en la «Zeitschr. f. Instr.» de 1925.

El segundo mecanismo, que es el *mando de la intersección*, hace que siempre esté satisfecha la condición de Scheimpflug. Tanto el objetivo como la pantalla pueden girar independientemente alrededor de sus respectivos ejes, pero en estos movimientos toma parte automáticamente el bastidor de la fotografía, de tal modo que los tres planos se cortan siempre en una recta.

El tercer mecanismo, o *mando del punto de fuga*, sirve para que de modo automático se mantenga siempre constante la distancia del objetivo a la línea de fuga de la fotografía (fig. 338).

La construcción de estos dos últimos mandos, cuya descripción sería demasiado larga, se encuentra perfectamente reseñada en el «Cursillo de Fotogrametría» de Gruber (Stuttgart, 1930).

El restituidor de Zeiss. Como ejemplo de los restituidores automáticos, vamos a describir el construido por la casa Zeiss (fig. 341). El soporte de este instrumento lo constituyen dos columnas H , entre las cuales va fijado el eje de rotación de la pantalla de proyección J . El eje de giro del objetivo de proyección D va sujeto en un par de correderas que pueden moverse a lo largo de las columnas H . La corredera superior B

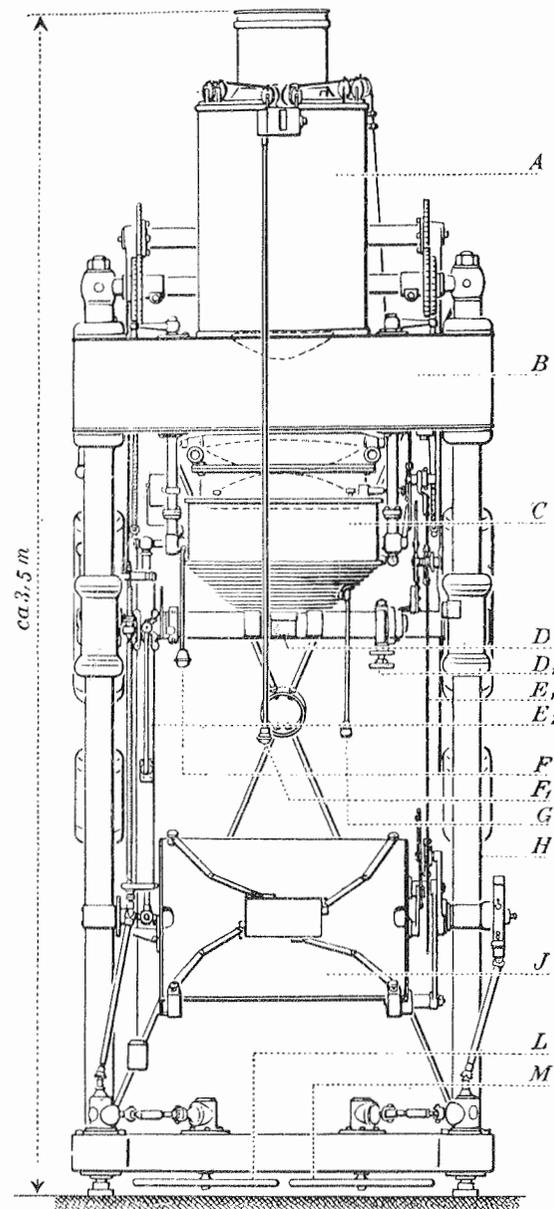


Fig. 341. — Restituidor de Zeiss

sirve de soporte al marco porta-fotografía C , así como al foco luminoso, encerrado en A , con la correspondiente lente condensadora.

El inversor E_1 une entre sí a los tres ejes de rotación, de tal modo que al girar la pantalla J por medio del disco de pie M , o el objetivo de proyección por medio del volante D_1 , se mantiene siempre satisfecha la condición de Scheimpflug (intersección de los tres planos en una recta).

Un segundo inversor E_2 regula automáticamente la relación entre las distancias de los tres ejes de giro, que pueden variarse con el disco de pie L .

La varilla G sirve para inclinar lateralmente la fotografía, es decir, para hacer girar al bastidor alrededor de su centro.

Todas las posiciones de los ejes y planos pueden leerse sobre escalas o cuadrantes graduados.

En la figura 341 se ven, además, los dos pulsadores F y F_1 , de los cuales el primero sirve para correr lateralmente la fotografía, y el segundo para regular la iluminación de la misma.

Este aparato está equipado con dos objetivos de proyección intercambiables, de 15 cm y 12,5 cm de distancia focal respectivamente. El primero se emplea para la restitución de fotografías tomadas con objetivos fotográficos de 21 cm o de mayores distancias focales, y el segundo se emplea cuando el objetivo de la cámara fotográfica a que corresponde la vista, es de distancia focal menor de 21 cm. El inversor E_2 se regula de modo muy fácil al cambiar de objetivo.

El método operatorio consiste, en primer lugar, en colocar la fotografía en el marco porta-vistas, y el plano o mapa, con los cuatro (o más) puntos de apoyo, en el tablero o pantalla de proyección, sobre el cual puede moverse de todas las maneras y en todas direcciones.

Para poner a punto el aparato, se mueve primero el disco de pie de la izquierda, para dar a la proyección de la fotografía el aumento necesario, después se inclina lateralmente la fotografía y se hace girar el tablero de proyección y el objetivo; por último se mueve el papel sobre el tablero hasta que quede en la posición precisa.

Una vez puesto a punto el aparato se puede sustituir el papel del mapa por un papel sensible a la luz, si se quiere obtener de este modo una imagen ya restituida.

Como se ve en esta descripción, no lleva el restituidor de Zeiss el *mando de punto de fuga*; ello se debe a que este restituidor está construido para ser utilizado también con fotografías obtenidas con cámara doble para distancias angulares al nadir, hasta de 40° , y para tales distancias tropieza con muchas dificultades la construcción de dicho mando. Pero apenas se nota la falta de este mando, ya que la colocación exacta de la fotografía sobre los cuatro puntos de apoyo no ofrece dificultad alguna cuando no hay que preocuparse de las condiciones de distancia y de intersección.

El manejo y la descripción de este aparato se encuentra con todo detalle en el «Curso de Fotogrametría» de Gruber, y también en el trabajo de este mismo autor sobre el restituidor de Zeiss publicado en la «Bildmessung u. Luftbildw.» de 1927.

Restituidores de la Compañía Fotogramétrica, de Munich, y de la Compañía Aerotopográfica Zeiss, de Jena. Por indicación de Aschenbrenner construyó la *Compañía Fotogramétrica (Photogrammetrie-G m b H)* de Munich un restituidor óptico-mecánico, provisto de mandos automáticos. Este aparato sólo es aplicable a fotografías poco inclinadas (distancia angular del eje de la cámara al nadir inferior a 15°), que son las más corrien-

tes, por no decir las únicas, y en su virtud, los mandos consisten en dispositivos muy poco complicados; por esta misma razón es posible la colocación de un mando de punto de fuga muy sencillo.

Este instrumento ha sido descrito y estudiado por su autor en Memorias publicadas en la «Zeitschr. f. Instr.» de 1925 y 1927 y en las «Mitt. a. d. Arbeitsgebiet des Konsortiums Luftbild-Stereographik» de 1926.

La aspiración de los constructores de obtener un restituidor sencillo y portátil, fué lograda por Hegershoff con el aparato que lleva su nombre, construido por la casa Zeiss. El único mando automático en este instrumento es el de distancias, que asegura el cumplimiento constante de la ley fundamental de las lentes (condición de distancias); el soporte de la fotografía es fijo, y de tal modo dispuesto que ésta es perpendicular al eje principal del aparato, es decir, que el ángulo β de la figura 340, es de 90° . La fórmula (8) nos dice que, en este caso, el ángulo α vale $90^\circ - \nu$, y puesto que el ángulo ν_1 puede así deducirse de la primera fórmula (7), resulta que tanto el ángulo γ como el ν_2 se pueden calcular con la fórmula (11). Aquí se ve, que en este aparato no es preciso calcular de antemano el valor de h en función de la escala a que haya de dibujarse el mapa y de la altura de vuelo, sino al contrario, se deduce el valor de h , por medio de la segunda fórmula (7), del valor de ν_2 calculado en (11), y en función de h se halla la escala del mapa. De este modo queda, en principio, regulado el restituidor para una escala que resultará con un valor extraño, no acostumbrado en los mapas corrientes. Si se quiere regular el aparato para restituciones a una determinada escala, hay que renunciar a tener una proyección perfectamente enfocada; pero este defecto, tratándose de inclinaciones poco pronunciadas, no tiene demasiada trascendencia en la restitución.

Aplicaciones de la restitución. Hemos supuesto, hasta aquí, que se trataba de levantamientos de terrenos llanos y horizontales, pues solamente en este caso puede obtenerse un mapa planimétrico por restitución de fotografías inclinadas. Pero cuando el terreno presenta grandes desniveles, sólo pueden tomarse vistas con el eje de la cámara en posición vertical, y aun así, solamente en las proximidades del punto principal de la fotografía se obtiene la reproducción exacta (restitución) de la proyección horizontal del terreno. Mientras mayor sea la distancia al centro de la fotografía, tanto menor es la precisión de la imagen restituida.

También aumenta el error al aumentar la inclinación de la vista, por lo cual en terrenos montañosos o quebrados hay que limitarse a la obtención de fotografías casi horizontales.

Estas limitaciones redundan en beneficio de la sencillez en los métodos de restitución, pues de la fotografía resulta directamente el mapa, a falta únicamente de algunos trabajos cartográficos complementarios. Cuando se trata de terrenos quebrados o montañosos y se tienen en cuenta las limitaciones anteriores, se obtienen, por restitución, proyecciones que sirven como planos para muchas aplicaciones, y por ello, la restitución desempeña el papel principal en el transporte o desarrollo de las vistas aéreas, es decir, en la obtención de un mapa partiendo de una o varias vistas.

El defecto más grande de los métodos de restitución consiste en que con su aplicación sólo pueden obtenerse mapas planimétricos más o menos utilizables, y la parte altimétrica tiene que obtenerse por los métodos ordinarios taquimétricos y topográficos.

En estos últimos años se ha escrito mucho sobre la aplicación práctica de los métodos de restitución para obtener planos de diversos usos; a quien se interese por el detalle de

estas cuestiones remitimos al «Archivo Internacional de Fotogrametría», así como a la revista editada por la Sociedad alemana de Fotogrametría, titulada «Bildmessung und Luftbildwesen», de cuyos trabajos sobre la materia sólo citaremos los de Richter y Gerlach, publicados respectivamente en 1928 y 1929.

§ 98. Cámara panorámica

Vamos a describir la cámara y el restituidor panorámicos, construidos, bajo las indicaciones de C. Aschenbrenner, en el año 1927, por la Sociedad Fotogramétrica de Munich, y destinados principalmente a la obtención de mapas a escalas muy pequeñas, de 1:100 000, de terrenos inexplorados o intransitables. Para ello es preciso emplear una cámara con un campo muy grande, lo cual sólo puede conseguirse con una cámara panorámica provista de varios objetivos. Las cámaras panorámicas que se construían antes (§ 93, pág. 398) tenían el inconveniente de que las diferentes fotografías resultaban en planos distintos, y por ello se construyó la nueva cámara de manera que todas las vistas resultaran sobre un mismo plano, placa o película. Se consigue este objeto con nueve objetivos iguales, de 53,5 mm de distancia focal, de los cuales uno va en el centro y los otros ocho situados en los vértices de un octógono regular, alrededor del primero. Los ejes ópticos de los nueve objetivos son todos paralelos entre sí; delante de cada uno de los objetivos laterales hay un prisma que produce en los rayos luminosos una desviación de 54° respecto al eje central. Por consiguiente, cuando el eje central es vertical, los ejes laterales forman con el mismo, ángulos de 54° , es decir, que entre cada uno de los ejes laterales y el nadir hay una distancia angular de 54° , como se ve en la figura 342. Las nueve cámaras parciales así formadas, y sus diferentes elementos ópticos, constituyen un solo cuerpo indeformable, que es la cámara panorámica propiamente dicha.

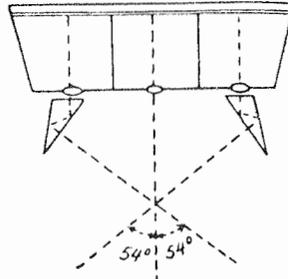


Fig. 342

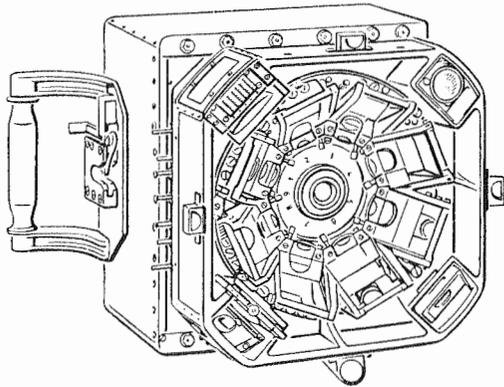


Fig. 343. — Cámara panorámica

En la figura 343, que representa la cámara panorámica vista de frente, se ve el objetivo central y los ocho prismas que hay por delante de los ocho objetivos restantes.

La cámara va equipada con un almacén de películas, que se sujeta a la parte posterior de aquélla.

La descripción de esta cámara ha sido publicada por su autor Aschenbrenner en la revista «Bildm. u. Luftbildw.», 1929.

El restituidor panorámico. La figura 344 representa el aparato construido para restituir, en una sola vista, las nueve fotografías obtenidas con la cámara panorámica. Sobre la parte anterior de la plataforma nivelante que constituye la base de todo el aparato, se ve

el carretón para el sistema de iluminación, que consiste en una lámpara y en una serie de lentes (o mejor dicho, de medias lentes), que hacen de condensador. Detrás del sistema de lentes se ve el bastidor porta-vistas, de forma circular, en el cual se coloca la fotografía (compuesta de nueve vistas) obtenida con la cámara panorámica. Este bastidor puede girar alrededor de su centro y va provisto de un dispositivo que permite irlo deteniendo de 45° en 45° .

Por detrás del bastidor porta-vistas se encuentran dos objetivos de proyección, no visibles en la figura, de los cuales uno, el céntrico, está frente a la fotografía central, y el otro se halla a la misma altura que aquél, pero a un lado, de modo que sirve para proyectar las fotografías laterales.

La pantalla de proyección, también circular, en la cual puede montarse una placa de 30×30 cm, es giratoria alrededor de un eje vertical; además, el marco sobre que va directamente montada la placa, puede girar alrededor de su centro, de 45° en 45° .

Para proyectar la fotografía central, se coloca el plano de la pantalla de proyección paralelo al plano de la fotografía, y se abre el objetivo del centro, permaneciendo cerrado el lateral; el dispositivo de iluminación se coloca, con su carretón, frente a la fotografía central.

Para la proyección de las vistas laterales, y la restitución simultánea de las mismas, el objetivo lateral está ya dispuesto de modo que forma con el plano de la fotografía el ángulo debido (§ 96, página 404). El plano de proyección se coloca en la posición adecuada, girando la pantalla alrededor de su eje vertical; dicha posición está dada por muescas que sirven de indicación y sujeción. Por último, se corre el dispositivo de iluminación hacia el lado, para que quede frente a la vista que se trata de proyectar.

La figura 344 representa la disposición de todos los elementos para la proyección de una vista lateral.

Una vez proyectada una vista lateral sobre la pantalla, se gira 45° el bastidor porta-vistas y el marco porta-placa, para que la vista siguiente quede frente al objetivo lateral y se proyecte sobre la placa. De este modo se obtienen, sucesivamente sobre la placa, la proyección de la vista central y las proyecciones restituidas de las ocho vistas laterales.

Más adelante (§ 101) trataremos de otras aplicaciones de los levantamientos panorámicos.

§ 99. Triangulación radial

La determinación de los puntos de apoyo necesarios para la restitución se hace, de ordinario, por métodos topográficos terrestres. Pero también cabe la posibilidad de hacer esta determinación por procedimiento fotogramétrico, con la ayuda de las mismas vistas.

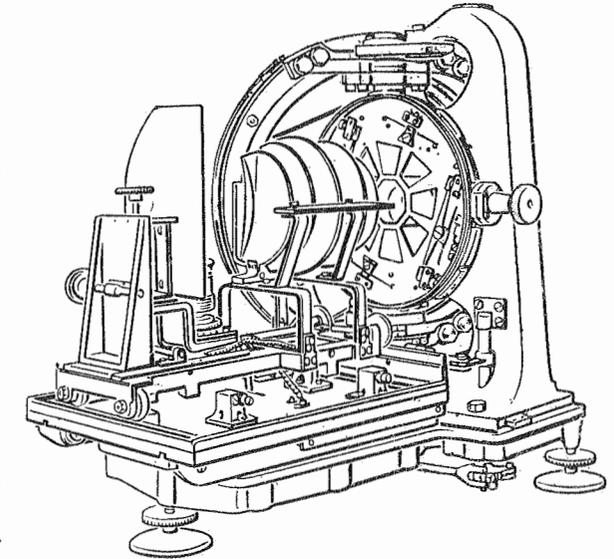


Fig. 344. — Restituidor panorámico

Ya hemos visto anteriormente (§ 85) el modo de medir los ángulos acimutales en las fotografías con el teodolito comparador. Pero la aplicación de este método requiere el conocimiento de la orientación exterior de la vista, de cuya determinación nos ocuparemos más adelante. En la restitución se trata casi siempre de levantamientos con el eje de la cámara aproximadamente vertical, o sea de fotografías casi horizontales; se tiene en estos casos también la posibilidad de medir directamente sobre las vistas los ángulos acimutales, con mayor o menor precisión. Valiéndose de estos ángulos horizontales se puede hacer directamente una triangulación sobre el terreno representado en la fotografía. Según el punto que se tome como vértice para la triangulación, que se llama punto de radiación o punto radial, así resultan distintos métodos de triangulación, que en conjunto reciben el nombre de *triangulaciones radiales*.

Triangulación con el nadir como punto radial. Supongamos un levantamiento aéreo con el eje de la cámara exactamente vertical, de modo que la vertical que pasa por el punto de estación (punto de vista) cortará a la fotografía en su punto principal. Uniendo el punto principal con otros puntos cualesquiera de la fotografía se forman ángulos entre los rayos resultantes, idénticos a los correspondientes ángulos acimutales en el terreno. Se comprende fácilmente que las diferencias de nivel en el terreno no influyen para nada en este resultado.

Si de este modo se puede deducir de una vista un ángulo acimutal cualquiera, es posible también situar varios levantamientos sucesivos, con una gran cobertura, de un 50 % aproximadamente. Vamos a limitarnos, en primer lugar, sólo a dos vistas, que se trata de colocar en el plano de tal modo que prescindiendo de la distancia entre ambas, guarden entre sí la misma posición relativa que el terreno representado en ellas.

El caso más sencillo para esta orientación recíproca se tiene cuando cada vista contiene el punto del terreno que corresponde al punto principal de la vista inmediata. Una vez identificado este punto en cada una de las vistas, se une con el punto principal, y se mueven las dos fotografías de modo que las direcciones homólogas o correspondientes lleguen a coincidir en ambas.

Pero también es posible obtener esta orientación recíproca de las vistas aun cuando ninguna de ellas contenga el punto principal de la vista inmediata; sólo se necesita que aparezca en las dos vistas una parte bastante extensa del terreno comprendido entre los dos puntos principales de aquéllas. Supongamos que tenemos dos fotografías consecutivas, en papel, y que después de atravesada cada una con un alfiler por su punto principal, las fijamos sobre un tablero a cualquier distancia entre sí; se coloca una regla con uno de los bordes apoyado en los dos alfileres, y se hacen girar las dos fotografías de modo que puntos correspondientes en ambas caigan en el mismo borde de la regla. Se traza a lo largo de este borde una línea en las dos fotografías, y ya se tiene determinada la orientación recíproca de los dos puntos principales.

De igual manera puede unirse una tercera fotografía a estas dos, y se tendrán trazadas sobre las tres vistas las seis direcciones correspondientes al triángulo del terreno. De este modo se conoce la forma de este primer triángulo. Al *encadenar* con éste otros triángulos, se forma una verdadera red de triángulos, en la cual se pueden hacer comprobaciones por diagonales, etc. Más adelante (§ 101) volveremos a ocuparnos de esta triangulación sobre puntos principales.

Hasta ahora hemos supuesto que las vistas estaban tomadas con el eje de la cámara exactamente vertical. En los levantamientos con eje inclinado, el punto principal de la

fotografía no cae sobre la vertical del punto de estación, sino que esta vertical corta al plano de la vista en el *nadir* de la misma. Si la inclinación del eje de la cámara respecto a la vertical es igual, al tomar la vista, a ν , y la distancia focal del objetivo es igual a f , la distancia del nadir de la fotografía al punto principal de la misma será igual a $f \operatorname{tg} \nu$. Supongamos, además, que se conozca la dirección acimutal de la línea de unión del nadir con el punto principal de la vista (por la impresión fotográfica de un nivel sobre la vista al tomar ésta), y se podrá ya señalar sobre aquélla la posición de su nadir. Las direcciones trazadas desde el nadir son siempre independientes de los desniveles del terreno; por otra parte, hay que tener en cuenta que en el caso que estamos considerando, las direcciones están trazadas en un plano inclinado ν sobre el horizonte, y no son idénticas a las direcciones acimutales u horizontales.

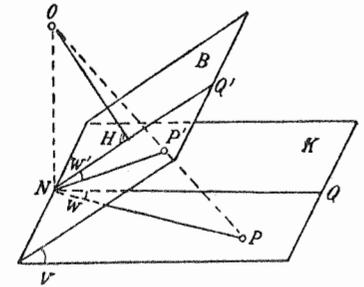


Fig. 345

En la figura 345 se ve en B el plano de la fotografía y en K el plano horizontal sobre el cual quiere trazarse el mapa. El punto N es el nadir de la fotografía, y suponemos el plano del mapa corrido paralelamente a sí mismo de tal modo que pase por N . Para un punto cualquiera P' de la vista, puede medirse en ésta el ángulo w' al cual corresponde, en el mapa el ángulo w , que es la proyección horizontal del w' .

Vamos a hallar la diferencia que hay entre los ángulos w y w' , y para ello imaginemos trazada en la figura 345 una esfera de radio cualquiera y centro en N ; los rayos que unen a N con los diferentes puntos de esta figura cortarían a la superficie esférica en puntos que indicaremos con las mismas letras que aquéllos, teniéndose así la figura 346; en el triángulo esférico $OP'Q'$, designemos con φ al lado OP' , y teniendo en cuenta que el ángulo Q' es recto, se tendrá, siguiendo las notaciones de la figura:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} w'}{\operatorname{sen} w} \quad \cos \varphi = \cos w' \operatorname{sen} \nu$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando ordenadamente:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 w'}{\operatorname{sen}^2 w} + \cos^2 w' \operatorname{sen}^2 \nu = 1$$

o sea:

$$\operatorname{sen}^2 w' + \operatorname{sen}^2 w \cos^2 w' \operatorname{sen}^2 \nu = \operatorname{sen}^2 w. \quad (1)$$

Pongamos ahora:

$$w = w' + dw$$

y tomando senos (teniendo en cuenta la pequeñez del ángulo dw)

$$\operatorname{sen} w = \operatorname{sen} w' + \cos w' dw$$

de donde, elevando al cuadrado (despreciando la segunda potencia de dw)

$$\operatorname{sen}^2 w = \operatorname{sen}^2 w' + 2 \operatorname{sen} w' \cos w' dw$$

Sustituyendo este valor de $\operatorname{sen}^2 w$ en la ecuación (1), se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 w' \cos^2 w' \operatorname{sen}^2 \nu + 2 \operatorname{sen} w' \cos w' \cos^2 w' \operatorname{sen}^2 \nu dw = 2 \operatorname{sen} w' \cos w' dw$$

de donde:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2w' \operatorname{sen}^2 \nu + 2 \cos^2 w' \operatorname{sen}^2 \nu dw = 2 dw$$

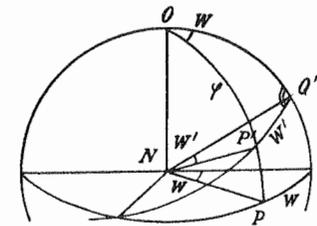


Fig. 346

y por último:

$$d w (1 - \cos^2 w' \sin^2 v) = \frac{1}{4} \sin 2 w' \sin^2 v. \quad (2)$$

Como la inclinación, o distancia angular v al nadir es siempre muy pequeña, se puede despreciar en el primer miembro de esta igualdad el producto $\cos^2 w' \sin^2 v d w$, y queda así reducida a esta otra:

$$d w = w - w' = \frac{1}{4} \sin 2 w' \sin^2 v. \quad (3)$$

Este error puede eliminarse en las direcciones tomadas en la fotografía, proyectando ésta sobre un plano horizontal en el restituidor óptico-mecánico. La vista así restituida tiene exactamente el mismo valor que si se hubiera tomado con el eje de la cámara vertical, en cuanto se refiere a la medición de direcciones acimutales.

Esta propiedad enseña el camino que conduce a la construcción de mapas planimétricos utilizando fotografías restituidas; en efecto, si se orientan debidamente dos fotografías situadas a cualquier distancia, del modo antes indicado para las vistas horizontales (página 414), se pueden trazar desde los dos puntos nadir de las vistas los rayos que unan aquéllos con los puntos correspondientes a uno del terreno, y el punto de intersección resultante dará la proyección horizontal de este punto del terreno, y la escala del mapa es ará determinada por la distancia entre los puntos nadir. De esta manera, punto a punto, puede construirse un mapa sin defecto alguno, con sólo disponer de las fotografías restituidas, mientras que cada una de éstas por sí solas, y a causa de los desniveles del terreno, no da un buen plano de este último.

Cuando la inclinación de la vista es muy pequeña se la supone horizontal y en vez del nadir se emplea el punto principal de la fotografía, y se hace la triangulación sobre este punto del mismo modo que para las fotografías horizontales (página 415).

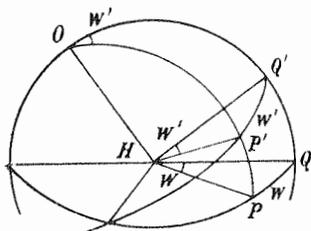


Fig. 317

El error de dirección que se comete al despreciar la pequeña inclinación de la fotografía se puede deducir de la figura 345, suponiendo que el plano del mapa se traslada paralelamente así mismo hasta que pase por el punto principal H de la vista. Uniendo H , en los dos planos, con P y P' , se obtienen dos ángulos w y w' , de vértice en H . Describiendo una esfera de radio cualquiera alrededor de H como

centro, resultará la figura 347, análoga a la figura 346 antes considerada, y con las mismas notaciones que aquélla.

En el triángulo esférico OPQ , el lado OQ es igual a $90^\circ + v$, y llamando φ al lado OP , tendremos, después de obtener las mismas fórmulas (1) a (3), el mismo resultado que antes, a saber:

$$w - w' = \frac{1}{4} \sin 2 w' \sin^2 v \quad (4)$$

o también:

$$w - w' = \frac{1}{4} \sin 2 w' \frac{v^2}{\rho} \quad (5)$$

Expresando v en grados, y $w - w'$ en minutos, se tiene para el valor máximo de esta diferencia, es decir, para $w' = 45^\circ$:

$$w - w' = 0,262 v^2 \quad (6)$$

Aquí vemos que el error de dirección es de segundo grado en v ; por consiguiente, el efecto que puede producir en la triangulación es bien pequeño, como lo demuestran los siguientes valores numéricos:

v	1°	2°	3°	4°	5°	10°
$w - w'$	0,3'	1,0'	2,4'	4,2'	6,6'	26,2'

Obsérvese que este error es el mismo que se cometería al trazar los rayos en el tablero, si éste formara el ángulo v con el horizonte.

Efecto de los desniveles. Al despreciar la inclinación de la fotografía, resulta un nuevo error en las direcciones, producido por las diferencias de nivel en el terreno.

En la figura 348, que corresponde a la figura 347, se supone que el punto P se ve desde el H bajo un cierto ángulo de altura α . El ángulo acimutal, en el terreno, entre las direcciones de P y de Q es igual a w , y en la fotografía este ángulo resulta igual a w' . La diferencia $w - w'$ representa, pues, en este caso, el error debido a la altura angular α , que es igual al error debido a la inclinación v , dado por la fórmula (4).

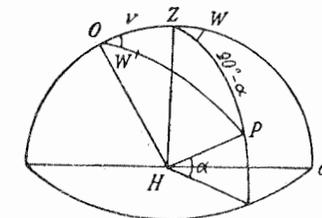


Fig. 348

Comparando esta figura 348 con la figura 388 del tomo I (página 329) se encuentra que son idénticas en lo que a posición del punto P y de los ángulos se refiere. El error del ángulo w' es el mismo error que se tiene en un teodolito cuando su eje principal forma un ángulo v con la vertical; por lo tanto, podemos aplicar aquí la fórmula (5) de la página 329 del tomo I, con sólo cambiar la notación según las figuras, y tendremos:

$$w - w' = v \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin w. \quad (8)$$

Para el valor máximo de $w - w'$, que tiene lugar cuando $w = 90^\circ$, alcanza el coeficiente de $\operatorname{tg} \alpha$ los valores siguientes, expresando v en grados y $w - w'$ en minutos:

v	1°	2°	3°	4°	5°	10°
$w - w'$	1,0'	2,1'	3,2'	4,2'	5,2'	10,5' $\operatorname{tg} \alpha$

Y puesto que α es, casi siempre, menor de 45° , los valores de $w - w'$ serán, de ordinario, menores que los anteriores coeficientes numéricos.

§ 100. Triangulación sobre el punto focal

Cerca del nadir de la fotografía hay otro punto, de utilidad especial para la triangulación radial. Si suponemos trazada la bisectriz del ángulo que en el punto de estación forma la vertical con la normal a la fotografía, cortará esta bisectriz al plano de la vista en un punto, que se llama *foco* o *punto focal*. En la figura 349 se tiene la construcción que da lugar a este punto focal F , y además se supone en la misma que el plano del terreno o del mapa se ha trasladado paralelamente a sí mismo hasta pasar por el punto focal F . En la figura se ve que la línea de unión FO del punto focal con el punto de estación forma ángulos iguales con los dos planos, como así tiene que suceder, por ser bisectriz del ángulo NOH . Si se traza en el plano del terreno o del mapa un rayo FP , que forme con FQ el ángulo w , y se proyecta este rayo en FP' sobre el plano de la vista, formará este último con la dirección FQ' el ángulo w' , teniéndose que $w = w'$.

De aquí se deduce que si se conoce la posición del punto focal F , los ángulos medidos en la fotografía, de vértice F , son iguales a los correspondientes del terreno, independientemente de la inclinación de la vista.

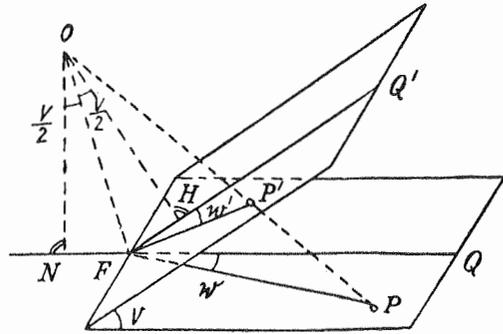


Fig. 349

Ahora hay que saber el efecto que en los ángulos determinados de este modo puede producir un error en la inclinación de la fotografía, es decir, en la medida de la distancia angular al nadir del eje de la cámara. Supongamos para ello que la distancia al nadir ν (figura 349) se haya determinado con un error $\Delta\nu$, que dará lugar a un corrimiento del punto focal F , y los dos ángulos en O serán iguales respectivamente a $\frac{\nu + \Delta\nu}{2}$ y a

$\frac{\nu - \Delta\nu}{2}$. Para la discusión de este error, supongamos trazada una esfera alrededor de F como centro, y conservando la misma notación que en la figura 349, tendremos la figura 350, donde se ven las intersecciones con la superficie esférica de los rayos procedentes de O ; el ángulo w del terreno estará proyectado en w' sobre el plano de la fotografía.

En los triángulos esféricos rectángulos $OQ'P'$ y OQP (figura 350) se tiene:

$$OQ' = 90^\circ - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{\Delta\nu}{2}\right) \quad OQ = 90^\circ + \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\Delta\nu}{2}\right)$$

Designando el ángulo $P'OQ'$ con la letra σ , se tiene, en los dos triángulos:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{tg} w'}{\cos^{1/2}(\nu + \Delta\nu)} = \frac{\operatorname{tg} w}{\cos^{1/2}(\nu - \Delta\nu)}$$

Desarrollando los denominadores teniendo en cuenta que $\Delta\nu$ es muy pequeño, se tiene, invirtiendo los extremos de la proporción formada por la segunda igualdad de razones:

$$\frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w'} = \frac{\cos \frac{\nu}{2} + \left(\operatorname{sen} \frac{\nu}{2}\right) \frac{\Delta\nu}{2}}{\cos \frac{\nu}{2} - \left(\operatorname{sen} \frac{\nu}{2}\right) \frac{\Delta\nu}{2}} = \frac{1 + \frac{\Delta\nu}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{1 - \frac{\Delta\nu}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}$$

y despreciando los términos en $\Delta\nu^2$ resulta

$$\frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w'} = \left(1 + \frac{\Delta\nu}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right) \left(1 + \frac{\Delta\nu}{2} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right)$$

o sea:

$$\frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w'} = 1 + \Delta\nu \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \tag{1}$$

Para reducir la fracción del primer miembro de esta ecuación pongamos

$$w = w' + \Delta w$$

y tendremos:

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} w' + \frac{\Delta w}{\cos^2 w'} = \operatorname{tg} w' \left(1 + \frac{\Delta w}{\operatorname{sen} w' \cos w'}\right)$$

o sea:

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} w' \left(1 + 2 \frac{\Delta w}{\operatorname{sen} 2 w'}\right)$$

Sustituyendo esta expresión en (1) y mediante fáciles simplificaciones resulta finalmente:

$$w - w' = \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 w' \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}\right) \Delta\nu \tag{2}$$

A continuación damos los coeficientes de $\Delta\nu$ para el valor máximo de $w - w'$ ($w' = 45^\circ$), expresando ν en grados y $w - w'$ en minutos:

ν	1°	2°	3°	4°	5°	10°
$w - w'$	0,26	0,53	0,79	1,04	1,31	2,63

Aquí se ve que el error en la determinación de la distancia angular ν al nadir, produce un efecto muy pequeño en el método del punto focal, pues, por ejemplo, para $\nu = 5^\circ$ y $\Delta\nu = 2''$, el error producido es sólo de 2,6'.

Efecto de los desniveles. Los desniveles del terreno producen en la triangulación hecha sobre el punto focal un error análogo al que producen en la triangulación sobre el punto-nadir (pág. 417). La magnitud de este error puede deducirse directamente de la ecuación (8) si referimos la figura 349 a la figura 348 a que aquella corresponde; en la figura 349 la inclinación del rayo FO respecto a la vertical es igual a $\frac{\nu}{2}$, mientras que en la figura 348 la inclinación del rayo HO es igual a ν ; si desde el punto focal F se ve un punto P del terreno bajo un ángulo de altura α , el error resultante será, en correspondencia con la fórmula (8):

$$w - w' = \frac{\nu}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} w.$$

Es decir, que este error es solamente la mitad del que produce el desnivel del terreno en la triangulación sobre el nadir.

El triangulador radial de Zeiss. Con el procedimiento tan simple indicado en la página 413, resultan determinadas con poca precisión las direcciones sobre la fotografía, y como, por otra parte, de la anterior discusión de errores se deduce que la orientación recíproca de las vistas admite una gran precisión, la casa Zeiss construyó un aparato por indicación del profesor von Gruber, en el que la orientación recíproca de las fotografías se realiza por un método óptico, utilizando las propiedades estereoscópicas de aquellas.

Cuando dos vistas horizontales están exactamente orientadas entre sí, la línea de unión de sus respectivos puntos principales pasa por puntos homólogos (correspondientes) en las dos fotografías, de modo que todos estos puntos, vistos con el estereoscopio, dan una imagen en relieve, de la faja de terreno comprendida entre los dos puntos-nadir. Si la orientación recíproca de las dos fotografías no es exacta, se traducen las pequeñas desviaciones laterales de los puntos, en paralajes verticales o de altura, que pueden hacerse desaparecer girando convenientemente las dos fotografías. Esta comprobación estereoscópica de la orientación tiene un valor especial cuando en la línea de unión de los dos puntos-nadir caen objetos del terreno bien destacados y conocidos (puntos permanentes).

La figura 351 representa el triangulador de Zeiss, consistente, en esencia, en un microscopio doble, con sus dos oculares en A , y sus objetivos situados a distancia bastante amplificada; en el plano-imagen de cada microscopio va dispuesta una señal o referencia, análogamente a como estaban los índices en el estereocomparador. Los objetivos van colocados por debajo de un dispositivo de corredera, sobre el cual pueden moverse los dos bastidores porta-vistas B ; con el volante H de la izquierda se puede mover toda la corre-

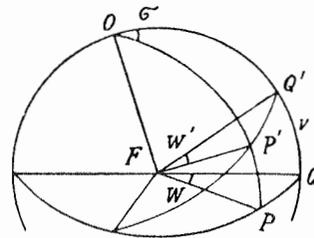


Fig. 350

dera a uno y otro lado, y con el volante *H* de la derecha se puede mover la vista derecha sobre la misma corredera; la lectura de ambos movimientos se hace con sendas escalas *F*, que aprecian 0,02 mm. Sobre los bastidores *B* van montados otros giratorios *C*, cuyo movimiento de rotación se lee en los limbos *D*, con 1' de precisión. Estos bastidores interiores giratorios llevan una placa de cristal con una cruz en el centro de rotación.

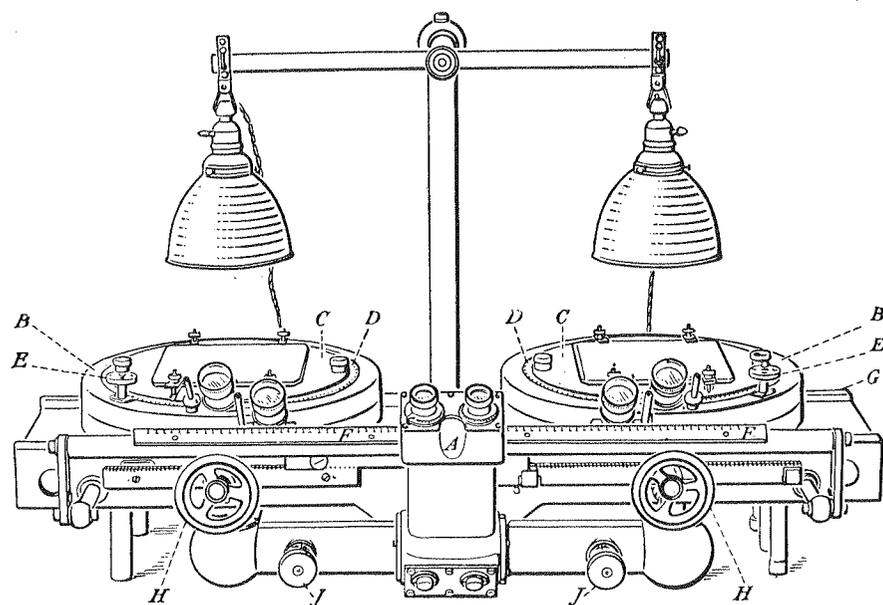


Fig. 351. — Triangulador radial de Zeiss

Las fotografías, placas o películas, se colocan en los bastidores con toda facilidad empleando un pupitre especial, como se ve en la figura 352; de este modo puede colocarse cada fotografía en el bastidor de manera tal, que su punto principal, su nadir o su punto focal (después de señalado este último con un circulito), caiga sobre el centro de rotación del bastidor.

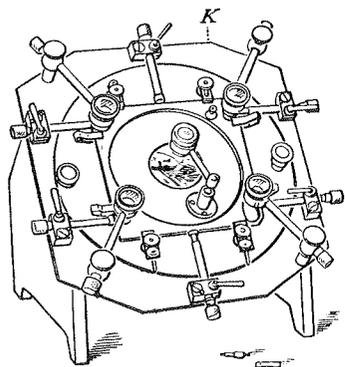


Fig. 352. — Pupitre para el montaje de las fotografías

Una vez montadas de este modo las dos fotografías, se procede a su orientación, para lo cual se empieza por mover la corredera principal hasta que el índice o señal de la izquierda caiga sobre el centro de rotación de la fotografía del mismo lado; después se mueve la vista de la derecha, sobre su corredera propia, haciéndola girar al mismo tiempo, hasta que con el microscopio de la derecha se vea el punto del terreno que en la vista de la izquierda cae sobre el centro de rotación del bastidor correspondiente.

Para que las dos fotografías, que de esta manera quedan formando entre sí un cierto ángulo, puedan reunirse y dar lugar a una sola imagen estereoscópica, hay en cada microscopio, en la trayectoria de los rayos luminosos, un prisma de Wollaston, cada uno de los cuales se hace girar con su correspondiente botón *J*.

Una vez colocadas las dos fotografías de la manera antes indicada, se mueve la corre-

dera principal hasta que el centro de rotación de la vista de la derecha caiga debajo del índice o señal del microscopio de la derecha, y se gira la vista de la izquierda para que vayan acercándose una a otra las dos imágenes de los objetos o puntos correspondientes en ambas fotografías. Se repite esta operación con la vista de la derecha y se continúa alternativamente con ambas, sin dejar de emplear los dos prismas de Wollaston, hasta que no se aprecie ninguna paralaje vertical entre las dos imágenes. Durante estas operaciones se va corrigiendo continuamente la posición relativa de las dos fotografías con el volante de la derecha.

Para eliminar todo posible error personal en el observador, pueden colocarse los prismas de tal modo que se vean las fotografías giradas en 180°, con lo cual las elevaciones y depresiones del terreno se verán invertidas en la imagen de relieve.

Como se ve, el método seguido en el triangulador de Zeiss tiene el mismo fundamento que el tan sencillo de los alfileres y la regla antes indicado (pág. 414).

Una vez orientadas las dos vistas, se leen los dos limbos para tener las direcciones recíprocas entre los dos puntos radiales.

De análoga manera se emplea este triangulador para medir las direcciones de los rayos que unen los dos puntos radiales con puntos cualesquiera del terreno (problema que ya hemos tratado en forma muy sencilla en la página 415). Para ello hay que hacer que los dos puntos que en las fotografías corresponden al punto del terreno de que se trate, se encuentren sobre la recta que une los centros de rotación de las dos vistas, y una vez conseguida esta alineación, se hace la lectura sobre los dos limbos, para conocer la posición relativa de las dos fotografías. Esta posición relativa de las dos imágenes del mismo punto del terreno se consigue también utilizando el efecto estereoscópico, para lo cual se empieza por mover las correderas y girar las fotografías de modo que las dos imágenes se coloquen aproximadamente debajo de los respectivos índices o señales del microscopio, y después se mueven los prismas hasta que se produzca la visión en relieve; por último, se afina la posición de las dos imágenes de tal modo que el *índice flotante* en el espacio coincida con el punto del terreno visto en relieve.

§ 101. Práctica de la triangulación radial

Los métodos descritos para la determinación de direcciones, pueden aplicarse al levantamiento de una triangulación, midiendo los ángulos entre aquellas y tomando como vértices los puntos radiales. En la figura 353 se ve, en esquema, una cadena de triángulos de esta clase, correspondiente a fotografías tomadas en dos vuelos casi paralelos, y con la suficiente zona común (cobertura) para poder marcar en ambas las direcciones recíprocas de sus puntos radiales. Para que la cadena quede totalmente determinada, hay que medir la longitud de uno de los lados de algún triángulo, o disponer por lo menos de dos puntos permanentes ya conocidos para el cierre de la cadena.

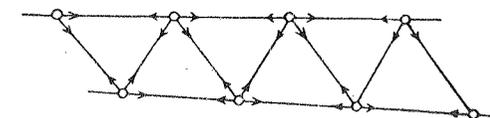


Fig. 353

Cuando se han tomado vistas de varias zonas paralelas consecutivas, se puede formar una red de triángulos, y para la medición de la misma puede utilizarse como base algún lado o una diagonal cualquiera.

La compensación de estas cadenas o redes no debe realmente hacerse por los procedi-

mientos propios de las triangulaciones, a causa de la escasa precisión en las direcciones medidas, cuyo error medio raras veces baja de $\pm 5'$; es mucho más lógico proceder a la eliminación de las diferencias o errores residuales por medio de simples métodos aproximados, sin la exactitud de los empleados en las triangulaciones ordinarias.

En general, se forman y construyen los triángulos de una cadena o red radial por métodos puramente gráficos, y la compensación debe, por lo tanto, hacerse también gráficamente.

Estas compensaciones han sido tratadas a fondo por Buchholtz en su memoria sobre la compensación de las triangulaciones aéreas, publicada por la «Sbornik Masarykovy Akademie Práce», en 1929.

El levantamiento de una sola zona de vuelo, con fotografías bastante superpuestas, permite trazar una poligonal, cuyos ángulos se determinan midiendo las direcciones a puntos correspondientes, como se ve en la figura 354. Los ejes o lados de la poligonal se obtienen trigonométricamente, uniendo tres vértices seguidos de la poligonal con un punto lateral convenientemente elegido y repitiendo la operación en todos los ejes de aquélla. En vez de una sola serie de puntos laterales, pueden emplearse dos, una a cada lado de la

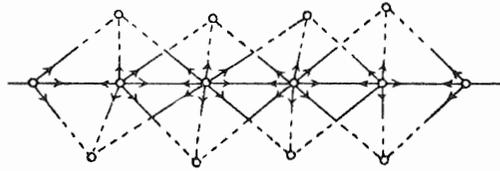


Fig. 354

poligonal, como representa la figura 354. En el caso de que este itinerario poligonal pueda cerrarse en dos puntos dados, no es preciso hacer ninguna medida más de longitud.

Para el levantamiento de estas poligonales se siguen también métodos gráficos.

Para más detalles sobre las triangulaciones radiales puede verse el trabajo de Koppmair en «Allg. Verm.-Nachr.», 1929, y el de Schweizer, titulado *Teoría y práctica de la triangulación radial en países montañosos*, Borna-Leipzig, 1931.

Transportador de la Compañía Fotogramétrica de Munich, para los levantamientos panorámicos. Para transportar los levantamientos de mucho campo angular, obtenidos con la cámara y el restituidor panorámicos (figs. 343 y 344) ha construido la Compañía Fotogramétrica de Munich un aparato que, al igual que el triangulador de Zeiss, sirve para tomar sobre las vistas los ángulos necesarios para la triangulación sobre el nadir como punto radial. Este transportador consiste en un microscopio doble con índice flotante, y en dos porta-vistas que pueden correrse lateralmente en su mismo plano, y girar alrededor de un eje vertical. Cada objetivo va provisto de una aguja con la cual se marca en la fotografía el punto que se enfila con el índice del microscopio. Además, hay una pequeña fresa con la cual se hace un circulito alrededor del punto marcado.

Antes de colocar las fotografías en el transportador se marca en cada una el punto principal, por medio de un dispositivo que consiste en un marco cuadrado, en cuyos cuatro vértices van unas ventanillas provistas de una lámina de celuloide con una raya muy fina en cada una; estas rayas prolongadas forman una cruz rectangular, en cuyo centro va montada una aguja con fresa circular alrededor. Colocando este dispositivo sobre la fotografía de modo que sus cuatro rayas caigan sobre las señales o referencias que aparecen en los lados de la misma, se puede marcar en ésta su punto principal.

Las dos fotografías se colocan en el transportador de tal modo que sus puntos principales caigan sobre los centros de rotación de sus soportes respectivos, y lo primero que

hay que hacer es determinar en cada fotografía la posición del punto principal de la otra. Para ello se lleva el punto principal de la fotografía de la izquierda bajo el índice del microscopio del mismo lado, y se giran los soportes de las dos vistas hasta lograr el efecto estereoscópico de tal manera que la línea de unión de los dos puntos principales caiga en la dirección del movimiento de traslación de las fotografías. Se corre entonces la vista de la derecha en esta dirección hasta que el índice flotante coincida con un punto del terreno; en esta situación, el índice del microscopio de la derecha cae sobre el punto de esta fotografía correspondiente al punto principal de la fotografía de la izquierda. Dicho punto se marca sobre la vista de la derecha.

De este modo se señalan en cada fotografía los puntos principales de todas las fotografías de alrededor, y sólo falta ya determinar las direcciones de las líneas de unión con estos puntos del punto principal de la primera, para lo cual se coloca esta fotografía en uno de los soportes y se corre éste y se hace girar de manera que el punto antes marcado caiga bajo el índice del microscopio. En un limbo unido al soporte de la fotografía se pueden leer todas las direcciones a los puntos principales en ella señalados.

Además de las direcciones correspondientes a los puntos principales de las fotografías próximas, se pueden medir también en la misma fotografía las direcciones a puntos del terreno bien identificados, con lo cual se dispone ya de los elementos capitales para hacer una triangulación con el nadir como punto radial, ya sea en la forma indicada por la figura 353 o en la representada por la figura 354.

Tanto el transportador que acabamos de describir como los métodos de medida expuestos, han sido tratados con todo detalle por Aschenbrenner en la «Bildm. u. Luftbildw.» de 1929.

Sobre la representación de mapas altimétricos deducidos de fotografías aéreas de gran campo angular, publicó Finsterwalder un interesante trabajo en el «Intern. Archiv f. Photogrammetrie», tomo VII, 2.^a parte, año 1931.

Aplicación de los acimutes astronómicos a las triangulaciones radiales. En 1931, indicó S. Finsterwalder un perfeccionamiento de las triangulaciones radiales por medio de observaciones astronómicas («Intern. Archiv f. Photogrammetrie», tomo VII, 2.^a parte). La determinación de la latitud y longitud de los puntos permanentes, de apoyo o cierre, para una triangulación radial, no es el método más indicado para la exactitud de los cierres, a causa de la desviación del péndulo (ángulo formado por la dirección de la plomada y la normal al elipsoide terrestre en un punto dado). En cambio, la determinación astronómica del acimut queda tan poco afectada por esta desviación, que constituye el mejor procedimiento para elevar el grado de precisión de una triangulación radial. Esta observación de acimutes puede hacerse con un teodolito pequeño provisto de círculo cenital, con una apreciación de pocos segundos, dando lugar así a una mayor precisión en la medida de los ángulos de una triangulación radial.

Para este enlace de observaciones astronómicas con una triangulación radial, propone Finsterwalder el siguiente método para levantamientos de gran extensión, dando por supuesto que el terreno es accesible a mediciones terrestres, ya que es preciso, por lo menos, medir una serie de bases indispensables para estas operaciones.

A distancias de 30 a 50 Km se miden bases de 3 a 5 Km de longitud, cuyos puntos extremos se señalan para que puedan fácilmente reconocerse sobre las fotografías aéreas (§ 94, pág. 400). Para cada base se determina, astronómicamente y a ser posible en sus dos extremos, el acimut y la latitud geográfica, aunque esta última no tenga aplicación

inmediata. Para reducir la longitud de cada base al nivel del mar, se determinan las altitudes con el barómetro o con el termómetro hipsométrico.

De las fotografías obtenidas entre las bases, se forman cadenas de triángulos, que unan las bases entre sí.

Como puntos nodales de las cadenas de triángulos, se emplean los puntos medios de las bases; para estos puntos nodales se toma provisionalmente como latitud geográfica la media aritmética de las latitudes observadas en los extremos de las bases respectivas; como acimut de la base, en su punto medio, se toma el promedio de los acimutes observados en sus extremos. Si las mediciones astronómicas sólo pueden hacerse en un extremo de la base, se calculan el acimut y la latitud para el punto medio de la misma, en función de la mitad de su longitud, por los medios conocidos en Geodesia.

Una vez hecha la triangulación entre dos de estos puntos nodales P_1 y P_2 se puede calcular la longitud de la línea P_1P_2 que los une, en función de las longitudes de ambas bases, así como los ángulos que forma con las mismas. Conociendo los acimutes (determinados por observaciones astronómicas) de las dos bases, se deduce inmediatamente el acimut de la línea P_1P_2 en sus dos extremos. Por los medios que se estudian en Geodesia se puede calcular la diferencia entre estos dos acimutes (P_1P_2) y (P_2P_1), y la desigualdad entre los resultados de la observación y del cálculo se corrige con una compensación, que produce una cierta curvatura en la cadena de triángulos.

Una vez fijada en orientación y en longitud la línea de unión de los dos puntos nodales, se pueden determinar sus puntos extremos P_1 y P_2 por medio del cálculo de las diferencias de latitudes y longitudes geográficas.

En cada faja de terreno sobre que se vuela se obtiene un resultado semejante, y cuando se tiene un conjunto de varios puntos nodales, resultan para las diferencias calculadas de longitudes y latitudes una serie de condiciones, que se satisfacen mediante una compensación. El resultado de esta compensación proporciona, con la posición definitiva de los puntos nodales, un sistema fijo de referencias para la orientación geográfica de todo el levantamiento.

Por no ser propio del carácter elemental con que estamos exponiendo esta materia, no estudiamos aquí la compensación de la red de puntos nodales por el método de los mínimos cuadrados. Acerca del desenvolvimiento de la triangulación radial, sólo diremos que S. Finsterwalder fué quien primero propuso la triangulación sobre el nadir, en las «Sitzungber. d. Bayer. Ak. d. W. 1921»; la posibilidad de aplicar en la práctica este método fué demostrada por Aschenbrenner en sus estudios acerca de las triangulaciones sobre el nadir, publicados en la «Mitt. d. Konsortiums Luftbild-Stereographik. Nr. 5, 1926»; y la relación exacta del procedimiento ha sido posible gracias al triangulador radial de Gruber construido por la casa Zeiss.

§ 102. El problema de la trisección en el espacio

Los métodos hasta ahora estudiados para transportar al mapa los datos de las fotografías aéreas, suponen que el terreno es llano o con pocos desniveles. Cuando éste es bastante quebrado, los mapas planimétricos obtenidos por restitución de las vistas resultan algo defectuosos; pero son utilizables para casi todas las aplicaciones ordinarias de las planimetrías, por lo cual constituye la restitución el método más importante de transporte o desarrollo de planos aerofotogramétricos.

Cuando se trata de transportar con exactitud una vista aérea, como ya vimos que podía hacerse en los levantamientos fotogramétricos terrestres, se tropieza con la dificultad de que no es posible determinar directamente la orientación exterior de las fotografías. Sin embargo, puede ésta determinarse por métodos indirectos con tal que en las vistas se identifiquen varios puntos del terreno, cuya posición y altura sean perfectamente conocidas. En general, no se emplean directamente vértices o puntos trigonométricos ya determinados en levantamientos topográficos terrestres, sino que da mejor resultado elegir sobre las fotografías puntos bien caracterizados, por ejemplo cruces de caminos, esquinas de edificios, etc., y referir después los correspondientes puntos del terreno, topográficamente, a la red topográfica o geodésica del mismo.

Bastan, en general, tres de estos puntos para resolver el problema, pero análogamente a como se hace en la trisección plana, estos puntos deben tener una posición conveniente respecto al punto de estación. Este problema puede considerarse como una generalización del de la trisección en el plano, y por esta razón se llama *de la trisección en el espacio*.

El problema consiste en calcular las coordenadas y la altura del punto de estación, y puede resolverse directamente por el llamado *método de la pirámide*; supongamos unido el punto de estación con los tres puntos permanentes del terreno, y tendremos formada una pirámide triangular, cuya base puede determinarse en función de las coordenadas y alturas de sus tres vértices, que son aquellos puntos permanentes. Uniendo el punto de estación, o centro de perspectiva, con las imágenes de estos mismos puntos en la fotografía, se obtiene una segunda pirámide, cuya base, que se halla sobre la fotografía, es perfectamente conocida; además, suponiendo, como es natural, que se haya dado la orientación interior de la vista, se pueden deducir los ángulos formados por cada dos aristas al concurrir en el vértice de la pirámide; pero estos ángulos planos son los mismos en ambas pirámides, por lo cual, en la que tiene su base en el terreno, se conocen ya, no sólo los lados de esta última, sino los tres ángulos formados entre sí por las aristas en el vértice. De este modo queda reducido el problema a calcular la longitud de una de las aristas de la pirámide en función de los datos anteriores. Planteado de esta manera el problema conduce a una ecuación bicuadrada, que se resuelve por las reglas analíticas de todos conocidas (Jordan, «Zeitschr. f. Verm.», 1925); pero ordinariamente se llega al mismo resultado por medio de un método de aproximación (Jordan, «Zeitschr. f. Verm.», 1925), de más fácil desarrollo.

El problema de la trisección en el espacio ha sido estudiado desde el punto de vista matemático por muchos autores, que lo han resuelto fundándose en el método de la pirámide o partiendo de otros principios geométricos. Gruber publicó en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1924 un estudio detallado de todos los métodos para la resolución del problema. Además, y limitándonos a los más importantes, merecen citarse los siguientes trabajos y publicaciones:

S. FINSTERWALDER. *Teoría geométrica de la fotogrametría* («Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung», 1899).

T. FISCHER. *Cálculo de la trisección en el espacio, en los levantamientos aéreos* (Jena, 1921).

O. VON GRUBER. *Determinación de puntos en el espacio* (Jena, 1924).

A. HORNOCH. *Solución del problema de la trisección en el espacio* («Allgem. Verm.-Nachr.», 1928).

E. LIEBITZKY. *Trisección esférica y en el espacio* («Zeitschr. f. Verm.», 1928).

HUGERSHOFF. *Fotogrametría y aerofotogrametría* (Viena, 1930).

GRUBER. *Cursillo de fotogrametría* (Stuttgart, 1930).

Cálculo del valor aproximado de la orientación exterior. En general puede admitirse que de la lectura del sector graduado de que va provista la cámara fotográfica, puede deducirse un primer valor aproximado de la inclinación longitudinal ω de la vista respecto al plano horizontal. Después hay que conocer un primer valor, también aproximado, de la inclinación lateral de la vista, es decir, del ángulo κ que forma la línea de unión de las dos referencias laterales de aquélla, con la intersección de su propio plano con el plano horizontal de las xy . Ordinariamente puede tomarse este primer valor aproximado de la inclinación lateral como igual a cero. Como ya se vió en el párrafo 85, se pueden determinar directamente, con el teodolito comparador (pág. 355), el ángulo acimutal α y el de altura β de un punto cualquiera de la fotografía, o bien indirectamente por medición sobre la vista de las coordenadas rectangulares del punto considerado; de los ángulos acimutales correspondientes a tres puntos permanentes se puede calcular, por trisección, la posición del punto de estación, y de uno de los ángulos de altura se puede deducir la altura de aquél. Haciendo idéntico cálculo con los otros dos ángulos de altura se obtienen tres valores distintos para la altura, a causa de la poca exactitud con que se conoce el ángulo ω de inclinación longitudinal; partiendo de estos tres valores se pueden calcular las correcciones del primer valor de la inclinación longitudinal ω y de la lateral κ .

Designemos los valores provisionales de las inclinaciones longitudinal y lateral con (ω) y (κ) respectivamente, y los valores definitivos con $(\omega) + \Delta\omega$ y $(\kappa) + \Delta\kappa$; hay que calcular ahora la influencia que sobre los ángulos acimutales α y los de altura β ejercen las diferencias $\Delta\omega$ y $\Delta\kappa$.

Para ello supongamos trazada alrededor del punto de estación O como centro una esfera de radio arbitrario, que cortará a la dirección principal del levantamiento en H , a la dirección acimutal correspondiente a un punto permanente en P , y a la dirección cenital en Z ; de este modo se forma un triángulo esférico ZHP (fig. 355), en el cual el ángulo en Z es igual a α , y los lados que lo forman son respectivamente $ZP = 90^\circ - \beta$, y $ZH = 90^\circ - \omega$; llamemos ν y γ a los otros dos ángulos, y σ al tercer lado PH .

Según la ley de las cotangentes, tendremos en este triángulo:

$$\operatorname{sen} \nu \cot \alpha = -\operatorname{sen} \omega \cos \nu + \cot \sigma \cos \omega, \quad (1)$$

y derivando en ω :

$$\frac{\operatorname{sen} \nu}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = \cos \omega \cos \nu + \cot \sigma \operatorname{sen} \omega$$

de donde:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \omega \cot \nu + \frac{\cot \sigma \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \nu}$$

Ahora bien, en el mismo triángulo se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \nu} = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \beta} \quad \text{y} \quad \cos \omega \cos \nu = \frac{\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \omega \cos \sigma}{\operatorname{sen} \sigma}$$

y sustituyendo en la expresión anterior, haciendo a la vez las reducciones necesarias, resulta:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (2)$$

Por otra parte, derivando en ν la ecuación (1) se tiene:

$$-\frac{\operatorname{sen} \nu}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} + \cos \nu \cot \alpha = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \nu$$

de donde:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = \cot \nu \cot \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Para transformar convenientemente esta expresión, apliquemos nuevamente la ley de las cotangentes al triángulo ZPH de este otro modo:

$$\operatorname{sen} \alpha \cot \nu = \operatorname{tg} \beta \cos \omega - \operatorname{sen} \omega \cos \alpha$$

y de aquí:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \omega - \operatorname{sen} \omega.$$

El ángulo ν depende directamente de la inclinación lateral κ , de tal modo que al girar la fotografía alrededor del eje de la cámara, es decir, al variar κ , varía en igual cantidad pero en sentido contrario el ángulo ν , o sea, que $d\kappa = -d\nu$; por consiguiente, sustituyendo este valor en la expresión anterior se tendrá:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} = -(\cos \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \omega - \operatorname{sen} \omega). \quad (3)$$

Además, en la figura 355 se tiene también:

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \omega \cos \sigma + \cos \omega \operatorname{sen} \sigma \cos \nu \quad (4)$$

y derivando en ω :

$$\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \cos \omega \cos \sigma - \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \sigma \cos \nu$$

de donde:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{\cos \omega \cos \sigma}{\cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \sigma \cos \nu}{\cos \beta}.$$

Para transformar esta expresión, se hace uso de las siguientes relaciones, deducidas de la figura 355:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \omega}{\cos \beta} &= \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \nu}, & \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \beta} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \nu} \\ \operatorname{sen} \omega \cos \nu &= \cot \sigma \cos \omega - \operatorname{sen} \nu \cot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Y mediante las transformaciones y reducciones necesarias resulta:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{\operatorname{sen} \gamma \cos \sigma}{\operatorname{sen} \nu} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \omega \cot \sigma}{\operatorname{sen} \nu} + \cos \alpha.$$

Pero como en el mismo triángulo se tiene también

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \sigma}$$

resulta finalmente:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \cos \alpha. \quad (6)$$

Volviendo a la ecuación (4) tendremos, derivando en ν :

$$\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \nu} = -\cos \omega \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \nu$$

y según la segunda de las ecuaciones (5), resultan por sustitución y reducción:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = -\cos \omega \operatorname{sen} \alpha$$

o sea

$$\frac{\partial \beta}{\partial \kappa} = \cos \omega \operatorname{sen} \alpha. \quad (7)$$

Por medio de las derivadas (2), (3), (6) y (7) se pueden calcular los errores de α y β en función de $\Delta \omega$ y $\Delta \kappa$, a saber:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} \Delta \kappa \\ \Delta \beta &= \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \beta}{\partial \kappa} \Delta \kappa \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

y sustituyendo en estas expresiones los valores de las derivadas que figuran en los segundos miembros se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= \text{sen } \alpha \text{ tg } \beta \Delta \omega - (\cos \alpha \text{ tg } \beta \cos \omega - \text{sen } \omega) \Delta \kappa \\ \Delta \beta &= \cos \alpha \Delta \omega + \text{sen } \alpha \cos \omega \Delta \kappa \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Partiendo de los valores aproximados (ω) y (κ), supongamos que se miden con el teodolito comparador los ángulos acimutales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y los ángulos de altura $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ correspondientes a los tres puntos permanentes. Con los tres primeros pueden calcularse, mediante las fórmulas de la trisección, las distancias horizontales s_1, s_2, s_3 entre el punto de estación y los tres puntos permanentes. Si las alturas de estos tres puntos son z_1, z_2, z_3 , tendremos para la altura z del punto de estación los tres valores siguientes:

$$\left. \begin{aligned} z &= z_1 + s_1 \text{ tg } \beta_1 \\ z &= z_2 + s_2 \text{ tg } \beta_2 \\ z &= z_3 + s_3 \text{ tg } \beta_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Estos tres valores no son idénticos, a causa de que tanto las distancias s como los ángulos de altura β , no son exactos, por no serlo los valores provisionales (aproximados) de las inclinaciones longitudinal y lateral. Admitiendo que el efecto producido por el error $\Delta \alpha$ sobre las distancias s no es apreciable, vamos a deducir de las tres ecuaciones (10) el verdadero valor de z , sumando a los ángulos de altura β sus correcciones correspondientes (9). Por ejemplo, para el primer valor de z se tendrá:

$$z = z_1 + s_1 \text{ tg } (\beta_1 + \Delta \beta_1)$$

o sea

$$z = z_1 + s_1 \text{ tg } \beta_1 + \frac{s_1}{\cos^2 \beta_1} \Delta \beta_1$$

y sustituyendo $\Delta \beta$ por su valor (9), y repitiendo estas operaciones para los otros dos valores de z , tendremos:

$$\left. \begin{aligned} z &= z_1 + s_1 \text{ tg } \beta_1 + \frac{s_1 \cos \alpha_1}{\cos^2 \beta_1} \Delta \omega + \frac{s_1 \text{ sen } \alpha_1 \cos \omega}{\cos^2 \beta_1} \Delta \kappa \\ z &= z_2 + s_2 \text{ tg } \beta_2 + \frac{s_2 \cos \alpha_2}{\cos^2 \beta_2} \Delta \omega + \frac{s_2 \text{ sen } \alpha_2 \cos \omega}{\cos^2 \beta_2} \Delta \kappa \\ z &= z_3 + s_3 \text{ tg } \beta_3 + \frac{s_3 \cos \alpha_3}{\cos^2 \beta_3} \Delta \omega + \frac{s_3 \text{ sen } \alpha_3 \cos \omega}{\cos^2 \beta_3} \Delta \kappa \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Con estas tres ecuaciones se pueden ya calcular las dos correcciones $\Delta \omega$ y $\Delta \kappa$, y la altura z del punto de estación. Sus resultados deben considerarse como valores aproximados, pues como ya hemos indicado, se desprecia el error que $\Delta \omega$ y $\Delta \kappa$ producen sobre las distancias s .

Con los valores aproximados de las distancias así calculadas se pueden también hallar los valores aproximados de las coordenadas horizontales x, y .

También se puede obtener una segunda aproximación para las variables que hay que calcular, partiendo de los valores de ω y κ ya corregidos la primera vez en la medición con el teodolito comparador, y repitiendo de nuevo los cálculos anteriores. Este procedi-

miento fué propuesto por T. Fischer, y dado a conocer por C. Pulfrich en su estudio sobre fotogrametría aérea y sus instrumentos, publicado en Jena en 1919; también fué expuesto por T. Fischer en su trabajo sobre el cálculo del problema de trisección en los levantamientos aéreos, y sobre la precisión obtenida con el teodolito comparador de Pulfrich (Jena, 1921). Nosotros empleamos las ecuaciones (11) sólo para determinar valores aproximados de las inclinaciones ω y κ , y a continuación vamos a indicar una solución exacta del problema.

§ 103. Solución general del problema de la trisección en el espacio.

Hemos supuesto antes que se conocían los valores aproximados del ángulo de inclinación longitudinal (ω), del ángulo de inclinación lateral (κ), de las coordenadas (x), (y), (z) del punto de estación, y de la orientación (φ_0) (ángulo acimutal) del eje o dirección principal de la fotografía.

Con el teodolito comparador se miden el ángulo horizontal α y el de altura β de tres puntos permanentes cuando menos. Para tratar el problema en su mayor generalización, vamos a suponer que se toman más de tres puntos, de modo que será necesario hacer una compensación.

Designemos con el símbolo $\Delta \alpha$ el error de las distintas direcciones, a causa de la falta de exactitud de (ω) y de (κ); y con v los errores residuales que habrá que determinar por compensación, de modo que las direcciones exactas serán:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \Delta \alpha_1 + v_1 \\ \alpha_2 + \Delta \alpha_2 + v_2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Por otra parte, si llamamos $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ a los ángulos acimutales exactos de los diferentes rayos, en el sistema de coordenadas, y φ_0 al ángulo acimutal de la dirección principal de la fotografía, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \alpha_1 + \Delta \alpha_1 + v_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_0 + \alpha_2 + \Delta \alpha_2 + v_2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

De los valores aproximados de las coordenadas (x), (y) pueden deducirse los también aproximados de los ángulos acimutales (φ_1), (φ_2)... Sean Δx y Δy los errores de las coordenadas aproximadas, y se tendrá (tomo I, pág. 442):

$$\varphi_1 = (\varphi_1) + \frac{\text{sen } (\varphi_1)}{s_1} \rho \Delta x - \frac{\cos (\varphi_1)}{s_1} \rho \Delta y. \quad (2)$$

Si $\Delta \varphi_0$ es el error del ángulo acimutal de la dirección principal de la fotografía, el valor exacto de aquél será:

$$\varphi_0 = (\varphi_0) + \Delta \varphi_0. \quad (3)$$

Sustituyendo los valores (2) y (3) en (1), tendremos como primera ecuación de errores:

$$(\varphi_1) + \frac{\text{sen } (\varphi_1)}{s_1} \rho \Delta x - \frac{\cos (\varphi_1)}{s_1} \rho \Delta y = (\varphi_0) + \Delta \varphi_0 + \alpha_1 + \Delta \alpha_1 + v_1. \quad (4)$$

Y según la fórmula (9) de la página 428:

$$\Delta \alpha_1 = \text{sen } \alpha_1 \text{ tg } \beta_1 \Delta \omega - (\cos \alpha_1 \text{ tg } \beta_1 \cos \omega - \text{sen } \omega) \Delta \kappa. \quad (5)$$

Además de los tres puntos permanentes se pueden emplear otros puntos cualesquiera del terreno para la orientación de las dos fotografías, no siendo necesario que se conozcan con toda exactitud las tres coordenadas de estos puntos auxiliares. Con el empleo de estos puntos se eleva el grado de precisión con que se determina la orientación de las dos fotografías.

Pero también se puede prescindir, en un principio, del empleo de los puntos fijos o permanentes, y limitarse a orientar entre sí las dos fotografías de tal modo, que las intersecciones de los rayos que en una y otra se corresponden, produzcan una imagen en relieve del terreno en cuestión, aunque no se obtenga así la orientación respecto al sistema de coordenadas del levantamiento topográfico terrestre. La escala a que resulta la vista en relieve es completamente arbitraria.

Después hay que referir esta vista al sistema de coordenadas, y es evidente que para ello hay que conocer las tres coordenadas (abscisa, ordenada y cota) de dos puntos, y la cota de un tercero.

Vamos a ocuparnos primeramente de la orientación recíproca de dos vistas.

El punto de estación de la primera vista y la imagen en ésta del segundo punto de estación, imagen que es el punto límite de la primera fotografía, determinan el eje límite de ambas vistas (§ 86, pág. 360). Cuando las dos vistas están bien orientadas, los dos puntos de estación y los puntos límites de ambas caen sobre el eje límite; además, se deben girar las dos vistas alrededor de este eje de tal modo que coincidan los planos límites correspondientes.

Empecemos por dar a las dos vistas una orientación aproximada, ya que aproximadamente también se conocen los elementos que la definen φ_0 , ω , κ y φ_0' , ω' , κ' . Para ello consideremos el primer punto de estación O como origen de un sistema de coordenadas x, y, z , y tomemos los ángulos acimutales φ_0 y φ_0' de tal manera que la dirección cero, es decir, el eje de las x , coincida aproximadamente con la dirección de la base. Después podemos ya montar una tras otra las dos vistas en el teodolito comparador, por medio de los valores de ω, κ y ω', κ' respectivamente, y determinaremos así los ángulos acimutales α y los ángulos de altura β correspondientes a puntos cualesquiera de las fotografías. Considerando como constantes los elementos de orientación φ_0, ω y κ de la primera vista, con lo cual también será invariable el ángulo acimutal del eje límite que parte de O , habrá que aplicar una corrección a la orientación de la segunda fotografía.

En primer lugar hay que mover el punto de vista O' según las correcciones $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, de modo que caiga sobre el eje límite. Para ello puede suponerse igual a cero uno de estos

tres incrementos, el Δx por ejemplo, y así basta con tener en cuenta las correcciones Δy y Δz para llevar O' sobre el eje límite. Tomando para Δx un valor cualquiera, se variaría la escala de la vista en relieve. Después hay que determinar unas correcciones $\Delta \varphi_0', \Delta \omega'$ y $\Delta \kappa'$ tales, que se corten todos los pares de rayos correspondientes.

Es decir, que para la orientación recíproca o relativa de las dos vistas, es preciso conocer las cinco correcciones $\Delta y, \Delta z, \Delta \varphi_0', \Delta \omega'$ y $\Delta \kappa'$, que deben suponerse, desde luego, muy pequeñas.

Sean O y O' los dos puntos de estación (fig. 356), situados a distancia b uno de otro, y sea P la proyección sobre el plano de las xy , de un punto cualquiera del terreno, cuyas coordenadas x, y, z deben conocerse aproximadamente. Los ángulos φ_0 y φ_0' son las direc-

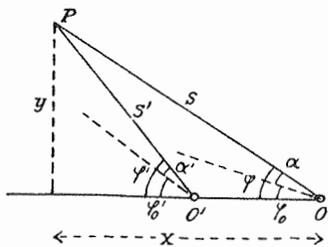


Fig. 356

ciones acimutales de las dos vistas, cuyas inclinaciones respecto al plano de las xy son respectivamente ω y ω' . Los ángulos acimutales de las visuales a P medidos con el teodolito comparador son α y α' , y los ángulos de altura respectivos son β y β' medidos también de igual manera.

Por lo tanto, la altura z del punto P sobre el plano de las xy vendrá dada por los dos valores siguientes:

$$z = s \operatorname{tg} \beta = s' \operatorname{tg} \beta'. \tag{1}$$

Pero, en la figura 356, se tiene:

$$s = b \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\operatorname{sen} (\varphi' - \varphi)}, \quad s' = b \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} (\varphi' - \varphi)}$$

y sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$z = b \frac{\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{sen} (\varphi' - \varphi)} = b \frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{sen} (\varphi' - \varphi)}$$

o también:

$$z = b \frac{\operatorname{sen} (\varphi_0' + \alpha') \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{sen} (\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha)} = b \frac{\operatorname{sen} (\varphi_0 + \alpha) \operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{sen} (\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha)}. \tag{2}$$

Esta igualdad entre las dos expresiones de z desaparece al aplicar a la orientación de las dos fotografías las cinco correcciones antes indicadas; llamando F a la diferencia entre dichas expresiones (2), producida por la falta de exactitud en la orientación, se tendrá:

$$b \frac{\operatorname{sen} (\varphi_0 + \alpha) \operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{sen} (\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha)} - b \frac{\operatorname{sen} (\varphi_0' + \alpha') \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{sen} (\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha)} = F \tag{3}$$

y designando con ΔF el error total debido a las cinco correcciones, tendremos:

$$F + \Delta F = 0 \tag{4}$$

donde

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial F}{\partial \varphi_0'} \Delta \varphi_0' + \frac{\partial F}{\partial \omega'} \Delta \omega' + \frac{\partial F}{\partial \kappa'} \Delta \kappa'. \tag{5}$$

Vamos a estudiar una tras otra las cinco derivadas que figuran en esta ecuación.

1. La corrección Δy hace que varíen las distancias horizontales s y s' , como se ve

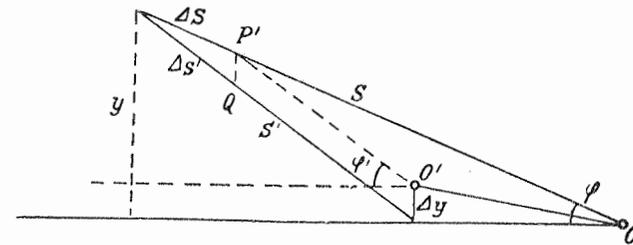


Fig. 357

en la figura 357, en los valores $-\Delta s$ y $-\Delta s'$, y por consiguiente, en vez de la fórmula (1) tendremos esta otra:

$$z = s \operatorname{tg} \beta - \Delta s \operatorname{tg} \beta = s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s' \operatorname{tg} \beta'$$

o sea

$$s' \operatorname{tg} \beta' - s \operatorname{tg} \beta - (\Delta s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s \operatorname{tg} \beta) = 0.$$

De donde:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y = -(\Delta s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s \operatorname{tg} \beta).$$

Ahora bien, en la figura 357, la tangente del ángulo de inclinación de QP' sobre el plano de las xy es igual a $\frac{z}{y}$, y como $QP' = \Delta y$, se tendrá:

$$\Delta s' \operatorname{tg} \beta' = \frac{z}{y} \Delta y + \Delta s \operatorname{tg} \beta$$

o sea

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{z}{y} \tag{6}$$

2. El efecto producido por Δz se deduce directamente, ya que en vez de la ecuación (1) tendremos esta otra:

$$z = s \operatorname{tg} \beta = \Delta z + s' \operatorname{tg} \beta'$$

de donde:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z = \Delta z \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1. \tag{7}$$

3. Para hallar el valor de la derivada $\frac{\partial F}{\partial \varphi_0'}$ observemos que el segmento s' (fig. 358) gira en un ángulo $\Delta \varphi_0' = \Delta \varphi'$, y el punto P pasa, en consecuencia, a ocupar la posición P' ; según la ecuación (1) se tendrá, en este caso:

$$z = s \operatorname{tg} \beta - \Delta s \operatorname{tg} \beta = s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s' \operatorname{tg} \beta'$$

o sea

$$s' \operatorname{tg} \beta' = s \operatorname{tg} \beta - (\Delta s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s \operatorname{tg} \beta) = 0.$$

Pero, según la figura 358,

$$QQ' = PQ \frac{x-b}{s'}$$

y puesto que $PQ' = s' \Delta \varphi_0'$, se tiene $QQ' = (x-b) \Delta \varphi_0'$.

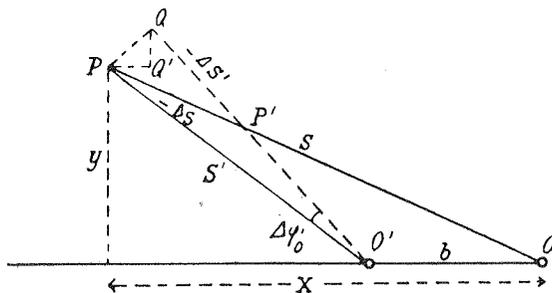


Fig. 358

La tangente del ángulo que forma el plano $OO'P$ con el plano de las xy , es $\frac{z}{y}$, y por lo tanto,

$$\Delta s' \operatorname{tg} \beta' - \Delta s \operatorname{tg} \beta = QQ' \frac{z}{y} = \frac{(x-b)z}{y} \Delta \varphi_0'$$

y de aquí:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_0'} = -\frac{(x-b)z}{y} \tag{8}$$

4 y 5. En la fórmula (3) no entran directamente las magnitudes ω' y κ' , pero sí las α' y β' que son función de aquéllas; tendremos, por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega'} &= \frac{\partial F}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \omega'} + \frac{\partial F}{\partial \beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \omega'} \\ \frac{\partial F}{\partial \kappa'} &= \frac{\partial F}{\partial \alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \kappa'} + \frac{\partial F}{\partial \beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \kappa'} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Y puesto que en la fórmula (3), el ángulo α' sólo entra en unión con el φ_0' , se tiene que $\frac{\partial F}{\partial \alpha'} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_0'}$, luego según (8):

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha'} = -\frac{(x-b)z}{y} \tag{10}$$

Y de la misma fórmula (3) se deduce directamente:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta'} = b \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} (\varphi' - \varphi) \cos^2 \beta} = \frac{s}{\cos^2 \beta} \tag{11}$$

Por último, de las fórmulas (2), (3), (6) y (7) del § 102, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha'}{\partial \omega'} &= \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{tg} \beta' & \frac{\partial \beta'}{\partial \omega'} &= \cos \alpha' \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial \kappa'} &= -\operatorname{tg} \beta' \cos \alpha' \cos \omega' + \operatorname{sen} \omega' & \frac{\partial \beta'}{\partial \kappa'} &= \operatorname{sen} \alpha' \cos \omega' \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Sustituyendo los valores (10), (11) y (12) en (9) se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega'} = -\frac{(x-b)z}{y} \operatorname{sen} \alpha' \operatorname{tg} \beta' + s \frac{\cos \alpha'}{\cos^2 \beta} \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa'} = +\frac{(x-b)z}{y} (\operatorname{tg} \beta' \cos \alpha' \cos \omega' - \operatorname{sen} \omega') + s \frac{\operatorname{sen} \alpha' \cos \omega'}{\cos^2 \beta} \tag{14}$$

Si se sustituyen los valores de las derivadas, dados por las fórmulas (6), (7), (8), (13) y (14) en la (5), tendremos el valor de ΔF en función de cantidades conocidas. Vamos a limitarnos al caso, tan sencillo, de dos vistas horizontales (eje de la cámara vertical), tomadas a igual altura sobre el suelo. Las fórmulas deducidas para este caso son aplicables, con ligeras variaciones, a los levantamientos casi verticales de alturas aproximadamente iguales.

En este supuesto, se tiene que $\varphi_0 = \varphi_0' = 90^\circ$, y $\omega = \omega' = 0$, y por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \alpha' = -\frac{x-b}{s'}, \quad \cos \alpha' = \frac{y}{s'}$$

Y como

$$\frac{1}{\cos^2 \beta'} = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta' = 1 + \frac{z^2}{s'^2}$$

se tiene, sustituyendo en (13) y (14):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega'} &= \frac{(x-b)^2 z^2}{y s'^2} + \frac{y^2 z^2}{y s'^2} + y = y + \frac{z^2}{y} \\ \frac{\partial F}{\partial \kappa'} &= \frac{(x-b) z^2}{s'^2} - (x-b) \left(1 + \frac{z^2}{s'^2}\right) = -(x-b) \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Luego para los levantamientos horizontales se tiene, según las fórmulas (4) y (5):

$$F - \frac{z}{y} \Delta y + \Delta z - \frac{(x-b)z}{y} \Delta \varphi_0' + \left(y + \frac{z^2}{y}\right) \Delta \omega' - (x-b) \Delta \kappa' = 0. \tag{16}$$

Los coeficientes de las cinco incógnitas pueden calcularse conociendo, como se ha supuesto, los valores aproximados de las coordenadas del punto del terreno. El término independiente se calcula con la fórmula (3), y de este modo tenemos en (16) una ecuación en que sólo se desconocen los cinco incrementos o correcciones Δy , Δz , $\Delta \varphi_0'$, $\Delta \omega'$ y $\Delta \kappa'$.

Tomando otros cuatro puntos del terreno, convenientemente elegidos, se forman otras tantas ecuaciones análogas a la (16), y de las cinco ecuaciones obtenidas en total pueden ya calcularse las cinco incógnitas propuestas.

Si se emplean más de cinco puntos del terreno para la orientación recíproca de las dos vistas, se puede hacer una compensación por el método de los mínimos cuadrados, empleando las fórmulas (16) correspondientes. Para ello, empecemos por sumar a las cuatro magnitudes medidas $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ que entran en F , sus respectivos errores residuales que llamaremos v, v', λ, λ' ; en vez del término independiente $F(3)$, tendremos ahora:

$$b \frac{\text{sen}(\varphi_0 + \alpha + v) \text{tg}(\beta' + \lambda')}{\text{sen}(\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha + v' - v)} - b \frac{\text{sen}(\varphi_0' + \alpha' + v') \text{tg}(\beta + \lambda)}{\text{sen}(\varphi_0' - \varphi_0 + \alpha' - \alpha + v' - v)}$$

o sea

$$F + \frac{\partial F}{\partial \alpha} v + \frac{\partial F}{\partial \alpha'} v' + \frac{\partial F}{\partial \beta} \lambda + \frac{\partial F}{\partial \beta'} \lambda'$$

Donde se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_0} = \frac{xz}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha'} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_0'} = -\frac{(x-b)z}{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = -\frac{s}{\cos^2 \beta}, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta'} = \frac{s'}{\cos^2 \beta'}$$

Es decir, que en vez de la ecuación (16) tendremos ahora la siguiente ecuación de errores:

$$F + \frac{xz}{y} v - \frac{(x-b)z}{y} v' - \frac{s}{\cos^2 \beta} \lambda + \frac{s'}{\cos^2 \beta'} \lambda' - \frac{z}{y} \Delta y + \Delta z - \left. \begin{aligned} - \frac{(x-b)z}{y} \Delta \varphi_0' + \left(y + \frac{z^2}{y}\right) \Delta \omega' - (x-b) \Delta \alpha' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

En esta ecuación se suponen iguales los pesos de las cuatro observaciones o mediciones.

Ahora bien, en cada ecuación de errores entrarán otros errores residuales, por lo cual no es posible determinar por compensación de los cuatro valores v, v', λ, λ' , todas las ecuaciones de errores. En este caso, es más conveniente reunir todos los términos en que entren errores residuales, en uno solo, que designaremos con la letra σ , es decir:

$$\frac{xz}{y} v - \frac{(x-b)z}{y} v' - \frac{s}{\cos^2 \beta} \lambda + \frac{s'}{\cos^2 \beta'} \lambda' = \sigma$$

y el peso de este error σ es igual a la inversa de la suma de los cuadrados de los cuatro coeficientes de v, v', λ, λ' . La ecuación de errores se convierte así en esta otra:

$$\sigma = -F + \frac{z}{y} \Delta y - \Delta z + \frac{(x-b)z}{y} \Delta \varphi_0' - \left(y + \frac{z^2}{y}\right) \Delta \omega' + (x-b) \Delta \alpha' \left. \begin{aligned} \text{Peso } p = \frac{1}{\left(\frac{z}{y}\right)^2 + 1 + \left(\frac{(x-b)z}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{z^2}{y}\right)^2 + (x-b)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Orientación absoluta de la vista en relieve. Las coordenadas que hasta aquí se han determinado, se refieren a un sistema arbitrario, con una escala también arbitraria. Ahora se trata de fijar los puntos en el sistema de coordenadas X, Y, Z topográficas del terreno. La reducción de la escala de la vista en relieve a la escala propuesta para el mapa, se consigue tomando en la primera dos puntos, a la mayor distancia posible el uno del otro, y cuyas coordenadas topográficas sean conocidas. La relación entre las distancias, en ambos sistemas, da el factor de reducción por el cual hay que multiplicar todas las coordenadas x, y, z .

Además, hay que girar la vista en relieve, hasta que la recta de unión de dos puntos cualesquiera de aquella, sea paralela a la recta que una los puntos correspondientes del terreno. Conviene escoger tres puntos de la vista en relieve, cuyas coordenadas topográficas

en el terreno sean conocidas, para hallar el eje alrededor del cual hay que hacer girar el plano del triángulo determinado por aquéllos, para que coincida con el plano del triángulo que determinan en el terreno.

Para esto hay que partir de la hipótesis de que el ángulo de giro ha de ser pequeño, ya que se supone que la vista en relieve se ha orientado aproximadamente. Vamos, además, a suponer que el triángulo del terreno está muy poco inclinado sobre el horizonte. Imaginemos ahora los dos sistemas de coordenadas con tal orientación relativa, que el plano de las XY coincida con el de las xy , y que uno de los lados del triángulo, por ejemplo, el 1-2, tenga igual ángulo acimutal en ambos sistemas. Por ser conocidas las diferencias $z - Z = \Delta z$ para los tres puntos de la vista en relieve y del terreno, queda reducida la determinación de la línea de intersección de ambos planos a un sencillo problema de Geometría descriptiva, cuya solución se ve en la figura 359. Mediante una construcción muy fácil se obtienen los dos puntos (1,2) y (2,3) (y también un tercero no representado en la figura), que determinan la línea de intersección buscada; al mismo tiempo se obtiene el ángulo Δv , que tiene que girar el triángulo de la vista en relieve.

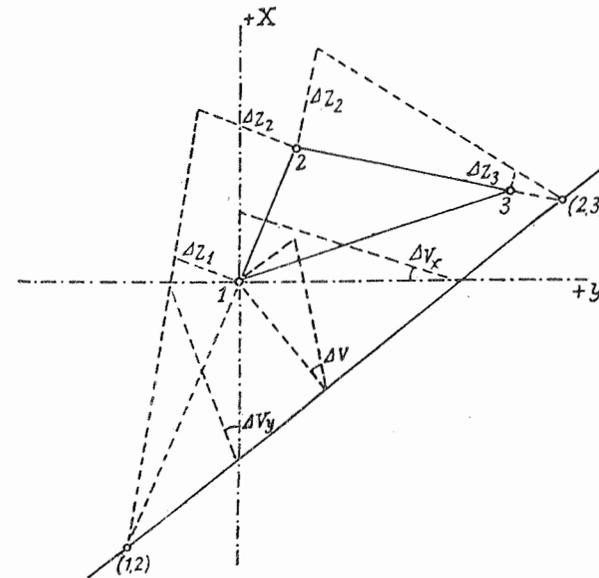


Fig. 359

Más importantes que el ángulo Δv , son sus dos componentes Δv_x y Δv_y , cuya determinación se ve también en la figura 359: el triángulo de la vista en relieve debe girar alrededor del eje de las X en el ángulo Δv_x , y alrededor del eje de las Y en el ángulo Δv_y .

El cálculo de la rotación de este triángulo consiste en una transformación de coordenadas en el espacio, siguiendo las leyes de la Geometría analítica. En el caso de conocerse más de tres puntos de apoyo, se hace una compensación. Con todo detalle se halla descrita esta teoría en el *Cursillo de Fotogrametría* de Gruber.

En los párrafos 102 a 104 hemos tratado del problema de la orientación exterior de las vistas aéreas, así como de la orientación relativa o recíproca de dos vistas, con el suficiente detalle para hacer posible su aplicación práctica. Sin embargo, debemos advertir que en la práctica de la Fotogrametría, estas resoluciones y procedimientos analíticos son sustituidos por los métodos óptico-mecánicos de orientación, tan precisos como sencillos, gracias a los restituidores. No obstante, constituyen una ayuda muy valiosa para la realización de estos métodos, los conocimientos teóricos que hasta aquí hemos expuesto, por lo cual volveremos sobre ellos más adelante.

En un estudio de Koppmair sobre la solución general del problema fundamental de la Fotogrametría, publicado en las «Allgem. Verm. Nachr.», 1931, se encuentra un método de orientación relativa de vistas aéreas, fundado en el mismo principio de las proyecciones estereográficas de ambas fotografías que el método de Kell antes citado (§ 103, página 431). Al final de la memoria se ve un aparato construido por el autor y basado en dicho principio.

Triangulación aérea. El método de la orientación recíproca o relativa de dos fotografías aéreas puede extenderse a toda una serie de vistas con tal que cada dos consecutivas se superpongan, por lo menos, en un 50 %. Después de obtener una vista en relieve con las dos primeras fotografías, se va uniendo a la segunda la tercera, y así sucesivamente hasta tener una vista de conjunto de gran extensión longitudinal. Teóricamente basta con el apoyo de una de las fotografías en tres puntos fijos del terreno, para que toda la vista en relieve quede referida al sistema de coordenadas topográficas. Pero resulta muy conveniente orientar la primera y la última fotografía sobre puntos conocidos del terreno, y cuando los levantamientos son muy numerosos deben también referirse al terreno algunas fotografías intermedias.

También puede hacerse esta triangulación en otra forma: suponiendo primero que se orientan entre sí dos fotografías y que se refieren a un sistema cualquiera de coordenadas en el espacio, se pueden ir determinando más nuevos puntos del terreno con estas dos vistas, por el método de intersección directa. Sobre estos últimos puntos se apoya un nuevo par de fotografías, después de haberlas reunido en una vista en relieve del modo ya sabido. Se continúan estas operaciones hasta referir todos los pares de fotografías al sistema de coordenadas elegido, y la vista de conjunto resultante se refiere después al sistema de coordenadas topográficas del terreno.

Estos dos métodos han dado excelentes resultados para unir terrenos separados por una zona de pocos kilómetros, en que no se disponga de puntos fijos; pero todavía no ha podido hacerse extensivo a grandes distancias.

En la obra de W. Kuny sobre triangulación sin puntos fijos por medio de fotografías aéreas (Stuttgart, 1932) se encuentra un ejemplo de esta clase de triangulaciones aéreas. Las fotografías corresponden a una faja de terreno de unos 9 Km de longitud por 2 Km de anchura, dentro de la cual se habían situado muchos puntos topográficamente. La cámara empleada era una cinematográfica de Zeiss (§ 93, figura 324), de 21 cm de distancia focal, con la cual se hizo el levantamiento desde unos 3000 m de altura, con una cobertura de un 75 % entre las vistas consecutivas. En total se tomaron 42 vistas, en tres vuelos.

Para el estudio y restitución de las fotografías se conocían, al principio, la orientación interior de la cámara y la altura aproximada de vuelo; además, el nivel esférico quedaba fotografiado al mismo tiempo que el terreno, y así se tenía un valor aproximado de la inclinación de cada vista.

El transporte o desarrollo del levantamiento se hacía con el estereoplanígrafo (§ 108) por el segundo de los métodos anteriores, llegándose a determinar las coordenadas de todos los puntos en un sistema arbitrario; el plano así obtenido se pasaba al sistema de coordenadas topográficas por medio del cálculo, valiéndose de los puntos dados (setenta en total). La diferencia entre los puntos de aquel plano y los puntos conocidos daban idea de la precisión con que se habían determinado los puntos, y facilitaban el modo de calcular el error medio de las coordenadas. Haciendo la compensación por el método de los mínimos cuadrados se obtuvieron los siguientes errores medios:

$$m_x = \pm 1,92 \text{ m} \quad m_y = \pm 1,92 \text{ m} \quad m_z = \pm 1,51 \text{ m}.$$

Estos resultados no pueden ser más satisfactorios; sin embargo, el autor hace resaltar el trabajo verdaderamente extraordinario que representa una triangulación aérea de esta clase, solamente factible, en la práctica, cuando el paso de las coordenadas arbitrarias a las topográficas terrestres puede hacerse por métodos gráficos de sencilla aplicación.

La teoría de la triangulación aérea se encuentra ampliamente desarrollada en la memoria de M. Zeller sobre los levantamientos con cámara doble y reducción con el autógrafa de Wild, publicada en las «Schweiz. Zeitschr. f. Verm.» de 1932.

§ 105. proyectores dobles

Una vez resuelto el problema de determinar la orientación exterior de las vistas aéreas, puede decirse que la fotogrametría aérea ha quedado reducida a la terrestre, siendo aplicables a aquella los medios auxiliares descritos en el párrafo 85 para el estudio y medición de las fotografías. Pero tratándose de levantamientos de grandes extensiones, para los cuales está especialmente indicada la fotogrametría aérea, no resultan prácticos estos medios auxiliares tan sencillos, por lo cual, desde los comienzos de este siglo, se ha venido procurando la construcción de aparatos especiales para la medición y desarrollo mecánico y automático de las vistas aéreas.

Corresponden los primeros ensayos a las ideas expuestas por el ingeniero austriaco Teodoro Scheimpflug en 1898 sobre la utilización de las fotografías para la construcción de planos y mapas («Photogr. Korr.», tomo 35, 1898).

El más importante de todos los experimentos fué el representado en la figura 360, consistente en colocar sobre una mesa o tablero dos cámaras fotográficas iguales, que se sujetaban de modo que no pudieran moverse, y con las cuales se retrataba la maqueta de una casa o de un terreno; una vez reveladas las placas se volvían a poner en su sitio y se iluminaban a través de lentes condensadoras C, C' con dos focos potentes L y L' de tal modo que los objetivos fotográficos A y B hicieran de objetivos de proyección.

Se retiraba entonces el objeto y en su lugar se colocaba una pantalla sobre la cual se veían dos imágenes, que se superponían o coincidían en los puntos de intersección del plano de la pantalla con el objeto; moviendo la pantalla paralelamente a sí misma se podía dibujar para cada una de sus posiciones la intersección resultante, obteniéndose así secciones verticales y horizontales del objeto fotografiado.

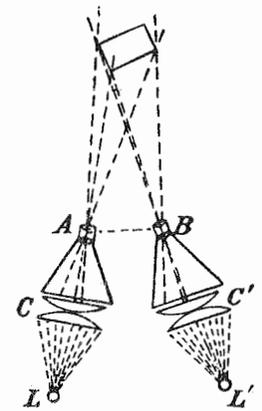


Fig. 360

Aparato de doble proyección de Gasser. Esta idea genial de Scheimpflug fué puesta en práctica por Gasser, para el desarrollo de fotografías aéreas aproximadamente horizontales, sin agregar ningún concepto realmente nuevo, construyendo su doble proyector, según patente adquirida en 1915. Según las publicaciones de la Sociedad Inag (Internationale Aero-Geodetische A. G.), que explotó dicha patente, la orientación exterior de las fotografías se determinaba por resolución analítica del problema de la pirámide o trisección en el espacio. Hecho esto se colocaban las dos vistas en sendos aparatos de proyección, orientadas de tal modo (según los resultados del cálculo anterior) que ocuparan la misma posición relativa que tenían al hacerse el levantamiento desde el aire. Las imágenes proyectadas eran recogidas sobre una pantalla horizontal, que podía moverse paralelamente a sí misma en sentido vertical, y sobre la cual podían dibujarse las secciones horizontales del terreno, es decir, las curvas de nivel, y los objetos situados en el mismo.

Para comprobar la exactitud en la orientación de las vistas se situaban de antemano en la pantalla de proyección algunos puntos conocidos en posición y altura, y se veía si

concordaban con sus respectivas proyecciones. Posteriormente se ha extendido esta comprobación a todos los aparatos transportadores, constituyendo realmente un método de orientación según el cual pueden colocarse las fotografías en su verdadera posición por medio de comprobaciones sistemáticas de esta clase.

La figura 361 representa esquemáticamente, prescindiendo de todo detalle, el proyector doble de Gasser: en el techo de la habitación va fijado un carril de hierro, sobre el cual pueden correrse los dos soportes de los proyectores; el plano imagen de cada proyector es vertical y puede girar alrededor de un eje también vertical; además, el proyector de la derecha puede correrse un poco en sentido vertical. La orientación de los rayos proyectantes respecto a la vertical se realiza por medio de dos espejos situados por delante de los objetivos y cada uno de ellos giratorio alrededor de un eje horizontal.

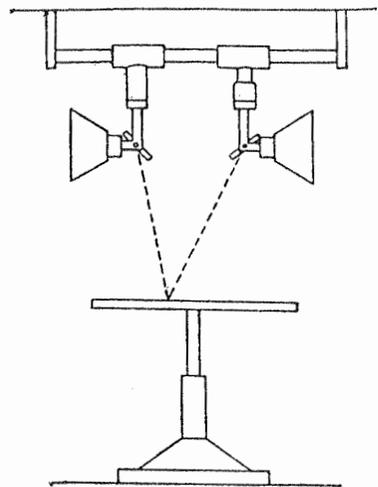


Fig. 361

El tablero de proyección descansa sobre un pie muy sólido y puede subirse o bajarse a voluntad.

La identificación y el trazado de la curva de nivel correspondiente a una altura cualquiera del tablero se facilita considerablemente por el método llamado de centelleo; para su aplicación lleva cada objetivo por delante un obturador que un motor hace abrirse y cerrarse alternativamente, de tal manera que los puntos de la imagen proyectada que no corresponden exactamente a la altura

del tablero *centellean*, es decir, aparecen y desaparecen, mientras que todos los puntos de la curva de nivel permanecen con igual brillo y fijeza.

También puede emplearse el tablero en posición fija, utilizándose para las diferentes alturas unos índices (consistentes en discos pequeños) montados sobre un trípode, cuya altura puede variarse a voluntad: el centro del disco se proyecta con un lápiz, por dentro del trípode, sobre el tablero, y así se va dibujando la curva de nivel. La observación de la imagen proyectada queda así reducida a la parte correspondiente a la pequeña superficie del disco empleado.

Fotocartógrafo de Nistri. Partiendo del mismo principio de Scheimpflug, construyó en 1922 un doble proyector el italiano U. Nistri, ayudado por su hermano A. Nistri. La única diferencia que presenta este aparato de doble proyección con el de Gasser consiste en la disposición de sus partes; la pantalla de proyección es vertical en vez de ser horizontal como en aquél. Las fotografías se colocan sin cálculo previo alguno, valiéndose de cuatro puntos dados en el terreno, cuya posición y altura se conocen. Para ello va provisto el aparato de cuatro pantallas pequeñas, que pueden correrse en dirección normal a la pantalla principal, es decir, en el sentido de las alturas de los puntos proyectados, y con las cuales pueden tomarse las cotas de los cuatro puntos dados. Sobre estas cuatro pantallas, en las cuales se habrán representado en posición (abscisa y ordenada) los puntos conocidos, deben proyectarse perfectamente limpias y nítidas las imágenes de estos puntos, y una vez conseguido esto, mediante el correspondiente ajuste de los dos aparatos de proyección, se tienen las dos fotografías en su posición correcta y con su verdadera orientación recíproca.

Para dibujar el mapa se emplea un índice, como en el aparato de Gasser, y cuyo

movimiento se transmite, por medio de un sistema especial de varillas, a un lápiz que va marcando sobre un papel horizontal.

Aparato de doble proyección de Gallus. Los dos aparatos anteriores emplean proyectores de distancia focal invariable, inconveniente de mucha importancia cuando se trata de terrenos con grandes desniveles, ya que no es posible en este caso obtener una proyección nítida de toda la fotografía. Esta dificultad fué vencida en 1928, con el nuevo aparato de doble proyección construido en los talleres franceses *Gallus*, en el cual ambos objetivos tienen distancia focal variable. Sobre el tablero de dibujo se mueve, en una cruceta, un índice, que por medio de varillas va unido a los dos objetivos; de este modo, la imagen proyectada se *enfoca* automáticamente sobre el índice en todas las posiciones que éste ocupe. Para facilitar la operación se emplea también aquí el método de centelleo, como en el aparato de Gasser.

Sobre el aparato de proyección de Gallus se encuentran algunas referencias y figuras en el tratado de Fotogrametría de Hegershoff (Viena, 1930), y en el «Intern. Archiv f. Photogramm.», tomo VII, 2.ª parte, 1931.

§ 106. El autocartógrafo de Hegershoff-Heyde

Con los aparatos de doble proyección antes descritos pueden dibujarse planos con más o menos facilidad, pero tratándose de levantamientos con vistas muy inclinadas, queda muy reducida su eficacia, y tampoco sirven para determinar los valores numéricos de las coordenadas y cotas de los puntos del terreno. Vamos ahora a ocuparnos de los aparatos construidos con miras a la resolución de todos estos problemas.

Primeramente se pensó en utilizar el estereoaquígrafo también para las vistas aéreas, y en el año 1913 construyó Sander un estereoaquígrafo especial, que fué el primer aparato para el transporte automático de fotografías aéreas. Después ha construido Sander aparatos análogos de forma distinta, que se hallan descritos con todo detalle en la memoria sobre el estereoaquígrafo de Orel y modificaciones del mismo, publicada en la «Zeitschr. f. Instr.» de 1921.

Pero todos estos ensayos fueron abandonados en vista de otras soluciones más convenientes, entre las cuales se destaca como principal la propuesta y realizada por Hegershoff.

Hegershoff partió de la unión de un teodolito comparador con una regla, para el trazado de direcciones acimutales, principio que ya en 1911 había utilizado Pulfrich para la construcción de un tablero comparador.

En el año 1919 construyó la casa Gustavo Heyde, de Dresden, bajo la dirección de Hegershoff, un aparato para transportar fotografías aéreas, es decir, para dibujar directamente el mapa, y que consistía, en esencia, en dos teodolitos comparadores montados sobre un tablero de dibujo (fig. 362); en las cámaras correspondientes podían colocarse dos fotografías en la misma posición relativa que tenían al hacerse el levantamiento, o sea, con idéntica dirección e igual inclinación que en el aire. Las alidadas de los teodolitos iban cada una unida a una regla que se movía sobre el tablero y cuyo borde coincidía con la proyección horizontal del eje óptico del antejo respectivo.

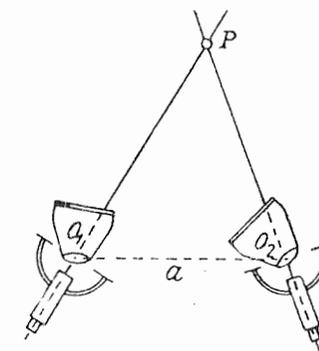


Fig. 362

Mirando con los anteojos las imágenes de un mismo punto del terreno, la posición de éste sobre el tablero venía dada por la intersección de los bordes de ambas reglas. La escala del plano obtenido estaba dada por la relación entre la distancia a que separaba a los teodolitos, y la distancia horizontal entre las cámaras al hacer las fotografías. El aparato estaba provisto, además, de un dispositivo para hacer la lectura de las cotas.

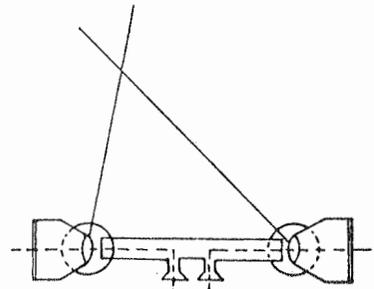


Fig. 363

Partiendo de este aparato, tan sencillo, construyó Hegershoff el *autocartógrafo*, que alcanzó su forma definitiva en 1920, aunque después ha sido objeto de varios perfeccionamientos. En primer lugar, si se quería obtener un rendimiento práctico de la idea representada en la figura 362, había que recurrir a la visión estereoscópica, de valor extraordinario en los estereoautógrafos aun para placas convergentes o divergentes. Para ello unió Hegershoff los dos anteojos en uno doble fijo, mientras que las cámaras estaban dispuestas de modo que podían hacerse girar a voluntad. La figura 363 representa el caso más sencillo de levantamientos horizontales; las dos cámaras se montan de tal manera, que los índices de los anteojos caigan sobre los puntos principales de las vistas, y al mismo tiempo las dos reglas se colocan en la dirección del levantamiento respectivo. Si en esta posición se unen rígidamente entre sí cámaras y reglas, es evidente que al girar las cámaras se obtiene el mismo efecto que con el dispositivo de la figura 362. Claro está que para colocar las reglas en esta primera dirección debe estar provisto el aparato de círculos acimutales, como se indica en la figura 363.

En vez del sencillo principio geométrico en que están fundados los dispositivos representados en las figuras 362 y 363, se introdujo en el autocartógrafo el paralelogramo de Zeiss, que ya vimos en la página 390 (fig. 318). Lo mismo que en el estereoautógrafo, resultó muy conveniente la adopción del dispositivo que permite colocar la base oblicuamente respecto al puente móvil. Supongamos que ambas fotografías están tomadas oblicuamente, y hacia el mismo lado de la base; para poner las reglas *en estación* sería necesario correr lateralmente el puente en una longitud muy grande; en este caso, se hace girar la base b (fig. 364), que arrastrará al manguito P_2 , de modo que forme con el puente un ángulo cualquiera φ , y además se hacen girar las dos cámaras en este mismo ángulo φ respecto a su posición primitiva. Se aprecia la exactitud de este dispositivo corriendo O_1P_1 paralelamente a sí mismo hasta O'_1P_2 ; el triángulo $O'_1O_2P_2$ corresponde a la posición del punto en el terreno, y se ve también que las dos vistas tienen, respecto a la base, la misma orientación que tenían al hacer el levantamiento desde el aire.

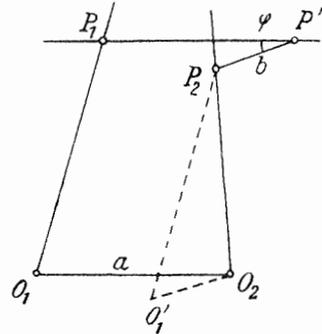


Fig. 364

El autocartógrafo. Después de expuesto el fundamento teórico en que se basa la construcción del autocartógrafo, vamos a describir el aparato, cuyos detalles están representados esquemáticamente en la figura 365.

Las dos cámaras o porta-vistas están de tal modo montadas que pueden girar alrededor de un eje vertical y de otro horizontal, los cuales pasan por el centro de los respectivos

objetivos. Las magnitudes angulares que miden estos giros se leen sobre limbos horizontales y verticales convenientemente dispuestos. Además, para el caso de vistas oblicuas (inclinación lateral) pueden hacerse girar las cámaras alrededor de sus propios ejes de

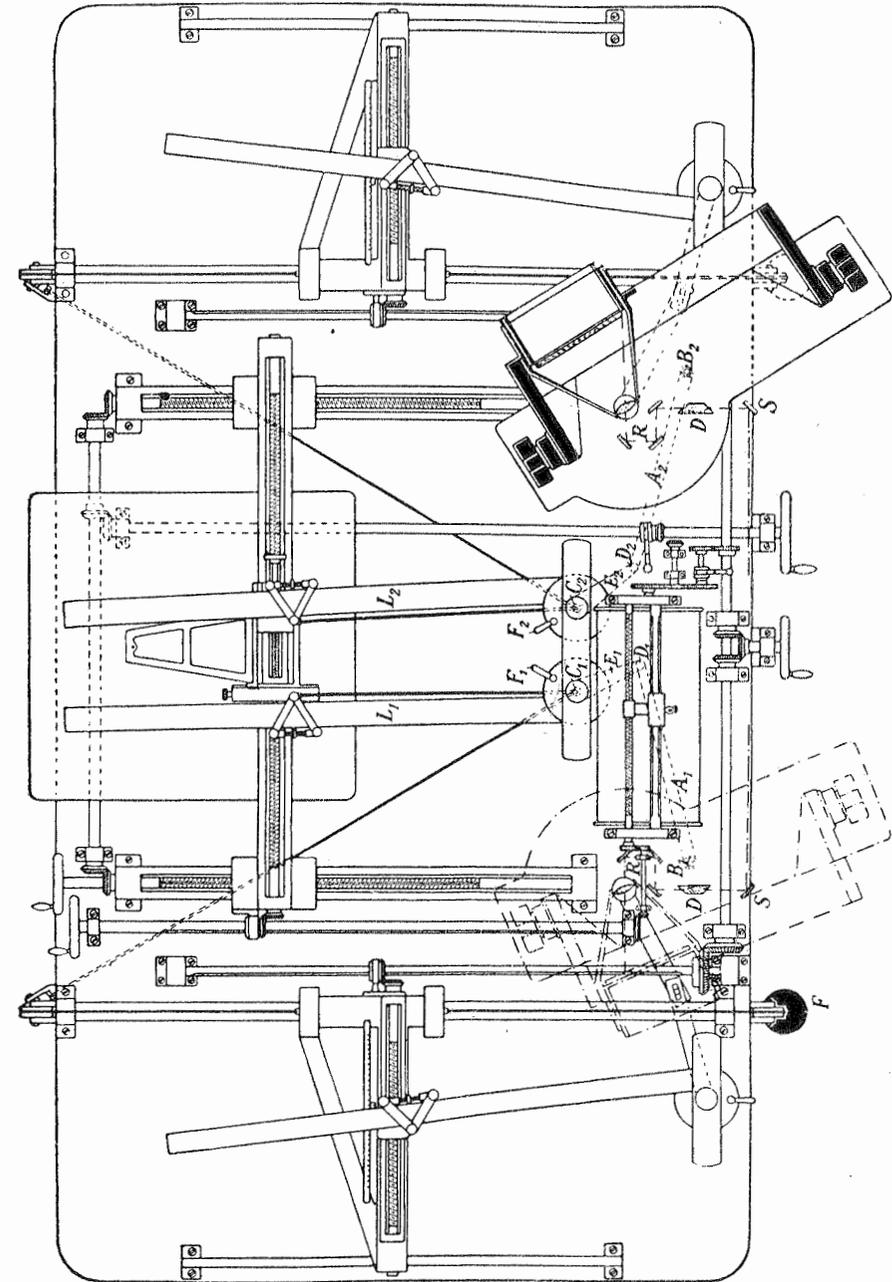


Fig. 365. — Autocartógrafo de Hegershoff-Heyde

figura. Las reglas de dirección L_1 y L_2 no giran alrededor del centro de los objetivos correspondientes, sino alrededor de otros puntos C_1 y C_2 ; por medio de un paralelogramo articulado pueden acoplarse las reglas L_1 y L_2 a sus respectivas cámaras. Sobre el puente principal se mueve el cursor de bases, cuyos manguitos-guías están montados sobre corre-

deras especiales de tal modo que la de la derecha puede moverse paralelamente a la dirección del puente, y la de la izquierda perpendicularmente a esta dirección. El lápiz trazador va fijado a un soporte vaciado (que se ve entre las dos reglas de dirección), unido a su vez al cursor de bases. El puente puede correrse paralelamente a sí mismo dando vueltas a la manivela de la derecha, y el cursor de bases se mueve con un mecanismo de torno de alfarero, situado por debajo de los oculares y accionado con una rueda pedal. Este mecanismo no está representado en el esquema de la figura 365, pero puede apreciarse en la figura 366.

La visión estereoscópica se obtiene con un doble antejo, provisto de índices, en el cual la distancia entre los ejes ópticos es igual, merced a dos reflexiones sucesivas, a la distancia entre los centros de los objetivos de ambas cámaras. En la figura 365 se ven los elementos catóptricos situados entre el objetivo de cada antejo y el objetivo de la cámara correspondiente, no estando representado el antejo. Estos sistemas de reflexión pueden girar cada uno alrededor de un eje horizontal que pasa por S y por el centro del objetivo de cada cámara, de tal manera que siempre puede llevarse sobre los índices del antejo un punto cualquiera de las vistas, situado en la parte superior o en la inferior de las mismas. Para evitar la *inversión* de las imágenes al girar los sistemas de reflexión, lleva cada uno de éstos un prisma de inversión de Dove D , que automáticamente gira la mitad del ángulo total girado por el sistema.

El movimiento de rotación de los sistemas de reflexión alrededor de sus respectivos ejes horizontales se transmite, por medio de unos engranajes cónicos, a dos ejes verticales que pasan por los centros de los objetivos de las cámaras y que mediante varillas articuladas pueden acoplarse a los ejes de giro verticales de las dos reglas de altura situadas una a la derecha y la otra a la izquierda del aparato. Estas reglas pasan a frotamiento suave por dos manguitos giratorios, que a su vez pueden correrse sobre los dos puentes de alturas. Estos puentes están unidos al cursor de bases por medio de cintas de metal *invar*, que pasan sobre poleas y que se mantienen tensas con los contrapesos F . Esta unión está hecha de tal modo, que la distancia de los puentes de alturas a los ejes de giro de las reglas de alturas es igual a la distancia entre el puente principal y los dos ejes C_1 y C_2 , medida sobre las reglas de dirección.

Las alturas se leen sobre dos escalas fijadas en los puentes de alturas, que se regulan según la cota del punto de estación, de tal manera que las lecturas dan directamente las cotas de los puntos observados en la fotografía.

Para el estudio de un par de vistas cuya orientación exterior se conozca, se empieza por colocar las cámaras con las mismas inclinaciones longitudinal y lateral que tuvieron al tomar las fotografías desde el aire; dando por supuesto que se conocen las tres coordenadas de un punto fijo del terreno (condición necesaria), se deducen, de estas coordenadas y de las del punto de estación, los ángulos acimutales que forman la base con los rayos dirigidos a dicho punto fijo, así como los dos ángulos de depresión de estos dos rayos. Se colocan los manguitos-guía de las reglas de dirección en la posición correspondiente a la longitud de la base, y se toma en el cursor de bases el ángulo de inclinación lateral (si lo hay); hecho esto, y por medio de la manivela de la derecha y de la rueda pedal, se colocan las reglas de dirección de modo que formen con la recta C_1C_2 los ángulos antes deducidos. Para ello se emplean los círculos acimutales C_1 y C_2 , teniendo en cuenta la posible inclinación lateral φ (fig. 364). Después se hacen girar las cámaras alrededor de sus respectivos ejes verticales, y los sistemas de reflexión alrededor de sus correspondientes ejes horizontales, de manera que la imagen del punto fijo coincida con el índice del antejo.

En esta posición se acoplan las reglas de dirección con las cámaras, apretando los tornillos que al efecto hay en C_1 y C_2 .

Las reglas de altura se colocan según los dos ángulos de depresión antes calculados, que se leen sobre los limbos que hay en sus centros de rotación, y una vez en esta posición se acoplan a los respectivos sistemas catóptricos por medio de tornillos de presión. Por último, se corren las dos escalas de alturas de modo que sobre ambas se lea la cota del punto fijo, y ya se tiene el aparato puesto en condiciones para transportar las vistas, es decir, para construir directamente el plano y poder leer las cotas de los puntos representados en el mismo.

Para ello, se giran las dos manivelas y la rueda pedal hasta que el índice flotante del antejo coincida con un punto de la vista en relieve del terreno; el lápiz trazador marca la posición de este punto sobre el papel, mientras que su cota puede leerse en las dos escalas de alturas.

El trazado de las curvas de nivel es bien sencillo; se toma para ello en las dos escalas de alturas la cota deseada, y se impide el movimiento lateral de los manguitos, por medio de los correspondientes tornillos de presión; se hace girar la manivela de la derecha y la rueda pedal de modo que el índice flotante vaya siempre tocando puntos de la superficie del terreno, y el lápiz irá trazando la correspondiente curva de nivel.

Nos hemos limitado, en la descripción del autocartógrafo, a la parte fundamental del mismo, sin entrar en detalles constructivos, debiendo añadir únicamente que los movimientos del puente principal o de distancias y del cursor de bases pueden leerse sobre escalas adecuadas, y de este modo pueden medirse las coordenadas horizontales de los puntos enfilados con el índice flotante del antejo.

La figura 366, que es reproducción de una fotografía del autocartógrafo de Hegershoff, da idea de la construcción total y del funcionamiento de este aparato, distinguiéndose muy bien, en gran parte, las piezas representadas esquemáticamente en la figura 365.

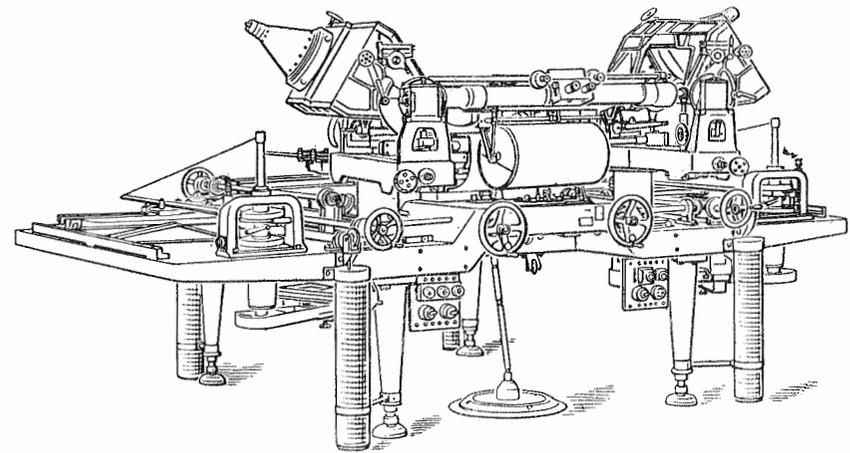


Fig. 366. — Autocartógrafo de Hegershoff-Heyde

Aunque el autocartógrafo ha sido casi completamente sustituido por el aerocartógrafo (párrafo 110) construido también por Hegershoff, nos hemos ocupado con algún detenimiento de su descripción, por ser el primer aparato que resolvió el problema de la construcción automática de planos con vistas cualesquiera.

Respecto a la práctica de esta construcción, debemos agregar que los elementos de la orientación exterior no es preciso determinarlos por el cálculo, sino de modo mecánico, valiéndose de puntos de apoyo conocidos y por el método de aproximaciones sucesivas, hasta colocar las vistas en la posición debida.

Mejor que la solución mecánica del problema de la trisección en el espacio, es la orientación recíproca de dos vistas, obtenida también de modo mecánico, pasando después la vista de conjunto obtenida al sistema de coordenadas topográficas del terreno. Este método tiene, además, la ventaja de ser aplicable a todos los aparatos transportadores.

De entre las muchas publicaciones en que se describe el autocartógrafo, citaremos únicamente los trabajos de H. Krebs («Zeitschr. f. Feinmechanik», 1922), y en particular el del propio Hugershoff sobre Fotogrametría (Viena, 1930).

§ 107. El estereotopógrafo de Poivilliers

El ingeniero francés Poivilliers venía estudiando, desde 1919, la construcción de un aparato transportador; con arreglo al modelo que hizo en 1923, construyó en 1927 el primer instrumento, adquirido por el Servicio Geográfico del Ejército, de París («Intern. Archiv. f. Photogramm.», tomo VII, 2.ª parte, 1931).

La estructura de este aparato responde en cuanto a la proyección horizontal a la del autocartógrafo, pero en cuanto al transporte de la proyección vertical presenta una notable simplificación; esta proyección va rebatida sobre el plano principal o de dibujo del instrumento.

Supongamos un sistema de coordenadas en el espacio cuyo origen sea uno de los puntos de estación, el plano de las xy sea horizontal, y el de las xz pase por el otro punto de estación; el triángulo determinado por los dos puntos de estación y un punto P del terreno se proyecta una vez sobre el plano horizontal xy , y otra vez sobre el plano vertical yz . Esta última proyección se rebate sobre el plano horizontal. Las proyecciones de los dos rayos que van al punto del terreno, están materializadas por los bordes de dos reglas, cuya intersección da la posición del punto en el plano de las xy y en el de las yz .

Para la realización de estas condiciones se colocan las dos cámaras de proyección a cualquier distancia a entre sí, en idéntica posición que al hacer el levantamiento, y de modo que cada una pueda girar alrededor de un eje vertical. Delante de los objetivos de las cámaras va un sistema estereoscópico, consistente en un doble antejo con distancia interobjetiva amplificada. Las dos ramas del doble antejo son giratorias, por separado, alrededor cada una de un eje horizontal, de modo que los ejes de los objetivos pueden tomar una inclinación cualquiera; pero como los oculares no toman parte en estos giros, se producirían inversiones en las imágenes, si no fuera por los prismas rectificadores intercalados a este objeto. En cada antejo hay un índice, y de los dos índices resulta una imagen flotante en el espacio.

Girando las cámaras alrededor de sus respectivos ejes verticales, y los antejos alrededor de sus correspondientes ejes horizontales, se puede hacer coincidir el índice flotante con cualquier punto de la imagen en relieve que se ve con el doble antejo, pudiéndose leer los ángulos horizontales sobre un círculo acimutal, y los ángulos verticales o de altura sobre un círculo cenital.

Vamos a estudiar la disposición de las reglas para la obtención de plantas y alzados, o sea, de las proyecciones horizontales y verticales, siguiendo los esquemas de las figuras 367 y 368.

En la figura 367, en que suponemos los objetivos O_1 y O_2 de las cámaras situados a una distancia cualquiera a entre sí, se ve un puente, que por medio de dos ruedas-poleas se desliza sobre dos carriles paralelamente a O_1O_2 . Sobre la cara superior del puente se mueve un cursor A_1A_2 de igual longitud que a , en el cual se toma, a partir de A_1 , la componente b_x , y a partir de A_2 pero normalmente al cursor, la componente b_y , ambas en la misma escala a que quiere construirse el plano, obteniéndose así los dos puntos P_1 y P_2 . Alrededor de O_1 y O_2 giran los bordes de dos reglas, que pasan por P_1 y P_2 a través de manguitos giratorios, resultando un paralelogramo articulado $P_1P_2O_2O_1$. En el giro de las reglas toman parte también las dos cámaras pero en sentido contrario una de otra.

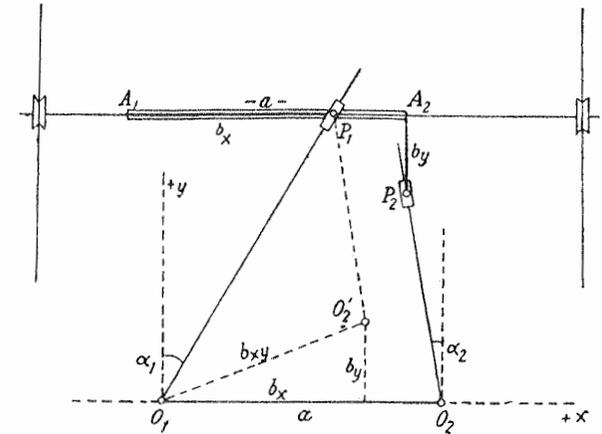


Fig. 367

Moviendo el puente y el cursor, así como inclinando convenientemente los dos antejos, puede llevarse el índice flotante sobre cualquier punto del terreno, cuya proyección horizontal será P_1 ; en la figura 367 se ve que el punto P_1 está determinado por el triángulo $O_1O_2'P_1$, en el cual el lado O_1O_2' es igual a la proyección horizontal b_{xy} de la base.

En la proyección vertical, representada en la figura 368, los dos rayos están también materializados por los bordes de dos reglas, situadas por debajo de las dos reglas de dirección y que giran alrededor de los puntos Q_1 y Q_2 situados a distancia cualquiera entre sí. Los ángulos que forman las dos reglas de alturas con la dirección de las y , son las proyecciones i_1' e i_2' de los verdaderos ángulos de inclinación i_1 e i_2 sobre el plano de las yz . Entre los ángulos i e i' existen las siguientes relaciones de muy fácil demostración:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i_1 &= \operatorname{tg} i_1' \cos \alpha_1 \\ \operatorname{tg} i_2 &= \operatorname{tg} i_2' \cos \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Para la solución mecánica del problema, hay sobre la parte inferior del mismo puente empleado para la proyección horizontal, un segundo cursor B_1B_2 (fig. 368) de igual longitud que a' , sobre el cual se toman las componentes b_z y b_y , como se ve en la figura, obteniéndose así dos puntos P_1 y P_2 .

Las dos reglas Q_1P_1 y Q_2P_2 van unidas a los antejos, de modo que al girar una de ellas se produce una inclinación en el antejo correspondiente; pero el acoplamiento está de tal manera regulado, que a los ángulos de inclinación i_1 e i_2 corresponden automáticamente los ángulos de giro i_1' e i_2' , de acuerdo con las ecuaciones (1). Como indica la figura, el punto P_1 da la cota del punto del terreno, y es el tercer vértice de un

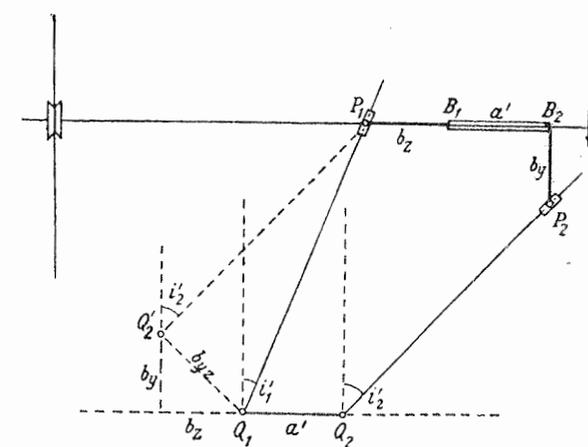


Fig. 368

triángulo, cuyos otros dos son los puntos Q_1 y Q_2' , situados en el plano de las yz , y cuya distancia recíproca es igual a la proyección de la base sobre el plano de las yz .

Para operar con el estereotopógrafo se mueve el puente y al mismo tiempo los dos cursores de tal modo que el índice flotante coincida con un punto del terreno, y así se obtienen directamente la posición y la cota del mismo. La distancia del puente a la base O_1O_2 ó Q_1Q_2 da la ordenada y , y la posición de los cursores sobre el puente dan la abscisa x y la ordenada z .

Para trazar curvas de nivel, se coloca el cursor de alturas en la cota de la curva deseada y se fija en esta posición; después basta mover el puente y el cursor de encima de tal manera que el índice flotante coincida siempre con puntos del terreno; es evidente que todos los puntos enfilados pertenecen a la misma curva de nivel.

§ 108. El estereoplanígrafo de Zeiss

La medición de vistas estereofotogramétricas con el estereocomparador, indujo a Pulfrich, en el año 1903, a construir un *estereoplanígrafo* para el transporte automático de aquéllas. Una vez inventado el estereoautógrafo (§ 91, página 389), con el cual quedaba resuelto satisfactoriamente el problema, quedó como paralizado el desarrollo de aquella idea, hasta que en la guerra de 1914-1918 se volvió sobre la misma al intentar construir automáticamente los planos de terrenos fotografiados desde los aviones. En 1920 encontró Bauersfeld una solución completamente nueva del problema, a la cual responde el estereoplanígrafo que se construyó por primera vez el año 1923.

Mientras en el autocartógrafo se mantiene el mismo principio fundamental del estereoautógrafo, a saber, la descomposición del rayo en sus dos proyecciones horizontal y vertical, en el estereoplanígrafo puede decirse que se opera con el rayo en el espacio; por consiguiente, en este aparato la construcción tiene carácter plástico o de relieve, al contrario de la estructura plana de los dispositivos del autocartógrafo.

Otra diferencia esencial entre el estereoplanígrafo y el autocartógrafo consiste en que en este último los rayos luminosos están materializados por reglas, mientras que en aquél son los mismos rayos los que determinan los puntos del terreno sobre el mapa.

Aunque el estereoplanígrafo de 1923 nada dejaba que desear, experimentó en los años siguientes una serie de modificaciones, de las cuales unas eran simplificaciones y otras verdaderos perfeccionamientos. En 1924 se construyó un nuevo modelo, al cual siguió bien pronto otro, y en 1930 aparece el estereoplanígrafo en la forma que vamos a describir a continuación. Una descripción detallada del modelo de 1923 se encuentra en la memoria de Gruber publicada en la «Zeitschr. f. Instr.» de 1923. Las modificaciones de este modelo también han sido estudiadas con todo detenimiento por el mismo autor en la «Bildm. u. Luftbildw.» de 1930.

El estereoplanígrafo se funda en el principio de Scheimpflug, de la doble proyección, cuya primera aplicación ya vimos en el párrafo 105; pero con la diferencia esencial de que los aparatos de proyección están a mayor distancia entre sí, de modo que las dos imágenes proyectadas no tienen parte alguna común o superpuesta.

La figura 369 representa esquemáticamente la construcción del estereoplanígrafo, basada en la materialización de un sistema de coordenadas en el espacio, cuyo plano de las xz es horizontal, y el eje de las y vertical.

Las dos cámaras están montadas sobre el brazo O_1O_2 de tal manera que puedan girar

alrededor del mismo (inclinación longitudinal ω). Además se puede dar a las cámaras la dirección que se quiera con respecto al brazo O_1O_2 (oblicuidad φ). Por último, cada cámara puede girar alrededor de su propio eje (inclinación lateral α). Con estos tres movimientos pueden colocarse las cámaras exactamente en la misma posición que ocupaban al tomar las vistas desde el aire

El brazo O_1O_2 sobre el cual van montadas las cámaras, puede correrse arriba y abajo por medio de un manguito-guía (que es el llamado cursor de las y), paralelamente al plano de las xy ; por otra parte, la columna que sirve de soporte al cursor de las y se puede correr, en la dirección del eje de las z , por medio de un cursor z .

Un segundo brazo A_1A_2 , de igual longitud que el primero, se puede deslizar por un manguito-guía (cursor de las x), en la dirección del eje x , y sirve de soporte a dos índices C_1 y C_2 . A partir de A_2 se toma, en dirección a A_1 , la proyección b_x , y normalmente a ésta se toma la proyección b_y de la base, para lo cual se tiene en cuenta la inclinación de esta última.

Para dar a la base la oblicuidad que haya podido tener al tomar las vistas, se corre el índice C_1 en una longitud igual a la proyección b_z de aquélla.

Como se ve, pueden tomarse las tres componentes de la base en los puntos extremos del brazo A_1A_2 , cosa de verdadera importancia tratándose de una larga serie de vistas.

Esta disposición de los objetivos de proyección y de los índices, responde a la estructura de un paralelogramo de Zeiss, tanto en la proyección horizontal, como en la proyección sobre el plano vertical que pasa por el eje de las x , como ya se vió en el estereoautógrafo (§ 92, pág. 390), y como también se emplea en el autocartógrafo (§ 106, pág. 442).

Por medio de los tres sistemas cursores antes indicados, se pueden colocar las cámaras y los índices en tal posición, que las proyecciones de las dos imágenes p_1 y p_2 de un punto coincidan con los índices C_1 y C_2 , y en las tres escalas correspondientes se leerán los valores X , Y y Z de las coordenadas en el espacio del punto P del terreno.

La colocación de los índices sobre las proyecciones de las imágenes de un punto, se hace por el método estereoscópico; sobre la imagen en relieve del terreno que se ve con el estereoscopio de que va provisto el aparato, se va enfilando el índice flotante que aparece en el mismo campo del anteojo binocular.

Parte óptica del estereoplanígrafo. Por coincidir el plano-imagen de cada cámara con el segundo plano focal del objetivo correspondiente, no es posible que se vea con toda nitidez y claridad la imagen de un punto en el plano de los índices. Para obviar esta dificultad va dispuesto delante de cada objetivo un sistema amplificador que consiste, como se ve en la figura 370, en una lente convergente y otra divergente, situadas a distancia variable, formando ambas un teleobjetivo (tomo I, § 66, pág. 261) de distancia focal variable. Las constantes ópticas de las dos lentes están de tal modo calculadas, que el segundo punto principal H del sistema coincide con el primer punto principal del objetivo de la cámara,

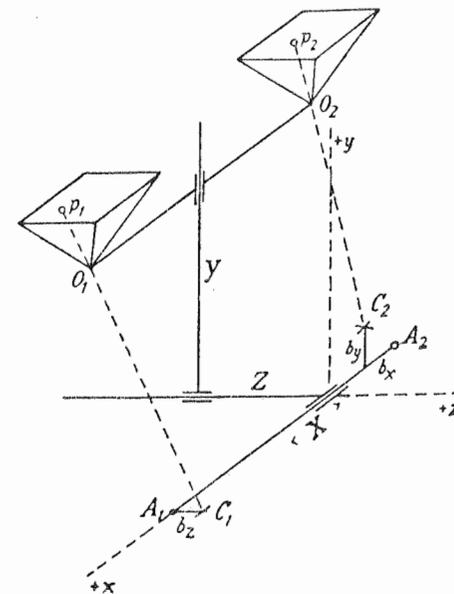


Fig. 369

cualquiera que sea la distancia entre ambas lentes. Es decir, que para un punto P de la fotografía, se puede girar el sistema amplificador de tal manera que el rayo principal del objetivo de la cámara, procedente de p , sea al mismo tiempo rayo principal de dicho sistema. El objetivo y el sistema amplificador dan una imagen real de p , y corriendo la lente convergente se puede conseguir que esta imagen coincida con el índice C . La regulación de este sistema, en dirección y distancia entre lentes, es llevada a cabo por unas palancas articuladas, accionadas por el cursor de las x .

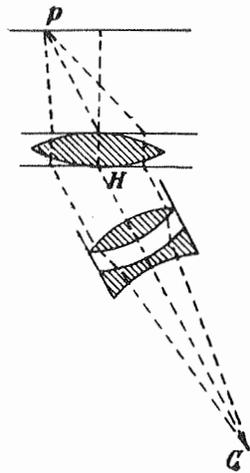


Fig. 370

El observador ve los dos índices C con los dos oculares del sistema estereoscópico; pero tampoco aquí conviene que el sistema sea rígido, y si los oculares deben ser fijos, para mayor facilidad y comodidad en la observación, los índices deben moverse al hacerlo el cursor de las x , como se ve en la figura 369.

El sistema estereoscópico está formado de tres partes independientes, que se unen entre sí por medio de palancas, como se ve esquemáticamente en la figura 371. Cada índice va aplicado sobre un espejo, que al moverse el cursor de las x se coloca automáticamente de tal modo que los rayos procedentes del sistema de proyección son reflejados en la dirección del eje de las x . De este modo penetran estos rayos en el tubo acodado E , del cual salen en la dirección de las z ; del tubo E pasan los rayos a otro tubo J_1 , que puede moverse perpendicularmente al eje de las z y que por medio de un espejo *arrastra* consigo a aquéllos en su movimiento.

El sistema ocular consiste, a su vez, en una parte fija G y en otra J_1' que puede girar alrededor de la dirección z .

Los dos tubos giratorios J_1 y J_1' van unidos entre sí por una palanca, de manera que para cualquier posición del cursor de las x coinciden los ejes de ambos; de este modo se consigue que los rayos que entran en E pasen al ocular a través de aquellos tubos. Para evitar que con el movimiento simultáneo de los tubos J_1 y J_1' se produzca una inversión de la imagen en el ocular, va montado en J_1 un prisma rectificador, que automáticamente mantiene directa la imagen.

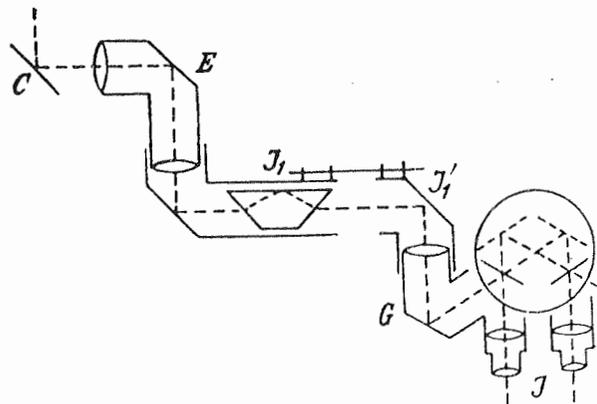


Fig. 371. — Sistema estereoscópico

En la posición normal del sistema ocular se verá la imagen de la izquierda con el ojo izquierdo, y la de la derecha con el derecho; para cambiar las imágenes hay un dispositivo muy sencillo, representado en la figura 371 por las líneas de trazos dentro del círculo, y mediante el cual se puede ver también con el ojo derecho la imagen de la izquierda, y con el izquierdo la de la derecha. Este dispositivo tiene mucha importancia, tratándose de series de muchas fotografías, por la posibilidad de tomar las componentes de la base en los dos extremos del cursor x (pág. 449), de que ya nos ocupamos antes.

En las figuras 372 y 373 se ve el estereoplanógrafo de Zeiss, de frente y de costado; en

la primera, A y B son los soportes de las dos cámaras, con los bastidores porta-vistas R_1 ; K es el dispositivo para tomar la inclinación lateral, K_1 para la inclinación longitudinal y K_2 para la oblicuidad; W es un dispositivo que permite inclinar a la vez las dos cámaras, con lo cual puede inclinarse a voluntad el modelo en relieve que se ve en el estereoscopio.

En F se ven los dos sistemas amplificadores, que se accionan con las palancas L_1 ; las palancas L_2 sirven para mover los espejos con los índices C .

La parte del tubo E (fig. 371) que cae sobre el eje de las x , o sea la parte horizontal del mismo, se ve a la izquierda, en la figura 372, y la parte correspondiente al eje de las z ,

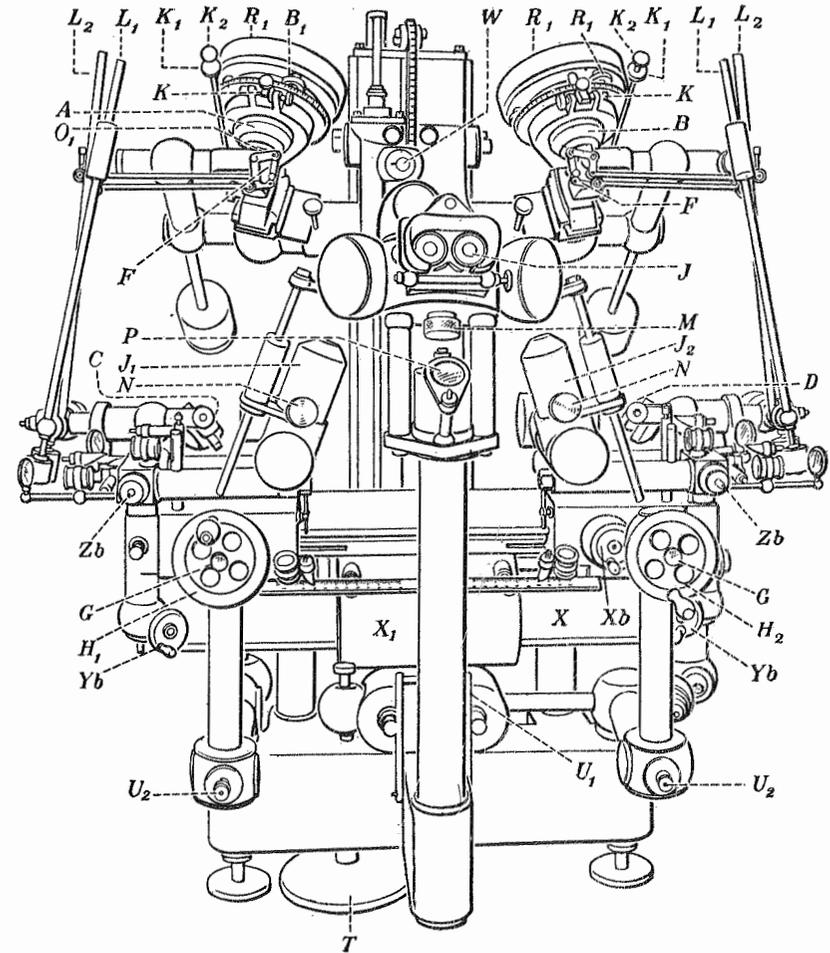


Fig. 372. — Estereoplanógrafo de Zeiss

es decir, la parte vertical del mismo, se ve claramente en la figura 373. Los tubos J_1 y J_2 , movibles en el plano de las xy , y que contienen a los prismas rectificadores, así como los dos tubos móviles del sistema ocular (J_1' de la fig. 371), se mantienen siempre en tal posición relativa que sus ejes coinciden dos a dos (fig. 371), gracias a las palancas de unión que se ven en la figura 372, una a la izquierda de J_1 y la otra a la derecha de J_2 .

En X_b , Y_b y Z_b se ven los dispositivos que sirven para tomar las componentes de la base.

El cursor de las x se mueve con la manivela H_1 , y los cursores de las y y de las z se mueven respectivamente con la manivela H_2 y con la rueda-pedal T .

En la figura 372, los bastidores porta-vistas son simples, es decir, para fotografías hechas con cámaras simples; pero pueden sustituirse por bastidores especiales para vistas obtenidas con cámara doble o cuádruple (§ 93, págs. 397 y 398), de modo que los pares o dobles pares de tales vistas pueden montarse y orientarse a la vez.

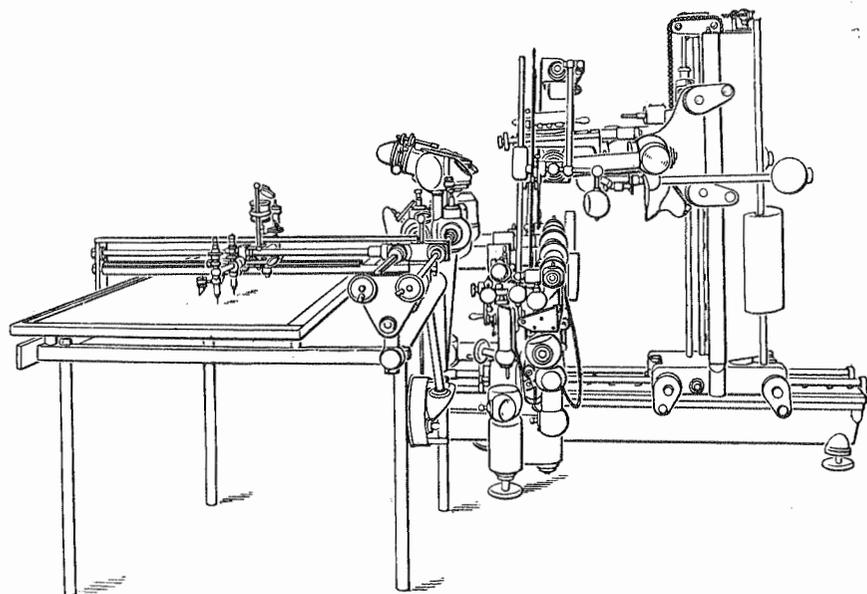


Fig. 373. — Estereoplanógrafo de Zeiss

El dispositivo trazador. Para la obtención gráfica de las coordenadas de los puntos, va unido al estereoplanógrafo un coordinatógrafo, cuyo lápiz trazador participa del movimiento de los cursores de las x y de las z . Este dispositivo, que se ve en la figura 373, está representado esquemáticamente en la figura 374; al dar vueltas a la manivela H_1 (fig. 372),

que hace mover al cursor de las x , gira al mismo tiempo el husillo x (fig. 374), que arrastra al cursor A ; por otra parte, al moverse el cursor de las z del estereoplanógrafo, gira la varilla de sección cuadrada C , que por medio de un engranaje cónico situado dentro del cursor A hace girar al husillo y , el cual a su vez hace moverse al cursor B , que lleva unido el lápiz trazador P ; de este modo, el lápiz P se mueve en la dirección de los dos ejes de coordenadas x, y , y así se obtiene para cada punto del terreno enfilado con el índice flotante, su representación en la planta o proyección horizontal del mismo.

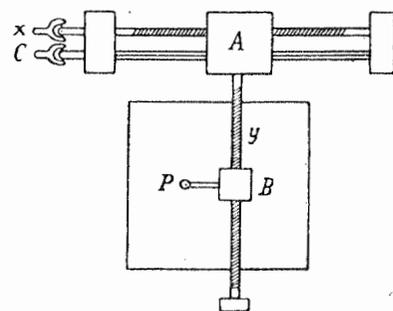


Fig. 374

El estereoplanógrafo está construido para vistas horizontales o poco inclinadas; y como no es posible disponer las cámaras para vistas de eje horizontal, hay que cambiar el plano de las xz por el de las xy , y al contrario, de modo que, para las vistas verticales, se toma como plano horizontal el de las xy ; en este caso se une el cursor de las z con la manivela H_2 (fig. 372) y el cursor de las y con la rueda-pedal T ; al mismo tiempo, hay que acoplar la varilla de sección cuadrada C (fig. 374) del dispositivo trazador, con el cursor de las y del estereoplanógrafo.

§ 109. Otros aparatos de doble proyección

Hasta hoy, la aplicación práctica más perfecta del principio de la doble proyección de Scheimpflug está constituida por el estereoplanógrafo de Zeiss. Pero también hay otros instrumentos muy útiles, fundados en dicho principio, de los cuales vamos a describir someramente algunos.

El Aerosimplex de Hugershoff. En el año 1928 construyó la casa Heyde, de Dresden, por indicación de Hugershoff, un aparato para la construcción de planos a escala reducida, con curvas de nivel; pero poco después se hizo cargo de su fabricación la Sociedad Zeiss-Aerotopograph.

Consiste este instrumento (fig. 375) en dos pequeños aparatos de proyección de 65 mm de distancia focal, para vistas de 6×6 cm situadas por debajo de una placa de cristal esmerilado, que hace de pantalla de proyección; para la orientación exacta, se tienen dos imágenes proyectadas, una junto a otra. Por encima del cristal esmerilado se encuentra un anteojo binocular, con el cual se ven totalmente superpuestas las dos imágenes, obteniéndose así una vista en relieve del terreno.

Para la enfilación y enfoque de puntos sirven dos índices, rígidamente unidos entre sí y que por medio de un paralelogramo articulado pueden correrse sobre la placa esmerilada paralelamente a su línea de unión.

En vez del movimiento de la pantalla de proyección, utilizado por Scheimpflug, en el *Aerosimplex* se mueven verticalmente los dos aparatos de proyección a la vez, con lo cual la vista o imagen en relieve puede subirse o bajarse a voluntad; para ello basta hacer girar la rueda-pedal que se ve en la parte inferior del instrumento. Si para una cierta cota de la vista en relieve, que se puede leer en una escala, se mueve la imagen flotante de los índices de modo que siempre se mantenga sobre la superficie del terreno, el lápiz unido al soporte de aquellos irá trazando la curva de nivel correspondiente sobre el tablero situado a la derecha.

También pueden inclinarse a la vez los dos aparatos de proyección, así como disponerse oblicuamente respecto a la base, con lo cual una vez bien orientadas entre sí ambas fotografías, se puede con facilidad referir la vista en relieve a un sistema dado de coordenadas en el espacio.

El triangulador de Boykow. Este aparato, muy interesante por cierto, cuya patente data de 1921, está también fundado en la doble proyección de Scheimpflug, pero resuelve

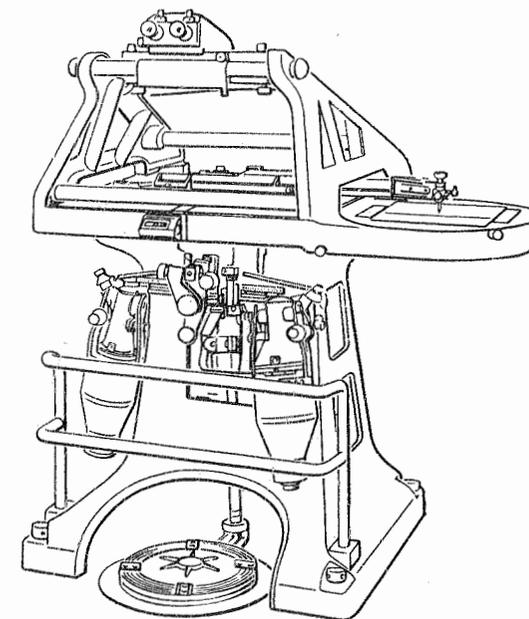


Fig. 375. — Aerosimplex

además, de modo original, el problema de la orientación y transporte de las series de vistas.

El triangulador consiste en dos proyectores dobles, con una sola pantalla de proyección; una vez orientado un par de vistas, se miran sus proyecciones, próximas entre sí, con un estereoscopio para tener una vista en relieve del terreno; el segundo doble proyector, en el cual se coloca otro par de vistas, proporciona otra vista en relieve al mirar por el estereoscopio, y en el caso de que ambas vistas plásticas contengan una misma parte del terreno se pueden hacer coincidir, variando convenientemente la posición del segundo par de proyectores, con lo cual quedan orientados entre sí los dos pares de vistas.

También lleva este triangulador un dispositivo para unir un tercer par de vistas al segundo par, sin necesidad de alterar la orientación de este último.

El autorreductor de Santoni. Merece citarse, entre otros dobles proyectores, el del italiano Santoni, en el cual la proyección no es óptica, sino mecánica; el fundamento del primer aparato de Santoni, construido en 1921 y llamado *autorreductor*, consistía en

colocar las vistas en la misma posición que en el aire, materializando los rayos luminosos con dos varillas muy finas, de longitud variable, que podían girar en todas direcciones alrededor de los puntos de estación (centros de las perspectivas). Al colocar las varillas de modo que sus extremos superiores tocaran con las imágenes correspondientes a un mismo punto, se cortaban por abajo, es decir, del otro lado de los centros de perspectiva, en un punto que representaba en el espacio el punto del terreno

cuyas imágenes se habían enfilado en las vistas respectivas. Las varillas se alargaban o acortaban de modo que su punto de intersección coincidiera con los extremos inferiores de las mismas. Para representar los puntos en el plano del dibujo se subía éste hasta tocar con el punto de intersección de las varillas.

La figura 376 representa, en esquema, la realización mecánica de esta idea; en este primer modelo, van las dos fotografías B y B' fijadas sobre una plataforma A ; los puntos de aquéllas se enfilan con dos varillas G y G' articuladas con otras dos E y E' de tal modo que las varillas G y E son siempre paralelas, así como las G' y E' . El método operatorio es el mismo indicado para el primer modelo; el plano del dibujo se sube o se baja haciendo girar la ruedecilla K .

Como el *autorreductor* está construido para vistas horizontales o casi horizontales, basta con tres tornillos para dar a cada placa la inclinación que tuviere al hacer la fotografía desde el aire.

En un segundo modelo, construido en el año 1926, y llamado *restituidor*, se hace la observación de puntos con un sistema estereoscópico, en el cual, al sustituir las puntas p y p' de las varillas G y G' por dos índices, se obtiene una imagen flotante de éstos, que se va colocando sobre los puntos de la vista en relieve del terreno («Bildm. u. Luftbildw.», 1927).

En el *Cursillo de Fotogrametría* de Sander (Stuttgart, 1930) se encuentran detallados y criticados todos estos aparatos, fundados en la idea verdaderamente genial de Scheimpflug sobre la doble proyección.

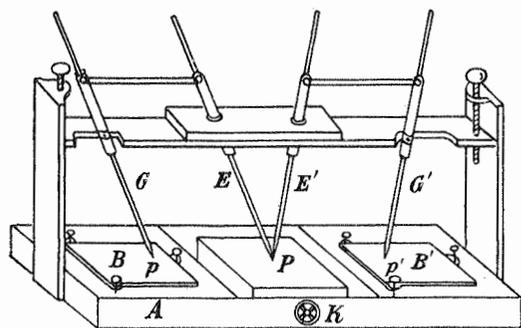


Fig. 376. — Autorreductor de Santoni

§ 110. El aerocartógrafo de Hugershoff

La estructura plástica realizada con el estereoplanógrafo, que supuso un perfeccionamiento notable en las estructuras planas de los aparatos reductores hasta entonces en uso, indujo a Hugershoff al estudio de un nuevo aparato para la construcción de planos, que reuniera a la vez la máxima sencillez con el mínimo de dimensiones; el resultado fué el llamado por su autor *aerocartógrafo*, construido por primera vez en 1926 por la casa Heyde, de Dresden, y que en la actualidad fabrica la Sociedad Zeiss-Aerotopograph, de Jena.

La figura 377 representa, en esquema, los detalles de este instrumento; los dos marcos porta-vistas, con las placas P , van montados sobre ejes verticales giratorios V , y pueden girar alrededor de un eje horizontal que pasa por los centros de los objetivos O . Delante

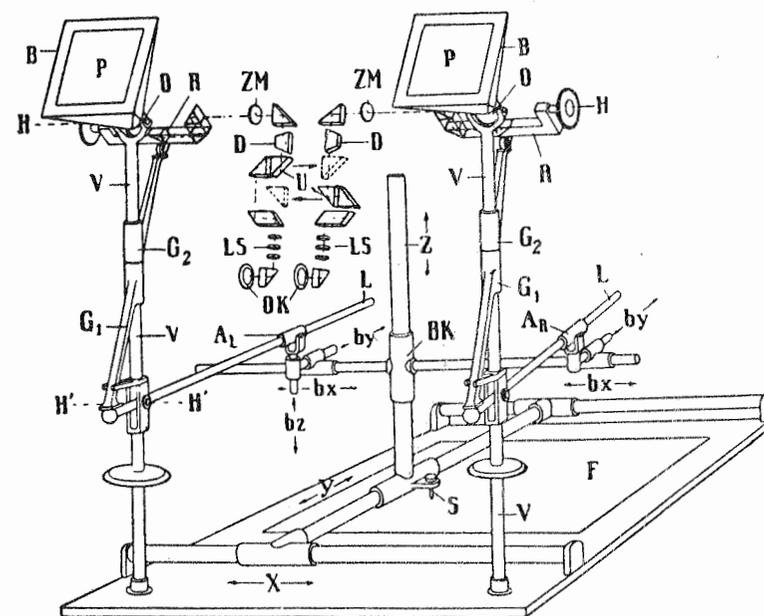


Fig. 377. — Aerocartógrafo

de cada objetivo va dispuesto un sistema de reflexión, que puede girar también alrededor de un eje horizontal H . Mediante el movimiento basculante de los marcos porta-vistas B , se colocan las placas con igual inclinación longitudinal que tenían en el aire y al mismo tiempo se colocan con la misma oblicuidad, respecto a la base, que tuvieran al hacer el levantamiento.

Del sistema estereoscópico citemos en primer lugar los índices ZM , aplicados sobre las caras planas de dos lentes plano-convexas, y las dos series de lentes LS , que constituyen los objetivos de un anteojo doble, cuyos oculares son OK . Para evitar la inversión de las imágenes cuando se giran los sistemas reflectores R , van intercalados, como en el autocartógrafo, en la trayectoria de los rayos, unos prismas rectificadores D , que automáticamente giran sólo la mitad que aquel sistema.

Como se ve, todas estas partes guardan entre sí la misma disposición que en el autocartógrafo; pero en cambio existe una gran diferencia en el acoplamiento entre el giro de los porta-vistas y el de los reflectores R , pues en el aerocartógrafo se hacen girar directamente, con las palancas L , los ejes verticales V , y al mismo tiempo inclinando aquéllas más o menos se hacen girar los dos sistemas de reflexión R ; para ello resbala sobre el eje vertical V , por medio de un manguito-guía, una varilla G_1 , cuyo pie, plano, descansa sobre el extremo esférico de la palanca L , y al mismo tiempo, gracias a una horquilla, participa esta varilla G_1 del movimiento de rotación del eje V ; sobre este manguito descansa otro G_2 , que no toma parte en el giro del eje V . Cuando se mueve la palanca L en sentido vertical, sube o baja el manguito G_1 y a la vez el segundo manguito G_2 , que por medio de una varilla solidaria del mismo hace que el sistema reflector se incline más o menos, y de tal modo que la inclinación del reflector resulta exactamente igual que la de la palanca L . Moviendo además a uno y a otro lado esta palanca, se puede hacer que el índice vaya coincidiendo con todos los puntos de la placa.

La tercera parte fundamental del aparato consiste en el dispositivo de acoplamiento de las dos palancas L , que permite ir colocando el índice flotante que se ve en el doble anteojo, con los diversos puntos de la vista en relieve del terreno. Las palancas L están unidas entre sí por un puente, mediante los manguitos A_L y A_R , giratorios y basculantes, como en un paralelogramo de Zeiss, y de tal modo colocados que la distancia $A_L A_R$ es igual a la distancia entre los dos ejes verticales V , menos la longitud de la base del levantamiento, en la escala a que se haya de construir el plano. Para tomar la base, pueden correrse los manguitos A_L y A_R sobre el puente, teniendo en cuenta la inclinación longitudinal y la oblicuidad de la base.

Las dos palancas corresponden, en su proyección horizontal, a las reglas de dirección del autocartógrafo, y su movimiento se logra corriendo el puente en la dirección de las x y en la de las y , como se indica en la figura 377 con las flechas que hay junto a los cursores respectivos. Las dos palancas representan también las reglas de altura del autocartógrafo, y por ello el puente se puede mover también en sentido vertical, por medio del manguito BK que se desliza sobre la columna Z .

Si por medio del movimiento de los cursores en la dirección de los tres ejes coordenados, se lleva el índice flotante sobre un punto de la vista en relieve, el lápiz S marcará en el papel F la proyección horizontal de aquel punto, y su cota se podrá leer en una escala que hay en la columna Z .

Además hay otras dos escalas para la lectura de las coordenadas x, y . Las lecturas de direcciones acimutales y de ángulos de altura se hacen respectivamente sobre círculos horizontales montados en los ejes verticales V , y sobre círculos verticales montados sobre el eje horizontal H .

El sistema de prismas U , que, como se indica en la figura 377, puede moverse en sentido contrario uno del otro, sirve para producir un cambio de imágenes en el anteojo. Este efecto, sin interés para la reducción de un solo par de vistas, es de gran importancia tratándose de una serie numerosa de fotografías. Si se colocan las dos primeras vistas de una serie en el aerocartógrafo, bien orientadas entre sí, de modo que ocupen la misma posición que tenían en el aire al tomar las fotografías, se puede, por medio de este dispositivo de prismas, hacer la transposición de imágenes en el anteojo, y sustituir la primera vista por la tercera. Por no haber variado la posición de la segunda imagen, sólo habrá que orientar la tercera de tal modo que forme con la segunda una vista en relieve del terreno perfectamente clara. De esta manera se tiene la posición correcta

de la tercera vista respecto a la segunda, y así puede procederse con las demás vistas de la serie, mientras la acumulación sucesiva de las inevitables faltas de precisión o exactitud en las observaciones no dé lugar a errores apreciables.

La figura 378 representa una vista de conjunto del aerocartógrafo, en la que se ve el mecanismo para poner en movimiento al puente. La manivela de la izquierda sirve para mover los dos cursores de las x , la de la derecha para los cursores de las y , y con la rueda-pedal que hay debajo del aparato, se mueve el cursor de las z .

En esta forma está montado el instrumento para vistas tomadas con el eje de la cámara horizontal o muy poco inclinado; para fotografías verticales o casi verticales resulta inadecuada la posición de los marcos porta-vistas, pero esta dificultad se obvia fácilmente tomando el plano de las xz como plano del dibujo, de modo que las alturas o cotas tendrán la dirección de las y . Para ello se cambian entre sí los acoplamientos de la manivela de la derecha y de la rueda-pedal, y una vez hecho este intercambio, se tiene que los dos movimientos sobre el plano del dibujo se hacen con las dos manivelas.

Ahora bien, como resultaría incómodo y difícil colocar el plano del dibujo en el plano de las xz , lleva el aerocartógrafo un dispositivo especial para este acoplamiento, mediante el cual el movimiento del cursor BK se transmite a otro cursor que se desliza en la dirección de las y , y al cual puede unirse el lápiz trazador. De este modo se sustituye el plano vertical de dibujo por otro horizontal.

También lleva el aerocartógrafo otra superficie de dibujo de forma cilíndrica, situada en la parte delantera del aparato y que permite al observador vigilar continuamente la marcha del trabajo. El lápiz que se apoya sobre el cilindro se mueve en el sentido de las generatrices accionado por el cursor de las x , y el movimiento del cursor de las y se traduce en un giro del cilindro. Cuando se trata de reducir vistas horizontales o muy poco inclinadas, se sustituye el acoplamiento del cilindro con el cursor de las y , por el de las z .

Al aerocartógrafo puede acoplarse un tablero especial de dibujo, sobre el cual se mueve un cursor de dos direcciones accionado por los cursores del aparato. Este dispositivo se emplea cuando hay que construir planos en escalas muy grandes.

El aerocartógrafo está descrito con todo detalle en un folleto del ingeniero H. Gruner, editado por Konrad Wittwer en Stuttgart, del cual hemos tomado la figura 377.

También está tratado a fondo este aparato por Gast en sus *Conferencias sobre Fotogrametría* (Leipzig, 1930).

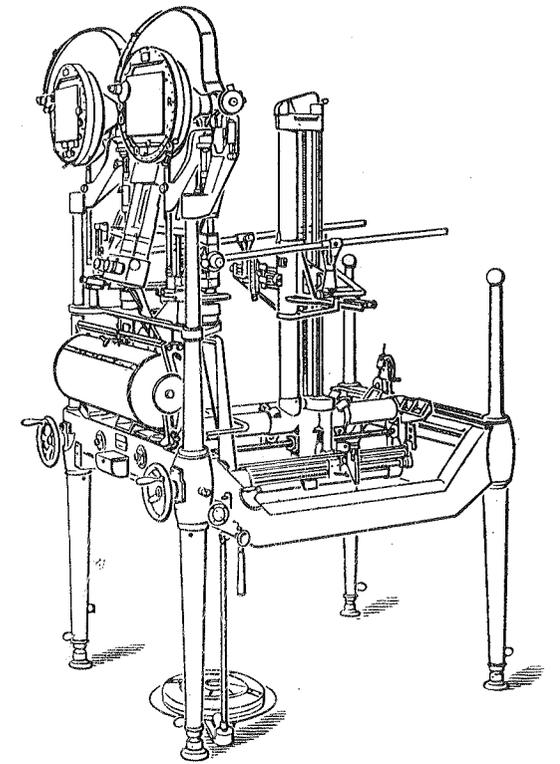


Fig. 378. — Aerocartógrafo de Hegershoff

§ 111. El autógrafo de Wild

En el año 1926 dió a conocer la casa H. Wild, de Heerbrugg (Suiza), un aparato para la construcción automática de planos por observación de vistas fotográficas, al cual llamamos *autógrafo*, y que al contrario de todos los aparatos análogos, emplea el teodolito comparador sistema Porro (§ 85, pág. 357), en el cual el anteojo es fijo y la enfilación de un punto de la vista se consigue inclinando y haciendo girar la cámara. Ya vimos anteriormente (página 358), que los ángulos así obtenidos no coinciden con el acimutal y el de altura del punto visado P , y por esta razón es necesario estudiar el modo de que puedan leerse con el fotogoniómetro de Porro los verdaderos ángulos acimutal y de altura.

Consideremos para ello, además del punto P , otro punto P_1 , cuyo ángulo acimutal sea α_1 y su ángulo de altura sea β_1 , y supongamos que la posición de este punto P_1 sea tal, que inclinando y haciendo girar la cámara, pueda llevarse sobre la cruz filar del anteojo, y que los ángulos α y β leídos entonces en los respectivos círculos, sean los correspondientes al punto P .

En las fórmulas (9) de la página 358 habremos de sustituir los ángulos α y β por los α_1 y β_1 , y los ángulos α' y β' por los α y β . Las coordenadas del punto P_1 estarán dadas por estas dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \beta_1 &= \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \cos \alpha_1 &= \text{tg } \beta_1 \cot \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Para la mejor comprensión de los razonamientos siguientes partiremos de la figura 379, que es repetición de la figura 293 (pág. 358), en la que se supone trazado el arco PH de círculo máximo, que con los PN y NH forma el triángulo esférico PHN rectángulo en N , representado aparte en la figura 380. Llamando σ al lado PH se tiene:

$$\cos \sigma = \cos \alpha \cos \beta. \quad (2)$$

Para el punto P_1 se tendría otro triángulo esférico rectángulo análogo al PHN , con sus lados β_1 , α_1 y σ_1 , en el cual se verificaría del mismo modo la siguiente relación:

$$\cos \sigma_1 = \cos \alpha_1 \cos \beta_1. \quad (3)$$

Supongamos que tomamos en la figura 379 el punto P_1 , y se tendrá que al triángulo rectángulo QPN corresponderá otro también rectángulo QP_1N_1 ; para mayor claridad se representa esta parte de aquella figura en la figura 381. Según la definición del punto P_1 se tiene que en el triángulo QP_1N_1 el ángulo en Q será igual a β , y el lado QP_1 será igual a $90^\circ - \alpha$, luego se tendrá:

$$\cos \alpha_1 \text{tg } \beta = \text{tg } \beta_1$$

y

$$\text{sen } \beta \cos \alpha = \text{sen } \beta_1.$$

De estas dos ecuaciones se deduce la siguiente:

$$\cos \beta_1 \cos \alpha_1 = \cos \beta \cos \alpha$$

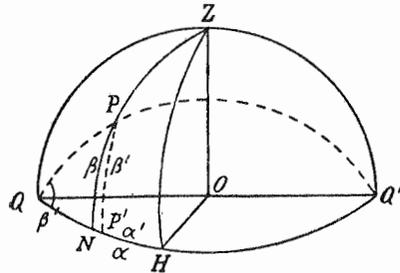


Fig. 379

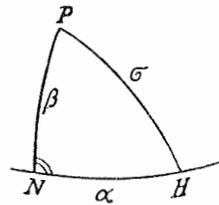


Fig. 380

y según las igualdades (2) y (3) se tiene, sustituyendo valores, que

$$\sigma_1 = \sigma \quad (4)$$

es decir, que en la figura 381, $HP = HP_1$.

Por consiguiente, haciendo girar el arco HP alrededor de H en un ángulo ρ , se puede obtener el punto P_1 ; para hallar el valor de este ángulo ρ , empecemos, en la figura 381, por determinar el arco $PP_1 = \omega$, que vendrá dado por la siguiente fórmula, correspondiente al triángulo QP_1P :

$$\cos \omega = \text{sen } \alpha \text{sen } \alpha' + \cos \alpha \cos \alpha' \cos (\beta - \beta').$$

Pero como en el triángulo QPN de la figura 379 se tiene:

$$\text{sen } \alpha' = \cos \beta \text{sen } \alpha \quad \text{y} \quad \text{tg } \beta' = \frac{\text{tg } \beta}{\cos \alpha},$$

resultará, sustituyendo en la expresión anterior:

$$\cos \omega = \text{sen}^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}^2 \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \cos \beta \cot \beta'$$

y según la ecuación segunda (9) de la página 358:

$$\cos \omega = \text{sen}^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta. \quad (5)$$

En el triángulo HPP_1 se tiene:

$$\cos \omega = \cos^2 \sigma + \text{sen}^2 \sigma \cos \rho$$

y según (2) y (5):

$$\text{sen}^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}^2 \beta = (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) \cos \rho$$

de donde se deduce:

$$\cos \rho = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta}. \quad (6)$$

También podemos hallar otra fórmula para ρ , expresando su tangente en función de su seno, a saber:

$$\text{tg } \rho = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \rho}}{\cos \rho}.$$

De donde fácilmente se deduce, sustituyendo el valor de $\cos \rho$ dado por la fórmula (6):

$$\text{tg } \rho = \frac{\text{sen } \alpha \text{sen } \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}. \quad (7)$$

De lo expuesto resulta, que si para un punto P de la fotografía se lee directamente en el teodolito comparador de Porro un ángulo acimutal α y un ángulo de altura β , hay que girar la cámara en un ángulo ρ , antes de enfilar el punto.

Esta ecuación (7), que en el autógrafo de Wild se resuelve automáticamente con suficiente aproximación, fué discutida por Baeschlin en la «Schweiz. Zeitschr. f. Verm.» de 1929.

La figura 382 representa esquemáticamente el autógrafo de Wild. Supongamos, en primer lugar, que se tienen dos vistas tomadas con los ejes de las cámaras horizontales y paralelos entre sí: en la posición inicial, los dos dispositivos porta-vistas B son verticales y los índices del sistema estereoscópico coinciden con los puntos principales de las fotografías; para ello se puede tomar en los círculos V toda posible oblicuidad de las vistas. Por debajo de los objetivos de las cámaras van situados dos prismas P , cuya misión con-

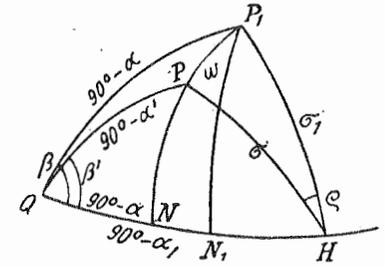


Fig. 381

siste en dirigir los rayos luminosos procedentes de las vistas hacia el estereoscopio, que está compuesto por los prismas P_1 y P_2 , por una serie de elementos ópticos no representados en la figura y por los dos oculares O .

Para enfilar el índice flotante sobre un punto cualquiera de la vista en relieve del terreno, puede girarse cada porta-vista alrededor de un eje vertical y de otro horizontal; en el movimiento alrededor del eje vertical toman parte también los dos prismas P . El giro y la inclinación de los porta-vistas se realiza por medio de las palancas L , que a su vez son accionadas por el puente S , movable en las tres direcciones de los ejes coordenados. La disposición de las palancas y del puente responden al paralelogramo de Zeiss (§ 91, pág. 390),

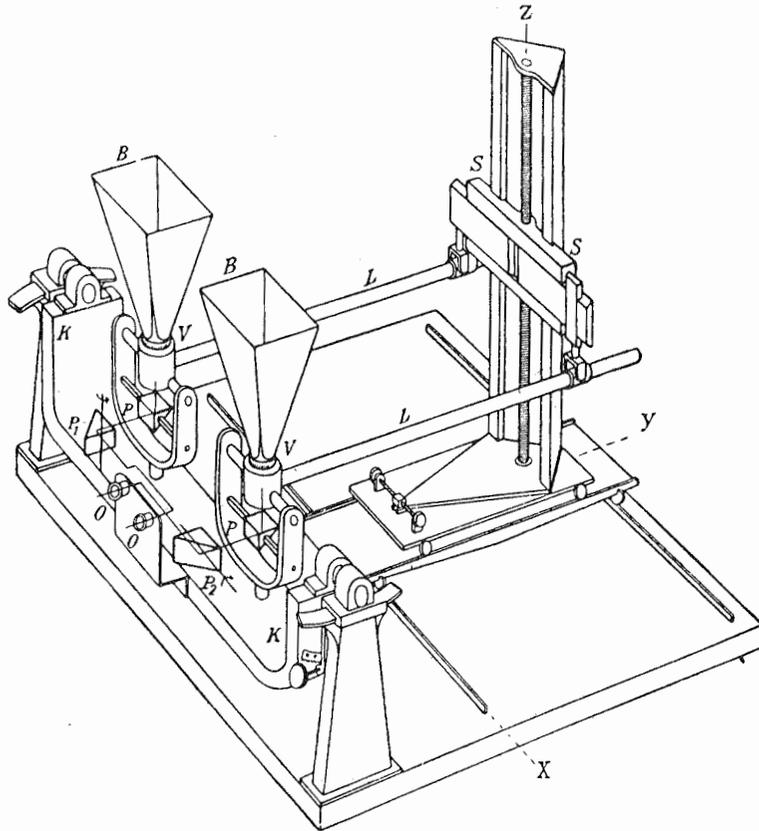


Fig. 382. — Autógrafo de Wild

pero la distancia entre los manguitos de las palancas, en el puente, es igual a la distancia entre los ejes verticales de los aparatos porta-vistas, más la base del levantamiento en la escala a que se construye el mapa.

La longitud de la base se toma con dos correderas horizontales que ajustan en el puente S , de modo que con cada una se toma la mitad de aquélla. La corredera de la derecha lleva unido un dispositivo para subir o bajar a voluntad el manguito-guía de la palanca L , con lo cual se puede tomar la diferencia de nivel existente entre los dos puntos de estación, extremos de la base.

Para anular la divergencia que en las imágenes produce este movimiento de la base y lograr la convergencia necesaria, la imagen de la izquierda se ve con el ojo derecho y la de la derecha con el izquierdo.

Las palancas L no actúan directamente sobre los aparatos porta-vistas, sino por intermedio de un mecanismo especial que hace que a cada cambio de dirección o de pendiente de las palancas, corresponda en las cámaras un cierto giro alrededor de sus ejes, de modo que quede satisfecha la ecuación (7). Este mecanismo, no representado en la figura, no responde rigurosamente a dicha condición (7), pero la aproximación que con el mismo se obtiene es completamente satisfactoria, como lo demuestran los resultados prácticos y las comprobaciones efectuadas.

Cuando se trata de vistas de igual oblicuidad φ respecto a la base, se podría hacer girar cada mitad de la base en el ángulo φ , de modo análogo a como se hace en el estereautógrafo (§ 90, pág. 383). En el autógrafo de Wild se toma esta oblicuidad girando todo el puente alrededor del eje Z , para lo cual en el carretón Y (fig. 382) va un dispositivo que permite girar el soporte del puente S . Pero el giro no corresponde a todo el ángulo φ .

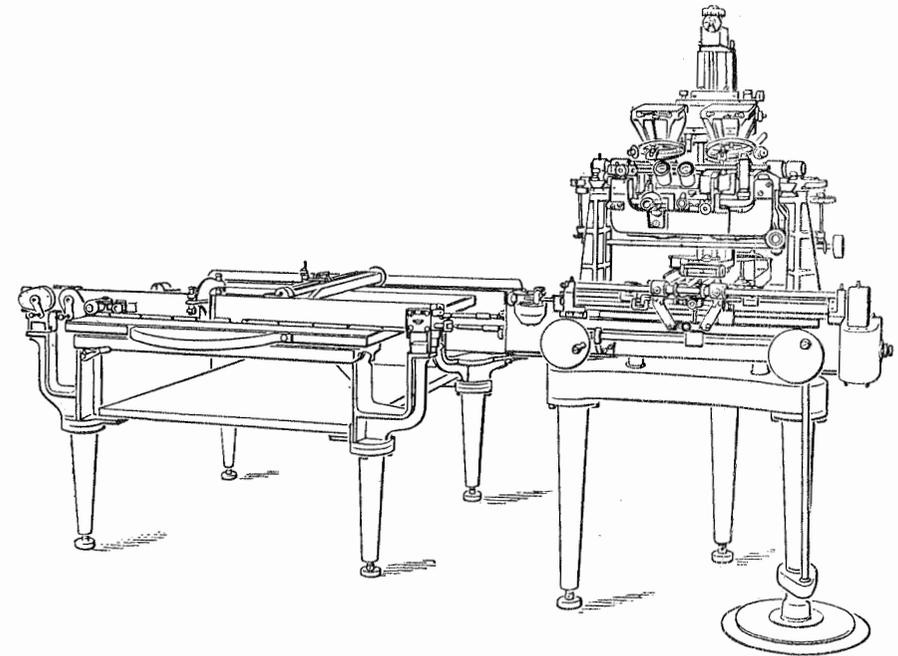


Fig. 383. — Autógrafo de Wild

sino que al igual que las mitades de la base, debe reducirse de manera que los dos manguitos-guías de las palancas L ocupen la posición que tendrían si estas mitades se hubieran girado en el ángulo φ . Tanto el ángulo reducido como la longitud reducida de la base se calculan sin dificultad alguna y se disponen en una tabla que acompaña a las instrucciones del aparato.

Si las vistas son convergentes o divergentes, se coloca el puente S en la posición correspondiente a la oblicuidad de la vista de la izquierda, y la convergencia o divergencia se toma haciendo girar el prisma P_1 (prisma de convergencia) alrededor de un eje vertical en un ángulo igual a la mitad del ángulo total de convergencia o divergencia.

Hasta aquí se ha supuesto que las vistas son verticales, es decir, de eje horizontal; supongamos ahora que las dos vistas tengan igual inclinación longitudinal, y en este caso basta hacer girar la parte basculante K alrededor de su eje horizontal en un ángulo igual al de inclinación, con lo cual tanto el sistema estereoscópico como los dos ejes de giro de

los aparatos porta-vistas, quedan colocados en la posición correspondiente a dicho ángulo de inclinación. Si las dos vistas están desigualmente inclinadas, se hace girar a la pieza K en el ángulo de inclinación de la cámara de la derecha, y la diferencia entre las dos inclinaciones se compensa con el prisma P_2 (prisma de inclinación), que puede girar alrededor de un eje horizontal.

En la figura 383 se ve el autógrafo de Wild, con un tablero de dibujo, sobre el cual va el lápiz trazador, que participa de los movimientos del puente en las direcciones X e Y . Para las vistas horizontales (ejes verticales) se puede acoplar el tablero con el cursor de las Z , en vez de estarlo con el de las Y , del mismo modo que en los instrumentos antes descritos.

Para el estudio más profundo y detallado del autógrafo de Wild, remitimos al lector a los siguientes autores:

HARRY. *Levantamientos estereofotogramétricos y aparatos reductores; métodos operatorios. Aplicación de la fotogrametría a los trabajos catastrales y topográficos en Suiza*. Colección de conferencias dadas en la Asociación de geómetras suizos en los días 7 y 8 de mayo de 1926, en la Escuela Superior Técnica de Zúrich.

BERCHTOLD. *El autógrafo de Wild* («Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1929). De esta monografía hemos tomado la figura 382 que representa esquemáticamente este instrumento.

BAESCHLIN. *Sobre el autógrafo de Wild* («Schweiz. Zeitschr. f. Verm.», 1929 y 1931).

§ 112. Reductores estereoscópicos con índice real flotante

Para terminar la descripción de aparatos reductores automáticos vamos a reseñar brevemente dos de éstos, en que la medición de las vistas en relieve se lleva a cabo de modo diferente a como se hace en los aparatos hasta ahora estudiados, en los cuales se obtenía, con el estereoscopio, una imagen virtual flotante de dos índices colocados en el anteojo, que se hacía coincidir con los diversos puntos de la vista en relieve del terreno, observada con el mismo estereoscopio. En los aparatos que vamos a describir a continuación se utiliza un índice real, que el observador ve al mismo tiempo que la vista en relieve del terreno, sobre la cual va colocando aquél para ir construyendo el mapa correspondiente.

El topógrafo canadiense Deville fué quien primero realizó experimentos de esta clase, que dió a conocer en una memoria sobre el empleo del estereoscopio de Wheatstone en los

levantamientos fotográficos, publicada en las «Transactions of the Royal Society of Canada, 2. Ser. Vol. 8, 1902/03». Sean B_1 y B_2 dos fotografías estereoscópicas (fig. 384) colocadas verticalmente sobre un tablero de dibujo, y que pueden observarse a través de una pantalla provista de dos orificios, por reflexión sobre los espejos S_1 y S_2 . Este dispositivo constituye un estereoscopio especular de Wheatstone, con el cual se ve en relieve, por detrás de los espejos, la parte del terreno representada en las fotografías. Los dos espejos llevan una capa muy fina de plata, de modo que además de reflejar los rayos luminosos procedentes de las dos vistas B_1 y B_2 , permiten ver a través de ella un objeto cualquiera situado detrás de los espejos. Es decir, que si se dispone un lápiz verticalmente por detrás de éstos, se podrá hacer coincidir con un punto cualquiera P de la vista en relieve, y de este modo pueden dibujarse sobre el papel todos los objetos del terreno que interese representar.

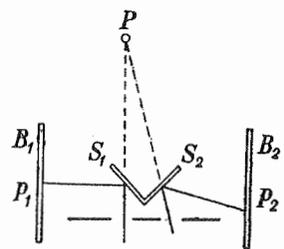


Fig. 384

El *estereotopómetro* de Prédhumeau está fundado en el experimento de Deville. Para tomar las vistas se emplea una cámara estereoscópica con sus dos objetivos distantes entre sí unos 65 mm y con placas de 7×13 cm, que se monta en un teodolito. El aparato se pone en estación sucesivamente en los dos extremos de una base, de tal modo que el eje de la cámara sea horizontal y perpendicular a la dirección de aquélla, es decir, que sólo se opera en el caso normal de la estereofotogrametría. Los objetivos tienen obturadores independientes; en el extremo de la izquierda de la base se hace la fotografía con el objetivo izquierdo, y en el extremo de la derecha con el derecho, y de este modo se tienen las dos vistas, una junto a otra en una misma placa, como en las fotografías estereoscópicas ordinarias.

La misma cámara sirve para la medición de las vistas, para lo cual se une por una parte con un estereoscopio, y por otra con el soporte de un índice luminoso. En la figura 385 se ve la disposición esquemática de estos elementos.

El soporte del índice, dispuesto en un disco de vidrio que se ilumina por detrás, consiste en un bastidor rectangular de cuatro varillas, dos de ellas verticales y las otras dos horizontales, de las cuales se ve en la figura 385 la varilla superior AB ; este bastidor puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por A . En C se ve la proyección de una quinta varilla, también vertical, que se desliza por sus extremos sobre las varillas horizontales, a lo largo del bastidor. La varilla C es, en realidad, el soporte del índice, que puede correrse sobre ella en sentido vertical. Por medio de dos manivelas puede mover el observador la varilla C en sentido horizontal y el índice en sentido vertical; además, con una rueda-pedal puede hacerse girar todo el bastidor alrededor del eje A , y de esta manera es posible colocar el índice en la posición que se quiera.

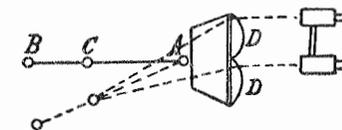


Fig. 385

Por detrás de la placa hay montadas en la cámara dos lentes colectoras D , cuyos respectivos puntos focales anteriores coinciden con los segundos puntos principales de los objetivos correspondientes.

El estereoscopio de observación está constituido por un anteojo doble, con el que se ven las dos fotografías, y que produce al mismo tiempo la inversión necesaria de las dos imágenes.

Las imágenes del índice luminoso, dadas por los dos objetivos, caen aproximadamente sobre el plano en que se forman las dos imágenes estereoscópicas. No importa que haya alguna separación o falta de coincidencia, porque siendo muy pequeña la abertura de los objetivos, resulta también muy pequeño el diámetro del cono luminoso por delante y por detrás de aquellas imágenes. Además, los dos haces de rayos luminosos pasan muy cerca de los focos de ambas lentes colectoras, por lo cual, al pasar por éstas se desvían de tal modo que inciden casi perpendicularmente sobre la placa, penetrando así en el estereoscopio. Por lo tanto, en este último se verá la imagen en relieve del terreno y al mismo tiempo el índice luminoso, que se puede hacer coincidir con un punto cualquiera de aquélla moviendo convenientemente las dos manivelas y la rueda-pedal; el estereoscopio se mueve automáticamente de manera que el índice permanece siempre en el centro del campo visual.

Para la construcción de planos, la varilla C , que sirve de soporte al índice, es a la vez el punzón marcador de un pantógrafo, cuyo lápiz trazador reproduce, a cualquier escala, el movimiento del índice en proyección horizontal.

El estereotopómetro fué construido por la casa Secretan de París, por encargo del Servicio Geográfico del Ejército francés.

Se encuentra la descripción detallada de este instrumento en el «Journal des Géomètres-Experts Français» de octubre de 1922. Al final de esta memoria se dice que el estereotopómetro puede también aplicarse a levantamientos con ejes oblicuos. También se halla descrito este aparato en el «Intern. Archiv f. Photogramm.», tomo VII, 2.^a parte, 1931.

§ 113. Orientación absoluta de las vistas

Ya vimos en la página 446, que las vistas no se orientaban en el autocartógrafo calculando los elementos de orientación, sino por un método óptico-mecánico, introducido por Hugershoff y por Gruber y cuya teoría expuso este último con todo género de detalles en 1924 en su memoria sobre *Determinación de puntos en el espacio*. Este método es el aplicado actualmente en todos los aparatos reductores. En la página 431 indicamos la ventaja que sobre la orientación de una vista respecto a tres puntos de apoyo dados, supone la orientación recíproca de un par de vistas, bastando después con orientar el modelo o vista en relieve resultante respecto a puntos de apoyo conocidos.

Vamos a ocuparnos brevemente de esta orientación recíproca de dos vistas, sin entrar en las particularidades propias de los diferentes aparatos construidos para la aplicación práctica de este método.

Imaginemos, en primer lugar, un sistema de coordenadas en el espacio, cuyo plano vertical xy contenga la base del levantamiento, y cuyo plano de las xz sea horizontal.

Se empieza por colocar una de las vistas, cuya orientación aproximada, apoyándose en puntos fijos conocidos, es fácil conseguir al cabo de algunos tanteos. Si la segunda vista se orientase con toda exactitud respecto a la primera, se podría ya llevar el índice a coincidir con cualquier punto del terreno, con sólo moverlo convenientemente en la dirección de los tres ejes coordenados. Si la orientación recíproca de ambas vistas es sólo aproximada, se puede enfocar el índice de la izquierda sobre un punto de la fotografía, aunque el índice de la derecha no caiga sobre el punto correspondiente de la fotografía de la derecha; pero sí se puede conseguir que este punto caiga exactamente por encima o por debajo del índice de la derecha. A la distancia entre el índice y el punto se llama *paralaje vertical o de altura* de este último y puede medirse corriendo el índice en la dirección de las z hasta que coincida con el punto, y leyendo en la escala de las z el camino recorrido.

Vamos a limitarnos a considerar dos vistas horizontales de igual altura; la paralaje de altura será la magnitud F , dada por la ecuación (3) de la página 433, y su relación con el error de orientación de la segunda vista respecto a la primera, estará dada por la fórmula (16) de la página 435. Es decir, que si llamamos p a la paralaje de altura, tendremos, según la fórmula últimamente citada:

$$p = \frac{\bar{x}}{y} \Delta y - \Delta \bar{x} + \frac{(x-b)\bar{x}}{y} \Delta \varphi_0' - \left(y + \frac{\bar{x}^2}{y} \right) \Delta \omega' + (x-b) \Delta \alpha'. \quad (1)$$

Por consiguiente, se variará la posición de la segunda vista de tal modo, que desaparezca la paralaje de altura para cinco puntos de la misma. La posición de estos cinco puntos debe escogerse de manera que se anule el mayor número posible de términos de la ecuación (1), para que, a ser posible, las paralajes de altura medidas dependan únicamente de una de las cinco incógnitas de la orientación. Así se podrá determinar el valor de esta incógnita, que indicará la corrección que hay que aplicar a la posición de la segunda vista. De este modo pueden irse hallando las correcciones para los distintos elementos de la

orientación, y repitiendo el procedimiento se llegará, por el método de las aproximaciones sucesivas, a la orientación definitiva de las dos vistas entre sí. Con alguna práctica, se lleva a cabo este método óptico-mecánico en una pequeña fracción del tiempo que sería necesario para calcular todos los elementos de la orientación recíproca.

Este método, expuesto tan a la ligera, está tratado con todo detalle, aplicado también a las vistas inclinadas, en la memoria de Gruber sobre *Determinación de puntos en el espacio* (Jena, 1924) antes citada; en este trabajo se refiere Gruber principalmente al estereoplanógrafo de Zeiss, pero puede hacerse extensivo, en general, a cualquier otro aparato reductor. En cuanto a la orientación de vistas en el aerocartógrafo de Hugershoff, publicó Gast un estudio muy completo en sus *Conferencias sobre Fotogrametría* (Leipzig, 1930).

Orientación de la vista en relieve. Una vez orientadas entre sí las dos fotografías, se tiene una vista en relieve del terreno, pero sin estar orientada respecto a la vertical y al sistema de coordenadas topográficas de aquél. Ya vimos anteriormente (pág. 436) que se puede llegar a la orientación absoluta de la vista en relieve disponiendo de tres puntos cuyas coordenadas topográficas sean conocidas. Una vez hallado el factor de aumento de la vista en relieve, hay que dar a ésta un giro alrededor del eje de las Z , y una inclinación respecto al plano de las XY , cuya magnitud y sentido pueden determinarse gráficamente por el método descrito en la página 437; ya vimos allí que el ángulo de inclinación Δv se descompone en un giro Δv_x alrededor del eje de las X , y en otro Δv_y alrededor del eje de las Y . Para realizar estos giros de la vista en relieve en el aparato reductor de que se trate, hay que variar convenientemente los elementos de orientación de ambas fotografías, y determinar estas variaciones en función de los componentes Δv_x , Δv_y y Δv_z . Para ello supongamos que la vista en relieve está desde luego orientada con bastante aproximación, de modo que las correcciones de los elementos de orientación habrán de ser pequeñas, y vamos a considerar sucesivamente los tres giros elementales.

1. *Giro alrededor del eje de las X.* Alrededor de uno de los puntos de estación O , se supone trazada una esfera de radio arbitrario, que cortará al eje de la vista, previamente orientada en un punto tal como H_0 (fig. 386). Sea φ_0 el acimut y ω_0 la inclinación de este eje. El círculo máximo determinado por el eje de las X y por el punto H_0 , cortará al círculo vertical ZH_0 bajo un ángulo k_0 . Si se hace girar la vista en relieve alrededor del eje de las X , el punto H_0 se moverá sobre un círculo menor perpendicular a dicho eje, hasta llegar a la posición H , y se tendrá que $XH_0 = XH = \sigma$. El acimut y la inclinación se convierten así en φ y ω , y el ángulo formado por el círculo máximo y el vertical antes considerados será ahora k , en la nueva posición de ambos círculos.

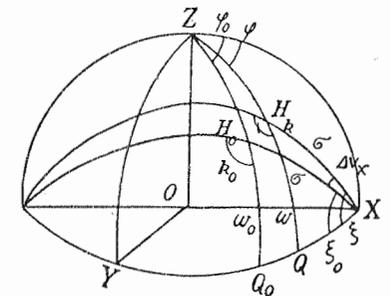


Fig. 386

Para comprender bien el significado de los ángulos k_0 y k , obsérvese que al girar el círculo máximo, con el cual debe hacerse solidaria la vista, formará la línea de unión de sus referencias laterales un cierto ángulo constante con dicho círculo, de vértice en H_0 , que será igual a la diferencia entre el ángulo k_0 y la inclinación lateral o transversal α_0 . En el punto H , este ángulo será igual a $k - \alpha$; es decir, que se tendrá

$$\alpha - \alpha_0 = k - k_0.$$

Llamando ξ_0 y ξ al ángulo de inclinación del círculo máximo en sus dos posiciones, tendremos que $\xi - \xi_0 = \Delta v_x$.

Designemos con símbolo análogo las diferencias angulares siguientes:

$$\varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi, \quad \omega - \omega_0 = \Delta \omega, \quad \kappa - \kappa_0 = \Delta \kappa \quad (2)$$

y calculemos estas tres diferencias en función de Δv_x , para lo cual nos servirán los dos triángulos esféricos rectángulos $H_0 X Q_0$ y $H X Q$.

En primer lugar se tiene:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \cos \xi_0 \operatorname{tg} \sigma \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi = \cos \xi \operatorname{tg} \sigma$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{\cos \xi}{\cos \xi_0}$$

Como hemos supuesto que $\varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi$ es una magnitud pequeña, tendremos, desarrollando en serie:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} \Delta \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{\cos \xi_0 - \operatorname{sen} \xi_0 \Delta \xi}{\cos \xi_0}$$

de donde, despejando $\Delta \varphi$:

$$\Delta \varphi = -\operatorname{tg} \xi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 \Delta \xi$$

Pero como, por otra parte,

$$\operatorname{tg} \xi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 = \operatorname{tg} \omega_0 \quad \text{y} \quad \Delta \xi = \Delta v_x \quad (3)$$

resulta, finalmente, prescindiendo del subíndice:

$$\Delta \varphi = -\operatorname{tg} \omega \cos \varphi \Delta v_x \quad (4)$$

Para hallar el valor de $\Delta \omega$ tenemos, en los mismos triángulos antes considerados:

$$\operatorname{sen} \omega_0 = \operatorname{sen} \xi_0 \operatorname{sen} \sigma \quad \operatorname{sen} \omega = \operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} \sigma$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega_0} = \frac{\operatorname{sen} \xi}{\operatorname{sen} \xi_0}$$

y desarrollando en serie, se tendrá, de modo análogo al resultado obtenido para $\Delta \varphi$:

$$\Delta \omega = \operatorname{tg} \omega_0 \cot \xi_0 \Delta \xi$$

y según (3):

$$\Delta \omega = \operatorname{sen} \varphi \Delta v_x \quad (5)$$

Por último, para calcular el valor de $\Delta \kappa$, partiremos de las relaciones:

$$\operatorname{sen} k_0 \operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen} \varphi_0 \quad \operatorname{sen} k \operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen} \varphi$$

de las cuales se deduce:

$$\frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{sen} k_0} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_0}$$

Desarrollando en serie, como anteriormente, y sustituyendo Δk por $\Delta \kappa$, tendremos:

$$\Delta \kappa = \frac{\cot \varphi_0}{\cot k_0} \Delta \varphi$$

Y poniendo aquí en vez de $\Delta \varphi$ su valor (4), con los subíndices, resulta:

$$\Delta \kappa = -\frac{\cot \varphi_0}{\cot k_0} \operatorname{tg} \omega_0 \cos \varphi_0 \Delta v_x$$

y como

$$-\operatorname{tg} k_0 \operatorname{sen} \omega_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$$

se tiene en definitiva:

$$\Delta \kappa = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega} \Delta v_x \quad (6)$$

Las fórmulas (4), (5) y (6) nos permiten calcular las correcciones $\Delta \varphi$, $\Delta \omega$ y $\Delta \kappa$.

El giro de la vista en relieve va acompañado de un giro de la base; por lo tanto, es preciso tomar en el aparato reductor de que se trate las componentes b_x , b_y , b_z de este último giro. Si giramos la base alrededor del eje de las X, en un ángulo Δv_x , la proyección de aquella sobre el plano de las xy habrá girado también en el mismo ángulo Δv_x . En la figura 387 está representada esta proyección por s_x , y ψ_x es el acimut de la misma: al girar s_x en el ángulo Δv_x , las primitivas componentes b_y^0 y b_z^0 se convierten en b_y y b_z , y como se ve en la figura se tendrá:

$$\begin{aligned} b_y &= s_x \cos(\psi_x + \Delta v_x) & b_z &= s_x \operatorname{sen}(\psi_x + \Delta v_x) \\ b_y^0 &= s_x \cos \psi_x & b_z^0 &= s_x \operatorname{sen} \psi_x \end{aligned}$$

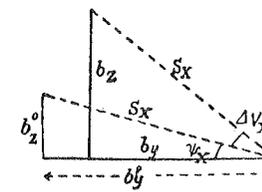


Fig. 387

En el supuesto de ser muy pequeño el ángulo Δv_x se deducen de estas expresiones los siguientes valores elementales:

$$\Delta b_y = -s_x \operatorname{sen} \psi_x \frac{\Delta v_x}{\rho} \quad \Delta b_z = +s_x \cos \psi_x \Delta v_x$$

o sea

$$\Delta b_y = -b_z \frac{\Delta v_x}{\rho} \quad \Delta b_z = +b_y \frac{\Delta v_x}{\rho} \quad (7)$$

2. Giro alrededor del eje de las Y. La figura 388 representa, en forma análoga a la figura 386, el giro Δv_y de la vista en relieve alrededor del eje de las Y; a causa de este giro, el punto principal de la fotografía pasa de H_0 a H, y el acimut φ_0 y la inclinación ω_0 se convierten en φ y ω respectivamente. Hay que calcular $\Delta \varphi$, $\Delta \omega$ y $\Delta \kappa$ en función de Δv_y , para lo cual nos serviremos de los triángulos esféricos rectángulos $YH_0 Q_0$ y $YH Q$. También hay que hallar las variaciones de las componentes de la base referidas al ángulo Δv_y .

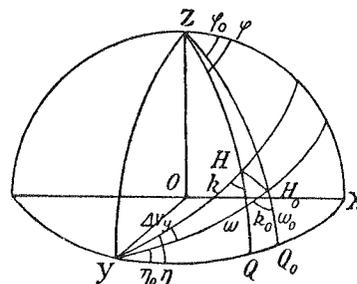


Fig. 388

Al tratar del giro Δv_x alrededor del eje de las X, hemos desarrollado el cálculo con todo detalle, por lo cual aquí nos vamos a limitar a consignar los resultados, por ser las fórmulas completamente análogas en uno y otro caso. En el supuesto de ser Δv_y un ángulo muy pequeño se obtienen los resultados:

$$\Delta \varphi = \operatorname{tg} \omega_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \Delta v_y \quad (8)$$

$$\Delta \omega = \cos \varphi_0 \Delta v_y \quad (9)$$

$$\Delta \kappa = -\frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\cos \omega_0} \Delta v_y \quad (10)$$

$$\Delta b_x = -b_z \frac{\Delta v_y}{\rho} \quad \Delta b_z = +b_x \frac{\Delta v_y}{\rho} \quad (11)$$

3. Giro alrededor del eje de las Z. Una vez orientada la vista en relieve respecto a la dirección vertical, por los giros alrededor de los ejes de las X y de las Y, hay que girar aquella alrededor del eje de las Z para que quede también orientada en acimut. Con este giro sólo cambian las direcciones acimutales de la vista, sin que varíe la inclinación longitudinal ni la lateral o transversal: es decir, que se tiene:

$$\Delta \varphi = \Delta v_x, \quad \Delta \omega = 0, \quad \Delta \kappa = 0 \quad (12)$$

Además es necesario variar el valor de las componentes b_x y b_y de la base, con arreglo a las correcciones siguientes:

$$\Delta b_x = b_y \frac{\Delta v_g}{\rho} \quad \Delta b_y = -b_x \frac{\Delta v_g}{\rho} \quad (13)$$

Las fórmulas (4) a (13) se aplican a la segunda fotografía con sólo introducir los valores φ' , ω' y κ' .

Una vez colocadas las dos fotografías en su posición definitiva, después de aplicadas las correcciones correspondientes, y tomadas las nuevas componentes de la base, puede ya procederse a la construcción del mapa con el aparato en cuestión. Para ver si este ajuste no ha alterado la orientación recíproca de las dos vistas, se comprueba que la paralaje de altura de los distintos puntos de la vista en relieve es igual a cero.

Estas fórmulas fueron desarrolladas por Gruber en su estudio sobre la *Determinación de puntos* antes citado, y aplicadas al estereoplanógrafo de Zeiss, pero fácilmente se hacen extensivas a los demás aparatos reductores. A Lacmann se deben varios nomogramas y otros medios auxiliares de cálculo para la aplicación de dichas fórmulas («Zeitschr. f. Verm.», 1928).

Precisión de los mapas aerofotogramétricos. Vamos a terminar el capítulo dedicado a Fotogrametría con unas observaciones sobre la precisión de los mapas o planos deducidos de vistas aéreas. Para la discusión de este punto, tan importante, se han hecho muchos experimentos, con mediciones exactas terrestres de los terrenos fotografiados, especialmente en Suiza y en Alemania.

En los estudios realizados en Suiza en el año 1928 con este objeto, se tomaron cuatro pares de vistas, obtenidas a unos 2100 m de altura, en las cuales se eligieron muchos puntos perfectamente identificados en la fotografía y en el terreno. Estos puntos se enlazaron topográficamente con toda exactitud y se llevaron sobre un mapa hecho con plancheta a escala 1 : 5000 y reducido después a escala 1 : 10000. Se colocó un par de fotografías en el autógrafo de Wild (§ 111, página 458), y se dispuso el mapa, orientado, sobre el tablero del autógrafo. Colocando el observador el índice estereoscópico sobre uno de dichos puntos, daba directamente el lápiz trazador la desviación entre el punto determinado fotogramétricamente y el punto situado topográficamente; también se comparaba la cota leída en el autógrafo con la medida en el terreno.

De este modo se compararon unos 100 puntos en los cuatro pares de placas, obteniéndose un error medio de $\pm 0,30$ mm en posición horizontal y de $\pm 0,51$ m en altura.

Estos trabajos fueron dados a conocer por Schneider en su memoria sobre la *Aerofotogrametría en Suiza*, publicada en la revista «Bildm. u. Luftbildw.» del año 1929.

El Servicio Topográfico alemán llevó a cabo en el verano de 1929 unos experimentos sobre precisión de planos aerofotogramétricos, para lo cual se hizo un levantamiento fotogramétrico desde alturas comprendidas entre 1100 y 1200 m, de los terrenos de dunas situados en la parte meridional de la isla de Sylt, en una extensión de unos 2 kilómetros cuadrados, y también se hizo el levantamiento topográfico del mismo terreno a escala 1 : 5000, con objeto de tener una idea sobre la posibilidad de aplicar el primer procedimiento a los trabajos de Catastro topográfico parcelario.

Para comprobar ambos levantamientos se hacía un tercero, por estereofotogrametría terrestre, con el cual se fijaron 81 puntos del terreno en posición y en altura. Estos puntos se pasaron al mapa aéreo y al topográfico, deduciendo sus cotas, en los dos planos, de las curvas de nivel correspondientes. Al calcular los errores medios de las alturas, teniendo

en cuenta las pendientes α del terreno, se obtuvieron los siguientes resultados para el valor de dichos errores:

$$\begin{aligned} \text{Levantamiento topográfico} & \dots \dots \dots m_h = \pm (0,30 + 0,44 \operatorname{tg} \alpha) \text{ m} \\ \text{Levantamiento aerofotogramétrico} & \dots \dots \dots m_h = \pm (0,43 + 0,44 \operatorname{tg} \alpha) \text{ m} \end{aligned}$$

Estos errores caen dentro de los límites tolerables para los planos catastrales parcelarios.

También merece citarse la serie de comparaciones hechas por el Servicio Topográfico alemán en el verano de 1927, en la isla de Amrum. La construcción de los planos, deducidos de vistas aéreas tomadas desde unos 1000 m de altura, se hizo con el autocartógrafo y con el estereoplanógrafo. Para la comprobación de los planos se hicieron itinerarios poligonales con nivelación trigonométrica y por alturas. En cuanto a precisión no se observó diferencia alguna apreciable entre los planos construidos con los dos aparatos, y la comprobación dió, para las curvas de nivel, el error medio siguiente:

$$m_h = \pm (0,35 + 0,28 \operatorname{tg} \alpha) \text{ m.}$$

Estos trabajos fueron detallados y criticados por Seidel en las «Mitt. d. Reichsamts f. Landesaufn.» de 1928; y los realizados en la isla de Sylt, antes citados, están reseñados en estas mismas memorias, años 1930/31.

Por último, citaremos los estudios comparativos realizados también en el año 1927 en Alemania sobre 10 vistas horizontales tomadas a unos 1600 m de altura de vuelo sobre la parte septentrional de las montañas de Harz, de las cuales se dedujo un mapa, a escala 1 : 5000, construido con el estereoplanógrafo, y que correspondía a una extensión de unos 4 kilómetros cuadrados. Sobre el terreno se habían levantado previamente, con taquímetro, dos fajas de unos 60 m de anchura cada una, de modo que las curvas de nivel del mapa aerofotogramétrico podían comprobarse dentro de estos perfiles. El error medio de altura resultó igual a $\pm 1,2$ m, o sea, expresado en función de la pendiente α del terreno:

$$m_h = \pm (0,80 + 2,0 \operatorname{tg} \alpha) \text{ m.}$$

Los puntos de apoyo eran conocidos de antemano, pero su posición no siempre fué la más favorable para las distintas fotografías.

En otro mapa, a escala 1 : 5000, deducido de un par de vistas, tomadas a 3000 m de altura, el error de altura resultante fué de $\pm 2,1$ m.

En el *Cursillo de Fotogrametría* de Gruber se tratan con bastante extensión todas estas cuestiones de precisión de planos fotogramétricos en general.

CAPÍTULO VI

Proyecto, trazado y replanteo de caminos, vías férreas, etc.

§ 114. Proyecto general

Al tratar, en un libro de Topografía o Geodesia, del estudio y proyecto de caminos de hierro, carreteras, canales, etc., se sobreentiende que sólo ha de considerarse el aspecto puramente topográfico de la cuestión, que si en muchos casos tiene escaso interés comparado con la parte geológica y la financiera o con las necesidades del tráfico, en otros muchos casos es de capital importancia por la economía que puede suponer en el movimiento de tierras, en las obras de fábrica dependientes del trazado, y en las curvas y pendientes resultantes.

Estos estudios se dividen en generales o previos, y en especiales o de trazado: los primeros, de que vamos a tratar en este párrafo, se refieren a la parte que pudiéramos llamar geodésica, y los especiales, de que tratan los párrafos 115 a 126, se ocupan de las operaciones de trazado y replanteo de alineaciones, curvas de enlace, etc.; también pertenecen al grupo de estudios particulares los de nivelación de perfiles longitudinales y transversales (§§ 4 y 5).

El proyecto general empieza por la posibilidad de la construcción de un camino a través de la zona prefijada y sigue por el señalamiento aproximado de su recorrido. Para ello hay que determinar la línea más conveniente dentro de una ancha faja de terreno, y en caso necesario decidir entre varias igualmente viables. La línea definitiva se adopta después de hechos los estudios especiales con los cuales se obtiene el levantamiento exacto de una faja estrecha de terreno con todos sus detalles.

El estudio de un camino o canal, tratándose de países civilizados, se hace casi siempre utilizando mapas y planos levantados con anterioridad, de tal modo, que no puede calificarse de bien hecho un estudio general que no utilice y aproveche todos estos elementos. Claro está que según sea el mapa de que se disponga así varía su utilización para el estudio de los caminos, pues hay regiones en que sólo se dispone de mapas planimétricos, sin curvas de nivel, otras en que la escala de aquéllos no permite la representación de detalles topográficos indispensables para el estudio completo, y en cambio puede haber zonas en que se disponga de mapas con curvas de nivel de pequeña equidistancia, a escala bastante grande y hasta con plano parcelario para tener en cuenta hasta las lindes de fincas, en igualdad de las demás circunstancias.

De la bondad del mapa de que se disponga y de su más o menos fácil aprovechamiento depende la rapidez y comodidad con que puede replantearse una línea fija en el terreno, o con que puede jalonarse, medirse y nivelarse una tal línea, para referir a ella todos los demás detalles.

En las regiones en que no se dispone de buenos mapas, puede procederse de dos modos: levantando un plano completo, sobre el cual se hace el trazado, o señalando provisionalmente en el terreno los puntos principales del levantamiento.

Nunca se ponderará demasiado la necesidad de que en todo país civilizado se tenga en cuenta, al hacer trabajos geodésicos y topográficos, la importancia que para el estudio y proyecto de caminos, canales, etc., tienen los mapas de la zona afectada por el trazado.

La elección de un sistema de coordenadas constituye una parte capital del estudio general de caminos.

Todos los geodestas conocen las ventajas, inmediatas y mediatas, que reporta a los trabajos geodésicos la adopción de un sistema único de coordenadas; pero en los estudios y proyectos de caminos se suele no tener en cuenta estas ventajas, transportando al papel poligonales principales sólo por distancias y ángulos, o cuando más, calculando las coordenadas de los vértices en un sistema de coordenadas arbitrariamente elegido.

En vez de tomar un sistema de coordenadas puramente local, es mejor elegir uno referido al del mapa topográfico del terreno de que se trate, con lo cual se obtienen muchas ventajas.

Acerca de la precisión de los planos necesarios para el proyecto general de caminos, canales, etc., puede decirse que de ordinario faltan instrucciones y normas concretas que la determinen, al contrario de lo que sucede con los planos topográficos y catastrales cuyos errores tolerables figuran en todos los reglamentos e instrucciones a ellos referentes. En muchas memorias y monografías sobre los estudios de caminos se juzga la precisión del levantamiento por el número de puntos tomados en un día.

A Koppe se debe un trabajo de investigación muy completo, tomando como base vías férreas de la red alemana ya construídas; comparando las cotas deducidas de las curvas de nivel con las halladas por nivelación directa, para un gran número de puntos, obtuvo para las primeras un error medio $m = \pm (0,5 + 5 \operatorname{tg} \alpha)$, en metros, donde α representa el ángulo de inclinación del terreno («Zeitschr. f. Verm.», 1905).

Una vez expuestas estas ideas generales, esbozaremos los diferentes métodos que se pueden seguir para realizar el estudio previo general de un trazado, según los datos de que se disponga.

Cuando existan planos topográficos y catastrales de la región de que se trate se amplían o reducen unos y otros a la escala más conveniente (1 : 2500, 1 : 5000 ó 1 : 10000) y se acoplan a lo largo de la zona en cuestión, para tener la planta de esta zona, operación que no presenta dificultad alguna cuando el sistema de coordenadas es el mismo en todos los planos. Si los planos catastrales fueran anteriores a la triangulación topográfica, o los vértices de ésta hubieran desaparecido, se replantean éstos y se establecen nuevos puntos fijos referidos a la red topográfica; estos puntos, cuya posición y altura se determinan por trisección (intersección inversa), constituyen al mismo tiempo la base del levantamiento altimétrico.

Cuando no se dispone de una triangulación y sí sólo de planos catastrales, se levanta un itinerario con cinta de acero o con estadía en la dirección general del trazado a lo largo de las diferentes hojas del mapa o plano, tomando como puntos extremos los cruces de caminos o puntos permanentes identificados en el terreno y en los levantamientos.

El levantamiento altimétrico necesario para trazar las curvas de nivel en el plano planimétrico (planta) obtenido como se acaba de indicar, debe siempre apoyarse en los datos existentes con anterioridad; cuando se disponga de planos topográficos altimétricos (nivelación) de la zona de que se trate, no hay que hacer levantamiento alguno, sino sólo

ampliarlos fotográficamente para pasar directamente las curvas de nivel a la planimetría o planta. Según los trabajos de Koppe sobre precisión de los planos a que antes nos hemos referido, son suficientes, para los estudios previos de caminos, los planos con nivelación a escala 1:25000 (mapa topográfico alemán y mapas por términos municipales de España, del Instituto Geográfico y Catastral), y su ampliación a escala 1:10000 no les hace perder precisión en cantidad apreciable.

En la mayor parte de los casos puede referirse el plano planimétrico a la triangulación topográfica, con lo cual el levantamiento altimétrico queda reducido a unir los vértices de esta última con itinerarios taquimétricos, fáciles de ejecutar en todos los terrenos y que constituyen la base de la nivelación taquimétrica; el relleno puede hacerse con itinerarios de brújula y cinta. Para el cierre en altura de los itinerarios se aplican directamente las cotas de los vértices de la triangulación, determinadas trigonométricamente, no siendo necesario establecer itinerarios de doble nivelación. El cierre sobre la triangulación topográfica supone, además, la ventaja de poder extender lateralmente cuanto se quiera el levantamiento.

Si no puede cerrarse sobre una red de triángulos, se levanta un itinerario poligonal de lados lo más largos que sea posible, que se toma como base del levantamiento. Además de los puntos de estación de esta poligonal, se toman como destacados otros puntos en los tramos, que se señalan de manera permanente; un itinerario de nivelación da después las alturas de los puntos que han de servir de estaciones para el levantamiento taquimétrico de la zona en cuestión. Este procedimiento resulta ordinariamente muy pesado, pues la medición exacta de longitudes y la nivelación en terrenos las más de las veces sin caminos de ninguna clase e impracticables son operaciones incómodas y costosas, por lo cual deben limitarse a una zona lo más estrecha posible, al contrario de lo indicado para el caso anterior.

No debemos terminar sin aludir a la nivelación barométrica, que a causa de su facilidad de ejecución se aplica con excelentes resultados a los estudios previos de trazados ferroviarios, siendo su precisión en la mayor parte de los casos más que suficiente. Este método puede emplearse como relleno de las mediciones taquimétricas, o por sí solo, para intercalar las cotas necesarias en una red conocida de puntos acotados. La posición de los puntos se determina a pasos, o mediante alineaciones auxiliares.

Finalmente, hemos de citar los métodos fotogramétricos, que tan buenos resultados han dado en estos últimos años en esta clase de estudios previos, sobre todo tratándose de terrenos montañosos y accidentados. En cada caso particular hay que ver si conviene más la fotogrametría terrestre o la aérea.

Ejemplo de proyecto de una vía férrea (Salzdetfurth, 1892). En la figura 389 está representado el levantamiento topográfico del valle del Lamme, cerca de Salzdetfurth, correspondiente al estudio previo de un ferrocarril secundario de Düngen a Salzdetfurth. La parte de la derecha de este valle fué levantada por la Dirección de ferrocarriles de Hannover, y la de la izquierda por la Escuela Superior Técnica de esta ciudad, como prácticas geodésicas.

En la vertiente de la derecha se tomó un itinerario poligonal, cuyos siete vértices se señalaron en el terreno (WP) y de los cuales se ven cinco en la figura 389, así como los tramos correspondientes. En el estado de la página 474 se tienen las longitudes de estos tramos, las distancias de los puntos de estación o vértices a Düngen y los ángulos de la poligonal.

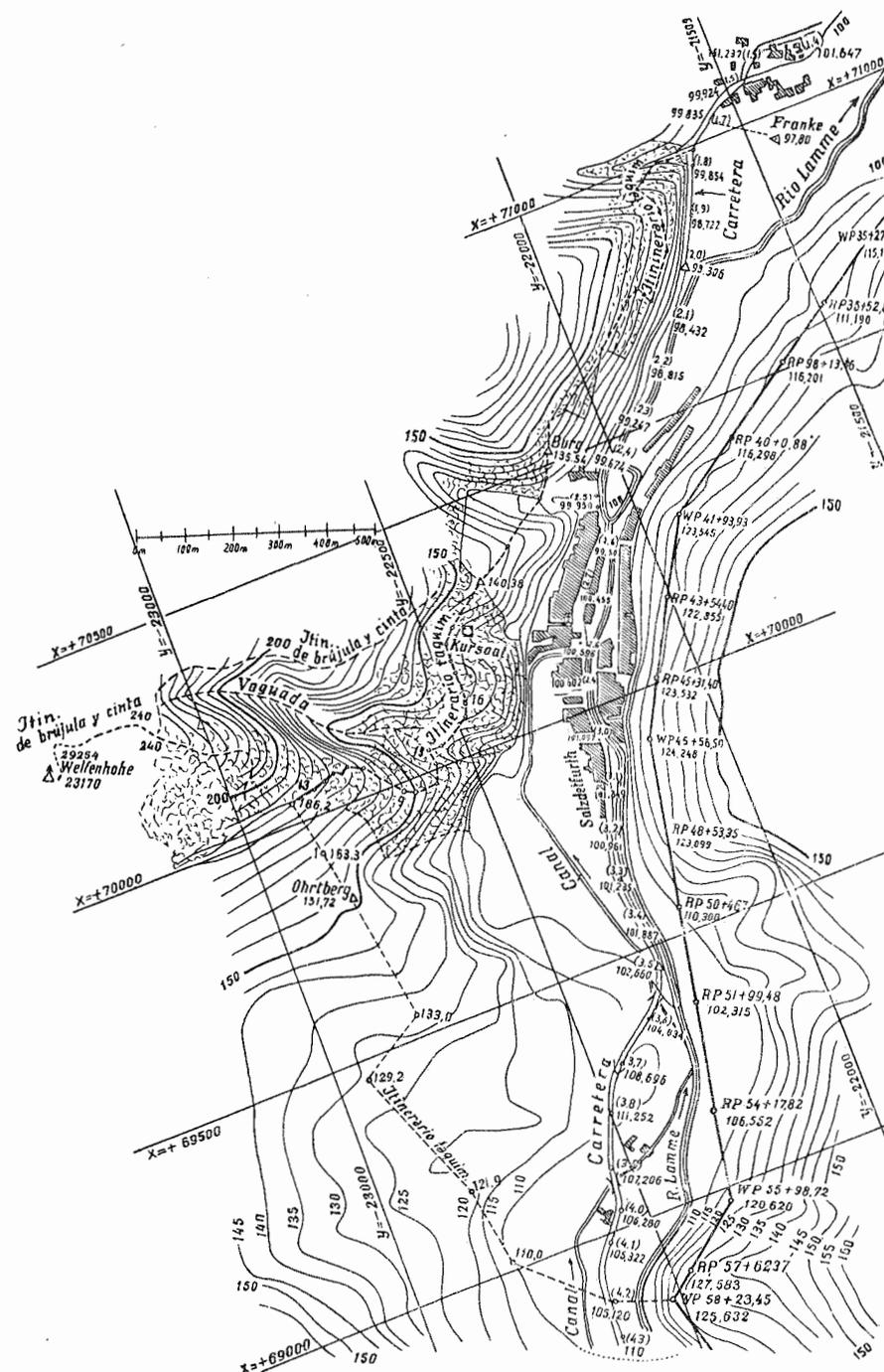


Fig. 389

Mapa, con curvas de nivel, del valle del Lamme. Escala original 1:2500
Equidistancia de las curvas de nivel, 5 m

Vértices	Distancias a Düngen	Tramos	Ángulos
WP (27) + 39,46 m	2739,46 m	428,50 m
WP (31) + 67,96	3167,96	359,75	227° 24' 1"
WP (35) + 27,71	3527,71	666,22	152 55 56
WP (41) + 93,93	4193,93	462,57	153 21 6
WP (46) + 56,50	4656,50	942,22	162 46 45
WP (55) + 98,72	5598,72	224,73	220 14 9
WP (58) + 23,45	5823,45		114 30 14
	3083,99 m	3083,99 m	

Los tramos se midieron una vez con reglones, por el método de banqueos, y otra vez, sólo como comprobación con cinta, pero sin gran cuidado ni precisión. Además de los vértices (WP) se señalaron otros puntos de referencia (RP) a distancias de 150-200 m unos de otros. Todos los puntos se señalaron con grandes estacas, consistentes en un barrote de encina de 1 m de longitud y sección cuadrada de 10 cm de lado (fig. 390), que llevaban clavado en su parte inferior un travesaño de 80 cm de longitud; en la cabeza tenían practicado un agujero para el alojamiento de un jalón o banderola, con un clavo a un lado, como punto de mira para la nivelación.

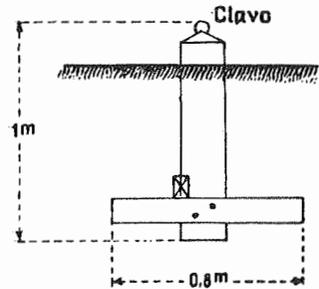


Fig. 390

Esta poligonal constituía la base de todo el levantamiento, y se desarrolló a escala 1 : 2500 un tramo tras otro, simplemente tomando la longitud de cada uno de éstos y orientando el siguiente respecto a la prolongación del primero por medio de la tangente del ángulo que ambos formaban en la poligonal.

Los puntos de estación WP y los de referencia RP estaban de tal modo distribuidos y dispuestos, en situación y en altura, que se podían utilizar directamente como estaciones de taquímetro, aunque alguna vez hubiera que estacionar fuera de centro, y de este modo se levantaba una faja de terreno de unos 200 m de anchura a un lado y a otro del itinerario-base sin la menor dificultad.

También se tomaban puntos de referencia a uno y otro lado para el acoplamiento con los planos de aquella región ya existentes, a escalas distintas unos de otros (1 : 2133,3; 1 : 1066,6; 1 : 1000; 1 : 500...), y sin red de coordenadas: todos estos planos se redujeron, con pantógrafo, a la escala del trazado (1 : 2500), y con papel de calcar se reunieron todos en uno solo, juntamente con el levantamiento hecho sobre la poligonal-base.

De esta manera se tenía un plano completo a escala 1 : 2500 de la zona afectada por el ferrocarril en proyecto, cuyo eje estaba constituido por la poligonal nivelada.

En la vertiente occidental del valle se hizo el levantamiento de otro modo, uniéndolo después al mapa topográfico general del terreno por una triangulación: se calcularon las coordenadas rectangulares de algunos puntos de enlace en un sistema convenientemente elegido, así como las de los vértices de la triangulación, y las de los puntos de estación (WP) y de referencia (RP) de la poligonal.

Vamos a describir a la ligera el enlace taquimétrico de los vértices de triangulación en la vertiente izquierda del valle, cubierta en gran parte por bosques y con grandes pendientes, como se ve en la figura 389. Si en esta parte hubiera que unir, por ejemplo, los vértices Tannenberg y Ohrtberg, con un itinerario poligonal corriente, no resultarían tan

pocos tramos como en la vertiente de la derecha, a causa de los inevitables rodeos y obstáculos que se encontrarían: en cambio, disponiendo de los puntos determinados trigonométricamente en posición y altura, bastaba unirlos entre sí por unos cuantos itinerarios taquimétricos, de los cuales están representados los más importantes en la figura 389, a saber:

1.	Itinerario taquimétrico Franke-Burg	20 tramos
2.	» » Burg-Tannenberg	5 »
3.	» » Tannenberg-Ohrtberg	22 »
4.	» » Ohrtberg-WP (58) + 23,45.	6 »
	Total	53 tramos

La longitud total de estos itinerarios era de 3500 m, es decir, que el promedio por tramo fué de 66 m. Claro está que en la parte con arbolado los tramos resultaban muy por bajo de este promedio: por ejemplo, entre Tannenberg y Ohrtberg, en la parte de bosque, hubo 19 tramos, con una longitud total de 750 m, resultando un promedio de unos 40 m por tramo. En cambio, en terreno despejado, entre Ohrtberg y el punto WP (58) + 23,45 había 1200 m y sólo seis tramos, resultando el promedio igual a 200 m por tramo. Todos los puntos de estación de estos itinerarios fueron señalados con estacas numeradas.

Los itinerarios fueron levantados con taquímetros del tipo representado en las figuras 190 y 191, pero utilizados como brújulas taquimétricas: es decir, que se obtenía la distancia por la parte de mira leída entre los hilos del retículo (número generador), la dirección acimutal la daba la brújula (rumbo), y el ángulo de altura se leía sobre el círculo cenital, para lo cual se hacía $i = z$ (véase figura 202 en la página 263). Todos los tramos se medían dos veces, en uno y otro sentido, o sea, que todas las estaciones eran recíprocas, leyendo siempre la distancia, el rumbo y la altura angular; la comprobación se hacía sobre el cuaderno, en el mismo campo, y en caso necesario se repetía la operación defectuosa. El cálculo de los itinerarios se hacía con las tablas taquimétricas (pág. 249).

En el párrafo 74 se describieron, detalladamente, las operaciones propias del levantamiento taquimétrico. También en el párrafo 73 vimos el modo de levantar itinerarios con brújula y cinta, que tanto se utilizaron en el estudio de que nos estamos ocupando, en la parte de bosque del terreno afectado por aquél.

Comparando el procedimiento o método trigonométrico seguido en la vertiente izquierda del valle de Salzdetfurth con el empleado en la vertiente derecha, se ve que todas las ventajas están de parte del primero, por la mayor facilidad en la medición de ángulos y distancias, por no estar afectado por los obstáculos y accidentes locales, etc.: además, aunque tratándose de levantamientos de zonas muy estrechas pierdan eficacia estas ventajas, siempre queda la de proporcionar un mejor cierre con el Mapa general de la región afectada por el proyecto. Esta comparación se refiere a la parte planimétrica, pero también respecto a la altimetría está la ventaja del lado de la triangulación, pues, por ejemplo, en cualquier punto en que se vea una señal, una torre, etc., se puede determinar con toda rapidez su altura mediante el ángulo de elevación correspondiente, con 0,1 m de aproximación (véase la red de alturas del párrafo 28, página 119).

Después de estudiado el proyecto general o de conjunto, se realizan los trazados y replanteos parciales o de detalle, de extensión siempre reducida y ya de mayor precisión. Cuando hay que hacer otros levantamientos complementarios o de relleno, se siguen las mismas normas que en el proyecto de conjunto, siempre referidos a la línea tomada como base, y en escalas comprendidas entre 1 : 2500 y 1 : 500. (Véase párrafo 74.)

Véase lo dicho en el párrafo 22 sobre nivelación de vías férreas.

BIBLIOGRAFÍA:

1883. RICHARD y MACKENSEN. *Manual de Ingeniería*. Leipzig, 1883.
 1883. Dirección de Ferrocarriles de Alemania. Colonia, 1883.
 1887. SARRE. «Zentralblatt der Bauverwaltung», 1887.
 1887. CAUER. *Aplicación de los clinómetros a los estudios de vías férreas*. «Zentralblatt der Bauverwaltung», 1887.
 1888. LAUNHARD. *Teoría de los trazados*. Hannover, 1888.
 1889. MANEGA. *Trazado de vías férreas*. Weimar, 1889.
 1890. GELBCKE y KOLL. *Empleo del barómetro aneróide en los estudios de vías férreas*. Colonia, 1890.
 1891. KELLER. *Proyectos de vías férreas*. «Zentralbl. d. Bauverwaltung», 1891.
 1891. JANENSCH. *Proyectos de vías férreas*. «Zentralbl. d. Bauverwaltung», 1891.
 1892. Dirección de Ferrocarriles Alemanes. *Instrucciones para la formación de proyectos de vías férreas*. Colonia, 1892.
 1893. SCHEPP. *El teodolito en los proyectos de vías férreas*. «Zeitschr. f. Verm.», 1893.
 1894. PULLER. *Las poligonales en los levantamientos taquimétricos para los estudios de vías férreas*. «Zeitschr. f. Verm.», 1894.
 1895. SCHEPP. *Los trabajos topográficos de los proyectos de vías férreas en relación con el Mapa Nacional*. «Zentralblatt der Bauverwaltung», 1895.
 1895. GELBCKE. «Cómo se hace un proyecto de vía férrea?» «Zentralbl. d. Bauverwaltung», 1895.
 1896. JORDAN. *Proyectos de vías férreas: su referencia al Mapa Nacional*. «Zentralbl. der Bauverwaltung», 1896; «Zeitschr. f. Verm.», 1897.
 1897. PAUL. *Estudio y trazado de caminos*. Wiesbaden, 1897 (2.ª edición, 1907).
 1897. JORDAN. *Sobre proyectos de vías férreas*. «Annalen für Gewerbe und Bauwesen». Tomo 41, 1897.
 1898. JORDAN. *Proyectos de vías férreas*. «Zeitschr. f. Arch.- und Ingenieurwesen», 1898.
 1898. PULLER. *Sobre proyectos de vías férreas*. «Zeitschr. f. Verm.», 1898.
 1899. JORDAN, HENKES, PULLER. «Zentralbl. d. Bauverwaltung», 1899. «Zeitschr. f. Verm.», 1899.
 1901. KOPPE. *La Geodesia en los estudios de vías férreas*. «Organ f. d. Fortschritte des Eisenbahnwesens». Tomo 38, 1901.
 1908. KOPPE. *La técnica topográfica de los estudios de vías férreas en Suiza*. «Organ f. d. Fortschritte d. Eisenb.», 1908.
 1910. KOPPE. *Los proyectos de vías férreas y canales en Italia*. «Zeitschr. f. Arch.- u. Ingen.», 1910.
 1910. KOPPE. *La técnica topográfica de los estudios de vías férreas en distintos países*. «Zeitschr. f. Verm.», 1910.
 1912. KOPPE. *La técnica topográfica de los estudios de vías férreas en Alemania y en Austria*. «Organ f. d. Fortsch. Eisenb.», 1912.

§ 115. Trazado o replanteo de alineaciones rectas

Se puede señalar una línea recta de poca longitud sobre el terreno alineando jalones a simple vista, como ya se dijo en el tomo I (pág. 30), y puesto que colocando nuevos jalones puede prolongarse la alineación tanto como se quiera, resulta que también es posible marcar una línea recta de gran longitud, a simple vista, con sólo el empleo de jalones o banderolas.

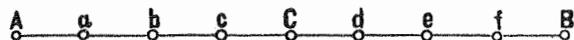


Fig. 391

En vez de este método, vamos a ocuparnos del establecimiento de alineaciones rectas con teodolito, como se hace en los trazados de carreteras, ferrocarriles, en las mediciones de bases, etc., para distancias de varios kilómetros.

Suponiendo fijos los dos extremos A y B de la alineación (fig. 391), podemos considerar tres casos:

- I. Alineación desde A o B a C
- II. Alineación desde C a A y B .
- III. Alineación por prolongaciones sucesivas desde A a a, b, c, C , etc.

I. Alineación desde los puntos extremos A o B . Este procedimiento parece, a primera vista, el más sencillo, y consiste en poner en estación un teodolito en el punto de partida A y visar desde allí el punto final B de la alineación. Mas para que sea aplicable este método es preciso que A y B se encuentren a cierta altura (natural o preparada), y que el punto C sea visible en la especie de garganta formada entre los dos primeros. Para ello, una vez enfilado desde A el punto B , se hace bascular el anteojo del teodolito y se marca el punto C haciendo señales a un ayudante o peón, con una banderola, un heliógrafo, o de noche con una linterna, etc., hasta que paulatinamente vaya acercándose a la alineación, quedando por último sobre el punto C .

La alineación de puntos por medio de señales es una operación pesada y nada fácil cuando se trata de distancias relativamente grandes; pasando de 1 a 2 Km hay que estudiar bien la *clave* si se quieren evitar confusiones y pérdida de tiempo y de trabajo. Por ejemplo, las señales de la vertical a la derecha y después al contrario dan desde lejos la impresión de un movimiento pendular arbitrario. Las señales deben hacerse cada vez en una sola dirección, por ejemplo, de la vertical hacia la derecha hasta el suelo, y sobre éste se vuelve a la vertical nuevamente, y se hace de nuevo la señal oportuna: el movimiento de retorno, a ras del suelo, no se ve desde lejos y se evita la confusión que supondría si se percibiera.

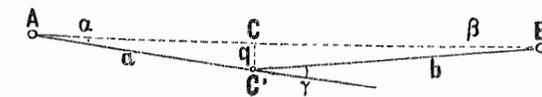


Fig. 392

La fijación de puntos a grandes distancias es una operación laboriosa, incómoda y desagradable y a veces muy difícil. En estos casos, no es preciso llegar hasta la determinación de C (fig. 392), sino que conviene mucho más contentarse con un punto conocido C' próximo a la alineación, y la distancia q a ésta se deduce de un ángulo muy pequeño α , que se mide con el teodolito desde la misma estación A , y de la distancia AC' ; en efecto, en la figura 392 se ve, que

$$CC' = q = \frac{a \alpha}{\rho}. \quad (1)$$

Si se conocen dos puntos auxiliares, C' y C'' , uno a la derecha y otro a la izquierda de la recta AB , el ángulo total formado por las visuales desde A a ambos puntos será $\alpha = \alpha' + \alpha''$, siendo α' y α'' los ángulos medidos para cada una de aquéllas; si q' y q'' son las distancias respectivas de C' y C'' a la alineación, su suma dará la distancia $C'C''$, es decir, $Q = q' + q''$, y de modo análogo a como se vió en el tomo I (§ 90, página 371, figura 422), se tendrá independientemente de la distancia al punto de estación:

$$q' = \frac{\alpha'}{\alpha} Q. \quad (2)$$

La fórmula semejante para q'' sirve de comprobación. Si los puntos auxiliares C' y C'' caen al mismo lado de la alineación, se tiene $\alpha = \alpha'' - \alpha'$ y $Q = q'' - q'$.

II. Alineación desde un punto intermedio C . Supongamos que se determina, provisionalmente, un punto C' (fig. 392) próximo al C , por medio de una escuadra de agri-

dos tangentes y el radio de la curva de enlace, y en los párrafos 118 a 120 veremos diferentes procedimientos para señalar puntos de relleno de la curva.

Supongamos que se tengan trazadas en el terreno dos alineaciones rectas SN y SN' (figura 394), que hay que unir mediante un arco de círculo TMT' , para lo cual deben señalarse, en primer lugar, los dos puntos de tangencia T y T' , así como el punto medio M del arco, llamado vértice de la curva.

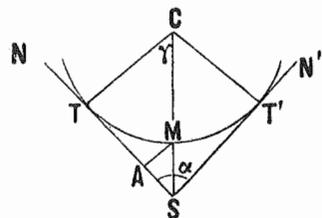


Fig. 394

En el punto de intersección S de las dos alineaciones rectas se pone en estación un teodolito y se mide el ángulo $NSN' = \alpha$, formado por ambas. La precisión con que se ha de medir el ángulo es tanto mayor cuanto menor sea éste, y cuanto mayor sea el radio del arco. Se toma la mitad del ángulo, es decir $\frac{\alpha}{2}$, a partir de ST y de ST' , con lo cual se

tiene una comprobación para este ángulo y para el trazado que se trata de realizar. Con este ángulo α y con el radio r , dado por el proyecto, se calculan todos los elementos necesarios para el replanteo propuesto. La mitad del ángulo en el centro TCT , o semiángulo central, será $TCS = T'CS = \gamma$, cuyo valor es:

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

La longitud de la tangente ST , igual a la ST' será:

$$ST = ST' = r \operatorname{tg} \gamma \tag{2}$$

Bajando desde el punto medio M del arco, la perpendicular MA a la tangente ST , se tiene:

$$\text{abscisa } TA = r \operatorname{sen} \gamma \quad \text{y} \quad \text{ordenada } AM = r - r \cos \gamma \tag{3}$$

El valor de la parte exterior de la secante vendrá dado por la siguiente igualdad:

$$SM = SC - MC = \frac{r}{\cos \gamma} - r \tag{4}$$

Y por último, el desarrollo o longitud del semiarco será:

$$TM = MT' = \frac{r\gamma}{\rho} \tag{5}$$

Ejemplo numérico. Supongamos que se da el radio $r = 420$ m, y que el ángulo medido sea $\alpha = 128^\circ 53' 26''$. Del valor de α se deduce directamente el de $\frac{\alpha}{2}$ y el de γ , a saber:

$$\frac{\alpha}{2} = 64^\circ 26' 43'', \quad 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \gamma = 25^\circ 33' 17''$$

$\log r$	2.62325	$\log r$	2.62325	$\log r$	2.62325
$\log \operatorname{sen} \gamma$	9 63485	$\log \cos \gamma$	9 95529	$\log \operatorname{tg} \gamma$	9.67956
$\log (r \operatorname{sen} \gamma)$	2.25810	$\log (r \cos \gamma)$	2 57854	$\log (r \operatorname{tg} \gamma)$	2.30281

$$\log \frac{r}{\cos \gamma} \quad 2.66796$$

$$r \cos \gamma = 378,92 \quad \frac{r}{\cos \gamma} = 465,54$$

$$r = 420,00 \quad r = 420,00$$

$$\left. \begin{aligned} r \operatorname{sen} \gamma &= 181,18, & r - r \cos \gamma &= 41,08; & \frac{r}{\cos \gamma} - r &= 45,54, & r \operatorname{tg} \gamma &= 200,82 \\ &= TA & = AM & & = MS & & = ST = ST' \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Con estos datos pueden ya replantearse ST , ST' y SM ; proyectando el punto M sobre ST y sobre ST' se tiene una comprobación de los valores SA y AM . Los valores numéricos de los elementos necesarios para el trazado se anotan en un croquis de éste, como se ve en la figura 399.

El cálculo del desarrollo del semiarco se efectúa del modo siguiente:

$\gamma = 25^\circ 33' 17''$	$\log r$	2.62325	
$\gamma' = 1533' 17''$	Cto. $\log \rho''$	4 68557	
$\gamma'' = 91997''$	$\log \gamma''$	4 96378	
	$\log \frac{r\gamma''}{\rho''}$	2.27260	$\frac{r\gamma''}{\rho''} = 187,33$ (7)

Aunque no es necesario conocer, de momento, la longitud del arco, hemos indicado su cálculo porque después se ha de necesitar para la medición y estaquillado de todo el eje.

Transformación de las fórmulas anteriores. Puede darse una forma más conveniente para el cálculo logarítmico, a las fórmulas antes halladas, con sólo poner $1 - \cos \gamma = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}$.

En efecto, haciendo esta sustitución en la (3), se tiene:

$$\text{ordenada } AM = r - r \cos \gamma = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \tag{8}$$

En la fórmula (4) se tiene:

$$\frac{1}{\cos \gamma} - 1 = \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

y la parte exterior de la secante será:

$$SM = r \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right) = r \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \tag{9}$$

Restando la primera de las fórmulas (3) de la (2), se tiene:

$$SA = ST - AT = r \operatorname{tg} \gamma - r \operatorname{sen} \gamma = r \operatorname{tg} \gamma (1 - \cos \gamma)$$

o sea

$$SA = 2r \operatorname{tg} \gamma \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \tag{10}$$

Aplicando estas fórmulas, más precisas, al ejemplo anterior, se obtienen los siguientes resultados numéricos:

$$AM = 41,087 \text{ m}, \quad SA = 19,646 \text{ m}, \quad SM = 45,542 \text{ m} \tag{11}$$

Tangente secundaria en el punto medio de la curva. Cuando el ángulo α formado por las dos tangentes es pequeño, y por lo tanto, la parte exterior SM de la secante es muy grande, se emplea la tangente $S'S''$ a la curva en su vértice o punto medio M (figura 395).

Suponiendo trazada la recta CS' , se tiene, llamando γ , como antes, al ángulo TCM :

$$TCS' = S'CM = \frac{\gamma}{2}$$

y evidentemente se tendrá también:

$$TS' = S'M = MS'' = S''T'$$

Al arco $TM'M$, de vértice M' , pueden aplicarse las mismas fórmulas antes halladas para el arco TMT' (fig. 394), con sólo poner $\frac{\gamma}{2}$ en vez de γ ; de este modo resulta (fig. 395):

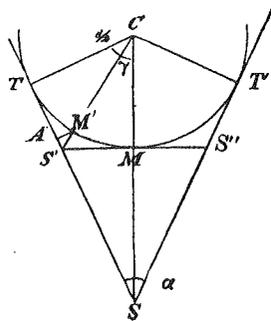


Fig. 395

tangente $S'T = S'M = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$

abscisa $TA = r \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$

ordenada $AM' = r - r \cos \frac{\gamma}{2}$

parte exterior de la secante $S'M' = r \left(\frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} - 1 \right) = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}$

longitud del semiarco $TM' = \frac{r\gamma}{2\rho}$

Análogamente son aplicables las fórmulas (8) a (10).

Tangente secundaria asimétrica. También se pueden utilizar tangentes secundarias no simétricas, es decir, tales que su punto de contacto no sea precisamente el vértice de la curva, como la DCE (fig. 396), que determina sobre las tangentes principales SA y SB segmentos desiguales t_1 y t_2 , cuyos valores respectivos son:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= DA = DC = r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ t_2 &= EC = EB = r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Los ángulos φ y ψ no están sujetos a más condición que la de ser su suma igual al suplemento de α , es decir, que $\varphi + \psi = 180^\circ - \alpha$.

Una vez determinados, en el proyecto, los valores aproximados de α , φ , ψ , y el valor exacto de r , se mide sobre el terreno, con toda precisión, el ángulo α , y considerando el valor de φ como aproximado, se calcula el de $\psi = 180^\circ - \alpha - \varphi$.

La longitud de cada tangente principal será:

$$t = SA = SB = r \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi). \quad (13)$$

Con este valor y los de t_1 y t_2 (12) se obtienen los de SD y SE , y como comprobación, una vez señalados los puntos D y E , se tiene:

$$t_1 + t_2 = DE = \frac{SD}{\operatorname{sen} \varphi} \operatorname{sen} \alpha = \frac{SE}{\operatorname{sen} \psi} \operatorname{sen} \alpha.$$

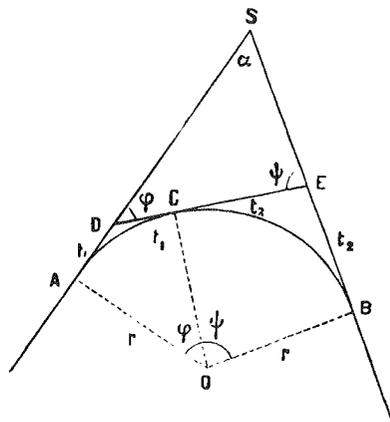


Fig. 396

Cuerdas principales y secundarias. En muchos casos, sobre todo tratándose de curvas planas, pueden utilizarse también, para comprobación o para replanteo de puntos nuevos de la curva, las cuerdas determinadas por los puntos principales de ésta, tales como TT' , TM y $T'M$ (figs. 394 y 395), o las AB , AC y BC (fig. 396).

En las figuras 394 y 395, el valor de la mitad de la cuerda TT' está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} TT' = TA = r \operatorname{sen} \gamma \quad (14)$$

y la mitad de la cuerda TM será:

$$\frac{1}{2} TM = r \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = TA \text{ (fig. 395).}$$

La flecha del arco, llamando F al punto medio TT' , en la figura 394, tiene por expresión:

$$FM = AM = r - r \cos \gamma = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \quad (15)$$

y las flechas correspondientes a los arcos secundarios TM y $T'M$ de la figura 395, serán:

$$F'M' = AM' = r - r \cos \frac{\gamma}{2} = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{4}.$$

Estas mismas fórmulas son aplicables a las cuerdas desiguales AC y BC de la figura 396, con la variación correspondiente a los ángulos en el centro.

En el ejemplo numérico anterior se tienen los siguientes valores para la semicuerda y la flecha:

$$\begin{aligned} \text{semicuerda} &= \frac{1}{2} TT' = TA = 181,18 \text{ m,} \\ \text{flecha} &= FM = AM = 41,09 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ángulo central obtuso. Cuando el arco de enlace de las dos alineaciones es más grande que una semicircunferencia, como se ve en la figura 397, es decir, cuando el ángulo en el centro 2γ es mayor que 180° , o sea, γ mayor que 90° , pueden aplicarse los métodos de replanteo y las fórmulas antes empleadas, sin tener en cuenta si es el arco TMT' (fig. 394) o su suplementario el que tiene que trazarse. Sin embargo, lo que se hace ordinariamente para medir el ángulo de las tangentes, o sea, de las alineaciones, es recurrir al método indirecto expuesto en el párrafo 117, y para el trazado del arco se sigue el procedimiento 1 del párrafo 120.

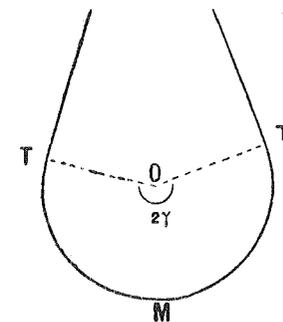


Fig. 397

§ 117. Caso en que es inaccesible el punto de intersección de las dos alineaciones

Sucede con frecuencia que el punto de intersección S de las dos tangentes, ya replanteadas, no es accesible, por caer sobre agua, en terreno arbolado, en escarpas o taludes, etcétera, o simplemente por estar demasiado distante o no resultar cómodo su acceso; en todos estos casos se puede prescindir del vértice S , uniendo entre sí dos puntos A y B de las alineaciones, lo más cerca que sea posible de los puntos de tangencia (fig. 398).

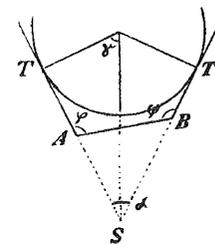


Fig. 398

Midiendo la distancia AB y los ángulos φ en A , y ψ en B , se tiene:

$$\alpha = \varphi + \psi - 180^\circ \quad (1)$$

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{o bien} \quad \gamma = 180^\circ - \frac{\varphi + \psi}{2} \quad (2)$$

$$SA = \frac{AB}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \psi \quad SB = \frac{AB}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \varphi. \quad (3)$$

Tomando otra línea $A'B'$ se tienen comprobados los resultados obtenidos con la primera AB .

De este modo queda reducido el problema al caso general de vértice S accesible.

Ejemplo numérico. Sean NA y $N'B$ (fig. 399) dos alineaciones rectas ya trazadas en el terreno, que hay que enlazar mediante un arco circular de 300 m de radio, tangente

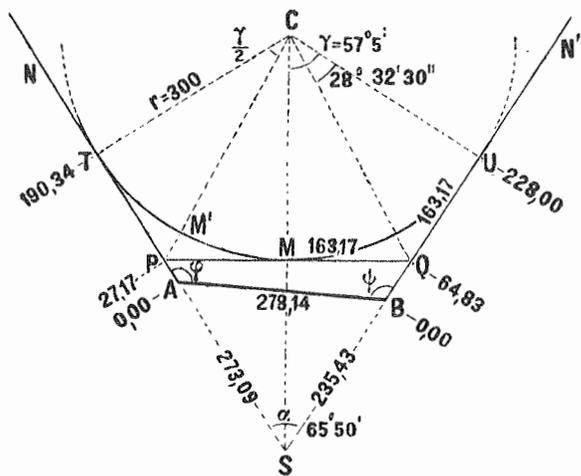


Fig. 399. — (Escala 1 : 10000; 1 cm = 100 m)

a ambas. Se supone que el punto de intersección S de estas dos es inaccesible, y que, por este motivo, se ha trazado la alineación recta AB que se mide sobre el terreno.

Los datos de campo son:

$$\begin{array}{ll} \text{Distancia } AB = 278,14 \text{ m} & \\ \text{Ángulo en } A & \text{Ángulo en } B \\ NAB = \varphi = 129^\circ 26' 35'' & ABN' = \psi = 116^\circ 23' 25''. \end{array}$$

El cálculo de los elementos necesarios para el trazado, según las fórmulas (1) a (3), y conforme a lo dicho en el párrafo 116, nos da:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 65^\circ 50' 0'', & AS = 273,09 \text{ m}, & BS = 235,43 \text{ m} \\ \gamma = 57^\circ 5' 0'', & \frac{\gamma}{2} = 28^\circ 32' 30'' & \end{array}$$

$$ST = r \operatorname{tg} \gamma = 463,43 \text{ m}, \quad PT = PM = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 163,17 \text{ m}.$$

A continuación se consignan todos los datos numéricos del trazado:

izquierda: $ST = 463,43 \text{ m}$	derecha: $SU = 463,43 \text{ m}$
$SA = 273,09$	$SB = 235,43$
$AT = 190,34 \text{ m}$	$BU = 228,00 \text{ m}$
$TP = 163,17$	$UQ = 163,17$
$AP = 27,17 \text{ m}$	$BQ = 64,83 \text{ m}$

Con los cuatro datos principales 27,17 m; 190,34 m; 64,83 m, y 228,00 m, se empieza el replanteo, tomando desde A y B estas distancias, medidas con mira, en la dirección correspondiente. Una vez fijados P y Q se replantea la línea PQ y se mide para tener una comprobación, ya que PQ debe ser igual a $2 \times 163,17 \text{ m} = 326,34 \text{ m}$; hecho esto, se marca en el terreno el punto medio M de la curva, procediéndose en todo lo demás como se indicó en el párrafo 116.

La figura 399 constituye, al mismo tiempo, un croquis acotado, a escala 1 : 10000.

Empleo de un punto auxiliar. Puede darse el caso de que no solamente sea inaccesible el punto de intersección S de las alineaciones, sino que tampoco puedan encontrarse dos puntos convenientes A y B sobre aquellas que se vean entre sí y cuya distancia AB se pueda medir directamente; pero probablemente se podrá tomar un punto auxiliar D (fig. 400) de tal modo que sea posible resolver el triángulo ADB en función de los dos lados AD y BD , y del ángulo δ comprendido entre ambos, y de esta manera queda el caso reducido al anterior (fig. 399).

Para ello supongamos un ejemplo numérico, correspondiente a la figura 400, que representa un trazado a escala 1 : 20000. Sean AT y BT' las dos alineaciones, ya señaladas sobre el terreno, y que hay que unir por un arco de círculo, de radio $r = 450 \text{ m}$, tangente a ambas, para lo cual hay que señalar, primeramente, los puntos T , M y T' .

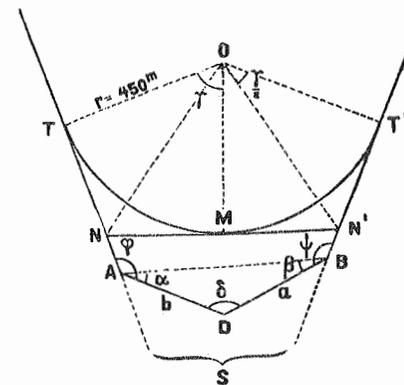


Fig. 400. — (Escala 1 : 20000; 1 cm = 200 m)

Como se supone que AB no puede medirse, se elige un punto D desde el cual se vean A y B y se toman los siguientes datos sobre el terreno:

$$\begin{array}{ll} \text{los dos lados} & AD = b = 276,28 \text{ m}, \quad BD = a = 304,52 \text{ m} \\ \text{los tres ángulos} & TAD = \varphi = 134^\circ 18' 20'', \quad DBT' = \psi = 137^\circ 55' 18'' \\ & ADB = \delta = 132^\circ 7' 12''. \end{array}$$

Se resuelve el triángulo ADB , del cual se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2} \delta}{(a + b) \sin \frac{1}{2} \delta};$$

$$AB = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2} \delta}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad \text{o también} \quad = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$\alpha = 25^\circ 10' 36'', \quad \beta = 22^\circ 42' 12'', \quad AB = 530,96 \text{ m}.$$

Los ángulos del triángulo ABS serán:

$$\left. \begin{array}{l} BAS = A = 180^\circ - (\varphi - \alpha) = 70^\circ 52' 16'' \\ SBA = B = 180^\circ - (\psi - \beta) = 64^\circ 46' 54'' \\ ASB = S = \varphi + \psi + \delta - 360^\circ = 44^\circ 20' 50'' \end{array} \right\} 180^\circ 0' 0''.$$

Así queda reducido el problema al caso de la figura 399, llamando S al ángulo hasta ahora designado con la letra α . Los elementos principales del trazado, siendo $r = 450 \text{ m}$, son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} AS = 687,20 \text{ m}, & BS = 717,65 \text{ m} \\ \gamma = 90^\circ - \frac{S}{2} = 67^\circ 49' 35'', & \frac{\gamma}{2} = 33^\circ 54' 47,5'' \\ ST = ST' = r \operatorname{tg} \gamma = 1104,11 \text{ m}, & NT = NM = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 302,54 \text{ m} \\ AN = 114,40 \text{ m}, & AT = 416,94 \text{ m}, \quad BN' = 83,95 \text{ m}, \quad BT' = 386,49 \text{ m}. \end{array}$$

También podrían unirse los puntos A y B por más de un punto, tomando, por ejemplo, un itinerario compuesto de varios puntos entre A y B , y calcular después la distancia AB y todos los ángulos necesarios. En este caso se hace el cálculo como si se tratara de una

poligonal, en coordenadas rectangulares, tomando una tangente como eje de abscisas, o refiriendo la poligonal a un sistema general de coordenadas (§ 114). A causa de los errores posibles en el trazado de direcciones (tomo I, párrafo 116), debe hacerse la unión de las tangentes, para la deducción del ángulo formado por éstas, con el menor número posible de puntos intermedios. Si el terreno obliga (por ejemplo, en montañas) a levantar un itinerario poligonal para poder medir la distancia entre dos puntos, y no se encuentran en las tangentes dos puntos *A, B* visibles entre sí, como en el caso de la figura 399, hay que procurar que la unión entre las alineaciones se haga tomando un solo punto auxiliar *D*, como se ve en la figura 400.

§ 118. Trazado de curvas por abscisas y ordenadas

Se puede aplicar este método de coordenadas rectangulares de dos modos diferentes: primero, por igualdad de diferencias de abscisas; segundo, por igualdad de arcos, o lo que es lo mismo, de cuerdas o de tangentes.

I. Trazado de arcos circulares con equidiferencias de abscisas. En la figura 401 se tiene:

$$y = B B' = A D = C A - C D$$

o sea, $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$. (1)

Es decir, que conociéndose el radio *r*, se puede calcular la ordenada *y* correspondiente a una abscisa cualquiera *x*, y así se podrán ir señalando en el terreno puntos de la curva, como se ve en la figura 402. Aunque las abscisas pueden ser cualesquiera, se acostumbra tomarlas en serie aritmética, de manera que la diferencia entre cada dos consecutivas es siempre la misma, mientras que los arcos correspondientes son desiguales.

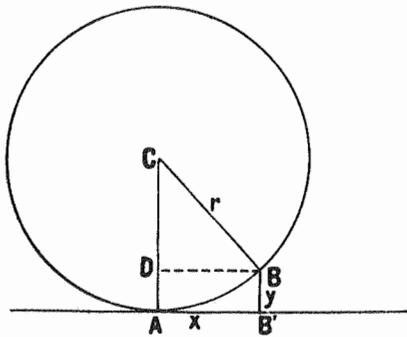


Fig. 401

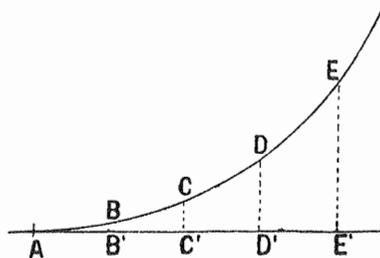


Fig. 402. $AB' = B'C' = C'D' = D'E'$

Para el cálculo de *y* en función de *x* se puede aplicar directamente la fórmula (1), o escribir ésta en la forma siguiente:

$$y = r - \sqrt{(r+x)(r-x)}. \quad (2)$$

Además, si el valor de *x* es relativamente pequeño, comparado con el de *r*, se puede desarrollar en serie el radical del segundo miembro de la fórmula (1), para lo cual pondremos:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

y aquí:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{r^4} - \frac{1}{16} \frac{x^6}{r^6} - \frac{5}{128} \frac{x^8}{r^8} - \dots$$

Sustituyendo en (1), se tendrá:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \frac{x^6}{16r^5} + \frac{5x^8}{128r^7} + \frac{7x^{10}}{256r^9} + \dots \quad (3)$$

En muchos casos (empleo de la regla de cálculo para ordenadas pequeñas), basta con tomar el primer término de esta serie, es decir,

$$y = \frac{x^2}{2r} \quad (4)$$

y si se toman los dos primeros términos, se tiene:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{2r} \cdot \frac{x^2}{2r} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r}. \quad (4a)$$

Este último resultado puede también obtenerse directamente de la fórmula (1) elevando al cuadrado y simplificando.

La fórmula aproximada (4) puede interpretarse en el sentido de que la curva a que da lugar es un arco de parábola en vez de un arco de círculo. Si se toman más de dos o tres términos de la serie (3), resulta su aplicación bastante dificultosa.

En la tabla XXV del Apéndice damos los valores de la ordenada *y*, para abscisas que varían en progresión aritmética, con suficiente aproximación para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Estas tablas se encuentran en la obra de Jordan titulada *Tablas auxiliares matemático-geodésicas*, Hannover (10.^a edición, 1914), y del mismo autor es la obrita sobre *Coordenadas del círculo para 200 radios*, Leipzig, 1881.

II. Trazado de curvas circulares, con arcos de igual longitud. Si *b* es la longitud de un arco (fig. 403), y φ su correspondiente ángulo en el centro, se tendrá, siendo *r* el radio:

$$\varphi = \frac{b}{r} \rho. \quad (5)$$

La abscisa *x* y la ordenada *y* del extremo de este arco son, según se ve en la figura:

$$x = r \text{ sen } \varphi, \quad y = r - r \text{ cos } \varphi \quad \text{o sea} \quad y = 2r \text{ sen}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

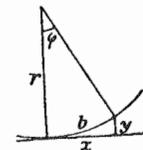


Fig. 403

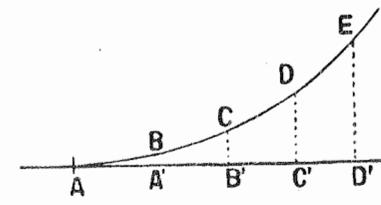


Fig. 404. $AB = BC = CD = DE$

Si el ángulo φ aumenta en progresión aritmética, los puntos que van resultando sobre el círculo determinan arcos de igual longitud, como indica la figura 404.

También hay muchas tablas para este cálculo de coordenadas en función del radio

y del ángulo en el centro, mereciendo especial mención el tratado, tan antiguo, de H. Kröhnke, sobre *Trazado de curvas en caminos y vías férreas*, aparecido en Leipzig en 1851 y publicado después en numerosas ediciones. (Véase final del párrafo 124.)

Comparación entre los métodos de equidiferencias de abscisas, y de igualdad de arcos. El método de diferencias iguales entre abscisas es más fácil para el trazado, pues sólo hay que ocuparse de los valores de las ordenadas, ya que las abscisas van resultando por sí solas al tomar siempre la misma distancia sobre la alineación (por ejemplo, de 20 m en 20 m). En cambio, el método de arcos de igual longitud entre cada dos puntos consecutivos, permite hacer una fácil comprobación del trazado, comparando entre sí las flechas o las cuerdas (véase figura 412), y tiene, además, un gran valor cuando los puntos señalados han de emplearse para el estaquillado y numeración definitiva por distancias al origen del trazado; si se conocen los números de orden de los puntos de contacto, se pueden tomar dos arcos desiguales b , con el ángulo φ , según la fórmula (5), y con las coordenadas x , y , deducidas de las fórmulas (6), al principio y en el fin del arco, y el resto trazarlo simplemente por el sistema de arcos iguales y ángulos en el centro iguales.

Como ejemplo citaremos el siguiente, dado por Mannheim: origen del arco = 739,14 m; fin del arco = 1569,77 m; diferencia, o sea longitud del arco = 830,63 m; radio = 450 m; ángulo en el centro $2\gamma = 117^{\circ} 51' 00''$. La longitud normal de cada trozo era $s = 25$ m, al cual correspondía un ángulo en el centro $\varphi = 3^{\circ} 53' 67,7''$ que cabía 32 veces en el total, ya que $32\varphi = 113^{\circ} 17' 66''$, con una longitud de 800 m de arco, faltando, por consiguiente, 30,63 m para igualar a la longitud total de la curva. El trazado se hizo como sigue:

Origen del arco	739,14 m			
32 {	número	750,00	10,86 m	1^{\circ} 53' 64''
	"	775,00	25,00	3 53 67,7
	"	800,00	50,00	6 53 67,7
	"	825,00	75,00	9 53 67,7
	"	850,00	100,00	12 53 67,7
Fin del arco	1569,77	19,77	2 79 68	
		830,63 m	117^{\circ} 51' 00''	

Es decir, que el ángulo φ de la figura 403 era para el primer punto $\varphi_1 = 1^{\circ} 53' 64''$; para el segundo, $\varphi_2 = 5^{\circ} 47' 32''$, y así sucesivamente. Como se ve, este método tiene la ventaja de que una vez señalados los puntos principales de la curva, sólo hay que medir el eje una vez, y los puntos de estación se obtienen directamente.

A Puller se debe un detallado estudio sobre el cálculo de la longitud total de un eje (itinerario) referido a un sistema general de coordenadas («Zeitschr. f. Verm.», 1894).

III. Trazado por coordenadas, con la cuerda como eje de abscisas. Al igual que el trazado sobre la tangente en el vértice de la curva como eje de abscisas, se puede replantear ésta tomando una cuerda como tal eje de abscisas. Como se ve en las figuras 401 y 402, las abscisas de los puntos del arco, referidas al punto de contacto A , o al punto medio de la cuerda D , como origen, son iguales en ambos casos, y la ordenada sobre la cuerda es igual a la flecha AD menos la ordenada sobre la tangente.

Cuando se trata de trazados de precisión, se señala la posición del pie de las ordenadas con el teodolito, pudiéndose marcar todos los pies valiéndose de este instrumento, o sólo algunos intermedios, señalándose los demás por medición directa con cadena o cinta. Las ordenadas no deben pasar de 20 a 25 m, para que puedan medirse de una sola vez con un

rodete, o poniendo dos veces, una a continuación de otra, un par de reglas de 5 m; para ello se determina la posición de las tangentes o las cuerdas secundarias correspondientes a un radio dado r .

§ 119. Trazado de curvas por ángulos inscritos

La igualdad entre los ángulos inscritos o semiinscritos (tangenciales) correspondientes a arcos iguales, puede servir para el trazado de curvas circulares de enlace, siendo dos los métodos fundados en esta propiedad:

- I. Trazado con instrumento fijo (teodolito) desde una estación.
- II. Trazado con instrumento portátil (sextante, escuadra, etc.) desde varias estaciones.

I. Trazado por ángulos tangenciales desde un punto fijo A (fig. 405). Cuando en un arco de círculo se tienen varios puntos A, B, C, D, E situados entre sí a igual distancia s , son iguales entre sí los ángulos inscritos, bajo los cuales se ven las cuerdas BC, CD y DE ; también es igual a estos ángulos inscritos el semiinscrito BAT formado por la tangente AT en A y la cuerda AB . Llamando α al valor constante de estos ángulos, y s al de la cuerda correspondiente, también constante, se tendrá:

$$\text{sen } \alpha = \frac{s}{2r} \quad (1)$$

Con esta fórmula se ha calculado la tabla siguiente, para $s = 20$, por ser de 20 m la longitud ordinaria de cintas y cadenas:

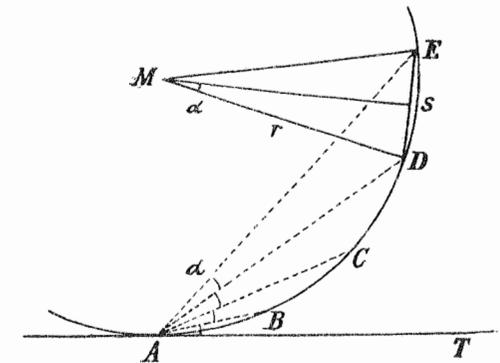


Fig. 405

r	α	r	α	r	α	r	α	r	α
100	5° 44' 21"	200	2° 51' 58"	300	1° 54' 37"	400	1° 25' 57"	700	0° 49' 7"
120	4 46 49	220	2 36 19	320	1 47 27	450	1 16 24	800	0 42 58
140	4 5 46	240	2 23 17	340	1 41 7	500	1 8 46	900	0 38 12
150	3 49 21	250	2 17 33	350	1 38 14	550	1 2 30	1000	0 34 23
160	3 35 0	260	2 12 15	360	1 35 30	600	0 57 18	2000	0 17 11
180	3 11 5	280	2 2 48	380	1 30 29	650	0 52 53	3000	0 11 28

Para trazar un arco de 380 m de radio, por ejemplo, se pone en estación un teodolito en un cierto punto A de aquél, orientado en dirección de la tangente AT , se le hace girar hacia la izquierda en un ángulo $1^{\circ} 30' 29''$ y se toma con la cinta o la cadena una distancia de 20 m en esta dirección, obteniéndose así el punto B ; se toma después con el teodolito el ángulo $TAC = 2\alpha = 3^{\circ} 0' 58''$, y con la cinta o cadena se determina el punto C (a 20 m del B); también se puede orientar el teodolito según la cuerda AE , y hacer el trazado en sentido inverso, es decir, de E hacia A . Desde una sola estación se puede trazar la curva a uno y otro lado de aquella.

En la tabla XXVI del Apéndice se da el valor del ángulo inscrito α correspondiente a la cuerda $s = 20$, y sus múltiplos, y radios comprendidos entre 100 m y 2500 m.

Hemos supuesto que la cuerda s tiene un valor entero $s = 20$ m. Si se quiere que los arcos parciales sean de una cierta longitud constante, se calcula el valor que debe tener el ángulo α , en función del ángulo φ dado por la fórmula (5) de la página 487, así como el valor del ángulo semiinscritor correspondiente al trozo de arco que quede junto al punto de estación. También se puede asignar al ángulo inscrito α un valor entero y constante, por ejemplo $\alpha = 1^\circ$ ó $\alpha = 30'$, etc., y calcular el valor correspondiente de su cuerda, con la fórmula (1), en la cual se tiene:

$$s = 2r \operatorname{sen} \alpha. \tag{2}$$

En la tabla XXVII del Apéndice damos unos valores auxiliares para hallar la longitud de la cuerda correspondiente a un ángulo inscrito comprendido entre $10'$ y 5° , para radios de 100 m a 5000 m. En esta tabla se ve que un arco de radio $r = 500$ m, se puede trazar con tres ángulos inscritos diferentes, a saber:

- 1.º con $\alpha = 2^\circ$, y $s = 34,900$ m,
- 2.º con $\alpha = 1^\circ$, y $s = 17,452$ m
- 3.º con $\alpha = 30'$, y $s = 8,727$ m.

Para hacer el trazado con más facilidad conviene disponer de una cinta métrica, cadena, etc., de longitud variable, o que al menos tenga una señal que pueda colocarse a la distancia que se quiera. Para este objeto debemos recomendar también el cable métrico de Lehrke, ya citado anteriormente al tratar de los itinerarios de cinta y brújula (§ 73).

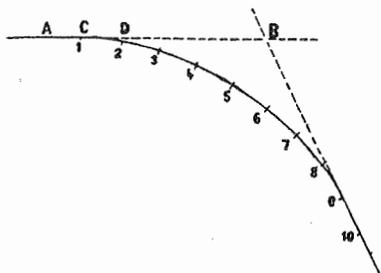


Fig. 406

En estos trazados con ángulo inscrito constante pueden tomarse los puntos a partir del teodolito, es decir, siguiendo el orden $A, 1, 2, 3 \dots 10$ (fig. 406), o en sentido contrario, o sea, en el orden $10, 9, 8, \dots 3, 2, 1, A$; el teodolito se supone, en ambos casos, fijo en A , siendo AB la tangente, ya replanteada.

El primer método (serie $A, 1, 2, 3 \dots 9, 10$) es el que más se emplea, porque es evidente que siempre se dispone del punto A , mientras que no sucede lo mismo con un punto final 10 desde el cual se pueda seguir el trazado hasta el A . Pero este segundo método (serie $10, 9, 8 \dots, 2, 1, A$) es de mayor precisión que el primero, porque es evidente que el trazado no puede quedar afectado por algún posible error en la dirección AB , por lo cual la curva resultante pasa por A en la dirección propuesta, mientras que haciendo el trazado desde el punto de estación del teodolito A , hacia el 10, es posible que este último resulte un poco al lado de la posición que en realidad debiera ocupar.

En su *Tratado de Geometría práctica* (1885) discute Vogler estos errores con todo detalle.

Como detalle curioso referente al método de los ángulos inscritos iguales, se describe en la «Zeitschr. f. Verm.», 1889, un aparato americano, análogo al teodolito, en el cual no se toman ni leen los ángulos con nonios ni microscopios, sino que por medio de un mecanismo de engranajes se van tomando los ángulos, de modo parecido a como se hace en el teodolito de Heyde (fig. 330 del tomo I, página 292), en el cual de modo automático se puede correr la alidada de 1° en 1° , sin necesidad de nonios ni micrómetros.

II. Trazado por ángulos inscritos, con instrumento portátil. Sean A y B dos puntos fijos (fig. 407) entre los cuales hay que intercalar otros varios $P, Q \dots$, con la condición de que todos se hallen sobre una misma circunferencia; esta condición se cumplirá cuando

las visuales dirigidas desde cada punto intermedio a los extremos A y B , formen entre sí un ángulo constante para todos los puntos comprendidos entre A y B . Llamando r al radio de la circunferencia, se calcula este ángulo constante con la fórmula siguiente:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AB}{2r}, \tag{3}$$

donde AB es la longitud de la cuerda que une los puntos A y B .

Si se tiene en A una tangente $T'AT$, el ángulo semi-inscrito $T'AB$ es igual, desde luego, al ángulo constante α .

Para hacer el trazado por este procedimiento, se emplea un goniómetro portátil; en la «Deutsche Bauzeitung» de 1875 describía Pockels un instrumento de esta clase (el *arcógrafo*), semejante a una escuadra de reflexión (tomo I, página 34), con la única diferencia de ser variable, a voluntad, el ángulo formado por los dos espejos.

Los goniómetros de reflexión empleados para otros usos, especialmente por los marinos (sextantes), son utilizables también para el trazado de curvas por el método de que estamos tratando, por lo cual no se construyen aparatos especiales para este objeto, dando excelente resultado tanto el sextante ordinario como la escuadra de prismas. Estos instrumentos se encuentran descritos con todo detalle en la obra de Jordan sobre *Determinación astronómica de hora y situación*, Berlín, 1885.

Para los ingenieros y topógrafos que no dispongan de sextantes, construye la casa Sprenger, de Berlín, una pequeña escuadra de prismas, de ángulo variable, representada en la figura 408. El diámetro de la caja cilíndrica, en cuyo interior van los prismas, es sólo de 7 cm.

En el tomo I (fig. 35, pág. 41) vimos la escuadra de prismas de Bauernfeind, análoga a la de Sprenger; así como con aquella, disponiendo normalmente entre sí las hipotenusas, se podían trazar alineaciones rectas, o sea, ángulos de 180° , con la escuadra de Sprenger, girando convenientemente los prismas, se pueden trazar ángulos cualesquiera.

En efecto, basta tener en cuenta que, según se vió en el tomo I (fig. 24, pág. 36), la cara hipotenusa de un prisma de sección rectangular isósceles obra como espejo para los rayos que penetran por una de las

otras dos caras; y como se sabe (tomo I, figuras 12 y 13, página 33) que el ángulo φ que mide la desviación experimentada por un rayo al reflejarse sobre dos espejos, es igual al doble del ángulo α formado por éstos, resulta evidente que con la disposición de los prismas en el instrumento de la figura 408, se pueden tomar ángulos cualesquiera.

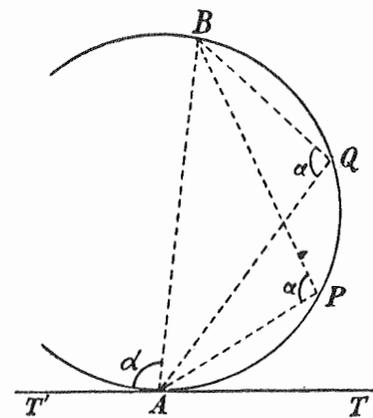


Fig. 407

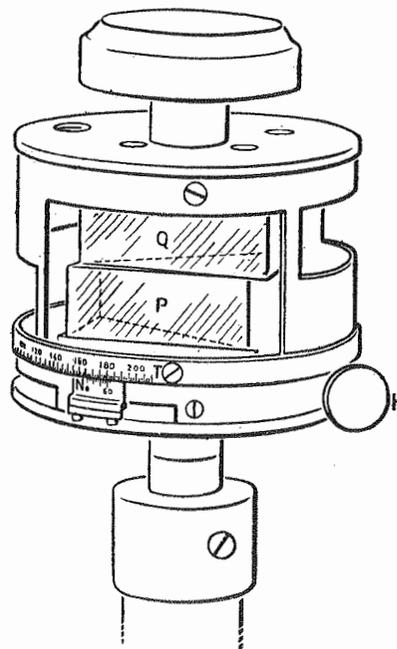


Fig. 408

Escuadra de prismas (diámetro = 7 cm)

En la figura 409 se ve la demostración geométrica de dicha ley; las fórmulas correspondientes son las que siguen:

$$\begin{aligned} \varphi + 2\alpha + 2\beta &= 360^\circ \\ \varphi &= 360^\circ - (2\alpha + 2\beta), & \alpha' &= 90^\circ - \alpha, & \beta' &= 90^\circ - \beta \\ \varphi &= \alpha' + \beta' = 180^\circ - (\alpha + \beta), & \psi &= \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

En *A* se supone el ojo del observador; *L* es un punto de la izquierda y *R* otro de la derecha; las dos visuales a *L* y *R* forman entre sí el ángulo propuesto $\varphi = 2\psi$. Por esta razón, la escala *T* del aparato de Sprenger (fig. 408) no corresponde a la división de todo el círculo de 0° a 360°, sino de 0° a 720°, o bien va numerada en dobles ángulos, como en el sextante.

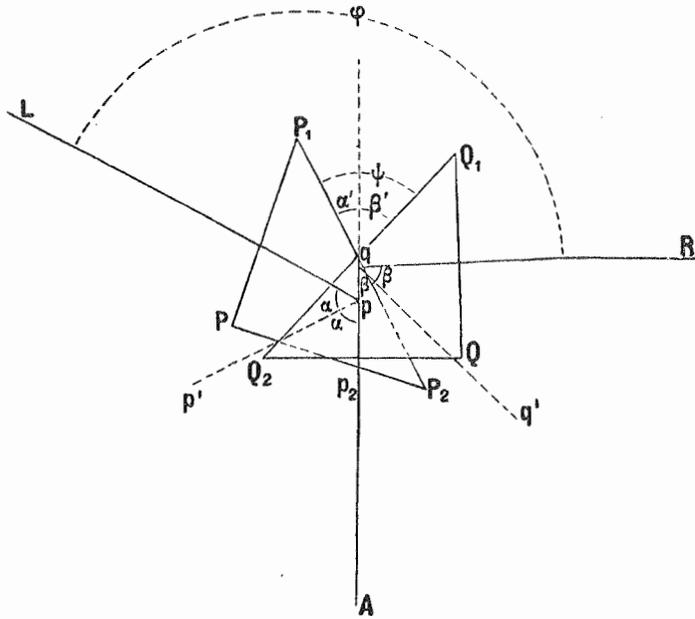


Fig. 409

instrumento en el tratado de Hunäus sobre *Instrumentos geométricos* (1864), y su estudio completo, con teoría de errores ópticos, en la obra de Jordan sobre *Determinación astronómica de hora y situación* (1885). En la «Zeitschr. f. Verm.» (1893) apareció también la descripción y el estudio de la escuadra de Sprenger.

La escuadra de Sprenger y los instrumentos análogos presentan el inconveniente de que sólo pueden emplearse en terrenos llanos, no siendo aplicables a terrenos accidentados, en que hay que medir ángulos horizontales formados por visuales desigualmente inclinadas sobre el horizonte. En estos casos debe emplearse una escuadra cónica (tomo I, figura 8, página 30), provista de limbo con 1' de aproximación y con dos hendiduras o mirillas que pueden fijarse en la posición que se quiera.

En terrenos montañosos puede emplearse este procedimiento, no tanto para el trazado definitivo, como para el estudio previo de un camino antes de hacer la explanación; una vez hecha ésta se traza la curva definitiva de enlace de las alineaciones que se trata de unir mediante un arco de círculo.

La figura 407 indica el modo de trazar un arco de círculo valiéndose de la escuadra de Sprenger, operación análoga a la de medir un ángulo con la escuadra de prismas.

La escuadra de Sprenger se diferencia de la de Steinheil (1830) sólo en que aquélla no tiene antejo y, en cambio, lleva un nivel esférico, innecesario por demás. Steinheil mismo describió su escuadra de prismas en las «Astronomische Nachrichten» (1834). También se encuentra este

§ 120. Métodos de aproximación

Se entiende por tales los procedimientos de trazado en que no se obtienen directamente puntos de la curva, sino otros muy próximos, y una vez conocida la distancia que de ella los separa, se refieren a la misma.

Estos métodos son de cuatro clases:

1. Por polígonos inscritos o circunscritos.
2. Por tangentes sucesivas.
3. Por distancias de cada punto a la cuerda anterior.
4. Por flechas y cuartos de flecha.

Vamos a describir estos métodos, los más empleados de entre todos los de aproximación.

1. El procedimiento más exacto consistiría en trazar, con el teodolito, un polígono regular inscrito o circunscrito, es decir, cuyos lados fueran respectivamente cuerdas o tangentes del arco de círculo; este es el método más empleado en los túneles.

a) *Polígono inscrito.* Sean *A, B, C, D...*, puntos del arco de círculo (fig. 410), cuyas cuerdas son $AB = BC = s$, $CD = s'$, ..., y los correspondientes ángulos en el centro $\varphi, \varphi, \varphi' \dots$. Según la fórmula (1) de la página 489, se tendrá:

$$\text{sen } \frac{1}{2}\varphi = \frac{s}{2r}, \quad \text{sen } \frac{1}{2}\varphi' = \frac{s'}{2r}. \tag{1}$$

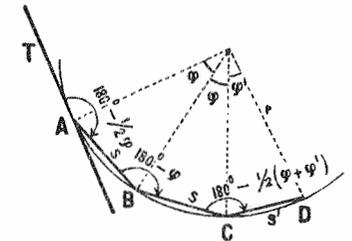


Fig. 410

Los ángulos interiores del polígono que hay que tomar con el teodolito serán, por consiguiente: el primero, contado a partir de la tangente *TA*,

$$TAB = 180^\circ - \frac{1}{2}\varphi;$$

y por lo tanto, el segundo ángulo será:

$$ABC = 180^\circ - \varphi, \tag{2}$$

por ser iguales las dos cuerdas *AB* y *BC*. Para las cuerdas desiguales *BC* y *CD*, y ángulos en el centro φ y φ' , el ángulo interior del polígono será:

$$BCD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') \tag{3}$$

y así sucesivamente.

b) *Polígono circunscrito.* Como se vió en la figura 395, se puede trazar un polígono circunscrito al arco por medio de los ángulos iguales *TS'M* y *MS''T'* formados por la tangente en el vértice (o de los desiguales *CDA* y *BEC* de la figura 396) y de las correspondientes longitudes de las tangentes, que dan directamente los puntos de tangencia y los de intersección de aquéllas.

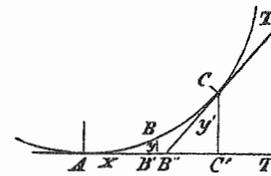


Fig. 411

2. En la figura 411 se suponen señalados los dos puntos *B* y *C*, por coordenadas referidas a la tangente *AT* como eje de abscisas y al punto *A* como origen, de tal modo que las distancias *AB* y *BC* sean iguales entre sí. Llamando *b* a la longi-

tud de cada arco, es decir, si $AB = BC = b$, se tiene, según las fórmulas (5) y (6) de la página 487:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{b}{r} \rho \\ AB' &= r \operatorname{sen} \varphi = x & B'B &= 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = y \\ AC' &= r \operatorname{sen} 2\varphi & C'C &= 2r \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Para determinar la tangente $B''C$ a la curva en el punto C , se emplea únicamente la pequeña distancia $B'B''$, deducida con exactitud suficiente del triángulo rectángulo $BB'B''$ donde $B'B = y$, y AB'' se toma como igual a x , teniéndose así:

$$B'B'' = \frac{xy}{r} \quad (5)$$

De este modo se determina el punto B'' , y se opera sobre la tangente $B''CT'$ de igual modo que antes sobre la AT .

3. Otro método de aproximación muy fácil es el representado en la figura 412, según el cual se hace el trazado por cuerdas sucesivas iguales y distancia de cada punto a la cuerda anterior.

Sean $A, B, C, D \dots$ puntos de la curva situados a igual distancia b uno de otro (por ejemplo, $b = 20$ m); el ángulo φ en el centro correspondiente a la cuerda b se calcula con la fórmula (5) de la página 487, ó con la (1) de la página 489, y una vez conocido este ángulo, se tendrá para valor de las coordenadas de B referidas a la tangente en A como eje de abscisas:

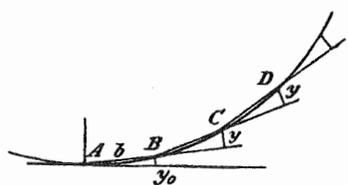


Fig. 412

$$y_0 = b \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}, \quad x_0 = b \cos \frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

y para los puntos C, D, \dots , las coordenadas respecto a las prolongaciones $AB, BC \dots$ de las cuerdas como ejes de abscisas serán:

$$y = b \operatorname{sen} \varphi, \quad x = b \cos \varphi. \quad (7)$$

Con suficiente exactitud se puede tomar también para valor de la ordenada de B , el dado por las fórmulas aproximadas (4) o (4 a) de la página 487; es decir:

$$y_0 = \frac{b^2}{2r} \quad (8)$$

También se puede calcular de modo análogo la ordenada de C respecto a la tangente en A como eje de abscisas, y se tendrá:

$$\text{ordenada de } C = \frac{(2b)^2}{2r} = 2 \frac{b^2}{r} = 4y_0.$$

La distancia y (fig. 412) del punto C a la prolongación de la cuerda AB , es igual a la mitad de la ordenada calculada para C , es decir,

$$y = 2y_0 = \frac{b^2}{r} \quad (9)$$

Por ejemplo, para $b = 20$ m y $r = 480$ m se tiene:

$$y_0 = 0,417 \text{ m} \quad \text{e} \quad y = 0,833 \text{ m}.$$

De este modo puede hacerse todo el trazado de la curva con los valores de b y de y , utilizando para ello, con preferencia, la cinta métrica o rodete; se coloca una estaca en A , se extiende la cinta en la dirección de la tangente y tomando $y_0 = 0,417$ m se marca el punto B . Se vuelve a extender la cinta, clavando una estaca en B y otra en la prolongación de AB , en el punto en que termine la cinta; tomando perpendicularmente a esta dirección la distancia $y = 0,833$ m, se tiene el punto C . Esta longitud constante $y = 0,833$ m se marca en una varilla o regla, para no tener que emplear la cinta al tomar y .

Este método es extraordinariamente rápido; la velocidad con que se puede llevar a cabo es casi la misma que la de simple medición de una alineación recta, ya que la toma del punto sobre la curva apenas supone tiempo alguno; además no hay que recorrer más camino que el arco mismo, por lo cual tiene un valor excepcional en terrenos con arbolado o sembrados, en túneles, etc.

Claro está que no deja de ser un inconveniente la acumulación de errores, a la cual pueden aplicarse las leyes estudiadas en el tomo I (pág. 494) para las poligonales; según la fórmula (7) allí deducida, el error medio transversal para n puntos será:

$$q = s \frac{m}{\rho} \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = e \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (10)$$

donde $s \frac{m}{\rho} = e$ es el error medio para un punto. Haciendo este error e igual a ± 1 cm, se tiene:

Número de puntos $n =$	5	10	20
Error medio $q =$	± 7 cm	± 20 cm	± 54 cm.

Con estos datos puede juzgarse, en cada caso particular, de la conveniencia de aplicar este método, tan expeditivo, pero falto de gran precisión; por ejemplo, si en un trazado con diez puntos no debe pasarse de un error medio total de ± 5 cm, el error medio para un punto deberá ser $e = \pm 1/4$ cm.

4. La fórmula aproximada (4) de la página 487, $y = \frac{x^2}{2r}$, tiene diferentes aplicaciones. Por ejemplo, si en la figura 413 se conocen la cuerda $AB = l$ y el radio r del arco ACB , la flecha de este último será:

$$CD = \frac{l^2}{8r} \quad (11)$$

En esta fórmula está fundado el método llamado *de los cuartos de flecha*, que consiste en tomar sobre la cuerda secundaria AC o sobre la CB (fig. 413) la flecha correspondiente h' , que es igual a $\frac{h}{4}$, porque según la fórmula (11),

$$h' = \left(\frac{l}{2}\right)^2 : 8r = \frac{l^2}{32r} = \frac{h}{4}.$$

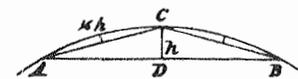


Fig. 413

Este método está muy indicado para intercalar puntos del arco, y también cuando se trata de arcos de poca longitud y mucha flecha, como sucede en el trazado de calles y en algunas curvas de carreteras.

Supongamos que se dan tres puntos A, S, E (fig. 414); se puede medir la flecha $FS = 16,28$, sin necesidad de conocer el radio, y tomando la cuarta parte de FS , a partir de K , es decir, $KL = 4,07$, se determina el punto L del arco. Dentro de la aproximación con que se hace este trazado, si se dan los puntos A y E y el punto de intersección T de las tangentes, se puede tomar el vértice S de la curva en el punto medio de FT .

Tomando esta distancia a partir del punto D , se señala sobre el terreno el punto pedido T .

En el caso de no poderse trazar directamente la perpendicular CD o de no ser posible la medición directa de DT , se toma un punto auxiliar H , y se resuelve el triángulo rectángulo HCD , midiendo la hipotenusa HC y el ángulo $CHD = \alpha$, con lo cual pueden ya calcularse los catetos, a saber:

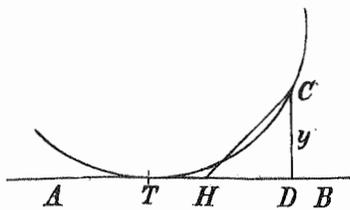


Fig. 419. $TD = x$, $DC = y$

$$HD = HC \cos \alpha, \quad CD = HC \sin \alpha = y.$$

Con este valor de y puede ya hallarse el de x , por la fórmula antes encontrada, y para determinar el punto de tangencia T , bastará medir la distancia $HT = x - HD$.

III. Trazado de las tangentes. Cuando todo el arco, o parte del mismo, se ha replanteado antes que las alineaciones rectas, hay que resolver el problema de trazar éstas, tangentes al arco ya trazado. Este problema se puede resolver empíricamente del modo representado en la figura 420: supongamos que se tienen trazados en el terreno dos arcos y que se quiere trazar una tangente TT común a ambos; se ve en qué sitios ha de tocar, aproximadamente, esta recta con los arcos, y señalando un gran número de puntos de estos últimos, se halla la posición de la recta AB por tanteos desde A o desde B , o también por medio de un teodolito, desde un punto intermedio C .

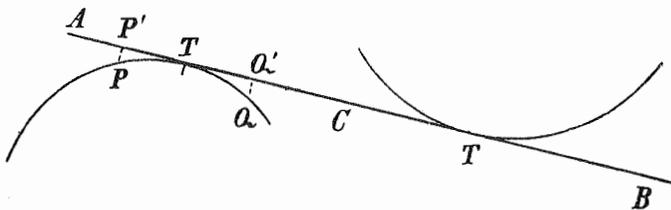


Fig. 420

Cuando no sólo se quiere determinar la posición de la tangente, sino también, y de un modo preciso, la de los puntos de tangencia, se calculan las ordenadas de dos puntos próximos a éstas, por ejemplo, P y Q :

$$P'T = \sqrt{PP'(2r - PP')},$$

$$Q'T = \sqrt{QQ'(2r - QQ')}$$

y así se determina, dos veces, el punto T .

También puede resolverse directamente este problema del modo indicado en la figura 421. Supongamos que hay que trazar una tangente común BC a dos arcos, de radios r_1 y r_2 , tangentes respectivamente a las alineaciones rectas AT_1 y DT_2 en A y D .

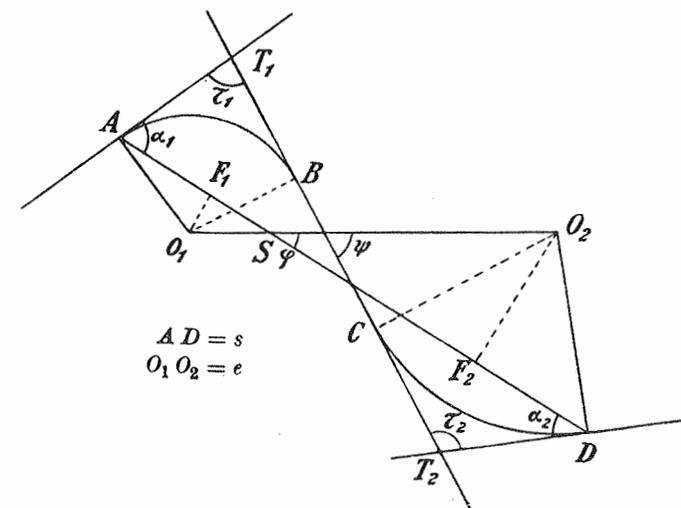


Fig. 421

Para ello se miden los dos ángulos α_1 y α_2 , así como la longitud s de la recta AD ; el ángulo φ formado por las rectas AD y O_1O_2 se puede calcular fácilmente, pues como se ve en la figura, se tiene:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{O_1 F_1 + O_2 F_2}{F_1 F_2}$$

o sea:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2}{s - r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2} \quad (1)$$

Una vez conocido φ , es fácil calcular el ángulo ψ formado por la recta O_1O_2 y la tangente buscada BC , ya que en la figura se tiene:

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{O_1 B + O_2 C}{O_1 O_2} = \frac{r_1 + r_2}{e}$$

y puesto que

$$e = O_1 O_2 = O_1 S + S O_2$$

o sea

$$e = \frac{r_1 \cos \alpha_1}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{r_2 \cos \alpha_2}{\operatorname{sen} \varphi}$$

resulta:

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{(r_1 + r_2) \operatorname{sen} \varphi}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2} \quad (2)$$

Conociendo el ángulo ψ , queda ya resuelto el problema, pues bastará calcular los ángulos τ_1 y τ_2 por medio de las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 180^\circ + \varphi - \psi - \alpha_1 \\ \tau_2 &= 180^\circ + \varphi - \psi - \alpha_2 \end{aligned} \quad (3)$$

para que pueda determinarse la posición de los puntos de tangencia B y C .

Esta solución coincide, en lo esencial, con la dada por A. Klingatsch en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1910, donde también se encuentran otras soluciones del mismo problema.

Elección de método en la determinación de puntos y tangentes. Para elegir el método que debe seguirse en la determinación de puntos o de tangentes para el trazado de un arco o curva circular, de modo que los errores inevitables en aquellas determinaciones produzcan el menor efecto posible en este trazado, hay que tener en cuenta las reglas siguientes:

1. Para trazar un arco, dado el radio y las tangentes en sus extremos, es preciso que éstas no formen entre sí un ángulo agudo; si este ángulo es bastante menor que un recto, hay que recurrir a otra clase de métodos, por ejemplo, determinando el arco por varias o muchas tangentes sucesivas (§ 116, página 481).
2. La parte esencial de las tangentes es la próxima al punto de contacto con el arco; las desviaciones que aquéllas puedan presentar, no alteran apenas la posición de su curva de enlace.
3. Es preferible determinar un arco por dos puntos, que por dos tangentes; los dos puntos deben escogerse de tal modo que su distancia, contada sobre el arco, se aproxime a valer un cuadrante.

Esta cuestión ha sido tratada con detenimiento en la memoria de Helmert sobre *Elección de los puntos principales para los trazados*, publicada en la «Zeitschr. d. Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins», tomo 21, año 1875.

§ 122. Arcos de enlace compuestos

Cuando hay que unir dos tangentes SA y SB (fig. 422) por medio de una curva ACB , pero de modo que resulten aquéllas desiguales, es decir, que SA mida a , y SB mida b , no se puede hacer el enlace con un solo arco circular entre A y B , sino que hay que trazar

dos arcos AC y CB , que se toquen en C , el de la izquierda CA con un cierto radio R , y el de la derecha CB con otro radio diferente r .

A este enlace se llama *arco compuesto*, o *arco de dos centros*. Para mejor comprender este trazado, supongamos que se dan los dos puntos de tangencia A y B , y uno de los *radios*, el r , por ejemplo; con estos datos hay que hallar, gráficamente, el otro radio R y los demás elementos necesarios. Para ello se toma $BO_2 = r$ perpendicularmente a SQ en B , y sobre AD , perpendicular en A a SP , se toma también r ; se unen los puntos D y O_2 y por el punto medio E de DO_2 se levanta una perpendicular que cortará a AD en el punto O_1 , centro del otro arco; la recta O_1O_2C , que une los centros de los dos arcos, da también el punto C común a ambos.

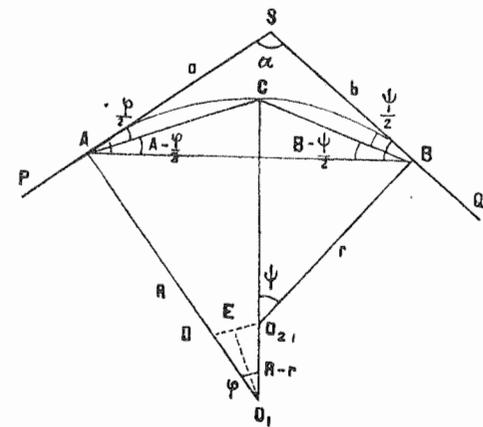


Fig. 422

En la elección de R y r se dispone siempre de un cierto margen, que permite una solución más adecuada a las diferentes circunstancias. La relación entre los dos radios R y r obedece a dos leyes muy sencillas descubiertas por D'Ocagne, como vamos a ver a continuación.

Sea S (fig. 423) el punto de intersección de dos rectas, que forman entre sí el ángulo α , y que son tangentes, en los puntos F_1 y F_2 a un círculo de radio ρ_1 . Por un punto cualquiera T se traza una tangente MN a este círculo. Se trata de trazar un arco compuesto que sea tangente a estas tres rectas. Traslademos para ello el punto de tangencia F_1 a A , y con igual recorrido traslademos T a C y F_2 a B . Los centros de los dos arcos buscados serán O_1 y O_2 . Describiendo un círculo, con O como centro, y con radio $AF_1 = TC = BF_2 = \rho_2$, resultará tangente a la recta O_1O_2 .

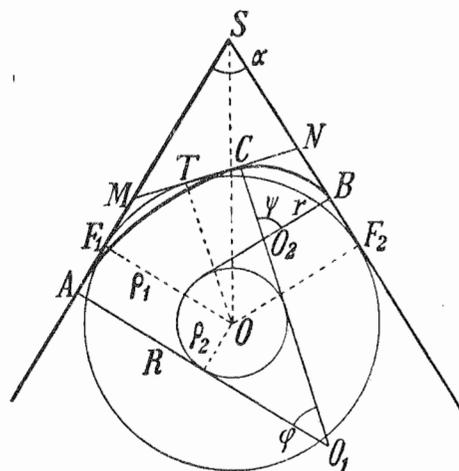


Fig. 423

Cualquier otra tangente $M'N'$ dará lugar a un nuevo arco compuesto, no alterando la posición de los puntos A y B ; el punto de contacto C' de los arcos parciales que constituyen este último compuesto, caerá sobre la tangente $M'N'$, y la línea de unión de sus centros respectivos será tangente al círculo trazado alrededor de O como centro.

Si se dan los dos puntos A y B que hay que unir por un arco compuesto, se trazan primero dos círculos con O como centro y con radios $\rho_1 = \frac{AS + BS}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ y $\rho_2 = \frac{AS - BS}{2}$.

Una tangente cualquiera al círculo menor, cortará a las normales en A y B en los centros O_1 y O_2 de los dos arcos parciales buscados; se traza después una tangente al círculo

mayor, perpendicularmente a la recta O_1O_2 , y el punto C en que corta a esta última es el de contacto de ambos arcos parciales.

Cuando no hay circunstancias especiales en contra, deben hacerse los radios R y r todo lo más grandes que sea posible. Esta condición se expresa en términos matemáticos diciendo que $R - r$ ó $\frac{R}{r} - 1$ deben ser todo lo menor posible. En el primer caso la línea de los centros O_1O_2 será paralela a la bisectriz del ángulo α , y en el segundo, perpendicular a la línea AB .

Esta última condición, es decir, diferencia mínima entre $\frac{R}{r}$ y la unidad, fué ya indicada por Launhardt en su *Teoría de los trazados y replanteos* (Hannover, 1888). Las dos leyes anteriores fueron dadas a conocer por D'Ocagne en su trabajo sobre *Enlaces por arcos de círculo* publicado en «Nouvelles Annales de Mathématiques», tomo XVII, 1898.

Estas leyes deben tenerse en cuenta cuando se trata de hacer un trazado por método gráfico; pero cuando hay que replantear un enlace proyectado en un plano, con la misma precisión que en éste se hubiera calculado, hay que tener presentes otras consideraciones, empezando por las relaciones geométricas entre los elementos determinantes del enlace.

En primer lugar, se tienen las ecuaciones antes halladas:

$$\rho_1 = \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{a-b}{2} \tag{1}$$

donde $a = AS$ y $b = BS$.

Entre los dos ángulos centrales φ y ψ existe la siguiente relación:

$$\alpha + \varphi + \psi = 180^\circ. \tag{2}$$

Y, por último, los dos radios R y r están dados por las fórmulas que siguen:

$$R = \rho_1 + \rho_2 \cot \frac{\varphi}{2} \tag{3}$$

$$r = \rho_1 - \rho_2 \cot \frac{\psi}{2}. \tag{4}$$

Supongamos que se dan, además del ángulo α , las longitudes a y b de las tangentes, así como el radio R ; los radios ρ_1 y ρ_2 se calculan con las fórmulas (1); una vez conocidos ρ_1 y ρ_2 , se deduce φ de la fórmula (3), y ya puede calcularse el ángulo ψ con la fórmula (2); sustituyendo este valor y los de ρ_1 y ρ_2 en (4) se obtiene, por último, el radio r .

Distintas fórmulas hay que aplicar cuando los radios y una de las tangentes han de tener los valores dados en el plano o proyecto, siendo necesario calcular el valor de la otra tangente.

Para obtener estas fórmulas se proyecta el contorno poligonal AO_1O_2BS (fig. 424) sobre dos rectas: primero sobre la AS y después sobre una perpendicular R a aquella; según un conocido teorema sobre proyecciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{proyección sobre } SA \dots (R-r) \operatorname{sen} \varphi + r \operatorname{sen} (\varphi + \psi) + b \operatorname{cos} \alpha &= a \\ \text{O}_1A \dots (R-r) \operatorname{cos} \varphi + r \operatorname{cos} (\varphi + \psi) + b \operatorname{sen} \alpha &= R \end{aligned}$$

y como $\alpha + \varphi + \psi = 180^\circ$, se pueden escribir estas fórmulas del modo siguiente:

$$a - (R-r) \operatorname{sen} \varphi - r \operatorname{sen} \alpha - b \operatorname{cos} \alpha = 0 \tag{5}$$

$$R - (R-r) \operatorname{cos} \varphi + r \operatorname{cos} \alpha - b \operatorname{sen} \alpha = 0. \tag{6}$$

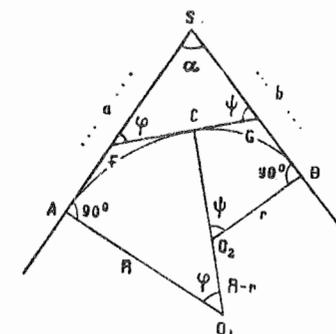


Fig. 424

Supongamos, como ejemplo, que del trazado gráfico se han deducido los siguientes valores numéricos aproximados:

$$R = 500 \text{ m}, \quad r = 300 \text{ m}, \quad a = 587 \text{ m}, \quad b = 486 \text{ m}, \quad \alpha = 72^\circ.$$

Los radios R y r deberán tener estos mismos valores en el replanteo, pero el ángulo α habrá de tener el valor exacto medido sobre el terreno, que en este caso se supone sea $\alpha = 72^\circ 10' 20''$; en cuanto a las tangentes a y b , puede tomarse como exacta una sola de ellas, deduciendo la segunda en función de la primera. Si se toma la tangente $b = 486$ m como exacta, se mide en el campo esta longitud a partir de S , con todo cuidado (con mira), y el punto resultante B se considera ya como definitivo, mientras que el A tendrá que ser hallado por el cálculo. Es decir, que tendremos como datos definitivos:

$$R = 500 \text{ m}, \quad r = 300 \text{ m}, \quad b = 486 \text{ m}, \quad \alpha = 72^\circ 10' 20'' \quad (7)$$

y habrá que calcular solamente a y el ángulo φ ; para ello se despeja $\cos \varphi$ en la ecuación (6):

$$\cos \varphi = \frac{R + r \cos \alpha - b \sin \alpha}{R - r}$$

y ya puede calcularse a , despejada en la ecuación (5):

$$a = (R - r) \sin \varphi + r \sin \alpha + b \cos \alpha.$$

Haciendo los cálculos indicados, resulta:

$$\varphi = 49^\circ 45' 54'' \quad \text{y} \quad a = 587,066 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores de α y φ en la fórmula (2), se obtiene para ψ el valor $58^\circ 3' 46''$, y ya puede deducirse de la figura 424 la longitud de las tangentes, a saber:

$$FA = FC = R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 231,906 \text{ m} \quad \text{y} \quad GB = GC = r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 166,508 \text{ m}.$$

Con estos datos puede ya hacerse el replanteo completo, como se ve en la figura 424.

Si en un principio se hubiera considerado como definitivo el valor de a , y no el de b , en vez de las ecuaciones (5) y (6) se tenía que haber deducido otras, tomando como bases de proyección la recta SB y su perpendicular r ; las fórmulas que así se obtendrían son las siguientes:

$$b = a \cos \alpha + R \sin \alpha - (R - r) \sin \psi \quad (8)$$

$$0 = a \sin \alpha - R \cos \alpha - (R - r) \cos \psi - r. \quad (9)$$

Sobre los arcos de enlace compuestos de dos o más arcos circulares merecen citarse los trabajos de Puller, publicados en la «Zeitschr. f. Verm.» en los años 1892 y 1893; los de Bückle sobre *Unión de dos círculos concéntricos mediante una curva compuesta de dos arcos circulares* («Zeitschr. f. Verm.», 1902), y los de Herzka, publicados en la «Zeitschr. d. Österr. Ing.- und Arch. Vereins» de 1903.

Trazado de curvas en S (serpentinadas). Terminaremos el estudio del trazado de arcos compuestos, considerando el caso en que los dos arcos componentes tengan su curvatura dirigida en sentido contrario, como sucede con frecuencia en las vías férreas.

Sean AS y BS (fig. 425) dos alineaciones rectas que hay que unir por medio de dos arcos de círculo, tangentes a aquéllas en los puntos A y B , y que tengan, además, que tocarse en un cierto punto C .

También pueden aplicarse en este caso las leyes de D'Ocagne antes dadas (pág. 500); el centro O de los dos círculos auxiliares caerá sobre la bisectriz del ángulo α , y sus

radios ρ_1 y ρ_2 estarán dados por las fórmulas siguientes, deducidas con toda facilidad de la figura 425:

$$\rho_1 = \frac{a - b}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{a + b}{2} \quad (10)$$

donde $a = AS$ y $b = BS$.

Los centros O_1 y O_2 de los dos arcos propuestos están sobre una tangente al círculo de radio ρ_2 . La tangente común a ambos arcos es a la vez tangente al círculo de radio ρ_1 .

Es muy fácil demostrar que las ecuaciones (2) a (4) del caso normal, se convierten en estas otras, para el caso de la curva en serpentina:

$$\varphi - \psi + \alpha = 0 \quad (11)$$

$$R = \rho_2 \cot \frac{\varphi}{2} - \rho_1 \quad (12)$$

$$r = \rho_1 - \rho_2 \cot \frac{\psi}{2} \quad (13)$$

Con estas fórmulas y la (10) se resuelve el problema, suponiendo dados α , a , b y R .

Para valores muy pequeños de α no resulta aplicable esta solución: en este caso hay que medir no solamente la recta de unión AB de los dos puntos de tangencia, sino también los ángulos que forma AB con las dos alineaciones dadas. Proyectando el contorno AO_1O_2B sobre AB y sobre una perpendicular a esta dirección, se obtienen dos ecuaciones análogas a las (8) y (9) de la página 502.

Sobre el trazado de curvas en S (*serpentinadas*), publicaron sendos trabajos Schulze y Puller en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1904. Ordinariamente, en la práctica del trazado de vías férreas, se intercala una recta entre los dos arcos de curvatura contraria, tangente a ambos. Este problema ha sido tratado con todo detalle por Krüger, Bückle y Sossna, en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1904 y 1905.

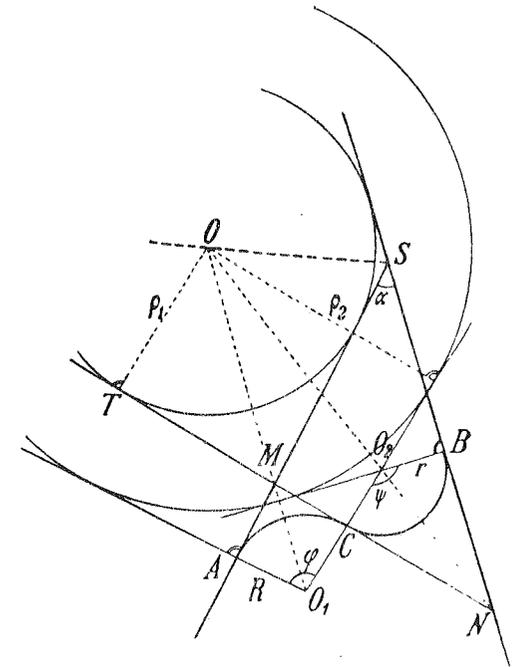


Fig. 425

§ 123. Curva de triple arco en el túnel del San Gotardo

La figura 426 representa el trazado, a escala 1 : 10000, de uno de los túneles del San Gotardo (en Wasen) según la memoria del Dr. C. Koppe *Sobre la determinación de los elementos de trazado para los siete túneles del ferrocarril del San Gotardo* («Eisenbahn», tomo XIII, agosto 1880). El sistema de coordenadas utilizado es el general de Suiza, con el origen en Berna, las x positivas hacia el Sur, las y positivas hacia el Oeste, y los acimutes crecientes del Sur al Oeste.

En esta figura se ve, en primer lugar, la marcha general del trazado: la vía penetra en el túnel por la boca Q , procedente del Norte (de Flüelen); la línea de puntos $QNM P$ es el eje del túnel, y por la boca P sale otra vez la vía a terreno descubierto, dirigiéndose hacia el Sur, hacia San Gotardo. El trazado de la parte del túnel a que nos hemos de limitar, se compone de tres arcos diferentes:

$$\left. \begin{array}{l} QN \text{ de radio } r = 280 \text{ m} \\ NM \text{ » } r = 500 \\ MP \text{ » } r = 300 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Para ulteriores replanteos y determinaciones sirven las tangentes en Q y P que se cortan en W , y sobre estas tangentes hay dos puntos A y E , cerca de las entradas del túnel, señalados de modo permanente en el terreno.

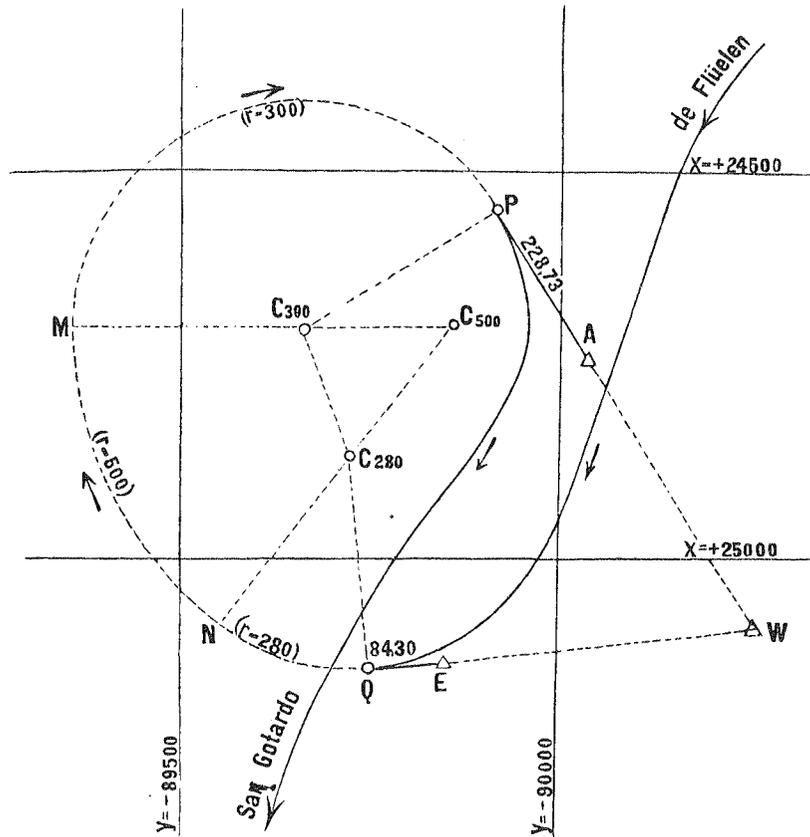


Fig. 426. — Túnel helicoidal de Pfaffensprung (Escala 1:10000; 1 cm = 100 m)

Los tres puntos W , E y A están referidos por una triangulación al sistema general de coordenadas, y sus abscisas y ordenadas son las que siguen:

$$\left. \begin{array}{ll} W & - 90259,848 \text{ m} \quad + 25095,146 \text{ m} \\ E & - 89838,163 \quad + 25139,362 \\ A & - 90041,229 \quad + 24740,765 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Los puntos Q y P están determinados por sus distancias a los E y A , contadas sobre las tangentes WEQ y WAP respectivamente:

$$EQ = 84,30 \text{ m} \quad AP = 228,73 \text{ m.} \quad (3)$$

De este modo se tienen todos los elementos necesarios para comenzar los cálculos.

De las coordenadas de W , E y A se deducen, en primer lugar, los acimutes de las dos tangentes y el ángulo formados por ambas entre sí:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Acimut de } (WE) = 84^\circ 0' 50,7'' \\ \text{Acimut de } (WA) = 148^\circ 19' 45,9'' \end{array} \right\} \quad \text{Ángulo } EWA = 64^\circ 18' 55,2'' \quad (4)$$

Con estos acimutes y las longitudes medidas EQ y AP , dadas en (3), se pueden ya calcular las coordenadas de Q y P :

$$Q \dots - 89754,323 \quad + 25148,153 \quad (5) \quad P \dots - 89921,138 \quad + 24546,097 \quad (6)$$

Pero como los radios QC y PC son respectivamente perpendiculares a las tangentes QW y PW , se deducen también de (4) los acimutes de dichos radios, que serán:

$$\text{Acimut de } (QC_{280}) = 174^\circ 0' 50,7'' \quad \text{con } QC_{280} = 280 \text{ m.} \quad (7)$$

$$\text{Acimut de } (PC_{300}) = 58^\circ 19' 45,9'' \quad \text{con } PC_{300} = 300 \text{ m.} \quad (8)$$

De aquí se deducen las coordenadas de ambos centros:

$$C_{280} - 89725,123 \quad + 24869,680 \quad (9) \quad C_{300} - 89665,814 \quad + 24703,607. \quad (10)$$

Con estos datos se calcula el acimut y la longitud de la línea de unión de estos centros:

$$\text{Acimut de } (C_{280} C_{300}) = 160^\circ 20' 49,3'' \quad (11) \quad \text{Distancia } C_{280} C_{300} = 176,346. \quad (12)$$

En el triángulo $C_{280} C_{300} C_{500}$ se conocen ya los tres lados, y pueden, por lo tanto, deducirse sus ángulos, como se ve a continuación:

$$\begin{array}{ll} C_{300} C_{280} = 176,346 = a, & s - a = 121,827 \\ 500 - 300 = C_{300} C_{500} = 200,000 = b, & s - b = 98,173 \\ 500 - 280 = C_{280} C_{500} = 220,000 = c, & s - c = 78,173 \\ \hline 2s = 596,346 & \\ s = 298,173 & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ángulo en } C_{500} = \alpha = 49^\circ 22' 15,2'' \\ \beta = 59^\circ 23' 59,2'' \\ \gamma = 71^\circ 13' 45,6'' \end{array} \right\} 180^\circ 0' 0''. \quad (13)$$

Con estos ángulos y los acimutes (7), (8) y (11) se prosigue el cálculo del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll} (C_{280} C_{300}) = 160^\circ 20' 49,3'' & (C_{300} C_{280}) = 340^\circ 20' 49,3'' \\ + \beta = + 59^\circ 23' 59,2'' & - \gamma = - 71^\circ 13' 45,6'' \\ \hline (C_{280} C_{500}) = (NC_{280}) = 219^\circ 44' 48,5'' & (C_{300} C_{500}) = (MC_{300}) = 269^\circ 7' 3,7'' \\ \text{según (7), } (QC_{280}) = 174^\circ 0' 50,7'' & \text{según (8), } (PC_{300}) = 58^\circ 19' 45,9'' \\ \hline \text{Ángulo en } C_{280} = 45^\circ 43' 57,8'' & \text{Ángulo en } C_{300} = 149^\circ 12' 42,2'' \end{array} \quad (14)$$

Así se tienen en (13) y (14) los ángulos en el centro de los tres arcos, con los cuales pueden calcularse las respectivas longitudes de estos últimos, que resultan con los siguientes valores:

Arcos	Centros	Ang. centrales	Radio	Long. de los arcos
QN	C_{280}	$45^\circ 43' 57,8''$	280 m	223,492 m
NM	C_{500}	$49^\circ 22' 15,2''$	500	430,842
MP	C_{300}	$149^\circ 12' 42,2''$	300	781,271
		$244^\circ 18' 55,2''$		1435,605 m

La suma de los tres ángulos centrales comprueba el cálculo, pues debe ser igual al suplemento del ángulo formado por las tangentes [que según (4) es $64^\circ 18' 55,2''$] como efectivamente sucede en este caso.

De este modo se dispone ya de todos los elementos necesarios para el trazado, a saber: fuera del túnel, la dirección de las tangentes QE y PA ; y dentro del túnel, el radio, ángulo en el centro, y longitud de cada arco, con lo cual puede procederse al replanteo (párrafo 120, I, página 493, y párrafo 126).

§ 124. Curvas de enlace progresivo

Una línea compuesta de rectas y arcos circulares no ofrece la continuidad exigida por la índole especial del movimiento sobre las vías férreas, constituyendo, entre otras, una grave dificultad, la imposibilidad de dar al riel exterior el peralte correspondiente a la curvatura en el paso de la recta a la curva. Esta dificultad se obvia intercalando entre la recta y el arco circular una curva cuya curvatura sea cero en el punto de tangencia con la recta, y vaya aumentando continuamente hasta igualar a la del arco en el punto de unión con éste.

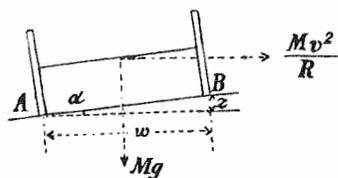


Fig. 427

Para hallar una relación entre el peralte z del riel exterior B y el radio de curvatura R de la vía, consideremos una sección transversal de esta última (fig. 427) con un par de ruedas pasando sobre la misma. A la diferencia de nivel z entre los rieles A y B , corresponde un ángulo de inclinación α . Llamando M a la masa del convoy, su peso será Mg (g = aceleración de la gravedad), y si v es la velocidad de aquél, la fuerza centrífuga horizontal será $\frac{Mv^2}{R}$. Proyectando estas dos fuerzas Mg y $\frac{Mv^2}{R}$ sobre la dirección AB se tiene, como ecuación de equilibrio:

$$\frac{Mv^2}{R} \cos \alpha = Mg \sin \alpha \tag{1}$$

Si w es la entreeva, se tendrá $\sin \alpha = \frac{z}{w}$, y como $\cos \alpha$ es, con mucha aproximación, igual a la unidad, se tendrá, sustituyendo estos valores en (1):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g z}{w} \tag{2}$$

Se refiere la curva, según el proyecto, a un sistema de coordenadas cuyo eje de las x sea la tangente con que debe tocar la curva, y cuyo origen sea el punto de contacto entre ésta y aquella.

Sea AKB (fig. 428) la curva en cuestión: el punto A será el origen de coordenadas, la tangente AQ el eje de las x , y las ordenadas serán perpendiculares a esta recta. Se supone que el peralte z del riel exterior va aumentando uniformemente a partir del punto de contacto A de la curva con la recta, es decir, que

$$z : s = 1 : n \tag{3}$$

donde s es la longitud o desarrollo de la curva contada a partir del punto A , y $1 : n$ es el grado de pendiente. Al mismo tiempo supongamos también que la curva es lo bastante

plana para que pueda admitirse con bastante precisión que el desarrollo s del arco sea igual a la abscisa x , y de este modo la igualdad (3) se convertirá en esta otra:

$$z : x = 1 : n \tag{4}$$

Ahora bien, como la curva toca al eje de las x en el origen de coordenadas, se tendrá para el radio de curvatura en el punto de contacto, la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{5}$$

y puesto que, por hipótesis, se trata de una curva muy plana, puede hacerse extensiva esta fórmula, con bastante exactitud, a toda la curva.

De las fórmulas (2), (4) y (5) se deduce que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g}{n w v^2} x \tag{6}$$

Poniendo, para simplificar

$$\frac{n w v^2}{g} = q \tag{7}$$

se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{q} \tag{8}$$

Ésta es la ecuación diferencial de la curva pedida.

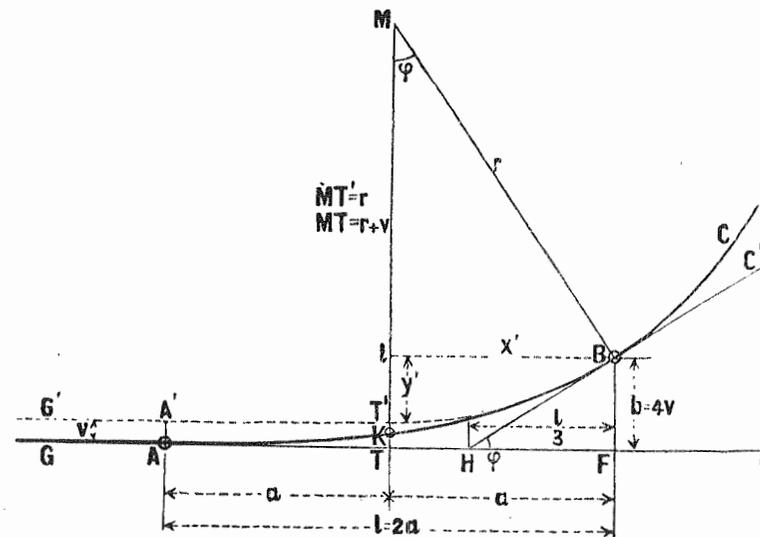


Fig. 428

Integrando dos veces esta ecuación, y teniendo en cuenta que para $x = 0$, también $y = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, resultará:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2q} \quad \text{e} \quad y = \frac{x^3}{6q} \tag{9}$$

Con la constante q , que como se ve en (7), depende principalmente de la velocidad v del convoy, queda perfectamente determinada la curva de enlace progresivo; mientras más grande sea q , tanto más plana y más larga será esta curva.

Uno de los valores más empleados en vías férreas de primer orden es $q = 12000$.

Sin entrar en las condiciones especiales requeridas por el tráfico ferroviario, según las cuales se toma q en cada caso particular, vamos a estudiar las relaciones puramente geométricas entre los elementos determinantes de la curva de enlace AKB (fig. 428), que toca en A con la recta GA , y en B con un arco de círculo de radio r ; pero este contacto no es simple, ni de tangencia ordinaria, sino de segundo orden (osculación), es decir, que el radio R de curvatura de la curva debe ser, en el punto A , igual al de la recta, o sea ($R = \infty$), y en el punto B igual al del arco circular ($R = r$).

De las fórmulas (5) y (8) resulta:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{q}$$

de donde, despejando R , tendremos para expresión del radio de curvatura:

$$R = \frac{q}{x} \tag{10}$$

En el punto A , donde $x = 0$, se tiene $R = \infty$, como así debe suceder; y en el punto B , donde puede suponerse que $x = l$, para que se cumpla la condición $R = r$, es preciso, según (10), que:

$$r = \frac{q}{l} \quad \text{o sea} \quad l = \frac{q}{r} \tag{11}$$

La ordenada b del punto B será, según la ecuación de la curva (9) y sustituyendo en ella l por su valor (11):

$$b = \frac{l^3}{6q} = \frac{q^2}{6r^3} \tag{12}$$

Vamos ahora a trazar el arco de círculo de radio r y centro M que debe enlazar en B con la curva obtenida; la tangente en B al círculo es a la vez tangente a la curva de enlace progresivo, por lo cual se tiene que $\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$, para $x = l$, y según las fórmulas (9) y (12) este valor será:

$$\text{tg } \varphi = \frac{l^2}{2q} = \frac{3b}{l} = b : \frac{l}{3} \tag{13}$$

Es decir, que la tangente secundaria HF del punto B es la tercera parte de la abscisa $AF = l$. Esta ley es aplicable a todos los puntos de la curva.

Una vez calculado φ , se pueden hallar las coordenadas $x' y'$ del punto B , referidas al radio MT' como eje de las y , y a T' como origen, como se ve en la figura 428:

$$x' = r \text{ sen } \varphi \quad y' = r - r \text{ cos } \varphi \tag{14}$$

Pero como φ debe ser siempre un ángulo muy pequeño, se puede escribir:

$$\text{sen } \varphi = \text{tg } \varphi = \frac{l^2}{2q} \quad \text{y} \quad \text{cos } \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{l^2}{2q}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{2q}\right)^2 \tag{15}$$

Las coordenadas x', y' tendrán por valores, según las fórmulas (14) y teniendo en cuenta las (11) y (12), los siguientes:

$$x' = \frac{q}{l} \frac{l^2}{2q} = \frac{l}{2} \quad \text{e} \quad y' = \frac{q}{2l} \frac{l^4}{4q^2} = \frac{l^3}{8q} = \frac{3}{4} b \tag{16}$$

de donde:

$$l = 2x' = 2a \quad \text{y} \quad T'T' = b - y' = \frac{1}{4} b = v = \frac{q^2}{24r^3} \tag{17}$$

La pequeña parte de ordenada $TT' = v$ queda dividida por mitad por la curva en el punto K , pues a la ordenada TK de este punto de la curva corresponde como abscisa $a = \frac{l}{2}$, y según la ecuación (9) de aquella, se tiene:

$$TK = \left(\frac{l}{2}\right)^3 \frac{1}{6q} = \frac{l^3}{48q} = \frac{1}{2} v.$$

En la tabla XXVIII del Apéndice damos algunos valores numéricos para las fórmulas principales (9), (10), (11) y (17) del cálculo anterior.

Caso general. Sean SG y SG dos alineaciones rectas (fig. 429) ya trazadas en el terreno, que hay que unir mediante un arco de círculo de radio r , con curvas de enlace progresivo.

El cálculo se hace en el orden siguiente, y para más claridad, supondremos que se trata de un caso práctico con datos numéricos:

1. Se parte de un cierto valor de q , dado por la ecuación (7), y con éste y el radio r del arco de círculo que hay que unir a las alineaciones rectas, se calcula la longitud o desarrollo l de la curva progresiva, y la pequeña traslación v , por medio de las fórmulas (11) y (17) respectivamente, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} MT' &= r, & MT &= r + v; \\ r &= 300 \text{ m}; & q &= 12000. \\ l = \frac{q}{r} &= 40 \text{ m}; & \frac{l}{2} = a &= 20 \text{ m}; \\ v &= \frac{q^2}{24r^3} = 0,222 \text{ m}. \end{aligned}$$

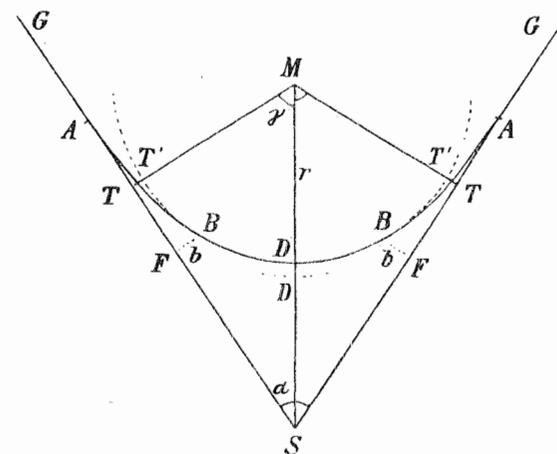


Fig. 429. — Arco de círculo con curvas de enlace progresivo

2. Se señalan los puntos de tangencia T trazando un arco $TD T$ con un radio $r + v$. Se mide el ángulo α , se toma la mitad de éste, y su complemento dará el valor del ángulo γ ; es decir, que si $\alpha = 82^\circ 50' 0''$, su mitad será:

$$\frac{\alpha}{2} = 41^\circ 25' 0'' \quad \text{y} \quad \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 48^\circ 35' 0''.$$

Conocido este ángulo γ , pueden ya calcularse las distancias $ST = (r + v) \text{tg } \gamma$, y, por consiguiente, se pueden señalar los dos puntos T . En el caso que estamos considerando, tendremos:

$$MT' = r = 300 \text{ m}; \quad MT = r + v = 300,222 \text{ m};$$

luego

$$ST = (r + v) \text{tg } \gamma = 300,222 \text{tg } 48^\circ 35' 0'' = 340,336 \text{ m}.$$

3. Se toma $a = \frac{l}{2} = 20 \text{ m}$ y se lleva esta longitud a partir de T hacia G , en las dos tangentes SG , obteniéndose así los dos puntos A y F .

Después se calcula b por la fórmula (12), que nos dará:

$$b = \frac{q^2}{6r^3} = 4v = 0,889 \text{ m}$$

y así pueden ya marcarse los dos puntos B , que son los de contacto entre el arco de círculo y las dos curvas progresivas.

4. Se trazan las dos curvas calculando las coordenadas x, y , ya sea por medio de la ecuación de aquéllas $y = \frac{x^3}{6q}$, o empleando una tabla auxiliar (XXVIII del Apéndice).

En el ejemplo numérico que estamos suponiendo se tiene:

$x = 0$	5 m	10 m	15 m	20 m	25 m	30 m	35 m	40 m
$y = 0$	0,002	0,014	0,047	0,111	0,217	0,375	0,595	0,889

Las abscisas x se cuentan desde A , en la dirección AS .

5. Se traza el arco de círculo, calculando las coordenadas para $r = 300$ m, pero incrementando después las ordenadas en la longitud $v = 0,222$ m. Las abscisas x se cuentan a partir de T en la dirección TS :

$x = 0$ m	(curva progresiva)
$x = 10$	(curva progresiva)
$x = 20$	$y = 0,67 + 0,22 = 0,89$ m (como en la curva progresiva para $x = 40$ m)
$x = 30$	$y = 1,50 + 0,22 = 1,72$
$x = 40$	$y = 2,68 + 0,22 = 2,90$

Con el trazado de este arco queda terminado el enlace de las dos alineaciones en la forma propuesta.

§ 125. Curvas de enlace progresivo, de peralte uniforme

La curva de enlace parabólica cumple con la condición de que su curvatura va aumentando continuamente desde el valor cero, en el punto de contacto con la alineación recta, hasta el valor de la curvatura del arco de círculo, en el punto de contacto con este último; pero, en cambio, ofrece un inconveniente en cuanto al peralte del rail exterior se refiere. Como la curvatura aumenta proporcionalmente a la longitud de la curva, del mismo modo deberá aumentar este peralte, y, por consiguiente, el perfil longitudinal presentará dos codos, o cambios bruscos de pendiente, en el origen y en el extremo de la curva, mientras que en el resto estará representado por una línea recta. Dada la velocidad alcanzada actualmente por los ferrocarriles, no basta con la compensación aproximada o arbitraria de estos codos; en estos últimos años se han propuesto diversos métodos para esta corrección de las curvas de enlace, dados a conocer en varias publicaciones, de entre las cuales citaremos únicamente las que siguen:

- WATOREK. *Curvas de enlace* («Organ für die Fortschr. d. Eisenbahnwesens», 1907).
- PETERSEN. *Curvas de vías férreas*. Berlín, 1920 (Organ für die Fortschr. de Eisenb., 1920).
- LACHMANN y ROÏHE. *Construcción de curvas de enlace en las vías férreas* («Zeitschr. f angew. Math. u. Mech», 1922).
- HÖFER. *Trazado de curvas por envolventes*. Berlín, 1927.
- SCHRAMM. *Las curvas en vías férreas; su estudio como curvas de curvatura progresiva uniforme*. Berlín, 1931.

Por no permitir otra cosa el carácter de esta obra, vamos a limitarnos a describir brevemente el último y más reciente de estos métodos, propuesto por Schramm.

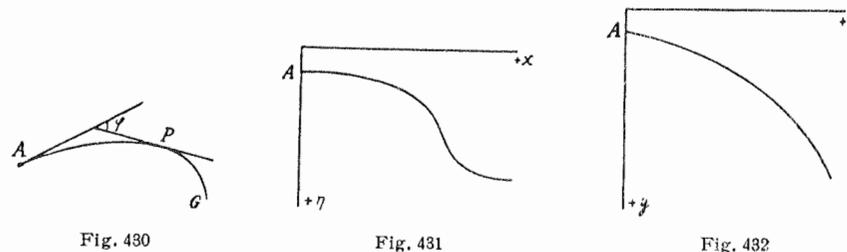
Para tener una idea clara de la marcha de la curvatura en una curva G de enlace (figura 430), se construye la *gráfica de curvatura*, para lo cual se toma un sistema de ejes

cartesianos $x\eta$, y a partir de un punto cualquiera A se toma la longitud de la curva sobre el eje de las abscisas; a intervalos pequeños se van tomando, como ordenadas, los valores de la curvatura de aquélla, es decir, los valores inversos del radio de curvatura, multiplicados por una constante c . La línea de unión de los puntos así obtenidos (fig. 431) constituye la gráfica de curvatura de la curva G .

Si la longitud o desarrollo de la curva G desde el punto A (fig. 430) hasta un punto cualquiera P es igual a l y el radio de curvatura en P es igual a r , las coordenadas del punto correspondiente de la gráfica de curvatura serán:

$$x = l, \quad \eta = c \frac{1}{r} \tag{1}$$

Otra línea auxiliar empleada por Schramm, es la *gráfica de forma*, también función de la curvatura de la curva dada G ; para construirla se toma en la figura 430 una dirección fija, por ejemplo, la de la tangente en A : a causa de la curvatura de G , la tangente en el



punto P formará con la tangente en A un cierto ángulo φ . En un sistema de ejes cartesianos xy (fig. 432), se toma el desarrollo l de la curva entre A y P como abscisa, y el ángulo φ como ordenada, después de multiplicado por la constante c ; la línea de unión de todos los puntos resultantes, es la gráfica de forma, representada en la figura 432. Las coordenadas del punto P serán:

$$x = l, \quad y = c \varphi \tag{2}$$

Entre las ordenadas de las dos gráficas existe una relación bien sencilla. En efecto, partiendo de la gráfica de forma, se tiene, diferenciando en (2):

$$dx = dl, \quad dy = c d\varphi$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = c \frac{d\varphi}{dl}$$

Pero como $dl = r d\varphi$, resulta, sustituyendo valores:

$$\frac{dy}{dx} = c \frac{1}{r} = \eta$$

e integrando:

$$y = \int \eta dx \tag{3}$$

Esta expresión nos dice que por integración (que puede hacerse gráficamente) se pasa de las ordenadas de la gráfica de curvatura a las correspondientes de la gráfica de forma.

Las gráficas de curvatura y de forma, de un arco de parábola cúbica. Consideremos el caso de un arco de círculo de radio R , unido a las alineaciones rectas mediante dos cur-

vas de enlace progresivo (§ 124). Como para estas últimas, la curvatura es proporcional a la longitud, se puede escribir para sus gráficas de curvatura:

$$\frac{1}{r} = kx, \quad \text{y según (1)} \quad \eta = c \frac{1}{r} = ckx.$$

Llamando l al desarrollo de la curva de enlace, se tendrá para su extremo:

$$x = l, \quad \eta = c \frac{1}{R}$$

o sea:

$$ckl = c \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{Rl}.$$

Luego la ecuación de la gráfica de curvatura será:

$$\eta = \frac{c}{Rl} x \tag{4}$$

es decir, que la gráfica de curvatura es una línea recta inclinada sobre el eje de las x .

Para el arco de círculo se tiene:

$$\eta = c \frac{1}{R} \tag{5}$$

lo que nos dice que la gráfica de curvatura del arco de círculo es una recta paralela al eje de las x . La gráfica de curvatura del arco de círculo con las dos curvas progresivas tendrá la forma representada en la parte superior de la figura 433.

La gráfica de forma de la curva progresiva tendrá la siguiente ecuación, según (3) y (4):

$$y = \frac{c}{Rl} \int x dx, \quad \text{o sea} \quad y = \frac{c}{2Rl} x^2. \tag{6}$$

Por otra parte, la ecuación de la gráfica de forma del arco de círculo será, según (3) y (5):

$$y = \frac{c}{R} x. \tag{7}$$

La ecuación (6) nos dice que la gráfica de forma de la curva progresiva es una parábola, mientras que la del círculo es una recta que corta al eje de las x . La gráfica de forma completa está representada en la parte inferior de la figura 433.

Curvas de enlace progresivo con peralte uniforme. El inconveniente apuntado en la página 510 para el peralte del rail exterior en las curvas parabólicas, da lugar a una variación en la forma de la curva progresiva, de modo que su gráfica de curvatura no resulta ya ser una línea recta como en AC (parte superior de la figura 433), sino que se curva en los puntos A y C . En la parte superior de la figura 434 se ve la forma de dicha gráfica entre los puntos A y C , donde se tienen dos arcos parabólicos tangentes a las horizontales que pasan por aquellos puntos, y con una tangente común en D . El perfil longitudinal del peralte tiene esta misma forma, y, como se ve, han desaparecido los codos o cambios bruscos de pendiente en la curva de enlace.

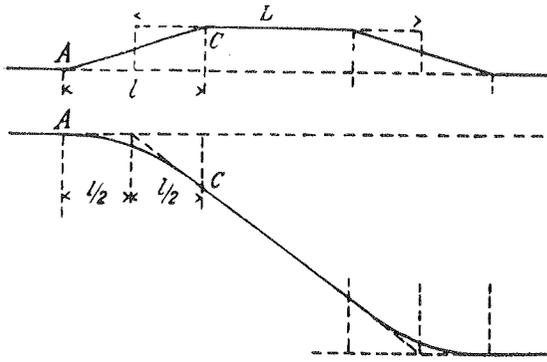


Fig. 433

Consideremos primero la mitad primera de la gráfica de curvatura, o sea desde A hasta D ; su ecuación será de la forma

$$\eta = kx^2. \tag{8}$$

Como la segunda mitad de la gráfica, entre D y C , es simétrica de la primera, se podrá escribir $\eta_d = \frac{1}{2} \eta_c$. Pero el punto C pertenece ya al arco de círculo de radio R , por lo cual, según la fórmula (5), se tendrá:

$$\eta_c = \frac{c}{R} \tag{9}$$

y, por lo tanto,

$$\eta_d = \frac{c}{2R}.$$

Ahora bien, la abscisa del punto D es $x_d = \frac{l}{2}$, luego, según (8), se tendrá:

$$\eta_d = k \frac{l^2}{4} = \frac{c}{2R}$$

de donde

$$k = \frac{2c}{Rl^2},$$

y la ecuación de la primera mitad de la gráfica de curvatura, entre A y D , será:

$$\eta = \frac{2c}{Rl^2} x^2. \tag{10}$$

La gráfica de forma de esta curva tendrá por ecuación, según (3):

$$y = \int \eta dx = \frac{2c}{Rl^2} \int x^2 dx, \quad \text{o sea} \quad y = \frac{2c}{3Rl^2} x^3. \tag{11}$$

Ésta es la ecuación de una parábola cúbica.

La ordenada del punto D , correspondiente a la abscisa $x_d = \frac{l}{2}$, será:

$$y_d = \frac{cl}{12R}, \tag{12}$$

y ya queda completamente determinado el punto D de la gráfica de forma.

La segunda mitad DC de la gráfica de curvatura es también una parábola, simétrica de la primera, y de la cual se conoce desde luego la ordenada de su punto extremo C , dada por la fórmula (9). Ya podemos hallar la ordenada y_c del punto C de la gráfica de forma (parte inferior de la figura 434), pues según la ecuación (3), esta ordenada y_c es igual a la superficie $ADCB$ (parte superior de la figura 434), y por la simetría de las curvas AD y DC , será también igual a la superficie del triángulo ACB , o sea, igual a $\frac{1}{2} l \eta_c$, y sustituyendo aquí el valor de η_c dado en (9) tendremos:

$$y_c = \frac{cl}{2R}. \tag{13}$$

Tomemos en la parte inferior de la figura 434 las abscisas desde B hacia la izquierda, y según (7) la ecuación de la recta CM será:

$$y = y_c - \frac{c}{R} x$$

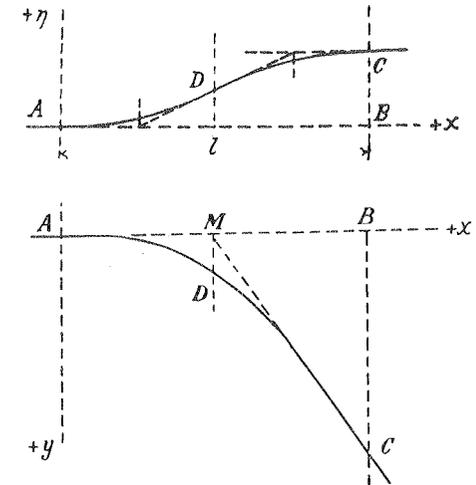


Fig. 434

o sea:

$$y = \frac{cl}{2R} - \frac{c}{R}x. \tag{14}$$

Si en la parte superior de la figura 434 tomamos también B como origen de coordenadas y BA como eje de abscisas, pero contando las ordenadas positivas hacia arriba, tendremos para ecuación de la gráfica de curvatura CD :

$$\eta = -\left(\frac{c}{R} - \frac{2c}{Rl^2}x^2\right).$$

Y la gráfica de forma para la parábola CD tendrá por ecuación:

$$y = -\frac{c}{R}x + \frac{2c}{3Rl^2}x^3 + \text{const.} \tag{15}$$

Para $x = \frac{l}{2}$, según (12), la ordenada correspondiente tendrá por expresión:

$$y = \frac{cl}{12R},$$

y el valor de la constante de integración será $\frac{cl}{2R}$, que sustituido en (15) dará finalmente la ecuación de la gráfica de forma CD , representada en la parte inferior de la figura 434:

$$y = \frac{cl}{2R} - \frac{c}{R}x + \frac{2c}{3Rl^2}x^3. \tag{16}$$

Por otra parte, la ecuación de la recta CM , según la fórmula (14), es la siguiente:

$$y = \frac{cl}{2R} - \frac{c}{R}x, \tag{17}$$

y, por lo tanto, las distancias entre la curva CD y la recta CM , contadas en la dirección de las ordenadas, estarán dadas por la diferencia entre (16) y (17), o sea:

$$\frac{2c}{3Rl^2}x^3.$$

Pero según la ecuación (11), estas distancias son las ordenadas de la primera parte de la parábola. La segunda parte de ésta se puede construir con las mismas ordenadas, tomadas a partir de la recta CM , en la dirección del eje de las y .

Trazado de las curvas de enlace progresivo. La gráfica de forma, cuya construcción acabamos de indicar, proporciona un medio auxiliar muy sencillo para el trazado de las curvas de enlace. Para ello se empieza por trazar un arco de círculo con el radio R , tangente a las dos alineaciones rectas dadas, y se calculan después las longitudes de los pequeños segmentos rectilíneos en que hay que correr los puntos del arco, en sentido radial, para tener las curvas parabólicas y la posición definitiva del arco de círculo.

Sean G_1 y G_2 dos curvas cualesquiera (fig. 435), que en el punto P_1 presentan una diferencia de dirección $\Delta\varphi$, y una distancia entre sí e .

Para los dos puntos infinitamente próximos P_1 y P_2 , la distancia entre las dos curvas no será la misma e , a causa de la diferencia de dirección φ , sino que diferirán en una cantidad infinitesimal de :

$$de = \Delta\varphi dl$$

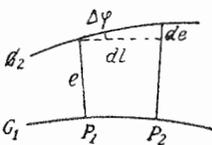


Fig. 435

y para un punto cualquiera, la distancia entre las curvas será:

$$e = e_0 + \int \Delta\varphi dl,$$

donde e_0 es la distancia correspondiente a un punto de origen dado.

Si se construyen las gráficas de forma de ambas curvas, se tendrán las siguientes ordenadas, correspondientes a una abscisa cualquiera:

$$y_1 = c\varphi_1 \quad y_2 = c\varphi_2.$$

de donde

$$y_2 - y_1 = \Delta y = c \Delta\varphi, \quad \text{o sea} \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta y}{c}$$

y, por lo tanto,

$$e = \frac{1}{c} \int \Delta y dl.$$

En vez de la diferencial de arco dl , se puede poner la diferencial de abscisa dx , y se tendrá:

$$e = \frac{1}{c} \int \Delta y dx. \tag{18}$$

Para las aplicaciones prácticas puede sustituirse la integración por una simple suma, hallando los incrementos de ordenada Δy para incrementos iguales de abscisa Δx , y tendremos:

$$e = \frac{\Delta x}{c} \Sigma \Delta y. \tag{19}$$

De este modo disponemos ya de todas las fórmulas necesarias para resolver el problema propuesto.

Para el trazado hay que determinar antes que nada la longitud o desarrollo de la curva parabólica l , que con el radio R del arco de círculo, constituyen los datos fundamentales para el resto del cálculo. El peralte s se deduce de la ecuación (2) de la página 506:

$$s = \frac{w}{g} \frac{v^2}{R},$$

donde w es la entreevía, v la velocidad del convoy y g la aceleración de la gravedad. Según las instrucciones y reglamentos de los ferrocarriles alemanes, el peralte s viene dado por la siguiente fórmula:

$$s = \frac{1}{125} \frac{v^2}{R}, \tag{20}$$

donde la velocidad v se expresa en kilómetros por hora.

Según se ve en la parte superior de la figura 434, que representa la gráfica de curvatura a la vez que el perfil longitudinal del rail exterior en la curva de enlace, el máximo grado de pendiente de este último será:

$$1 : n = s : \frac{l}{2}, \quad \text{de donde} \quad n = \frac{l}{2s}$$

y sustituyendo aquí el valor de s dado en (20), se tendrá:

$$l = \frac{1}{62,5} \frac{v^2 n}{R}. \tag{21}$$

Una vez dados v , n y R se puede calcular con esta fórmula el desarrollo l de la curva parabólica. Si este desarrollo l resulta mayor que el arco de círculo, no es posible hacer el trazado, siendo necesario en este caso tomar para el radio R un valor más grande.

El trabajo de campo comienza con el trazado de un arco de círculo de radio R ; a partir de sus dos puntos de contacto con las alineaciones rectas se toman, sobre éstas, longitudes iguales a la mitad de la longitud de la curva de enlace, es decir, a $\frac{l}{2}$, y así quedan determinados los dos puntos de arranque de las respectivas curvas parabólicas.

Se calculan entonces las distancias e entre la curva definitiva y la tangente; y entre aquélla y el arco de círculo, según la fórmula (18). Para la primera mitad de la curva parabólica, hasta la longitud $\frac{l}{2}$ de ésta, se hace el trazado contando las distancias e a partir de la tangente, para lo cual, según la ecuación (11), se tendrá:

$$y = \frac{2c}{3Rl^2} x^3$$

y sustituyendo en la fórmula (18) Δy por este valor de y , resultará para valor de e la siguiente expresión:

$$e = \frac{2}{3Rl^2} \int x^3 dx$$

o sea:

$$e = \frac{1}{6Rl^2} x^4 \tag{22}$$

Dando valores a x comprendidos entre $x = 0$ y $x = \frac{l}{2}$, y muy poco diferentes entre sí, se van calculando los correspondientes de e .

Para la segunda mitad de la curva parabólica, que se traza contando las distancias e a partir del arco de círculo, puede aprovecharse directamente el cálculo hecho para la primera mitad, con la única diferencia de que ahora hay que sumar todas las e en orden contrario al anterior, de modo que la distancia e para el extremo de la curva de paso resulta doble de la distancia hallada para el punto medio de aquélla. Desde el extremo hasta el principio de la segunda curva parabólica permanece constante la distancia e , y a partir de este punto se toman para e valores simétricos a los de la primera curva.

Fácilmente se ve que el radio del arco de círculo definitivo no es R , sino igual a la diferencia entre R y el valor máximo de e , aunque en la práctica no tenga la menor importancia este acortamiento del radio. Por otra parte, puede evitarse también esta alteración del radio, calculando previamente el valor máximo de e , deducido de las fórmulas (21) y (22):

$$e_{\text{máx}} = \frac{l^2}{48R} \tag{23}$$

y haciendo, con el radio aumentado $R + e_{\text{máx}}$, el cálculo definitivo y el trazado sobre el terreno.

Ejemplo. Como ejemplo para la aplicación del método de Schramm, tomaremos el arco de círculo de la figura 429, cuyo radio es de 300 m y cuyo ángulo en el centro es $2\gamma = 97^\circ 10' 00''$. Vamos a hacer el cálculo para una velocidad del tren, de 50 kilómetros por hora, y un grado máximo de pendiente de 1:800 para el rail exterior, en la curva parabólica de enlace.

Para hacer posible la comparación de este trazado con el de la figura 429, tomemos para el arco circular definitivo el radio de 300 m, y calculemos el valor máximo correspondiente de e , con las fórmulas (21) y (23). Haciendo este cálculo por aproximaciones sucesivas, se obtienen los siguientes valores finales:

$$l = 106,390 \text{ m}, \quad e_{\text{máx}} = 0,784 \text{ m},$$

y el radio que ha de intervenir en el cálculo será:

$$R + e_{\text{máx}} = 300,784.$$

Con estos datos se calcula primero la longitud de la tangente ST (fig. 436):

$$ST = 300,784 \text{ tg } \gamma = 340,973 \text{ m},$$

y ya pueden señalarse los dos puntos de contacto T , y por los métodos descritos en los párrafos 116, 118 y 119 se van señalando puntos de la curva, hasta tener trazado el arco provisional TDT . A partir de los puntos T se toma sobre cada tangente la longitud $TA = \frac{l}{2} = 53,195 \text{ m}$, y así quedan

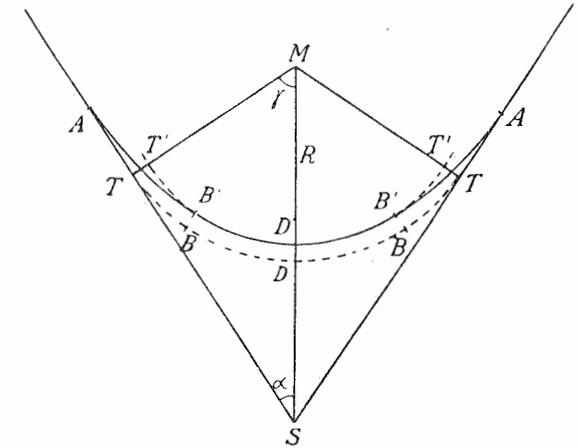


Fig. 436

determinados los puntos A de arranque de las respectivas curvas parabólicas.

Para la primera mitad de cada curva parabólica se divide la distancia AT en diez partes iguales, de 5,320 m cada una, y se calcula para cada punto de división el valor de e , que se anota en un estado análogo al que damos a continuación. Para la segunda mitad de cada curva, se parte del último valor de e correspondiente a la primera mitad, y se le van sumando las diferencias entre las e de esta mitad, pero en orden contrario a como allí se hizo: así se obtienen los valores de e que hay que tomar a partir del arco de círculo TB . El último valor de e , que debe coincidir con el de $e_{\text{máx}}$, se toma a lo largo de todo el arco BB' . La segunda curva parabólica se construye directamente, por ser simétrica de la primera.

En la tabla siguiente consignamos también los peraltes correspondientes a la curva parabólica, que pueden representarse por dos parábolas simétricas, como la gráfica de curvatura.

x	1.ª mitad de la curva		2.ª mitad de la curva	
	e	ζ	e	ζ
0,000 m	0,000 m	0,000 m	0,392 m	0,033 m
5,320	0,000	0,000	0,527	0,039
10,639	0,001	0,001	0,623	0,045
15,958	0,003	0,003	0,690	0,050
21,238	0,010	0,005	0,733	0,054
26,558	0,024	0,008	0,760	0,058
31,917	0,051	0,012	0,774	0,061
37,236	0,094	0,016	0,781	0,063
42,556	0,161	0,021	0,783	0,065
47,876	0,257	0,027	0,784	0,066
53,195	0,392	0,033	0,784	0,066

Llamando ζ_l al peralte en el extremo de la curva de enlace, en su punto medio será igual a $\frac{1}{2} \zeta_l$, y si ponemos la ecuación de la parábola en esta forma

$$\zeta = p x^2$$

se deberá verificar que $\frac{1}{2} s_1 = p \frac{l^2}{4}$, o sea, que $p = 2 \frac{s_1}{l^2}$. Es decir, que para el cálculo del peralte de la primera mitad de la curva tendremos la siguiente ecuación de parábola:

$$x = 2 \frac{s_1}{l^2} x^2.$$

En la segunda mitad, el peralte es simétrico al de la primera, de modo que en el extremo de la curva alcanzará el valor s_1 .

El valor de s_1 , que es igual al peralte de todo el arco de círculo, se calcula con la fórmula (20), y en este caso particular que estamos considerando será igual a 0,066 m.

Nos hemos limitado, en el estudio del método de Schramm, a la parte estrictamente necesaria para el ejemplo propuesto, sin entrar en detalles impropios de este lugar y para cuyo conocimiento remitimos al lector a la obra de Schramm aparecida en Berlín en 1931, antes citada, y cuyo título en alemán es: *Der vollkommene Gleisbogen, seine Gestaltung als Kurve mit stetigem Krümmungsverlauf*.

BIBLIOGRAFÍA:

1851. KRÖHNKE. *Manual para el trazado de curvas en ferrocarriles y carreteras*. 1.ª edición, Leipzig, 1851. 17.ª ed., 1929.
1872. HELMERT. *Curvas de paso en las vías férreas*, con tablas. Aachen.
1873. WINCKEL. *Manual para el replanteo de curvas*. Berlín.
1873. KNOLL. *Manual para el trazado de curvas en ferrocarriles y carreteras*. 1.ª ed., 1873, Stuttgart. 4.ª ed., 1924.
1874. SARAZIN, OBERBECK y HÖFER. *Manual de replanteo de curvas con y sin arcos de enlace*. Barcelona, 1931.
1876. BECKER. *Replanteo de curvas en ferrocarriles y carreteras*. Viena.
1877. DÖRFLINGER. *Trazado del túnel helicoidal de Wassen*. «Zeitschr. f. Verm.», 1877.
1879. ELB. *Manual para el trazado de curvas circulares y de paso*. Wilhelmshaven.
1881. JORDAN. *Coordenadas circulares para 200 radios*. Leipzig.
1885. GYSIN. *Tablas de ángulos periféricos en grados sexagesimales para el trazado de curvas en ferrocarriles y carreteras*. Liestal. (2.ª ed., 1908).— *Tablas para el trazado en grados centesimales*. Liestal. (3.ª ed., 1900).
1893. HECHT. *Trazado de arcos circulares con curvas de paso parabólicas*. Dresden. — *Trazado de curvas por secciones cónicas*. Dresden.
1903. PERT. *Tablas para el replanteo de curvas circulares y de paso, en coordenadas polares*. Viena.
1913. ARETIN-BAYERL. *Manual para el trazado de curvas y para la determinación de ángulos sin goniómetro*. Munich.
1917. BARRAUD. *Tablas para el cálculo y trazado de curvas*. Lausanne.
1917. MÜLLER. *Tablas para curvas. Replanteo de arcos circulares y de curvas de paso*.
1920. PETERSEN. *Las curvas en las vías férreas*. Berlín y Wiesbaden.
1922. DREVDAL. *Curvas de enlace y de paso*. «Teknisk Ukeblad».
1922. LACHMANN y ROTHE. *Construcción de curvas de paso en las vías férreas*. «Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.»
1927. HÖFER. *Trazado de curvas por envolventes*. Berlín.
1927. DIECKMANN. *Nuevo manual para el trazado de arcos circulares con y sin curvas de paso*. Essen.
1928. SCHWANTER. *Trazado de curvas*. Berlín.
1929. BÉRILLE. *Tablas para el trazado de curvas*. París.
1931. SCHRAMM. *Las curvas en vías férreas*. Berlín.

§ 126. Trazado de túneles

El trabajo topográfico que hay que realizar para el trazado de un túnel consiste en la determinación de la dirección de su eje a la entrada y a la salida, así como del desnivel

entre ambos puntos. Para la primera parte es necesario realizar observaciones acimutales de gran precisión, y para la segunda hay que hacer mediciones de distancias y nivelaciones; pero no debe perderse de vista que la longitud del túnel tiene menos importancia que su dirección y su desnivel.

Sean A y B (fig. 437) los puntos extremos del túnel, y T_1A y T_2B dos direcciones fijas, por fuera del mismo; se trata de hallar los ángulos φ y ψ , sin importarnos que por dentro del túnel el eje siga una línea recta o curva.

El planteo de este problema varía según las circunstancias propias de cada caso; el más sencillo de éstos es aquel en que la línea recta AB se tiene ya trazada en el campo, pudiéndose aplicar para la determinación de puntos los métodos descritos en el párrafo 115. Así se replanteó el túnel del Monte Cenis, de unos 12 Km de longitud, del cual trataremos después con algún detalle.

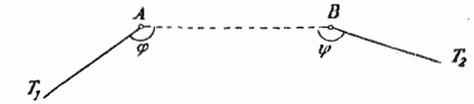


Fig. 437

Cuando no es posible hacer el replanteo directamente, y el terreno situado sobre el túnel es accesible, se unen los puntos A y B mediante una poligonal, que se calcula por coordenadas, como ya se dijo en el párrafo 117. A causa de los errores siempre inevitables conviene tomar el menor número posible de puntos; por lo demás, deben tenerse en cuenta todas las indicaciones hechas al tratar de los itinerarios poligonales (tomo I, capítulo IX), especialmente cuanto se refiere a los medios auxiliares para el centrado o puesta en estación del aparato (tomo I, páginas 305 a 309).

En los túneles de montañas accidentadas es raro que el terreno superior sea accesible, y en este caso hay que recurrir a una triangulación (tomo I, capítulo VIII), que queda muy simplificada cuando tanto los puntos A y B como las direcciones AT_1 y BT_2 pueden referirse a una red de triángulos ya existente (mapa, triangulación geodésica, etc.); una vez halladas de este modo las coordenadas de A y B , se deduce el acimut de la recta AB ; las compensaciones se hacen del modo estudiado en el tomo I. Cuando no es posible hacer la referencia a ninguna red ya existente, hay que establecer una cadena de triángulos entre A y B , con una base medida para este objeto.

La distancia entre los puntos A y B puede medirse directamente en circunstancias favorables, y cuando no sea posible hacerlo así, se calcula por coordenadas después de unirlos por una poligonal o por una triangulación.

Para determinar el desnivel entre A y B se hace una nivelación ordinaria o de precisión según sea la longitud del túnel, siguiendo las indicaciones dadas en el capítulo primero de este tomo.

Una vez conocidos los elementos necesarios para el replanteo del túnel, a saber, su dirección y desnivel en ambos extremos, tratándose de túnel rectilíneo, se van señalando los puntos del túnel a medida que se va construyendo éste, cuando la longitud total del mismo sea de pocos kilómetros. Para longitudes mayores, hay que prolongar, en el interior del túnel, las direcciones exteriores dadas, para lo cual es necesario utilizar miras iluminadas artificialmente; al mismo tiempo se van midiendo y nivelando los trozos sucesivos para tener una comprobación del cálculo efectuado.

Replanteo de arcos de círculo. Cuando hay que unir las dos tangentes AT_1 y BT_2 (figura 437) por medio de un arco circular de radio dado, se hace el replanteo del modo indicado en el párrafo 117, una vez conocidos los ángulos φ y ψ y la distancia AB . Si los dos puntos A y B han de ser necesariamente los de arranque de la curva, hay que emplear un

arco compuesto, cuyos radios se deducen por el procedimiento indicado en el párrafo 122.

Para el replanteo de los puntos de la curva dentro del túnel, el mejor método es el del polígono inscrito (§ 120), cuyos lados (cuerdas) deben tomarse lo más largos que sea posible. Para intercalar otros puntos secundarios entre estos principales, exactamente determinados, se sigue el método dado en el párrafo 120, páginas 494 y 495.

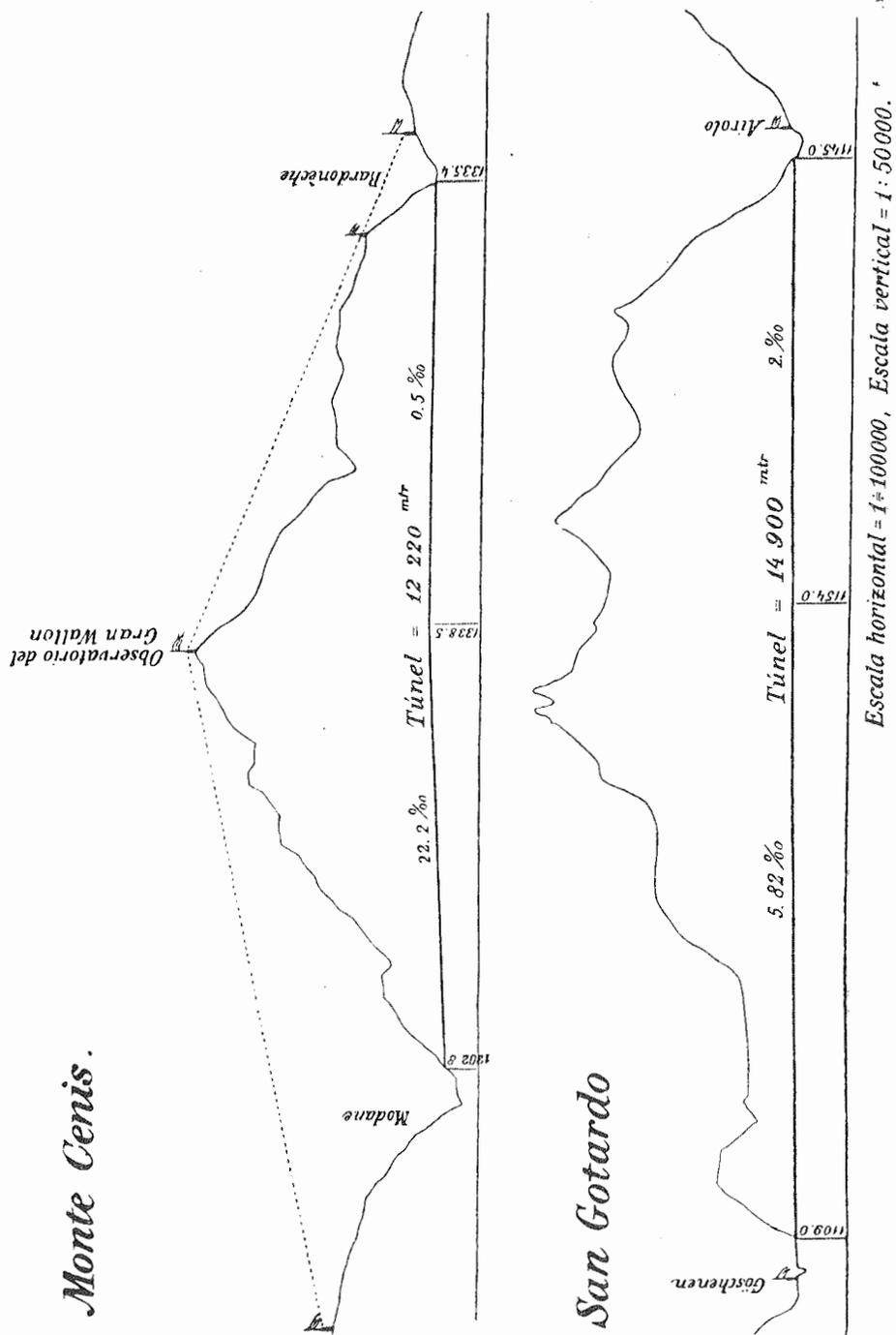


Fig. 438. — Túnel del Monte Cenis

Monte Cenis.

San Gotardo

Fig. 439. — Túnel del San Gotardo

Después de estas generalidades sobre el replanteo de túneles, vamos a dar algunos ejemplos, en los cuales pueden verse algunos detalles operatorios.

Túnel del Monte Cenis (fig. 438). El trazado de este túnel, es decir, el replanteo de su eje, fué hecho directamente en los años 1857 y 1858 sin triangulación alguna, utilizando para ello un observatorio o estación a gran altura, como se ve en la figura 438. La longitud del túnel se determinó mediante una triangulación, y su desnivel, por nivelación sobre la montaña.

Para el trazado del eje se empleó, tanto en el Observatorio situado sobre el Gran Wallon (fig. 438), como en las bocas del túnel, un anteojo de pasos (figura 440). Dentro del mismo túnel se empleó un teodolito corriente de Kern, con retículo iluminado a través del objetivo por un espejo inclinado 45°.

Con todo detalle se encuentra estudiado el túnel del Monte Cenis en una memoria del Ingeniero jefe de Caminos Conte, publicada en los «Annales des ponts et chaussées», de 1863.

El túnel del Monte Cenis se abrió el 26 de diciembre de 1870.

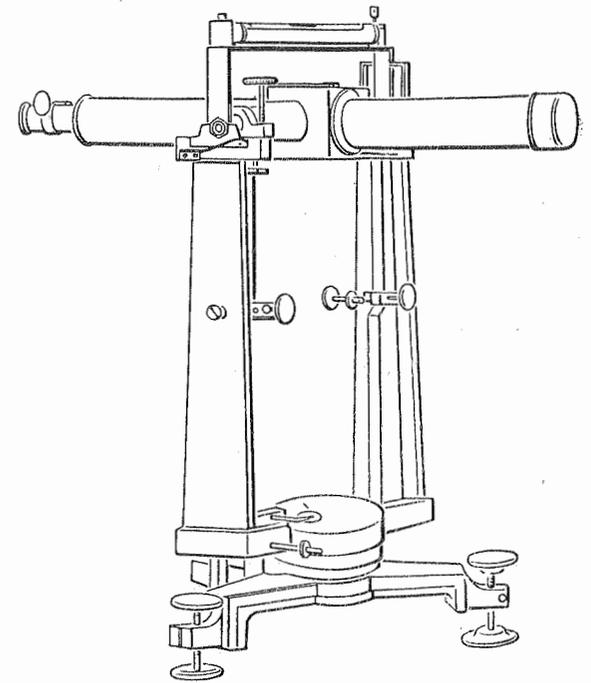


Fig. 440. — Anteojo de pasos

Túnel del San Gotardo (fig. 439). La perforación de este túnel, de unos 15 Km de longitud, duró desde septiembre de 1872 hasta febrero de 1880. La dirección del eje se determinó por triangulación. En las bocas del túnel (Göschenen y Airolo, figura 439).

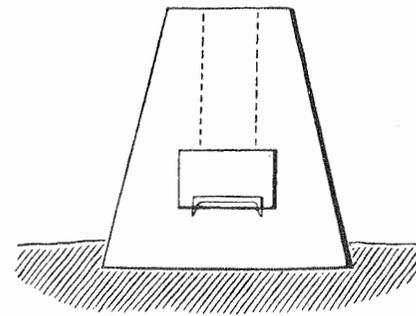


Fig. 441. — Pilares del San Gotardo

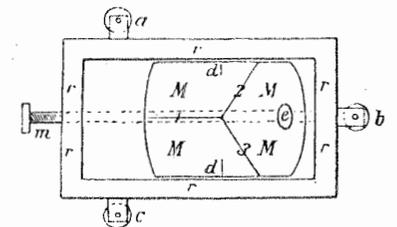


Fig. 442. — Aparato de señales luminosas

se determinaron con toda precisión y mediante numerosas observaciones angulares dos puntos permanentes, uno en cada una, para poder referir las direcciones acimutales en el interior del túnel.

Dentro del túnel del San Gotardo se marcaron las alineaciones con pilares de fábrica (figura 441) en los puntos del eje, y para la puesta en estación de las señales luminosas y

del aparato (teodolito de pasos) se empleó una placa-soporte con movimiento micrométrico (figura 442). La colocación de las lámparas se hizo primero por medio de señales luminosas y después por telégrafo, corriendo el cursor *M* (fig. 442) con el tornillo *m* dentro del marco o bastidor *r* sobre el cual se marcaba la posición de las señales *d* para cada estación; el punto medio de la línea de unión de las dos señales determinaba el punto del eje.

El túnel del San Gotardo quedó abierto el 28 de febrero de 1880, con 7,6 m menos de longitud de lo calculado, pues se encontraron las dos galerías, una por cada lado, cuando todavía quedaban 7,6 m por perforar, según el cálculo. En cota, sólo hubo una diferencia de 0,05 m entre el resultado y el proyecto, y en dirección la diferencia fué de 0,49 m en una primera medición, y de 0,33 m en la segunda.

Acerca del túnel del San Gotardo se han escrito numerosos trabajos, de entre los cuales citaremos los siguientes:

1870. GELPKE. *Determinación del eje del túnel del San Gotardo*. «Civilingenieur», tomo XVI. Triangulación con 20 triángulos y una base de 1450,44 m de longitud.
- 1875-1876. KOPPE. *Determinación del eje del túnel del San Gotardo*. «Zeitschr. f. Verm.», 1875 y 1876.
1876. HELMERT. *Discusión de los errores de observación en el trazado del eje del túnel del San Gotardo, por Koppe*. «Zeitschr. f. Verm.», 1876.
1877. PESTALOZZI. *Replanteo del eje del túnel del San Gotardo*. Conferencias de la X Sesión de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos de Zurich; «Die Eisenbahn», tomo VI, 1877.
1878. DOLEZALEK. *Medios auxiliares para el trazado, en planta, del túnel del San Gotardo*. «Zeitschr. des Arch- und Ing.-Vereins zu Hannover», tomo XXIV, 1878.
1880. KOPPE. *Replanteo del eje del túnel del San Gotardo*. «Eisenbahn», tomo XXII, 20 febrero 1880.
1880. GELPKE. *Las últimas comprobaciones acimutales y la perforación del túnel del San Gotardo*.
1880. DOLEZALEK. *La perforación del túnel del San Gotardo y la dirección de su eje*. «Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover», 1880.

Túnel helicoidal. A continuación damos algunos de los resultados de mediciones directas hechas después de perforado el túnel helicoidal del San Gotardo (la mayor parte de los arcos compuestos eran de radios de 300 y 500 m):

Túnel:	Legginstein	Wattinger	Travi	Freggio	Prato	Pfaffensprung
Longitud:	1095 m	1084 m	1547 m	1564 m	1557 m	1476 m
Diferencias:						
en dirección:	2,8 cm	1,2 cm	5 cm	10,6 cm	1,4 cm	12,6 cm
en cota:	—	0,6	1	2,6	0,5	1,5
en longitud:	5,0	7,0	4	2,3	1,6	14,0

Túnel del Simplón. El replanteo de este túnel, de 19803 m de longitud, se hizo de modo análogo al del túnel del San Gotardo, pero perfeccionando la organización y los medios auxiliares de aquél (aparatos, lámparas, soporte micrométrico, teléfono en vez de telégrafo, etc.).

Los detalles de este trabajo fueron publicados por Rosenmund en las memorias de la Dirección del ferrocarril Jura-Simplón, en Berna, 1901. Véase también «Schweiz. Bauzeitung», tomos XXXVII y XL, y «Zeitschr. f. Verm.», 1902.

La red de triángulos que sirvió para hallar la distancia y referir el trazado a la triangulación general suiza, constaba de 11 vértices; la cota de los puntos fijos extremos fué nuevamente determinada por una nivelación de precisión. Dentro del túnel, y cerca de la boca norte del mismo, había una refracción extraordinaria, que obligó a tomar muy cortas las distancias de mira. En el túnel se hicieron estaciones a distancias entre 1000 y 2000 m; el error del promedio de cuatro replanteos no debía pasar de 10 mm por 1 Km; el error

medio calculado, por kilómetro, era de 5 mm, y según la fórmula (5) de la página 479, ó la (10) de la página 495, se tenía para cada mitad del túnel (10 Km de longitud y 10 estaciones) un error transversal de unos 10 cm, conforme al error de dirección de la triangulación. El error medio del acimut del túnel fué de 0,70''.

Periódicamente (una vez por año, en cada extremo) se replanteaba el eje, partiendo de los puntos últimamente fijados; después se hacían nivelaciones de precisión y mediciones precisas de longitud (con reglas de 5 m provistas de nivel) en los trozos antiguos, y nivelación ordinaria, con medición corriente de distancias en los nuevos.

El túnel quedó perforado el 24 de febrero de 1905. La comprobación hecha el 15 de agosto del mismo año puso de manifiesto la existencia de una desviación lateral del eje, de 0,202 m, y de una diferencia o error de cota de 0,087 m. La longitud del túnel resultó 0,79 m más corta que la calculada. Para más detalles, puede verse la memoria de Rosenmund sobre el túnel del Simplón, publicada en la «Zeitschr. f. Verm.» de 1905.

Túnel de Lötschberg. Para la determinación de longitud y dirección de este túnel, de 14 Km de largo, hizo Mathys una triangulación especial unida a la de tercer orden de Suiza, estableciendo pilares de observación a 136 m y 50 m respectivamente de las bocas del túnel, con señales en la prolongación del eje por ambos extremos.

También se hizo un trazado sobre el terreno, tomando dos puntos, uno a cada lado, distantes unos 3 Km de los pilares de observación y situados sobre la prolongación del eje del túnel, de tal modo que desde ambos se viera la cumbre; primero desde uno de los

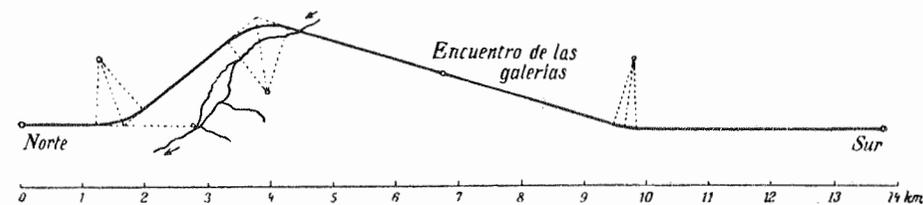


Fig. 443. — Túnel de Lötschberg

puntos auxiliares y después desde el otro, se situaba en aquélla una banderola, siempre sobre el eje del túnel; entre las dos posiciones de la banderola hubo una distancia transversal de 2,5 cm.

Para mayor comprobación calcularon los profesores Rosenmund y Baeschlin la desviación del péndulo en los puntos empleados para el trazado exterior (debida a la masa de las montañas de alrededor), según la fórmula de Helmert: el efecto así calculado producía una desviación de unos 30 cm en el centro del túnel.

En el otoño de 1907 murió inesperadamente Mathys y prosiguió los trabajos el profesor Baeschlin. Después de muchas y repetidas mediciones de los ángulos necesarios para el trazado exterior, se corrigieron las señales del efecto de desviación de péndulo y se consideró como definitiva la alineación recta determinada por aquéllas.

Las cotas del túnel se determinaron refiriendo los puntos extremos de aquél, por medio de itinerarios de nivelación de escasa longitud, a las señales de la red general de nivelación de precisión.

Siguiendo este trazado, y cuando ya las galerías abiertas por uno y otro lado tenían unos 2,5 Km de longitud, una corriente subterránea de agua produjo una catástrofe (entre el 24 y el 25 de julio de 1908), que obligó a abandonar el trazado primitivo, variando éste

por la introducción en el mismo de tres curvas de 1100 m de radio cada una, como se ve en la figura 443. Para resolver este problema, nada fácil por cierto, se volvió a comprobar la precisión de la longitud determinada por triangulación: esta comprobación dió como resultado la posibilidad de encontrar un error de unos 30 cm en el encuentro de las dos galerías, lo cual carecía de importancia práctica.

El trazado se hizo midiendo las longitudes con reglas de madera de 5 m terminadas en arista cortante, que se comparaban antes y después de cada medición.

La medición de los ángulos se hizo con un teodolito con círculo acimutal de 21 cm de diámetro, provisto de micrómetro e iluminación eléctrica, construido por Max Hildebrand, y con el cual el error medio de un ángulo medido en las dos posiciones del anteojo era de $\pm 0,84''$.

Para el replanteo de las curvas, a partir del lado norte, se marcaron primero puntos del eje de 20 en 20 m, con estacas y clavos; las estacas hectométricas se tomaron como vértices de un polígono inscrito cuyos ángulos y lados se midieron con toda exactitud, y después de referidos a un sistema local de coordenadas, se calcularon las distancias de aquellos puntos al vértice o punto medio de la curva, y se hicieron las correcciones necesarias.

Después de terminada la primera parte, se hizo un itinerario poligonal de tramos de 172 m de longitud, pero no tomando los puntos por el medio del túnel, sino por el borde exterior, para que las visuales no pasaran muy cerca del borde interior; sin embargo, resultó ilusoria la esperanza de que por este procedimiento no habría que temer la refracción lateral, pues al repetir las operaciones se obtuvo para el segundo trozo recto del túnel una diferencia de $18''$ respecto a la observación primera.

En el lado sur del túnel se abrieron las galerías en la dirección de las tangentes, por tener sólo 320 m de longitud la curva de unión, midiéndose directamente el ángulo formado por aquéllas, desde su mismo punto de intersección.

Las dos galerías se encontraron, es decir, el túnel quedó abierto el 31 de marzo de 1911. La comprobación hecha en los días 4 y 5 de abril del mismo año dió los siguientes resultados: error longitudinal = 41 cm; error lateral o transversal = 25,7 cm; error de altura = 10,2 cm.

Todos los detalles relativos al replanteo del túnel de Lötschberg fueron publicados por Baeschlin en la «Schweiz. Bauzeitung» de 1911.

Otros replanteos particulares: Túnel de Albula. El trazado de este túnel, de 5,9 Km de longitud, se hizo directamente, como el del Monte Cenis (fig. 438); pero como desde la cúspide del monte no se veían los dos pilares próximos a las entradas del túnel, hubo que tomar en aquélla dos puntos distantes entre sí unos 20 m desde cada uno de los cuales se veía uno de los puntos de entrada, y uno auxiliar a unos 3 Km al norte, visible desde el pilar de este mismo lado y desde los dos de la cima (véase párrafo 115, II, página 477). La distancia se calculó por coordenadas, así como la dirección del eje en ambos pilares, refiriendo estos dos puntos a la triangulación general topográfica de Suiza.

El replanteo por dentro del túnel se hizo como en el túnel del Simplón, pero con métodos operatorios más sencillos. La distancia entre las estaciones fué de 600 m, obligada por la longitud de la línea de unión de las dos cabinas telefónicas empleadas. El 29 de mayo de 1902 quedó abierto el túnel, comprobándose la existencia de los siguientes errores absolutos:

en longitud 1,150 m (corto); en dirección 5,0 cm; en altura 4,8 cm.

El error de dirección corresponde a unos 5 mm de error por estación.

Para más detalles sobre el túnel de Albula, puede verse la memoria de Graf, publicada en la «Schweizer. Bauzeitung», tomo XL.

Túneles helicoidales de Albula. Para los cinco túneles helicoidales situados al norte de Albula, da Graf los siguientes resultados:

	Longitud	Dirección	Diferencia en longitud	Cota
Greifenstein: dos arcos ($r = 120$ m)				
con curva intermedia de 244 m	693 m	8 cm	7 cm	entre 0 y 3 cm
God: túnel helicoidal ($r = 120$ m)	485	2	3	
Rugnux: arco compuesto ($r = 120$ y 155 m)	661	10	30	
			(por defecto)	
Bajo Toua: arco compuesto ($r = 120, 300$ y 120 m)	676	3	2 cm	
Alto Toua: túnel helicoidal ($r = 120$ m)	535	5	5	

Las tangentes se unieron por método indirecto (§ 117, y figura 397). El replanteo se hizo por el método de las cuerdas (§ 116, figura 394), tomando los lados todo lo largos que permitía la anchura de la galería, y empleando para referencia una plomada suspendida de un trípode ligero y que se destacaba sobre una hoja de papel. En estos túneles de poca longitud, con los radios antes indicados podía calcularse, para longitud media de las cuerdas, unos 40 m, y según el error absoluto observado en el encuentro de las dos galerías y consignado en el cuadro anterior, el error e que figura en la fórmula (10) de la página 495, podía hacerse igual a unos 3 mm. Para el grado de curvatura propuesto (ángulos B, C, D de la figura 410, página 493) resulta el valor $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{5}$, dado el error ds de las longitudes s ;

las longitudes se midieron repetidamente (cuatro veces) con toda precisión y cuidado.

Para túneles de esta clase, de tan corta longitud, se podría lograr igual exactitud que la obtenida en las perforaciones anteriores, tomando como límite para error absoluto del replanteo el valor 5 mm para el estaquillado de cada ángulo, y el de 5 a 10 mm para cada tramo [§ 120, fórmula (10), página 495]. Para el replanteo partiendo de la alineación de entrada, véase lo dicho en el párrafo 120, 3, página 494.

Para el replanteo de túneles helicoidales de gran longitud (§ 123) se levanta un itinerario poligonal con lados lo más largos que se pueda (empleando los medios auxiliares para el centrado indicados en el tomo I, páginas 305 a 309), y de las coordenadas de los vértices y de los centros se deduce la posición de los puntos del eje.

Acerca de los túneles de poca longitud merecen citarse los siguientes trabajos:

WINCKEL. *Memorias sobre el replanteo de túneles de los caminos de hierro alemanes* («Zeitschr. f. Verm.», 1883):

1. *Metterlicher Tunnel*; longitud 410 m, en una curva de 377 m de radio. El replanteo se hizo inscribiendo un polígono de 53 m de lado y 1,04 m de flecha. Error absoluto en la perforación = 6 cm.
2. *Friedrich-Wilhelms-Tunnel*; longitud 328 m, en una curva de 339 m de radio. Error absoluto = 1,5 cm
3. *Philippsheimer Tunnel*; longitud 260 m, en una curva de 339 m de radio. Error absoluto = 0,4 m

Los túneles *Ernst-August*, en el Hartz, según una memoria de Koppe («Zeitschr. f. Verm.», 1876), fueron abiertos con un error de 2,3 cm en promedio. La longitud de los tramos medidos con el teodolito, necesarios para cada una de las nueve galerías, fué por término medio de 4000 m.

CAPÍTULO VII

Trabajos topográficos en España (*)**§ 127. Trabajos del Instituto Geográfico y Catastral**

Por no corresponder al carácter de esta obra, no hemos de remontarnos a las primeras noticias documentales de trabajos cartográficos en nuestra nación. Pruebas abundantes existen de que en España se realizaron trabajos de esta índole desde muchos siglos atrás; pero por ser unos propiamente de investigación individual y otros de tipo comarcal o regional, vamos a considerar solamente, a la ligera, el desarrollo de los trabajos topográficos en España hechos de modo sistemático y con vistas a una obra de conjunto y realmente nacional.

Se debe a Felipe II la idea de la formación en El Escorial de una colección de instrumentos geodésicos y astronómicos, así como la del trabajo, que encargó a don Pedro Esquivel, de representar gráficamente nuestro territorio. En el siglo XVIII, Jorge Juan propone la construcción de un Mapa general de España, partiendo de una base central y de una red de triángulos.

En 1796 se da forma concreta a estos proyectos, organizándose, por orden de Carlos IV, el Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos del Estado, que fué disuelto en 1804. En 1852 se prosiguieron estos trabajos, formándose poco después la Comisión del Mapa de España, que comenzó su labor midiendo la base central de Madrudejos, en el año 1858.

En 1870 se crea el Instituto Geográfico, cuya misión había de ser, no sólo la formación del Mapa Nacional, sino la del Mapa Parcelario y la realización de todos los estudios geodésicos y geofísicos, propios del carácter científico de tal organismo. Bajo la dirección del general Ibáñez comienza el Instituto su labor; el general alemán Baejer dijo a la sazón que «de realizarse el plan que se había propuesto el Instituto Geográfico de España, quedaría oscurecido todo cuanto hasta la fecha se había hecho sobre Geodesia en el Continente». En atención a la verdad y al buen prestigio del Instituto Geográfico, hemos de consignar que aquel plan se está realizando en todas sus partes, más aún, que el campo de este Centro se ha ido ampliando notablemente, extendiéndose su acción a todas las ramas de la Geofísica, cuyo estudio está confiado a diversas secciones del Instituto, siendo el total de las que integran este organismo las siguientes:

1.^a Geodesia y Geofísica, que comprende los Servicios de Geodesia, Astronomía, Gravimetría, Nivelaciones de precisión, Mareógrafos, Metrología, Magnetismo, Electricidad terrestre y aérea, y Sismología;

2.^a Topografía, que comprende los Servicios de Topografía para el Mapa Nacional en escala 1:50000, los de levantamientos especiales en otras escalas, Planos de

(*) Este capítulo, original del traductor, sustituye al que en la obra alemana describe los trabajos topográficos en Alemania.

población, Cartografía, Fotogrametría terrestre y aérea en sus distintas modalidades y aplicaciones, y sus laboratorios;

3.^a Catastro Topográfico Parcelario, constituida por los Servicios de Ejecución y Conservación del Catastro Parcelario de todos los términos municipales de España;

4.^a Personal;

5.^a Publicaciones, que comprende los Servicios que su nombre indica, y dependen de ella los talleres e imprenta;

6.^a Asuntos generales, de la cual dependen los Archivos, Bibliotecas, Depósito de Aparatos e Instrumentos, y Depósito de Planos y Publicaciones;

7.^a Publicaciones.

A poco de iniciar el Instituto sus tareas como tal, se crea el Cuerpo de Topógrafos, en 1892 el de Geodestas, y en 1890 el actual de Ingenieros Geógrafos. El Instituto Geográfico, que en un principio se denominó Geográfico y Estadístico, se llama actualmente, desde que inició sus trabajos topográficos parcelarios, Instituto Geográfico y Catastral.

Además del Instituto Geográfico, se destaca por la extensión y bondad de sus trabajos, el Depósito de la Guerra, hoy Servicio Geográfico del Ejército, que construye el Mapa Militar Itinerario de España, utilizando para ello la proyección de Bonne. La Comisión Hidrográfica efectúa levantamientos topográficos de las costas, con sondeos, y, en general, los diferentes Cuerpos de Ingenieros del Estado forman planos adaptados a sus peculiares necesidades.

Mapas de España. Instituto Geográfico y Catastral. El Mapa que pudiera llamarse *típico* del Instituto Geográfico es el construido a escala 1:25000 y publicado en escala 1:50000, usando la tercera proyección de Tissot; consta de 1130 hojas (incluyendo Baleares y Canarias), y la equidistancia de sus curvas de nivel es de 20 metros. La exactitud de estos Mapas y su magnífica presentación los hacen dignos del mayor elogio. También construye y publica el Instituto Geográfico Mapas Provinciales a escala 1:200000, con curvas de nivel a 100 m de equidistancia y en el mismo sistema de proyección de Tissot.

Por último, han sido publicados los Mapas a escalas 1:1000000 y a 1:500000, siguiendo el sistema de proyección policónica empleada en el Mapa Internacional del Mundo. España tomó parte en las Conferencias Internacionales de 1909 en Londres y de 1913 en París, para la formación del Mapa Internacional de la Tierra a escala de 1:1000000. Según lo acordado en dichas Conferencias, la equidistancia entre las curvas de nivel de este Mapa debe ser de 100 metros.

En las «Instrucciones» del Instituto Geográfico y Catastral que figuran en el Apéndice del tomo I de esta obra, pueden verse los métodos de levantamiento y errores tolerables en las operaciones topográficas para la formación de los Mapas a escalas 1:25000 y 1:50000.

Servicio Geográfico del Ejército. Este Servicio publica el Mapa Militar Itinerario a escala 1:200000 y construye otros a escalas 1:100000, 1:20000 y 1:10000, según las zonas que interesan al Alto Estado Mayor, aparte los trabajos que por su índole no son publicados.

Planos de población. El Instituto Geográfico y Catastral forma los planos de población, distinguiéndose éstos en dos clases, según se trate de capitales de provincia y de

poblaciones muy importantes o de poblaciones que carezcan de estas condiciones. Actualmente se utilizan fotografías aéreas en muchos casos para esta clase de levantamientos. En las antes citadas «Instrucciones» que figuran en el Apéndice del tomo I, aparecen con cierto detalle el método y los errores tolerables en este género de levantamientos.

Nivelación de precisión en España. En España, la nivelación de precisión se hace dos veces para cada itinerario, por operadores diferentes, siguiendo las carreteras generales, las provinciales, las vías férreas, los caminos vecinales y por último los de herradura.

Los límites de precisión son: 1 mm el máximo error de observación a 100 m de distancia; 0,1 mm el que afecte a las correcciones y reducciones que se introduzcan en la observación; $5\sqrt{K}$ mm el error de cierre de un polígono o de una doble línea de K kilómetros; 0,50 m el error máximo en la apreciación de la distancia a 100 m.

Como *punto cero* o de partida para la nivelación de España se toma el nivel medio del agua del mar en Alicante, donde el Instituto tiene montado un mareógrafo. En Canarias, en Santa Cruz de Tenerife tiene montado otro mareógrafo como el de Alicante.

Las *Nivelaciones de alta precisión* que se ejecutan por el Instituto Geográfico y Catastral en virtud de acuerdos internacionales y definidas por la exactitud correspondiente a un error total $\epsilon = 2 \text{ mm} \sqrt{K}$ (siendo K la longitud del itinerario nivelado, en kilómetros) abarcan la totalidad de la Península por medio de una red continua de 10184 Km, que sigue las vías férreas principales y las carreteras de primer orden en su mayor parte, empleando señales metálicas principales colocadas con las mayores garantías de permanencia e inmovilidad. Esta nivelación de alta precisión, que tiene múltiples contactos con la antigua red de Nivelación de precisión que se hizo con el fin primordial de servir de base al Mapa Nacional, une las estaciones mareográficas del litoral y tiene sus enlaces con las redes similares de las naciones fronterizas, Francia y Portugal. Entre las finalidades de estos trabajos se destacan las de carácter geodésico y geofísico: determinación del nivel o desnivel entre los niveles medios de los diferentes mares, representación geométrica de la superficie del geoide, estudio de las mareas terrestres, de los desplazamientos lentos de determinadas zonas terrestres, etc.

Por los desniveles obtenidos en los trabajos de campo, corregidos por la ecuación del metro de mira, se calculan las cotas ortométricas y dinámicas de las señales metálicas, por medio de las fórmulas expresivas de la falta de paralelismo de las superficies de nivel y del trabajo a desarrollar por la gravedad sobre la masa de la unidad de peso al pasar de una a otra de aquellas superficies. Los aparatos que se emplean son: nivel de máxima precisión con micrómetro lector, que permite apreciar con toda seguridad sobre la mira la décima de milímetro, y miras invar de doble escala cuya verdadera longitud se determina, antes y después de usarlas, con un aparato especial, «comparador», en el que se aprecia el doble micrón.

Catastro Topográfico Parcelario. El Instituto Geográfico y Catastral es el organismo encargado, en España, de la formación de los planos parcelarios de los diferentes términos municipales, entendiéndose por tales planos los levantamientos topográficos de todas y cada una de las parcelas de los mismos, con expresión de su situación, extensión, calificación de su cultivo y nombre del propietario. La calificación definitiva de los cultivos, la clasificación y la valoración correspondiente incumbe al Servicio de Valoración, afecto al Ministerio de Hacienda.

Los trabajos topográficos del Catastro Parcelario se efectúan en el orden siguiente para cada término municipal: levantamiento del plano perimetral, con sus líneas jurisdiccionales; delimitación de los polígonos topográficos dentro del término, determinados por líneas y particularidades permanentes del terreno, como ríos, arroyos, caminos, etc.; dentro de cada polígono se sitúan las diferentes parcelas. La escala varía según el tamaño de las parcelas, pero de modo que no haya ninguna de éstas representada en el plano por una superficie menor de 2 cm^2 .

Los levantamientos se hacen con brújula, por itinerarios de estaciones recíprocas, y la mira se lee con los tres hilos del retículo, leyéndose el ángulo de pendiente (cuando lo haya), para reducir las distancias al horizonte.

Al hacerse el levantamiento parcelario se sitúan todas las edificaciones, y también todos los detalles, como pozos, acequias, etc., que puedan contribuir a identificar cada parcela en sus aspectos físico y económico.

Los trabajos de campo del Catastro Parcelario se apoyan en los datos del Mapa Nacional a escala 1:25000, y la declinación de las brújulas se hace directamente por observación astronómica, o partiendo de un lado de la triangulación geodésica o topográfica del término de que se trate.

Terminados los trabajos de campo y hechos los planos correspondientes en gabinete, se envía toda la documentación con índice de propietarios, relación de parcelas, etc., a los respectivos Ayuntamientos para que éstos puedan formular las reclamaciones a que hubiere lugar, y una vez atendidas éstas, y aprobados los trabajos por el Instituto, pasan al Ministerio de Hacienda para que por los Ingenieros Agrónomos del mismo se efectúe la clasificación definitiva de cultivos y apliquen a la cabida de cada parcela o subparcela el tipo evaluatorio que les corresponda, en lo cual consiste la valoración propiamente dicha.

El Servicio de Conservación del Catastro Topográfico Parcelario atiende a recoger periódicamente todas las variaciones de propietario, cultivo, agrupamiento o segregación de parcelas, etc., que son llevadas a los planos originales y comunicadas al Ministerio de Hacienda, para las modificaciones fiscales que tales cambios arrastran consigo, teniéndose de este modo al día la obra de Catastro Parcelario, que siendo tan perfecta como en los países en que más atentamente han seguido este Servicio, resulta en España a un costo insospechadamente más reducido que en aquéllos, gracias a la bondad de la organización que la rige.

Apéndice

Tablas

	<u>Págs.</u>
I. Tablas auxiliares para el cálculo del error medio de una nivelación.	533
II y III. Nivelación trigonométrica.	534 y 535
IV. Curvatura de la Tierra y refracción media.	536
V. Conversión de escalas barométricas y termométricas	537
VI a VIII. Reducción del barómetro de mercurio a 0°	538 a 540
IX. Depresión capilar en el tubo barométrico	541
X y XI. Reducción a la gravedad normal	542 y 543
XII y XIII. Tensión del vapor de agua saturado	544 y 545
XIV. Determinación aproximada de la tensión del vapor	546
XV. Humedad del aire	547
XVI. Dilatación del aire por el calor	548
XVII. Altitudes barométricas sobre el mar para $t = 15^\circ$	549
XVIII. Desniveles barométricos	550 y 551
XIX. Itinerarios medidos con cinta y eclímetro	552
XX. Reducción de pasos al horizonte y a metros, por diferencias barométricas	553
XXI a XXIV. Tablas taquimétricas	554 a 557
XXV. Coordenadas rectangulares para el replanteo de arcos de circunferencia	558 a 560
XXVI. Ángulo periférico o tangencial (semiinscrito) α para cuerdas de longitud $s = 20$	561 a 563
XXVII. Longitud s de la cuerda para un ángulo periférico α	564
XXVIII. Curvas de paso o de enlace.	565

I. Tablas auxiliares para el cálculo del error medio de una nivelación

A) Valores de \sqrt{s} (s en kilómetros)

s	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00	0,10	0,14	0,17	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
0,1	0,32	0,33	0,35	0,36	0,37	0,39	0,40	0,41	0,42	0,44
0,2	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54
0,3	0,55	0,56	0,57	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62
0,4	0,63	0,64	0,65	0,66	0,66	0,67	0,68	0,69	0,69	0,70
0,5	0,71	0,71	0,72	0,73	0,73	0,74	0,75	0,75	0,76	0,77
0,6	0,77	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83
0,7	0,84	0,84	0,85	0,85	0,86	0,87	0,87	0,88	0,88	0,89
0,8	0,89	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94
0,9	0,95	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
1,2	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14
1,3	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18
1,4	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
1,5	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26
1,6	1,26	1,27	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30
1,7	1,30	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,34
1,8	1,34	1,35	1,35	1,35	1,36	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
1,9	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,40	1,41	1,41
2,0	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	1,45

B) Valores de $\frac{d}{\sqrt{s}}$ (d en milímetros; s en kilómetros)

s	d															
	1mm	2mm	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	12mm	14mm	16mm	18mm	20mm	
0,1km	3,2	6,3	9,5	12,6	15,8	19,0	22,1	25,3	28,5	31,6	37,9	44,3	50,6	56,9	63,2	
0,2	2,2	4,5	6,7	8,9	11,2	13,4	15,7	17,9	20,1	22,4	26,8	31,3	35,8	40,2	44,7	
0,3	1,8	3,7	5,5	7,3	9,1	11,0	12,8	14,6	16,4	18,3	21,9	25,6	29,2	32,9	36,5	
0,4	1,6	3,2	4,7	6,3	7,9	9,5	11,1	12,6	14,2	15,8	19,0	22,1	25,3	28,5	31,6	
0,5	1,4	2,8	4,2	5,7	7,1	8,5	9,9	11,3	12,7	14,1	17,0	19,8	22,6	25,5	28,3	
0,6	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,7	9,0	10,3	11,6	12,9	15,5	18,1	20,7	23,2	25,8	
0,7	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12,0	14,3	16,7	19,1	21,5	23,9	
0,8	1,1	2,2	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	10,1	11,2	13,4	15,7	17,9	20,1	22,4	
0,9	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	7,4	8,4	9,5	10,5	12,6	14,8	16,9	19,0	21,1	
1,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
1,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
2,0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,7	6,4	7,1	8,5	9,9	11,3	12,7	14,1	
3,0	0,6	1,2	1,7	2,3	2,9	3,5	4,0	4,6	5,2	5,8	6,9	8,1	9,2	10,4	11,5	
4,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	
5,0	0,4	0,9	1,3	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,0	4,5	5,4	6,3	7,2	8,0	8,9	
6,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,9	3,3	3,7	4,1	4,9	5,7	6,5	7,3	8,2	
7,0	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9	2,3	2,6	3,0	3,4	3,8	4,5	5,3	6,0	6,8	7,6	
8,0	0,4	0,7	1,1	1,4	1,8	2,1	2,5	2,8	3,2	3,5	4,2	4,9	5,7	6,4	7,1	
9,0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	4,0	4,7	5,3	6,0	6,7	
10,0	0,3	0,6	0,9	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,2	3,8	4,4	5,1	5,7	6,3	

(Véase § 15, pág. 75)

II. Nivelación trigonométrica

Corrección de horizonte $\frac{1-k}{2r} a^2$; $\log r = 6,80489$; $k = 0,13$

en función de la distancia a

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	Dif.
m 0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055	13
1000	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,175	0,197	0,221	0,246	27
2000	0,273	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	4
3000	0,61	0,66	0,70	0,74	0,79	0,84	0,88	0,93	0,98	1,04	5
4000	1,09	1,15	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64	6
5000	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99	2,06	2,14	2,21	2,29	2,37	8
m 6000	2,45	2,54	2,62	2,71	2,79	2,88	2,97	3,06	3,15	3,25	10
7000	3,34	3,44	3,53	3,63	3,73	3,83	3,94	4,04	4,15	4,25	11
8000	4,36	4,47	4,58	4,70	4,81	4,93	5,04	5,16	5,28	5,40	12
9000	5,52	5,65	5,77	5,90	6,02	6,15	6,28	6,41	6,55	6,68	13
10000	6,82	6,95	7,09	7,23	7,37	7,52	7,66	7,80	7,95	8,10	15
m 11000	8,25	8,40	8,55	8,70	8,86	9,02	9,17	9,33	9,49	9,65	17
12000	9,82	9,98	10,15	10,31	10,48	10,65	10,82	10,99	11,17	11,34	18
13000	11,52	11,70	11,88	12,06	12,24	12,42	12,61	12,79	12,98	13,17	19
14000	13,36	13,55	13,75	13,94	14,14	14,33	14,53	14,73	14,93	15,13	21
15000	15,34	15,54	15,75	15,96	16,17	16,38	16,59	16,80	17,02	17,23	22
m 16000	17,45	17,67	17,89	18,11	18,34	18,56	18,78	19,01	19,24	19,47	23
17000	19,70	19,93	20,17	20,40	20,64	20,88	21,12	21,36	21,60	21,84	25
18000	22,09	22,33	22,58	22,83	23,08	23,33	23,58	24,84	24,09	24,35	26
19000	24,61	24,87	25,13	25,39	25,66	25,92	26,19	26,46	26,73	27,00	27
20000	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,21	29,49	29,78	28
m 21000	30,06	30,35	30,64	30,93	31,22	31,51	31,81	32,10	32,40	32,69	30
22000	32,99	33,30	33,60	33,90	34,20	34,51	34,82	35,13	35,44	35,75	31
23000	36,06	36,38	36,69	37,01	37,33	37,65	37,97	38,29	38,61	38,94	33
24000	39,27	39,59	39,92	40,25	40,59	40,92	41,25	41,59	41,93	42,27	34
25000	42,61	42,95	43,29	43,64	43,98	44,33	44,68	45,03	45,38	45,73	35
m 26000	46,08	46,44	46,79	47,15	47,51	47,87	48,23	48,60	48,96	49,33	37
27000	49,70	50,06	50,44	50,81	51,18	51,55	51,93	52,31	52,68	53,06	39
28000	53,45	53,83	54,21	54,60	54,98	55,37	55,76	56,15	56,54	56,94	39
29000	57,33	57,73	58,12	58,52	58,92	59,33	59,73	60,13	60,54	60,94	41
30000	61,35	61,76	62,17	62,59	63,00	63,42	63,83	64,25	64,67	65,09	42

Corrección logarítmica para el nivel medio sobre el mar $\frac{H+H'}{2}$, $\log\left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$

$\frac{H+H'}{2}$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
m 0	0,00000	0,00001	0,00001	0,00002	0,00003	0,00003	0,00004	0,00005	0,00005	0,00006
1000	0,00007	0,00007	0,00008	0,00009	0,00010	0,00010	0,00011	0,00012	0,00012	0,00013
2000	0,00014	0,00014	0,00015	0,00016	0,00016	0,00017	0,00018	0,00018	0,00019	0,00020
3000	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023	0,00024	0,00025	0,00025	0,00026	0,00027
4000	0,00027	0,00028	0,00029	0,00029	0,00030	0,00031	0,00031	0,00032	0,00033	0,00033
5000	0,00034	0,00035	0,00035	0,00036	0,00037	0,00037	0,00038	0,00039	0,00039	0,00040

(Véase § 27, pág. 116)

III. Nivelación trigonométrica

Corrección de horizonte $\frac{1-k}{2r} a^2$; $\log r = 6,80489$; $k = 0,13$

en función de $\log a$

$\log a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.
2.0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	
2.9	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0
3.0	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	1
3.1	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	1
3.2	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	1
3.3	0,27	0,28	0,30	0,31	0,33	0,34	0,36	0,37	0,39	0,41	2
3.4	0,43	0,45	0,47	0,49	0,52	0,54	0,57	0,59	0,62	0,65	3
3.5	0,68	0,71	0,75	0,78	0,82	0,86	0,90	0,94	0,98	1,03	5
3.6	1,08	1,13	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,49	1,56	1,64	7
3.7	1,71	1,79	1,88	1,97	2,06	2,16	2,26	2,36	2,47	2,59	12
3.8	2,71	2,84	2,98	3,12	3,26	3,42	3,53	3,75	3,92	4,11	19
3.90	4,30	4,32	4,34	4,36	4,38	4,40	4,42	4,44	4,46	4,48	2
3.91	4,50	4,52	4,55	4,57	4,59	4,61	4,63	4,65	4,67	4,69	3
3.92	4,72	4,74	4,76	4,78	4,80	4,83	4,85	4,87	4,89	4,92	2
3.93	4,94	4,96	4,98	5,01	5,03	5,05	5,08	5,10	5,12	5,15	2
3.94	5,17	5,20	5,22	5,24	5,27	5,29	5,32	5,34	5,37	5,39	3
3.95	5,42	5,44	5,47	5,49	5,52	5,54	5,57	5,59	5,62	5,64	3
3.96	5,67	5,70	5,72	5,75	5,78	5,80	5,83	5,86	5,88	5,91	3
3.97	5,94	5,96	5,99	6,02	6,05	6,08	6,10	6,13	6,16	6,19	3
3.98	6,22	6,25	6,27	6,30	6,33	6,36	6,39	6,42	6,45	6,48	3
3.99	6,51	6,54	6,57	6,60	6,63	6,66	6,69	6,72	6,75	6,79	3
4.00	6,82	6,85	6,88	6,91	6,94	6,98	7,01	7,04	7,07	7,11	3
4.01	7,14	7,17	7,20	7,24	7,27	7,30	7,34	7,37	7,41	7,44	3
4.02	7,47	7,51	7,54	7,58	7,61	7,65	7,68	7,72	7,76	7,79	4
4.03	7,83	7,86	7,90	7,94	7,97	8,01	8,05	8,08	8,12	8,16	4
4.04	8,20	8,23	8,27	8,31	8,35	8,39	8,43	8,46	8,50	8,54	4
4.05	8,58	8,62	8,66	8,70	8,74	8,78	8,82	8,86	8,90	8,94	5
4.06	8,99	9,03	9,07	9,11	9,15	9,20	9,24	9,28	9,32	9,37	4
4.07	9,41	9,45	9,50	9,54	9,59	9,63	9,67	9,72	9,76	9,81	4
4.08	9,85	9,90	9,95	9,99	10,04	10,08	10,13	10,18	10,22	10,27	5
4.09	10,32	10,37	10,41	10,46	10,51	10,56	10,61	10,66	10,71	10,75	5
4.10	10,80	10,85	10,90	10,95	11,01	11,06	11,11	11,16	11,21	11,26	5
4.11	11,31	11,37	11,42	11,47	11,52	11,58	11,63	11,68	11,74	11,79	6
4.12	11,85	11,90	11,96	12,01	12,07	12,12	12,18	12,23	12,29	12,35	6
4.13	12,41	12,46	12,52	12,58	12,63	12,69	12,75	12,81	12,87	12,93	6
4.14	12,99	13,05	13,11	13,17	13,23	13,29	13,35	13,42	13,48	13,54	6
4.15	13,60	13,66	13,73	13,79	13,85	13,92	13,98	14,05	14,11	14,18	6
4.16	14,24	14,31	14,37	14,44	14,51	14,57	14,64	14,71	14,78	14,85	6
4.17	14,91	14,98	15,05	15,12	15,19	15,26	15,33	15,40	15,47	15,55	7
4.18	15,62	15,69	15,76	15,83	15,91	15,98	16,05	16,13	16,20	16,28	7
4.19	16,35	16,43	16,50	16,58	16,66	16,73	16,81	16,89	16,97	17,05	7

(Véase § 27, pág. 116)

IV. Nivelación trigonométrica

Curvatura de la Tierra y refracción media

Radio terrestre = r ; $\log r = 6,80489$; coeficiente de refracción $k = 0,13$

Distancia a	Curvatura terrestre		Refracción		Reducción		Ángulo de refracción δ	Distancia a'
	$\frac{a^2}{2r}$	Dif.	$\frac{a^2 k}{2r}$	Dif.	$\frac{1-k}{2r} a^2$	Dif.		
km	m	+	m	+	m	+		km
1	0,1	0,2	0,0	0,0	0,1	0,2	2"	1
2	0,3	0,4	0,0	0,1	0,3	0,3	4	2
3	0,7	0,6	0,1	0,1	0,6	0,5	6	3
4	1,3	0,7	0,2	0,1	1,1	0,6	8	4
5	2,0	0,8	0,3	0,1	1,7	0,7	11	5
km	m		m		m			km
6	2,8	1,0	0,4	0,1	2,4	0,9	13"	6
7	3,8	1,2	0,5	0,2	3,3	1,1	15	7
8	5,0	1,3	0,7	0,1	4,4	1,1	17	8
9	6,3	1,5	0,8	0,2	5,5	1,3	19	9
10	7,8	1,7	1,0	0,2	6,8	1,5	21	10
km	m		m		m			km
11	9,5	1,8	1,2	0,3	8,3	1,5	23"	11
12	11,3	1,9	1,5	0,2	9,8	1,7	25	12
13	13,2	2,2	1,7	0,3	11,5	1,9	27	13
14	15,4	2,2	2,0	0,3	13,4	1,9	29	14
15	17,6	2,5	2,3	0,3	15,3	2,2	32	15
km	m		m		m			km
16	20,1	2,6	2,6	0,3	17,5	2,2	34"	16
17	22,7	2,7	2,9	0,4	19,7	2,4	36	17
18	25,4	2,9	3,3	0,4	22,1	2,5	38	18
19	28,3	3,0	3,7	0,4	24,6	2,7	40	19
20	31,3	3,3	4,1	0,4	27,3	2,8	42	20
km	m		m		m			km
21	34,6	3,3	4,5	0,4	30,1	2,9	44"	21
22	37,9	3,6	4,9	0,5	33,0	3,1	46	22
23	41,5	3,6	5,4	0,5	36,1	3,2	48	23
24	45,1	3,9	5,9	0,5	39,3	3,3	50	24
25	49,0	4,0	6,4	0,5	42,6	3,5	53	25
km	m		m		m			km
26	53,0	4,1	6,9	0,5	46,1	3,6	55"	26
27	57,1	4,3	7,4	0,6	49,7	3,7	57	27
28	61,4	4,5	8,0	0,6	53,4	3,9	59	28
29	65,9	4,6	8,6	0,6	57,3	4,1	61	29
30	70,5		9,2		61,4		63	30
km	m		m		m			km
30	71	54	9	7	61	48	1' 3"	30
40	125	71	16	9	109	61	1 24	40
50	196	86	25	12	170	75	1 45	50
60	282	102	37	13	245	89	2 6	60
km	m		m		m			km
70	384	117	50	15	334	102	2' 27"	70
80	501	134	65	18	436	116	2 48	80
90	635	149	83	19	552	130	3 9	90
100	784		102		682		3 30	100

(Véase § 27, pág. 116)

V. Conversión de escalas barométricas y termométricas

A) Escalas barométricas

Conversión de pulgadas y líneas de París en milímetros

1 línea de París = 2,25829 mm, 1 pulgada de París = 27,069948 mm

Líneas de París	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	563,96	566,21	568,47	570,72	572,98	575,24	577,49	579,75	582,00	584,26
260	586,52	588,77	591,03	593,28	595,54	597,79	600,05	602,31	602,56	606,82
270	609,07	611,33	613,59	615,84	618,10	620,35	622,61	624,86	627,12	629,38
280	631,63	633,89	636,14	638,40	640,66	642,91	645,17	647,42	649,68	651,93
290	654,19	656,45	658,70	660,96	663,21	665,47	667,73	669,98	672,24	674,49
300	676,75	679,00	681,26	683,52	685,77	688,03	690,28	692,54	694,80	697,05
310	699,31	701,56	703,82	706,07	708,33	710,59	712,84	715,10	717,35	719,61
320	721,87	724,12	726,38	728,63	730,89	733,14	735,40	737,66	739,91	742,17
330	744,42	746,68	748,94	751,19	753,45	755,70	757,96	760,21	762,47	764,73
340	766,98	769,24	771,49	773,75	776,01	778,26	780,52	782,77	785,03	787,28
Líneas de París	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,00	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,16	0,18	0,20
0,1	0,23	0,25	0,27	0,29	0,32	0,34	0,36	0,38	0,41	0,43
0,2	0,45	0,47	0,50	0,52	0,54	0,56	0,59	0,61	0,63	0,65
0,3	0,68	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,83	0,86	0,88
0,4	0,90	0,92	0,95	0,97	0,99	1,02	1,04	1,06	1,08	1,11
0,5	1,13	1,15	1,17	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,31	1,33
0,6	1,35	1,38	1,40	1,42	1,44	1,47	1,49	1,51	1,53	1,56
0,7	1,58	1,60	1,62	1,65	1,67	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78
0,8	1,80	1,83	1,85	1,87	1,89	1,92	1,94	1,96	1,99	2,01
0,9	2,03	2,05	2,08	2,10	2,12	2,14	2,17	2,19	2,21	2,23
21" = 252" = 568,47 mm		24" = 288" = 649,68 mm		27" = 324" = 730,89 mm						
22 = 264 = 595,54		25 = 300 = 676,75		28 = 336 = 757,96						
23 = 276 = 622,61		26 = 312 = 703,82		29 = 348 = 785,03						

B) Escalas termométricas

Correspondencia entre las escalas centígrada, Réaumur y Fahrenheit

Temperaturas			Diferencias de temperatura		
C	R	F	ΔF	ΔC	ΔR
+ 100°	+ 80°	+ 212°	0	0	0
+ 50	+ 40	+ 122	1	0,56	0,44
+ 40	+ 32	+ 104	2	1,11	0,89
+ 30	+ 24	+ 86	3	1,67	1,33
+ 20	+ 16	+ 68	4	2,22	1,78
+ 10	+ 8	+ 50	5	2,78	2,22
0	0	+ 32	6	3,33	2,67
- 10	- 8	+ 14	7	3,89	3,11
- 17,78	- 14,22	0	8	4,44	3,56
- 20	- 16	- 4	9	5,00	4,00
- 30	- 24	- 22			
$C = \frac{10}{8} R$			$\Delta C = \frac{10}{8} \Delta R = 1,25 \Delta R$		
$C = \frac{10}{18} (F - 32°)$			$\Delta C = \frac{10}{18} \Delta F = 0,555 \dots \Delta F$		
$R = \frac{8}{18} (F - 32°)$			$\Delta R = \frac{8}{18} \Delta F = 0,444 \dots \Delta F$		

(Véase § 45, pág. 172)

VI. Reducción del barómetro de mercurio a 0°

sin tener en cuenta la dilatación de la escala — 0,000180 $B t$

t °C	Altura barométrica B en milímetros													t °C
	600	620	640	660	680	700	710	720	730	740	750	760	770	
1°	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1°
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	2
3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	3
4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	4
5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	5
6°	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	6°
7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	7
8	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	8
9	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	9
10	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	10
11°	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	11°
12	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	12
13	1,4	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	13
14	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	14
15	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	15
16°	1,7	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	16°
17	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	17
18	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	18
19	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	19
20	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	2,8	20
21°	2,3	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	21°
22	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	22
23	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2	23
24	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	24
25	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	25
26°	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	26°
27	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	27
28	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	28
29	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	29
30	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	30
31°	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,2	4,3	31°
32	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	4,4	4,4	32
33	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,2	4,3	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	33
34	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,3	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	34
35	3,8	3,9	4,0	4,2	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	4,8	4,9	35

Para el uso de la regla de cálculo: $-0,000180 B t = -\frac{R}{556} \cdot \frac{t}{10}$

(Véase § 43, pág. 166)

VII. Reducción del barómetro de mercurio a 0°

para escala de latón a la temperatura normal 0°, — 0,000162 $B t$

t °C	Altura del barómetro en milímetros												t °C	
	600	620	640	660	680	700	710	720	730	740	750	760		
1°	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1°
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2
3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	3
4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4
5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	5
6°	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	6°
7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	7
8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	8
9	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	9
10	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	10
11°	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	11°
12	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	12
13	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6	13
14	1,4	1,4	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	14
15	1,5	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	15
16°	1,6	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	16°
17	1,7	1,7	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	17
18	1,7	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,2	18
19	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,3	19
20	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,4	2,5	20
21°	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	21°
22	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	22
23	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,8	2,8	23
24	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	24
25	2,4	2,5	2,6	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	25
26°	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	26°
27	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,3	27
28	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	28
29	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	29
30	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	30
31°	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,8	31°
32	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	32
33	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	33
34	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,2	34
35	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,3	4,3	4,3	35

Para el uso de la regla de cálculo: $-0,000162 B t = -\frac{R}{617} \cdot \frac{t}{10}$

(Véase § 43, pág. 166)

VIII. Reducción del barómetro de mercurio a 0°

para escala de latón a la temperatura normal 0°
incluyendo la corrección de cubeta
para la presión normal de 750 mm y la relación de diámetros 1 : 10
— (0,000162 *Bt* — 0,01 (*B* — 750))

<i>t</i> °C	Altura barométrica <i>B</i> en milímetros									<i>t</i> °C
	730	735	740	745	750	755	760	765	770	
9,0°	1,26	1,22	1,18	1,14	1,09	1,05	1,01	0,97	0,92	9,0°
9,5	1,32	1,28	1,24	1,20	1,15	1,11	1,07	1,03	0,99	9,5
10,0	1,38	1,34	1,30	1,26	1,21	1,17	1,13	1,09	1,05	10,0
10,5	1,44	1,40	1,36	1,32	1,28	1,23	1,19	1,15	1,11	10,5
11,0	1,50	1,46	1,42	1,38	1,34	1,30	1,25	1,21	1,17	11,0
11,5	1,56	1,52	1,48	1,44	1,40	1,36	1,32	1,28	1,23	11,5
12,0°	1,62	1,58	1,54	1,50	1,46	1,42	1,38	1,36	1,30	12,0°
12,5	1,68	1,64	1,60	1,56	1,52	1,48	1,44	1,40	1,36	12,5
13,0	1,74	1,70	1,66	1,62	1,58	1,54	1,50	1,46	1,42	13,0
13,5	1,80	1,76	1,72	1,68	1,64	1,60	1,56	1,52	1,48	13,5
14,0	1,86	1,82	1,78	1,74	1,70	1,66	1,62	1,59	1,55	14,0
14,5	1,91	1,88	1,84	1,80	1,76	1,72	1,69	1,65	1,61	14,5
15,0°	1,97	1,94	1,90	1,86	1,82	1,78	1,75	1,71	1,67	15,0°
15,5	2,03	2,00	1,96	1,92	1,88	1,85	1,81	1,77	1,73	15,5
16,0	2,09	2,06	2,02	1,98	1,94	1,91	1,87	1,83	1,80	16,0
16,5	2,15	2,11	2,08	2,04	2,00	1,97	1,93	1,89	1,86	16,5
17,0	2,21	2,17	2,14	2,10	2,07	2,03	1,99	1,96	1,92	17,0
17,5	2,27	2,23	2,20	2,16	2,13	2,09	2,05	2,02	1,98	17,5
18,0°	2,33	2,29	2,26	2,22	2,19	2,15	2,12	2,08	2,05	18,0°
18,5	2,39	2,35	2,32	2,28	2,25	2,21	2,18	2,14	2,11	18,5
19,0	2,45	2,41	2,38	2,34	2,31	2,27	2,24	2,20	2,17	19,0
19,5	2,51	2,47	2,44	2,40	2,37	2,34	2,30	2,27	2,23	19,5
20,0	2,57	2,53	2,50	2,46	2,43	2,40	2,36	2,33	2,29	20,0
20,5	2,62	2,59	2,56	2,52	2,49	2,46	2,42	2,39	2,36	20,5
21,0°	2,68	2,65	2,62	2,58	2,55	2,52	2,49	2,45	2,42	21,0°
21,5	2,74	2,71	2,68	2,64	2,61	2,58	2,55	2,51	2,48	21,5
22,0	2,80	2,77	2,74	2,71	2,67	2,64	2,61	2,58	2,54	22,0
22,5	2,86	2,83	2,80	2,77	2,73	2,70	2,67	2,64	2,61	22,5
23,0	2,92	2,89	2,86	2,83	2,79	2,76	2,73	2,69	2,67	23,0
23,5	2,98	2,95	2,92	2,89	2,86	2,82	2,79	2,76	2,73	23,5
24,0°	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	2,89	2,85	2,82	2,79	24,0°
24,5	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	2,89	2,86	24,5
25,0	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	2,95	2,92	25,0
25,5	3,22	3,19	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	3,01	2,98	25,5
26,0	3,27	3,25	3,22	3,19	3,16	3,13	3,10	3,07	3,04	26,0
26,5	3,33	3,31	3,28	3,25	3,22	3,19	3,16	3,13	3,11	26,5

(Véase § 43, pág. 168)

IX. Depresión capilar en el tubo barométrico

en función del diámetro interior del tubo y de la altura del menisco

Altura del menisco	Diámetro interior del tubo en milímetros												Altura del menisco
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0,00	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,05	0,3	0,1	0,1	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,05
0,10	0,6	0,3	0,2	0,12	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,10
0,15	0,9	0,4	0,3	0,18	0,13	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,15
0,20	1,1	0,6	0,4	0,24	0,17	0,12	0,09	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,20
0,25	1,4	0,8	0,5	0,30	0,21	0,15	0,11	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,25
0,30	1,5	0,9	0,6	0,36	0,25	0,18	0,13	0,10	0,07	0,06	0,04	0,03	0,30
0,35	1,8	1,0	0,6	0,42	0,29	0,21	0,15	0,11	0,08	0,07	0,05	0,04	0,35
0,40	2,1	1,2	0,7	0,48	0,33	0,24	0,17	0,13	0,10	0,07	0,06	0,04	0,40
0,45	2,3	1,3	0,8	0,53	0,37	0,27	0,20	0,15	0,11	0,08	0,07	0,05	0,45
0,50	2,5	1,4	0,9	0,59	0,41	0,29	0,22	0,16	0,12	0,09	0,07	0,05	0,50
0,55	2,7	1,5	0,9	0,64	0,45	0,32	0,24	0,18	0,13	0,10	0,08	0,06	0,55
0,60	2,9	1,6	1,0	0,70	0,49	0,35	0,26	0,19	0,14	0,11	0,08	0,06	0,60
0,65	3,0	1,8	1,1	0,75	0,52	0,37	0,28	0,21	0,16	0,12	0,09	0,07	0,65
0,70	3,1	1,9	1,2	0,80	0,56	0,40	0,30	0,22	0,17	0,13	0,10	0,07	0,70
0,75	3,2	2,0	1,3	0,85	0,60	0,43	0,32	0,24	0,18	0,14	0,10	0,08	0,75
0,80		2,0	1,3	0,90	0,63	0,45	0,34	0,25	0,19	0,14	0,11	0,08	0,80
0,85		2,1	1,4	0,94	0,66	0,48	0,35	0,26	0,20	0,15	0,12	0,09	0,85
0,90		2,2	1,4	0,98	0,70	0,50	0,37	0,28	0,21	0,16	0,12	0,09	0,90
0,95		2,3	1,5	1,03	0,73	0,53	0,39	0,29	0,22	0,17	0,13	0,10	0,95
1,00			1,6	1,07	0,76	0,55	0,41	0,30	0,23	0,18	0,13	0,10	1,00
1,05			1,6	1,10	0,79	0,57	0,42	0,32	0,24	0,18	0,14	0,11	1,05
1,10			1,7	1,14	0,82	0,59	0,44	0,33	0,25	0,19	0,15	0,11	1,10
1,15			1,7	1,18	0,84	0,61	0,46	0,34	0,26	0,20	0,15	0,12	1,15
1,20			1,7	1,21	0,87	0,63	0,47	0,35	0,27	0,20	0,16	0,12	1,20
1,25			1,8	1,24	0,89	0,65	0,49	0,37	0,28	0,21	0,16	0,13	1,25
1,30			1,8	1,27	0,92	0,67	0,50	0,38	0,29	0,22	0,17	0,13	1,30
1,35			1,8	1,30	0,94	0,69	0,52	0,39	0,29	0,22	0,17	0,13	1,35
1,40			1,9	1,32	0,96	0,71	0,53	0,40	0,30	0,23	0,18	0,14	1,40
1,45			1,9	1,34	0,98	0,72	0,54	0,41	0,31	0,24	0,18	0,14	1,45
1,50			2,0	1,37	1,00	0,74	0,55	0,42	0,32	0,24	0,19	0,14	1,50
1,55			2,0	1,39	1,01	0,75	0,56	0,43	0,32	0,25	0,19	0,15	1,55
1,60				1,41	1,03	0,77	0,58	0,44	0,33	0,25	0,20	0,15	1,60
1,65				1,42	1,04	0,78	0,59	0,44	0,34	0,26	0,20	0,15	1,65
1,70				1,44	1,06	0,79	0,60	0,45	0,34	0,26	0,20	0,16	1,70
1,75				1,45	1,07	0,80	0,60	0,46	0,35	0,27	0,21	0,16	1,75
1,80				1,46	1,08	0,81	0,61	0,47	0,36	0,27	0,21	0,16	1,80

(Véase § 43, pág. 169)

X. Reducción a la gravedad normal

$\log(1 + \beta \cos 2\varphi)$, con $\beta = 0,00265$ según Helmert

φ	log	d	φ	log	d	φ	log	d
0°	0,001149	-0	30°	0,000575	-35	60°	9,999424	34
1	0,001149	2	31	0,000540	36	61	9,999390	34
2	0,001147	4	32	0,000504	37	62	9,999356	33
3	0,001143	5	33	0,000467	36	63	9,999323	32
4	0,001138	6	34	0,000431	37	64	9,999291	31
5°	0,001132	8	35°	0,000394	39	65°	9,999260	31
6	0,001124	9	36	0,000355	38	66	9,999229	29
7	0,001115	10	37	0,000317	39	67	9,999200	29
8	0,001105	12	38	0,000278	39	68	9,999171	27
9	0,001093	13	39	0,000239	39	69	9,999144	27
10°	0,001080	14	40°	0,000200	40	70°	9,999117	25
11	0,001066	16	41	0,000160	40	71	9,999092	24
12	0,001050	17	42	0,000120	40	72	9,999068	24
13	0,001033	18	43	0,000080	40	73	9,999044	21
14	0,001015	19	44	0,000040	40	74	9,999023	21
15°	0,000996	21	45°	0,000000	40	75°	9,999002	19
16	0,000975	22	46	9,999960	40	76	9,998983	19
17	0,000953	23	47	9,999920	40	77	9,998964	17
18	0,000930	24	48	9,999880	40	78	9,998947	16
19	0,000906	25	49	9,999840	40	79	9,998931	14
20°	0,000881	26	50°	9,999800	39	80°	9,998917	13
21	0,000855	28	51	9,999761	39	81	9,998904	12
22	0,000827	28	52	9,999722	39	82	9,998892	11
23	0,000799	29	53	9,999683	39	83	9,998881	8
24	0,000770	31	54	9,999644	38	84	9,998873	8
25°	0,000739	31	55°	9,999606	37	85°	9,998865	6
26	0,000708	32	56	9,999569	37	86	9,998859	5
27	0,000676	33	57	9,999532	37	87	9,998854	3
28	0,000643	34	58	9,999495	36	88	9,998851	2
29	0,000609	34	59	9,999459	35	89	9,998849	1
30	0,000575		60	9,999524		90	9,998848	

$\log\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$, con $r = 6370000$ m

H	log	d	H	log	d	H	log	d
0	0,000000	14	500m	0,000068	14	1000m	0,000136	14
100	0,000014	13	600	0,000082	13	1100	0,000150	14
200	0,000027	14	700	0,000095	14	1200	0,000164	13
300	0,000041	14	800	0,000109	14	1300	0,000177	14
400	0,000055	13	900	0,000123	13	1400	0,000191	14
500	0,000068		1000	0,000136		1500	0,000205	14

$$g_{0^{45}} = g(1 + \beta \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2H}{r}\right), \quad B_{0^{45}} = B(1 - \beta \cos 2\varphi) \left(1 - \frac{2H}{r}\right)$$

$$g_{0^{45}} = 9,80596, \quad \beta = 0,00265.$$

Para logaritmos de 5 ó 6 decimales, se puede admitir, aproximadamente:

$$1 - \beta \cos 2\varphi = \frac{1}{1 + \beta \cos 2\varphi} \quad \text{y} \quad 1 - \frac{2H}{r} = \frac{1}{1 + \frac{2H}{r}}$$

Para alturas de más de 1500m se puede admitir $\log\left(1 + 10 \frac{2H}{r}\right) = 10 \log\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$

(Véase § 53, pág. 198)

XI. Reducción del barómetro de mercurio a la gravedad normal

$B_{0^{45}} - B = -\beta B \cos 2\varphi - 2 \frac{BH}{r}$, con $\beta = 0,00265$ según Helmert

$r = 3700000$ m

Lati- tud φ	Altura barométrica Bmm y altura Hm sobre el mar										
	760mm (0m)	750mm (115m)	740mm (230m)	730mm (345m)	720mm (460m)	710mm (575m)	700mm (690m)	690mm (805m)	680mm (920m)	670mm (1035m)	660mm (1150m)
0°	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,00	-2,00	-1,99	-1,99
5	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,98	1,97	1,97	1,96	1,96
10	1,89	1,89	1,90	1,90	1,90	1,89	1,90	1,89	1,89	1,89	1,88
15	1,74	1,75	1,75	1,75	1,76	1,76	1,76	1,76	1,76	1,76	1,75
20	1,54	1,55	1,56	1,56	1,57	1,57	1,57	1,58	1,58	1,58	1,58
25	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,34	1,35	1,35	1,36	1,36
30°	-1,01	-1,02	-1,03	-1,03	-1,06	-1,07	-1,08	-1,09	-1,10	-1,10	-1,11
31	0,95	0,96	0,97	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06
32	0,88	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,01
33	0,82	0,84	0,85	0,87	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
34	0,75	0,77	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89
35°	-0,69	-0,71	-0,72	-0,74	-0,76	-0,77	-0,79	-0,80	-0,81	-0,82	-0,84
36	0,62	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72	0,74	0,75	0,77	0,78
37	0,56	0,58	0,59	0,61	0,63	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72
38	0,49	0,51	0,53	0,55	0,56	0,58	0,60	0,62	0,63	0,65	0,66
39	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,55	0,57	0,59	0,60
40°	-0,35	-0,37	-0,39	-0,42	-0,44	-0,45	-0,47	-0,49	-0,50	-0,53	-0,54
41	0,28	0,30	0,33	0,35	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,46	0,48
42	0,21	0,24	0,26	0,28	0,30	0,33	0,35	0,37	0,38	0,40	0,42
43	0,14	0,16	0,19	0,21	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
44	0,07	0,09	0,12	0,15	0,17	0,19	0,23	0,24	0,26	0,28	0,30
45°	-0,00	-0,03	-0,05	-0,08	-0,10	-0,13	-0,15	-0,17	-0,20	-0,22	-0,24
46	+0,07	+0,04	+0,02	-0,01	-0,04	-0,06	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,18
47	+0,14	+0,11	+0,08	+0,06	+0,03	0,00	-0,02	-0,05	-0,07	-0,09	-0,12
48	+0,21	+0,18	+0,15	+0,12	+0,10	+0,07	+0,04	+0,02	-0,01	-0,03	-0,06
49	+0,28	+0,25	+0,22	+0,19	+0,16	+0,14	+0,11	+0,08	+0,05	+0,03	+0,00
50°	+0,35	+0,32	+0,29	+0,26	+0,23	+0,20	+0,17	+0,14	+0,12	+0,09	+0,06
51	0,42	0,39	0,36	0,32	0,29	0,27	0,23	0,21	0,18	0,15	0,12
52	0,49	0,44	0,42	0,39	0,36	0,33	0,30	0,27	0,24	0,21	0,18
53	0,56	0,52	0,49	0,45	0,42	0,38	0,36	0,33	0,30	0,27	0,24
54	0,62	0,59	0,55	0,52	0,49	0,46	0,42	0,39	0,36	0,33	0,30
55°	+0,69	+0,65	+0,62	+0,58	+0,55	+0,52	+0,48	+0,45	+0,42	+0,39	+0,36
56	0,75	0,72	0,68	0,64	0,61	0,58	0,54	0,51	0,48	0,45	0,42
57	0,82	0,78	0,74	0,71	0,67	0,64	0,60	0,58	0,54	0,50	0,47
58	0,88	0,84	0,81	0,77	0,73	0,70	0,66	0,63	0,59	0,56	0,53
59	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	0,76	0,72	0,68	0,65	0,62	0,68
60°	+1,01	+0,97	+0,93	+0,89	+0,85	+0,81	+0,78	+0,74	+0,70	+0,67	+0,64
65	1,29	1,25	1,21	1,16	1,12	1,08	1,04	1,00	0,99	0,92	0,88
70	1,54	1,50	1,45	1,40	1,36	1,32	1,27	1,23	1,18	1,14	1,10
75	1,74	1,69	1,64	1,60	1,55	1,50	1,46	1,41	1,36	1,32	1,28
80	1,89	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,54	1,50	1,45	1,40
85	1,98	1,93	1,88	1,83	1,78	1,73	1,68	1,63	1,58	1,53	1,48
90	2,01	1,96	1,91	1,86	1,80	1,76	1,70	1,65	1,61	1,56	1,51

(Véase § 44, pág. 172)

XII. Tensión del vapor de agua saturado

expresada en alturas barométricas normales, o sea para 0° de temperatura del mercurio 13,59593 de densidad del mismo, 45° de latitud geográfica y al nivel del mar

(Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures)

t	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	4,57	4,60	4,64	4,67	4,70	4,74	4,77	4,80	4,84	4,87
1	4,91	4,94	4,98	5,02	5,05	5,09	5,12	5,16	5,20	5,23
2	5,27	5,31	5,35	5,39	5,42	5,46	5,50	5,54	5,58	5,62
3	5,66	5,70	5,74	5,78	5,82	5,86	5,90	5,94	5,98	6,03
4	6,07	6,11	6,15	6,20	6,24	6,28	6,33	6,37	6,42	6,46
5	6,51	6,55	6,60	6,64	6,69	6,74	6,78	6,83	6,88	6,92
6	6,97	7,02	7,07	7,12	7,17	7,22	7,26	7,31	7,36	7,42
7	7,47	7,52	7,57	7,62	7,67	7,72	7,78	7,83	7,88	7,94
8	7,99	8,05	8,10	8,15	8,21	8,27	8,32	8,38	8,43	8,49
9	8,55	8,61	8,66	8,72	8,78	8,84	8,90	8,96	9,02	9,08
10	9,14	9,20	9,26	9,32	9,39	9,45	9,51	9,58	9,64	9,70
11	9,77	9,83	9,90	9,96	10,03	10,09	10,16	10,23	10,30	10,36
12	10,43	10,50	10,57	10,64	10,71	10,78	10,85	10,92	10,99	11,06
13	11,14	11,21	11,28	11,36	11,43	11,50	11,58	11,66	11,73	11,81
14	11,88	11,96	12,04	12,12	12,19	12,27	12,35	12,43	12,51	12,59
15	12,67	12,76	12,84	12,92	13,00	13,09	13,17	13,25	13,34	13,42
16	13,51	13,60	13,68	13,77	13,86	13,95	14,04	14,12	14,21	14,30
17	14,40	14,49	14,58	14,67	14,76	14,86	14,95	15,04	15,14	15,23
18	15,33	15,43	15,52	15,62	15,72	15,82	15,92	16,02	16,12	16,22
19	16,32	16,42	16,52	16,63	16,73	16,83	16,94	17,04	17,15	17,26
20	17,36	17,47	17,58	17,69	17,80	17,91	18,02	18,13	18,24	18,35
21	18,47	18,58	18,69	18,81	18,92	19,04	19,16	19,27	19,39	19,51
22	19,63	19,75	19,87	19,99	20,11	20,24	20,36	20,48	20,61	20,73
23	20,86	20,98	21,11	21,24	21,37	21,50	21,63	21,76	21,89	22,02
24	22,15	22,29	22,42	22,55	22,69	22,83	22,96	23,10	23,24	23,38
25	23,52	23,66	23,80	23,94	24,08	24,23	24,37	24,52	24,66	24,81
26	24,96	25,10	25,25	25,40	25,55	25,70	25,86	26,01	26,16	26,32
27	26,47	26,63	26,78	26,94	27,10	27,26	27,42	27,58	27,74	27,90
28	28,07	28,23	28,39	28,56	28,73	28,89	29,06	29,23	29,40	29,57
29	29,74	29,92	30,09	30,26	30,44	30,62	30,79	31,97	31,15	31,33
30	31,51	31,69	31,87	32,06	32,24	32,43	32,61	32,80	32,99	33,18
31	33,37	33,56	33,75	33,94	34,14	34,33	34,53	34,72	34,92	35,12
32	35,32	35,52	35,72	35,92	36,13	36,33	36,54	36,74	36,95	37,16
33	37,37	37,58	37,79	38,00	38,22	38,43	38,65	38,87	39,08	39,30
34	39,52	39,74	39,97	40,19	40,42	40,64	40,87	41,09	41,32	41,55
35	41,78	42,02	42,25	42,48	42,72	42,96	43,19	43,43	43,67	43,92

Siendo *T* la temperatura del termómetro seco, *t* la del húmedo, *B* la altura barométrica y *E* la tensión de vapor correspondiente a la temperatura *t* del termómetro húmedo dada por la tabla anterior, la tensión *e* del vapor contenido en el aire viene dada por

$$e = E - \frac{0,48(T-t)B}{610-t}, \text{ o aproximadamente } e = E - 0,6(T-t)$$

(Véase § 51, pág. 194)

XIII. Tensión del vapor de agua saturado

expresada en alturas barométricas normales, o sea para 0° de temperatura del mercurio, 13,59593 de densidad del mismo, 45° de latitud geográfica y al nivel del mar

(Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures)

°	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
85	433,19	434,90	436,60	438,32	440,04	441,76	443,49	445,23	446,97	448,72
86	450,47	452,23	454,00	455,77	457,54	459,33	461,11	462,91	464,71	466,51
87	468,32	470,14	471,96	473,79	475,63	477,47	479,32	481,17	483,03	484,89
88	486,76	488,64	490,52	492,41	494,31	496,21	498,12	500,03	501,95	503,87
89	505,81	507,74	509,69	511,64	513,60	515,56	517,53	519,50	521,48	523,47
90	525,47	527,47	529,48	531,49	533,51	535,54	537,57	539,61	541,65	543,71
91	545,76	547,83	549,90	551,98	554,07	556,16	558,25	560,36	562,47	564,59
92	566,71	568,85	570,98	573,13	575,28	577,44	579,61	581,78	583,96	586,14
93	588,33	590,53	592,74	594,95	597,17	599,40	601,64	603,88	606,13	608,38
94	610,64	612,91	615,19	617,47	619,76	622,06	624,37	626,68	629,00	631,32
95	633,66	636,00	638,35	640,70	643,06	645,43	647,81	650,20	652,59	654,99
96	657,40	659,81	662,23	664,66	667,10	669,54	672,00	674,45	676,92	679,40
97	681,88	684,37	686,87	689,37	691,89	694,41	696,93	699,47	702,02	704,57
°	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
98,0	707,13	707,38	707,64	707,90	708,15	708,41	708,67	708,92	709,18	709,44
98,1	709,69	709,95	710,21	710,47	710,72	710,98	711,24	711,50	711,76	712,01
98,2	712,27	712,53	712,79	713,05	713,30	713,56	713,82	714,08	714,34	714,60
98,3	714,85	715,11	715,37	715,63	715,89	716,15	716,41	716,67	716,93	717,19
98,4	717,44	717,70	717,96	718,22	718,48	718,74	719,00	719,26	719,52	719,78
98,5	720,04	720,30	720,57	720,83	721,09	721,35	721,61	721,87	722,13	722,39
98,6	722,65	722,91	723,17	723,44	723,70	723,96	724,22	724,48	724,74	725,00
98,7	725,27	725,53	725,79	726,05	726,32	726,58	726,84	727,10	727,37	727,63
98,8	727,89	728,15	728,42	728,68	728,94	729,21	729,47	729,73	729,99	730,26
98,9	730,52	730,78	731,05	731,31	731,58	731,84	732,10	732,37	732,63	732,90
99,0	733,16	733,42	733,69	733,95	734,22	734,48	734,75	735,01	735,28	735,54
99,1	735,81	736,07	736,34	736,60	736,87	737,14	737,40	737,67	737,93	738,20
99,2	738,46	738,73	739,00	739,26	739,53	739,79	740,06	740,33	740,59	740,86
99,3	741,13	741,39	741,66	741,93	742,20	742,46	742,73	743,00	743,26	743,53
99,4	743,80	744,07	744,33	744,60	744,87	745,14	745,41	745,67	745,94	746,21
99,5	746,48	746,75	747,02	747,28	747,55	747,82	748,09	748,36	748,63	748,90
99,6	749,17	749,44	749,71	749,97	750,24	750,51	750,78	751,05	751,32	751,59
99,7	751,86	752,13	752,41	752,67	752,94	753,21	753,48	753,76	754,03	754,30
99,8	754,57	754,84	755,11	755,38	755,65	755,92	756,19	756,47	756,74	757,01
99,9	757,28	757,55	757,82	758,10	758,37	758,64	758,91	759,18	759,46	759,73
100,0	760,00	760,27	760,55	760,82	761,09	761,36	761,64	761,91	762,18	762,46
100,1	762,73	763,00	763,28	763,55	763,82	764,10	764,37	764,65	764,92	765,19
100,2	765,47	765,74	766,02	766,29	766,56	766,84	767,11	767,39	767,66	767,94
100,3	768,21	768,49	768,76	769,04	769,31	769,59	769,86	770,14	770,42	770,69
100,4	770,97	771,24	771,52	771,80	772,07	772,35	772,62	772,90	773,18	773,45
100,5	773,73	774,01	774,28	774,56	774,84	775,11	775,39	775,67	775,95	776,22
Partes prop	0,000° 0,00mm	0,001° 0,03mm	0,002° 0,05mm	0,003° 0,08mm	0,004° 0,11mm	0,005° 0,13mm	0,006° 0,16mm	0,007° 0,19mm	0,008° 0,22mm	0,009° 0,27mm

(Véase § 45, pág. 174)

XIV. Determinación aproximada de la tensión del vapor

en función de los datos de los termómetros seco y húmedo
(Exacta para 755 mm de presión barométrica)

Termómetro húmedo	Termómetro seco											Termómetro húmedo
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
0°	4,6	4,0	3,4	2,8	2,2	1,6	2,0	1,4				0°
1		4,9	4,3	3,7	3,2	2,6	2,9	2,3	1,7			1
2			5,3	4,7	4,1	3,5	2,9	2,3	1,7	2,1	1,5	2
3				5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7	2,1	1,5	3
4					6,1	5,5	4,9	4,3	3,7	3,1	2,5	4
5						6,5	5,9	5,3	4,7	4,1	3,5	5
6							7,0	6,4	5,8	5,2	4,6	6
7								7,5	6,9	6,3	5,7	7
8									8,0	7,4	6,8	8
9										8,6	8,0	9
10											9,2	10
°C	Termómetro seco											°C
	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	
4°	2,5	1,9	1,3									4°
5	3,5	2,9	2,3	1,7	1,1							5
6	4,6	4,0	3,4	2,8	2,2	1,6						6
7	5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7	2,1	1,5				7
8	6,8	6,2	5,6	5,0	4,4	3,8	3,2	2,6	2,0	1,4		8
9	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	5,0	4,3	3,7	3,1	2,5	1,9	9
10	9,2	8,6	8,0	7,3	6,7	6,1	5,5	4,9	4,3	3,7	3,1	10
11		9,8	9,2	8,6	8,0	7,4	6,8	6,2	5,5	4,9	4,3	11
12			10,5	9,8	9,2	8,6	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	12
13				11,2	10,6	9,9	9,4	8,7	8,1	7,5	6,9	13
14					11,9	11,3	10,7	10,1	9,5	8,9	8,3	14
15						12,7	12,1	11,5	10,9	10,3	9,6	15
16							13,5	13,0	12,3	11,7	11,1	16
17								14,4	13,8	13,2	12,6	17
18									15,4	14,7	14,1	18
19										16,3	15,7	19
°C	Termómetro seco											°C
	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	
10°	3,1	2,5	1,9									10°
11	4,3	3,7	3,1	2,5								11
12	5,6	5,0	4,4	3,8	3,2	2,6						12
13	6,9	6,3	5,7	5,1	4,5	3,9	3,3	2,7				13
14	8,3	7,6	7,0	6,4	5,8	5,2	4,6	4,0	3,4			14
15	9,6	9,0	8,4	7,8	7,2	6,6	6,0	5,4	4,8	4,2	3,6	15
16	11,1	10,5	9,9	9,2	8,7	8,0	7,4	6,8	6,2	5,6	5,0	16
17	12,6	12,0	11,4	10,8	10,1	9,5	8,9	8,3	7,7	7,1	6,5	17
18	14,1	13,5	12,9	12,3	11,7	11,1	10,5	9,8	9,2	8,6	8,0	18
19	15,7	15,1	14,5	13,9	13,3	12,7	12,1	11,4	10,8	10,2	9,6	19
20		16,8	16,2	15,5	14,9	14,3	13,7	13,1	12,5	11,9	11,2	20
21				17,3	16,6	16,0	15,4	14,8	14,2	13,6	13,0	21
22					18,4	17,8	17,2	16,6	16,0	15,3	14,7	22
23						19,0	18,4	17,8	17,2	16,6	16,0	23
24								19,7	19,1	18,5	17,9	24
25									21,0	20,5	19,9	25

(Véase § 51, pág. 194)

XV. Humedad del aire

$$\log \left(1 + 0,377 \frac{e}{B} \right)$$

Corrección logarítmica de la nivelación barométrica

Barómetro B	Tensión de vapor										Dif. para Δe	
	3mm	4mm	5mm	6mm	7mm	8mm	9mm	10mm	11mm	12mm		
mm												+
580	0,00085	0,00113	0,00141	0,00169	0,00197	0,00225	0,00253	0,00281	0,00309	0,00337	0,00365	28
590	00083	00111	00139	00166	00194	00222	00249	00277	00304	00332	00360	28
600	00082	00109	00136	00163	00190	00218	00245	00272	00299	00326	00353	27
610	00080	00107	00134	00161	00188	00214	00241	00268	00294	00321	00348	27
620	00079	00105	00132	00158	00184	00210	00238	00263	00290	00316	00342	26
630	0,00078	0,00104	0,00130	0,00155	0,00181	0,00207	0,00233	0,00259	0,00285	0,00311	0,00337	26
640	00076	00102	00127	00153	00179	00204	00230	00255	00281	00306	00332	25
650	00075	00100	00125	00151	00176	00201	00226	00251	00276	00301	00326	25
660	00074	00099	00123	00148	00173	00198	00222	00247	00272	00296	00321	24
670	00073	00098	00122	00146	00171	00195	00220	00244	00268	00292	00316	24
680	0,00072	0,00096	0,00120	0,00144	0,00168	0,00192	0,00216	0,00240	0,00264	0,00288	0,00312	24
690	00071	00095	00118	00142	00166	00190	00213	00237	00260	00284	00308	24
700	00070	00093	00116	00140	00163	00186	00210	00233	00257	00280	00304	23
710	00069	00092	00115	00138	00161	00184	00207	00230	00253	00276	00300	23
720	00068	00091	00113	00136	00159	00182	00204	00227	00249	00272	00295	23
730	0,00067	0,00090	0,00112	0,00134	0,00157	0,00179	0,00201	0,00224	0,00246	0,00268	0,00291	22
740	00066	00088	00110	00133	00155	00177	00199	00221	00243	00265	00288	22
750	00065	00087	00109	00131	00153	00174	00196	00218	00240	00261	00283	22
760	00064	00086	00107	00129	00150	00172	00193	00215	00236	00258	00280	22
770	00064	00085	00106	00127	00148	00170	00191	00212	00233	00255	00276	22

Valores medios para Alemania

$$\log \left(1 + 0,377 \frac{e}{B} \right)$$

Mes	Tensión de vapor e	Altura barométrica			
		600mm	650mm	700mm	750mm
Enero	4,1	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009
Febrero	4,1	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009
Marzo	4,8	0,0013	0,0012	0,0010	0,0011
Abril	6,1	0,0016	0,0015	0,0014	0,0013
Mayo	7,8	0,0021	0,0020	0,0018	0,0017
Junio	10,8	0,0027	0,0025	0,0023	0,0022
Julio	11,5	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025
Agosto	11,7	0,0032	0,0029	0,0027	0,0025
Septiembre	9,3	0,0025	0,0023	0,0021	0,0020
Octubre	7,4	0,0020	0,0019	0,0017	0,0016
Noviembre	5,1	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
Diciembre	4,3	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
Media anual	7,2	0,0020	0,0018	0,0017	0,0016

(Véase § 51, pág. 198)

XVI. Dilatación del aire por el calor

$\log(1 + 0,003665 t)$
Corrección logarítmica de la nivelación barométrica

t °C	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Dif. para 0,1°
-9°	9,98543	9,98527	9,98510	9,98494	9,98477	9,98461	9,98444	9,98428	9,98411	0,98395	17
-8	9,98708	9,98691	98675	98658	98642	98626	98609	98593	98576	98560	17
-7	98371	98355	98339	98322	98306	98290	98273	98257	98240	98224	16
-6	99034	99018	99002	98985	98969	98953	98937	98920	98904	98888	17
-5	99197	99181	99164	99148	99132	98116	99099	99083	99067	99051	17
-4°	9,99359	9,99342	9,99326	9,99310	9,99294	9,99278	9,99262	9,99245	9,99229	9,99213	16
-3	99520	99504	99488	99472	99455	99439	99423	99407	99391	99375	16
-2	99680	99664	99648	99632	99616	99600	99584	99568	99552	99536	16
-1	9,99841	9,99825	9,99809	9,99793	9,99777	9,99761	9,99745	9,99729	9,99713	9,99697	16
0	0,00000	9,99984	9,99968	9,99952	9,99936	9,99920	9,99904	9,99888	9,99872	9,99856	16
+0°	0,00000	0,00016	0,00032	0,00048	0,00064	0,00080	0,00095	0,00111	0,00127	0,00143	16
1	00159	00175	00191	00206	00222	00238	00254	00270	00286	00301	16
2	00317	00333	00349	00364	00380	00396	00412	00428	00443	00459	16
3	00475	00491	00506	00522	00538	00554	00569	00585	00601	00616	16
4	00632	00648	00663	00679	00695	00710	00726	00742	00757	00773	16
5°	0,00789	0,00805	0,00820	0,00835	0,00851	0,00867	0,00882	0,00898	0,00913	0,00929	16
6	00945	00960	00976	00991	01007	01022	01038	01053	01069	01085	15
7	01100	01116	01131	01147	01162	01178	01193	01209	01224	01240	15
8	01255	01270	01286	01301	01317	01332	01348	01363	01379	01394	15
9	01409	01425	01440	01456	01471	01486	01502	01517	01532	01548	15
10°	0,01563	0,01579	0,01594	0,01609	0,01625	0,01640	0,01655	0,01671	0,01686	0,01701	15
11	01716	01732	01747	01762	01778	01793	01808	01823	01839	01854	15
12	01869	01884	01900	01915	01930	01945	01961	01976	01991	02006	15
13	02021	02037	02052	02067	02082	02097	02112	02128	02143	02158	15
14	02173	02188	02203	02218	02234	02249	02264	02279	02294	02309	15
15°	0,02324	0,02339	0,02354	0,02369	0,02385	0,02400	0,02415	0,02430	0,02445	0,02460	15
16	02475	02490	02505	02520	02535	02550	02565	02580	02595	02610	15
17	02625	02640	02655	02670	02685	02700	02715	02730	02745	02760	15
18	02774	02789	02804	02819	02834	02849	02864	02879	02894	02909	15
19	02924	02938	02953	02968	02983	02998	03013	03028	03042	03057	15
20°	0,03072	0,03087	0,03102	0,03117	0,03131	0,03146	0,03161	0,03176	0,03191	0,03205	15
21	03220	03235	03250	03264	03279	03294	03309	03323	03338	03353	15
22	03368	03382	03397	03412	03427	03441	03456	03471	03485	03500	15
23	03515	03529	03544	03559	03573	03588	03603	03617	03632	03647	14
24	03661	03676	03690	03705	03720	03734	03749	03764	03778	03793	14
25°	0,03807	0,03822	0,03836	0,03851	0,03866	0,03880	0,03895	0,03909	0,03924	0,03938	15
26	03953	03967	03982	03996	04011	04026	04040	04054	04069	04083	15
27	04098	04112	04127	04141	04156	04170	04185	04199	04214	04228	15
28	04243	04257	04271	04286	04300	04315	04329	04343	04358	04372	15
29	04387	04401	04415	04430	04444	04459	04473	04487	04502	04516	14
30°	0,04530	0,04545	0,04559	0,04573	0,04588	0,04602	0,04616	0,04631	0,04645	0,04659	14
31	04674	04688	04702	04716	04731	04745	04759	04773	04788	04802	14
32	04816	04830	04845	04859	04873	04887	04902	04916	04930	04944	14
33	04958	04973	04987	05001	05015	05029	05043	05058	05072	05086	14
34	05100	05114	05128	05143	05157	05171	05185	05199	05212	05227	14

(Véanse § 41, pág. 159, y § 53, pág. 198)

XVII. Altitudes barométricas sobre el mar para t = 15°

B	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Dif. para 1mm
720	479,6	478,4	477,3	476,1	474,9	473,8	472,6	471,4	470,2	469,1	11,75
721	467,9	466,7	465,5	464,4	463,2	462,0	460,9	459,7	458,5	457,3	11,73
722	456,2	455,0	453,8	452,6	451,5	450,3	449,1	448,0	446,8	445,6	11,72
723	444,4	443,3	442,1	440,9	439,8	438,6	437,4	436,3	435,1	433,9	11,70
724	432,8	431,6	430,4	429,3	428,1	426,9	425,8	424,6	423,4	422,3	11,68
725	421,1	419,9	418,8	417,6	416,4	415,3	414,1	412,9	411,8	410,6	11,67
726	409,4	408,3	407,1	405,9	404,8	403,6	402,4	401,3	400,1	398,9	11,65
727	397,8	396,6	395,4	394,3	393,1	391,9	390,8	389,6	388,5	387,3	11,64
728	386,1	385,0	383,8	382,6	381,5	380,3	379,2	378,0	376,9	375,7	11,62
729	374,5	373,4	372,2	371,1	369,9	368,7	367,6	366,4	365,3	364,1	11,60
730	362,9	361,8	360,6	359,5	358,3	357,1	356,0	354,8	353,7	352,5	11,59
731	351,3	350,2	349,0	347,9	346,7	345,6	344,4	343,3	342,1	341,0	11,57
732	339,8	338,6	337,5	336,3	335,2	334,0	332,9	331,7	330,6	329,4	11,56
733	328,2	327,1	325,9	324,8	323,6	322,5	321,3	320,2	319,0	317,9	11,54
734	316,7	315,6	314,4	313,3	312,1	311,0	309,8	308,7	307,5	306,3	11,53
735	305,2	304,0	302,9	301,7	300,6	299,4	298,3	297,1	296,0	294,8	11,51
736	293,7	292,5	291,4	290,2	289,1	287,9	286,8	285,7	284,5	283,4	11,49
737	282,2	281,0	279,9	278,8	277,6	276,5	275,3	274,2	273,0	271,9	11,48
738	270,7	269,6	268,4	267,3	266,2	265,0	263,9	262,7	261,6	260,4	11,46
739	259,3	258,1	257,0	255,9	254,7	253,6	252,4	251,3	250,1	249,0	11,45
740	247,8	246,7	245,6	244,4	243,3	242,1	241,0	239,8	238,7	237,6	11,43
741	236,4	235,3	234,1	233,0	231,9	230,7	229,6	228,4	227,3	226,1	11,42
742	225,0	223,9	222,7	221,6	220,4	219,3	218,2	217,0	215,9	214,7	11,40
743	213,6	212,5	211,3	210,2	209,1	207,9	206,8	205,6	204,5	203,4	11,39
744	202,2	201,1	200,0	198,8	197,7	196,5	195,4	194,3	193,1	192,0	11,37
745	190,9	189,7	188,6	187,5	186,3	185,2	184,1	182,9	181,8	180,6	11,36
746	179,5	178,4	177,2	176,1	175,0	173,8	172,7	171,6	170,5	169,3	11,34
747	168,2	167,1	165,9	164,8	163,6	162,5	161,4	160,3	159,1	158,0	11,33
748	156,9	155,7	154,6	153,5	152,3	151,2	150,1	149,0	147,8	146,7	11,31
749	145,6	144,5	143,3	142,2	141,1	139,9	138,8	137,7	136,5	135,4	11,30
750	134,3	133,2	132,0	130,9	129,8	128,6	127,5	126,4	125,3	124,1	11,28
751	123,0	121,9	120,8	119,6	118,5	117,4	116,3	115,1	114,1	112,9	11,26
752	111,8	110,6	109,5	108,4	107,3	106,1	105,0	103,9	102,8	101,6	11,25
753	100,5	99,4	98,2	97,1	96,0	94,9	93,8	92,7	91,5	90,4	11,23
754	89,3	88,2	87,0	85,9	84,8	83,7	82,6	81,4	80,3	79,2	11,22
755	78,1	77,0	75,8	74,7	73,6	72,5	71,4	70,2	69,1	68,0	11,20
756	66,9	65,8	64,6	63,5	62,4	61,3	60,2	59,1	57,9	56,8	11,19
757	55,7	54,6	53,5	52,3	51,2	50,1	49,0	47,9	46,8	45,6	11,17
758	44,5	43,4	42,3	41,3	40,1	38,9	37,8	36,7	35,6	34,5	11,16
759	33,4	32,3	31,1	30,0	28,9	27,8	26,7	25,6	24,5	23,3	11,15
760	22,2	21,1	20,0	18,9	17,8	16,7	15,6	14,5	13,3	12,2	11,13
761	11,1	10,0	8,9	7,8	6,7	5,6	4,4	3,3	2,2	1,1	11,12
762	0,0	- 1,1	- 2,2	- 3,3	- 4,4	- 5,5	- 6,7	- 7,8	- 8,9	- 10,0	11,10
763	- 11,1	- 12,2	- 13,3	- 14,4	- 15,5	- 16,6	- 17,7	- 18,9	- 20,0	- 21,1	11,09
764	- 22,2	- 23,3	- 24,4	- 25,5	- 26,6	- 27,7	- 28,8	- 29,9	- 31,0	- 32,1	11,07

Página de muestra de las tablas más detalladas

(Véase § 53, pág. 201)

XVIII. Desniveles barométricos

Diferencias de altura Δh_1 para diferencias de 1 mm en la presión atmosférica

$$\Delta h_1 = \frac{8019}{B} (1 + 0,003665 t)$$

t °C	Presión media B en mm										t °C	
	760	755	750	745	740	735	730	725	720	715		710
-5°	10,36	10,43	10,50	10,57	10,64	10,71	10,78	10,86	10,93	11,01	11,09	-5°
-4	10,40	10,47	10,54	10,61	10,68	10,75	10,82	10,90	10,97	11,05	11,13	-4
-3	10,43	10,50	10,57	10,64	10,72	10,79	10,86	10,94	11,01	11,09	11,17	-3
-2	10,47	10,54	10,61	10,68	10,76	10,83	10,90	10,98	11,06	11,13	11,21	-2
-1	10,51	10,58	10,65	10,72	10,80	10,87	10,94	11,02	11,10	11,17	11,25	-1
0°	10,55	10,62	10,69	10,76	10,84	10,91	10,98	11,06	11,14	11,21	11,29	0°
1	10,59	10,66	10,73	10,80	10,88	10,95	11,03	11,10	11,18	11,26	11,34	1
2	10,63	10,70	10,77	10,84	10,92	10,99	11,07	11,14	11,22	11,30	11,38	2
3	10,67	10,74	10,81	10,88	10,96	11,03	11,11	11,18	11,26	11,34	11,42	3
4	10,71	10,78	10,85	10,92	10,99	11,07	11,15	11,22	11,30	11,38	11,46	4
5°	10,74	10,82	10,89	10,96	11,04	11,11	11,19	11,26	11,34	11,42	11,50	5°
6	10,78	10,85	10,93	11,00	11,07	11,15	11,23	11,30	11,38	11,46	11,54	6
7	10,82	10,89	10,97	11,04	11,11	11,19	11,27	11,34	11,42	11,50	11,58	7
8	10,86	10,93	11,01	11,08	11,15	11,23	11,31	11,38	11,46	11,54	11,63	8
9	10,90	10,97	11,04	11,12	11,19	11,27	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	9
10°	10,94	11,01	11,08	11,16	11,23	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	10°
11	10,98	11,05	11,12	11,20	11,27	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11
12	11,01	11,09	11,16	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	12
13	11,05	11,13	11,20	11,28	11,35	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	13
14	11,09	11,17	11,24	11,31	11,39	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	14
15°	11,13	11,20	11,28	11,36	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	15°
16	11,17	11,24	11,32	11,40	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,96	16
17	11,21	11,28	11,36	11,43	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00	17
18	11,25	11,32	11,40	11,47	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,96	12,04	18
19	11,29	11,36	11,44	11,51	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	12,00	12,08	19
20°	11,32	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04	12,12	20°
21	11,36	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	21
22	11,40	11,48	11,55	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,04	12,12	12,20	22
23	11,44	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,08	12,16	12,25	23
24	11,48	11,56	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,12	12,20	12,29	24
25°	11,52	11,59	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,16	12,24	12,33	25°
26	11,56	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,20	12,28	12,37	26
27	11,60	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,16	12,24	12,32	12,41	27
28	11,63	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,20	12,28	12,37	12,45	28
29	11,67	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,24	12,32	12,41	12,49	29
30°	11,71	11,79	11,87	11,95	12,03	12,11	12,19	12,28	12,36	12,45	12,54	30°
31	11,75	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,23	12,32	12,40	12,49	12,58	31
32	11,79	11,87	11,95	12,02	12,11	12,19	12,27	12,36	12,44	12,53	12,62	32
33	11,83	11,91	11,99	12,07	12,15	12,23	12,31	12,40	12,48	12,57	12,66	33
34	11,87	11,94	12,02	12,10	12,19	12,27	12,35	12,44	12,53	12,61	12,70	34
35°	11,90	11,98	12,06	12,15	12,23	12,31	12,39	12,48	12,57	12,65	12,74	35°

(Véase § 53, pág. 205)

XVIII. Desniveles barométricos

Diferencias de altura Δh_1 para diferencias de 1 mm en la presión atmosférica

$$\Delta h_1 = \frac{8019}{B} (1 + 0,003665 t)$$

t °C	Presión media B en mm										t °C	
	700	690	680	670	660	650	640	630	620	610		600
-5°	11,25	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12,30	12,50	12,70	12,90	13,12	-5°
-4	11,29	11,45	11,62	11,79	11,97	12,16	12,35	12,54	12,74	12,95	13,17	-4
-3	11,33	11,49	11,66	11,84	12,02	12,20	12,39	12,59	12,79	13,00	13,22	-3
-2	11,37	11,54	11,71	11,88	12,06	12,25	12,44	12,64	12,84	13,05	13,27	-2
-1	11,41	11,58	11,75	11,93	12,11	12,29	12,48	12,68	12,89	13,10	13,32	-1
0°	11,46	11,62	11,79	11,97	12,15	12,34	12,53	12,73	12,93	13,15	13,36	0°
1	11,50	11,66	11,84	12,01	12,19	12,38	12,58	12,78	12,98	13,19	13,41	1
2	11,54	11,71	11,88	12,06	12,24	12,43	12,62	12,82	13,03	13,24	13,46	2
3	11,58	11,75	11,92	12,10	12,28	12,47	12,67	12,87	13,08	13,29	13,51	3
4	11,62	11,79	11,97	12,14	12,33	12,52	12,71	12,92	13,12	13,34	13,56	4
5°	11,67	11,83	12,01	12,19	12,37	12,56	12,76	12,96	13,17	13,39	13,61	5°
6	11,71	11,88	12,05	12,23	12,42	12,61	12,81	13,01	13,22	13,44	13,66	6
7	11,75	11,92	12,10	12,28	12,46	12,65	12,85	13,06	13,27	13,49	13,71	7
8	11,79	11,96	12,14	12,32	12,51	12,70	12,90	13,10	13,31	13,54	13,76	8
9	11,83	12,01	12,18	12,36	12,55	12,74	12,94	13,15	13,36	13,58	13,81	9
10°	11,88	12,05	12,23	12,41	12,60	12,79	12,99	13,20	13,41	13,63	13,85	10°
11	11,92	12,09	12,27	12,45	12,64	12,83	13,04	13,24	13,46	13,68	13,90	11
12	11,96	12,13	12,31	12,50	12,68	12,88	13,08	13,29	13,50	13,73	13,95	12
13	12,00	12,18	12,35	12,54	12,73	12,92	13,13	13,33	13,55	13,78	14,00	13
14	12,04	12,22	12,40	12,58	12,77	12,97	13,17	13,38	13,60	13,83	14,05	14
15°	12,08	12,26	12,44	12,63	12,82	13,01	13,22	13,43	13,65	13,88	14,10	15°
16	12,13	12,30	12,48	12,67	12,86	13,06	13,27	13,47	13,69	13,93	14,15	16
17	12,17	12,35	12,53	12,71	12,91	13,11	13,31	13,52	13,74	13,97	14,20	17
18	12,21	12,39	12,57	12,76	12,95	13,15	13,36	13,57	13,79	14,02	14,25	18
19	12,25	12,43	12,61	12,80	13,00	13,20	13,40	13,61	13,83	14,07	14,30	19
20°	12,30	12,47	12,66	12,85	13,04	13,24	13,45	13,66	13,88	14,12	14,35	20°
21	12,34	12,52	12,70	12,89	13,09	13,29	13,50	13,71	13,93	14,17	14,39	21
22	12,38	12,56	12,74	12,93	13,13	13,33	13,54	13,75	13,98	14,22	14,44	22
23	12,42	12,60	12,79	12,98	13,17	13,38	13,59	13,80	14,02	14,27	14,49	23
24	12,46	12,64	12,83	13,02	13,22	13,42	13,63	13,85	14,07	14,31	14,54	24
25°	12,51	12,69	12,87	13,07	13,26	13,47	13,68	13,89	14,12	14,36	14,59	25°
26	12,55	12,73	12,92	13,11	13,31	13,51	13,72	13,94	14,17	14,41	14,64	26
27	12,59	12,77	12,96	13,15	13,35	13,56	13,77	13,99	14,21	14,46	14,69	27
28	12,63	12,81	13,00	13,20	13,40	13,60	13,82	14,03	14,26	14,51	14,74	28
29	12,67	12,86	13,05	13,24	13,44	13,65	13,86	14,08	14,31	14,56	14,79	29
30°	12,72	12,90	13,09	13,29	13,49	13,69	13,91	14,13	14,36	14,61	14,84	30°
31	12,76	12,94	13,13	13,33	13,53	13,74	13,96	14,17	14,40	14,66	14,88	31
32	12,80	12,99	13,18	13,37	13,57	13,78	14,00	14,22	14,45	14,70	14,93	32
33	12,84	13,03	13,22	13,42	13,62	13,83	14,05	14,27	14,50	14,75	14,98	33
34	12,88	13,07	13,26	13,46	13,66	13,87	14,09	14,31	14,55	14,80	15,03	34
35°	12,93	13,11	13,31	13,50	13,71	13,92	14,14	14,36	14,59	14,83	15,08	35°

(Véase § 53, pág. 205)

XIX. Itinerarios medidos con cinta y eclímetro

20 cos α	α	20 sen α									
		.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
20,0	0°	0,00	0,03	0,07	0,10	0,14	0,17	0,21	0,24	0,28	0,31
20,0	1	0,35	0,38	0,42	0,45	0,49	0,52	0,56	0,59	0,63	0,66
20,0	2	0,70	0,73	0,77	0,80	0,84	0,87	0,91	0,94	0,98	1,01
20,0	3	1,05	1,08	1,12	1,15	1,19	1,22	1,26	1,29	1,33	1,36
20,0	4	1,40	1,43	1,46	1,50	1,53	1,57	1,60	1,64	1,67	1,71
19,9	5	1,74	1,78	1,81	1,85	1,88	1,92	1,95	1,99	2,02	2,06
19,9	6	2,09	2,13	2,16	2,19	2,23	2,26	2,30	2,33	2,37	2,40
19,9	7	2,44	2,47	2,51	2,54	2,58	2,61	2,65	2,68	2,71	2,75
19,8	8	2,78	2,82	2,85	2,89	2,92	2,96	2,99	3,03	3,06	3,09
19,8	9	3,13	3,16	3,20	3,23	3,27	3,30	3,34	3,37	3,40	3,44
19,7	10	3,47	3,51	3,54	3,58	3,61	3,64	3,68	3,71	3,75	3,78
19,6	11	3,82	3,85	3,88	3,92	3,95	3,99	4,02	4,06	4,09	4,12
19,6	12	4,16	4,19	4,23	4,26	4,29	4,33	4,36	4,40	4,43	4,47
19,5	13	4,50	4,53	4,57	4,60	4,63	4,67	4,70	4,74	4,77	4,80
19,4	14	4,84	4,87	4,91	4,94	4,97	5,01	5,04	5,08	5,11	5,14
19,3	15	5,18	5,21	5,24	5,28	5,31	5,34	5,38	5,41	5,45	5,48
19,2	16	5,51	5,55	5,58	5,61	5,65	5,68	5,71	5,75	5,78	5,81
19,1	17	5,85	5,88	5,91	5,95	5,98	6,01	6,05	6,08	6,11	6,15
19,0	18	6,18	6,21	6,25	6,28	6,31	6,35	6,38	6,41	6,45	6,48
18,9	19	6,51	6,54	6,58	6,61	6,64	6,68	6,71	6,74	6,77	6,81
18,8	20	6,84	6,87	6,91	6,94	6,97	7,00	7,04	7,07	7,10	7,13
18,7	21	7,17	7,20	7,23	7,27	7,30	7,33	7,36	7,39	7,43	7,46
18,5	22	7,49	7,52	7,56	7,59	7,62	7,65	7,69	7,72	7,75	7,78
18,4	23	7,81	7,85	7,88	7,91	7,94	7,97	8,01	8,04	8,07	8,10
18,3	24	8,13	8,17	8,20	8,23	8,26	8,29	8,33	8,36	8,39	8,42
18,1	25	8,45	8,48	8,52	8,55	8,58	8,61	8,64	8,67	8,70	8,74
18,0	26	8,77	8,80	8,83	8,86	8,89	8,92	8,96	8,99	9,02	9,05
17,8	27	9,08	9,11	9,14	9,17	9,20	9,23	9,27	9,30	9,33	9,36
17,7	28	9,39	9,42	9,45	9,48	9,51	9,54	9,57	9,60	9,64	9,67
17,5	29	9,70	9,73	9,76	9,79	9,82	9,85	9,88	9,91	9,94	9,97
17,3	30	10,00	10,03	10,06	10,09	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27
17,1	31	10,30	10,33	10,36	10,39	10,42	10,45	10,48	10,51	10,54	10,57
17,0	32	10,60	10,63	10,66	10,69	10,72	10,75	10,78	10,80	10,83	10,86
16,8	33	10,89	10,92	10,95	10,98	11,01	11,04	11,07	11,10	11,13	11,15
16,6	34	11,18	11,21	11,24	11,27	11,30	11,33	11,36	11,39	11,41	11,44
16,4	35	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59	11,61	11,64	11,67	11,70	11,73
16,2	36	11,76	11,78	11,81	11,84	11,87	11,90	11,92	11,95	11,98	12,01
16,0	37	12,04	12,06	12,09	12,12	12,15	12,18	12,20	12,23	12,26	12,29
15,8	38	12,31	12,34	12,37	12,40	12,42	12,45	12,48	12,50	12,53	12,56
15,5	39	12,59	12,61	12,64	12,67	12,69	12,72	12,75	12,78	12,80	12,83
15,3	40	12,86	12,88	12,91	12,94	12,96	12,99	13,02	13,04	13,07	13,09
15,1	41	13,12	13,15	13,17	13,20	13,23	13,25	13,28	13,30	13,33	13,36
14,9	42	13,38	13,41	13,43	13,46	13,49	13,51	13,54	13,56	13,59	13,61
14,6	43	13,64	13,67	13,69	13,72	13,74	13,77	13,79	13,82	13,84	13,87
14,4	44	13,89	13,92	13,94	13,97	13,99	14,02	14,04	14,07	14,09	14,12

(Véase § 73, pág. 298)

XX. Reducción de pasos al horizonte y a metros, por diferencias barométricas

A. Subida

Número de pasos	Diferencia barométrica Δ B																
	mm 0,0	mm -0,1	mm -0,2	mm -0,3	mm -0,4	mm -0,5	mm -0,6	mm -0,7	mm -0,8	mm -0,9	mm -1,0	mm -1,1	mm -1,2	mm -1,3	mm -1,4	mm -1,5	mm -1,6
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
5	4																
10	8	6	3														
15	12	10	8	5													
20	15	14	12	10	6												
25	19	18	16	14	12	7											
30	23	22	20	18	16	14	8										
35	27	26	24	22	20	19	17										
40	31	30	28	26	24	22	20										
45	35	34	32	30	28	27	25	22	18								
50	38	37	36	34	32	30	28	26	24	16							
55	42	41	40	38	37	35	32	30	28	27	19						
60	46	45	44	42	40	39	36	34	33	31	29	27					
65	50	49	48	47	45	42	41	38	37	34	32	31					
70	54	53	52	51	48	47	45	42	41	38	37	34	33				
75	58	57	56	54	52	51	49	47	44	43	40	38	37	36			
80	62	61	60	59	57	55	53	51	48	46	45	42	41	39			
85	65	64	63	62	60	58	57	55	52	50	48	44	42	40	37	35	
90	69	68	67	65	63	61	58	56	54	53	52	49	47	44	41	36	
95	73	72	71	70	69	67	65	63	62	58	56	55	53	51	49	46	45
100	77	76	75	74	73	71	69	67	65	63	60	59	57	55	53	51	49

B. Bajada

Número de pasos	Diferencia barométrica Δ B													
	mm 0,0	mm +0,2	mm +0,4	mm +0,6	mm +0,8	mm +1,0	mm +1,2	mm +1,4	mm +1,6	mm +1,8	mm +2,0	mm +2,2	mm +2,4	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
5	4													
10	8	7												
15	12	11	9											
20	15	14	14											
25	19	18	17	16										
30	23	22	21	20										
35	27	26	25	24	22									
40	31	30	29	28	27	25								
45	35	34	33	32	31	29								
50	38	37	36	36	35	34	31							
55	42	41	40	40	39	38	36	32						
60	46	44	44	43	43	42	41	38						
65	50	49	48	47	47	46	46	45	43	40				
70	54	53	52	51	50	50	49	48	45	42				
75	58	57	56	55	54	54	53	52	50	46				
80	62	61	60	58	58	57	57	55	54	52				
85	65	65	64	62	62	61	60	60	59	57	54			
90	69	68	67	66	66	65	65	63	62	61	59	56		
95	73	72	71	70	69	68	68	67	66	66	64	61	57	
100	77	76	75	74	73	72	72	71	70	69	68	66	62	57

(Véase § 54, pág. 212)

XXI. Tabla taquimétrica

99 (1/2 sen 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	99 cos² α
0'	0,00	1,73	3,45	5,17	6,89	8,60	10,29	11,98	13,64	15,30	0
3'	0,09	1,81	3,54	5,26	6,97	8,68	10,38	12,06	13,73	15,33	1°
6'	0,17	1,90	3,63	5,35	7,06	8,77	10,46	12,14	13,81	15,46	2°
9'	0,26	1,99	3,71	5,43	7,15	8,85	10,54	12,23	13,89	15,54	3°
12'	0,35	2,07	3,80	5,52	7,23	8,94	10,63	12,31	13,98	15,62	4°
15'	0,43	2,16	3,88	5,60	7,32	9,02	10,71	12,39	14,06	15,71	5°
18'	0,52	2,25	3,97	5,69	7,40	9,11	10,80	12,48	14,14	15,79	6°
21'	0,60	2,33	4,06	5,78	7,49	9,19	10,88	12,56	14,22	15,87	7°
24'	0,69	2,42	4,14	5,86	7,57	9,28	10,97	12,64	14,31	15,95	8°
27'	0,78	2,50	4,23	5,95	7,66	9,36	11,05	12,73	14,39	16,03	9°
30'	0,86	2,59	4,31	6,03	7,74	9,45	11,14	12,81	14,47	16,12	10°
33'	0,95	2,68	4,40	6,12	7,83	9,53	11,21	12,89	14,55	16,20	10° 30'
36'	1,04	2,76	4,49	6,20	7,91	9,61	11,30	12,98	14,64	16,28	11°
39'	1,12	2,85	4,57	6,29	8,00	9,70	11,39	13,06	14,72	16,36	11° 30'
42'	1,21	2,94	4,66	6,38	8,08	9,78	11,47	13,15	14,80	16,44	12°
45'	1,30	3,02	4,74	6,46	8,17	9,87	11,56	13,23	14,88	16,52	12° 30'
48'	1,38	3,11	4,83	6,55	8,26	9,95	11,64	13,31	14,97	16,60	13°
51'	1,47	3,19	4,92	6,63	8,34	10,04	11,72	13,39	15,05	16,69	13° 30'
54'	1,55	3,28	5,00	6,72	8,43	10,12	11,81	13,48	15,13	16,77	14°
57'	1,64	3,37	5,09	6,80	8,51	10,21	11,89	13,56	15,21	16,85	14° 30'
α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	15°
0'	16,93	18,54	20,13	21,70	23,24	24,75	26,23	27,68	29,10	30,48	15° 30'
3'	17,01	18,62	20,21	21,78	23,32	24,82	26,30	27,75	29,17	30,54	16°
6'	17,09	18,70	20,29	21,85	23,39	24,90	26,38	27,82	29,23	30,61	16° 30'
9'	17,17	18,78	20,37	21,93	23,47	24,97	26,45	27,89	29,30	30,68	17°
12'	17,25	18,86	20,45	22,01	23,54	25,05	26,52	27,97	29,37	30,75	17° 30'
15'	17,34	18,94	20,53	22,09	23,62	25,12	26,60	28,04	29,44	30,81	18°
18'	17,42	19,02	20,61	22,16	23,70	25,20	26,67	28,11	29,51	30,88	18° 30'
21'	17,50	19,10	20,68	22,24	23,77	25,27	26,74	28,18	29,58	30,95	19°
24'	17,58	19,18	20,76	22,32	23,85	25,35	26,81	28,25	29,65	31,02	19° 30'
27'	17,66	19,26	20,84	22,40	23,92	25,42	26,89	28,32	29,72	31,03	20°
30'	17,74	19,34	20,92	22,47	24,00	25,49	26,96	28,39	29,79	31,15	20° 20'
33'	17,82	19,42	21,00	22,55	24,07	25,57	27,03	28,46	29,86	31,22	20° 40'
36'	17,90	19,50	21,08	22,63	24,15	25,64	27,10	28,53	29,93	31,29	21°
39'	17,98	19,58	21,15	22,70	24,22	25,72	27,18	28,60	30,00	31,35	21° 20'
42'	18,06	19,66	21,23	22,78	24,30	25,79	27,25	28,67	30,07	31,42	21° 40'
45'	18,14	19,74	21,31	22,86	24,37	25,86	27,32	28,74	30,13	31,49	22°
48'	18,22	19,82	21,39	22,93	24,45	25,94	27,39	28,82	30,20	31,55	22° 20'
51'	18,30	19,90	21,47	23,01	24,53	26,01	27,46	28,89	30,27	31,62	22° 40'
54'	18,39	19,98	21,54	23,09	24,60	26,08	27,54	28,96	30,34	31,69	23°
57'	18,46	20,05	21,62	23,16	24,68	26,16	27,61	29,03	30,41	31,75	23° 20'
α	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	23° 40'
0'	31,82	33,12	34,39	35,61	36,79	37,92	39,01	40,05	41,04	41,98	24°
3'	31,88	33,19	34,45	35,67	36,81	37,97	39,06	40,10	41,09	42,02	24° 20'
6'	31,95	33,25	34,51	35,73	36,90	38,03	39,11	40,15	41,13	42,07	24° 40'
9'	32,02	33,31	34,57	35,79	36,96	38,09	39,17	40,20	41,18	42,12	25°
12'	32,03	33,38	34,63	35,85	37,01	38,14	39,22	40,25	41,23	42,16	25° 20'
15'	32,15	33,44	34,70	35,91	37,07	38,20	39,27	40,30	41,28	42,21	25° 40'
18'	32,21	33,51	34,76	35,97	37,13	38,25	39,32	40,35	41,32	42,25	26°
21'	32,28	33,57	34,82	36,02	37,19	38,31	39,38	40,40	41,37	42,30	26° 20'
24'	32,34	33,63	34,88	36,08	37,24	38,36	39,43	40,45	41,42	42,34	26° 40'
27'	32,41	33,70	34,94	36,14	37,30	38,41	39,48	40,50	41,47	42,39	27°
30'	32,47	33,76	35,00	36,20	37,36	38,47	39,53	40,55	41,51	42,43	27° 20'
33'	32,54	33,82	35,06	36,26	37,41	38,52	39,58	40,60	41,56	42,47	27° 40'
36'	32,61	33,89	35,12	36,32	37,47	38,58	39,64	40,65	41,61	42,52	28°
39'	32,67	33,95	35,18	36,38	37,53	38,63	39,69	40,70	41,65	42,56	28° 20'
42'	32,73	34,01	35,25	36,44	37,58	38,69	39,74	40,75	41,70	42,61	28° 40'
45'	32,80	34,07	35,31	36,50	37,64	38,74	39,79	40,79	41,75	42,65	29°
48'	32,85	34,14	35,37	36,55	37,70	38,79	39,84	40,84	41,79	42,69	29° 20'
51'	32,93	34,20	35,43	36,61	37,75	38,85	39,89	40,89	41,84	42,74	29° 40'
54'	32,99	34,26	35,49	36,67	37,81	38,90	39,94	40,91	41,89	42,78	30°
57'	33,06	34,32	35,55	36,73	37,86	38,95	40,00	40,99	41,93	42,83	30° 40'

Página de muestra de unas tablas más extensas, desde 10 m hasta 100 m (Véase § 63, pág. 249)

XXII. Tabla taquimétrica

100 (1/2 sen 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	100 cos² α
0'	0,00	1,74	3,49	5,23	6,96	8,68	10,40	12,10	13,78	15,45	0°
2'	0,06	1,80	3,55	5,28	7,02	8,74	10,45	12,15	13,84	15,51	0° 30'
4'	0,12	1,86	3,60	5,34	7,07	8,80	10,51	12,21	13,89	15,56	1°
6'	0,17	1,92	3,66	5,40	7,13	8,85	10,57	12,27	13,95	15,62	1° 30'
8'	0,23	1,98	3,72	5,46	7,19	8,91	10,62	12,32	14,01	15,67	2°
10'	0,29	2,04	3,78	5,52	7,25	8,97	10,68	12,38	14,06	15,73	2° 30'
12'	0,35	2,09	3,84	5,57	7,30	9,03	10,74	12,43	14,12	15,78	3°
14'	0,41	2,15	3,89	5,63	7,36	9,08	10,79	12,49	14,17	15,81	3° 30'
16'	0,47	2,21	3,95	5,69	7,42	9,14	10,85	12,55	14,23	15,89	4°
18'	0,52	2,27	4,01	5,75	7,48	9,20	10,91	12,60	14,28	15,95	4° 30'
20'	0,58	2,33	4,07	5,80	7,53	9,25	10,96	12,66	14,34	16,00	5°
22'	0,64	2,38	4,13	5,86	7,59	9,31	11,02	12,72	14,40	16,06	5° 30'
24'	0,70	2,44	4,18	5,92	7,65	9,37	11,08	12,77	14,45	16,11	6°
26'	0,76	2,50	4,24	5,98	7,71	9,43	11,13	12,83	14,51	16,17	6° 30'
28'	0,81	2,56	4,30	6,04	7,76	9,48	11,19	12,88	14,56	16,22	7°
30'	0,87	2,62	4,36	6,09	7,82	9,54	11,25	12,94	14,62	16,28	7° 30'
32'	0,93	2,67	4,42	6,15	7,88	9,60	11,30	13,00	14,67	16,33	8°
34'	0,99	2,73	4,47	6,21	7,94	9,65	11,36	13,05	14,73	16,39	8° 30'
36'	1,05	2,79	4,53	6,27	7,99	9,71	11,42	13,11	14,79	16,44	9°
38'	1,11	2,85	4,59	6,32	8,05	9,77	11,47	13,17	14,84	16,50	9° 30'
40'	1,16	2,91	4,65	6,38	8,11	9,83	11,53	13,22	14,90	16,55	10°
42'	1,22	2,97	4,71	6,44	8,17	9,89	11,59	13,28	14,95	16,61	10° 20'
44'	1,28	3,02	4,76	6,50	8,22	9,94	11,64	13,33	15,01	16,66	10° 40'
46'	1,34	3,08	4,82	6,56	8,28	10,00	11,70	13,39	15,06	16,72	11°
48'	1,40	3,14	4,88	6,61	8,34	10,05	11,76	13,45	15,12	16,77	11° 20'
50'	1,45	3,20	4,94	6,67	8,40	10,11	11,81	13,50	15,17	16,83	11° 40'
52'	1,51	3,26	4,99	6,73	8,45	10,17	11,87	13,56	15,23	16,88	12°
54'	1,57	3,31	5,05	6,79	8,51	10,22	11,93	13,61	15,28	16,94	12° 20'
56'	1,63	3,37	5,11	6,81	8,57	10,28	11,98	13,67	15,34	16,99	12° 40'
58'	1,69	3,43	5,17	6,90	8,63	10,34	12,04	13,73	15,40	17,05	13°
α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	12° 20'
0'	17,10	18,73	20,34	21,92	23,47	25,00	26,50	27,96	29,39	30,78	12° 40'
2'	17,16	18,78	20,39	21,97	23,52	25,05	26,55	28,01	29,44	30,83	13°
4'	17,21	18,84	20,44	22,02	23,58	25,10	26,59	28,06	29,48	30,87	13° 20'
6'	17,26	18,89	20,50	22,08	23,63	25,15	26,64	28,10	29,53	30,92	13° 40'
8'	17,32	18,95	20,55	22,13	23,68	25,20	26,69	28,15	29,58	30,97	14°
10'	17,37	19,00	20,60	22,18	23,73	25,25	26,74	28,20	29,62	31,01	14° 20'
12'	17,43	19,05	20,66	22,23	23,78	25,30	26,79	2			

XXIII. Tabla taquimétrica

175 (1/2 sen 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	175 cos² α
0'	0,00	3,05	6,10	9,15	12,18	15,19	18,19	21,17	24,12	27,04	0° 175,0
2'	0,10	3,16	6,21	9,25	12,28	15,29	18,29	21,27	24,22	27,14	0° 30' 175,0
4'	0,20	3,26	6,31	9,35	12,38	15,39	18,39	21,37	24,31	27,23	1° 174,9
6'	0,31	3,36	6,41	9,45	12,48	15,49	18,49	21,46	24,41	27,33	1° 30' 174,9
8'	0,41	3,46	6,51	9,55	12,58	15,60	18,59	21,56	24,51	27,43	2° 174,8
10'	0,51	3,56	6,61	9,65	12,68	15,70	18,69	21,66	24,61	27,52	2° 30' 174,7
12'	0,61	3,66	6,71	9,75	12,78	15,80	18,79	21,76	24,70	27,62	3° 174,5
14'	0,71	3,77	6,81	9,85	12,88	15,90	18,89	21,86	24,80	27,72	3° 30' 174,3
16'	0,81	3,87	6,92	9,96	12,98	16,00	18,99	21,96	24,90	27,81	4° 174,1
18'	0,92	3,97	7,02	10,06	13,08	16,10	19,09	22,06	25,00	27,91	4° 30' 173,9
20'	1,02	4,07	7,12	10,16	13,18	16,20	19,19	22,15	25,10	28,01	5° 173,7
22'	1,12	4,17	7,22	10,26	13,29	16,30	19,29	22,25	25,19	28,10	5° 30' 173,4
24'	1,22	4,27	7,32	10,36	13,39	16,40	19,39	22,35	25,29	28,20	6° 173,1
26'	1,32	4,38	7,42	10,46	13,49	16,50	19,48	22,45	25,39	28,29	6° 30' 172,8
28'	1,43	4,48	7,52	10,56	13,59	16,60	19,58	22,55	25,49	28,39	7° 172,4
30'	1,53	4,58	7,63	10,66	13,69	16,70	19,68	22,65	25,58	28,49	7° 30' 172,0
32'	1,63	4,69	7,73	10,76	13,79	16,80	19,78	22,74	25,68	28,58	8° 171,6
34'	1,73	4,79	7,83	10,87	13,89	16,90	19,88	22,84	25,78	28,68	8° 30' 171,2
36'	1,83	4,88	7,93	10,97	13,99	17,00	19,98	22,94	25,87	28,78	9° 170,7
38'	1,93	4,99	8,03	11,07	14,09	17,10	20,08	23,04	25,97	28,87	9° 30' 170,2
40'	2,04	5,09	8,13	11,17	14,19	17,20	20,18	23,14	26,07	28,97	10° 169,7
42'	2,14	5,19	8,23	11,27	14,29	17,30	20,28	23,24	26,17	29,06	10° 20' 169,4
44'	2,24	5,29	8,34	11,37	14,39	17,39	20,38	23,33	26,26	29,16	10° 40' 169,0
46'	2,34	5,39	8,44	11,47	14,49	17,49	20,48	23,43	26,36	29,26	11° 168,6
48'	2,44	5,49	8,54	11,57	14,59	17,59	20,57	23,53	26,46	29,35	11° 20' 168,2
50'	2,54	5,60	8,64	11,67	14,69	17,69	20,67	23,63	26,55	29,45	11° 40' 167,8
52'	2,65	5,70	8,74	11,77	14,79	17,79	20,77	23,73	26,65	29,54	12° 167,4
54'	2,75	5,80	8,84	11,88	14,89	17,89	20,87	23,82	26,75	29,64	12° 20' 167,0
56'	2,85	5,90	8,94	11,98	14,99	17,99	20,97	23,92	26,85	29,74	13° 166,6
58'	2,95	6,00	9,04	12,08	15,09	18,09	21,07	24,02	26,94	29,83	13° 20' 166,2
α	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	12° 167,4
0'	29,93	32,78	35,59	38,36	41,08	43,75	46,37	48,93	51,43	53,87	12° 20' 167,0
2'	30,02	32,87	35,68	38,45	41,17	43,84	46,45	49,01	51,51	53,95	12° 40' 166,6
4'	30,12	32,97	35,78	38,54	41,26	43,93	46,54	49,10	51,60	54,03	13° 166,1
6'	30,21	33,06	35,87	38,63	41,35	44,01	46,63	49,18	51,68	54,11	13° 20' 165,7
8'	30,31	33,16	35,96	38,71	41,44	44,10	46,71	49,27	51,76	54,19	13° 40' 165,2
10'	30,40	33,25	36,05	38,81	41,53	44,19	46,80	49,35	51,84	54,27	14° 164,8
12'	30,50	33,34	36,15	38,91	41,62	44,28	46,88	49,43	51,92	54,35	14° 20' 164,3
14'	30,60	33,44	36,24	39,00	41,71	44,37	46,97	49,52	52,01	54,43	14° 40' 163,8
16'	30,69	33,53	36,33	39,09	41,80	44,45	47,06	49,60	52,09	54,51	15° 163,3
18'	30,79	33,63	36,42	39,18	41,89	44,54	47,14	49,69	52,17	54,59	15° 20' 162,8
20'	30,88	33,72	36,52	39,27	41,97	44,63	47,23	49,77	52,25	54,67	15° 40' 162,2
22'	30,98	33,81	36,61	39,36	42,06	44,72	47,31	49,85	52,33	54,75	16° 161,7
24'	31,07	33,91	36,70	39,45	42,15	44,80	47,40	49,94	52,41	54,83	16° 20' 161,2
26'	31,17	34,00	36,79	39,54	42,24	44,89	47,49	50,02	52,50	54,91	17° 160,0
28'	31,26	34,10	36,89	39,63	42,33	44,98	47,57	50,10	52,58	54,99	17° 20' 159,5
30'	31,36	34,19	36,98	39,72	42,42	45,07	47,66	50,19	52,66	55,07	17° 40' 158,9
32'	31,45	34,28	37,07	39,81	42,51	45,15	47,74	50,27	52,74	55,14	18° 158,3
34'	31,55	34,38	37,16	39,91	42,60	45,24	47,83	50,35	52,82	55,22	18° 20' 157,7
36'	31,64	34,47	37,26	40,00	42,69	45,33	47,91	50,44	52,90	55,30	18° 40' 157,1
38'	31,74	34,56	37,35	40,09	42,78	45,41	48,00	50,52	52,98	55,38	19° 156,5
40'	31,83	34,66	37,44	40,18	42,87	45,50	48,08	50,60	53,06	55,46	19° 20' 155,8
42'	31,93	34,75	37,53	40,27	42,95	45,59	48,18	50,69	53,15	55,54	19° 40' 155,2
44'	32,02	34,84	37,62	40,36	43,04	45,68	48,25	50,77	53,23	55,62	20° 154,5
46'	32,12	34,94	37,72	40,44	43,13	45,76	48,34	50,85	53,31	55,70	20° 20' 153,9
48'	32,21	35,03	37,81	40,54	43,22	45,85	48,42	50,94	53,39	55,77	19° 156,5
50'	32,31	35,12	37,90	40,62	43,31	45,94	48,51	51,02	53,47	55,85	19° 20' 155,8
52'	32,40	35,22	37,99	40,71	43,40	46,02	48,59	51,10	53,55	55,93	19° 40' 155,2
54'	32,49	35,31	38,08	40,81	43,49	46,11	48,68	51,18	53,63	56,01	20° 154,5
56'	32,59	35,40	38,17	40,90	43,57	46,20	48,76	51,27	53,71	56,09	20° 20' 153,9
58'	32,68	35,50	38,27	40,98	43,66	46,28	48,84	51,35	53,79	56,17	

XXIV. Tabla taquimétrica

(176 1/2 sen 2 α)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	176 cos² α
0'	0,00	3,07	6,14	9,20	12,25	15,28	18,30	21,29	24,26	27,19	0° 176,0
1'	0,05	3,12	6,19	9,25	12,30	15,33	18,35	21,34	24,31	27,24	0° 30' 176,0
2'	0,10	3,17	6,24	9,30	12,35	15,38	18,40	21,39	24,35	27,29	1° 175,9
3'	0,15	3,22	6,29	9,35	12,40	15,43	18,45	21,44	24,40	27,34	1° 30' 175,9
4'	0,20	3,28	6,34	9,40	12,45	15,48	18,50	21,49	24,45	27,39	2° 175,8
5'	0,26	3,33	6,39	9,45	12,50	15,53	18,55	21,54	24,50	27,44	2° 30' 175,7
6'	0,31	3,38	6,44	9,50	12,55	15,58	18,60	21,59	24,55	27,49	3° 175,5
7'	0,36	3,43	6,50	9,55	12,61	15,63	18,65	21,64	24,60	27,53	3° 30' 175,3
8'	0,41	3,48	6,55	9,61	12,65	15,68	18,70	21,69	24,65	27,58	4° 174,9
9'	0,46	3,53	6,60	9,66	12,70	15,73	18,75	21,74	24,70	27,63	4° 30' 174,9
10'	0,51	3,58	6,65	9,71	12,75	15,78	18,80	21,79	24,75	27,68	5° 174,7
11'	0,56	3,63	6,70	9,76	12,80	15,84	18,85	21,84	24,80	27,73	5° 20' 174,5
12'	0,61	3,69	6,75	9,81	12,86	15,89	18,90	21,88	24,85	27,78	5° 40' 174,3
13'	0,67	3,74	6,80	9,86	12,91	15,94	18,95	21,93	24,90	27,83	6° 174,1
14'	0,72	3,79	6,85	9,91	12,96	15,99	19,00	21,98	24,94	27,87	6° 20' 173,9
15'	0,77	3,84	6,90	9,96	13,01	16,04	19,05	22,03	24,99	27,92	6° 40' 173,6
16'	0,82	3,89	6,96	10,01	13,06	16,09	19,10	22,08	25,04	27,97	7° 173,4
17'	0,87	3,94	7,01	10,06	13,11	16,14	19,15	22,13	25,09	28,02	7° 20' 173,1
18'	0,92	3,99	7,06	10,11	13,16	16,19	19,20	22,18	25,14	28,07	7° 40' 172,9
19'	0,97	4,04	7,11	10,17	13,21	16,24	19,25	22,23	25,19	28,12	8° 172,6
20'	1,02	4,09	7,16	10,22	13,26	16,29	19,30	22,28	25,24	28,17	8° 20' 172,3
21'	1,07	4,15	7,21	10,27	13,31	16,34	19,35	22,33	25,29	28,21	8° 40' 172,0
22'	1,13	4,20	7,26	10,32	13,36	16,39	19,40	22,38	25,34	28,26	9° 171,7
23'	1,18	4,25	7,31	10,37	13,41	16,44	19,45	22,43	25,39	28,31	9° 20' 171,4
24'	1,23	4,30	7,36	10,42	13,45	16,49	19,50	22,48	25,43	28,36	9° 40' 171,0
25'	1,28	4,35	7,41	10,47	13,51	16,54	19,55	22,53	25,48	28,41	10° 170,7
26'	1,33	4,40	7,47	10,52	13,56	16,59	19,60	22,58	25,53	28,46	
27'	1,38	4,45	7,52	10,57	13,61	16,64	19,65	22,63	25,58	28,50	
28'	1,43	4,50	7,57	10,62	13,67	16,69	19,70	22,68	25,63	28,55	
29'	1,48	4,55	7,62	10,67	13,72	16,74	19,75	22,73	25,68	28,60	
30'	1,54	4,61	7,67	10,72	13,77	16,79	19,80	22,78	25,73	28,65	
31'	1,59	4,66	7,72	10,78	13,82	16,84	19,85	22,83	25,78	28,70	
32'	1,64	4,71	7,77	10,83	13,87	16,89	19,90	22,87	25,83	2	

XXV. Coordenadas rectangulares para el replanteo de arcos de circunferencia

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	
5	0,51	0,42	0,36	0,31	0,28	0,25	0,23	0,21	0,19	0,18	5
10	2,09	1,72	1,46	1,27	1,13	1,01	0,92	0,84	0,77	0,72	10
15	5,00	4,02	3,38	2,92	2,57	2,30	2,08	1,91	1,75	1,63	15
20	10,00	7,64	6,28	5,36	4,69	4,17	3,77	3,43	3,15	2,92	20
25	25,00	13,42	10,51	8,78	7,58	6,70	6,01	5,46	5,00	4,62	25
30		30,00	16,97	13,54	11,46	10,00	8,90	8,04	7,34	6,75	30
35			35,00	20,64	16,72	14,29	12,57	11,27	10,23	9,38	35
40				40,00	24,38	20,00	17,25	15,28	13,77	12,55	40
45					45,00	28,21	23,38	20,31	18,10	16,38	45
50						50,00	32,09	26,83	23,47	21,01	50

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	75	80	85	90	95	100	110	120	125	130	
5	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	0,13	0,11	0,10	0,10	0,10	5
10	0,67	0,63	0,59	0,56	0,53	0,50	0,46	0,42	0,40	0,39	10
15	1,52	1,42	1,33	1,26	1,19	1,13	1,03	0,94	0,90	0,87	15
20	2,72	2,54	2,39	2,25	2,13	2,02	1,83	1,68	1,61	1,55	20
25	4,29	4,01	3,76	3,54	3,35	3,18	2,88	2,63	2,53	2,43	25
30	6,26	5,84	5,47	5,15	4,86	4,61	4,17	3,81	3,65	3,51	30
35	8,67	8,06	7,54	7,08	6,68	6,33	5,72	5,22	5,00	4,80	35
40	11,56	10,72	10,00	9,38	8,83	8,35	7,53	6,86	6,57	6,31	40
45	15,00	13,86	12,89	12,06	11,33	10,70	9,63	8,76	8,38	8,04	45
50	19,10	17,55	16,26	15,17	14,22	13,40	12,02	10,91	10,44	10,00	50
55	24,01	21,91	20,19	18,76	17,54	16,48	14,74	13,35	12,75	12,21	55
60	30,00	27,08	24,79	22,92	21,35	20,00	17,80	16,08	15,34	14,67	60
65	37,58	33,36	30,23	27,75	25,72	24,01	21,26	19,13	18,23	17,42	65
70	48,07	41,27	36,78	33,43	30,77	28,59	25,15	22,53	21,44	20,46	70
75	75,00	52,16	45,00	40,25	36,69	33,86	29,53	26,33	25,00	23,82	75

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	140	150	160	170	175	180	190	200	210	220	
10	0,36	0,33	0,31	0,29	0,29	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23	10
20	1,44	1,34	1,25	1,18	1,15	1,11	1,06	1,00	0,95	0,91	20
30	3,25	3,03	2,84	2,67	2,59	2,52	2,38	2,26	2,15	2,06	30
40	5,84	5,43	5,08	4,77	4,63	4,50	4,26	4,04	3,84	3,67	40
50	9,23	8,58	8,01	7,52	7,29	7,08	6,70	6,35	6,04	5,76	50
60	13,51	12,52	11,68	10,94	10,61	10,29	9,72	9,21	8,75	8,34	60
70	18,76	17,34	16,13	15,08	14,61	14,17	13,36	12,65	12,01	11,43	70
80	25,11	23,11	21,44	20,00	19,36	18,75	17,66	16,70	15,84	15,06	80
90	32,76	30,00	27,71	25,78	24,92	24,12	22,67	21,39	20,26	19,25	90
100	42,02	38,20	35,10	32,52	31,39	30,33	28,45	26,79	25,34	24,04	100
110	53,40	48,02	43,81	40,39	38,89	37,52	35,08	32,97	31,11	29,47	110
120	67,89	60,00	54,16	49,58	47,62	45,84	42,69	40,00	37,66	35,61	120
130	88,04	75,17	66,73	60,46	57,85	55,50	51,44	48,01	45,08	42,52	130
140	140,00	96,15	82,54	73,56	70,00	66,86	61,55	57,17	53,48	50,29	140
150		150,00	104,32	90,00	84,86	80,50	73,38	67,71	63,03	59,07	150

(Véase § 118, pág. 487)

XXV. Coordenadas rectangulares para el replanteo de arcos de circunferencia

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	
10	0,22	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	0,17	0,17	0,16	0,16	10
20	0,87	0,83	0,80	0,77	0,74	0,72	0,69	0,67	0,65	0,63	20
30	1,96	1,88	1,81	1,74	1,67	1,61	1,56	1,50	1,46	1,41	30
40	3,50	3,36	3,22	3,10	2,98	2,87	2,77	2,68	2,59	2,51	40
50	5,50	5,27	5,05	4,85	4,67	4,50	4,34	4,20	4,06	3,93	50
60	7,96	7,62	7,31	7,02	6,75	6,50	6,27	6,06	5,86	5,68	60
70	10,91	10,44	10,00	9,60	9,23	8,89	8,58	8,28	8,01	7,75	70
80	14,36	13,73	13,15	12,61	12,12	11,67	11,25	10,86	10,50	10,16	80
90	18,34	17,51	16,76	16,07	15,44	14,86	14,32	13,82	13,35	12,92	90
100	22,88	21,83	20,87	20,00	19,20	18,47	17,79	17,16	16,57	16,03	100
110	28,01	26,69	25,50	24,42	23,42	22,51	21,67	20,89	20,17	19,50	110
120	33,79	32,15	30,68	29,35	28,13	27,02	25,99	25,05	24,17	23,35	120
130	40,26	38,26	36,46	34,83	33,36	32,01	30,77	29,63	28,58	27,60	130
140	47,52	45,06	42,88	40,91	39,13	37,51	36,03	34,67	33,41	32,25	140
150	55,64	52,65	50,00	47,63	45,50	43,57	41,81	40,19	38,71	37,33	150
160	64,77	61,11	57,91	55,06	52,51	50,22	48,13	46,23	44,48	42,87	160
170	75,08	70,59	66,70	63,28	60,24	57,51	55,05	52,82	50,77	48,89	170
180	86,82	81,25	76,51	72,38	68,75	65,52	62,62	60,00	57,61	55,42	180
190	100,39	93,37	87,52	82,52	78,17	74,33	70,91	67,84	65,05	62,51	190
200	116,42	107,34	100,00	93,87	88,62	84,04	80,00	76,39	73,15	70,20	200

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	430	440	450	460	470	480	500	550	600	650	
10	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,08	10
20	0,47	0,45	0,44	0,43	0,43	0,42	0,40	0,36	0,33	0,31	20
30	1,05	1,02	1,00	0,93	0,96	0,94	0,90	0,82	0,75	0,69	30
40	1,86	1,82	1,78	1,74	1,71	1,67	1,60	1,46	1,33	1,23	40
50	2,92	2,85	2,79	2,73	2,67	2,61	2,51	2,28	2,09	1,93	50
60	4,21	4,11	4,02	3,93	3,85	3,76	3,61	3,28	3,01	2,78	60
70	5,74	5,60	5,48	5,36	5,24	5,13	4,92	4,47	4,10	3,78	70
80	7,51	7,33	7,17	7,01	6,86	6,71	6,44	5,85	5,36	4,94	80
90	9,52	9,30	9,09	8,89	8,70	8,51	8,17	7,41	6,79	6,26	90
100	11,79	11,51	11,25	11,00	10,76	10,53	10,10	9,17	8,39	7,74	100
110	14,31	13,97	13,65	13,35	13,05	12,77	12,25	11,11	10,17	9,38	110
120	17,08	16,68	16,30	15,93	15,58	15,24	14,61	13,25	12,12	11,17	120
130	20,12	19,64	19,19	18,75	18,34	17,94	17,20	15,58	14,25	13,13	130
140	23,43	22,87	22,33	21,82	21,34	20,87	20,00	18,12	16,56	15,26	140
150	27,01	26,36	25,74	25,14	24,58	24,04	23,03	20,85	19,05	17,54	150
160	30,88	30,12	29,41	28,72	28,07	27,45	26,29	23,79	21,73	20,00	160
170	35,03	34,17	33,35	32,57	31,82	31,11	29,79	26,93	24,59	22,62	170
180	39,49	38,50	37,57	36,68	35,83	35,03	33,52	30,29	27,64	25,42	180
190	44,25	43,14	42,08	41,07	40,12	39,21	37,51	33,86	30,88	28,39	190
200	49,34	48,08	46,89	45,75	44,68	43,65	41,74	37,65	34,31	31,53	200
210	54,77	53,35	52,01	50,73	49,52	48,38	46,24	41,67	37,95	34,86	210
220	60,54	58,95	57,44	56,02	54,67	53,39	51,00	45,92	41,79	38,36	220
230	66,68	64,90	63,22	61,63	60,12	58,69	56,04	50,40	45,83	42,05	230
240	73,21	71,22	69,34	67,57	65,90	64,31	61,37	55,13	50,09	45,93	240
250	80,14	77,92	75,83	73,87	72,01	70,24	66,99	60,10	54,56	50,00	250

(Véase § 118, pág. 487)

XXV. Coordenadas rectangulares para el replanteo de arcos de circunferencia

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	
10	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	10
20	0,61	0,59	0,57	0,56	0,54	0,53	0,51	0,50	0,49	0,48	20
30	1,37	1,33	1,29	1,25	1,22	1,19	1,16	1,13	1,10	1,07	30
40	2,43	2,36	2,29	2,23	2,17	2,11	2,06	2,01	1,96	1,91	40
50	3,81	3,70	3,59	3,49	3,39	3,30	3,22	3,14	3,06	2,99	50
60	5,50	5,34	5,18	5,04	4,90	4,77	4,64	4,53	4,41	4,31	60
70	7,51	7,28	7,07	6,87	6,68	6,50	6,33	6,17	6,02	5,87	70
80	9,84	9,55	9,27	9,00	8,75	8,52	8,29	8,08	7,88	7,69	80
90	12,51	12,13	11,77	11,43	11,11	10,81	10,53	10,26	10,00	9,76	90
100	15,52	15,04	14,59	14,17	13,77	13,39	13,04	12,70	12,38	12,08	100
110	18,87	18,29	17,74	17,22	16,73	16,27	15,83	15,41	15,03	14,66	110
120	22,59	21,83	21,21	20,59	20,00	19,44	18,92	18,42	17,95	17,51	120
130	26,68	25,83	25,04	24,29	23,59	22,93	22,30	21,71	21,16	20,63	130
140	31,17	30,16	29,22	28,34	27,51	26,73	25,99	25,30	24,64	24,02	140
150	35,06	34,88	33,77	32,74	31,77	30,86	30,00	29,19	28,42	27,70	150
160	41,38	40,00	38,71	37,51	36,38	35,33	34,33	33,39	32,51	31,67	160
170	47,16	45,55	44,06	42,67	41,37	40,15	39,00	37,92	36,90	35,94	170
180	53,41	51,56	49,83	48,23	46,74	45,34	44,02	42,79	41,63	40,53	180
190	60,19	58,04	56,06	54,22	52,51	50,91	49,41	48,01	46,68	45,43	190
200	67,51	65,05	62,77	60,67	58,71	56,89	55,19	53,59	52,09	50,68	200

Abs-cisa	Radio										Abs-cisa
	700	750	800	900	1000	1500	2000	2500	3000	5000	
10	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	10
20	0,29	0,27	0,25	0,22	0,20	0,13	0,10	0,08	0,07	0,04	20
30	0,64	0,60	0,56	0,50	0,45	0,30	0,23	0,18	0,15	0,09	30
40	1,14	1,07	1,00	0,89	0,80	0,53	0,40	0,32	0,27	0,16	40
50	1,79	1,67	1,56	1,39	1,25	0,83	0,63	0,50	0,42	0,25	50
60	2,58	2,40	2,25	2,00	1,80	1,20	0,90	0,72	0,60	0,36	60
70	3,51	3,27	3,07	2,73	2,45	1,63	1,23	0,98	0,82	0,49	70
80	4,59	4,28	4,01	3,56	3,21	2,13	1,60	1,28	1,07	0,64	80
90	5,81	5,42	5,08	4,51	4,06	2,70	2,03	1,62	1,35	0,81	90
100	7,18	6,70	6,27	5,57	5,01	3,34	2,50	2,00	1,67	1,00	100
110	8,70	8,11	7,60	6,75	6,07	4,04	3,03	2,42	2,02	1,21	110
120	10,36	9,66	9,05	8,04	7,23	4,81	3,60	2,88	2,40	1,44	120
130	12,18	11,35	10,63	9,44	8,49	5,64	4,23	3,38	2,82	1,69	130
140	14,14	13,18	12,35	10,96	9,85	6,55	4,91	3,92	3,27	1,96	140
150	16,26	15,15	14,19	12,59	11,31	7,52	5,63	4,50	3,75	2,25	150
160	18,53	17,27	16,16	14,34	12,88	8,56	6,41	5,13	4,27	2,56	160
170	20,96	19,52	18,27	16,20	14,56	9,66	7,24	5,79	4,82	2,89	170
180	23,54	21,92	20,51	18,18	16,33	10,84	8,12	6,49	5,40	3,24	180
190	26,28	24,47	22,89	20,28	18,22	12,08	9,05	7,23	6,02	3,61	190
200	29,18	27,16	25,40	22,50	20,20	13,39	10,03	8,01	6,67	4,00	200
210	32,24	30,00	28,05	24,84	22,30	14,77	11,06	8,84	7,36	4,41	210
220	35,47	32,99	30,84	27,30	24,50	16,22	12,14	9,70	8,08	4,84	220
230	38,86	36,14	33,78	29,89	26,81	17,74	13,27	10,60	8,83	5,29	230
240	42,43	39,44	36,85	32,59	29,23	19,32	14,45	11,55	9,62	5,76	240
250	46,17	42,89	40,07	35,42	31,75	20,98	15,69	12,53	10,43	6,25	250

(Véase § 118, pág. 487)

XXVI. Ángulo periférico o tangencial α para cuerdas de longitud $s = 20$

$$\text{sen } \alpha = \frac{s}{2r}$$

Arco	Radio								Arco
	100	120	140	150	160	180	200	220	
10	122° 36'	132° 12'	139° 2'	141° 46'	144° 10'	148° 9'	151° 20'	153° 57'	10
9	128 21	136 59	143 8	145 35	147 45	151 20	154 12	156 33	9
8	134 5	141 46	147 14	149 25	151 20	154 31	157 4	159 9	8
7	139 50	146 32	151 20	153 15	154 55	157 42	159 56	161 46	7
6	145 34	151 19	155 25	157 4	158 30	160 53	162 48	164 22	6
5	151 18	156 6	159 31	160 53	162 5	164 5	165 40	166 58	5
4	157 3	160 53	163 37	164 43	165 40	167 16	168 32	169 35	4
3	162 47	165 40	167 43	168 32	169 15	170 27	171 24	172 11	3
2	168 31	170 26	171 48	172 21	172 50	173 38	174 16	174 47	2
1	174 16	175 13	175 54	176 11	176 25	176 49	177 8	177 24	1
0									0
1	5 44	4 47	4 6	3 49	3 35	3 11	2 52	2 36	1
2	11 29	9 34	8 12	7 39	7 10	6 22	5 44	5 13	2
3	17 13	14 20	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	7 49	3
4	22 57	19 7	16 23	15 17	14 20	12 44	11 28	10 25	4
5	28 42	23 54	20 29	19 7	17 55	15 55	14 20	13 2	5
6	34 26	28 41	24 35	22 56	21 30	19 7	17 12	15 38	6
7	40 10	33 28	28 40	26 45	25 5	22 18	20 4	18 14	7
8	45 55	38 14	32 46	30 35	28 40	25 29	22 56	20 51	8
9	51 39	43 1	36 52	34 24	32 15	28 40	25 48	23 27	9
10	57 24	47 48	40 58	38 14	35 50	31 51	28 40	26 3	10

Arco	Radio								Arco
	240	250	260	280	300	320	340	350	
12	151° 21'	152° 29'	153° 33'	155° 26'	157° 5'	158° 31'	159° 47'	160° 21'	12
11	153 44	154 47	155 45	157 29	158 59	160 18	161 28	161 59	11
10	156 7	157 5	157 57	159 32	160 54	162 6	163 9	163 38	10
9	158 30	159 22	160 10	161 35	162 48	163 53	164 50	165 16	9
8	160 54	161 40	162 22	163 38	164 43	165 40	166 31	166 54	8
7	163 17	163 57	164 34	165 40	166 38	167 28	168 12	168 32	7
6	165 40	166 15	166 46	167 43	168 32	169 15	169 53	170 11	6
5	168 4	168 32	168 59	169 46	170 27	171 3	171 34	171 49	5
4	170 27	175 50	171 11	171 49	172 22	172 50	173 16	173 27	4
3	172 50	173 7	173 23	173 52	174 16	174 38	174 57	175 5	3
2	175 13	175 25	175 35	175 54	176 11	176 25	176 38	176 44	2
1	177 37	177 42	177 48	177 57	178 5	178 13	178 19	178 22	1
0									0
1	2 23	2 18	2 12	2 3	1 55	1 47	1 41	1 38	1
2	4 47	4 35	4 25	4 6	3 49	3 35	3 22	3 16	2
3	7 10	6 53	6 37	6 8	5 44	5 22	5 3	4 55	3
4	9 33	9 10	8 49	8 11	7 38	7 10	6 44	6 33	4
5	11 56	11 28	11 1	10 14	9 33	8 57	8 26	8 11	5
6	14 20	13 45	13 14	12 17	11 28	10 45	10 7	9 49	6
7	16 43	16 3	15 26	14 20	13 22	12 32	11 48	11 28	7
8	19 6	18 20	17 38	16 22	15 17	14 20	13 29	13 6	8
9	21 30	20 38	19 50	18 25	17 12	16 7	15 10	14 44	9
10	23 53	22 55	22 3	20 28	19 6	17 54	16 51	16 22	10
11	26 16	25 13	24 15	22 31	21 1	19 42	18 32	18 1	11
12	28 39	27 31	26 27	24 34	22 55	21 29	20 13	19 39	12

(Véase § 119, pág. 489)

XXVI. Ángulo periférico o tangencial α para cuerdas de longitud $s = 20$

$$\text{sen } \alpha = \frac{s}{2r}$$

Arco	Radio								Arco
	360	380	400	450	500	550	600	650	
20	148° 10'	149° 50'	151° 21'	154° 32'	157° 5'	159° 10'	160° 54'	162° 22'	20
19	149 45	151 21	152 47	155 48	158 14	160 12	161 51	163 15	19
18	151 21	152 51	154 13	157 5	159 22	161 15	162 49	164 8	18
17	152 56	154 22	155 39	158 21	160 31	162 17	163 46	165 1	17
16	154 32	155 52	157 5	159 38	161 40	163 20	164 32	165 54	16
15	156 7	157 23	158 31	160 54	162 49	164 22	165 41	166 47	15
14	157 43	158 53	159 57	162 10	163 57	165 25	166 38	167 40	14
13	159 18	160 24	161 23	163 27	165 6	166 27	167 35	168 32	13
12	160 54	161 54	162 49	164 43	166 15	167 30	168 32	169 25	12
11	162 29	163 25	164 15	166 0	167 24	168 32	169 30	170 18	11
10	164 5	164 55	165 40	167 16	168 32	169 35	170 27	171 11	10
9	165 40	166 26	167 6	168 32	169 41	170 37	171 24	172 4	9
8	167 16	167 56	168 32	169 49	170 50	171 40	172 22	172 57	8
7	168 51	169 27	169 58	171 5	171 59	172 42	173 19	173 50	7
6	170 27	170 57	171 24	172 22	173 7	173 45	174 16	174 43	6
5	172 2	172 28	172 50	173 38	174 16	174 47	175 14	175 36	5
4	173 38	173 58	174 16	174 54	175 25	175 50	176 11	176 28	4
3	175 13	175 29	175 42	176 11	176 34	176 52	177 8	177 21	3
2	176 49	176 59	177 8	177 27	177 42	177 55	178 5	178 14	2
1	178 24	178 30	178 34	178 44	178 51	178 57	179 3	179 7	1
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
1	1 36	1 30	1 26	1 16	1 9	1 3	0 57	0 53	1
2	3 11	3 1	2 52	2 33	2 18	2 5	1 55	1 46	2
3	4 47	4 31	4 18	3 49	3 26	3 8	2 52	2 39	3
4	6 22	6 2	5 44	5 6	4 35	4 10	3 49	3 32	4
5	7 58	7 32	7 10	6 22	5 44	5 13	4 46	4 24	5
6	9 33	9 3	8 36	7 38	6 53	6 15	5 44	5 17	6
7	11 9	10 33	10 2	8 55	8 1	7 18	6 41	6 10	7
8	12 44	12 4	11 28	10 11	9 10	8 20	7 38	7 3	8
9	14 20	13 34	12 54	11 28	10 19	9 23	8 36	7 56	9
10	15 55	15 5	14 20	12 44	11 28	10 25	9 33	8 49	10
11	17 31	16 35	15 45	14 0	12 36	11 28	10 30	9 42	11
12	19 6	18 6	17 11	15 17	13 45	12 30	11 28	10 35	12
13	20 42	19 36	18 37	16 33	14 54	13 33	12 25	11 28	13
14	22 17	21 7	20 3	17 50	16 3	14 35	13 22	12 20	14
15	23 53	22 37	21 29	19 6	17 11	15 38	14 19	13 13	15
16	25 28	24 8	22 55	20 22	18 20	16 40	15 17	14 6	16
17	27 4	25 38	24 21	21 39	19 29	17 43	16 14	14 59	17
18	28 39	27 9	25 47	22 55	20 38	18 45	17 11	15 52	18
19	30 15	28 39	27 13	24 12	21 46	19 48	18 9	16 45	19
20	31 50	30 10	28 39	25 28	22 55	20 50	19 6	17 38	20

(Véase § 119, pág. 489)

XXVI. Ángulo periférico o tangencial α para cuerdas de longitud $s = 20$

$$\text{sen } \alpha = \frac{s}{2r}$$

Arco	Radio								Arco
	700	750	800	900	1000	1500	2000	2500	
20	163° 38'	164° 43'	165° 41'	167° 16'	168° 32'	172° 22'	174° 16'	175° 25'	20
19	164 27	165 29	166 24	167 54	169 7	172 45	174 33	175 39	19
18	165 16	166 15	167 6	168 32	169 41	173 7	174 51	175 52	18
17	166 5	167 1	167 49	169 11	170 16	173 30	175 8	176 6	17
16	166 54	167 47	168 32	169 49	170 50	173 53	175 25	176 20	16
15	167 43	168 32	169 15	170 27	171 24	174 16	175 42	176 34	15
14	168 32	169 18	169 58	171 5	171 59	174 39	175 59	176 47	14
13	169 22	170 4	170 41	171 43	172 33	175 2	176 17	177 1	13
12	170 11	170 50	171 24	172 22	173 7	175 25	176 34	177 15	12
11	171 0	171 36	172 7	173 0	173 42	175 48	176 51	177 29	11
10	171 49	172 22	172 50	173 38	174 16	176 11	177 8	167 42	10
9	172 38	173 7	173 33	174 16	174 51	176 34	177 25	177 56	9
8	173 27	173 53	174 16	174 54	175 25	176 57	177 42	178 10	8
7	174 16	174 39	174 59	175 33	175 59	177 20	178 0	178 24	7
6	175 5	175 25	175 42	176 11	176 34	177 42	178 17	178 37	6
5	175 54	176 11	176 25	176 49	177 8	178 5	178 34	178 51	5
4	176 44	176 57	177 8	177 27	177 42	178 28	178 51	179 5	4
3	177 33	177 42	177 51	178 5	178 17	178 51	179 8	179 19	3
2	178 22	178 28	178 34	178 44	178 51	179 14	179 26	179 32	2
1	179 11	179 14	179 17	179 22	179 26	179 37	179 43	179 46	1
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0
1	0 49	0 46	0 43	0 38	0 34	0 23	0 17	0 14	1
2	1 38	1 32	1 26	1 16	1 9	0 46	0 34	0 28	2
3	2 27	2 18	2 9	1 55	1 43	1 9	0 52	0 41	3
4	3 16	3 3	2 52	2 33	2 18	1 32	1 9	0 55	4
5	4 6	3 49	3 35	3 11	2 52	1 55	1 26	1 9	5
6	4 55	4 35	4 18	3 49	3 26	2 18	1 43	1 23	6
7	5 44	5 21	5 1	4 27	4 1	2 40	2 0	1 36	7
8	6 33	6 7	5 44	5 6	4 35	3 3	2 18	1 50	8
9	7 22	6 53	6 27	5 44	5 9	3 26	2 35	2 4	9
10	8 11	7 38	7 10	6 22	5 44	3 49	2 52	2 18	10
11	9 0	8 24	7 53	7 0	6 18	4 12	3 9	2 31	11
12	9 49	9 10	8 36	7 38	6 53	4 35	3 26	2 45	12
13	10 38	9 56	9 19	8 17	7 27	4 58	3 43	2 59	13
14	11 28	10 42	10 2	8 55	8 1	5 21	4 1	3 13	14
15	12 17	11 28	10 45	9 33	8 36	5 44	4 18	3 26	15
16	13 6	12 13	11 28	10 11	9 10	6 7	4 35	3 40	16
17	13 55	12 59	12 11	10 49	9 44	6 30	4 52	3 54	17
18	14 44	13 45	12 54	11 28	10 19	6 53	5 9	4 8	18
19	15 33	14 31	13 36	12 6	10 53	7 15	5 27	4 21	19
20	16 22	15 17	14 19	12 44	11 28	7 38	5 44	4 35	20

(Véase § 119, pág. 489)

XXVII. Longitud *s* de la cuerda para un ángulo periférico α

$$s = 2r \text{ sen } \alpha$$

<i>r</i>	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 2^\circ$	$\alpha = 1^\circ$	$\alpha = 30'$	$\alpha = 20'$	$\alpha = 15'$	$\alpha = 10'$	<i>r</i>
100	17,431	6,980						100
120	20,917	8,376						120
140	24,404	9,772						140
150	26,147	10,470						150
160	27,890	11,168						160
180	31,376	12,564						180
200	34,862	13,960						200
220	38,349	15,356						220
240	41,835	16,752						240
250	43,578	17,450						250
260	45,321	18,148	9,075					260
280	48,807	19,544	9,773					280
300	52,293	20,940	10,471					300
320	55,780	22,336	11,170					320
340	59,266	23,732	11,868					340
350		24,430	12,217					350
360		25,128	12,566					360
380		26,524	13,264					380
400		27,920	13,962					400
420		29,316	14,660					420
440		30,712	15,358	7,679				440
450		31,410	15,707	7,854				450
460		32,108	16,056	8,028				460
480		33,504	16,754	8,377				480
500		34,900	17,452	8,727				500
520		36,295	18,150	9,076				520
540		37,691	18,849	9,425				540
550		38,389	19,198	9,599				550
560		39,087	19,547	9,774				560
580		40,483	20,245	10,123				580
600			20,943	10,472	6,981			600
650			22,688	11,344	7,563			650
700			24,433	12,217	8,145			700
750			26,179	13,090	8,727			750
800			27,924	13,962	9,308			800
850			29,669	14,835	9,890	7,418		850
900			31,414	15,708	10,472	7,854		900
950			33,160	16,580	11,054	8,290		950
1000			34,905	17,453	11,635	8,727		1000
1200			41,886	20,944	13,963	10,472		1200
1400				24,434	16,290	12,217	8,145	1400
1500				26,180	17,453	13,090	8,727	1500
1600				27,925	18,617	13,963	9,308	1600
1800				31,416	20,944	15,708	10,472	1800
2000				34,906	23,271	17,453	11,636	2000
2500				43,633	29,089	21,817	14,544	2500
3000				52,359	34,906	26,180	17,453	3000
3500				61,086	40,724	30,543	20,362	3500
4000				69,812	46,542	34,906	23,271	4000
5000				87,265	58,177	43,633	29,089	5000

(Véase § 119, pág. 490)

XXVIII. Curvas de paso o de enlace

Ordenadas $y = \frac{x^3}{6q}$						Radios de curvatura $R = \frac{q}{x}$					
Abscisa <i>x</i>	<i>q</i> =					Abscisa <i>x</i>	<i>q</i> =				
	4000	12000	18000	25000	40000		4000	12000	18000	25000	40000
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0	∞	∞	∞	∞	∞
5	0,005	0,002	0,001	0,001	0,001	5	800	2400	3600	5000	8000
10	0,042	0,014	0,009	0,007	0,004	10	400	1200	1800	2500	4000
15	0,141	0,047	0,031	0,023	0,014	15	267	800	1200	1667	2667
20	0,333	0,111	0,074	0,053	0,033	20	200	600	900	1250	2000
25	0,651	0,217	0,145	0,104	0,065	25	160	480	720	1000	1600
30	1,125	0,375	0,250	0,180	0,112	30	133	400	600	833	1333
35		0,595	0,397	0,286	0,179	35		343	514	714	1143
40		0,889	0,593	0,427	0,267	40		300	450	625	1000
45		1,266	0,844	0,607	0,380	45		267	400	556	889
50		1,736	1,157	0,833	0,521	50		240	360	500	800
55		2,311	1,541	1,109	0,693	55		218	327	455	727
60		3,000	2,000	1,440	0,900	60		200	300	417	667
65				1,831	1,144	65				385	615
70				2,287	1,429	70				357	571
Longitud de la curva de enlace o abscisa de su extremo final $l = 2a = \frac{q}{r}$						Traslación de la tangente o acortamiento del radio de la circunferencia $v = \frac{q^2}{24r^3}$					
Radio de la circunferenc.	<i>q</i> =					Radio de la circunferenc.	<i>q</i> =				
m	4000	12000	18000	25000	40000	m	4000	12000	18000	25000	40000
150	26,67	80,00				150	0,198	1,778			
200	20,00	60,00				200	0,083	0,750			
250	16,00	48,00				250	0,043	0,384			
300	13,33	40,00	60,00			300	0,025	0,222	0,500		
320	12,50	37,50	56,25			320	0,020	0,183	0,412		
340	11,76	35,29	52,94			340	0,017	0,153	0,343		
360	11,11	33,33	40,00			360	0,014	0,129	0,289		
380	10,53	31,58	47,38			380	0,012	0,109	0,246		
400	10,00	30,00	45,00	62,50	100,00	400	0,010	0,094	0,211	0,407	1,042
420		28,57	42,86	59,52	95,24	420		0,081	0,182	0,351	0,900
440		27,27	40,91	56,32	90,91	440		0,070	0,158	0,306	0,783
460		26,09	39,13	54,35	86,96	460		0,062	0,139	0,268	0,685
480		25,00	37,50	52,08	83,33	480		0,054	0,122	0,235	0,603
500		24,00	36,00	50,00	80,00	500		0,048	0,108	0,208	0,533
550		21,82	32,73	45,45	72,73	550		0,036	0,081	0,157	0,401
600		20,00	30,00	41,67	66,67	600		0,028	0,063	0,121	0,309
650		18,46	27,69	38,46	61,54	650		0,022	0,049	0,095	0,243
700		17,14	25,71	35,71	57,14	700		0,017	0,039	0,076	0,194
750		16,00	24,00	33,33	53,33	750		0,014	0,032	0,062	0,158
800		15,00	22,50	31,25	50,00	800		0,012	0,026	0,051	0,130
850		14,12	21,18	29,41	47,06	850		0,010	0,022	0,042	0,109
900		13,33	20,00	27,78	44,44	900		0,008	0,019	0,036	0,091
1000		12,00	18,00	25,00	40,00	1000		0,006	0,014	0,026	0,067

(Véase § 124, pág. 509)

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE

	<u>Págs</u>
§ 1. Introducción	1
CAPÍTULO I	
Nivelación geométrica o por alturas	
§ 2. Método operatorio	3
§ 3. Itinerarios de nivelación: Complemento aritmético.	5
§ 4. Perfiles longitudinales	7
§ 5. Perfiles transversales	9
§ 6. Nivelación de superficies	11
§ 7. Niveles: Plataformas nivelantes y trípodes. Breve reseña histórica.	12
§ 8. Comprobación y corrección de los niveles: Nivel sencillo. Aparato con anteojo reversible y nivel caballero. Anteojo reversible y nivel fijo al anteojo. Anteojo y nivel reversibles. Anteojo reversible y nivel sobre la horquilla del anteojo	22
§ 9. Equialtímetros para nivelaciones de precisión: Nivel de Heckmann. Nivel cruzado. Convergencia del eje del nivel y del eje de colimación. Variabilidad del eje de colimación, o eje visual. Curvatura del anteojo.	29
§ 10. Miras de nivelación: Miras reversibles. Miras para la lectura directa de alturas. Miras para nivelaciones de precisión. Miras nivelantes para trabajos en minas. Mira parlante del Instituto Geográfico y Catastral de España. Colocación de las miras. Precisión y comprobación de las miras	38
§ 11. Niveles de mano y clisímetros	49
§ 12. Señalamiento de los puntos de nivelación: Punto cero. Puntos normales de referencia.	52
§ 13. Métodos especiales de nivelación: Nivelación con dobles puntos de mira. Miras reversibles. Nivelación con visual inclinada. Tornillo de Stampfer	57
§ 14. Nivelaciones de precisión: Nivelación con burbuja descentrada. Lectura con los tres hilos. Lectura sobre el punto medio de un trazo de la mira. Lectura sobre una división lineal de la mira. Nivelación con el nivel Zeiss. Nivel Vogler con anteojo ascendente	61
§ 15. Leyes de los errores de nivelación: Doble nivelación. Error de cierre en una poligonal. Compensación lineal	73
§ 16. Errores sistemáticos en la nivelación: Evaluación de los errores sistemáticos por el cálculo del error medio de la nivelación	77
§ 17. Errores propios del equialtímetro: Error del nivel propiamente dicho. Error de lectura de mira. Posición de los hilos del retículo sobre la mira	80
§ 18. Efecto de conjunto de todos los errores, y precisión de la nivelación en general: Precisión de los métodos de nivelación. Rapidez de la nivelación	83
§ 19. Compensación de una red de nivelación: Tabla de cierres de poligonales. Tabla de compensaciones. Compensación de las nivelaciones de montaña. Compensación aproximada	86
§ 20. Nivelación de Alemania: Nivelación a través de corrientes de agua	91
§ 21. Nivelación de España	96
§ 22. Nivelación de las vías férreas y de los planos de población	99
§ 23. Efecto de la forma elipsoidal de la Tierra, sobre los resultados de las nivelaciones: Cotas ortométrica y dinámica	99

CAPÍTULO II		Págs.
Nivelación trigonométrica o por pendientes		
§ 24.	Medidas de ángulos cenitales	104
§ 25.	Cálculo de los ángulos de pendiente; Corrección de índice o de cero. Eliminación del error o corrección de índice o cero	106
§ 26.	Medición de ángulos de pendiente por lecturas de nivel; Curvatura del anteojo y error de los ejes del teodolito	109
§ 27.	Teoría de la nivelación por pendientes o trigonométrica; Curvatura terrestre. Refracción de la visual	112
§ 28.	Ejemplo numérico del cálculo de alturas; Compensación de las alturas trigonométricas	116
§ 29.	Medición de la altura de las torres; Alturas aproximadas	120
§ 30.	Ampliación de fórmulas anteriores; Determinación del radio terrestre. Otras fórmulas de nivelación más completas	122
§ 31.	Ejemplo	125
§ 32.	Nivelación trigonométrica en el mar	129
§ 33.	Nivelación trigonométrica en España	132
§ 34.	Compensación de una red alimétrica por medio de observaciones de condición (con coeficientes correlativos)	134
§ 35.	Compensación de una red alimétrica por medio de observaciones de enlace	137
§ 36.	Teoría de la refracción de la luz	141
§ 37.	Resultados teóricos y experimentales de la refracción	145
§ 38.	Desarrollo en serie del coeficiente de refracción.	148
§ 39.	Variación periódica diurna de la refracción; Distinto efecto de la refracción según la distancia	151
§ 40.	Bibliografía y literatura sobre nivelaciones trigonométricas y sobre refracción	153

CAPÍTULO III

Nivelación barométrica

§ 41.	Fundamentos de la teoría.	156
§ 42.	Barómetros de mercurio: El barómetro de cubeta, como barómetro fijo. El barómetro abierto, de sifón, como barómetro portátil. Barómetro portátil de sifón-cubeta, sistema Wild-Fuess. Barómetro de cubeta fija, de R. Fuess. Barómetro portátil de Fortin. El barómetro cerrado de sifón, de R. Fuess, como barómetro portátil. Barómetro portátil de Darmer, con sifón de goma	159
§ 43.	Correcciones del barómetro de mercurio: Corrección de temperatura. Corrección de nivel en la cubeta. Corrección de capilaridad. Burbuja de aire en la rama superior del barómetro. Precisión de los datos obtenidos con los barómetros de mercurio.	165
§ 44.	Corrección de gravedad; Reducción de la presión a la gravedad normal.	171
§ 45.	Termómetros de mercurio en general, y termómetros hipsométricos	172
§ 46.	Barómetros metálicos, aneroides u holostéricos: Aneroides de Vidi, construídos por Naudet y por Bohne. Aneroide de precisión de Goldschmid	176
§ 47.	Fórmulas para las reducciones en los barómetros aneroides	180
§ 48.	Corrección de temperatura en los aneroides	182
§ 49.	Corrección de escala en los aneroides; Comparación en un mismo sitio. Comparación durante ascensiones a montañas. Comparación con la máquina neumática. Aparato comparador de R. Fuess.	185
§ 50.	Variabilidad de la corrección de presión; Elasticidad remanente.	191
§ 51.	Temperatura y humedad del aire; Termómetro-honda	193
§ 52.	Fórmula barométrica completa; Otras fórmulas barométricas.	194

§ 53.	Tablas barométricas; Tablas y fórmulas barométricas para regiones determinadas. Altitudes sobre el mar. Desniveles barométricos	198
§ 54.	Práctica de la nivelación barométrica; observación y cálculo. Interpolación barométrica. Nivelación con barómetro fijo. Nivelación con cierres en puntos fijos. Corrección isobárica. Medios auxiliares de cálculo, gráficos y mecánicos. Reducción al horizonte de distancias inclinadas, por diferencia entre lecturas del aneroide	205
§ 55.	Ley de los errores y precisión de la nivelación barométrica	212
§ 56.	Nivelación barométrica sin observaciones correspondientes; Determinación directa de altitudes (alturas sobre el mar).	215
§ 57.	Error periódico de las alturas barométricas; Teorías sobre los errores periódicos de la nivelación barométrica.	218
§ 58.	Bibliografía sobre nivelación barométrica.	221

CAPÍTULO IV

Taquimetría

§ 59.	Aparatos diastimométricos con miras (estadímetros): Anteojo simple y anteojo de Ramsden. Anteojo de Huygens. Anteojo de Porro. Anteojo con lente móvil de enfoque. Estadímetro de Heckmann-Breithaupt.	224
§ 60.	Determinación de las constantes diastimométricas; Determinación de la constante aditiva c . Determinación de la constante de multiplicación (coeficiente diastimométrico) k . Determinación simultánea de k y c	233
§ 61.	Cálculo de $c + k l$; Constante aditiva c . Coeficiente diastimométrico o constante de multiplicación k	238
§ 62.	Visuales inclinadas; Fórmulas exactas. Error por falta de verticalidad en la mira	241
§ 63.	Medios auxiliares de cálculo para $\cos^2 \alpha$ y para $1/2 \sin 2\alpha$; Diagramas. Regla de cálculo taquimétrica. Tablas numéricas.	244
§ 64.	Precisión de las mediciones estadimétricas; Influencia de la constante k . Movimiento del aire (aire caliginoso). Influencia de la refracción atmosférica	251
§ 65.	Teodolito taquimétrico o taquímetro; Taquímetro pequeño de Hildebrand. Taquímetro de Otto Fennel. Teodolito-taquímetro de F. W. Breithaupt. Taquímetro-cleps de Porro. Taquímetro nivelante de Otto Fennel. Taquímetro nivelante de Zeiss	256
§ 66.	Miras para taquímetros	261
§ 67.	Taquímetros reductores y autorreductores; Taquímetro de proyección o de corredora. Taquímetro con tornillo de elevación (inclinométrico). Tornillo de inclinación y círculo cenital. Taquímetro con ocular micrométrico. Método logarítmico-taquimétrico de Tichy. Tornillo de Stampfer. Taquímetros de contacto o de tope. Taquímetro de contacto de Doergens. Taquímetro de tope, de Kern. Taquímetro de Szepessy. Otros taquímetros de tornillo micrométrico	263
§ 68.	Taquímetro de Hammer-Fennel; Taquímetro-teodolito autorreductor. Datos históricos	276
§ 69.	Aguja y declinación magnéticas	283
§ 70.	Brújulas: Brújula de bolsillo. Brújula con alidada de pínulas. Brújula de anteojo. Declinatoria	286
§ 71.	Itinerarios de brújula: Rumbos y acimutes. Itinerarios Itinerarios de taquímetro. Errores en los itinerarios de brújula.	291
§ 72.	Transportadores; Transportador sin centro, de Jordan	295
§ 73.	Itinerarios medidos con cinta métrica o cadena y observados con brújula de alidada y eclímetro de mano.	297
§ 74.	Levantamiento taquimétrico; Puntos permanentes. Puntos secundarios o de relleno. Densidad de una red taquimétrica y velocidad del levantamiento. Nivelación sobre planimetrías	300

	Págs
§ 75. Curvas de nivel: Medios auxiliares para la construcción de las curvas de nivel. Diferentes formas de curvas de nivel. Precisión de las curvas de nivel	307
§ 76. Plancheta: Verificaciones y correcciones de la plancheta. Orientación del tablero en el campo.	312
§ 77. Levantamiento con plancheta: Determinación de las estaciones. Trabajo de campo. Reseña histórica sobre la plancheta	315
§ 78. Telémetros de reflexión: Telémetros de Adie-Christie y de Barr-Stroud	319
§ 79. Otros telémetros sin mira: Telemetría con base corta. Telemetría por ángulos de depresión. Telemetría por enfoque del ocular en los anteojos. Telémetro este-reoscópico de Zeiss	324
§ 80. Levantamientos expeditivos	330
§ 81. Bibliografía sobre Taquimetría.	333

CAPÍTULO V

Fotogrametría

§ 82. Objeto principal de la fotogrametría: Reseña histórica de la fotogrametría hasta 1900.	336
§ 83. Fototeodolito, fototaquímetro o fotogrametro: Verificación y corrección de los foto-teodolitos.	338
§ 84. Orientación interior del fototeodolito: Fototeodolito con cámara basculante. Foto-teodolito con placa vertical. Determinación de la orientación. Determinación de la orientación interior por compensación	345
§ 85. Medición de las fotografías: Coordinatómetro de Zeiss. Determinación de ángulos acimutales y de altura. Diagramas para la determinación de los ángulos acimuta-les y verticales. Teodolito comparador. Reseña histórica sobre los teodolitos comparadores	353
§ 86. Levantamiento fotogramétrico: Puntos límites. Levantamiento fotogramétrico del oasis Dachel, del desierto de Libia	358
§ 87. Levantamientos expeditivos por fotogrametría: Determinación de la orientación exterior con dos fotografías. Levantamiento con más de dos estaciones. Proyec-ción gnomónica. Determinación de la orientación exterior en terrenos llanos	364
§ 88. Estereofotogrametría: Teoría de la estereofotogrametría normal. El estereomicro-metro. Estereocomparador de Pulfrich, construido por Zeiss. Estereocomparador de Hugershoff. Longitud de la base. Construcción de los planos	368
§ 89. Levantamientos estereofotogramétricos en general: Ejes horizontales y paralelos, oblicuos a la base. Ejes horizontales convergentes o divergentes. Ejes parale-los, oblicuos e inclinados. Ejes de direcciones cualesquiera. Cálculo de coor-denadas	375
§ 90. El estereoautógrafo: Fotocartógrafo de Kern.	382
§ 91. Levantamientos estereofotogramétricos: Reseña histórica de los estereoautógrafos	387
§ 92. Fotogrametría aérea: Cámara de mano, de Zeiss. Dispositivo de suspensión para la cámara de Zeiss. Cámara de Wild. Determinación de la orientación interior de la cámara	391
§ 93. Cámaras cinematográficas simples y múltiples: El antejo buscador. Cámara cinematográfica doble, de Zeiss. Cámara cinematográfica cuádruple, de Zeiss	395
§ 94. Levantamientos aéreos.	399
§ 95. Restitución de las fotografías aéreas	401
§ 96. Teoría de la restitución óptica: Las constantes del restituidor.	403
§ 97. El restituidor óptico: El restituidor de Zeiss. Restituidores de la Compañía Foto-gramétrica, de Munich, y de la Compañía Aerotopográfica Zeiss, de Jena. Apli-caciones de la restitución	408
§ 98. Cámara panorámica: El restituidor panorámico.	412
§ 99. Triangulación radial: Triangulación con el nadir como punto radial	413
§ 100. Triangulación sobre el punto focal: El triangulador radial de Zeiss	417

	Págs.
191. Práctica de la triangulación radial: Transportador de la Compañía Fotogramétrica, de Munich, para los levantamientos panorámicos. Aplicación de los acimutes astronómicos a las triangulaciones radiales	421
§ 102. El problema de la trisección en el espacio: Cálculo del valor aproximado de la orientación exterior	424
§ 103. Solución general del problema de la trisección en el espacio	429
§ 104. Orientación recíproca de dos fotografías: Orientación absoluta de la vista en relieve. Triangulación aérea	431
§ 105. Proyectores dobles: Aparato de doble proyección, de Gasser. Fotocartógrafo de Nistri. Aparato de doble proyección, de Gallus.	439
§ 106. El autocartógrafo de Hugershoff-Heyde	441
§ 107. El estereotopógrafo de Poivilliers	446
§ 108. El estereoplanógrafo de Zeiss: Parte óptica del estereoplanógrafo. El dispositivo trazador.	448
§ 109. Otros aparatos de doble proyección: El Aerosimplex de Hugerhoff. El triangu-lador de Boykow. El autorreductor de Santoni	453
§ 110. El aerocartógrafo de Hugerhoff	455
§ 111. El autógrafo de Wild	458
§ 112. Reductores estereoscópicos con índice real flotante	462
§ 113. Orientación absoluta de las vistas: Orientación de la vista en relieve. Precisión de los mapas aerofotogramétricos.	464

CAPÍTULO VI

Proyecto, trazado y replanteo de caminos, vías férreas, etc.

§ 114. Proyecto general: Ejemplo de proyecto de una vía férrea	470
§ 115. Trazado o replanteo de alineaciones rectas: Alineación desde los puntos extremos. Alineación desde un punto intermedio. Alineación por prolongaciones sucesivas. Precisión de las prolongaciones sucesivas. Compensación de un error de cierre.	476
§ 116. Replanteo de curvas circulares conocidas las dos tangentes y el radio: Ejemplo numérico. Tangente secundaria en el punto medio de la curva. Tangente secun-daria asimétrica. Cuerdas principales y secundarias. Ángulo central obtuso	479
§ 117. Caso en que es inaccesible el punto de intersección de las dos alineaciones: Empleo de un punto auxiliar	483
§ 118. Trazado de curvas por abscisas y ordenadas: Trazado de arcos circulares con equi-diferencias de abscisas. Trazado de curvas circulares, con arcos de igual longi-tud. Comparación entre los métodos de equidiferencias de abscisas, y de igualdad de arcos. Trazado por coordenadas, con la cuerda como eje de abscisas	486
§ 119. Trazado de curvas por ángulos inscritos: Trazado por ángulos tangenciales desde un punto fijo. Trazado por ángulos inscritos, con instrumento portátil	489
§ 120. Métodos de aproximación: Por polígonos inscritos o circunscritos. Por tangentes sucesivas. Por distancias de cada punto a la cuerda anterior. Por flechas y cuartos de flecha	493
§ 121. Otros métodos de trazado de curvas circulares: Trazado de las tangentes. Elección de método en la determinación de puntos y tangentes.	496
§ 122. Arcos de enlace compuestos: Trazado de curvas en S (erpentinas).	499
§ 123. Curva de triple arco en el túnel del San Gotardo	503
§ 124. Curvas de enlace progresivo: Caso general	506
§ 125. Curvas de enlace progresivo, de peralte uniforme: Las gráficas de curvatura y de forma, de un arco de parábola cúbica. Curvas de enlace progresivo con peralte uniforme. Trazado de las curvas de enlace progresivo. Ejemplo.	510
§ 126. Trazado de túneles: Replanteo de arcos de círculo. Túnel del Monte Cenís. Túnel del San Gotardo. Túnel helicoidal. Túnel del Simplón. Túnel de Lötschberg. Otros replanteos particulares: túnel de Albula	518

CAPÍTULO VII
Trabajos topográficos en España

Págs.

§ 127. Trabajos topográficos del Instituto Geográfico y Catastral. Mapas de España. Planos de población. Nivelación de precisión de España. Catastro topográfico parcelario	526
--	-----

APÉNDICE

Tablas

Tablas auxiliares para el cálculo del error medio de una nivelación	533
Nivelación trigonométrica: corrección de horizonte en función de la distancia	534
Nivelación barométrica: corrección de horizonte en función de $\log a$	535
Nivelación barométrica: curvatura de la Tierra y refracción media	536
Conversión de escalas barométricas y termométricas	537
Reducción del barómetro a 0°.	538 a 540
Depresión capilar en el tubo barométrico	541
Reducción a la gravedad normal	542 y 543
Tensión del vapor de agua saturado.	544 y 545
Determinación aproximada de la tensión del vapor	546
Humedad del aire	547
Dilatación del aire por el calor	548
Alturas barométricas sobre el mar para $t = 15^\circ$	549
Desniveles barométricos.	550 y 551
Itinerarios medidos con cinta y eclímetro.	552
Reducción de pasos a metros, teniendo en cuenta las diferencias barométricas	553
Tablas taquimétricas	554 a 557
Coordenadas rectangulares para el replanteo de arcos de circunferencia	558 a 560
Ángulo periférico para cuerdas de longitud $s = 20$	561 a 563
Longitud s de la cuerda para un ángulo periférico α	564
Curvas de paso o de enlace.	565

Otros títulos de interés:

Tablas de cambios de rasante

W. Röttig

308 páginas, de 15 x 11 cm (15 de texto y 293 de tablas), encuadernado en plástico.

Tablas para la determinación de los perfiles de los arcos de enlace de las pendientes y contrapendientes de las carreteras, para los radios más usuales.

Las ordenadas aparecen de cm en cm y las abscisas vienen con exactitud de 1 dm, para radios de 5.000 a 20.000. Unas tablas auxiliares permiten calcular fácilmente las coordenadas para cualquier otro radio no comprendido en las tablas.

Índice. Instrucciones para el manejo de las tablas. Tablas R. Tablas de y' . Tablas del coeficiente R. Modelo de impreso.

Tablas para replanteo de arcos circulares

W. Weber

248 páginas, de 15 x 11 cm (19 de texto y 229 de tablas), encuadernado en plástico.

Tablas para el replanteo con coordenadas rectangulares y por el método del ángulo y la cuerda.

Con el método del ángulo y la cuerda, con la ayuda de un teodolito, se tienen considerables ventajas en relación al método clásico de las tangentes.

Los valores de estas tablas son tan profusos, que un operador práctico puede hacer el replanteo en campo, sin efectuar cálculo alguno.

Índice. Generalidades sobre el método del ángulo y la cuerda. Replanteo por el método del ángulo y la cuerda. Replanteo por coordenadas rectangulares. Tablas para el método del ángulo y la cuerda. Tabla para el método de coordenadas rectangulares.

La regla de cálculo moderna

Richard Stender-Waldemar Schuchardt

Ingenieros Diplomados

128 páginas, de 23 x 16 cm, con 108 figuras

Libro que estudia los fundamentos en que se basa el manejo de la regla de cálculo con el fin de aprovechar al máximo sus posibilidades. Numerosos ejemplos seleccionados de los distintos campos de la técnica, con sus soluciones, proporcionan la seguridad de manejo y la práctica necesarias. Se describen los tipos de reglas de cálculo más usuales: Aristo, Darmstadt, Castell, Nestler...

Extracto del Índice. Bases preliminares. Fundamentos matemáticos del cálculo con regla. Métodos de cálculo. Problemas de la práctica. Reglas de cálculo con otras escalas. Métodos de cálculo con otras escalas. Los problemas de la ciencia. Precisión.

Tratado de topografía

C. Pasini

6.ª edición, revisada y ampliada. 656 págs., de 22 x 15 cm, con 318 ilustraciones.

Diccionario de unidades y tablas de conversión

V. Costa y O. Francés

176 págs., de 16,5 x 13 cm. 3.ª edición.

Tablas de logaritmos de los números y de las líneas trigonométricas, con seis decimales

C. Bremiker

2.ª edición. 602 págs., de 21 x 15 cm.

Manual de replanteo de curvas con y sin arcos de enlace, para ferrocarriles, carreteras y canales

O. Sarrazin

6.ª edición. 308 págs., de 16 x 11 cm, con 257 tablas y 26 grabados.

Tablas taquimétricas sexagesimales y centesimales con aplicación a los levantamientos topográficos, y al trazado de curvas en el terreno

H. Gorría, Ing. Agrónomo

8.ª edición. 122 págs., de 11,5 x 17 cm, con 17 grabados.

Tablas para la excavación de zanjas

J. Martínez Requena

246 págs., de 24 x 14 cm, con 238 tablas.

Geometría elemental

E. Fontseré

3.ª edición. 76 págs., de 20 x 14 cm, con 175 grabados.

Guía práctica de topografía usual

E. Liger, Ing.

7.ª edición. 146 páginas, de 18,5 x 12,5 cm, con 56 grabados.

Tablas de logaritmos trigonométricos y de constantes usuales

O. Schlömilch

13.ª edición. 212 págs., de 18,5 x 12,5 cm.

Tratado de matemáticas para ingenieros y técnicos

R. Doerfling, Ing.

2.ª edición. 668 págs., de 19 x 13 cm, con 306 figuras.

Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras y al corte de piedras y madera

C. Ranelletti, Ing.

6.ª edición. 410 págs., de 19 x 13 cm, con 273 ilustraciones.

Tablas de funciones matemáticas

A. Vogel

184 págs., de 24 x 17 cm.

Manual del ingeniero

Academia Hütte de Berlín

3.ª edición, totalmente renovada

Esta obra ha sido reestructurada por completo en la presente edición y todo su texto redactado de nuevo. Como en ediciones anteriores, la obra es fruto de la colaboración de las más destacadas personalidades científicas y técnicas.

El manual se compone de los siguientes tomos:

Tomo I. Fundamentos teóricos

1564 páginas, de 21 x 16 cm, con 986 figuras, 842 tablas y centenares de esquemas.

Extracto del índice. 1: Matemáticas. 2: Física industrial. 3: Terminología. 4: Oscilaciones. 5: Mecánica. 6: Resistencia de materiales. 7: Conocimiento de materiales. 8: Metrología. Apéndice: División y clases de moneda. Pesas y medidas de diferentes países. Tablas de conversión de medidas.

Tomo II. Construcción de máquinas

1268 páginas, de 21 x 16 cm, con 2024 figuras, 400 tablas y centenares de esquemas.

Extracto del índice. 1: Elementos de máquinas. 2: Mecanismos. 3: Dinámica de las máquinas. 4: Tuberías y sus cierres. 5: Explotación de la energía. 6: Máquinas de émbolo. 7: Máquinas de energía cinética. 8: Máquinas-herramienta. 9: Regulación.

Tomo III. Construcción

1600 páginas, de 21 x 16 cm, con 2344 grabados y numerosas tablas.

Extracto del índice. 1: Estática de las construcciones. 2: Fundamentos de la construcción. 3: Construcción de puentes. 4: Edificación. 5: Instalación de fábricas. 6: Calefacción y ventilación. 7: Construcción de caminos. 8: Urbanología. 9: Máquinas y equipos para la reconstrucción. 10: Ciementaciones, obras de tierra y construcción de túneles. 11: Obras hidráulicas. 12: Saltos de agua. 13: Abastecimiento de aguas y saneamiento de poblaciones. 14: Hormigón pretensado y estructuras mixtas de acero y hormigón. Apéndice: Normas y disposiciones reglamentarias.

Tomo IV. Tecnologías de fabricación y transporte

1900 páginas, de 20 x 13 cm, con 1900 grabados y numerosas tablas.

Con un formato menor, este cuarto tomo contiene los temas de la anterior adición que no han sido tratados en los tres nuevos primeros tomos. Los capítulos 1 a 14, proceden del antiguo tomo IV, y los capítulos 15 y 16, de los antiguos tomos III y II respectivamente.

Extracto de índice. 1: Medios de transporte. 2: Laboreo de minas. 3: Tecnología agrícola. 4: Instalaciones y máquinas auxiliares de las industrias transformadoras. 5: Industrias de la alimentación y afines. 6: Curtido y elaboración de pieles. 7: Tecnología textil y fabricación del papel. 8: Cerámica y vidrio. 9: Fabricación de gases pobres y de alumbrado. 10: Hornos industriales. 11: Artes gráficas y máquinas para oficinas. 12: Mecánica de precisión. 13: Fotografía, cinematografía y radiotecnía. 14: Extinción de incendios. 15: Ferrocarriles. 16: Elevación, transporte y almacenamiento de cargas sueltas y a granel.

PROYECTO Y CONSTRUCCION

Arte de proyectar en arquitectura, por E. Neufert, 12.ª edición ampliada, 6.ª tirada, 464 páginas, de 31 × 23 cm, con 5.000 ilustraciones.

Industrialización de las construcciones, por E. Neufert, 2.ª edición, 330 páginas, de 31 × 23 cm, con 1.144 ilustraciones.

Tratado de construcción. Elementos, estructuras y reglas fundamentales de la construcción, por H. Schmitt, 5.ª edición, considerablemente aumentada y puesta al día, 3.ª tirada, 660 páginas, de 29 × 22 cm, con 3.800 ilustraciones y 100 tablas numéricas.

Tecnologías de la arquitectura, por A. Petrucci, 2.ª tirada, 538 páginas, de 30 × 23 cm, con 1.078 ilustraciones.

Principios y sistema en las grandes construcciones, por R. C. Smith, 350 páginas, de 28 × 22 centímetros, con 630 ilustraciones.

Tratado de edificación, por Frick, Knöll y Neumann, 542 páginas, de 25 × 16 cm, con 828 ilustraciones.

Métodos de diseño, por J. Ch. Jones, 370 páginas, de 24 × 17 cm, con 98 ilustraciones, tablas y esquemas.

El dibujo de los arquitectos, por H. Jacoby, 3.ª tirada, 144 páginas, de 21,5 × 28 cm, con 125 ilustraciones.

Dibujos de arquitectura: 1968-1976, por H. Jacoby, 112 páginas, de 28 × 22 cm, con 97 ilustraciones, de ellas 3 en color.

Perspectiva para arquitectos, por G. Schaarwächter, 4.ª tirada, 120 páginas, de 21 × 30 cm, con 420 ilustraciones.

El auxiliar del dibujo arquitectónico, por R. Schneider y H. Ossenberg, 5.ª tirada, 180 páginas, 172 plantillas a escalas de 1:10 a 1:500, de 30 × 21 cm, en estuche de tela.

Dibujo técnico, por T. E. French y C. L. Svensen, 3.ª tirada, 552 páginas, de 24 × 16 cm, con 1.053 ilustraciones y 536 problemas.

Detalles gráficos para arquitectos, por C. Kemmerich, 3.ª tirada, 174 páginas, de 30 × 21 cm, con 171 ejemplos de arquitectos famosos y 600 ilustraciones.

El detalle en la edificación. Diseño para las edificaciones prácticas, por H. Banz, 198 páginas, de 30 × 21 cm, con 234 ilustraciones.

Prácticas de dibujo arquitectónico, por F. García-Ramos, 198 páginas, de 21 × 30 cm, con 117 ilustraciones.

Manual de dibujo arquitectónico, por F. Ching, 2.ª tirada, 128 páginas, de 21 × 30 cm, con 281 ilustraciones.

Dibujo geométrico en construcción, por F. Hilton, unas 172 páginas, de 21 × 30 cm, con 516 ilustraciones.

Hormigón armado, por P. Jiménez Montoya, 7.ª edición, totalmente reformada, 2.ª tirada, 2 volúmenes, 1.115 páginas, de 28,5 × 21 cm, con 520 ábacos y tablas de cálculo.

Tratado del hormigón armado, por G. Franz, dos volúmenes de 25 × 16 cm.

I. Bases teóricas y elementos de la construcción, 420 páginas, con 359 ilustraciones.

II. Estructuras, 432 páginas, con 315 ilustraciones.

Prefabricado de hormigón, por F. Vilagut, dos volúmenes de 27 × 19 cm, con XII + 1.404 páginas, con 1.086 ilustraciones.

Hormigones ligeros armados, por H. Weigler y S. Karl, 260 páginas, de 24 × 17 cm, con 200 ilustraciones.

Preparación y empleo del hormigón, por S. Mängel, 176 páginas, de 24 × 17 cm, con 125 ilustraciones y 31 tablas.

Edificios de hormigón, por P. G. Wieschemann y K. Gatz, 224 páginas, de 30 × 23 cm, con 420 fotografías y cientos de dibujos, con un interesante encarte que presenta, mediante fotos y dibujos, el desarrollo de la construcción en hormigón desde 1750 hasta la fecha.

Elementos constructivos singulares de hormigón armado, por J. R. Robinson, 246 páginas, de 24 × 17 cm, con 215 ilustraciones.

Cálculos de construcción, por M. Company, 8.ª tirada, 752 páginas, de 27 × 20 cm, con 593 ilustraciones y 164 tablas numéricas.

Cálculo de estructuras por el método de Cross, por C. Prenzl, 3.ª edición ampliada, 2.ª tirada, 216 páginas, de 21 × 15 cm, con 134 grabados.

Vigas continuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elástico, por J. Hahn, 2.ª edición ampliada, 300 páginas, de 25 × 18 cm, con 192 ilustraciones y 94 tablas, más un apéndice de 70 tablas.

Vigas flotantes en medio elástico, por K. Wölfer, 170 páginas, de 21 × 15 cm, con 37 ilustraciones y 192 tablas.

Tablas para el cálculo de vigas, por G. Baum, 120 páginas, de 27 × 19 cm, con 59 ilustraciones y numerosas tablas.

Tablas para el cálculo de placas y vigas-pared, por R. Bares, 2.ª tirada, 538 páginas, de 25 × 18 cm, con 48 ilustraciones y 199 tablas.

Vigas-pared. Gráficos para su cálculo, por W. Förster, 90 páginas, de 24 × 17 cm, con 50 tablas.

El atlas de la construcción metálica, por F. Hart, W. Henn y H. Sontag, 370 págs., de 29,5 × 22,5 cm, con 1.630 ilustraciones.

Estructuras espaciales de acero, por Z. S. Makowski, 2.ª edición, 208 páginas, de 26 × 22 cm, con 224 ilustraciones.

Las mallas espaciales en arquitectura, por J. Margarit y C. Buxadé, 230 páginas, de 29 × 21 centímetros, con 284 ilustraciones.

Diccionario técnico ilustrado de Edificación y Obras Públicas, por M. Barbier, 2.ª tirada, 180 páginas, de 17 × 12 cm, con 540 ilustraciones y unas 3.100 voces.

Diccionario manual ilustrado de arquitectura con los términos más comunes empleados en la construcción, por D. Ware y B. Beatty, 6.ª tirada, 204 páginas, de 17 × 12 cm, con 316 ilustraciones.

Los sistemas de planificación CPM y PERT aplicados a la construcción, por G. Wagner, 2.ª tirada, 152 páginas, de 21 × 15 centímetros, con 50 ilustraciones, 15 tablas y 5 apéndices.

Planificación gráfica de obras. Gantt - CPM - PERT - Roy..., por J. Pomares Martínez, 144 páginas, de 30 × 21 cm, con 273 ilustraciones, 3 tablas y 93 cuadros.

Construcción y forma en arquitectura, por F. Hess, 448 páginas, de 30 × 22 cm, con 1.440 ilustraciones.

Construcción laminar. Estática de las láminas, cáscaras y plegaduras. Estructuración de los edificios formados por superficies resistentes, por F. Angerer, 3.ª edición, 84 páginas, de 26 × 21 cm, con 195 ilustraciones.

Estructuras resistentes y elementos de fachada, por M. Fenger, 248 páginas, de 25,5 × 25 centímetros, con 265 ilustraciones y 104 planos.

Cómo se proyecta una vivienda, por J. L. Moia, 5.ª tirada, 150 páginas de 30 × 21 cm, con 185 ilustraciones.

Cómo se construye una vivienda, por J. L. Moia, 110 páginas, de 30 × 21 cm, con 130 ilustraciones.

Nuestra casa. Superencias para la construcción de su hogar, por B. Monteiro, 3.ª tirada, 200 páginas, de 17 × 24 cm, con 193 ilustraciones.