Algebra Lineal y Geometría.

Unidad n°4: Dimensión de un Espacio Vectorial.

Esp. Liliana Eva Mata

Contenidos.

- Combinación lineal de vectores. Dependencia e Independencia Lineal. Sistema de Generadores. Base de un espacio vectorial. Dimensión de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector. Vectores aplicados en coordenadas.

Bibliografía.

- Rojo, Armando. “Álgebra”- Tomo 2 - Buenos Aires(Argentina), El Ateneo. 1987
- Grossman, Stanley I.-”Algebra Lineal con aplicaciones.”-Ed.Mc.Graw Hill-1993
- Guzmán, M- Cólera, J-Salvador, A - “Matemáticas" bachillerato Tomo 2 - Ed. Anaya - 1992.
- Lic. María Elena Albino de Sunkel – “Geometría Analítica en forma vectorial y Matricial” – Ed Nueva Librería.

Combinación lineal de vectores.

Sea (V ; +; R, .) Espacio Vectorial Real

$A = \{ v_1, v_2, v_3, ..., v_n\} \subset V$ y

$\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots;\alpha_n\} \subset R;$

Definición 1: Combinación lineal de la familia $A \subset V$, es todo vector $a \in V$ definido:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_n v_n$$

$$\alpha_i \in R \wedge v_i \in A$$

α_i: coeficientes de la combinación lineal

a: combinación lineal de los vectores v_i, con i =1, 2,…n

Definición 2.

- **El vector a $\in$V es combinación lineal de la familia de vectores A $\subset$ V, si y solo si existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ tales que:**

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Si todos los escalares son nulos, la combinación lineal se llama trivial, y se obtiene el vector nulo.

Ejemplo.

$(R^3; +; R; .)$ Espacio Vectorial Real.

$A=\{(-1;0; 2), (-1; 2; 4)\}\subset R^3$.

Determinar si los vectores $a=(-1;1;3)$ y $b = (1; 2; 2)$ son combinación lineal de la familia de vectores A.

a= (-1 ; 1; 3)

- u =(-1; 0; 2), v =(-1; 2; 4)
- a = x u + y v
- (-1; 1; 3) = x (-1;0; 2) + y (-1; 2; 4)

$$\begin{cases} -x - y = -1 \\ \quad\;\; 2y = \;\; 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

x =½; y = ½

a=½u+½v

b = (1; 2; 2)

- u=(-1;0; 2), v=(-1; 2; 4)
- b=x u + y v
- (1; 2; 2)= x (-1;0; 2)+ y (-1; 2; 4)

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ 2y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Sistema incompatible

$\therefore$ **B no es combinación lineal de la familia de vectores A**

Independencia lineal de vectores.

- **Sea (V ; +; R, .) Espacio Vectorial Real y**

  $A = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_r\} \subset V$

- **Definición:La familia $A \subset V$ es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de dicha familia, cuyo resultado es el vector nulo, es la trivial.**

$$A \text{ es linealmente independiente} \Leftrightarrow \forall i : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = \theta \Rightarrow \alpha_i = 0$$

Propiedades.

- **El conjunto A $\subset$ V es linealmente independiente si y solo si todo subconjunto finito a A es linealmente independiente.**

Demostración 1.

- **Sabiendo que u y v son linealmente independientes en (V ; +; K, .), demostrar que (u+v) y v son linealmente independientes.**

Pistas.

- Pista 1:Plantear la combinación lineal nula.
- Pista 2:Propiedad distributiva con respecto de la suma en V.
- Pista 3:Propiedad distributiva con respecto de la suma en K.
- Aplicar Hipótesis

Propiedad .

- **Si un vector es combinación lineal de una familia linealmente independiente, entonces dicha combinación lineal es única.**

Pistas.

- **Pista 1:Expresar v como combinación lineal de la familia A linealmente independiente.**
- **Pista 2: Suponer que existen otros escalares.**
- **Igualar.**
- **Igualar a cero.**
- **Propiedad distributiva con respecto a la suma de escalares.**
- $v_i \neq \theta$

Ejemplo.

- **Dado el espacio vectorial (R^3; +; R; .) determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.**

a)A={(3,1,1); (-5;-2;1);(1;1;0)}

b)A ={(1;1;1);(-1;1;-5); (-1;3;-9)}

a)

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(0;0;0)\}$$

b)

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(x; y; z) \in R^3 \,/\, x = -z; y = -2z; z \in R\}$$

Respuesta

- a) A={(3,1,1); (-5;-2;1);(1;1;0)} es linealmente independiente pues los escalares son simultáneamente nulos pues el sistema homogéneo es compatible determinado.

- b) A ={(1;1;1);(-1;1;-5); (-1;3;-9)} no es linealmente independiente pues el sistema homogéneo es compatible indeterminado.

Dependencia Lineal de Vectores.

- **La familia A $\subset$ V es linealmente dependiente si y solo si existe una combinación lineal no trivial de dicha familia, cuyo resultado sea el vector nulo.**

$$\text{A es linealmente dependiente} \Leftrightarrow \exists i \,/\, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = \theta \wedge \alpha_i \neq 0$$

Propiedades.

- **Propiedad 1: Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto linealmente independiente.**
- **Propiedad 2: El vector nulo de cualquier espacio vectorial constituye un conjunto linealmente dependiente.**

Propiedades

- **Propiedad 3: Todo conjunto al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente.**
- **Propiedad 4: Un conjunto finito no vacío de vectores es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los demás.**

Propiedades.

- **Propiedad 5: Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector es combinación lineal de los demás.**
- **Propiedad 6: Un conjunto finito y ordenado de vectores al que no pertenece el vector nulo es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los precedentes.**

Teoremas en R^2

- **Dos vectores libres no nulos del plano son linealmente dependientes si y solo si son paralelos.**

- **Corolario: La condición necesaria y suficiente para que dos vectores libres del plano sean linealmente independiente es que NO sean paralelos.**

Teoremas en R^3

- **La condición necesaria y suficiente para que tres vectores libres del espacio sean linealmente dependiente es que sean paralelos a un mismo plano.**
- **Corolario: La condición necesaria y suficiente para que tres vectores libres del espacio sean linealmente independiente es que no sean paralelos a un mismo plano.**

Pistas Pp1 y Pp2

- Pp1: 1)Considerar un v $\neq \theta$.

  2) α.v = $\theta \Rightarrow \alpha$=o $\vee$ v =θ
- Pp2: 1) Cualquier escalar nulo o no verifica $\alpha.\theta=\theta$

Pistas Propiedad 3

- **Considerar un $v_j=\theta$ y $\forall i \neq j$: i =0**

- **Escribir la combinación lineal nula y analizar cada término.**

- **¿Cuál es el único término no nulo?**

- **Aplicar una de las propiedades elementales de Espacios Vectoriales.**

Pistas Propiedad 4.

Desdoblar el enunciado:

$\Rightarrow$) **Si A es un conjunto finito no vacío de vectores linealmente dependiente, algún vector es combinación lineal de los demás.**

$\Leftarrow$) Si **algún vector es combinación lineal de los demás, A es un conjunto finito no vacío de vectores es linealmente dependiente**

Pistas Propiedad 4: $\Rightarrow$

- 1)Definición de conjunto de vectores linealmente dependientes.
- 2)Separar término cuyo escalar es distinto de cero.
- 3)Pasaje de términos.
- 4)Existencia del inverso del escalar no nulo, premultiplicar ambos miembros.
- 5)Asociatividad mixta y propiedad de sumatoria.
- 6)Propiedad de elementos inversos en el cuerpo K.

Pistas Propiedad 4: $\Leftarrow$

- 1)Plantear simbólicamente la afirmación a demostrar.
- 2)Aplicar hipótesis.
- 3)Trasposición de términos.
- 4) ¿Cuál es el valor de α_j?

Proposiciones Equivalentes.

- El conjunto A es linealmente independiente.
- Toda combinación lineal de la familia A, cuyo resultado sea el vector nulo , es la trivial.
- Ningún vector de A es combinación lineal de los demás

Proposiciones Equivalentes.

- A es linealmente dependiente.
- Existe una combinación lineal de la familia A con escalares no todos nulos, cuyo resultado es el vector nulo.
- Algún vector de A es combinación lineal de los demás.

Sistema de Generadores de V.

- **La familia A = { $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_r$ }$\subset$ V es un sistema generador de V si y sólo si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A.**

$$\text{A es un S.G. de V} \Leftrightarrow \forall v : v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i . v_i$$

Propiedad.

- **Si la familia A $\subset$ V es un L.D. y SG de V, entonces existe $v_j \in A$ / $A - \{v_j\}$ es un S.G. de V.**

Demostración

- Por hipótesis A es un sistema generador de V y genera el vector v .(1)
- Por hipótesis A es linealmente dependiente. Por Propiedad 4, existe un vector v_j que es combinación lineal de los demás.(2)
- Escribir el vector v aplicando (1) y (2).
- Reemplazar v_j según (2).
- Axiomas de Espacio Vectorial.

Base de un Espacio Vectorial.

- **Sea (V, +, K, .) Espacio Vectorial**
- **$A=\{v_1, v_2,\ldots,v_n\}\subset V$**

- **Un sistema generador, cuyos vectores son linealmente independientes se llama base del espacio vectorial V**

Ejemplo.

- Determinar si el conjunto de vectores

A={(1, 0, 1), (0,2,1), (-1,1,0)}es una base del espacio vectorial (R^3,+, R, .)

Bases Canónicas

- En R $\{1\}$
- En R^2 $\{(1 ; 0), (0 ; 1)\}$
- En R^3 $\{(1 ; 0; 0),(0 ; 1 ; 0), (0; 0; 1)\}$
- En R^n: $\underbrace{\{\overbrace{(1;0;\ldots;0)}^{\text{n componentes}},(0;1;\ldots;0),\ldots,(0;0;\ldots;1)\}}_{\text{n n-uplas}}$

Dimensión De Un Espacio Vectorial

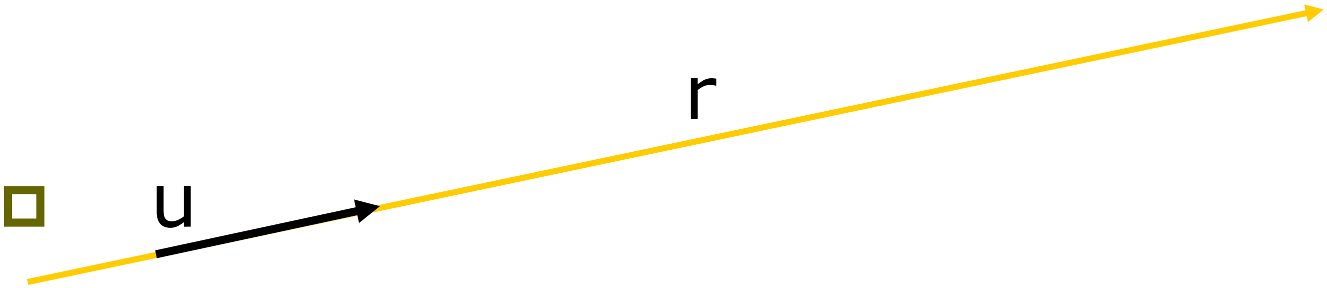
- Un espacio vectorial V tiene **dimensión finita n**, si y solo si existe en V **una base de n vectores**.
- La dimensión de un espacio vectorial es el **cardinal de cualquiera de sus bases**.
- Si la base está formada por n vectores, la dimensión del espacio es n y el espacio vectorial es n-dimensional.

V y W espacios vectoriales reales isomorfos por φ.

- Sean $\{v_1; v_2; \ldots\ldots; v_n\}$ una base de V; entonces $\{\varphi(v_1); \varphi(v_2); \ldots\ldots; \varphi(v_n)\}$ una base de W.
- Dos espacios vectoriales isomorfos tienen igual dimensión.
- En un espacio vectorial de dimensión n, (n+1) vectores son L.D.
- En un espacio vectorial V de dimensión n, n vectores L.I. constituyen una base de V.

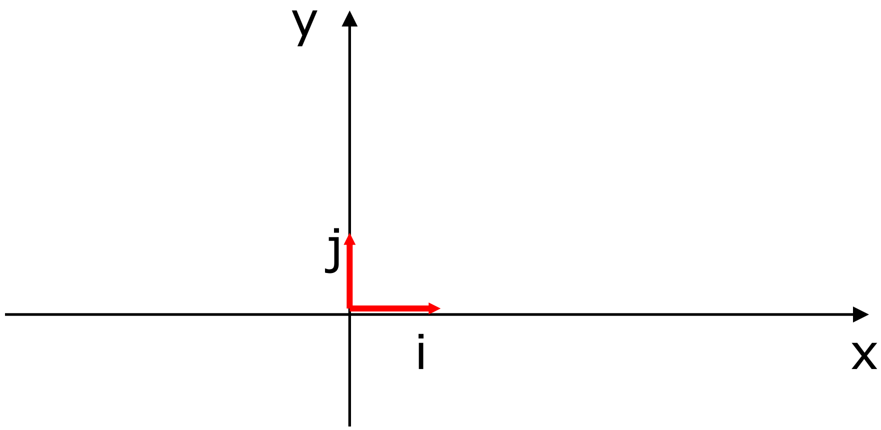
Dimensión 1

✓ **En la recta** , la base está formada por un vector. Decimos que es de **dimensión 1** y el espacio es **unidimensional.**



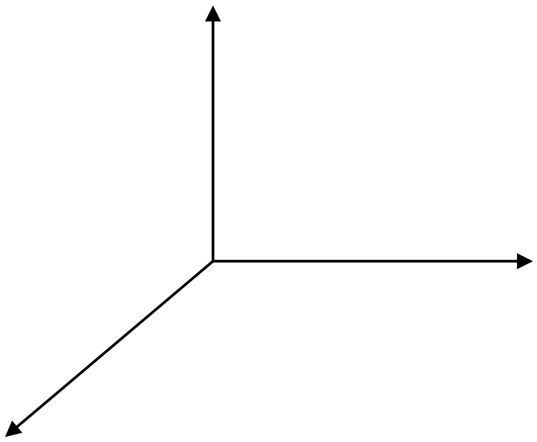
Dimensiòn 2

✓ **En el plano,** la base está formada por dos vectores. Decimos que es de **dimensión 2** y el espacio es **bidimensional**



Dimensiòn 3

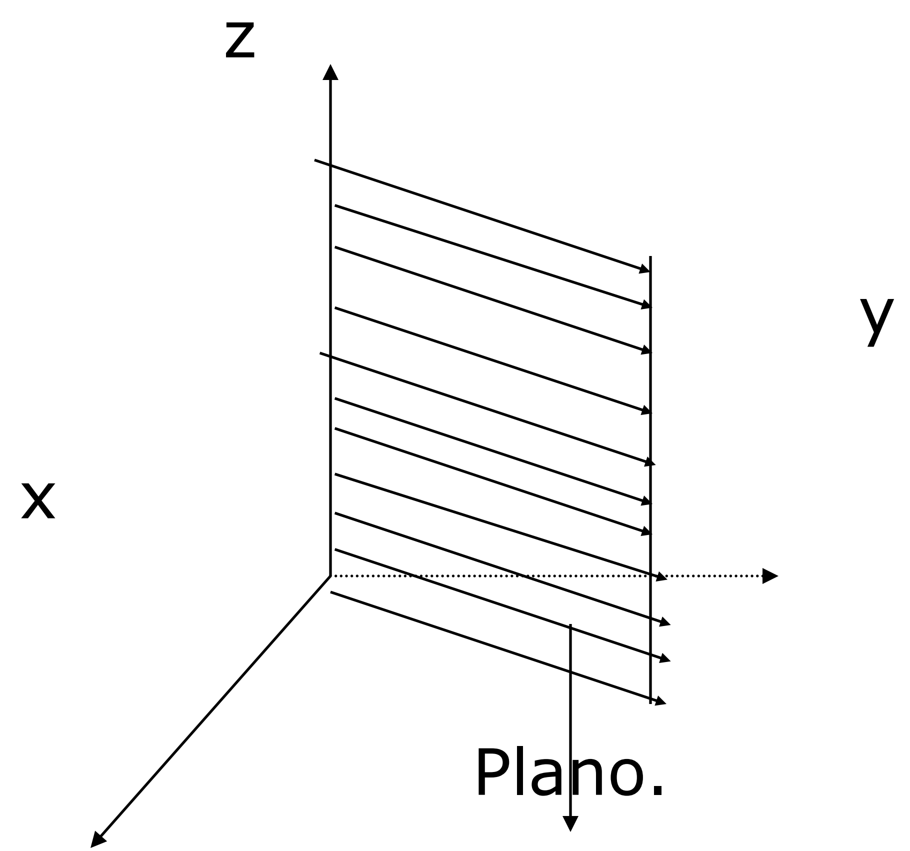
✓ **En el espacio,** la base está formada por **tres** vectores. Decimos que es de **dimensión 3** y el espacio es **tridimensional.**



Dimensión n

- **Generalizando:** En un espacio ene-dimensional, la base está formada por **n** vectores. Decimos que es de dimensión finita n.

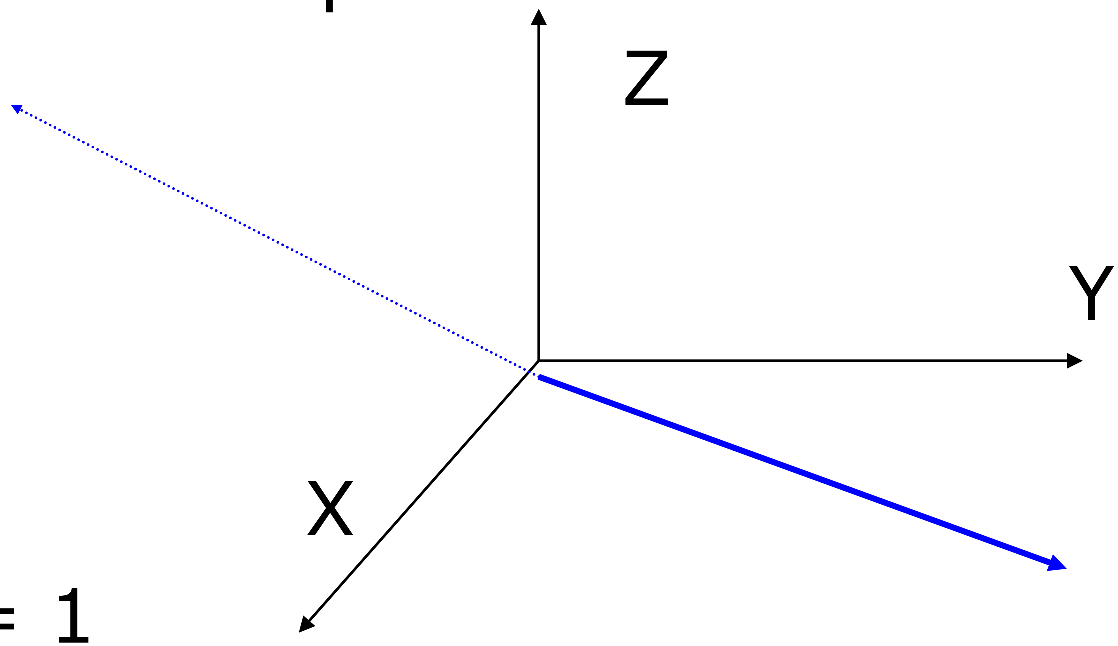
$A=\{(x;y;z)/\ y=2x\}$



dim A = 2

$B = \{(x; y; z) \,/\, y = 2x \wedge z = 0\}$

- El conjunto B representa una recta.



- dim B = 1

Coordenadas de un vector.

- **Sea V un espacio vectorial de dimensión n; sea $\{v_1; v_2; \ldots\ldots; v_n\}$ una base de V.**
- **Todo vector x de V se expresa como *combinación lineal única* de los vectores $v_1; v_2; \ldots\ldots; v_n$ en ese orden.**
- **Los números $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ que expresan al vector x como combinación lineal única de los vectores de la base $\{v_1; v_2; \ldots\ldots; v_n\}$ se llaman coordenadas del vector x en dicha base.**

Ejemplo

- Sea A = {(1,0,3), (0,1,3), (0,x,6)}$\subset R^3$
- Determinar el valor de x, para que:
- A sea linealmente dependiente.
- Asea linealmente independiente.
- A sea sistema generador de R^3
- A sea sistema no generador de R^3
- Seleccionando un valor conveniente para x, hallar las coordenadas del vector en la base A.

Vectores Aplicados En Coordenadas.

- **a) En la recta:** **OP= x *i***
- **b) En el plano:** **OP= x *i* + y *j***
- **c) En el espacio:** **OP= x *i* + y *j* + z *k***