

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

ESCUELA DE AGRIMENSURA

CORRECCIÓN DE OBSERVABLES CLÁSICOS EN LEVANTAMIENTOS TOPOGRÁFICOS COMBINADOS

**Trabajo Final para obtener el título de
Ingeniero Agrimensor**

Autor: Sánchez, Daniel Alejandro

Profesor: Ing. Agrim. Bosch, Luis A.

**Córdoba – Argentina
2008**

Agradecimientos:

A mi familia.

Al Ing. Agrimensor Luis "Tito" Bosch.

A todos aquellos que colaboraron de una u otra manera al desarrollo de este trabajo.

RESUMEN

La utilización combinada de mediciones GPS y mediciones clásicas con estación total, al abordar la realización de trabajos topográficos, implica relacionar sistemas de referencias muy disímiles. Los resultados de las primeras son vectores en un sistema de referencia mundial, vinculados a un elipsoide de referencia; mientras que las segundas son vectores en un sistema de coordenadas locales. Un tratamiento incorrecto de las mediciones puede conducir a equivocaciones que afectaran las coordenadas finalmente obtenidas.

En el presente trabajo, se analizan los aspectos principales que relacionan ambos métodos de medición y se darán pautas de procesamiento que permitan un tratamiento eficaz de las mediciones, en función de la extensión y precisión del trabajo.

ÍNDICE DE TEMAS

CAPITULO I

ASPECTOS GENERALES

Introducción.....	8
Objetivos Generales y específicos.....	12

CAPITULO II

CONCEPTOS SOBRE GEODESIA Y CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA

Introducción.....	13
Elipsoide de revolución.....	16
Coordenadas utilizadas en geodesia.....	18
Geometría del elipsoide.....	21
Conversión de coordenadas.....	25
Sistemas y marcos de referencia.....	26
Sistema de referencia vertical.....	34
Desviación de la línea vertical.....	43
Introducción a las proyecciones cartográficas.....	47
Clasificación de las proyecciones.....	51
Proyecciones Conformes.....	56
Proyección Transversa de Mercator.....	58
Generalidades proyección Gauss-Krüger.....	66
Conceptos generales sobre reducción de observables.....	68
Reducción de una distancia al elipsoide.....	69
Reducción de una lectura angular al elipsoide.....	73
Reducciones del plano de proyección al elipsoide.....	79

CAPITULO III

METODOLOGÍA

Introducción.....87
Determinación de las reducciones de distancias.....89
Determinación de las reducciones angulares.....89
Determinación de las reducciones de proyección.....90
Aplicación a casos particulares.....92

CAPITULO IV

RESULTADOS

Reducción de una distancia al nivel del elipsoide.....94
Paso de la cuerda al arco.....98
Corrección por desviación de la línea vertical.....99
Reducción de distancias al plano de proyección.....101
Corrección angular arco-cuerda.....105
Reducción de superficies del plano de proyección al elipsoide.....108
Reducción de superficies del elipsoide al terreno.....110
Caso particular: Mensura Rural.....113
Caso particular: Poligonal Combinada.....123

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....146

ANEXOS

Plano de Mensura y Unión “Estancia LA COSECHA”.....144
Plano Poligonal Combinada sobre Ruta Prov. Nº 12.....146
Compensación de la poligonal en estudio.....153
Cálculo y compensación de una poligonal intercalada entre dos vértices GPS.....163

BIBLIOGRAFÍA.....175

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura Nº 1	Distancia entre dos puntos.....	9
Figura Nº 2	Elipsoide de revolución.....	16
Figura Nº 3	Coordenadas Cartesianas.....	18
Figura Nº 4	Coordenadas Geodésicas.....	20
Figura Nº 5	Normal principal.....	21
Figura Nº 6	Radio de curvatura de la elipse meridiana.....	22
Figura Nº 7	La línea geodésica.....	24
Figura Nº 8	Sistemas Clásicos de Referencia.....	28
Figura Nº 9	Sistemas Globales de Referencia.....	32
Figura Nº 10	Sistema local Topocéntrico Físico.....	33
Figura Nº 11	Altura elipsoidal y ortométrica.....	34
Figura Nº 12	Alturas Niveladas.....	37
Figura Nº 13	Alturas Normales.....	40
Figura Nº 14	Alturas Ortométricas.....	42
Figura Nº 15	Desviación de la línea vertical.....	43
Figura Nº 16	Proyecciones Perspectivas.....	52
Figura Nº 17	Clasificación según superficie de Proyección.....	53
Figura Nº 18	Situación de la superficie de proyección.....	54
Figura Nº 19	Sistema cilíndrico transverso conforme.....	59
Figura Nº 20	Latitud isométrica.....	61
Figura Nº 21	Convergencia de Meridianos.....	61
Figura Nº 22	Corrección arco-cuerda.....	63
Figura Nº 23	Anamorfosis lineal.....	64
Figura Nº 24	Reducción al nivel del elipsoide.....	70
Figura Nº 25	Paso de la cuerda al arco.....	72
Figura Nº 26	Factor medio de reducción de distancias al elipsoide.....	96

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I	Reducción de distancias al nivel del elipsoide.....	95
Tabla II	Diferencia por considerar factor de reducción medio.....	96
Tabla III	Diferencia por considerar factor de reducción medio elevando la altura mínima.....	97
Tabla IV	Paso de cuerda al arco.....	98
Tabla V	Corrección por desviación de la línea vertical.....	99
Tabla VI	Valor del módulo de anamorfosis lineal.....	101
Tabla VII	Módulo común de anamorfosis lineal.....	104
Tabla VIII	Corrección arco-cuerda para $y=0$ km.....	105
Tabla IX	Corrección arco-cuerda para $y=76$ km.....	105
Tabla X	Corrección arco-cuerda para $y=160$ km.....	105
Tabla XI	Corrección arco-cuerda para $y=300$ km.....	106
Tabla XII	Diferencia de superficie por uso de proyección.....	108
Tabla XIII	Diferencia de superficie por reducción al terreno.....	110
Tabla XIV	Error en la superficie derivado del error en sus Vértices.....	111

CAPÍTULO I ASPECTOS GENERALES

1.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, prácticamente la totalidad de los trabajos topográficos se ejecutan empleando mediciones clásicas (Estaciones Totales) y mediciones GPS, ya sea en modo estático con post-proceso, o tiempo real (GPS-RTK). La necesidad de incluir finalmente, estos trabajos en un sistema de información geográfica (SIG) o en la cartografía existente, como así también las nuevas normativas de georreferenciación en relación a la mensura, obliga a efectuar los cálculos en un Sistema de Referencia Geodésico Oficial, expresando finalmente las coordenadas en alguna proyección cartográfica.

Todo esto ha supuesto para gran parte de los profesionales, la necesidad de recuperar conocimientos geodésicos, olvidados hasta hace poco tiempo por el tratamiento local de las mediciones. Se ha convertido en algo habitual trabajar con mediciones de GPS junto con mediciones obtenidas a partir de Estaciones Totales. El resultado de las primeras son vectores en el Sistema de Referencia Geodésico WGS84, mientras que las segundas representan vectores en sistemas locales de coordenadas. La relación entre ambos tipos de vectores es algo bien estudiado por la geodesia, así como la utilización de proyecciones cartográficas y relación entre distintos sistemas de referencia.

A pesar de todo, muchos profesionales de la topografía siguen sin incorporar estas cuestiones en la metodología de procesamiento y no es raro encontrarse con diferentes formas de tratar los observables clásicos y los procedentes del GPS. Esto afecta a los resultados finales y puede producir serios problemas cuando las coordenadas finales son contrastadas por otros profesionales de la topografía.

Lamentablemente estas cuestiones tampoco son tenidas en cuenta, en los pliegos de Especificaciones Técnicas de las Obras Públicas, en donde es muy común encontrarse, por desconocimiento de quien establece las especificaciones, graves errores conceptuales en cuanto a Sistemas Geodésicos de Referencia, Proyecciones a utilizar, etc. este desconocimiento puede ocasionar errores de modelo de la realidad, que se

traslada a la obra, provocando errores geométricos al contrastarlo con la realidad física del terreno, lo que implicaría cambio en el proyectos que se trasladan directamente a los costos de la obra.

Por ejemplo, la distancia entre dos puntos puede ser expresada de distintas maneras¹. Según se ve en la figura N°1:

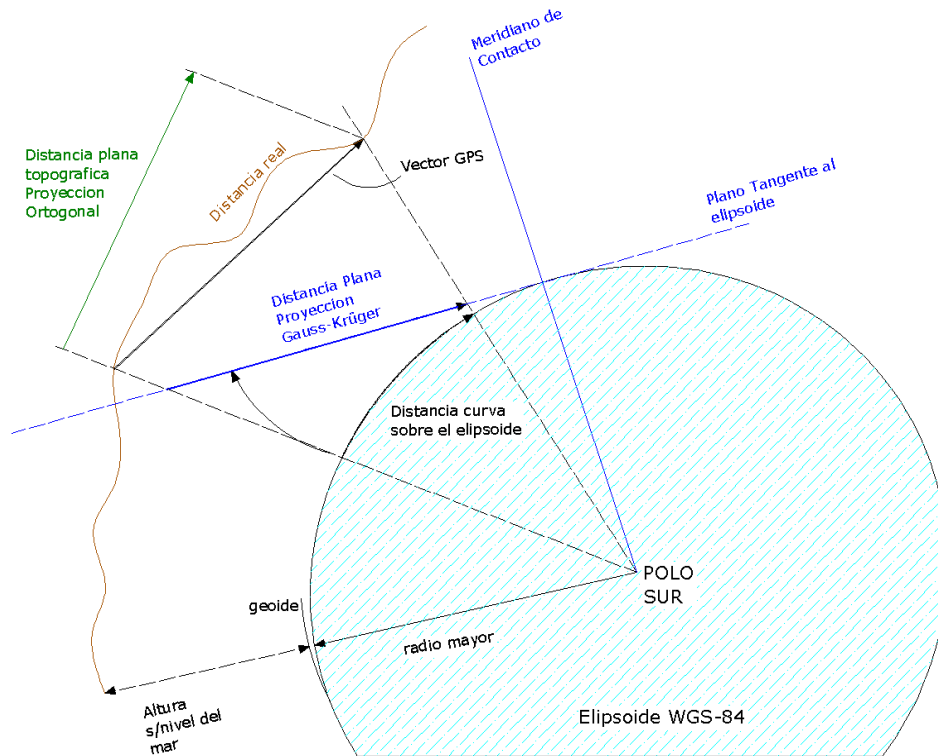


Figura N° 1. Distintas formas de expresar la distancia entre dos puntos

- La distancia entre dos puntos obtenidos a partir de las 3 coordenadas cartesianas GPS, es la magnitud de un vector que representa la distancia inclinada entre los dos extremos.
- La distancia entre dos puntos obtenida a partir de las 2 coordenadas curvilíneas ($\phi \lambda$) es la magnitud de un vector curvo, proyectado sobre el elipsoide al nivel del mar, esta distancia se reduce respecto a la real proporcionalmente a la altura de la línea sobre el nivel del mar.

¹ Del Bianco, Armando. Propuesta de Normas y Especificaciones Técnicas para mediciones Topográficas y Geodésicas en las Obras Públicas.

- La distancia obtenida a partir de coordenadas de proyección Gauss-Krüger, es un vector recto, proyectado sobre un plano tangente al elipsoide en un meridiano, y que es mayor a la distancia real, a medida que nos alejamos del origen de la proyección.
- La distancia medida con estación total, es una distancia plana, corresponde a una proyección ortogonal cuyo eje vertical coincide con la dirección de la plomada de la primera estación.
- Y por supuesto, las tres medidas difieren de la real (línea quebrada).

Luego, una distancia entre dos puntos medida con Estación Total, no será la misma que la obtenida a través de una medición GPS. Saber tratar conjuntamente estos dos tipos de datos es fundamental y hacerlo erróneamente puede conducir a serias equivocaciones que afectarán a las coordenadas obtenidas.

Algunos de las consideraciones geodésicas que intervienen, y que serán objeto de análisis de este trabajo, son:

Para mediciones clásicas:

- Reducción de distancias del terreno al elipsoide.
- Reducción de distancias del terreno al plano de proyección Gauss-Krüger.
- Reducción de lecturas angulares del terreno al plano de proyección.
- Restitución de superficies en el terreno a partir de superficies medidas en el plano de proyección.

En el presente trabajo se analizará la relación existente entre las mediciones realizadas con métodos clásicos de levantamiento, cuando se combinan con mediciones realizadas utilizando metodología GPS; analizando la magnitud de las correcciones que deben efectuarse a los observables clásicos, en la realización de levantamientos combinados.

La aplicación de estas correcciones, permitirán referir las mediciones clásicas al plano de proyección y realizar los cálculos en un Sistema Geodésico de Referencia, según lo exigen las nuevas necesidades de georreferenciación.

El primer capítulo introduce las generalidades del tema a estudiar, los objetivos generales y específicos de la investigación.

El capítulo N° 2 introduce el concepto de geodesia, la forma de la tierra y su determinación. El elipsoide como figura de referencia geodésica mediante sus características y propiedades geométricas. Concepto de datum y de sistemas de referencias geodésicos; Sistemas clásicos y globales. Conceptos de altimetría donde se hace referencia al concepto de geoide, cuasi-geoide, tipos de altura. Concepto de desviación de la línea vertical, su significado.

Introduce a los conceptos básicos de proyección cartográfica, tipos de proyección, los módulos de deformación, la indicatriz de Tissot. Se profundizará sobre las propiedades y fundamento matemático de las proyecciones conformes. Se explican los aspectos conceptuales de la proyección Transversal de Mercator y aspectos geométricos de la proyección. La proyección Gauss-Krüger, su uso en argentina.

Se expondrá la problemática de la reducción de observables en la geodesia clásica y su aplicación a los levantamientos combinados. Aplicaciones topográficas de la proyección conforme Gauss-Krüger.

El capítulo N° 3 expondrá los pasos metodológicos utilizados para el estudio de la problemática planteada.

El capítulo N° 4 presenta los resultados de este trabajo, según los pasos metodológicos establecidos.

El capítulo N° 5 presenta las conclusiones y recomendaciones según los resultados obtenidos.

OBJETIVOS

Generales

Realizar un análisis de las correcciones que deben efectuarse a los observables clásicos en la realización de levantamientos topográficos combinados, estableciendo pautas de procesamiento.

Específicos

- Establecer criterios de tratamiento de mediciones lineales y angulares clásicas, cuando se combinan con mediciones GPS.
- Determinar la influencia de la anamorfosis lineal de la proyección Gauss-Krüger en levantamientos topográficos.
- Determinar la influencia de las correcciones angulares en la proyección Gauss-Krüger.
- Determinar la influencia la anamorfosis superficial de la proyección Gauss-Krüger en el cálculo de superficies.
- Determinar en la práctica, utilizando una zona de ejemplo, la magnitud de las correcciones estudiadas.

CAPÍTULO II
CONCEPTOS GENERALES SOBRE GEODESIA y
CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA

2.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de este segundo capítulo vamos a analizar algunos conceptos necesarios para la comprensión de los distintos temas que comprende este trabajo.

La Geodesia, según su definición clásica (Helmert, 1880) es la ciencia encargada de la medición y representación de la superficie terrestre. Hoy en día la definición se extiende no solo a la superficie terrestre, sino también a los fondos oceánicos y otros cuerpos celestes. Tradicionalmente, se dividía la geodesia en:

- Geodesia astronómica
- Geodesia geométrica
- Geodesia física

Hoy en día, se prefiere hablar de una geodesia unificada, donde el estudio se aborda de un modo completo, utilizando herramientas de las tres ramas mencionadas. Hoy se prefiere clasificar la geodesia en relación a la extensión en el espacio.

Clasificación actual (Torge, 2001):

- Geodesia global
- Relevamientos geodésicos
- Relevamientos topográficos

Algunos autores hoy hablan de la geodesia como la ciencia que se encargada de determinar la variación en la forma de la tierra, debido a que se conoce con mucha exactitud la forma y dimensiones de la misma.

A lo largo de la historia, han sido diversos los intentos del hombre por relacionar la Tierra a una figura regular que le permitiese estudiarla y representarla. Desde Pitágoras quien en el siglo VI AC definió la esfericidad de la Tierra o Eratóstenes quien durante el siglo III AC calculó las dimensiones de ella con gran exactitud, se tendió a considerarla como una figura esférica perfecta. Sin embargo en 1687 Newton, a través de consideraciones físicas, señaló que debería ser más achatada en los polos que en el Ecuador insinuándose con esto por primera vez al elipsoide de revolución como figura de representación de la Tierra.

Posteriormente en 1740, Collin MacLaurin demostró científicamente la posibilidad de que un elipsoide fuera una figura de equilibrio para una masa fluida en rotación. Tres años más tarde Clairaut definiría el achatamiento en función de la gravedad y de la velocidad de rotación. A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, científicos tales como Laplace, Bessel y Gauss plantearon la necesidad de representar la superficie terrestre mediante un modelo elipsoidal para satisfacer las crecientes necesidades de precisión de posicionamiento.

Carl Friedrich Gauss en el año 1822 introdujo el concepto de “Geoide” y lo definió como “una superficie en la que cualquiera de sus partes intersecta las direcciones de la gravedad en ángulo recto y de la que es una parte la superficie oceánica en reposo en condiciones ideales”. A finales del siglo XIX el geodesta Gabriel Stokes publicaría una solución al problema de definición del Geoide mediante el establecimiento de la formula fundamental de la gravimetría.

La verdadera forma de la tierra es el *Geoide*, la cual es una superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que mejor se aproxima a la superficie media de los mares en reposo, supuesta extendida bajo los continentes. Esta superficie no se define geoméricamente sino físicamente. La superficie matemática que más se asemeja a la forma real de la tierra, es un elipsoide de revolución.

La determinación de la superficie del elipsoide terrestre consiste en el establecimiento de los parámetros que caracteriza sus medidas, forma y posición. La condición que debe cumplir el elipsoide terrestre son: el centro geométrico del elipsoide debe coincidir con el centro de masas de la tierra y la de su plano ecuatorial con el plano del Ecuador

terrestre. Las desviaciones entre la superficie del elipsoide y del geoide deben ser mínimas.

Durante el desarrollo de la geodesia en el mundo, se han establecido diferentes medidas para el elipsoide terrestre. Sin entrar en detalles podemos mencionar los elipsoide de *Everest (1830)*, *Clark (1888)*, *Airy (1830)*, *Krassovki (1945)*, *Hayford (1924)* lo cuales fueron utilizado en diferentes países y épocas. El elipsoide de *Hayford*, designado como *Internacional 1924* y recomendado para su uso internacional, fue adoptado en nuestro país por el Instituto Geográfico Militar.

Introduciendo sobre los sistemas geodésicos (los que serán desarrollados más adelante), podemos mencionar que, en los sistemas geodésicos clásicos se elegía un punto fundamental en el que la normal al elipsoide coincide con la vertical del lugar, es decir la normal al geoide. En este punto denominado *datum*, las dos superficies, elipsoide y geoide, son tangentes. Los puntos sobre la superficie se establecían mediante grandes redes de triangulación y trilateración. **Las coordenadas de los puntos se expresaban mediante latitud y longitud geodesia, y un valor de altura sobre el nivel del mar, es decir un origen planimétrico y un origen altimétrico independiente.** Las redes planimétricas y altimétricas eran independientes; los puntos trigonométricos no tenían necesariamente valores de cota. Como las observaciones se realizaban sobre la superficie topográfica, era necesario reducir las mismas a la superficie del elipsoide, como veremos más adelante. Este tipo de sistemas geodésicos se denominan sistemas generales, no son globales, no son geocéntricos.

En el último tiempo, con el gran avance de la tecnología, el uso de satélites artificiales, para obtener imágenes y realizar mediciones, el desarrollo de sistemas de posicionamiento global (GPS), han permitido obtener medidas cada vez más precisas y exactas de la superficie terrestre. Esto ha permitido establecer sistemas geodésicos que pueden ser utilizados en todo el mundo, estos sistemas son globales, son geocéntricos. Las coordenadas de los puntos son expresadas en las tres dimensiones, a través de una terna de ejes ortogonales con su origen en el centro de masas de la tierra.

2.2 ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

“El elipsoide es una superficie de cuarto orden en la que todas las curvas de intersección con un plano son elipses, las cuales eventualmente degeneran círculos. Para cada punto seleccionado en la superficie del elipsoide y para la normal al plano tangente en este punto, las elipses producidas por la intersección con dicha superficie y la normal forman planos continuos infinitos, los cuales se conocen como secciones normales y tienen, en ese punto, una cantidad de variaciones en los radios de curvatura. Esta variación es una función continua de la latitud elipsoidal del punto seleccionado, de los parámetros de forma elipsoidal y del acimut de la sección normal producida. Las dos secciones normales, que corresponden a las curvas de radio mínimo y máximo, se definen como las secciones normales principales.

Para propósitos geodésicos el elipsoide de revolución, que se produce cuando una elipse es rotada sobre su semi-eje menor, provee una superficie matemática bien definida cuya forma y tamaño son definidas por dos parámetros: medida del semieje menor (b) y semieje mayor (a)”².

De forma analítica se escribe:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

La expresión general del elipsoide de revolución es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; donde a, b, c son números reales positivos. En el elipsoide terrestre se cumple $a=c$ lo que lleva a la expresión enunciada anteriormente³. Si los tres valores son iguales, el elipsoide se transforma en una esfera.

² Boreau Hidrográfico Internacional. “Manual de Hidrografía”. Pág. 37.

³ Algunos textos lo denominan *esferoide* cuando cumple esta condición.

Veamos los parámetros que caracterizan al elipsoide:

a – semieje mayor o ecuatorial

b – semieje menor o polar

f – achatamiento polar $f = \frac{a-b}{a}$

e – primera excentricidad $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

e' – segunda excentricidad $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

Con cualquier pareja de datos ab , ae , af , basta para definir el elipsoide.

Los parámetros del elipsoide terrestre han ido cambiando según la época, el lugar y debido al avance en la calidad de las mediciones.

Un primer método para determinar estos parámetros puede ser el cálculo de la distancia s entre parejas de puntos A y B. Conociendo las diferencias de latitudes en sus extremos, podrá determinarse el radio de curvatura de la elipse meridiana en un punto interior. Si tenemos n puntos ($n > 3$) podemos calcular aplicando mínimos cuadrados los parámetros del elipsoide e , a . Este método se conoce como “método de los arcos”. Un segundo método consiste en calcular valores de desviación de la línea vertical en varios puntos sobre la superficie terrestre. Estas desviaciones nos dan un parámetro de la variación del geoide respecto del elipsoide. Luego se calcula un elipsoide que haga mínima las desviaciones de las líneas verticales. Este método se conoce como “método de las áreas”.

En general se presentan como parámetros de un determinado elipsoide terrestre el valor del semieje mayor a y la inversa del achatamiento polar $1/f$.

2.3 COORDENADAS UTILIZADAS EN GEODESIA

2.3.1 Coordenadas cartesianas en el espacio

Un sistema coordenado cartesiano en el espacio, está definido por una terna ordenada de ejes mutuamente perpendiculares (XYZ). Un punto en el espacio podrá definirse considerando la distancia que lo separa a cada eje, definiéndose tres coordenadas XYZ.

De esta manera un sistema de ejes cartesiano puede soportar un sistema geodésico con estas características:

- El origen del sistema está ubicado en centro de masas de la tierra.
- El eje Z es coincidente con el eje de rotación de la tierra y formando un ángulo recto con el eje X.
- Plano Ecuatorial medio perpendicular al eje Z (plano XY)
- Plano XZ generado por el plano del meridiano de Origen.
- El eje Y es coincidente con el plano Ecuatorial y forma ángulo recto con el eje X, definiendo un sistema dextrógiro (giro hacia la derecha).

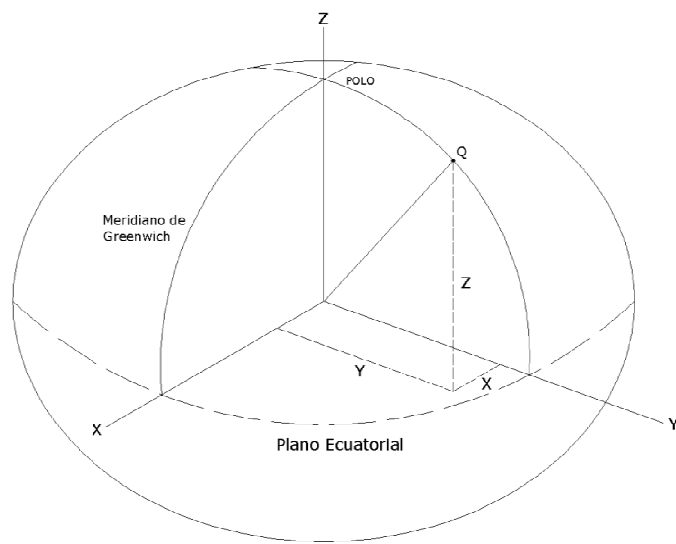


Figura N° 3. Coordenadas Cartesianas

2.3.2 Coordenadas geodésicas

Si bien con un sistema cartesiano tenemos solucionada la ubicación de un punto sobre el espacio, en geodesia es necesario establecerlos en referencia al elipsoide asociado.

Al considerar la forma analítica de la tierra como un elipsoide de revolución, es necesario definir algunas líneas de referencia para poder establecer sobre la superficie de éste la posición de un punto de manera inequívoca.

Si el elipsoide rota en torno a su semieje menor b , y en su punto medio se levanta un plano normal a dicho semieje denominado plano ecuatorial, la intersección de este plano con el elipsoide generará una línea de círculo máximo llamado Ecuador, que lo dividirá en dos mitades, hemisferio Norte y Sur. La intersección de los infinitos planos paralelos al Ecuador, generaran líneas de círculo menores denominadas paralelos.

Los infinitos planos que contengan al eje de rotación, definirán en la intersección con el elipsoide líneas llamadas meridianos. Se ha establecido como origen de estos meridianos al que pasa por el observatorio de Greenwich (Inglaterra).

Podemos definir ahora las coordenadas curvilíneas sobre el elipsoide.

Latitud geodésica (ϕ)

Es el ángulo formado entre el plano ecuatorial y la normal al punto considerado, siguiendo la dirección de un meridiano. Convencionalmente se relaciona el origen de las latitudes con el eje 'Y'. De esta manera se diferencia las coordenadas del hemisferio Norte y Sur, utilizando valores positivos para el hemisferio Norte y negativos para el hemisferio Sur (-). También se suele utilizar el prefijo N, S respectivamente.

Longitud geodésica (λ)

Es el ángulo diedro formado por un plano meridiano de origen (meridiano de Greenwich) y el plano meridiano del punto considerado. Convencionalmente se relaciona la línea de origen con el eje $X=0$ del sistema cartesiano. Para diferenciar las coordenadas 'Este' y 'Oeste' se utiliza el signo positivo (+) o negativo (-) respectivamente; se utiliza también los prefijos E, W.

Altura elipsoidal (h)

La altura elipsoidal, es la distancia entre el punto considerado y la superficie del elipsoide medida a lo largo de la normal al mismo. Las coordenadas geodésicas de cualquier punto, queda definida por estas tres coordenadas. Latitud (ϕ), longitud (λ) y altura elipsoidal (h).

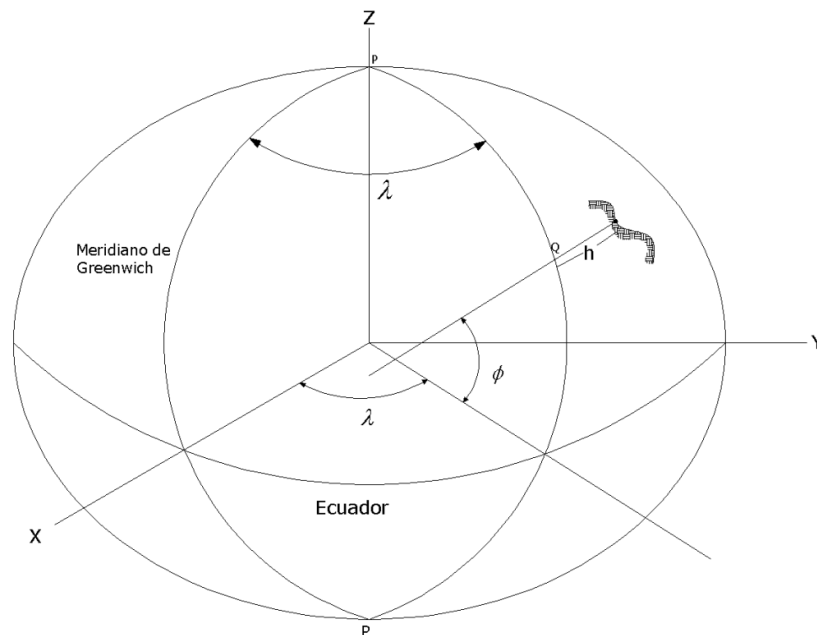


Figura N° 4. Coordenadas Geodésicas

2.4 GEOMETRÍA DEL ELIPSOIDE⁴

2.4.1 Normal principal o gran normal N.

La normal principal se determina según el segmento entre un punto cualquiera sobre elipsoide y su intersección con el eje menor siguiendo la normal al punto (ver figura 5). Se puede deducir el valor de la normal principal a partir de los parámetros elipsoidales y de la latitud geodésica de un punto.

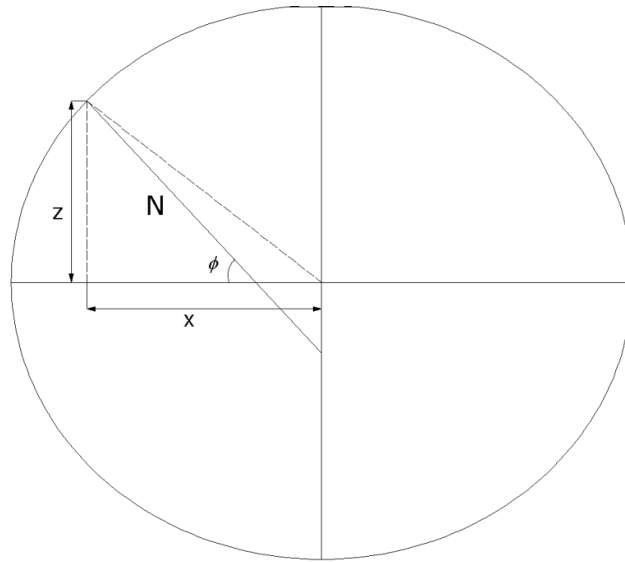


Figura N° 5. Normal principal o gran Normal

La normal principal se calcula mediante la expresión:

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}}$$

⁴ Para desarrollo y deducciones de las formulas, consultar: Zakatov, PS. "Curso de Geodesia Superior". Editorial MIR. Moscú 1981.

2.4.2 Radio de curvatura de la elipse meridiana

Si tomamos un punto P sobre el elipsoide, y siguiendo por el meridiano hasta otro punto Q a una distancia infinitesimal del primero, se obtendrá un arco diferencial del meridiano (ver figura N° 6), existe por lo tanto, para ese arco diferencial, un radio único que contiene al segmento. Este se denomina radio de curvatura de la elipse meridiana M. También se suele denominar ρ .

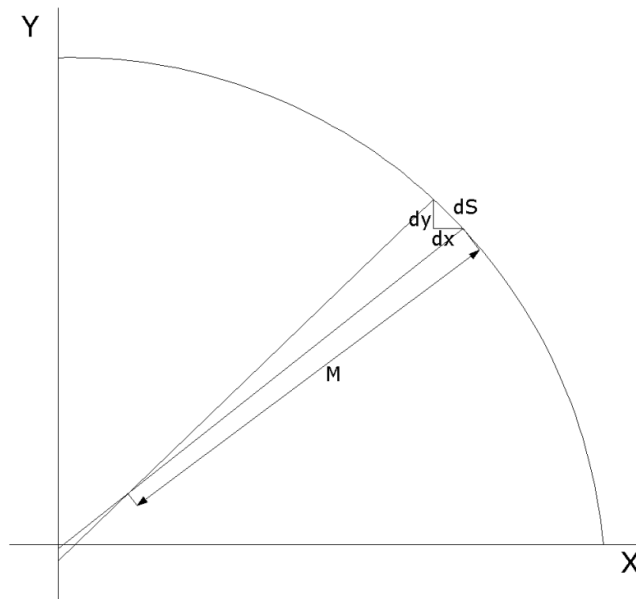


Figura N° 6. Radio de curvatura de la elipse meridiana

Se puede deducir su valor a partir de los parámetros del elipsoide y de la latitud geodésica. El radio de curvatura se calcula mediante la expresión:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^3}}$$

Los dos valores N y M son fundamentales para el estudio del elipsoide, son llamados *radios de curvatura de las secciones principales en cada punto*. Una de las secciones es el propio meridiano, y la otra la producida al elipsoide por el plano que contiene a la normal en el punto es perpendicular a dicho plano. Todos los puntos sobre elipsoide tendrán radios de curvatura entre N y M.

Tanto N como M dependen de la latitud del punto (y de los parámetros del elipsoide) por lo que puntos sobre un mismo paralelo tendrán los mismos valores de curvatura.

2.4.3 Arcos sobre el elipsoide

Un arco de paralelo sobre el elipsoide valdrá, teniendo en cuenta que el valor de N para una latitud ϕ será $N \cdot \cos \phi$ y teniendo una diferencia de longitud $\Delta\lambda$. Como el valor de curvatura es el mismo para todo el desarrollo, se tiene:

$$S_p = N \cdot \cos \phi \Delta\lambda$$

Un arco diferencial medido sobre un meridiano valdrá $ds = M \cdot d\phi$, luego se integra para todo el meridiano, siendo el valor de M variable para cada punto.

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M \cdot d\phi$$

Realizando reemplazos y algunas operaciones podemos escribirlo como:

$$s = M_m \Delta\phi \left[1 + \frac{e^2}{8} \Delta\phi^2 \cos 2\phi_m \right]$$

2.4.4 La línea geodésica.

Se entiende por línea geodésica, a aquella curva trazada sobre una superficie no plana y que cumple con ser la distancia más corta entre dos puntos. Sobre el elipsoide la línea geodésica posee doble curvatura. Analíticamente se puede definir por el teorema de Clairaut, quien señala que a lo largo de la geodésica el producto del radio del paralelo por el seno del acimut es una cantidad constante.

Matemáticamente se expresa:

$$r_a \operatorname{sen} z_a = r_b \operatorname{sen} z_b$$

“Esta propiedad indica que al aumentar la latitud y disminuir el radio del paralelo, la línea geodésica deberá ir curvándose, o aumentando su acimut, hasta llegar al punto más alto, en el que el acimut “Z” vale 90 grados, punto en el cual el radio del paralelo alcanza su mínimo valor. A partir de ese punto, la geodésica comienza a descender hacia el Ecuador”⁵ (ver figura 7).

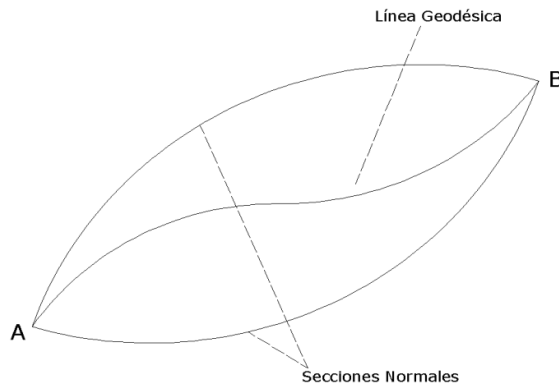


Figura N° 7. La línea geodésica

Se puede demostrar que el radio de curvatura de la línea geodésica es:

$$R = \frac{M}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 Z_e)}$$

⁵ Asin, Fernando. “Geodesia y Cartografía Matemática”. Pág. 172.

2.5 CONVERSIÓN DE COORDENADAS

Podemos establecer ahora, las relaciones matemáticas que nos permitan convertir coordenadas cartesianas en coordenadas geodésicas y viceversa. No se desarrollará la deducción de las mismas, solo se transcribirán las fórmulas de interés:

Geodésicas a Cartesianas

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \\ Z &= (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Cartesianas a Geodésicas

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan \left[\frac{Z + be^2 \operatorname{sen}^2 \psi}{d - ae^2 \cos^3 \psi} \right] \\ \lambda &= \arctan \frac{X}{Y} \\ h &= \frac{d}{\cos \phi} - N \end{aligned}$$

Donde: $d = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$\psi = \arctan \frac{a \cdot Z}{b \cdot d}$$

2.6 SISTEMAS Y MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS⁶

En primer lugar veamos algunas definiciones en cuanto a sistemas de referencia, marcos de referencia y datum.

Sistema de referencia: definición de modelos, parámetros, constantes, etc. que sirven como base para la descripción del estado geométrico o de los procesos físicos de la tierra. Por ejemplo sistema cartesiano tridimensional ortogonal con el eje Z paralelo al eje de rotación de la tierra, el eje X pasando por el meridiano de Greenwich.

Un sistema de referencia espacial es el que permite establecer una correspondencia biunívoca entre una triada de valores ordenados y los puntos en del espacio. Un sistema de referencia geodésico es un recurso matemático que permite asignar coordenadas a puntos sobre la superficie terrestre.

Marco de referencia: realización (materialización) de un sistema de referencia por un juego de entidades físicas y matemáticas (por ejemplo un número de puntos monumentados sobre la superficie terrestre con sus coordenadas geocéntricas X Y Z o elipsoidales).

Un marco de referencia constituye la materialización del sistema de referencia sobre la superficie terrestre. De manera práctica un sistema de referencia se materializa a través de la construcción de mojones geodésicos, los cuales son colocados en una determinada región. Dichas coordenadas son el resultado de un proceso de medición, por lo cual están afectadas por errores. Un mismo sistema de referencia puede corresponderle más de un marco de referencia producto de la materialización de dicho sistema en distintas regiones o países.

Datum geodésico: parámetros que conectan las mediciones con el sistema de referencia, por ejemplo tamaño y orientación de un elipsoide de referencia (semieje mayor 6378137 m y achatamiento $f=1:198.257$), y su orientación con respecto al sistema dadas por las desviaciones de la vertical y las ondulaciones del geoide.

⁶ Definiciones y figuras N° 8, 9 y 10 extraídos de: Drewes, Herman y otros. "Curso de Sistemas de referencia". Instituto Alemán de Investigaciones Geodésicas.

Los sistemas de referencia no se definen por mediciones, sino que se definen convencionalmente; las coordenadas y direcciones geodésicas no son valores estimables, éstas requieren de una base (sistema de ejes coordenados) al cual referirse; mientras que las distancias y ángulos son independientes del sistema de referencia, (excepto la escala de las distancias).

El datum geodésico se define, tradicionalmente, por una convención arbitraria. Su orientación respecto a un sistema de referencia se realiza posteriormente por observaciones superiores.

2.6.1 Sistemas clásicos de Referencia

Como forma de solucionar el problema del origen de las coordenadas, la geodesia clásica creó soluciones particulares, aplicables a espacios limitados –en comparación con la superficie terrestre- como ser la extensión de un país.

Los sistemas clásicos de referencia se definen por un datum local. Se define un punto fundamental en que se determinan los parámetros necesarios para la orientación (dirección) y el origen de un sistema de coordenadas.

- Las coordenadas de origen se determinan por observaciones astronómicas de precisión.*
- La orientación, por un azimut astronómico, asignando una desviación de la vertical igual a cero.*
- La escala se deriva de una línea base medida, por observaciones de alta precisión.*

De este punto central se extiende el sistema por grandes redes de triangulación o trilateración, sobre toda el área de interés. La precisión que se alcanzaba en puntos de primer orden era de 5 a 10 ppm (partes por millón). Sin embargo a medida que nos alejamos del punto datum, las precisiones irán disminuyendo producto de los errores propios de las mediciones y ajustes de la red. La eficacia de los sistemas depende de la óptima relación que exista entre las superficies del geoide y el elipsoide.

Son muy homogéneos en las cercanías del punto fundamental, donde el geoide y el elipsoide son tangentes, pero a medida que nos alejamos de dicho punto, aumenta la separación entre ambas superficies al mismo tiempo que lo hacen las perturbaciones de la gravedad.

La referencia vertical es independiente de la horizontal y se determina según el nivel medio del mar, a través de una red de mareógrafos. Luego se extiende una red de nivelación de precisión a lo largo del territorio. Así estos sistemas corresponden a sistemas bidimensionales, en los cuales el posicionamiento horizontal y vertical no está necesariamente relacionado en su concepción.

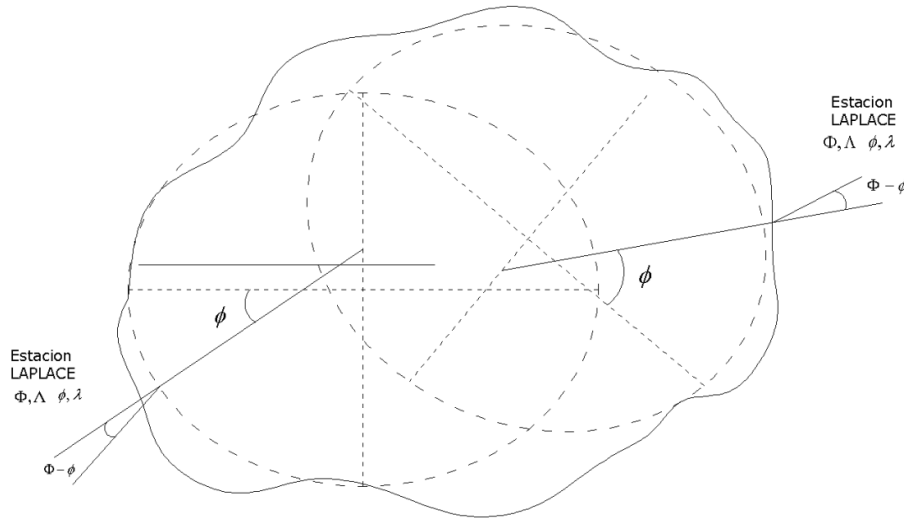


Figura N° 8. Sistemas clásicos de referencia

2.6.2 Sistemas de Referencia Globales

En la actualidad gracias a los grandes avances tecnológicos, la posibilidad de realizar mediciones de gran precisión a través de satélites artificiales, hace posible plantear un sistema a nivel global, siendo de esta manera totalmente obsoletos los métodos de la geodesia clásica. En los sistemas globales, el elipsoide de referencia asociado, está centrado en coincidencia con el centro de masas de la tierra. El ajuste entre el elipsoide y el geoide se plantea a nivel global. Se intenta que el elipsoide compense las ondulaciones del geoide.

Podemos mencionar entre los sistemas de referencia globales, el GRS 80, el WGS-84 sobre el cual están referidas las mediciones GPS y es el más difundido; el PZ-90 que emplea el sistema de navegación GLONASS desarrollado por la Unión Soviética. Existen entre ambos sistemas diferencias en la determinación del geocentro y en la orientación del eje de rotación de la tierra. También existen diferencias en cuanto a los parámetros que definen los elipsoides asociados.

Los parámetros que definen el sistema son fijos, lo que se van modificando son aquellos que definen la posición del origen, como consecuencia que cada día se va conociendo mejor la verdadera forma de la tierra. Estas mejoras que se van introduciendo al modelo del geoide geocéntrico dependen de las mediciones que van realizando las distintas entidades científicas y programas internacionales alrededor del mundo. Las tareas que se realizan para determinar el geoide son, entre otras: vinculación de geoides locales y regionales, mediciones para determinar el campo de gravedad terrestre, del océano y la atmósfera; medición de las anomalías de la gravedad, determinación de nivel de la superficie oceánica, vinculación de mareógrafos, etc.

El sistema WGS-84⁷

El acrónimo WGS-84 deviene de World Geodetic System 1984 (Sistema geodésico mundial 1984). Se trata de un sistema de referencia creado por la Agencia de Mapeo del Departamento de Defensa de los Estados Unidos de América (DMA) para sustentar la cartografía producida en dicha institución y las operaciones del Departamento de Defensa (DoD).

Este sistema geodésico estuvo estrechamente ligado al desarrollo del sistema GPS sirviendo durante mucho tiempo para expresar las posiciones tanto de los puntos terrestres como de los satélites integrantes del segmento espacial (a través de las efemérides transmitidas).

El WGS 84 no es sólo un sistema geocéntrico fijado a la tierra (ECEF) de ejes X, Y, Z sino además un sistema de referencia para la forma de la tierra (elipsoide) y un modelo gravitacional.

⁷ Extraído de la publicación "Sistemas Geodésicos" elaborado por el Comité Nacional de la Unión Geofísica y Geodésica Internacional.

El WGS-84 se ha popularizado por el uso intensivo de GPS y se han determinado parámetros de transformación para convertir coordenadas a todos los sistemas geodésicos locales y otros sistemas geocéntricos.

El WGS 84 es un Sistema Convencional Terrestre (CTS) tal que:

- *El origen de coordenadas X Y Z es el centro de masas de la Tierra,*
- *El eje Z pasa por el polo convencional terrestre (CTP) definido por el Bureau Internacional de la Hora (BIH).*
- *El eje X es la intersección entre el meridiano origen de longitudes definido por el BIH para la época 1984.0 y el plano del Ecuador CTP,*
- *El eje Y completa con los ejes anteriores una terna derecha de ejes fijos a la Tierra, está en el Ecuador, a 90° al este del eje X,*
- *El origen de la terna así definida sirve además de centro geométrico del elipsoide WGS84, y el eje Z es su eje de revolución,*
- *El semieje mayor (a) del elipsoide 1984 mide 6378137 metros,*
- *El achatamiento (a-b)/a siendo b el semieje menor, es 1/298.257223563*
- *Otros parámetros, además de los anteriores, son:*
- *Constante de gravitación terrestre $GM = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$*
- *Velocidad angular de la tierra $w = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad/seg}$*
- *Coefficiente gravitacional de segundo grado normalizado $C20 = - 484.16685 \times 10^{-6}$*
- *Velocidad de la luz en el vacío $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$*

Cuando el origen del sistema se encuentra en el centro de masa de la tierra y la posición de los ejes coincide con las definiciones del IERS (Servicio Internacional de Rotación de la Tierra), este sistema adquiere el nombre de ITRS (Sistema Internacional de Referencia). A su vez le corresponde el marco ITRS (Internacional Terrestrial Reference Frame), al cual se le agrega la época en el que fue determinado; ej. ITRF 94.

Es importante conocer el año de determinación porque, por una parte, los parámetros del origen han sido establecidos para esa fecha y por otra parte como la corteza terrestre se mueve continuamente, esta arrastra los mojones que conforman el marco de referencia, alterando las coordenadas. Cada vértice tendrá las tres coordenadas cartesianas, definidas para un determinado año y una cuarta coordenada definida como un vector de velocidad de desplazamiento. Si comparamos las coordenadas de un punto medidos en tiempo diferentes encontraremos diferencias.

La Asociación Internacional de Geodesia recomienda el uso de ITRF para las aplicaciones geodésicas de alta precisión y mediciones de procesos geodinámicos. El ITRF provee coordenadas y velocidades de los puntos de la red. Para las aplicaciones topográficas, topométricas, microgeodésicas, cartografía y navegación el uso del sistema WGS-84.

En resumen:

Los sistemas modernos de referencia se definen por un datum global:

- el origen es el centro de masa de la tierra (geocentro)
- la orientación se da por el eje de rotación de la tierra.
- la escala se da por la velocidad de la luz o la constante geocéntrica GM

Este sistema global se densifica mediante redes regionales partiendo de las estaciones del Sistema de Referencia Global

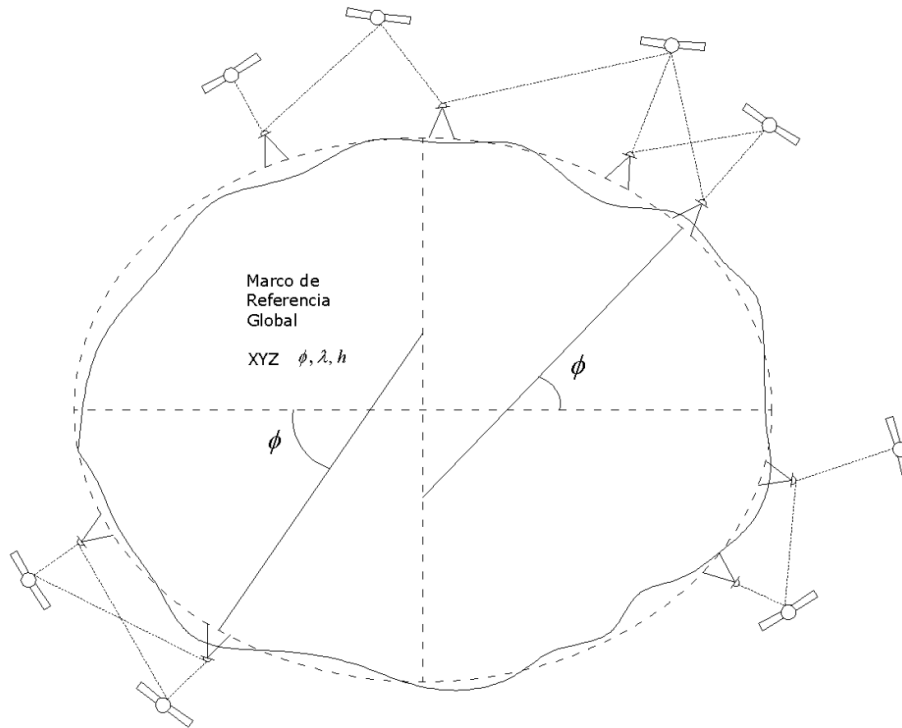


Figura N° 9. Sistemas globales de referencia

2.6.3 Sistema de referencia local. Topocéntrico Físico

En nuestros levantamientos topográficos clásicos, empleamos generalmente un sistema de coordenadas topocéntricas, el cual no es otra cosa más que un Sistema Local plano, consiste en una terna ordenada de ejes cartesianos que cumplen con:

- El eje X orientado hacia un norte arbitrario
- El eje Y normal y dextrógiro (giro a hacia la derecha) al eje X
- El eje Z coincidente en cada estación con la normal a la superficie de nivel que pasa por el punto (vertical del lugar).
- El plano horizontal de referencia es tangente a la superficie de nivel que pasa por la línea de los índices (90° - 270°) del instrumento.

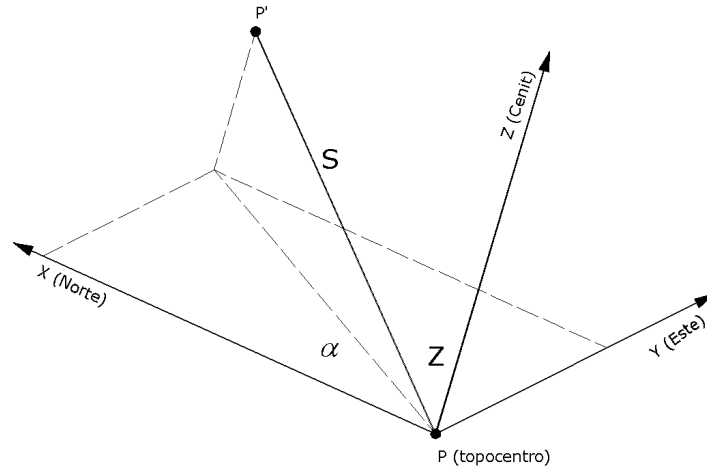


Figura N° 10. Sistemas Local Topocéntrico físico

La posición de un punto en el espacio queda determinada por dos coordenadas planas y un valor de altura sobre el plano horizontal de referencia. En general se emplean dos orígenes independientes y arbitrarios, un datum planimétrico y uno altimétrico.

No hay forma de relacionar dos levantamientos topográficos que fueron hechos apoyándose en sistemas locales distintos, salvo que entre ellos existan por lo menos dos puntos comunes. Luego estudiaremos como resolver este problema aplicando una transformación bidimensional (ver anexo 4).

Este tipo de sistemas locales está vinculado al campo de gravedad de la tierra, en cada estación el eje Z coincidirá con la vertical del lugar. Posteriormente estudiaremos más detalladamente esta cuestión.

2.7 SISTEMA DE REFERENCIA VERTICAL⁸

2.7.1 Introducción

Cuando se efectúan relevamientos por medios satelitales, por ejemplo con receptor GPS, el problema altimétrico debe ser tratado cuidadosamente. Las alturas que se obtienen con GPS (h) están referidas a un determinado elipsoide y tienen un claro significado geométrico: h es la distancia del punto relevado respecto de la superficie del elipsoide medida a lo largo de la normal al mismo.

En cambio las cotas que se obtienen de una red de nivelación convencional (H), por ejemplo las redes de nivelación del IGM, en primera aproximación pueden considerarse alturas con respecto al Nivel Medio del Mar (geoide). Sin embargo, esto es rigurosamente cierto solo si se corrigen las observaciones por mediciones de gravedad.

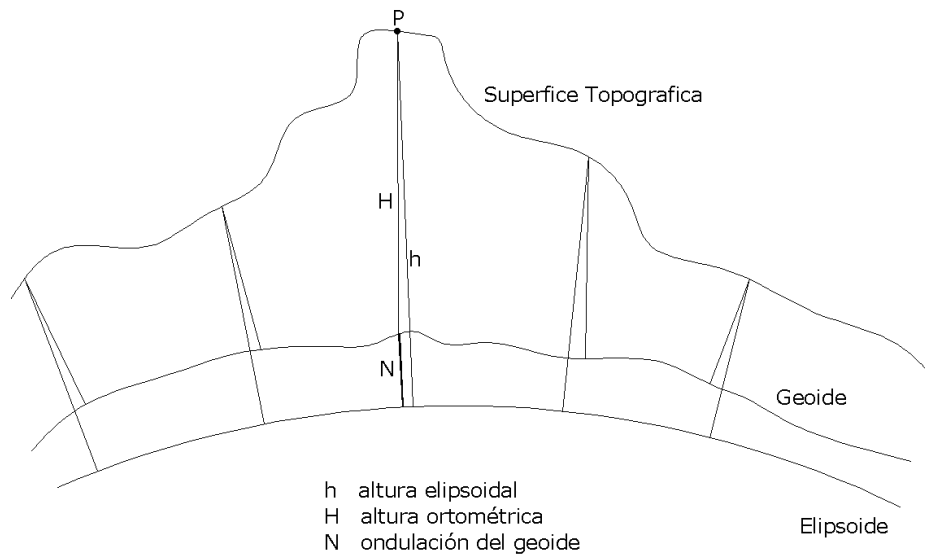


Figura N° 11. Altura elipsoidal y ortométrica.

La relación entre ambas es la siguiente: $N = h - H$; Siendo N la ondulación del geoide respecto del elipsoide de referencia.

⁸ Texto y figuras extraídos de la publicación Sistemas Geodésicos. Elaborado por el Comité Nacional de la Unión Geofísica y Geodésica Internacional.

Resulta claro que si se dispone de un modelo (de geoide) a partir del cual calcular valores de N para cualquier sitio, podemos transformar alturas elipsoidales (h) obtenidas con GPS, en alturas sobre el nivel medio del mar.

La obtención de la altura elipsoidal no es una tarea elemental. Es necesario tener muy claro en qué sistema de referencia se obtienen las coordenadas GPS y a qué elipsoide está referida la altura. Este punto es muy delicado porque como se puede advertir que las ondulaciones del geoide (N) también se refieren a un sistema determinado (y a un elipsoide asociado) que tiene que ser el mismo que el utilizado para el cálculo de h .

El 70% de la tierra, la superficie media de los océanos, materializa una superficie de nivel del campo de gravedad terrestre (superficie de potencial gravitatorio constante o equipotencial). Se puede suponer que está extendida debajo de los continentes y determinada por la atracción producida por la distribución desigual de las masas terrestres. A esta superficie se la designa como GEOIDE y se la puede definir como la superficie de nivel que mejor se ajusta al nivel medio del mar.

El geoide no es una superficie analítica, por lo que no es apto como referencia para la determinación de posiciones. En cambio, sí es adecuado como superficie de referencia para diferencias de potencial o altura, dadas por nivelación directa (geométrica) en combinación con mediciones de gravedad.

Para establecer el origen del geoide como una superficie de referencia para las alturas, el nivel del agua del océano se registra en áreas costeras utilizando aparatos registradores de marea (mareógrafos), y se promedia para períodos largos, idealmente unos 19 años. El nivel medio del mar así obtenido representa una aproximación al geoide. En nuestro país el origen lo proporcionó el mareógrafo ubicado en el puerto de Mar del Plata, y constituye el 0(cero) oficial de nuestro país.

2.8 TIPOS DE ALTURA

La altura de un punto sobre la superficie terrestre es la distancia existente, sobre la línea vertical, entre éste y una superficie de referencia (datum vertical). Su determinación se realiza mediante un procedimiento conocido como nivelación, el cual, a su vez, puede ser barométrico, trigonométrico, geométrico o espacial. Sin embargo, debido a la influencia del campo de gravedad terrestre en el proceso de medición, los resultados obtenidos deben ser cualificados involucrando correcciones gravimétricas.

En el proceso convencional de determinación de alturas, el telescopio del instrumento es tangente a la superficie equipotencial local y la línea de la plomada coincide con el vector de la fuerza de gravedad, el cual es perpendicular a aquellas superficies. De aquí, las diferencias de nivel calculadas no solo reflejan las variaciones topográficas del terreno, sino que además consideran las alteraciones gravitacionales de la Tierra. La desviación que estas alteraciones generan sobre las alturas medidas puede ser cuantificada y tratadas de acuerdo con los conceptos físicos considerados en su procesamiento.

Así, las alturas utilizadas en Geodesia se clasifican según su determinación, su aplicación y el modelo matemático o físico considerado en su definición. Dentro de este marco, se distinguen alturas de tipo geométrico (niveladas y elipsoidales) y alturas de tipo físico (dinámicas, normales y ortométricas).

2.8.1 Alturas de tipo geométrico

2.8.1.1 Alturas niveladas

Son las obtenidas bajo el proceso de nivelación geométrica con métodos ópticos de medición. Las diferencias de nivel observadas varían de acuerdo con el campo de gravedad inherente al sitio en consideración.

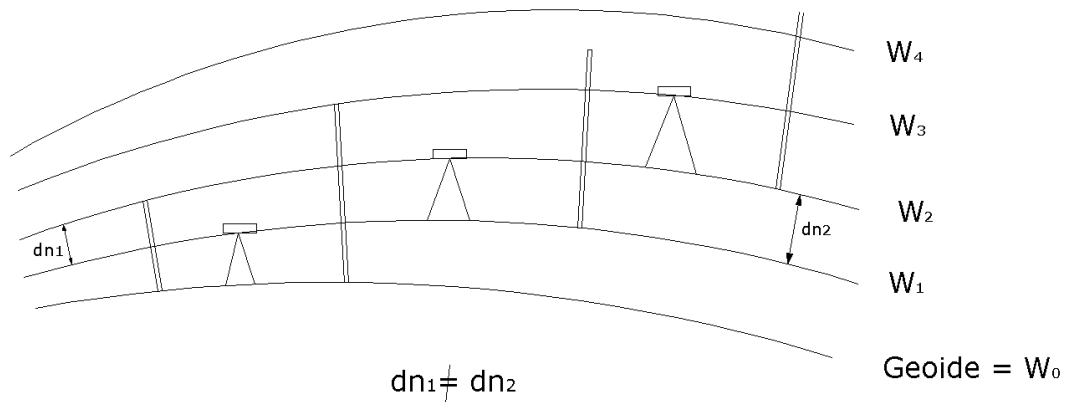


Figura N° 12. Alturas niveladas

Las cantidades observadas (dn) corresponden con la distancia existente entre las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre y su sumatoria permite conocer la diferencia de altura entre los puntos de interés. No obstante, debido a la forma elipsoidal de la Tierra y a la distribución irregular de sus masas internas, las superficies equipotenciales no son equidistantes; los valores de desnivel entre éstas, varían de acuerdo con el trayecto de medición.

Como estas alturas dependen del camino descrito en el proceso de nivelación, fácilmente pueden obtenerse diferentes valores de altura para un mismo punto, haciendo que sean utilizadas en áreas pequeñas que no requieren considerar ni la figura elipsoidal de la Tierra ni las variaciones de su campo de gravedad. Su aplicación práctica es efectiva solo en redes locales con, aproximadamente, 10 km de extensión.

2.8.1.2 Alturas elipsoidales

Las alturas elipsoidales (h) representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y el elipsoide. Dicha separación se calcula sobre la línea perpendicular a este último. Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X, Y, Z) definidas sobre un elipsoide de referencia.

Debido a la utilización masiva de la técnica GPS, es indispensable considerar este tipo de alturas en los registros oficiales de las cantidades directamente medidas. Sin embargo, como éstas no consideran el campo de gravedad terrestre en su determinación, pueden presentar valores iguales en puntos con niveles diferentes, o viceversa, haciendo que su aplicación en la práctica sea mínima. Tal circunstancia exige que éstas sean complementadas con otro tipo que sí considere el campo de gravedad terrestre.

2.8.2 Alturas de tipo físico

Una manera de determinar las distancias reales entre las superficies de nivel es cuantificando sus diferencias de potencial, las cuales al ser sumadas en un circuito cerrado siempre serán cero y los resultados obtenidos, por diferentes trayectorias, serán iguales. Esto debido a que los valores de potencial son unívocos y dependen solamente de la posición. En la práctica, estas diferencias corresponden con los resultados de las nivelaciones clásicas combinadas con los valores de gravedad registrados en la zona de interés. La diferencia de potencial entre cada punto de cálculo y el geoide (principal superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre) se conoce como número geopotencial:

$$\int_0^A g \, dn = W_0 - W_A = C$$

Siendo g la gravedad observada en el punto de cálculo, dn diferencial en altura, W_0 el potencial sobre el geoide y W_A el potencial sobre la superficie que pasa por el punto de cálculo. La dimensión de los números geopotenciales es $[m^2/s^2]$, la cual no representa una longitud, haciendo que su utilización en la práctica no sea conveniente. Estos números pueden ser expresados en unidades de distancia al ser divididos por algún valor convencional de gravedad:

$$\text{altura } (H) = \frac{\text{numero potencial } (C)}{\text{valor de gravedad } (G)}$$

La clase de altura (H) obtenida al resolver la expresión, dependerá del tipo de gravedad (G) incluida. Si G corresponde con el valor medio de gravedad teórica (normal) entre la estación y la superficie de referencia, la altura calculada será normal. Mientras que, si G equivale a un valor constante de gravedad teórica para un punto arbitrario, H es conocida como altura dinámica. Finalmente, si G es igual al valor medio de gravedad real entre el geoide y la estación evaluada, la altura estimada es llamada ortométrica.

2.8.2.1 Alturas dinámicas

Las alturas dinámicas se calculan al dividir los números geopotenciales por un valor constante de gravedad (γ_{cte})

$$H_{(din)} = \frac{C}{\gamma_{cte}}$$

La ventaja de las alturas dinámicas radica en que, valores iguales de éstas representan una superficie equipotencial del campo de gravedad, es decir; una superficie de agua en calma en cualquier elevación sobre el geoide tiene siempre la misma altura dinámica. Estas alturas se obtienen a partir de las niveladas, mediante la aplicación de correcciones que expresan los incrementos o decrementos, en altura, generados por involucrar un valor constante de gravedad.

La principal desventaja de este tipo de alturas está en que, por causa de la convergencia de las superficies equipotenciales (especialmente en dirección Norte-Sur) la distancia geométrica entre ellas varía ostensiblemente (5×10^{-3} unidades del Ecuador a los polos), sin alterarse su altura dinámica. Por ejemplo, si se consideran dos superficies equipotenciales, cuya distancia geométrica es de 100 m en el Ecuador, su equivalencia en los polos será de 99.5 m, mientras que, su altura dinámica siempre será constante.

2.8.2.2 Alturas normales

En las alturas normales los números geopotenciales no son divididos por un valor constante de gravedad sino, por el valor medio de la gravedad normal entre la superficie de referencia (denominada cuasi-geoide) y el punto en consideración (γ')

$$H_{(norm)} = \frac{C}{\gamma'}$$

γ' se obtiene a partir de la fórmula de la gravedad normal terrestre, la cual está sólo en función de la latitud geográfica del punto y es generada para el elipsoide de referencia utilizado. Las correcciones normales que se aplican a las alturas niveladas son más pequeñas que las de las alturas dinámicas, ya que considera la convergencia de las superficies equipotenciales.

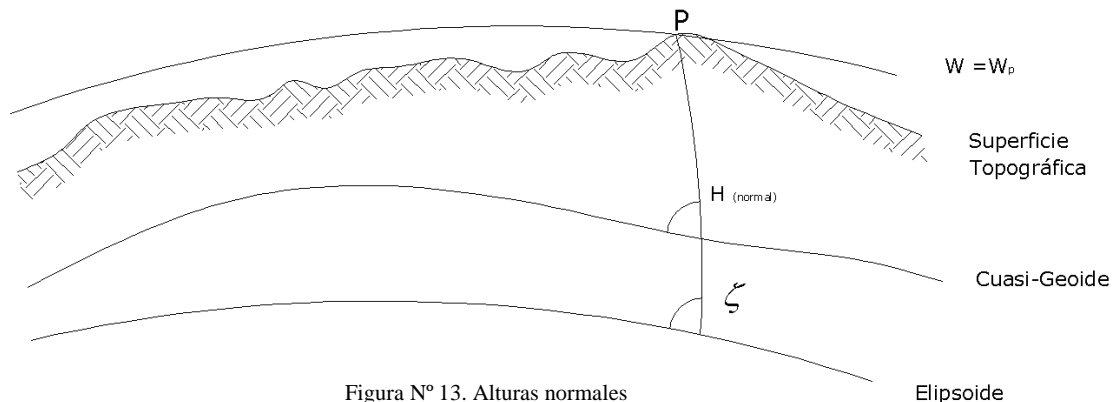


Figura N° 13. Alturas normales

De acuerdo con lo expuesto, estas alturas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales si se les descuenta la ondulación del cuasi-geoide, la cual es conocida como anomalía de altura o altura anómala (ζ):

$$H_{(norm)} = h - \zeta$$

ζ se obtiene a partir de los cálculos geoidales realizados por métodos gravimétricos o satelitales.

2.8.2.3 Alturas ortométricas

El cálculo de las alturas ortométricas es similar al de las normales, sólo que los números geopotenciales son divididos por el valor medio de la gravedad verdadera (g') entre el punto evaluado y el geoide.

$$H_{(ortom)} = \frac{C}{g'}$$

El inconveniente que presentan estas alturas se basa en que no es posible conocer el valor de g' . Normalmente, la gravedad real es medida sobre la superficie topográfica y continuarla, hacia abajo, a lo largo de la línea de la plomada, requiere de la formulación de modelos sobre la distribución de densidad de las masas terrestres. De esta manera, los valores de altura ortométrica calculados dependen de las hipótesis utilizadas en el modelamiento de la densidad. Los métodos más comunes en la determinación de alturas ortométricas corresponden con las hipótesis de Helmert, Vignal, Baranov y Aire Libre (Free Air).

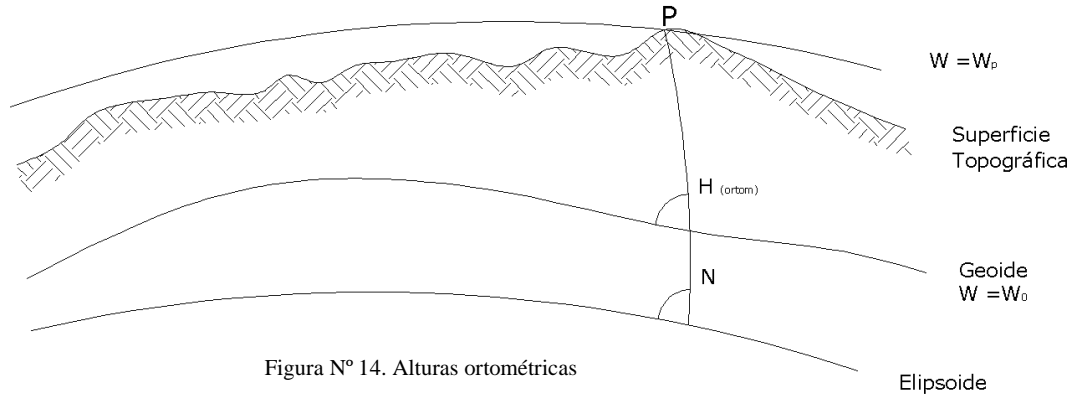


Figura N° 14. Alturas ortométricas

Las correcciones ortométricas aplicadas a las alturas niveladas están en el mismo orden que las utilizadas para la obtención de las normales. Sin embargo, la diferencia entre alturas ortométricas y normales (y con esto entre el geoide y el cuasi-geoide) depende de la discrepancia entre la gravedad verdadera modelada a través de alguna hipótesis y la gravedad normal, pudiéndose alcanzar valores de decímetros en estas diferencias.

Las alturas ortométricas pueden obtenerse a partir de las elipsoidales mediante la sustracción de las ondulaciones geoidales N :

$$H_{(ortom)} = h - N$$

Tanto en la determinación de N , como en el cálculo de g' y en la estimación de las correcciones ortométricas, se requiere de una hipótesis sobre la distribución de densidades de las masas terrestres, lo cual; a pesar de ser la misma en los tres cálculos, no garantiza la obtención de un conjunto homogéneo de alturas ortométricas y dificulta su combinación con las alturas obtenidas a partir de las elipsoidales.

2.9 DESVIACIÓN DE LA LÍNEA VERTICAL

Se denomina desviación de la línea vertical al ángulo que forma en cierto punto las normales a la superficie del geoide y del elipsoide, se designa generalmente con la letra u .

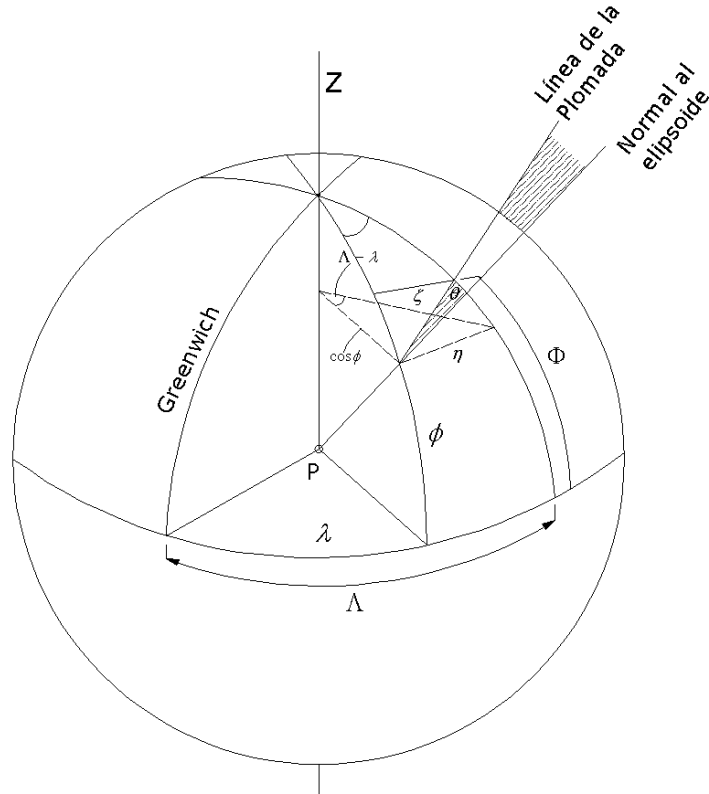


Figura N° 15. Desviación de la línea vertical

Las coordenadas astronómicas definen la posición de la vertical en un punto independientemente de considerar cualquier hipótesis sobre la forma de la tierra, ya que está referido a un valor físico del lugar. En general esta vertical no corta al eje de rotación de la tierra, debido a la distribución irregular de las masas en el interior de la tierra. Debemos añadir que la dirección de la gravedad en un punto de la superficie, sufre continuamente pequeñas variaciones, debida principalmente a la acción gravitatoria del sol y la luna.

En cualquier punto de la tierra, la gravedad (materializada por la dirección de la plomada) es normal a la superficie equipotencial que pasa por dicho punto. Las coordenadas geodésicas se obtienen utilizando los datos de observación y realizando con ellos los cálculos sobre una superficie de referencia, es decir el elipsoide.

En los sistemas geodésicos clásicos, por definición la normal al elipsoide y al geoide coinciden en el punto fundamental *datum*. En todos los demás puntos difieren, y el ángulo que forman ambas normales dependen de distintos factores: punto fundamental elegido, elipsoide de referencia, método de observaciones, coordenadas asignas para el punto datum, etc. En las cercanías del punto fundamental, los valores de desviación son prácticamente nulos, pero a medida que nos alejamos estos valores se acrecientan enormemente.

En los sistemas geocéntricos, este concepto de punto datum en donde ambas normales coinciden, pierde vigencia. En estos sistemas el datum se encuentra en el centro de masas de la tierra, se trata de lograr una solución elipsoide-geoide a nivel global. Como ambas superficies no son paralelas no existirá un punto donde ambas direcciones coincidan, sin embargo la desviación de la vertical tendrá valores pequeños para cualquier punto, no existiendo la heterogeneidad que ocurría en los sistemas clásicos.

Cuando nos referimos a sistemas geodésicos locales (sistemas clásicos) se denomina ***desviación relativa de la vertical***. Cuando el sistema es geocéntrico se denomina ***desviación absoluta de la vertical***.

El cálculo de la desviación de la vertical se realiza a través del estudio de las componentes que son las que realmente se determinan. La proyección sobre la superficie del meridiano se llama comúnmente ***componente de la desviación en el meridiano*** y representa por la letra ξ , y la proyección de la primera vertical sobre la superficie es la ***componente de la desviación de la primera vertical*** y representa por la letra η .

Se puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\xi = \Phi - \phi \quad ; \quad \xi = u \operatorname{sen} \Theta$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \quad ; \quad \eta = u \cos \Theta$$

Donde Φ , Λ corresponde a la latitud y longitud astronómica. El ángulo Θ es el acimut respecto a la superficie de la desviación de la línea vertical.

También se cumple:

$$u^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$\tan \Theta = \frac{\eta}{\xi}$$

El valor de desviación, para una dirección determinada será:

$$\vartheta_g = \xi \cos A_g + \eta \sin A_g$$

Si el cenit astronómico se desvía del geodésico al noroeste, o lo que es lo mismo, la desviación del vector de la fuerza real de gravedad se desvía hacia el Suroeste de la dirección normal, las componentes de la desviación de la plomada en el meridiano y de la primera vertical (ζ y η) se consideran positivas.

La desviación absoluta de la línea vertical depende solamente de la distribución de la masa de la tierra. La dirección de la línea vertical se determina en la superficie terrestre a partir de las observaciones astronómicas por medio de la deducción de las coordenadas astronómica. La desviación de la línea vertical puede obtenerse si se comparan las coordenadas geodésicas con las astronómicas. También es posible determinarla a través de métodos gravimétricos, basado en mediciones que determinen el potencial real de la gravedad de la tierra, o el potencial perturbador. La causa física que origina las desviaciones de las líneas verticales es una, y consiste en el apartamiento del campo de gravitación real de la tierra del normal.

Significado de las desviaciones de las líneas verticales:

- Las desviaciones de las líneas verticales permiten conocer las características de la separación del campo de gravitación real de la tierra del campo normal.
- Utilizando las desviaciones de las líneas verticales se resuelven muchos problemas de reducción de observaciones. Esto se debe a que las mediciones directas se hallan vinculadas a la línea vertical, mientras que los resultados de las mediciones se realizan sobre el elipsoide y están referidos a la normal a éste.
- Se establece una relación entre las coordenadas geodésicas y las coordenadas astronómicas.
- Se realiza la transición exacta del acimut astronómico al acimut geodésico, a través de la ecuación de Laplace.

“En promedio, para toda la tierra, las desviaciones de las líneas verticales constituyen una magnitud del orden de los ± 4 ”. Sin embargo, en regiones alejadas, y para un elipsoide de referencia tomado no del todo afortunadamente, estas alcanzan varias decenas de segundos. Desviaciones significativas de la plomada se observan no solo en los territorios de tipo montañoso sino también en regiones con relieve de carácter suave y llano”⁹

⁹ Zakatov P.S. “Curso de Geodesia Superior”. Pág. 384.

2.10 PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

2.10.1 Introducción

Una proyección cartográfica es la correspondencia matemática biunívoca entre los puntos localizados en la superficie de una esfera, elipsoide u otro cuerpo geométrico de referencia y sus transformados en un plano de proyección. Puesto que cualquier punto del elipsoide está definido por sus coordenadas geográficas (ϕ ; λ) y cualquier punto del plano lo está por sus coordenadas cartesianas (X, Y), existirá un número infinito de relaciones que ligen (ϕ ; λ) con (X,Y). Cada una de estas infinitas relaciones será un sistema de proyección cartográfico.

Sin embargo, antes de asumir esta definición como cierta, habrá que tener claro en una primera instancia, que una proyección cartográfica siempre introducirá algún tipo de distorsión o deformación en cuanto a las longitudes, áreas, ángulos o acimut que se puedan determinar por medio de ella. Debido a esto, la elección de la proyección mediante la cual se representará la superficie de la Tierra debe realizarse priorizando la o las característica geométricas que se deseen mantener para el proyecto en cuestión evitando con esto perjudicar la exactitud con que una proyección cartográfica puede representar el terreno.

En la actualidad es fundamental recuperar los conceptos básicos de la teoría cartográfica, ya que es habitual que las coordenadas de los puntos obtenidos a partir de mediciones GPS (latitud y longitud geodésica) sean convertidas en coordenadas planas de alguna proyección cartográfica. En muchas ocasiones, se utilizan una proyección sin considerar aspectos como la deformación lineal o la deformación en la superficie que introduce el sistema proyectivo.

La gran ventaja de la utilización de proyecciones cartográficas, es que todos aquellos problemas de cálculos de distancias, transporte de coordenadas, rumbos, etc., que sobre la superficie del elipsoide son complejos y demandan gran cantidad de cálculo, en el plano de proyección, usando la simple geometría euclidiana (plana) resolvemos todos los problemas topográficos que puedan presentarse. Sin olvidar por supuesto que debemos considerar los factores de deformación que introduce la proyección.

“El objetivo práctico final de los trabajos geodésico consiste en determinar la ubicación de los puntos geodésicos sobre la superficie del elipsoide de referencia tomado. La situación de estos puntos se puede determinar en diferentes sistemas de coordenadas. Es necesario calcular las coordenadas de los puntos en un sistema tal, que sea sencillo, que proporcione la mayor comodidad y agilidad al emplear las coordenadas en los diferentes objetivos prácticos. Dicho sistema es el **Sistema de coordenadas planas rectangulares** [...] en dicho sistema también se realizan cálculos de diferente tipo durante la proyección y construcción de distintas obras de ingeniería y al llevar a la práctica los proyectos”¹⁰.

Existe un número infinito de modos de realizar la transformación de una superficie esférica al plano, sin embargo solo algunas son de uso común, ya que es posible mediante arreglos matemáticos obtener características útiles para su utilización.

2.10.2 Módulos de Deformación

Es la relación que existe entre los elementos calculados sobre el elipsoide y su correspondiente en el plano, mediante estos módulos es posible determinar las condiciones que debe cumplir una proyección para mantener alguna característica en cuanto a conservación de ángulos, superficies o distancias.

Módulo de deformación lineal

Corresponde a la relación entre una unidad diferencial dl_1 calculada en el plano y su homólogo en el elipsoide. Se puede expresar:

$$L = \frac{dl_1}{dl}$$

Si el valor L es igual a la unidad, se dice que la proyección es automecoica o equidistante, en la que evidentemente no existirá diferencia entre una distancia medida en el plano y sobre el elipsoide.

¹⁰ Zakatov, PS. “Curso de Geodesia Superior”. Pág. 201.

Módulo de deformación angular

El ángulo que forman dos elementos lineales diferenciales en el elipsoide difiere del que forman sus imágenes en el plano, debido a las deformaciones. Esta diferencia de ángulo es el módulo de deformación angular; se define como:

$$A = \theta_1 - \theta$$

Aquellas proyecciones donde el valor $A=0$ se denominan proyecciones conformes.

Módulo de deformación superficial

Corresponde a la relación entre el área de un cuadrilátero diferencial sobre el elipsoide y su imagen sobre el plano. Se expresa:

$$S = \frac{dS_1}{dS} \quad \text{Cuando } S=1 \text{ se dice que la proyección es equivalente.}$$

2.10.3 Elipse Indicatriz de Tissot

Sobre cualquier superficie esférica, existe en cada punto un número infinito de direcciones ortogonales emparejadas (cortándose en ángulo recto). Cuando se realiza una transformación al plano, las direcciones de las emparejadas ortogonales sobre la esfera, se representarían mediante direcciones emparejadas sobre la proyección cartográfica, pero las parejas de direcciones no permanecerían necesariamente ortogonales. Si tangente al centro de un círculo diferencial localizado sobre el elipsoide, se sitúa un plano en el cual proyectar el círculo, se proyecta sobre este plano como una elipse, a la que denominamos “elipse indicatriz de Tissot”.

El teorema formulado por el matemático francés Tissot dice que: cualquiera sea el sistema de transformación, en cada punto de la superficie esférica existen por lo menos un par de direcciones ortogonales que serán también ortogonales sobre la proyección. Estas direcciones se denominan direcciones principales.

El módulo de deformación lineal valdrá alrededor de 1 en las diferentes direcciones de cada punto de una proyección y las desviaciones máximas de la deformación lineal ocurrirán en las dos direcciones principales. El valor mayor se denomina a y el menor b . a partir de estos valores se pueden calcular las distorsiones angulares y de superficie provocado en cualquier punto por cualquier sistema proyectivo.

Mediante un análisis de los cambios geométricos que se producen cuando el círculo se transforma en una elipse, se determina valor de la distorsión angular y el aumento o disminución de la superficie que se ha producido en cualquier punto. El estudio de las propiedades de la elipse se basa en conocer la orientación y longitud de los semiejes a y b , para determinar así las deformaciones inherentes al sistema proyectivo.

No profundizaremos más sobre el tema ya que se escapa del objetivo de este trabajo.

2.10.4 Campo de una Proyección

El concepto de campo es importante considerarlo en el estudio de las proyecciones, ya que establece un límite hasta donde puede aplicarse un desarrollo respecto del origen de la proyección, para poder aceptar las deformaciones que se van produciendo y que irán aumentando a medida que nos alejamos de dicho origen.

Por ejemplo puede interesar conocer que extensión puedo representar con una determinada proyección, para que la anamorfosis lineal no supere un cierto valor, supongamos 1.0005, lo que equivale a decir una deformación de 1:2000. Este valor define el campo de la proyección. Esta exigencia nos indica que si medimos una longitud sobre el mapa no debemos cometer un error, debido a la anamorfosis lineal, mayor a 1:2000, independientemente de la escala de representación.

Podemos decir que cuando encontremos alteraciones lineales de 1.0005, estaremos al límite de la aceptación de esa proyección. Más adelante veremos, en el estudio de la proyección transversa de Gauss, como este concepto de campo obliga a dividir el espacio a representar en distintas zonas o fajas.

2.11 CLASIFICACIÓN DE LAS PROYECCIONES

La categorización usual de las proyecciones se basa en características geométricas. Podremos clasificarlas según: método de construcción, superficie de proyección utilizada, situación de la superficie de proyección y según las propiedades que conserva.

2.11.1 Según método de construcción

Según su método de construcción podemos diferenciar las proyecciones geométricas, analíticas y convencionales.

1. Geométricas: se basan en principios de la geometría plana y espacial que determinan la posición de los puntos sobre la superficie proyectada con respecto a un punto de origen. Dentro de las geométricas tenemos:
 - a. Perspectivas: se originan a partir del trazado de rayos con origen en un punto denominado “foco” que proyecta la red de meridianos y paralelos sobre un plano tangente a la superficie de referencia.
 - Perspectiva Ortográfica: aquella en la cual los rayos yacen ortogonal al plano de proyección. Por lo tanto se asume el foco a una distancia infinita del plano de proyección.
 - Perspectiva Estereográfica: el foco de esta proyección está diametralmente opuesta al punto de tangencia de la superficie de referencia con el plano de proyección.
 - Perspectiva Gnomónica: aquella en la cual el foco se localiza en el frente de la superficie de referencia.

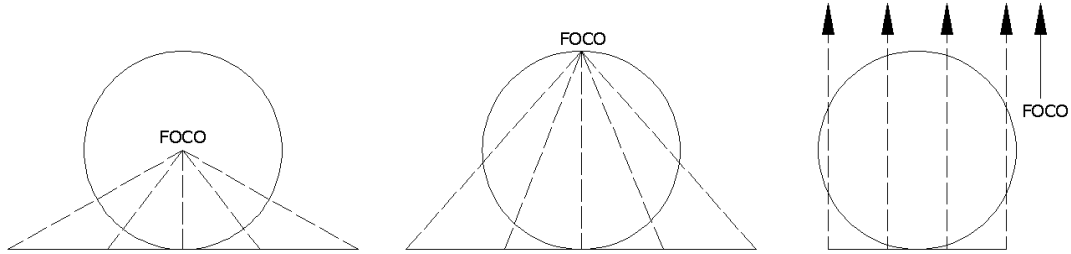


Figura N° 16. Proyecciones perspectivas.

- b. Pseudos-perspectivas: en este tipo de proyecciones, se utilizan ciertos artificios para obtener alguna característica especial de la proyección. Por ejemplo, aquellas proyecciones perspectivas en que el foco se sitúa en el punto diametralmente opuestas a cada elemento a proyectar.
2. Analíticas: pierden el sentido geométrico en beneficio de la mantención de algunas propiedades especiales.
 3. Convencionales: a diferencias de las analíticas, estas se basan en convenciones arbitrarias en función de las cuales determinan sus expresiones matemáticas.

2.11.2 Según superficie de proyección utilizada

Se refiere a si la superficie utilizada para proyectar es un plano o una superficie desarrollable. Se puede dividir en:

- Planas o acimutales: se considera el plano de proyección como tangente o secante al datum de referencia. Comúnmente se denominan acimutales porque conserva el acimut para los puntos coincidentes con el lugar de tangencia.
- Desarrollables: parten de una superficie desarrollable que “envuelve” a la figura de referencia, como es el caso de un cilindro, un cono, varios conos sucesivos (polidrédrica) o un poliedro para luego extenderlo y formar el plano de proyección.

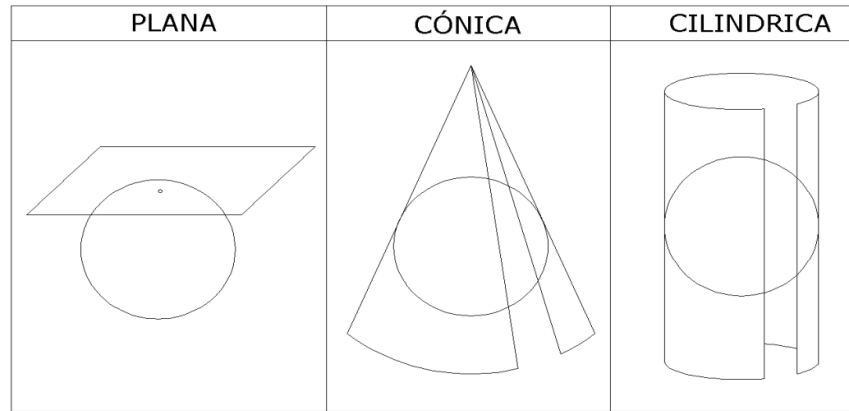


Figura N° 17. Clasificación según superficies de proyección

2.11.3 Según la situación de la superficie de proyección

Esta clasificación se realiza en función de la posición espacial de la superficie de proyección.

Las proyecciones planas se clasifican en:

- Polares: centro de proyección en el polo y eje de rotación perpendicular al plano de proyección.
- Ecuatoriales: centro de proyección coincidente con el Ecuador y eje de rotación paralelo al plano de proyección.
- Oblicuas: centro de proyección en un lugar distinto al polo y el Ecuador, es decir el eje de rotación permanece inclinado respecto al plano de proyección.

Las proyecciones desarrollables se clasifican en:

- Normal o Ecuatorial: el eje del cono o cilindro coincide con el eje de rotación.
- Transversa o meridiana: el eje del cono o cilindro perpendicular al eje de rotación.
- Oblicuas: el eje del cilindro o cono inclinado respecto al eje de rotación.

Situación de la superficie de proyección

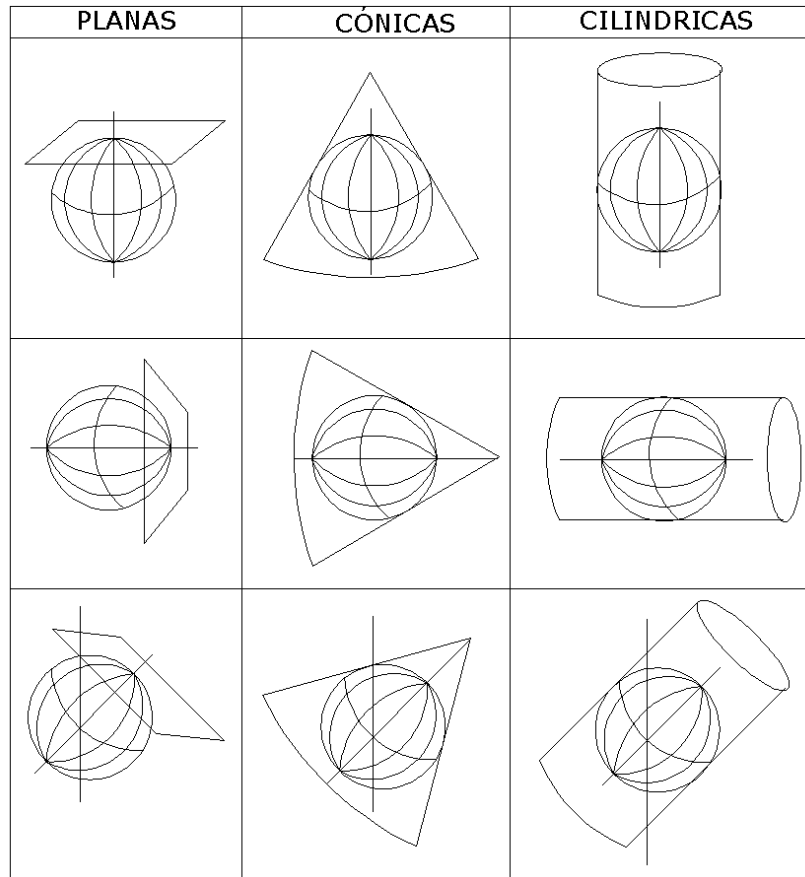


Figura N° 18. Situación de la superficie de proyección

2.11.4 Según las propiedades que conserva

- **Proyecciones Automecóicas o Equidistantes:** son aquellas que cumplen con tener deformaciones lineales nulas, es decir manteniendo constante la relación entre una distancia medida en el plano de proyección y la magnitud lineal en la superficie de referencia. Poseen un módulo de deformación lineal nulo. Esta condición de equidistancia es válida solo para algunas líneas proyectadas. Podemos diferenciarla según estas líneas: equidistante meridiana, equidistante transversal (sobre los paralelos) y equidistante acimutal (sobre las líneas de círculos máximos que pasan por el centro de la proyección).

- **Proyecciones Equivalentes:** son aquellas cuya relación entre la superficie sobre el plano de proyección y la superficie sobre la superficie de referencia se mantienen constante. El módulo de deformación superficial es unitario.

- **Proyecciones Conformes:** son aquellas que mantienen como ángulos rectos la intersección de los meridianos y paralelos. Al cumplirse esto se mantienen las formas de un elemento en un entorno restringido de extensión. Este tipo de proyecciones son de gran interés en geodesia y cartografía, ya que permiten realizar transformaciones angulares precisas, con relativa sencillez, entre el plano de proyección y la superficie del elipsoide.

- **Proyecciones Afiláticas:** no mantienen ni las áreas, los ángulos o la escala lineal; sin embargo mantienen alguna propiedad importante para destacar y justificar su construcción. Por ejemplo la proyección gnómica, si bien no mantienen ninguna de las propiedades antes mencionadas, cumple con representar las loxodrómicas¹¹ como líneas rectas, lo que facilita la navegación apoyada en la cartografía.

¹¹ Loxodrómica: curva que en la superficie terrestre forma un mismo ángulo en su intersección con todos los meridianos; es utilizada para navegar con un rumbo constante.

2.12 PROYECCIONES CONFORMES

Una proyección conforme, es aquella que mantiene los ángulos entre el plano de proyección y la superficie del elipsoide. Para que se cumpla la condición de conformidad, la intersección de los paralelos y meridianos debe formar ángulo recto y la escala debe mantenerse alrededor de cada punto. La deformación angular A será para un punto cualquiera igual a 0 (cero).

$$A = \text{ángulo en el plano} - \text{ángulo en el datum horizontal} = 0$$

En una proyección conforme todas las relaciones angulares están retenidas en cada punto, vale decir, $a = b$ para todos los lugares y lo único que cambia es el factor escala. Un punto es tan exacto como otro únicamente las escalas son distintas. Por otro lado, la variación en la superficie es una distorsión, y el cambio sistemático de superficie de un lugar a otro puede provocar una marcada distorsión de formas si se cubre un área muy extensa.

2.12.1 Utilización de las proyecciones conformes

Para la representación de una extensión reducida de terreno, la utilización de un plano como superficie de referencia resultará suficiente teniendo en cuenta que, los errores introducidos por considerar esta hipótesis, son inferiores a los errores propios del levantamiento. Sin embargo cuando debemos representar una superficie extensa, por ejemplo el casco urbano de una gran ciudad, la traza de una obra lineal de gran extensión, será necesario considerar la esfericidad de la tierra.

Para este tipo de levantamiento las proyecciones conformes cumplen con los requisitos necesarios para los levantamientos geodésicos, topográficos y urbanos; representan correctamente los ángulos, hace posible la corrección de las medidas lineales de manera relativamente sencillas, considera al elipsoide como superficie de referencia. La proyección conforme es una herramienta de representación cartográfica y un instrumento que simplifica el cálculo geodésico.

2.12.2 Condiciones de conformidad

Para que una proyección sea conforme, se requiere que los incrementos diferenciales de arcos de meridianos sean iguales a los paralelos, es decir, que la indicatriz de Tissot resultante posea valores $a=b$. esto significa que para cada punto existe una única escala válida para todas las direcciones, pero distinta de un punto a otro. Esta característica señala la conformidad de la proyección.

Podemos resumir la condición de conformidad a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una proyección será conforme si cumple:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos \phi \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Existen cuatro proyecciones conformes de uso común: la de *Mercator*, la *Transversal Mercator*, la *Cónica Conforme de Lambert* con dos paralelos estándar, y la *Estereográfica*. A continuación desarrollaremos el estudio de la proyección Transversal de Mercator.

2.13 PROYECCIÓN TRANSVERSAL DE MERCATOR

2.13.1 Introducción

Esta proyección fue concebida inicialmente por el científico alemán Johann Heinrich Lambert en 1772, pero su desarrollo analítico se adjudica a Carl Friederich Gauss. De aquí que se conoce también como *conforme de Gauss*. Es rigurosamente conforme, por lo que los meridianos y paralelos se intersecan en ángulo recto.

Una forma didáctica y gráfica de concebirla es mediante la utilización de un cilindro transversal al eje de rotación y que envuelve al elipsoide terrestre. Para cubrir grandes extensiones, incluso toda la superficie terrestre, se utilizan varios cilindros transversales lo que deriva en que cada cilindro tenga un campo de acción, denominado comúnmente “huso” o “faja”, el cual está definido por un meridiano central al cual pertenece y un ancho de uso expresado como grados de desarrollo longitudinal.

En rigor se trata de un sistema de proyecciones que cubre el elipsoide. Dada la posición de cada cilindro se recomienda su uso para territorios donde predomine la extensión Norte-Sur, ya que las deformaciones son más significativas en dirección Este-Oeste. Como el ancho de huso es el mismo para todos los cilindros, el desarrollo analítico es el mismo para cada huso.

El meridiano central tiene la particularidad de ser el único representado por una línea recta y posee igual valor de escala para todo el meridiano.

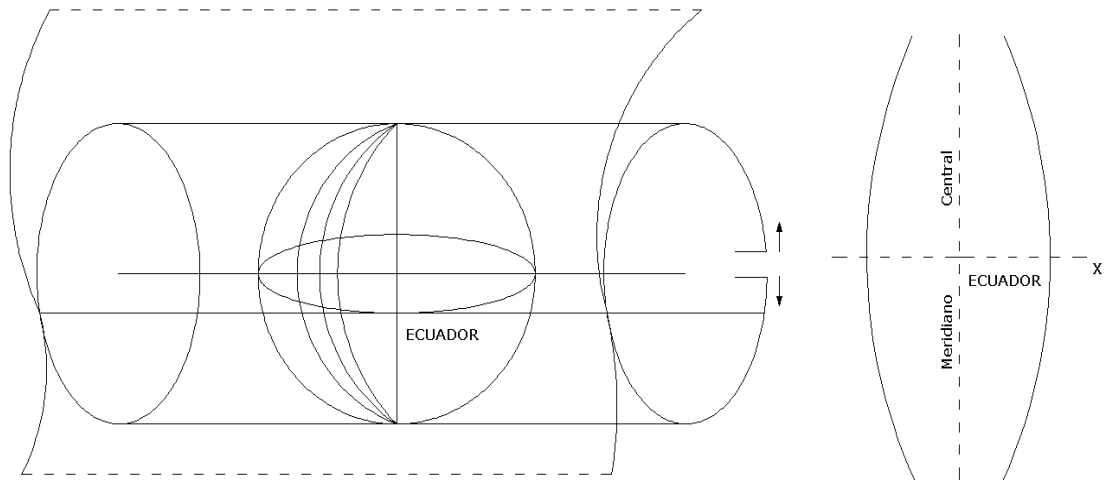


Figura N° 19. Situación del cilindro en la proyección transversa de Mercator

En la actualidad, esta proyección es la más utilizada a nivel mundial, gracias al desarrollo y difusión de la proyección UTM. En nuestro país, la proyección adoptada por el IGM para la confección de la cartografía general del país, es la Gauss-Krüger. Ambas son desarrollos de la transversal de Mercator, en la cual se define un ancho de huso y un sistema de coordenadas asociado.

2.13.2 Conversión de Coordenadas

Se darán las fórmulas que permiten convertir las coordenadas geodésicas en coordenadas planas de proyección y viceversa. Solo se darán las expresiones finales, ya que su desarrollo supone un fundamento matemático complejo y no creo que tenga un interés su desarrollo detallado.

De geodésicas a rectangulares:

Coordenada Este (X)

$$\frac{x}{N} = \lambda \cos \phi + \frac{\lambda^3 \cos^3 \phi}{6} [1 - t^2 + \eta^2] + \frac{\lambda^5 \cos^5 \phi}{120} [5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6]$$

Coordenada Norte (Y)

$$\frac{y}{N} = \frac{S_\phi}{N} + \frac{\lambda^2 \sin \phi \cos \phi}{2} + \frac{\lambda^4 \sin \phi \cos^3 \phi}{24} + [5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4]$$

Donde $t = \tan \phi$; $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \phi$ y λ corresponde a la diferencia de longitud (en radianes) entre el punto y el meridiano central. S_ϕ Corresponde al arco de meridiano del punto de cálculo.

Nótese que al meridiano central se transforma en el eje de las Y; al Ecuador ($\phi = 0$) le corresponde el eje de las X, cuya transformada será una línea recta.

Las fórmulas transcritas corresponden a un desarrollo en serie (Taylor), en este caso hasta el tercer término. Puede continuarse el desarrollo tantos términos como se desee, para aumentar la precisión en la conversión, sin embargo hasta el tercero es suficiente para la mayoría de los trabajos geodésicos.

De rectangulares a Geodésicas:

$$\phi = \phi_1 - \frac{t_1}{2}(1 + \eta_1^2) \left(\frac{x}{N_1}\right)^2 + \frac{t_1}{24}(1 + \eta_1^2) \left(\frac{x}{N_1}\right)^4 (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 4\eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2)$$

$$\lambda = \sec \phi_1 \left[\frac{x}{N_1} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{N_1}\right)^3 (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{120} \left(\frac{x}{N_1}\right)^4 (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8t_1^2 \eta_1^2 - 3\eta_1^4 - 4\eta_1^6 + 4t_1^2 \eta_1^4 + \dots) \right]$$

Donde las definiciones de t y η son iguales a la conversión anterior.

El valor ϕ_1 se denomina latitud base o isométrica, y es la proyección recta del paralelo sobre el meridiano central. (Ver figura N°20).

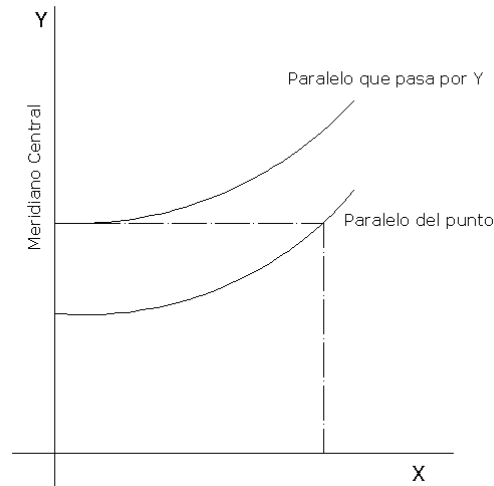


Figura N° 20. Latitud Isométrica

Estas expresiones son válidas en general para cualquier desarrollo de la proyección transversa de Gauss, vale decir, UTM; Gauss-Krüger; solo habrá que tener en cuenta los valores correspondientes al falso Norte, numero de faja, falso Este, como veremos más adelante.

2.13.3 Convergencia de Meridianos

Sobre la superficie del elipsoide, el acimut está referido al Norte geodésico, y en plano cartográfico los meridianos se representan como líneas cóncavas hacia el meridiano central, por este motivo se observará una diferencia angular entre el meridiano que pasa por el lugar y la línea recta del eje Y. esta diferencia se conoce como convergencia de meridiano y será nula para el meridiano central.

Se puede definir la convergencia como el ángulo que forma la tangente al meridiano que pasa por el punto y el eje Y que pasa por dicho punto. Ver figura 21.

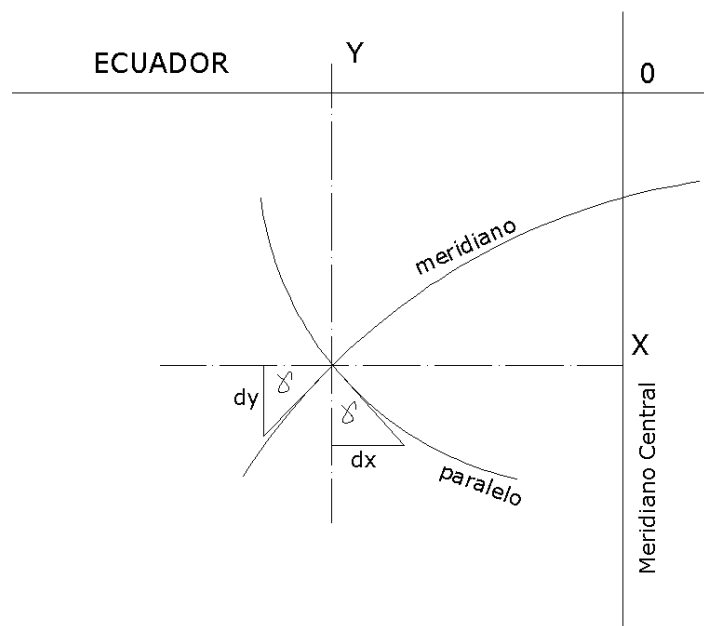


Figura N° 21. Convergencia de meridianos.

Las expresiones que nos permiten calcular la convergencia de meridianos, son las siguientes:

En función de las coordenadas geodésicas

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \phi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \sin \phi \cos^2 \phi (1 - 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15} \sin \phi \cos^4 \phi (2 - tg^2 \phi) + ..$$

En función de las coordenadas planas

$$\gamma = \frac{x}{N} \tan \phi - \frac{x^3}{3N^3} \tan \phi (1 + \tan^2 \phi - \eta^2 - 2\eta^4) + \frac{x^5}{15N^5} \tan \phi (2 + 5\tan^2 \phi + 3\tan^4 \phi) + ..$$

2.13.4 Diferencia Arco-Cuerda ψ

Se entiende como la diferencia entre el acimut geodésico proyectado T (obtenido a partir del acimut geodésico y la convergencia) y el acimut plano t (obtenido a partir de las coordenadas planas). Más adelante lo estudiaremos con más detalle.

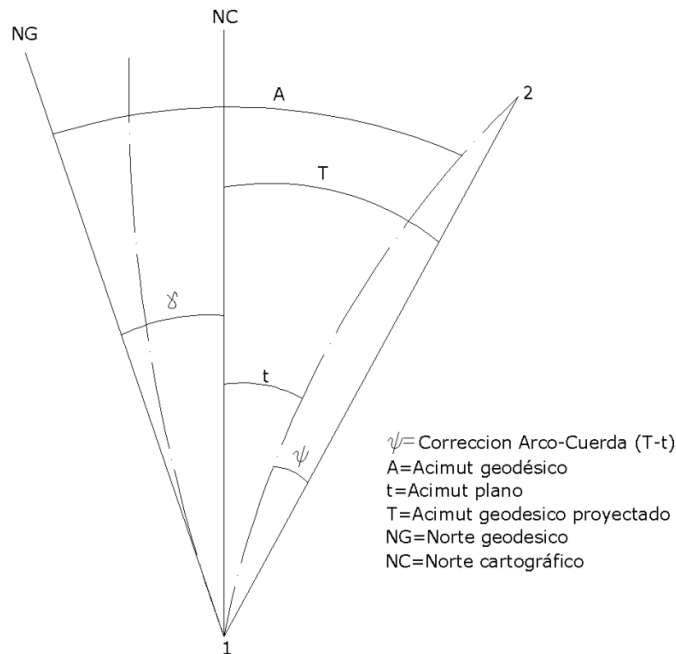


Figura N° 22. Corrección Arco-Cuerda

La corrección queda determinada por la expresión:

$$(T - t)_A^B = \frac{(y_B - y_A)(2x_A + x_B)}{6N_m M_m} (1 + \eta_m^2)$$

$$(T - t)_B^A = \frac{(y_B - y_A)(2x_B + x_A)}{6N_m M_m} (1 + \eta_m^2)$$

Donde el subíndice m indica valores medios. Nótese que la corrección arco-cuerda no es la misma para el acimut y el acimut inverso.

2.13.5 Modulo de Anamorfosis Lineal (Factor Escala)

Como ya mencionamos el factor escala varia para cada punto, se mantiene constante para cada punto en todas las direcciones. Este factor es muy importante ya que nos permite relacionar las distancias medidas a partir de coordenadas de proyección y la distancia sobre el elipsoide.

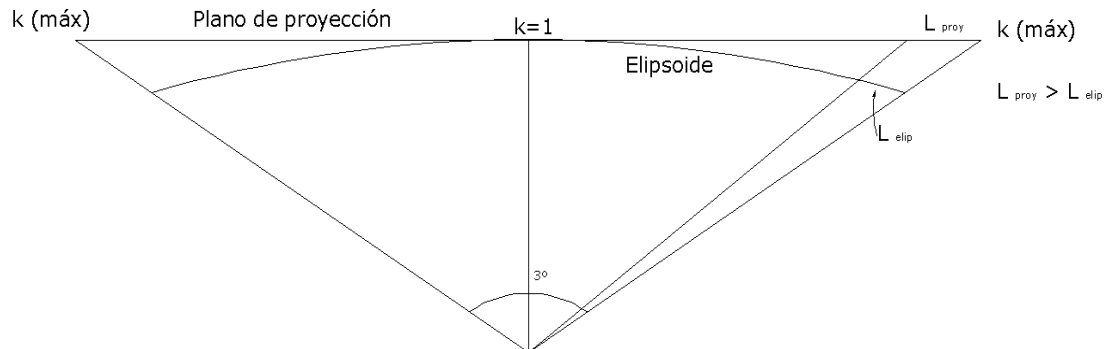


Figura N° 23. Anamorfosis lineal

Las expresiones que nos permiten calcular el factor escala son las siguientes:

En función de las coordenadas rectangulares

$$k = 1 + \frac{1 + \eta_1^2}{2} \left(\frac{x}{N_1} \right)^2 + \frac{5 + 6\eta_1^2 - 3\eta_1^4 - 4\eta_1^6 + 24t_1^4\eta_1^4 + 24t_1^2\eta_1^6}{24} \left(\frac{x}{N_1} \right)^4$$

En función de las coordenadas geodésicas

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \phi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \phi \left(5 - 4t^2 + 14\eta^2 + 13\eta^4 - 28t^2\eta^2 + \right. \\ \left. + 4\eta^6 - 48t^2\eta^4 - 24t^2\eta^6 \right)$$

Para el caso de la proyección UTM, el cilindro es secante sobre el meridiano central, lo que geoméricamente implica la generación de dos líneas cóncavas hacia el meridiano central cuyo factor de escala es igual a 1, y que disminuye en dirección al meridiano central donde toma el valor nominal para la proyección ($K_0=0.9996$) y aumenta para el borde del huso. En este caso la expresión anterior se debe multiplicar por el valor K_0

2.14 GENERALIDADES DE LA PROYECCIÓN CONFORME GAUSS-KRÜGER

La proyección Gauss-Krüger se considera la proyección base de las transversales de Mercator. Corresponde en su concepción a la primera y única proyección cilíndrica transversa conforme creada por Gauss en el siglo XVIII y racionalizada por Krüger.

En la Argentina fue adoptada mediante la Disposición Permanente Nro. 197 (24 abril 1925) del Instituto Geográfico Militar. Las ventajas de la proyección, en la modalidad elegida, fueron ampliamente desarrolladas en la Primera Conferencia de Coordinación Cartográfica, celebrada en Buenos Aires en 1936.

La idea básica era desarrollar una cartografía en la que las deformaciones fueran insensibles para la escala 1:25.000 en el borde de las fajas. Fue así que se establecieron 7 fajas de tres grados de ancho cada una. Con esta disposición en la latitud -22° (la más norteña del país) el módulo de deformación (k) a 1.5° del meridiano central resulta 1.000295 que significan 0.30 metros en 1 km y se satisface la premisa. La deformación superficial (areal) se resuelve aplicando el módulo de deformación elevado al cuadrado.

Las fórmulas de transformación de coordenadas geográficas a planas y viceversa fueron ampliamente difundidas por la literatura geodésica y cartográfica y tienen dos partes: el cálculo del arco de meridiano y de las abscisas y ordenadas. En ambos casos están presentes los parámetros del elipsoide de referencia que deben ser tenidos en cuenta, particularmente en el momento actual, donde coexisten el elipsoide Internacional de 1924 y el WGS 84¹².

¹² Comité Nacional de la Unión Geofísica y Geodésica Internacional. Publicación Sistemas Geodésicos. Pág. 34.

La proyección Gauss-Krüger utilizada en nuestro país, tiene las siguientes particularidades:

- Los ejes de referencia se encuentran rotados, es decir, el eje de la X en la transversa de Mercator corresponde al eje de las Y en la Gauss-Krüger.
- El origen de las coordenadas X se encuentra en el polo Sur,
- Se establece para el eje Y un falso origen con el valor 500.000 para cada faja de cobertura, anteponiendo el número de faja.

La siguiente tabla muestra la correspondencia entre el meridiano central de cada faja, y el límite de las mismas.

Faja N°	Meridiano Central	Meridianos limites	Valor de la ordenada del meridiano central
1	-72	-70° 30' -73° 30'	1.500.000
2	-69	-67° 30' -70° 30'	2.500.000
3	-66	-64° 30' -67° 30'	3.500.000
4	-63	-61° 30' -64° 30'	4.500.000
5	-60	-58° 30' -61° 30'	5.500.000
6	-57	-55° 30' -58° 30'	6.500.000
7	-54	-52° 30' -55° 30'	7.500.000

Al utilizar las formulas antes definidas debemos tener en cuenta estas características particulares, para ser aplicadas a la proyección Gauss-Krüger. Pero siendo la teoría expuesta y el desarrollo de las expresiones totalmente válidas.

2.15 REDUCCIÓN DE OBSERVABLES

2.15.1 Conceptos Generales

La geodesia clásica, entiende el problema de la *reducción* como el conjunto de problemas debido al traslado de las magnitudes indirectamente medidas sobre la superficie de la tierra, a sus correspondientes valores sobre la superficie de referencia: el elipsoide.

Matemáticamente no tienen importancia que superficie se ha tomado de referencia, es decir, los parámetros del elipsoide adoptado, pero en la práctica es importante que la superficie de referencia posee la menor desviación con respecto a la figura real de la tierra. De esta manera las magnitudes medidas sobre la superficie de la tierra, se diferenciarán poco de sus correspondientes en el elipsoide. Las reducciones serán menores si las desviaciones entre ambas superficies son pequeñas.

Los problemas de reducción consisten en esencia en reducir las magnitudes lineales y angulares, medidas sobre la superficie terrestre y asociado al campo de gravedad de la tierra, para proyectarlos sobre el elipsoide de referencia.

En la actualidad el problema de las reducciones adquiere importancia. Es común el combinar, en los levantamientos topográficos, mediciones clásicas de estación total con mediciones GPS. Las primeras corresponden a la superficie de la tierra y están asociadas a su campo de gravedad, las segundas están referidas al elipsoide. Para expresar las coordenadas finales de un levantamiento en un sistema de referencia global, como lo exigen las nuevas necesidades, será necesario reducir las mediciones clásicas a la superficie del elipsoide.

En algunos casos puede surgir el problema inverso, es decir, el traslado de magnitudes conocidas sobre el elipsoide a la superficie de la tierra. Por ejemplo, si no deseamos corregir las mediciones clásicas, podemos proyectar las medidas GPS al plano local. En esencia, si son conocidos los datos, el problema es el mismo.

Como ya hemos mencionado, es habitual convertir las coordenadas curvilíneas (latitud y longitud geodésicas) en coordenadas planas de alguna proyección conforme, de esta manera realizamos todos los cálculos aplicando simple geometría plana. Si deseamos expresar los resultados como coordenadas planas de proyección (como es lo habitual, pero no siempre lo más conveniente), deberemos hacer las correspondientes conversiones y reducciones.

Superficie terrestre \iff Superficie del elipsoide \iff Plano de proyección

Las correcciones que debemos aplicar para “pasar” al plano de proyección, ya fueron enunciadas y desarrolladas. Éstas son: convergencia de meridianos, corrección arco cuerda, anamorfosis lineal y anamorfosis superficial.

2.15.2 Corrección para reducir una distancia al Elipsoide

Realizada la medición cualquier distancia, se presenta el problema de reducirlo al elipsoide. En efecto, la distancia corresponde a dos puntos sobre la superficie de la tierra y sin embargo la superficie de referencia que vamos a utilizar es el elipsoide.

En general la distancia medida sobre la superficie topográfica será mayor que su proyección sobre la superficie del elipsoide. Puede ocurrir algún caso en que nos encontremos por debajo del nivel del elipsoide, en este caso, la distancia medida será menor a la proyectada.

Las correcciones que vamos a aplicar son las siguientes:

- Reducción al nivel del elipsoide.
- Paso de la cuerda al arco.

2.15.2.1 Reducción al nivel del elipsoide

Consideraremos para la reducción al nivel del elipsoide, que la línea medida es la reducida al horizonte (como es lo habitual trabajando con estación total). Si se trabaja con la distancia geométrica (inclinada), previamente debemos reducirla al horizonte.

Para realizar la reducción al nivel del elipsoide, se requiere conocer el radio de curvatura medio en la sección normal correspondiente a la distancia medida. El valor de curvatura se obtiene con la fórmula de Euler, en función de la acimut z de dicha sección normal.

$$R_z = \frac{N M}{M \operatorname{sen}^2 z + N \operatorname{cos}^2 z}$$

Siendo N y M los radios de curvatura principales calculados con la latitud correspondiente al punto medio de la línea.

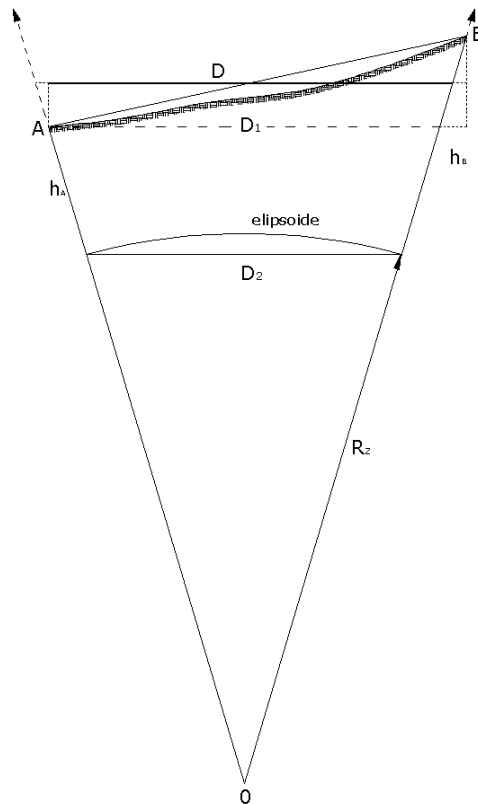


Figura N° 24. Reducción al nivel del elipsoide

Si observamos la figura 24 vemos que la reducción se trata de una simple equivalencia de triángulos.

Podemos escribir:

$$\frac{D_1}{R_z + h} = \frac{D_2}{R_z}$$

Luego:

$$D_2 = \frac{D_1}{R_z + h} R_z$$

Estas fórmulas así definidas, son aplicables cuando las distancias medidas no superan los 10 kilómetros. En estas condiciones podemos suponer la hipótesis de una tierra plana, y de líneas verticales paralelas; de esta manera podemos considerar una distancia plana reducida al horizonte del instrumento. Admitiremos ésta hipótesis que simplifica el problema, y cuya aplicación es suficiente para las distancias que normalmente se miden de forma directa en topografía.

Cuando las distancias medidas son extensas (distancias geodésicas de primer y segundo orden), debemos considerar la curvatura de la tierra y realizar la reducción a una altura media entre el punto de estación y el extremo de la línea (distancia reducida al horizonte medio) como se observa en la figura. Se recomienda consultar la bibliografía geodésica citada para ampliar sobre estos temas.

De forma estricta, existe una diferencia entre la distancia reducida al horizonte del instrumento (siendo perpendicular a la dirección de la línea vertical) y la distancia reducida que es perpendicular a la dirección normal al elipsoide en ese punto. Será necesario en este caso, conocer la desviación de la lineal vertical en el punto evaluado. Sin embargo esta diferencia es despreciable en todos los casos.

2.15.2.2 Paso de la cuerda al arco

Esta reducción consiste en pasar de la distancia de la cuerda D_2 al arco s .

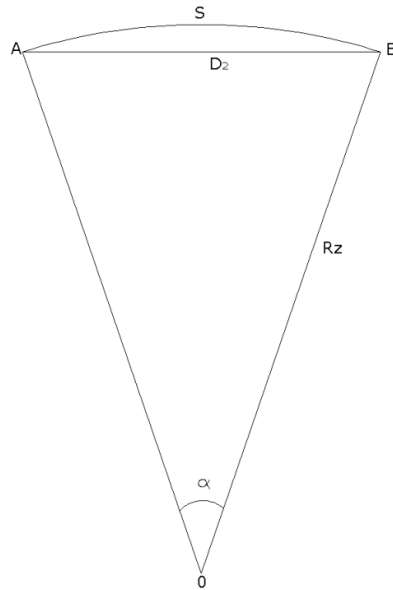


Figura N° 25. Paso de la cuerda al arco

La longitud del arco será:

$$s = 2R_m \operatorname{arc\,seno} \left[\frac{D_2}{2R_m} \right]$$

Desarrollando la función seno se puede escribir:

$$s = D_2 + \frac{D_2^3}{24R_m^2}$$

Esta reducción se suele obviar cuando las distancias de trabajo son pequeñas, como ocurre en topografía, debido al alto valor que adopta el radio de curvatura.

En teoría existe otra corrección que permite obtener la longitud de la línea geodesia, a partir de las secciones normales. Sin embargo esta corrección adopta valores muy pequeños, siendo totalmente valido aproximarlos como un arco de círculo máximo sobre una esfera de radio R_m , conocido como radio medio de Gauss $R_m = \sqrt{MN}$.

Para distancias de hasta 50 km, que era la longitud de los lados de los triángulos de primer orden en las redes clásicas de triangulación, se utilizaba el radio medio de Gauss y se calculaban como triángulos esféricos, siendo el error cometido inferior a los errores de las mediciones.

De igual manera resulta válido utilizar este radio medio de Gauss en reemplazo del calculado a través de la fórmula de Euler, en función del acimut de la sección normal.

2.15.3 Corrección para Reducir Lecturas Angulares al Elipsoide

Con esta operación, a la lectura angular en el terreno, correspondiente al plano vertical definido por el eje del instrumento y el punto observado, se le hace corresponder la dirección acimutal de la línea geodésica sobre la superficie del elipsoide, definida por la proyección de los puntos extremos según sus verticales geodésicas.

Las correcciones que se aplican son:

- Corrección por desviación relativa de la vertical en el terreno
- Corrección por altitud del punto visado
- Paso de la sección normal a la línea geodésica

2.15.3.1 Corrección debida a la desviación de la línea vertical

Al hacer estación en un vértice de una red o sistema de apoyo, se refieren las observaciones a la vertical astronómica del punto (normal al geoide) o mejor, normal a la superficie equipotencial que pasa por el punto. Cuando instalamos el instrumento, para su puesta en estación la única ayuda de que se dispone es el nivel. Al calar el nivel en las dos posiciones perpendiculares, forzosamente si el eje principal del aparato es, por construcción, perpendicular al eje del nivel, dicho eje principal habrá quedado colocado normal a la superficie equipotencial que pasa por ese punto.

Esta vertical astronómica no coincide en general con la normal al elipsoide (vertical geodésica), ambas rectas forman un ángulo (desviación de la vertical). La existencia de estas desviaciones de la vertical hace que el acimut astronómico (ángulo formado por dos planos que contienen a la vertical astronómica) determinados por la observación, no coincida con el acimut geodésico (ángulo formado por dos planos que contienen a la vertical geodésica).

La diferencia entre el acimut astronómico y geodésico, lo podemos conocer a través de la ecuación de Laplace. Esta tiene la forma:

$$A_g = A_a - (\Lambda - \lambda) \sin \Phi + \frac{\eta \cos A_g - \xi \operatorname{sen} A_g}{\tan z}$$

También se puede escribir:

$$A_g = A_a - (\Lambda - \lambda) \sin \Phi + \frac{u \sin(A_g - \Theta)}{\tan z}$$

El primer término fundamental es constante en dicho punto ya que él depende solamente de las coordenadas y no de la dirección. Este término expresa la influencia sobre el acimut de la dirección por la no coincidencia de los planos de los meridianos astronómicos y geodésicos.

El segundo término expresa la influencia, sobre la dirección medida, de la no coincidencia del eje vertical del instrumento con la normal a la superficie del elipsoide. Por esto, a este término se lo puede considerar como la corrección por la desviación de la desviación del eje vertical del instrumento con respecto a la normal del elipsoide, la cual es necesaria introducir en las direcciones horizontales medidas. Dicho de otra manera, el segundo término puede considerarse como la reducción de las direcciones horizontales medidas con relación al elipsoide de referencia.

“El valor numérico de la corrección es pequeño y se expresa generalmente en centésimos de segundo [...] Por lo tanto para ángulos de inclinación pequeños e inclinaciones medianas de la línea vertical, parecería que estas reducciones pueden despreciarse. Así se debe actuar también durante la determinación de las reducciones aisladas. Pero en las direcciones horizontales medidas de las líneas de las triangulaciones de primera clase (o poligonómicas de primera clase) la reducción analizada, por regla, debe introducirse puesto que la acumulación de su influencia puede tener carácter sistemático. En este caso el menosprecio de la verdadera reducción se manifiesta visiblemente en la exactitud del cálculo de los elementos de la línea (en primer lugar en la magnitud del error del acimut de las direcciones de los lados y en el desplazamiento transversal de la línea)[...] En las regiones montañosas, donde la inclinación de la línea vertical alcanza algunas decenas de segundos y las distancias cenitales poseen una significativa desviación respecto a 90° el cálculo de esta reducción debe ser muy cuidadoso”¹³

Estas correcciones no se suelen aplicar salvo en el cálculo y compensación de redes geodésicas de primer orden en las que intervenían observaciones astronómicas. El motivo es que hace falta disponer de un modelo de desviaciones relativas de la vertical en el terreno de calidad.

Además, cuando se observan vueltas de horizonte en las que se termina trabajando con ángulos, al aparecer en la expresión del acimut de una dirección su lectura sumando y la lectura de la visual de orientación restando, esta corrección se hace despreciable dado que la primera componente se elimina (por la suma y resta) y la segunda componente es muy próxima a cero al intervenir en su expresión la cotangente del ángulo cenital.

¹³ Zakatov, P.S. “Curso de Geodesia Superior”. Pág. 441.

Debido a que es muy improbable que se realicen observaciones astronómicas de precisión para establecer valores de desviación de la línea vertical, un procedimiento alternativo es calcularlas a partir de un modelo de geoide.

Si recordamos que el método de nivelación astrogeodésica¹⁴, nos permite conocer el valor de la ondulación del geoide entre dos puntos (ΔN) a partir de la observación de las desviaciones de la línea vertical, es posible realizar el camino inverso, es decir, a partir de un modelo de ondulaciones del geoide conocer el valor de desviación de la vertical.

La fórmula diferencial de la nivelación astrogeodésica, tienen la forma:

$$dN = -\vartheta_g ds$$

Luego:
$$N_2 - N_1 = -\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2} * s$$

Conociendo las ondulaciones del geoide para un par de puntos, podemos calcular los valores de las componentes de la desviación de la vertical.

Está claro que la bondad de esta alternativa, estará en función directa de la calidad de nuestro modelo. Sería necesario entonces, disponer de un modelo regional del geoide. Sin embargo es muy improbable que se requiera tan alto grado de precisión, en una medición topográfica, que justifique el cálculo de valores de desviación de la línea vertical.

¹⁴ Se pueden consultar estos temas en toda la literatura geodésica clásica. Recomendando: Zakatov, PS "Curso de Geodesia Superior". Sevilla, MJ, Núñez, A. "Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoide obtenidos por métodos astrogeodésicos".

2.15.3.2 Corrección para paso de la sección normal a la línea geodésica

La anterior reducción permite pasar de los ángulos acimutales observados a los ángulos formados por dos planos normales al elipsoide, es decir, al ángulo de las secciones normales correspondientes. Pero como vimos que las distancias sobre el elipsoide quedaban definidas no por secciones normales, sino por líneas geodésicas, será necesario introducir una corrección para pasar del ángulo formado por las dos secciones normales del elipsoide al ángulo de las líneas geodésicas correspondientes. Esta corrección se anula cuando los dos puntos se encuentran situados en el mismo meridiano o el mismo paralelo, ya que entonces las dos secciones normales coinciden.

La corrección tiene la forma:

$$\delta'' = \frac{e^2 s^2}{12N^2} \rho'' (\cos^2 \phi \operatorname{sen} 2z - \frac{s}{2N} \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} z_0)$$

El valor de esta corrección es muy pequeño y solo se tiene en cuenta en redes geodésicas de primer orden. Para tener una idea de la magnitud de estos valores, la siguiente tabla muestra los valores máximos de la corrección para distintas distancias s .

s	δ''
50 km	0.014''
100 km	0.056''
200 km	0.224''
300 km	0.504''
500 km	1.400''

2.15.3.3 Corrección por altura del punto observado

La altura de los puntos observado hace necesario el cálculo de una nueva corrección. En efecto, las normales en dos puntos del elipsoide son dos rectas, que en general, no se cortan. Por lo tanto si desde un vértice A se observa una señal en B a una cierta altura h sobre el elipsoide, el plano determinado por la normal en A y en punto B (sobre la superficie terrestre) será generalmente distinto al de la misma sección normal en A y que pasa por B (sobre el elipsoide).

Esta corrección viene dada por la expresión:

$$\delta'' = \frac{e^2 h}{2N} \rho'' \cos^2 \phi \operatorname{sen} 2z + \frac{e^2 h s}{4N^2} \rho'' \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} z$$

Al igual que la corrección anterior, su valor numérico es muy pequeño. Los siguientes cuadros muestran los valores máximos de los dos términos de la fórmula¹⁵.

Primer término (independiente de s)

H	δ_1''
500 m	0.053''
1000 m	0.107''
2000 m	0.214''

El segundo término, para $h=2000m$ (como caso más desfavorable y que rara vez se dará)

S	δ_2''
100 km	0.00168''
200 km	0.00336''
300 km	0.00484''
500 km	0.00840''

Como se puede apreciar las correcciones son siempre despreciables, por lo que no tendrán en cuenta en el desarrollo de este trabajo.

¹⁵ Asin, Martín. "Geodesia y Cartografía matemática".

2.16 REDUCCIONES DEL PLANO DE PROYECCIÓN AL ELIPSOIDE

En el apartado 2.13 se enunciaron las fórmulas de conversión de coordenadas y fórmulas que nos permiten reducir medidas lineales y angulares del plano de proyección al elipsoide, para la proyección conforme cilíndrica transversal de Mercator. En este apartado se desarrollará con más profundidad estas reducciones, y su influencia en los levantamientos topográficos.

Solo se analizará para la proyección conforme Gauss-Krüger, por ser esta la de mayor uso y aplicación en nuestro país y por poseer carácter oficial. Igualmente resulta válido el análisis para la proyección UTM, difundida a nivel mundial.

2.16.1 Reducción de distancias del elipsoide al plano de proyección

La proyección Gauss-Krüger no conserva las distancias. De acuerdo con la teoría general de deformaciones de proyección cartográfica, al ser una proyección conforme la deformación lineal presenta un carácter puntual, la anamorfosis lineal es función de punto y no de la dirección. La anamorfosis lineal es, por definición, el factor de escala para obtener la longitud, dl_1 , de la proyección de un elemento diferencial de línea geodésica en el elipsoide, dl .

$$k(\phi, \lambda) = \frac{dl_1'}{dl}$$

En la proyección Gauss-Krüger adoptada en nuestro país, con ancho de faja de 3° , este coeficiente presenta valores que oscilan entre 0ppm en el meridiano central de un huso y 300 ppm (1.00030) en sus extremos, presentando simetría respecto al meridiano central. La anamorfosis lineal crece en relación al cuadrado de la distancia al meridiano central, siendo en los extremos muy alta su variación.

La proyección de una distancia finita L sobre el elipsoide a L_1 sobre el plano, pasa por resolver la integral a lo largo de la línea geodésica:

$$L_1 = \int_A^B k \, dl$$

Para simplificar la integral, podemos admitir una integración numérica de Simpson:

$$L_{1A}^B = k_1 L_A^B$$

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1}{k_A} + \frac{4}{k_m} + \frac{1}{k_B} \right) / 6$$

La expresión anterior exige conocer las coordenadas de ambos extremos y calcular las coordenadas del punto medio sobre la línea geodésica, que se suele aproximar por el punto medio sobre la cuerda.

$$y_m = \frac{1}{2}(y_i + y_j); \quad x_m = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$$

Cuando la variación de la anamorfosis lineal es muy pequeña en una zona puede resultar válido, en función de las precisiones de un trabajo, el adoptar un valor medio para toda la zona, con lo que el paso de distancias del elipsoide al plano de proyección y viceversa pasa por multiplicar o dividir las distancias, respectivamente, por ese valor medio. Además, se puede dar el caso de que el valor medio de la anamorfosis lineal sea muy próximo a la unidad y resulte despreciable, lo que sucederá para esta proyección en zonas cercanas al meridiano de contacto.

Para pasar de una distancia medida del plano de proyección al elipsoide debemos calcular el cociente entre la longitud proyectada y el módulo de anamorfosis, ya sea el calculado para la línea o el común para la zona.

$$k \cdot L_{elip} = L_{proy}$$

Nos detendremos aquí, y desarrollemos un poco más este concepto de deformación lineal, incluyendo además la reducción de distancias al elipsoide.

Supongamos que se necesita densificar una red utilizando métodos tradicionales o medir una poligonal combinada. Disponemos de una serie de puntos medidos con tecnología GPS, cuyas coordenadas están expresadas como coordenadas de proyección.

Pensemos el siguiente caso. Nos encontramos en una zona de alta anamorfosis lineal (extremo de la faja) y reducciones al elipsoide despreciables. Nos estacionamos con nuestro instrumento de Estación Total, cargamos las coordenadas y nos orientamos; midiendo ahora rumbo y distancia obtenemos las coordenadas del nuevo punto. Procediendo de esta manera, las coordenadas calculadas NO son coordenadas de proyección en el plano Gauss-Krüger. ¿Por qué?

El motivo es que no hemos considerado el factor de anamorfosis lineal. Para que las distancias, y por ende las coordenadas, correspondan al plano de proyección, debemos multiplicar las distancias medidas por el factor de anamorfosis del lugar (k). Está claro que las diferencias estarán, justamente, en función del valor del módulo de deformación de la zona. De manera similar, si medimos con Estación Total la distancia entre dos puntos con coordenadas de proyección, encontraremos una diferencia debido a la anamorfosis lineal (la distancia medida es menor a la de proyección).

Pensemos ahora, en este caso. Nos encontramos en una zona muy próxima al meridiano central, podemos despreciar la anamorfosis lineal, pero nos encontramos en una zona de elevada altitud elipsoidal, por lo que la reducción al elipsoide será considerable. Como

en el caso anterior las coordenadas calculadas, utilizando directamente la distancia medida, NO son coordenadas de proyección Gauss-Krüger.

En este caso, el motivo es que no hemos considerado la reducción de distancias al elipsoide. Ya que el plano de proyección está considerado al nivel del elipsoide, y no a la altura de la superficie topográfica. Por consiguiente se deberán corregir las distancias medidas; está claro que la diferencia estará en función de la altura de la zona. En este caso si medimos con Estación Total entre dos puntos con coordenadas de proyección, encontraremos diferencias entre las distancias (la distancia medida es mayor que la calculada por las coordenadas).

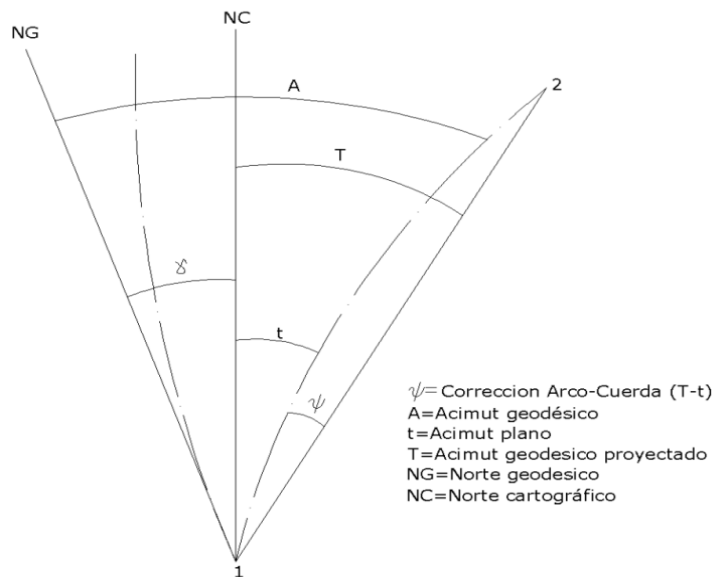
Existirán casos en que deberemos considerar ambas reducciones, es decir, reducir las distancias al elipsoide y luego aplicar el módulo de anamorfosis lineal. Podrá ocurrir, en ciertas ocasiones, que ambas reducciones se “compensen”, mientras la reducción al elipsoide acorta las distancias, la anamorfosis lineal las deforma haciéndolas mayores. Entonces si ambas correcciones son iguales (en valor absoluto), las distancias medidas con Estación Total podrán considerarse como distancias en el plano de proyección.

En el caso de utilizar proyección UTM, resulta que sobre el meridiano central (y hasta $1^{\circ}30'$ de apartamiento del meridiano), el factor de escala es menor a 1 ($k_0=0.9996$), es decir, la distancia proyectada es menor a la correspondiente sobre el elipsoide. En este caso las correcciones no se compensan entre sí, sino al contrario, se suman las correcciones incrementando la diferencia entre las distancias medidas y las proyectadas.

2.16.2 Reducción de medidas angulares del plano de proyección al elipsoide

El que la proyección sea conforme implica que se conserva el ángulo formado entre cualesquiera dos curvas que se consideren en el elipsoide y el formado por las curvas proyectadas correspondientes.

Sin embargo, tal y como se muestra en la figura, en general, la proyección de una línea geodésica sobre el elipsoide no es una línea geodésica sobre el plano de proyección, a pesar de que el acimut geodésico origen coincide con el formado por la transformada de la geodésica y por la transformada del meridiano del punto en el que se evalúa el acimut



Como consecuencia de la conformidad de la proyección, los ángulos se trasladan del elipsoide al plano sin distorsión, pero estos ángulos trasladados al plano son unidos mediante curvas 1-2 (la transformada de la geodésica sobre el plano es una curva), lo que en la práctica no es conveniente. Para los cálculos unimos los puntos 1-2 mediante rectas, es decir, cuerdas. Entonces los cálculos se resuelven aplicando geometría plana.

Para esto es necesario pasar, de los ángulos existentes entre las representaciones situadas sobre el plano de las líneas geodésicas, que son curvas, a los ángulos formados por las líneas rectas que unen los puntos. Dicho de otra forma, para cada dirección debe ser determinada la corrección que es el pequeño ángulo ψ entre la curva que representa

la línea geodésica sobre el plano y la cuerda. Estas correcciones también se introducen en las direcciones medidas para formar sobre el plano lados rectos.

Se puede demostrar que la representación de la geodésica sobre el plano, es siempre una curva cóncava hacia el meridiano central. En la figura, el meridiano se sitúa a la derecha de la visual 1-2. En el caso de que la línea evaluada atravesase el meridiano central, es decir, que tenga origen y final en distintos lados del meridiano axial, la transformada de la geodésica tiene doble curvatura (la transformada será similar a la línea geodésica) pero siguen obteniéndose las mismas correcciones, dadas por las formulas enunciadas pero alternándose los signos de un lado y del otro. No debemos confundir esta corrección angular con la estudiada en el apartado 2.15.3.2 (paso de la sección normal a la línea geodésica).

Observando la expresión de la reducción angular de la cuerda (apartado 2.13.4), se aprecia que, dado un punto origen i y una distancia d , variará para cada dirección, alcanzado valores máximos en la dirección del Norte cartográfico y anulándose en la paralela al eje de abscisas. Considerando además la variación del signo, el ángulo crítico sería el formado por las direcciones del Norte y Sur cartográfico, en la que la corrección puede llegar a ser del doble de la obtenida en la acotación de esta variable.

La pregunta es si es necesario aplicar esta corrección, lo que pasa por acotar el orden de magnitud de la misma y compararlo con las exigencias de precisión del trabajo en cuestión. El problema, al igual que en correcciones anteriores, es que es función de las dimensiones y forma del elipsoide y de la propia línea considerada. En consecuencia, el estudio de esta corrección pasa por buscar su máximo para la zona de actuación y para la distancia máxima de trabajo.

Para finalizar el estudio de las correcciones angulares, vamos a decir que la convergencia de meridianos es función de punto, no dependiendo de la dirección considerada, y de ahí que cuando se trabaja con vueltas de horizonte, la convergencia de meridianos resultante aparece sumando y restando, por lo que no se considerará, es decir, al medir un ángulo horizontal (entendido como la diferencia de rumbos) no influirá la convergencia en el valor del mismo.

2.16.3 Reducción de superficies del plano de proyección al elipsoide

En topografía es frecuente obtener la superficie a partir de las coordenadas de vértices expresadas en una proyección conforme; en general no es común que se necesite con demasiada precisión el valor de una superficie, pero en ciertos trabajos propios de la agrimensura, por ejemplo en la determinación de la superficie de una mensura rural, esta cuestión toma mayor importancia. Esto puede obligar a tener en cuenta una serie de correcciones debido a que la superficie que normalmente interesa es la existente sobre el terreno.

La proyección Gauss-Krüger no conserva las superficies, no es equivalente. La anamorfosis superficial es, por definición, el factor de escala para obtener la superficie, ds_1 , de la proyección de un elemento diferencial de área en el elipsoide, ds :

$$k_s(\phi, \lambda) = \frac{ds_1}{ds}$$

En la proyección Gauss-Krüger este coeficiente para un punto es, al igual que en el resto de las proyecciones conformes, igual al cuadrado del coeficiente de anamorfosis lineal.

$$k_s(\phi, \lambda) = k^2(\phi, \lambda)$$

La superficie de la proyección de un área finita se debe obtener a partir de la integración

$$S = \iint k^2(\phi, \lambda) d\phi d\lambda$$

Cuando la variación de la anamorfosis superficial es muy pequeña en una zona puede resultar válido, en función de las precisiones de un trabajo, el adoptar un valor medio para toda la zona, con lo que el paso de superficies del elipsoide al plano y viceversa pasan por multiplicar o dividir las superficies, respectivamente.

Además, se puede dar el caso de que el valor medio de la anamorfosis superficial sea muy próximo a la unidad y resulte despreciable, lo que sucederá cuando se encuentra próximo al meridiano central.

Una alternativa más rigurosa consiste en obtener la proyección de los vértices del perímetro del área en una sencilla proyección equivalente, como por ejemplo la proyección cilíndrica directa equivalente de Lambert.

Si lo que se desea obtener es la superficie en el terreno puede llegar a ser necesario considerar una operación de "*reducción*" del elipsoide al terreno, cuando la altura sobre el elipsoide sea elevada. Al igual que una distancia medida sobre el elipsoide es menor la correspondiente en el terreno a una altura h , la superficie sobre el elipsoide, será menor que la superficie real sobre el terreno. Esta reducción se puede realizar tomando un factor de escala común, a partir de la altura sobre el elipsoide.

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la influencia de las correcciones en los levantamiento combinados y la necesidad de aplicación en trabajos topográficos, requieren en primer lugar definir las exactitudes que se requieren en este tipo de levantamientos, o que son posibles de alcanzar utilizando el instrumental disponible en la actualidad. Por otro lado es necesario establecer la extensión y localización del área de trabajo, ya que las correcciones a introducir estarán en función de parámetros dadas por la localización del área de trabajo, vale decir, altura sobre el nivel del mar, ubicación respecto a la faja de proyección, etc.

El estudio de las correcciones se dividirá en dos partes, en primer lugar se estudiarán las reducciones de los observables a la superficie del elipsoide. Posteriormente se estudiarán las correcciones debido al uso de la proyección.

Para analizar las influencias de las distintas correcciones estudiadas, según los objetivos particulares establecidos en el capítulo I, se impondrá como límite para la aplicación de las mismas, cuando estas sean de orden superior a la precisión instrumental de un equipo topográfico tipo. Debemos aclarar que todas las correcciones estudiadas son puramente geométricas y las conclusiones derivadas de este estudio son en base a supuestos de mediciones libres de errores sistemáticos, ambientales, etc ya que el trabajo no se realizó en base a mediciones de campo.

El instrumental considerado será una estación total de características estándar en el mercado: anteojo de 30x de aumento, precisión angular de 3", precisión de distancia estándar ($\pm 3\text{mm} \pm 2\text{ppm}$), compensador de eje vertical. (Datos de catálogo estación total Trimble 3600).

La precisión de una medida lineal y angular, serán¹⁶:

- Error lineal: ± 2 cm con bastón centrador; $\pm 3\text{mm} \pm 2\text{ppm}$ con base de centración
- Error angular: $e_{ag} = \pm 3''$
- Error de centrado instrumental y señal: $e_c = \pm 0.01\text{m}$
- Error de apunte: $e_{ap} = \frac{10''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \pm 1''$
- Error de dirección: $e_d = \frac{2e_c}{D} \rho'' = \pm 4''$
- Error angular total: $e_t = \sqrt{e_{ag}^2 + e_{ap}^2 + e_d^2} = \pm 5''$

Estos valores de precisión nos permitirán, al compararlas con el valor de las correcciones propuestas, la necesidad o no de aplicarlas.

Para las reducciones lineales se ha considerado una distancia de trabajo de 1000 m, el motivo es que, permite una “visualización” más clara de la magnitud de la corrección. Dando un parámetro de la magnitud de las correcciones para otras distancias.

Todos los cálculos realizados se harán referidos a los parámetros del elipsoide de referencia asociado al Sistema de Referencia WGS-84.

¹⁶Formulas empíricas de Error de apunte y error de dirección, según: Chueca Pazos, Manuel. “Teoría de Errores e Instrumentación”

3.2 DETERMINACIÓN DE LA REDUCCIÓN DE DISTANCIAS

En primer lugar se analizará la magnitud de la reducción al elipsoide, teniendo en cuenta la altura elipsoidal (h) sobre el mismo. Se tomarán valores de referencia para: 100 m-200m-300m-500m-1000m-1500m-2000m-3000m-4000m.

Se estudiará posteriormente, cuando en relación a la extensión del trabajo sea factible utilizar un mismo factor escala, aplicado a toda la zona de trabajo.

3.3 DETERMINACIÓN DE LAS REDUCCIONES ANGULARES

Para el cálculo de la corrección por desviación de la vertical, es necesario conocer las componentes η , ξ de la misma, o bien el valor total de la desviación y el acimut de la misma. Estos valores solo es posible obtenerlos si se dispone de un modelo de desviaciones o si se han determinado a través de observaciones astronómicas (puntos Laplace), los cuales no se disponen en gran número en nuestro país. Por este motivo se tomaran valores de desviación total (u), que según autores consultados, son los esperables para el común de los casos. La fórmula utilizada será:

$$\frac{u \sin(A_g - \Theta)}{\tan z}$$

Como no se dispone del valor Θ , se supondrá el peor caso, es decir, en que el valor del término $\sin (A_g - \Theta)$ sea máximo, es decir, sea igual a 1.

Las reducciones por altura del punto observado y por paso de las secciones normales a la línea geodésica, no se tendrán en consideración por ser totalmente despreciable para distancias pequeñas.

3.4 DETERMINACIÓN DE LAS REDUCCIONES AL PLANO DE PROYECCIÓN

3.4.1 Determinación de la influencia de la anamorfosis lineal

En primer lugar se estudiará la variación de la anamorfosis lineal teniendo en cuenta el apartamiento del meridiano central y la latitud del punto. Se calcularán los valores para latitudes de -22 a -54 que corresponden con los extremos del Territorio Nacional.

En segundo lugar se analizará la posibilidad de utilizar un factor de escala común para toda una zona de trabajo, según las precisiones establecidas.

3.4.2 Determinación de la influencia de la corrección Arco-cuerda

Se estudiará la corrección arco-cuerda, calculando sus valores para distintas distancias, apartamiento del meridiano central y valor de acimut. Se extenderá el estudio para un ancho de faja de 6° correspondiente a la proyección UTM.

3.4.3 Determinación de la influencia de la deformación superficial

Para el análisis de la deformación en la superficie se utilizará una figura rectangular de 1000 Ha de superficie. Se determinará la variación del valor de superficie a medida que nos alejamos del meridiano central de la proyección.

Se calcularán valores de reducción del elipsoide al terreno, utilizando la misma figura, y elevando la altura sobre el elipsoide. Se determinará la reducción a partir del módulo de reducción por altura, elevado al cuadrado.

Se determinará si el error en la superficie, derivado del error en la determinación de las coordenadas de los vértices que definen el perímetro, es del mismo orden que la deformación areal propia de la proyección conforme utilizada.

Si consideramos un error σ en las coordenadas de los vértices de un polígono, la incertidumbre en el cálculo de la superficie estará dada, según la teoría de transmisión de los errores, por la expresión¹⁷:

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{2} \sqrt{(y_n - y_2)^2 + (x_n - x_2)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} [(y_{i-1} - y_{i+1})^2 + (x_{i-1} - x_{i+1})^2] + (y_{n-1} - y_1)^2 + (x_1 - x_{n-1})^2}$$

A partir de esta expresión se calculará el error en la superficie para distintas precisiones en la determinación de las coordenadas.

¹⁷ Preciado, Mata, Diez Galilea, Peña, Morín. “Estimación del error en el cálculo de la superficie de una parcela”. Escuela técnica superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Madrid 2005.

3.5 APLICACIÓN A CASOS PARTICULARES

3.5.1 Aplicación a una operación de Mensura Rural

Como aplicación de las correcciones estudiadas, en lo referido al uso de la proyección Gauss-Krüger, se analizará el caso de una operación de mensura rural realizada en el Establecimiento “La Cosecha”, provincia de Santiago del Estero.

Los motivos que llevaron a la elección de este trabajo son:

- La parcela en estudio presenta un superficie de 11.000 Ha, y lados de hasta 13 km.
- La parcela se ubica sobre el borde de la faja 4, se esperan importantes deformaciones en la superficie.
- Dada la magnitud de los lados, se evidenciaran correcciones por curvatura de la representación de la línea geodésica (corrección arco-cuerda).

Se analizará la deformación lineal y en la superficie de la parcela producida por la utilización de la proyección Gauss-Krüger.

Se analizará la deformación angular por no considerar la corrección por curvatura de la representación de la línea geodésica.

Se analizará la problemática referida a los derechos reales y el Catastro Territorial.

3.5.2 Aplicación al Cálculo y Compensación de una poligonal medida con métodos combinados.

Para estudiar la magnitud de las correcciones que han sido desarrolladas, se aplicaran al cálculo y compensación de una poligonal medida con métodos combinados.

Dicha poligonal se midió sobre el margen de la Ruta Provincial N° 12 que une las localidades de Corral de Busto y Los Surgentes, Provincia de Córdoba. La misma tiene una longitud de aproximadamente 35 km.

Se estudiará, para la zona de trabajo, la magnitud de las siguientes correcciones:

- Reducciones de distancias al elipsoide,
- Corrección de distancias por uso de proyección (anamorfosis lineal)
- Corrección angular por uso de proyección (corrección arco-cuerda)

Luego se estudiará, al compensar la poligonal, como influye el no considerar estas correcciones, en el valor final de las coordenadas.

CAPÍTULO IV RESULTADOS

4.1 REDUCCIÓN DE DISTANCIAS AL NIVEL DEL ELIPSOIDE

Para calcular la reducción al nivel del elipsoide, es necesario conocer el radio medio de curvatura **R** del elipsoide para la línea considerada, y el valor de altura elipsoidal **h**.

Aplicando la fórmula del apartado 2.15.2 obtenemos el valor de la corrección:

$$c = D \frac{R}{R + h} - D$$

Particularizando para una distancia de 1000 metros, y variando los valores de altura elipsoidal, obtenemos las correcciones que se muestran en la tabla I.

El cociente $\frac{R}{R+h}$ puede se puede ver como el módulo de escala o factor escala, es decir, multiplicando o dividiendo la distancia considerada por este módulo, nos permite reducir las distancias del terreno al elipsoide o viceversa.

La siguiente tabla muestra la magnitud de las correcciones para reducir una línea al nivel del elipsoide. Se considerara una distancia de 1000m reducida al horizonte del instrumento, en un punto situado a una latitud de 45° Sur.

La primera columna muestra la altura elipsoidal del punto de estación. La segunda y tercera columnas muestran el valor de la corrección y factor de escala respectivamente.

Latitud	45° S
Radio	6377958.6 m
Distancia	1000 m

<i>h</i>	<i>Corrección</i>	<i>factor escala</i>	<i>Error relativo</i>
100 m	-1.6 cm	0.999984	1 en 63.779
200 m	-3.1 cm	0.999969	1 en 31.890
300 m	-4.7 cm	0.999953	1 en 21.260
500 m	-7.8 cm	0.999922	1 en 12.756
1000 m	-15.7 cm	0.999843	1 en 6.378
1500 m	-23.5 cm	0.999765	1 en 4.252
2000 m	-31.4 cm	0.999686	1 en 3.189
3000 m	-47.0 cm	0.999530	1 en 2.126
4000 m	-62.7 cm	0.999373	1 en 1.594

Tabla I: Reducción de distancias al nivel del elipsoide

Si consideramos que la precisión instrumental para la medición de una línea, es del orden de los ± 2.5 cm, podemos concluir que será necesario introducir la corrección, para una línea de 1000 m, en zonas de altura elipsoidal superior a 150 m.

Por encima de los 1000 m de altura elipsoidal, la corrección lineal implica un error relativo es del orden de 1:5.000 lo que ya no es aceptable para algunos trabajos cualesquiera que sean las distancias medidas.

Cabe preguntarse ahora, si es factible teniendo en cuenta la extensión y exactitud de un trabajo, utilizar un factor de escala o un valor de corrección común para toda una zona de levantamiento. Para esto debemos encontrar el límite entre la altitud mínima y máxima de la zona, en la cual no introduzcamos un error superior a nuestra precisión instrumental por considerar esta generalización.

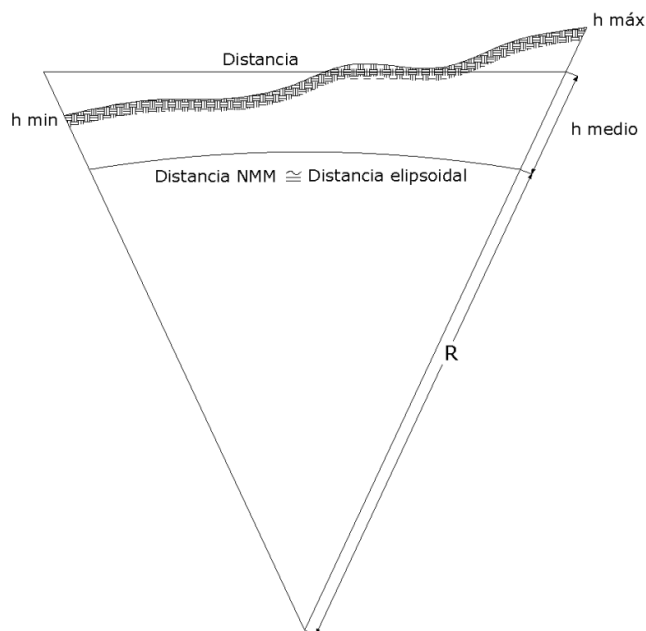


Figura N° 26. Factor medio de reducción de distancias al elipsoide.

La siguiente tabla muestra el factor de escala considerado en los puntos de mínima y máxima altitud.

$h \text{ min}$	$h \text{ máx.}$	Δh	factor esc min	factor esc máx.	factor esc medio	diferencia	ppm
0 m	100 m	100 m	1.000000	0.999984	0.999992	-0.000008	8
0 m	200 m	200 m	1.000000	0.999969	0.999984	-0.000016	16
0 m	300 m	300 m	1.000000	0.999953	0.999976	-0.000024	24
0 m	400 m	400 m	1.000000	0.999937	0.999969	-0.000031	31
0 m	500 m	500 m	1.000000	0.999922	0.999961	-0.000039	39
0 m	1000 m	1000 m	1.000000	0.999843	0.999922	-0.000078	78
0 m	1500 m	1500 m	1.000000	0.999765	0.999882	-0.000118	118

Tabla II: Diferencia por considerar factor medio de reducción

La última columna de la tabla nos indica la diferencia entre el factor de escala medio respecto a los extremos. De forma intuitiva nos indica que magnitud de error se comete al considerar este valor medio. Vemos que entre los 300 y 400 metros de desnivel introducimos errores de 23 ppm y 31 ppm (2.3 cm/Km y 3.1 cm/km) respectivamente, es decir, del mismo orden que los errores instrumentales.

Realicemos el mismo análisis, pero esta vez elevando la altura mínima y manteniendo los desniveles, queremos analizar si se puede generalizar el concepto, independientemente de la “altura base”. Veamos la tabla III:

h_{min}	$h_{máx.}$	Δh	factor esc min	factor esc máx.	factor esc medio	diferencia	ppm
3000 m	3100 m	100 m	0.999530	0.999514	0.999522	-0.000008	8
3000 m	3200 m	200 m	0.999530	0.999498	0.999514	-0.000016	16
3000 m	3300 m	300 m	0.999530	0.999483	0.999506	-0.000024	24
3000 m	3400 m	400 m	0.999530	0.999467	0.999499	-0.000031	31
3000 m	3500 m	500 m	0.999530	0.999451	0.999491	-0.000039	39
3000 m	4000 m	1000 m	0.999530	0.999373	0.999452	-0.000078	78
3000 m	4500 m	1500 m	0.999530	0.999294	0.999412	-0.000118	118

Tabla III: Diferencias por considerar un factor medio de reducción elevando la altura mínima.

Elevando el valor de la altura mínima a 3000m obtenemos los mismos resultados anteriores, podemos inferir que es independiente de la altura mínima de la zona; solo es función del desnivel.

Podemos concluir que es factible utilizar un plano medio de reducción común para una zona de trabajo, siendo amplio el margen de aplicación, el límite variaciones de altura se puede establecer en 300 metros (diferencia entre $h_{mín}$ y $h_{máx}$). Para este límite, la diferencia entre el plano medio de reducción y las alturas extremas será de 150 m que no es otra cosa que el límite establecido en el apartado 4.1 cuando analizamos la magnitud de las reducciones a la cuerda del elipsoide.

En los casos donde se supere estos límites, pensemos el caso de un relevamiento de un camino de montaña, será necesario dividir el trabajo en zonas donde la variación de altitud sea del orden antes indicado.

4.1.1 Paso de la Cuerda Al Arco

Como último paso debemos establecer la magnitud de la corrección, que se introduce para pasar de la cuerda (corrección anterior) al arco del elipsoide. Tabla IV.

La corrección se obtiene aplicando la expresión del apartado 2.15.2.2

$$c_a = \frac{D^3}{24R_m^2}$$

Particularizando para distintas distancias D se obtienen los valores de corrección.

La siguiente tabla nos muestra el valor de las mismas:

<i>Cuerda</i>	<i>corrección</i>	<i>Arco</i>
1000 m	0.001 mm	1000.000001 m
2000 m	0.008 mm	2000.000008 m
5000 m	0.128 mm	5000.000128 m
10 km	1.024 mm	10000.00102 m
20 km	8.194 mm	20000.00819 m

Tabla IV: Paso de la cuerda al arco

La corrección por paso de la cuerda al arco puede despreciarse en todos los casos. Será suficiente entonces, para trabajos topográficos, reducir las distancias medidas a la cuerda del elipsoide.

4.2 CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN DE LA LÍNEA VERTICAL

Utilizando la fórmula del apartado 2.15.3.1 podemos calcular la corrección angular por desviación de la línea vertical. La expresión completa tiene en cuenta los valores de las componentes y la dirección evaluada. Para simplificar la tabla tomaremos, el error en cota máxima.

La expresión completa queda reducida a:

$$\frac{u''}{\operatorname{tg} z}$$

Calculando para distintos valores de u'' y para distintas distancias cenitales, se obtienen los valores de la tabla. La tabla V, nos muestra el error angular producido en un rumbo medido por la no coincidencia de la normal al elipsoide y la normal a la superficie de nivel que materializa el instrumento al ser puesto en estación.

u''	$z = 89^{\circ} 30'$	$z = 85^{\circ}$	$z = 80^{\circ}$
2	0.02''	0.2''	0.4''
4	0.04''	0.3''	0.7''
6	0.06''	0.5''	1.1''
8	0.08''	0.7''	1.4''
10	0.09''	0.9''	1.8''
15	0.14''	1.3''	2.6''
20	0.19''	1.7''	3.5''
30	0.28''	2.6''	5.3''
60	0.57''	5.2''	10.6''

Tabla V: Corrección angular por desviación de la línea vertical

Como vemos las correcciones son muy pequeñas y podemos despreciarlas en todos los casos. Solo alcanza valores similares al error angular $\pm 5''$ en los casos que la desviación de la vertical alcanza valores de $30''$ - $60''$, caso muy improbable, y con distancias cenitales que no son el común de los casos.

Podemos concluir que se puede despreciar la corrección por desviación de la línea vertical, siendo las correcciones muy inferiores a los errores instrumentales.

Los ángulos medidos sobre la superficie del terreno, se pueden considerar como iguales a los proyectados sobre el elipsoide, las correcciones son de un orden inferior a la precisión instrumental.

Podemos realizar un pequeño análisis y comparar el valor de desviación de la vertical, con el error de verticalidad que posee un instrumento de estación total.

Los instrumentos más sofisticados poseen niveles digitales y un compensador electrónico de verticalidad (compensadores de doble eje) lo que permite despreciar el error vertical del eje principal. Las estaciones totales de un segmento inferior, poseen niveles tubulares convencionales y el error de verticalidad se puede estimar a través de expresiones empíricas¹⁸ que tienen en cuenta la sensibilidad de los niveles.

El error de verticalidad se calcula:

$$e_v = \frac{S''}{3}$$

Para instrumentos convencionales, con $S = 30''$ (sensibilidad del nivel), el error de verticalidad del eje principal, es de $\pm 10''$. Resultará entonces que en la mayoría de los casos, según se estudió, el error de verticalidad del instrumental será de un orden mayor a los valores de desviación, se desprende entonces que utilizando instrumentos con niveles convencionales, la aplicación de la corrección o su estudio, carece de todo sentido.

¹⁸ Consultar Chueca Pazos, Manuel "Teoría de Errores e Instrumentación". pág. 304-305. Editorial Parainfo. Madrid 1995.

4.3 REDUCCIÓN DE DISTANCIAS AL PLANO DE PROYECCIÓN

La siguiente tabla nos muestra los distintos valores que adopta el módulo de anamorfosis lineal de la proyección Gauss-Krüger, calculado para latitudes de 22° S a 54° S que corresponden a las latitudes de los extremos del país y apartamientos del meridiano central en incrementos de 15'.

Lat / dif long	15'	30'	45'	1º	1º 15'	1º 30'
-22	1.000008	1.000033	1.000074	1.000132	1.000206	1.000296
-23	1.000008	1.000032	1.000073	1.000130	1.000203	1.000292
-24	1.000008	1.000032	1.000072	1.000128	1.000200	1.000288
-25	1.000008	1.000031	1.000071	1.000126	1.000196	1.000283
-26	1.000008	1.000031	1.000070	1.000124	1.000193	1.000278
-27	1.000008	1.000030	1.000068	1.000121	1.000190	1.000274
-28	1.000007	1.000030	1.000067	1.000119	1.000186	1.000269
-29	1.000007	1.000029	1.000066	1.000117	1.000183	1.000263
-30	1.000007	1.000029	1.000065	1.000115	1.000179	1.000258
-31	1.000007	1.000028	1.000063	1.000112	1.000176	1.000253
-32	1.000007	1.000027	1.000062	1.000110	1.000172	1.000248
-33	1.000007	1.000027	1.000060	1.000108	1.000168	1.000242
-34	1.000007	1.000026	1.000059	1.000105	1.000164	1.000236
-35	1.000006	1.000026	1.000058	1.000103	1.000160	1.000231
-36	1.000006	1.000025	1.000056	1.000100	1.000156	1.000225
-37	1.000006	1.000024	1.000055	1.000097	1.000152	1.000219
-38	1.000006	1.000024	1.000053	1.000095	1.000148	1.000213
-39	1.000006	1.000023	1.000052	1.000092	1.000144	1.000208
-40	1.000006	1.000022	1.000050	1.000090	1.000140	1.000202
-41	1.000005	1.000022	1.000049	1.000087	1.000136	1.000196
-42	1.000005	1.000021	1.000047	1.000084	1.000132	1.000190
-43	1.000005	1.000020	1.000046	1.000082	1.000128	1.000184
-44	1.000005	1.000020	1.000044	1.000079	1.000123	1.000178
-45	1.000005	1.000019	1.000043	1.000076	1.000119	1.000172
-46	1.000005	1.000018	1.000041	1.000074	1.000115	1.000166
-47	1.000004	1.000018	1.000040	1.000071	1.000111	1.000160
-48	1.000004	1.000017	1.000038	1.000068	1.000107	1.000154
-49	1.000004	1.000016	1.000037	1.000066	1.000103	1.000148
-50	1.000004	1.000016	1.000035	1.000063	1.000098	1.000142
-51	1.000004	1.000015	1.000034	1.000060	1.000094	1.000136
-52	1.000004	1.000014	1.000033	1.000058	1.000090	1.000130
-53	1.000003	1.000014	1.000031	1.000055	1.000086	1.000124
-54	1.000003	1.000013	1.000030	1.000053	1.000082	1.000118

Tabla VI: Valor del módulo de anamorfosis lineal

En color rojo se indican los valores de anamorfosis lineal, que implican correcciones mayores a la precisión instrumental, para distancias de 1000m.

Se puede ver que la anamorfosis no solo varía con el alejamiento al meridiano, sino que también depende de la latitud del punto, siendo mayor el valor en latitudes altas (hacia el Norte). Eso se debe a que, mientras nos acercamos al polo, el radio de curvatura del paralelo disminuye por lo que el arco desarrollado, para una misma diferencia de longitud, es menor. En forma general debemos considerar aplicar la reducción de distancias a partir de alejamientos de 30' del meridiano central.

El siguiente cuadro muestra la deformación, para distintos valores de distancia, que se produce para un alejamiento de 1° de longitud del meridiano central, al proyectar la distancia en el plano Gauss-Krüger.

latitud 31° S
 Δ longitud 1°
 anamorfosis 1.000112

Distancia elipsoidal	Distancia proyectada	diferencia (cm)
200 m	200.022 m	2.2
500 m	500.056 m	5.6
1000 m	1000.112 m	11.2
1500 m	1500.168 m	16.8
2000 m	2000.224 m	22.4
5000 m	5000.560 m	56.0

Como puede observarse en algunos casos, estas cifras son lo suficientemente significativas como para que no puedan ser despreciadas a la hora de definir correctamente cualquier proyecto de ingeniería y hay que tener en cuenta también en el replanteo, al llevar al terreno las verdaderas medidas que tomamos en el plano.

La teoría cartográfica indica que la transformación de una distancia sobre el plano de proyección a la superficie del elipsoide, debe realizarse aplicando una integración sobre toda la línea (según se estudió en el capítulo 2), ya que la anamorfosis varía para cada punto; esta integración se utiliza para distancias geodésicas de varios kilómetros, cuando se trata de distancias cortas se puede considerar que el módulo de anamorfosis no varía siendo válido aplicar un factor de escala común.

Cabe preguntarse ahora, cual es el límite en el que es factible aplicar un factor de escala común, es decir, cual es la extensión lineal máxima en la que puedo considerar un mismo factor de escala sin sobrepasar las tolerancias.

Para analizar lo expuesto debemos tener en cuenta que la deformación lineal crece proporcional al cuadrado del alejamiento al meridiano axial; el análisis que realicemos para los puntos cercanos al meridiano no será válido para puntos en el extremo de la faja.

Para resolver esta cuestión basta con analizar detenidamente la tabla VI, ya calculada. Supongamos un punto de latitud 22° S, sobre el meridiano de contacto tendremos un módulo de deformación $k=1$, si comenzamos a alejarnos del meridiano central, tendremos un módulo de deformación $k=1.000033$ para un alejamiento de $30'$. Esto no indica que podemos tomar un módulo $k=1$ y utilizarlo para una zona de extensión de $30'$ (51 km), introduciendo por esta generalización un error de 31 ppm en el extremo de la misma.

Este mismo análisis lo podemos realizar para puntos más alejados, veamos. Para un alejamiento de 1° , $k=1.000132$; para un alejamiento de $1^{\circ}15'$, $k=1.000206$. Es decir, en esta situación, extendernos $15'$ de arco (25 km) sin cambiar el factor de escala, introduce un error de 74 ppm.

El cuadro XII nos muestra la extensión máxima en la que es válido utilizar un mismo factor de escala, en dirección Este-Oeste, sin introducir errores superiores a 25 ppm y teniendo en cuenta la posición respecto al meridiano central. Se calcularon valores para latitudes de 22° S, 38° S y 54° S (extremos y centro del país).

Lat/ Δ long	merid central	30'	1°	1° 30'
-22	45 km	17 km	10 km	6 Km
-38	45 km	19 km	11 km	7 km
-54	45 km	23 km	14 km	9 km

Tabla VII: Uso de un módulo común de anamorfosis lineal

Se desprende de la tabla VII que a medida que nos alejamos del meridiano central se produce una apreciable disminución del campo de aplicación de un módulo anamorfosis común. También se desprende que varía sensiblemente dependiendo de la latitud del lugar.

Como se puede apreciar, el campo de aplicación cercano al meridiano central es muy amplio, pudiendo aplicarse a extensiones de 45 km en ambas direcciones. En los límites de la zona el campo de aplicación de un módulo común de deformación se reduce notablemente, y será necesario, en levantamientos extensos en dirección Este-Oeste, dividir el área de trabajo en distintas zonas con un factor de reducción común.

En cuanto a la extensión en dirección Norte-Sur, como se desprende de la tabla VI, la variación es muy pequeña y no merece mayor cuidado en los trabajos topográficos. Por ejemplo para el límite de la faja, la variación del factor escala es de 29 ppm para un incremento de latitud de 5° (aproximadamente 550 km).

4.4 CORRECCIÓN ANGULAR ARCO-CUERDA

En las siguientes tablas (VIII-IX-X-XI) se indica el valor, en segundos de arco, que alcanza esta corrección. Esta corrección varía en función del rumbo, distancia y alejamiento del meridiano central.

Las tablas están calculadas para alejamientos del meridiano central de 0km, 76 km y 160km, que corresponden a centro de faja, alejamiento intermedio y extremo de faja.

Corrección Arco-Cuerda (en segundo de arco)

y= 0 km

<i>Az/Dist(m)</i>	<i>1000</i>	<i>2000</i>	<i>5000</i>	<i>10000</i>	<i>15000</i>
<i>0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>
<i>10</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>
<i>20</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>30</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>40</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>50</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>60</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>70</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>
<i>80</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>
<i>90</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>

Tabla VIII: Corrección arco-cuerda para Y=0 km

y= 76 km

<i>Az/Dist(m)</i>	<i>1000</i>	<i>2000</i>	<i>5000</i>	<i>10000</i>	<i>15000</i>
<i>0</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.4</i>	<i>-1.0</i>	<i>-1.9</i>	<i>-2.9</i>
<i>10</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.4</i>	<i>-0.9</i>	<i>-1.9</i>	<i>-2.8</i>
<i>20</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.4</i>	<i>-0.9</i>	<i>-1.8</i>	<i>-2.7</i>
<i>30</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.3</i>	<i>-0.8</i>	<i>-1.7</i>	<i>-2.6</i>
<i>40</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.3</i>	<i>-0.7</i>	<i>-1.5</i>	<i>-2.3</i>
<i>50</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.6</i>	<i>-1.3</i>	<i>-1.9</i>
<i>60</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.5</i>	<i>-1.0</i>	<i>-1.5</i>
<i>70</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.3</i>	<i>-0.7</i>	<i>-1.0</i>
<i>80</i>	<i>0.0</i>	<i>-0.1</i>	<i>-0.2</i>	<i>-0.3</i>	<i>-0.5</i>
<i>90</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>

Tabla IX: Corrección arco-cuerda para Y=76 km

$y = 160 \text{ km}$

Az/Dist(m)	1000	2000	5000	10000	15000
0	-0.4	-0.8	-1.9	-3.8	-5.7
10	-0.4	-0.8	-1.9	-3.8	-5.7
20	-0.4	-0.7	-1.8	-3.6	-5.4
30	-0.3	-0.7	-1.7	-3.3	-5.0
40	-0.3	-0.6	-1.5	-3.0	-4.5
50	-0.2	-0.5	-1.2	-2.5	-3.8
60	-0.2	-0.4	-1.0	-1.9	-2.9
70	-0.1	-0.3	-0.7	-1.3	-2.0
80	-0.1	-0.1	-0.3	-0.7	-1.0
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla X: Corrección arco-cuerda para $Y=160 \text{ km}$

Como se desprende de las tablas, la corrección angular es muy pequeña para distancias que usualmente se emplean en topografía, siendo inferiores a la precisión instrumental, por lo que se pueden despreciar.

Trabajando en fajas de 3° de amplitud, estamos en todos los casos por debajo de la tolerancia impuesta, podemos concluir entonces que no será necesario introducir correcciones a los ángulos medidos en el terreno, en otras palabras los ángulos medidos son iguales a los proyectado en el plano de la proyección.

Podemos analizar en el caso que trabajemos en los límites de una faja de 6° , por ejemplo en el supuesto que se utilice la proyección UTM. En este caso al ser mayor el alejamiento del meridiano central, la corrección angular será sensiblemente mayor.

La siguiente tabla muestra los valores de corrección para el extremo de faja, en la proyección UTM.

<i>y= 300 km</i>					
<i>Az/Dist(m)</i>	<i>1000</i>	<i>2000</i>	<i>5000</i>	<i>10000</i>	<i>15000</i>
<i>0</i>	-0.8	-1.6	-4.1	-8.1	-12.2
<i>10</i>	-0.8	-1.6	-4.0	-8.0	-12.1
<i>20</i>	-0.8	-1.5	-3.8	-7.7	-11.5
<i>30</i>	-0.7	-1.4	-3.5	-7.1	-10.7
<i>40</i>	-0.6	-1.2	-3.1	-6.3	-9.5
<i>50</i>	-0.5	-1.0	-2.6	-5.3	-7.9
<i>60</i>	-0.4	-0.8	-2.0	-4.1	-6.2
<i>70</i>	-0.3	-0.6	-1.4	-2.8	-4.2
<i>80</i>	-0.1	-0.3	-0.7	-1.4	-2.2
<i>90</i>	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla XI: Corrección arco-cuerda para Y=300 km

Para este caso las correcciones angulares siguen siendo inferiores a la precisión instrumental, y pueden despreciarse para la mayoría de los casos que se puedan presentar.

Cabe destacar que esta corrección es para cada dirección, es decir, si medimos un ángulo (diferencia de dos direcciones) tendremos que aplicar la corrección para cada dirección. En el caso de dos visuales muy largas, podemos alcanzar correcciones totales del orden de la precisión instrumental.

4.5 REDUCCIÓN DE SUPERFICIES DEL PLANO DE PROYECCIÓN AL ELIPSOIDE

La tabla XIV muestra la deformación que se produce en la superficie de una figura, por la utilización de una proyección conforme. Para ello se ha supuesto una figura rectangular de 5 km x 2 km de lado, lo que genera una superficie de 1000 Ha (10 km²); con su lado mayor en dirección E-O. Suponemos una latitud media de 38°.

	Superficie	Dif. Sup	%	Perímetro	Dif. Perim.
Meridiano Central	1000 Ha	-	-	14000 m	-
Δ long 30'	1000 Ha 609 m ²	609 m ²	0.006	14000.43 m	0.43 m
Δ long 1°	1000 Ha 2323 m ²	2323 m ²	0.02	14001.64 m	1.64 m
Δ long 1° 30'	1000 Ha 5152 m ²	5152 m ²	0.05	14003.61 m	3.61 m

Tabla XII: Diferencia de superficie por uso de proyección

Como se desprende de la tabla, el error en la superficie alcanza para el extremo de la faja el 0.05%. La diferencia en el perímetro de la figura implicaría un error relativo de 1/3900 para el caso más desfavorable.

Si deseamos conocer la superficie de la figura sin deformación, podemos realizar el cálculo utilizando el módulo de anamorfosis lineal elevado al cuadrado. La superficie real será igual, a la calculada por coordenadas dividido por el módulo de anamorfosis al cuadrado.

Para comprobar la validez de este procedimiento utilizaremos la superficie con mayor deformación.

Sup.	k	k^2
1000 Ha 5152 m ²	1.000238	1.00048
Sup real	1000 Ha 342 m ²	

Como vemos aplicando este simple procedimiento obtenemos una diferencia, respecto de la superficie real, de apenas 342 m². Este es un valor despreciable en relación a la superficie en cuestión.

En los extremos de la faja no solo tendremos una deformación en la longitud de los lados, y por ende en la superficie, sino que también se tendrá una variación en los ángulos interiores, debido a la curvatura de la representación de la línea geodésica (corrección arco-cuerda). Analizaré el caso más comprometido, es decir, en el extremo de la faja y estudiaremos si esta corrección deberá ser tenida en cuenta.

Si utilizamos los valores que se calcularon para las correcciones arco-cuerda -tabla X- que corresponde al extremo de una faja, podemos conocer la deformación angular.

El lado en dirección Norte-Sur y longitud 2 km, tendrá una corrección -0.8''

El lado en dirección Este-Oeste y longitud 5 km, tendrá una corrección -0''

El ángulo interior que forman esas dos líneas, tendrá al ser proyectado una corrección de -0.8''. Dada la regularidad de la figura, obtendremos los mismos valores para los demás ángulos, alternándose los signos.

Para alejamientos menores del meridiano central, las correcciones son inferiores. Lo mismo sucederá para lado de menor longitud. Posteriormente se estudiará para una parcela de mayor tamaño -11.000 Ha-.

Podemos concluir que las correcciones angulares son despreciables.

4.6 REDUCCIÓN DE SUPERFICIES DEL ELIPSOIDE AL TERRENO

De la misma manera que una distancia medida sobre la superficie terrestre no era igual a la distancia sobre la superficie del elipsoide, un área sobre el terreno no ha de ser igual a su proyección sobre el elipsoide. Esta reducción al terreno o viceversa estará en función de la altura elipsoidal h .

La tabla XIII muestra la diferencia en la superficie del terreno para distintos valores de altitud.

	Superficie	Dif. Sup	%	Perímetro	Dif. Perim.
s/elipsoide	1000 Ha	-	-	14000.00	-
h=100m	1000 Ha 314 m ²	314 m ²	0.003	14000.22	0.22 m
h=200m	1000 Ha 627 m ²	627 m ²	0.006	14000.44	0.44 m
h=300m	1000 Ha 941 m ²	941 m ²	0.009	14000.66	0.66 m
h=500m	1000 Ha 1568 m ²	1568 m ²	0.016	14001.10	1.10 m
h=1000m	1000 Ha 3136 m ²	3136 m ²	0.031	14002.19	2.19 m
h=2000m	1000 Ha 6272 m ²	6272 m ²	0.063	14004.39	4.39 m
h=3000m	1000 Ha 9409 m ²	9409 m ²	0.094	14006.58	6.58 m
h=4000m	1001 Ha 2546 m ²	1 Ha 2546 m ²	0.125	14008.78	8.78 m

Tabla XIII: Diferencia en superficie por reducción al terreno

Al igual que en el análisis de la deformación por uso de la proyección, será el profesional el que decida si esta reducción debe ser tomada en cuenta, ya sea por la precisión del trabajo o por la finalidad.

Para darnos una idea de la magnitud de la deformación por proyección y de la reducción al terreno, calcularemos el error en la superficie de la figura estudiada, derivado del error en las coordenadas de sus vértices. Tabla XIV.

Superficie 1000 Ha

σ_{xy}	σ_{sup}	%
± 0.05 m	± 269 m ²	0.003
± 0.10 m	± 539 m ²	0.005
± 0.20 m	± 1077 m ²	0.01
± 0.30 m	± 1616 m ²	0.02
± 0.50 m	± 2693 m ²	0.03

Tabla XIV: Error en la superficie derivado del error en sus vértices

Supongamos que la figura estudiada, corresponde a una mensura rural, resulta lógico suponer que el error en la determinación de los vértices es del orden de los ± 0.30 m (suficiente para una operación de estas características); en esta situación el error es del mismo orden que la deformación que se produce aproximadamente a $45'$ de alejamiento. Un análisis similar puede hacerse en relación a la reducción por altura. Alcanzando para alturas de 500 m valores similares de corrección, es decir, la deformación en la superficie es del mismo orden que la precisión.

Teniendo en cuenta las exigencias de precisión en el levantamiento, y comparando con la deformación que produce la proyección, estamos en condiciones de decidir si estas deformaciones son aceptables o no.

En los casos que sea necesario la reducción de la superficie por proyección, es factible aplicar como factor de reducción, el módulo de anamorfosis lineal elevado al cuadrado (k^2). Lo mismo se aplica para la reducción al terreno.

Puede ocurrir, en algunos casos particulares, que se produzca una “compensación” entre la deformación por proyección y la reducción por altura. Por ejemplo, suponemos que la figura se encuentra a 700 m de altitud y a 1° de alejamiento del meridiano central. La superficie calculada por coordenadas de proyección será 2323 m² mayor que la correspondiente sobre el elipsoide; pero la superficie al nivel del elipsoide será 2195 m² más pequeña que el área sobre la superficie topográfica (a 700 m). Combinadas, ambas correcciones se anulan. Vale decir, la superficie calculada por coordenadas de proyección es igual a la superficie real en la superficie del terreno.

El problema de la deformación en la superficie presenta, en relación con los Catastros Territoriales, algunas cuestiones interesantes para analizar.

Supongamos que se realizó una operación de mensura rural y en cuyo levantamiento se utilizó metodología GPS. En esta operación de agrimensura será necesario expresar la superficie real de la parcela. El problema del cálculo no presenta dificultad, se utiliza una proyección local o equivalente y se calcula la superficie sin distorsión. En algunos casos será necesario reducir la superficie al terreno, cuando la altitud sea importante. Sin embargo, algunos catastros provinciales exigen la vinculación de la operación a un sistema geodésico oficial, y expresar las coordenadas en la proyección oficial y en la faja correspondiente. Resultará, si la parcela se encuentra lejana al meridiano central, que ahora las medidas de sus lados sufrirán una deformación y ya no habrá correspondencia entre las medidas indicadas en el plano y la superficie indicada en el mismo (calculada si distorsión). De manera similar, si calculamos la superficie a partir de las coordenadas de proyección, sufrirá una deformación de la superficie que no se corresponde con la realidad territorial.

Estudiaremos esto más detenidamente, aplicando estos conceptos a un caso particular de mensura rural.

4.7 CASO PARTICULAR: MENSURA RURAL

4.7.1 Análisis de la deformación por uso de coordenadas de proyección

Mensura y Unión Establecimiento “La Cosecha”

Para visualizar mejor la problemática planteada, veamos un caso práctico en el que aplicaremos los conceptos estudiados.

Tomaremos como ejemplo una operación de Mensura y Unión practicada en el establecimiento “La Cosecha”, Pueblo de Tintina, Santiago del Estero. La parcela en cuestión posee una superficie aproximada de 11.000 Ha, con lados de entre 2 y 13 kilómetros siendo la mayor extensión en dirección Norte-Sur. El relevamiento topográfico se realizó empleando metodología GPS. Se procedió a la medición en modo estático y diferencial de los puntos característicos y notables en períodos de 30’ a 35’, con vectores no mayores a 7 km. Se utilizaron tres equipos GPS, modelo Trimble 4600. La exactitud final osciló dentro de los $\pm 3 \text{ cm} + 1 \text{ ppm}$, para la longitud de vectores expresada.

Los vértices del polígono límite resultante poseen las siguientes coordenadas geodésicas, expresadas en el sistema WGS-84:

Vértice	ϕ	λ
A	-27° 10' 32.5492"	-61° 45' 04.2005"
B	-27° 03' 17.9732"	-61° 44' 58.0856"
C	-27° 03' 20.0744"	-61° 41' 59.2268"
D	-27° 04' 11.5978"	-61° 40' 39.0329"
E	-27° 04' 16.1861"	-61° 40' 30.4598"
F	-27° 04' 49.2644"	-61° 39' 39.2816"
G	-27° 10' 36.0229"	-61° 39' 43.8414"

En primer término, convertiremos las coordenadas geodésicas en coordenadas planas Gauss-Krüger, con meridiano central $\lambda = -61^\circ 42'$ correspondiente al meridiano medio de nuestro levantamiento, es decir una proyección local. Obtenemos las siguientes coordenadas¹⁹:

Coordenadas Gauss-Krüger (meridiano local)

Vértice	X	Y
A	6994865.08	494929.36
B	7008241.08	495092.43
C	7008177.37	500021.31
D	7006591.33	502230.94
E	7006450.06	502467.14
F	7005431.58	503876.96
G	6994758.63	503748.12

Obtenemos:

Superficie: 11268 Ha 8637 m²

Utilizando un meridiano local, podemos considerar que las magnitudes lineales representadas y los valores de superficie calculados están libres de distorsiones. Este es un procedimiento válido y cuando no sea necesario referir las coordenadas al sistema oficial es recomendable proceder de esta manera en todos los levantamientos.

¹⁹ Valor de abscisa para el meridiano central Y=500.000

En el ya citado trabajo “Propuesta de Normas y especificaciones técnicas para mediciones Topográficas y Geodésicas en las Obras Públicas” el autor propone la utilización de esta proyección local, designándola “faja 0”, es decir, un falso Este de 500.000, para evitar todo tipo de confusión y para que se pueda visualizar de forma inmediata que se trata de un sistema de proyección regional.

Otra forma de obtener coordenadas planas locales, para calcular las dimensiones y forma de la parcela, es utilizar las coordenadas cartesianas geocéntricas de los vértices proyectándolas sobre el plano. Este procedimiento emplea una matriz de rotación, que permite calcular coordenadas planas a partir de vectores GPS²⁰. (Consultar anexo 4 para más detalles).

En primer lugar se calcula la matriz de rotación, utilizando las coordenadas geodésicas de un vértice, a partir del cual calcularemos las restantes coordenadas planas. El procedimiento consiste en esencia, en calcular los incrementos en las coordenadas cartesianas de los puntos, con respecto al vértice que utilizamos de origen, luego al aplicar la matriz de rotación nos da como resultado incrementos de coordenadas sobre el plano local ($\Delta n \Delta e \Delta u$). Calculados los respectivos incrementos, respecto al vértice de origen, obtenemos las coordenadas planas buscadas.

Estas coordenadas están referidas a un plano local a una altura h sobre el elipsoide (h = altura elipsoidal del vértice de inicio), por lo que los valores lineales que se obtienen a partir de estas coordenadas pueden compararse con las medidas tomadas de forma directa en el terreno (mediciones tradicionales).

Calculo de las coordenadas locales

No desarrollaré todos los cálculos, solo aquellos pasos más importante. Para más detalles se puede consultar el anexo 4.

Utilizaremos el vértice **A** como punto de partida. Sus coordenadas geodésicas nos permitirán calcular la matriz de rotación.

$$R1 = \begin{bmatrix} 0.21617 & -0.40232 & 0.88961 \\ 0.88090 & 0.47330 & 0 \\ 0.42105 & -0.78366 & -0.45672 \end{bmatrix}$$

²⁰ Algunos *software* de proceso permite calcular estas coordenadas locales. Las suelen denominar *ground* (coordenadas topográficas).

Ahora convertiremos las coordenadas geodésicas de los vértices, en coordenadas cartesianas y calcularemos los sucesivos incrementos respecto al vértice A

Vértice	X	Y	Z	ΔX	ΔY	ΔZ
A	2687417.072	-5001770.693	-2895549.288	0	0	0
B	2690451.008	-5007061.364	-2883643.503	3033.936	-5290.671	11905.785
C	2694777.833	-5004700.607	-2883701.096	7360.761	-2929.914	11848.192
D	2696381.105	-5003017.391	-2885113.301	8964.033	-1246.698	10435.987
E	2696558.554	-5002848.74	-2885239.053	9141.482	-1078.047	10310.235
F	2697579.793	-5001771.642	-2886145.594	10162.721	-0.949	9403.694
G	2695159.123	-4997547.733	-2895644.404	7742.051	4222.960	-95.116

Multiplicando los sucesivos “deltas” por la matriz de rotación, obtenemos los incrementos de coordenadas en el plano para cada vértice.

$$\begin{bmatrix} \Delta n \\ \Delta e \\ \Delta u \end{bmatrix} = R1 \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

Vértice	Δn	Δe
B	13375.91	168.51
C	13310.20	5097.36
D	11723.26	7306.36
E	11581.90	7542.49
F	10562.85	8951.90
G	-110.05	8818.71

Si damos un valor de coordenadas arbitrarias al vértice A, por ejemplo n=10.000; e=10.000, podemos calcular las coordenadas planas de los demás vértices.

Vértice	n	e
A	10000.00	10000.00
B	23375.91	10168.51
C	23310.20	15097.36
D	21723.26	17306.36
E	21581.90	17542.49
F	20562.85	18951.90
G	9889.95	18818.71

A partir de estas coordenadas planas podemos calcular las dimensiones y forma de la parcela SIN DISTORSIÓN. Puede el lector comprobar que las dimensiones de la parcela y la superficie calculadas a partir de estas coordenadas son consistentes con las obtenidas utilizando coordenadas de proyección con meridiano local (existen pequeñas diferencias por el proceso de cálculo y redondeo de las coordenadas). La diferencia lineal máxima es de 2 cm para el lado AB (que excede los 13 km de longitud). En superficie se encuentra una diferencia de -90 m^2 ; valor totalmente despreciable.

Para este caso particular no se tuvo en cuenta la reducción por altura, ya que se puede despreciar, por estar la parcela cercana al nivel del elipsoide (menor a 100 m sobre el elipsoide). En los casos que la altura sea considerable existirá una diferencia entre los lados calculados por coordenadas de proyección (con meridiano local) y los calculados con coordenadas locales (utilizando el procedimiento descrito), esta diferencia lineal estará en función de la altura elipsoidal del punto y puede ser calculada a partir de las formulas del apartado 2.15.2 (reducción de distancias al nivel del elipsoide).

Es interesante señalar que, utilizando las coordenadas locales, la orientación de la parcela está referida al meridiano que pasa por el vértice A (Norte geodésico). Cuando se utilizan coordenadas Gauss-Krüger, debemos tener en cuenta la convergencia de meridianos si deseamos conocer el rumbo verdadero a partir del rumbo de cuadrícula (ver apartados 2.13.3 y 2.13.4). Utilizando la proyección Gauss-Krüger con meridiano local, la convergencia meridiana entre el meridiano central y el meridiano que pasa por el vértice A es de $-1'24''$; este ángulo es justamente la rotación que existe entre ambos sistemas.

Calculo de las coordenadas Gauss-Krüger

En segundo término calcularemos las coordenadas de los vértices, utilizando como meridiano central $\lambda = -63^\circ$, que corresponde a la faja 4 del plan cartográfico nacional. Este proceder es exigido en muchas provincias por sus respectivos Catastros Territoriales.

Coordenadas Gauss-Krüger en faja 4

Vértice	X	Y
A	6994250.02	4623765.32
B	7007626.15	4624066.78
C	7007511.55	4628995.71
D	7005902.44	4631189.31
E	7005758.71	4631424.09
F	7004725.50	4632823.61
G	6994052.14	4632584.29

El factor de anamorfosis medio de la zona es $k=1.00020$

Esta parcela se encuentra cercana al límite de faja, por lo que la superficie calculada a partir de sus coordenadas presentará distorsiones significativas. Obtenemos:

Superficie: 11273 Ha 4642 m²

La diferencia que obtenemos en la superficie es:

	Superficie	Dif. Sup	%	Perímetro	Dif. Perim.
Meridiano Central	11268 Ha 8637 m ²	-	-	42533.78 m	-
Meridiano -63°	11273 Ha 4642 m ²	4 Ha 6005 m ²	0.04	42542.39 m	8.61 m

Como realizamos anteriormente podemos analizar, en función de la precisión del levantamiento, si esta deformación en la superficie es aceptable en función de la finalidad del trabajo.

Calcularemos el error en la superficie teniendo en cuenta la exactitud final del levantamiento realizado (± 3 cm); también se considerara que para una operación de estas características es posible aceptar exactitudes mucho más generosas (± 0.30 m y ± 0.50 m).

σ_{xy}	σ_{sup}
± 0.03 m	± 402 m ²
± 0.3 m	± 4020 m ²
± 0.5 m	± 6700 m ²

Como vemos el error propio del levantamiento es de un orden muy inferior a la deformación producida por la proyección. Sin dudas es un aspecto muy importante a tener en cuenta.

Veamos las deformaciones que se producen en los lados y ángulos (corrección arco-cuerda) de la parcela, al representarla según las coordenadas de proyección.

Lado	GK (local)	GK faja 4	Dif
AB	13376.99	13379.53	2.54
BC	4929.29	4930.26	0.97
CD	2719.93	2720.50	0.57
DE	275.22	275.28	0.06
EF	1739.22	1739.59	0.37
FG	10673.73	10676.04	2.31
GH	8819.40	8821.19	1.79

El error relativo que implica la deformación es del orden de 1/5000.

La siguiente tabla nos muestra la distorsión angular que sufre la parcela.

Angulo interior			
Vértice	GK (local)	GK faja 4	Dif
A	89° 59' 35"	89° 59' 40"	+5"
B	89° 57' 29"	89° 57' 33"	+5"
C	145° 04' 14"	145° 04' 12"	-2"
D	184° 47' 11"	184° 47' 14"	+3"
E	175° 02' 19"	175° 02' 15"	-4"
F	125° 09' 12"	125° 09' 09"	-3"
G	90° 00' 00"	89° 59' 57"	-3"

Como se puede ver en este caso, dada las grandes dimensiones de la parcela, no solo se producen distorsiones en la longitud de los lados sino que también se manifiestan distorsiones angulares.

En el caso más desfavorable, la diferencia angular es de 5", lo que representa en el extremo de la línea en cuestión un desplazamiento transversal de 0.32m. Si consideramos este error como aceptable en una mensura de este tipo, la deformación angular puede despreciarse. No así la deformación lineal y superficial, la cual alcanza valores de deformación superiores a los errores propios del levantamiento.

En relación al catastro territorial y a los derechos territoriales involucrados puede generar, al no considerar estos aspectos de la teoría cartográfica, algún tipo de conflicto en relación a la extensión del derecho.

Al respecto veamos algunas opiniones:

“Para el caso del Sistema Gauss-Krüger, un levantamiento realizado próximo al meridiano central no tendrá deformaciones, (entiéndase por deformaciones a la variación dimensional de lados y superficies) mientras que serán importantes en los límites de la faja. Este es un aspecto interesante para el catastro, puesto que en los títulos en general describen geoméricamente a la parcela indicando longitud de lados y superficie, sin hacer referencia al sistema utilizado, y pueden ser la causa de futuros pleitos judiciales [...] Si nos centramos en las magnitudes de sus lados y la superficie, es fácil darse cuenta que un levantamiento efectuado con GPS puede generar conflictos si no se especifica claramente que sistema se ha utilizado.

Lo aconsejable, en estos casos, sería calcular los parámetros en ambos sistemas, en un sistema local y el sistema de proyección utilizado por el catastro territorial, de esta manera se podrán evitar confusiones, sobre todo a nivel de propietarios y poseedores que desconocen las cuestiones técnicas del proceso”²¹.

Podemos plantearnos las siguientes preguntas:

¿Es conveniente representar la parcela a través de sus coordenadas de proyección?

¿Qué superficie se deberá indicar? ¿La real sobre el terreno o la proyectada?

¿O ambas?

¿Es necesario reducir los lados y superficie al nivel de la superficie topográfica?

²¹ Pappalardo, Ángel; Toledo, Bernardo. “Tratado de Catastro Territorial”. Edición del autor. Santiago del Estero 1998. Pág. 166-167.

En mi opinión, considero que sería conveniente representar los límites del derecho, y su situación en el territorio, expresando las medidas lineales y angulares reales sobre el terreno, es decir, reducidas al nivel de la superficie topográfica. Dicho de otra manera, representar la realidad territorial según se observa en el terreno. La necesidad de georreferenciación, puede ser salvada adjuntando las coordenadas geodésicas de los vértices del polígono límite, para que el organismo catastral las utilice en sus registros gráficos y Sistemas de Información Territorial (SIT).

Está claro que la georreferenciación en la mensura, responde a las exigencias de los catastros modernos, permite una correcta ubicación y orientación de las parcelas, asignando coordenadas únicas respecto a un marco de referencia; permite un manejo de información espacial precisa y homogénea, sin embargo se deben tener muy en cuenta estas consideraciones geodésicas y cartográficas; y es sin dudas es un aspecto muy importante a tener en cuenta cuando se actualizan las normas catastrales.

4.8 CASO PARTICULAR: CALCULO DE UNA POLIGONAL MEDIDA CON MÉTODOS COMBINADOS

Poligonal combinada. Ruta provincial N° 12

Para visualizar mejor la problemática planteada, veamos un caso práctico en el que aplicaremos los conceptos estudiados.

Tomaremos como ejemplo una poligonal medida con métodos combinados sobre la Ruta Provincial N° 12, en el tramo que une las localidades de Corral de Bustos y Los Surgentes, Provincia de Córdoba. Esta poligonal sirve como apoyo planialtimétrico para el proyecto de repavimentación y mantenimiento de dicha ruta (CREMA 03, Ruta provincial N° 12); en el tramo que tiene origen en la Localidad de Corral de Bustos, extendiéndose en dirección Noroeste aproximadamente 35 km.

La poligonal en cuestión está compuesta por 12 vértices principales, medidos con metodología GPS. Se procedió en modo estático diferencial, vinculando la poligonal con la estación permanente UNRO. La exactitud final de los vértices osciló en ± 1 cm + 1ppm.

Los vértices que dan comienzo a la poligonal se colocaron a 1000 m, para permitir la orientación del instrumental tradicional. Luego se distribuyen los restantes vértices a lo largo del proyecto, aproximadamente cada 5 km, y en los lugares donde la poligonal era más débil.

Los términos de referencia del proyecto ejecutivo, exige materializar puntos fijos cada 500 m. La densificación de estos vértices se realizó empleando mediciones de Estación Total. De ésta manera se procedió midiendo puntos fijos cada 500 m entre los vértices principales de la poligonal (medidos con GPS). Las coordenadas del sistema de apoyo se deberán expresarse en proyección Gauss-Krüger faja 4.

No discutiremos ahora la conveniencia o no de expresar las coordenadas en el plano de proyección. Nos limitaremos a analizar las correcciones a las mediciones clásicas y evaluar las deferencias en el valor de las coordenadas finales.

4.8.1 Análisis de la magnitud de las correcciones aplicables

La siguiente tabla muestra las coordenadas geodésicas, en sistema WGS-84, de los vértices principales de la poligonal.

Vértice	Latitud	Longitud	h
A	33° 17' 15.0013"S	62° 08' 08.9192"W	112.860
B	33° 16' 42.1701"S	62° 08' 00.6321"W	112.350
C	33° 14' 13.1393"S	62° 07' 22.5635"W	107.980
D	33° 11' 27.9487"S	62° 06' 38.8311"W	108.273
E	33° 11' 09.0401"S	62° 06' 34.0279"W	106.464
F	33° 08' 20.4787"S	62° 05' 53.5694"W	107.274
G	33° 07' 42.3481"S	62° 05' 41.8789"W	106.947
H	33° 06' 51.3374"S	62° 05' 28.1394"W	103.965
I	33° 04' 23.5739"S	62° 04' 50.5996"W	107.232
J	33° 01' 49.6692"S	62° 04' 11.4035"W	106.273
K	33° 01' 33.1841"S	62° 04' 07.2154"W	106.470
L	32° 58' 41.0311"S	62° 03' 14.7828"W	97.590

En primer lugar calcularemos las reducciones lineales para reducir las distancias al elipsoide.

Como se puede observar en la tabla anterior, existe una variación de altura elipsoidal de aproximadamente 15 metros entre los vértices A y L. Según se estudió, es posible reducir todas las distancias considerando un plano medio de reducción. De esta manera reducimos todas las distancias aplicando la misma corrección.

Tomaremos como plano medio de reducción, el correspondiente a una altura de 106 m sobre el nivel del elipsoide, que corresponde al valor medio de altura de los vértices principales.

Utilizando la formula correspondiente –apartado 2.15.2- para la latitud media de la zona, obtenemos una corrección de $-1,7$ cm/Km. Expresado en forma de factor escala $k_{alt}=0.999983$. Las diferencias máximas por considerar este plano medio serán de 1.3 mm/Km; inferior a la precisión instrumental y puede despreciarse.

Las correcciones angulares, para proyectar las lecturas angulares medidas en el terreno a la superficie del elipsoide, se pueden despreciar según se estudió precedentemente.

4.8.2 Conversión de las coordenadas geodésica a coordenadas planas

Como se procede habitualmente, se convertirán las coordenadas geodésicas en coordenadas planas de una proyección conforme.

Se utilizará la proyección conforme Gauss-Krüger con meridano central -63° (Faja 4).

Obtenemos:

Vértice	X	Y	h	k
A	6316998.67	4580499.53	112.860	1.000080
B	6318008.41	4580722.36	112.350	1.000080
C	6322591.75	4581746.07	107.980	1.000082
D	6327671.60	4582921.61	108.273	1.000085
E	6328253.10	4583050.99	106.464	1.000085
F	6333437.36	4584143.82	107.274	1.000087
G	6334609.51	4584456.98	106.947	1.000088
H	6336178.02	4584826.77	103.965	1.000089
I	6340721.96	4585839.95	107.232	1.000091
J	6345454.61	4586898.65	106.273	1.000093
K	6345961.53	4587011.84	106.470	1.000093
L	6351253.16	4588420.32	97.590	1.000096

La dirección predominante de la poligonal, corresponde a la orientación N-S por lo que la variación de anamorfofis es muy pequeña, según se desprende de la tabla anterior, esto nos permitirá considerarla constante para toda la zona de trabajo.

El valor medio de la anamorfofis lineal es $k= 1.000088$

Expresado en forma de corrección: + 8.8 cm/Km.

La corrección angular por curvatura de la proyección de la línea geodésica, por encontrarse cercano al meridiano central, resultará despreciable para la zona de trabajo. Igualmente calcularemos la corrección para el caso más comprometido que se pueda presentar, considerando una distancia máxima de trabajo de 2000 metros.

Tomemos por ejemplo:

Y= 90 km		
Az	Dist máx.	corrección
0°-180°	2000	-0.4"

La corrección angular máxima que se obtienen es despreciable, como era de esperar.

Del análisis de las correcciones, concluimos que será necesario tener en cuenta únicamente las correcciones lineales. Siendo la reducción de distancias al nivel del elipsoide de -1.7 cm/Km, tomando un plano medio de reducción para la altura media de trabajo $h=106$ m.

La anamorfofis lineal media en la zona de trabajo es de $k= 1.000088$; la máxima diferencia al tomar este valor medio es de 0.8 cm/Km.

Dadas las características de la zona de trabajo, es decir, mínima variación de la anamorfosis lineal y posibilidad de reducción al nivel del elipsoide considerando un plano medio, es posible reducir el tratamiento de las medidas lineales aplicando un factor de escala único que combine ambas reducciones (por altura y anamorfosis lineal).

La reducción al nivel del elipsoide se puede realizar aplicando un factor de escala $k_{alt}=0.999983$

$$D_{elip} = D_{medida} * k_{alt}$$

La reducción al plano de proyección se realiza aplicando el módulo de anamorfosis lineal $k=1.000088$

$$D_{proy} = D_{elip} * k$$

Podemos utilizar un factor de escala combinado $k_c = k_{alt} * k$; este factor de escala permite reducir las distancias medidas al plano de proyección.

$$D_{proy} = D_{medida} * k_c$$

Para la zona de trabajo el valor que adopta es $k_c=1.000071$

Dicho de otra forma la corrección lineal será de +7.1 cm/Km para toda la zona

Se pueden presentar casos en que la variación de la anamorfosis lineal es muy grande, y no será válido utilizar un único factor de reducción, en estas situaciones será necesario dividir la zona de trabajo en sectores, utilizando para cada uno de estos un módulo de deformación diferente.

Según se analizó anteriormente (ver tabla VII) podremos considerar, dependiendo de la ubicación de la zona de trabajo respecto al meridiano central de la proyección, cual es la máxima extensión en la que podemos considerar que el módulo de anamorfosis lineal se mantiene constante. Mientras más alejados nos encontremos del meridiano central, menor será el margen de aplicación de un único módulo de deformación.

Un caso típico en el que no será posible utilizar un único módulo de anamorfosis, es la situación de una poligonal en dirección E-W; por ejemplo la poligonal estudiada pero rotada 90 grados.

Para el módulo de reducción por altura, se aplicara el mismo criterio de dividir la zona en sectores con distintos plano de reducción. En las tablas II y III se mostraron los límites de aplicación para un plano medio de reducción.

Como ya mencionamos, en este caso particular será suficiente utilizar un único factor de escala combinado para toda la zona de trabajo.

4.8.3 Diferencias obtenidas por despreciar las correcciones

Para visualizar, las diferencias que se obtienen en el cálculo de las coordenadas finales, por no considerar las reducciones lineales, tomaremos como ejemplo la poligonal intercalada entre los vértices K y L.

Esta poligonal fue medida con una Estación Total marca Trimble modelo 3600, de características y precisiones estándar. Se consideró un error lineal de ± 2 cm y un error por ángulo de $\pm 10''$.

La poligonal analizada consta de 10 vértices, con lados aproximados de 500 metros, que corresponde a la densificación de puntos fijos; la longitud total de la línea poligonal, es de algo más de 5 kilómetros. En este caso se trata de una poligonal atada y orientada – coordenadas de partida y llegada conocidas; acimut de salida conocido-.

Dada la distribución de los vértices principales, no se trabajó con intercalaciones mayores de 5 km. De esta manera solo se analizará una intercalación, obteniéndose valores similares para las demás poligonales.

Se trabajó directamente con coordenadas calculadas por las Estación Total, partiendo del vértice K con las coordenadas del punto y orientado con punto atrás (vértice J). Se utilizó bastón centrador, cuidando la verticalidad del mismo.

Se obtuvieron las siguientes coordenadas sin compensar y sin aplicar ningún tipo de corrección lineal.

Vértice	X	Y
J	6345454.61	4586898.65
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.25	4587125.89
2	6346967.74	4587409.45
3	6347386.08	4587554.96
4	6347869.71	4587663.91
5	6348374.72	4587777.26
6	6348890.45	4587892.23
7	6349370.46	4587999.64
8	6349776.27	4588090.04
9	6350289.32	4588205.29
10	6350799.04	4588319.43
L	6351252.61	4588419.81

Comparando el valor de las coordenadas del vértice L, con el valor resultante de la medición, se desprende inmediatamente el error de cierre.

Se obtiene:

$$\Delta X = +0,546 \text{ m}$$

$$\Delta Y = +0,512 \text{ m}$$

El error total será $F = \pm 0,748 \text{ m}$; el error relativo es $e_r = \frac{1}{7300}$

Como segundo paso, aplicaremos las correcciones lineales que hemos calculado y corregiremos las coordenadas. Es decir, corregiremos las coordenadas de la tabla anterior aplicando el factor de escala combinado calculado para la zona de trabajo.

$$k_c = 1.000071$$

Para corregir nuestras coordenadas, utilizando el factor de escala combinado, podemos actuar de dos maneras:

La primera opción es realizar el cálculo inverso, y obtener las sucesivas distancias. Luego le aplicamos el factor de escala determinado para la zona de trabajo y calculamos nuevamente las coordenadas con las distancias corregidas.

La segunda opción, consiste en calcular los sucesivos incrementos de coordenadas (ΔX , ΔY). Luego aplicamos el factor de escala a cada “delta” y calculamos nuevamente las coordenadas, ahora corregida.

De las dos formas descritas se puede proceder, ya que no aplicaremos correcciones angulares. Si fuera necesario corregir los ángulos, deberemos utilizar la primera opción, corrigiendo las longitudes y los ángulos para cada uno de los lados. En el anexo 3 se puede consultar el procedimiento para calcular las coordenadas corregidas.

Obtenemos las siguientes coordenadas corregidas:

Vértice	X	Y
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.29	4587125.90
2	6346967.81	4587409.48
3	6347386.18	4587555.00
4	6347869.85	4587663.96
5	6348374.89	4587777.31
6	6348890.66	4587892.29
7	6349370.70	4587999.71
8	6349776.54	4588090.12
9	6350289.63	4588205.37
10	6350799.38	4588319.52
L	6351252.99	4588419.91

No corregimos las coordenadas del vértice K, por ser las coordenadas de partida.

El error de cierre resulta inmediato, al comparar con las coordenadas del vértice L

$$\Delta X = +0.170m$$

$$\Delta Y = +0.412 m$$

El error total $F = \pm 0,446 m$; el error relativo será $e_r = \frac{1}{12.300}$

De los resultados expuestos, vemos que hemos reducido el “*aparente*” error de cierre que obtenemos en la primera tabla. El error total se reduce en 30 cm, nótese como ha mejorado el error relativo. Al corregir las medidas lineales, hemos eliminado el error que se va acumulando en la poligonal, por no considerar la diferencia entre la distancia medida y la proyectada (diferente escala en las medidas lineales).

Podemos analizar las diferencias que se obtienen en las coordenadas, al aplicar la reducción lineal.

vértice	X	Y
1	-0.04	-0.01
2	-0.07	-0.03
3	-0.10	-0.04
4	-0.14	-0.05
5	-0.17	-0.05
6	-0.21	-0.06
7	-0.24	-0.07
8	-0.27	-0.08
9	-0.31	-0.08
10	-0.34	-0.09
<i>L</i>	-0.38	-0.10

Al no considerar las reducciones lineales, las mismas actúan como un error sistemático en las distancias. En los primeros vértices encontramos diferencias de 4 cm, mientras que para el último, la diferencia es de 38 cm en el eje X; en la dirección del eje Y la máxima diferencia es de 10 cm. Esto se debe a que las correcciones se van acumulando paulatinamente, y siempre con el mismo signo.

Para el primer vértice la diferencia es de 4 cm, que corresponde a la corrección lineal calculada para la distancia de ese lado. Para el segundo vértice, tenemos una diferencia de 7 cm, que está compuesta por los 4 cm del primer vértice, más la corrección de lado considerado (3 cm). Lo mismo sucederá para los demás vértices.

La mayor diferencia se encuentra en el eje X, esto se debe a la orientación de la poligonal, ya que se desarrolla en mayor medida sobre este eje.

Se puede comprobar fácilmente que, la diferencia que se obtienen en el último vértice, corresponde a la corrección que se obtiene para una distancia igual a los respectivos incrementos de coordenadas.

Para el eje X tenemos:

$$\Delta X_{KL} = -5291.63 \text{ m}$$

$$-5291.63 * k_c = -0.376m$$

Para el eje Y tenemos:

$$\Delta Y_{KL} = -1408.48 \text{ m}$$

$$-1408.48 \text{ m} * k_c = -0.10 \text{ m}$$

Estas diferencias calculadas, son consecuencia de los diferentes planos de referencia que se utilizan al combinar las mediciones (plano topográfico local y plano de proyección), son diferencias puramente geométricas. La diferencia en las coordenadas del último vértice, es independiente de la cantidad de vértices intermedios que han sido medidos. Es decir, el error acumulado por no considerar el factor de escala en el vértice de llegada, es independiente del número de vértices intermedios y del recorrido de la poligonal.

Debemos realizar una aclaración, hemos considerado que las mediciones están libres de todos los errores sistemáticos; en el caso que el instrumental posea un error sistemático en la medición lineal, la corrección total podrá ser mayor o menor según el signo del error sistemático introducido. Como regla, debemos controlar instrumental y corregir todos los errores instrumentales.

Del análisis de está poligonal, podemos exponer claramente la diferencia entre los conceptos de precisión y exactitud. Si bien la medición fue precisa- el error relativo fue de 1/12.500- la misma NO fue exacta. La medición en si misma fue precisa, pero al no considerar las reducciones lineales el resultado que se obtuvo no fue exacto. Las coordenadas calculadas no son exactas. Una medida puede ser precisa sin ser exacta.

4.8.4 Compensación de la poligonal.

Si consideramos que el error de cierre está dentro de las tolerancias impuestas, debemos proceder a calcular las coordenadas compensadas.

Podemos proceder realizando una compensación expedita, distribuyendo el error de cierre de forma proporcional a la longitud de los lados. Esta compensación expedita será suficiente para la finalidad del levantamiento, sin embargo, creo que no se redundará en mayor trabajo, teniendo en cuenta los *software* disponibles en mercado y la potencia de cálculo que dispone cualquier PC, el aplicar una compensación estricta según lo recomienda la teoría de errores.

Para este análisis, compensaremos la poligonal por mínimos cuadrados, aplicando el procedimiento de variación de coordenadas o de las observaciones indirectas²². El cálculo de las matrices, residuos, error medio, error medio de las coordenadas, etc, se realizó utilizando una planilla Excel, programada para tal fin. En el anexo 3 se pueden consultar los valores obtenidos.

Utilizaremos las coordenadas calculadas por el instrumento, como coordenadas aproximadas, luego sometemos el error de cierre a la condición de mínimos cuadrados.

En primer término se compensará la poligonal, utilizando las coordenadas sin corrección, es decir, las que se obtuvieron directamente de la medición. Luego, compensaremos nuevamente la poligonal pero utilizando las coordenadas corregidas, y analizaremos las diferencias obtenidas.

²² Para profundizar sobre temas referidos a la compensación de poligonales por métodos de mínimos cuadrados, se recomienda consultar Chueca Pazos, Manuel. "Tratado de topografía II. Métodos Topográficos".

La siguiente tabla muestra, las coordenadas finales luego de la compensación. Se utilizaron los datos producto de la medición.

Obtenemos las siguientes coordenadas compensadas²³.

Vértice	X	Y
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.32	4587125.83
2	6346967.95	4587409.25
3	6347386.38	4587554.67
4	6347870.07	4587663.57
5	6348375.13	4587776.91
6	6348890.91	4587891.91
7	6349370.97	4587999.36
8	6349776.79	4588089.95
9	6350289.84	4588205.42
10	6350799.57	4588319.77
L	6351253.16	4588420.32

El error medio de las coordenadas se puede estimar en ± 0.40 m (consultar anexo 3)

Al no considerar las reducciones lineales, se distribuirá en las coordenadas ajustadas, un error de cierre falso que en realidad no fue cometido. Esto producirá sin dudas diferencias en el valor final de las coordenadas calculadas.

Debemos considerar además, como ya se ha mencionado, que las correcciones lineales se van acumulando de manera sistemática; quiero significar con esto, que la compensación por mínimos cuadrados supone distribuir errores aleatorios (distribución normal de probabilidades) y no errores sistemáticos que deben ser eliminados antes de realizar el ajuste. Esto afectará, de manera evidente, las bondades de la compensación.

²³ Las matrices de modelo, pesos, residuos, correcciones y error medio, se pueden consultar en el anexo3.

Compensaremos nuevamente la poligonal, pero en este caso utilizando las coordenadas que han sido reducidas aplicando el factor de escala combinado.

Se obtuvieron las siguientes coordenadas compensadas.

Vértice	X	Y
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.31	4587125.87
2	6346967.90	4587409.38
3	6347386.31	4587554.86
4	6347870.00	4587663.78
5	6348375.07	4587777.12
6	6348890.86	4587892.09
7	6349370.93	4587999.51
8	6349776.75	4588090.06
9	6350289.82	4588205.48
10	6350799.56	4588319.79
L	6351253.16	4588420.32

El error medio de las coordenadas compensadas se puede estimar en $\pm 0.15\text{m}$ (consultar anexo 3)

Estas coordenadas compensadas, tienen en cuenta las reducciones lineales, por lo que serán las coordenadas finales de la poligonal, y están expresadas de manera correcta en el plano de proyección Gauss-Krüger.

Podemos analizar las diferencias, entre las coordenadas finales. Esto nos dará el parámetro si estas correcciones merecen ser tenida en cuenta.

La siguiente tabla muestra las diferencias obtenidas entre las coordenadas compensadas.

Vértice	X	Y
1	0.005	-0.042
2	0.049	-0.139
3	0.070	-0.194
4	0.072	-0.218
5	0.065	-0.211
6	0.054	-0.184
7	0.045	-0.151
8	0.036	-0.103
9	0.020	-0.060
10	0.007	-0.027

Como se observa, el valor final de las coordenadas ha variado sensiblemente en ambos ejes coordenados.

No considerar las reducciones lineales, lleva a calcular erróneamente las coordenadas finales; al efectuar el ajuste de la poligonal, compensaremos considerando un error de cierre que no hemos cometido. El error medio de las coordenadas se redujo notablemente, de 40 cm a 15 cm, al considerar las reducciones lineales. Esto influirá en la exactitud final de las coordenadas. Las diferencias en las coordenadas compensadas, alcanza para este caso particular, diferencias máximas de 20 cm. Las diferencias varían para cada vértice y en el eje analizado, siendo mayores las diferencias sobre el eje Y.

Para la finalidad de este trabajo, las diferencias lineales pueden considerarse como aceptables, sin embargo no siempre las exactitudes buscadas nos permitirán despreciar las correcciones lineales estudiadas. El profesional será quien decida, en última instancia, la necesidad o no de considerar las reducciones lineales y/o angulares estudiadas. El tratamiento correcto de observables no presenta mayores problemas de cálculo, por lo que su aplicación no demandará mayor volumen de cálculo ni aumentará el tiempo de procesamiento. La aplicación de estas correcciones, y una compensación estricta, nos dará la seguridad de que nuestras coordenadas finales son fiables y las mejores compensadas.

Volviendo a un tema que corresponde a la tarea principal del agrimensor, me refiero a la operación de mensura, las nuevas normas catastrales provinciales prevén la georreferenciación de las parcelas. Para realizar de dicha vinculación, a las redes geodésicas provinciales, se establecen los procedimientos para la medición con instrumental GPS y se contempla en general, la posibilidad de realizar la vinculación a través de métodos tradicionales.

Si realizamos la vinculación a través de métodos tradicionales, seguramente la solución será medir una poligonal que vincule el vértice geodésico con la parcela mensurada. Al efectuar la vinculación, debemos tener en cuenta las correcciones lineales, ya que hemos visto que a lo largo de un desarrollo poligonal, las correcciones se acumulan de manera sistemática. Corrigiendo nuestras mediciones lineal vincularemos de manera correcta la parcela y cumpliendo con las exactitudes exigidas.

4.8.5 Uso de Sistemas locales y Sistemas globales en levantamientos topográficos

Para finalizar el estudio, referido a la medición de la poligonal combinada, analicemos las consecuencias de expresar las coordenadas en el plano de proyección.

Hasta ahora hemos medido una poligonal, corregimos las mediciones clásicas, calculamos y compensamos la poligonal, expresando las coordenadas en el plano de proyección Gauss-Krüger, referido a un sistema geodésico de referencia. Desde el punto de vista teórico-matemático, si se me permite la expresión, hemos realizado todos los pasos para obtener las mejores coordenadas compensadas. Sin embargo existe un problema desde el punto de vista práctico.

La poligonal que tomamos como ejemplo sirve de apoyo a un proyecto vial, las coordenadas finales serán utilizadas por otros profesionales y técnicos para llevar a cabo el proyecto. Estas coordenadas serán en todos los casos, contrastadas y verificadas con mediciones directas en el terreno, ya sea por la inspección o por el topógrafo de obra en su tarea cotidiana.

Como es de esperar, si realizamos el control de las coordenadas con mediciones directas en el terreno, no obtendremos el mismo valor de coordenadas que hemos compensado. La razón radica en dos aspectos fundamentales que debemos considerar. En primer lugar, como hemos estudiado a lo largo de este trabajo, existirá una diferencia lineal debido al uso de proyección (debemos considerar la reducción al elipsoide y la anamorfosis lineal); en segundo lugar, la compensación de la poligonal, produce un ajuste geométrico que permite el cierre lineal y angular de la poligonal, es decir, se corrigen en pequeñas cantidades, los lados y ángulos medidos, para obtener el cierre geométrico.

Estos dos aspectos provocaran diferencias al contrastar las coordenadas compensadas con las mediciones realizadas en el terreno. Las diferencias serán mayores o menores, según las características geométricas de la poligonal, ubicación geográfica, precisión de las mediciones, tipo de compensación, etc.

Estas cuestiones deben ser tenidas en cuenta, pues no son pocas las ocasiones en que se producen conflictos al comparar las coordenadas entre distintos profesionales. Principalmente las diferencias lineales por uso de proyección y reducción al elipsoide, pueden alcanzar en muchos casos, magnitudes superiores a la precisión instrumental.

Por ejemplo para este caso particular, la diferencia entre el plano local y el plano de proyección, alcanza correcciones de 90 ppm, es decir, con puntos fijos cada 500 metros encontraremos diferencias, al medir la distancia en el terreno, aproximadamente de 5 cm. Si a esta situación le sumamos, que hemos realizado un ajuste de las distancias, para que se logre el cierre geométrico, las discrepancias entre las coordenadas compensadas y medidas puede superar estos valores. Por ejemplo, para el lado $\overline{12}$ la diferencia entre la distancia medida y la distancia luego de la compensación es de +7 cm, valores similares se obtienen para los demás lados.

Como hemos estudiado, en el extremo de una zona de 3°, la deformación lineal alcanza valores de 300 ppm (30 cm/Km), lo que implica diferencias muy superiores a las que hemos calculado para este caso particular. De ésta manera será necesario aclarar, cuando se entrega por ejemplo un listado de coordenadas, los valores de anamorfosis lineal o bien podría ser un valor de factor de escala (modulo combinado) para la zona de trabajo, así quien controla el trabajo puede corregir las coordenadas medidas.

Las ventajas de utilizar sistemas globales de referencia, se evidencian en la ejecución de grandes proyectos y obras, pensemos por ejemplo en un proyecto vial interprovincial o internacional. Por las dimensiones que puede alcanzar la extensión de la obra (cientos de kilómetros), lo aconsejable es establecer las coordenadas del proyecto en un sistema geodésico, para estas dimensiones resultará inaceptable considerar la hipótesis de una tierra plana. De esta manera será necesario establecer como superficie de referencia al elipsoide, y el plano de proyección para la definición del proyecto. La utilización de un sistema global permite además, la posibilidad de contar con un sistema único de coordenadas permite armonizar los diferentes proyectos y obras. Por estas razones considero que la solución óptima y conveniente es la utilización de sistemas globales, expresando las coordenadas en el plano de proyección.

“Una obra de Ingeniería Georreferenciada, significa que todos y cada uno de los puntos que definen el proyecto, está expresado en coordenadas que son únicas, y que se materializa en un único lugar posible sobre la corteza terrestre, y cualquier ingeniero/agrimensor o topógrafo del planeta lo puede replantear en esa única e indiscutible posición.

Lo contrario es un proyecto referido a un sistema de coordenadas local y arbitrario que solo puede ser materializado por quien creó el sistema, y como no tiene un origen ligado al mundo, puede ser ubicado en cualquier lugar de la corteza terrestre”²⁴.

Está claro que el principal inconveniente consiste en la deformación lineal que introduce la proyección, por lo que no siempre es conveniente la utilización de coordenadas de proyección. En trabajos de pequeña y mediana extensión, será suficiente, para no introducir deformaciones planimétricas, utilizar una proyección ortogonal, es decir, la que surge naturalmente de un levantamiento topográfico empleando un sistema local y arbitrario.

Si deseamos realizar los cálculos y expresar las coordenadas en el plano topográfico local, es decir, utilizar un sistema de referencia local y no un sistema geodésico, debemos corregir las coordenadas que obtenemos con la medición GPS y reducirlas a la superficie topográfica. Es decir, no corregiremos las mediciones tradicionales, sino que proyectaremos sobre el plano topográfico local, las coordenadas geodésicas obtenidas con la medición GPS.

En el anexo 4 se da un procedimiento estricto, que permite ajustar una poligonal combinada, utilizando las coordenadas locales de la medición tradicional y las coordenadas fijas de dos puntos GPS. El procedimiento de cálculo es el mismo que se desarrolló en el caso de la mensura rural, por lo que no merece mayor explicación su cálculo.

²⁴ Del Bianco, Armando. “Propuesta de Normas y Especificaciones Técnicas para mediciones Topográficas y Geodésicas en las Obras Públicas”. Pág. 5.

Calculo de la poligonal en el plano topográfico local.

El ajuste que hemos efectuado de la poligonal combinada, se realizó en el plano de proyección Gauss-Krüger según lo solicito el comitente. Sin embargo podemos efectuar los cálculos en el plano local, utilizando coordenadas locales. Para ello utilizaremos las coordenadas cartesianas de los vértices J y K, luego aplicando una matriz de rotación (ver anexo 4) podremos compensar las coordenadas. No expondré todos los cálculos, solo los valores que se obtienen de la transformación a modo de ejemplo.

Los vértices J y K, medidos con GPS e intervisibles, nos permiten dar orientación a la poligonal, de esta manera podremos calcular las coordenadas locales con orientación verdadera. Las coordenadas utilizadas tienen un origen arbitrario que solo se utiliza a fines de este ejemplo.

En primer lugar, convertiremos las coordenadas geodésicas de los vértices **K** y **L** en coordenadas cartesianas, luego aplicando la matriz de rotación a los incrementos de las coordenadas cartesianas, nos dará como resultado un juego de $\Delta n \Delta e$ que podemos comparar directamente con los obtenidos de las coordenadas locales (ya que tenemos orientación conocida).

Coordenadas cartesianas geocéntricas

	X	Y	Z
K	2507414.703	-4729427.090	-3456423.897
L	2509967.099	-4731334.810	-3451971.213

A partir de las coordenadas geodésicas del vértice K se calcula la matriz de rotación:

$$R1 = \begin{bmatrix} 0.2552 & -0.4815 & 0.8384 \\ 0.8835 & 0.4684 & 0 \\ 0.3927 & -0.7407 & -0.5450 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas planas locales que se obtienen con la orientación dada por los vértices JK son:

Vértice	n	e
J	492.10	2108.68
K	1000.00	2000.00
1	1509.71	2109.52
2	2009.71	2388.65
3	2429.32	2530.43
4	2913.90	2635.08
5	3419.90	2743.94
6	3936.63	2854.32
7	4417.58	2957.46
8	4824.17	3044.24
9	5338.23	3154.93
10	5848.94	3264.53
L	6303.39	3360.88

Aplicando la matriz de rotación a las diferencias de coordenadas cartesianas:

$$R1 \cdot \begin{bmatrix} 2552.396 \\ -1907.721 \\ 4452.685 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los siguientes incrementos en el plano:

Δn	5303.470m
Δe	1361.331m
Δu	-11.24m

Estos incrementos deben compararse con los obtenidos de la medición. Se obtiene:

$$\begin{aligned} dif \mathbf{n} &= +0.08 \\ dif \mathbf{e} &= +0.451 \end{aligned}$$

Si el error de cierre está dentro del valor esperable, se procede a compensar. El error de cierre difiere al calculado en el plano de proyección, debido a que cambia la orientación de la poligonal y por ende las proyecciones sobre los ejes.

Como ya se ha mencionado, actuando de esta manera no es necesario realizar correcciones a las mediciones clásicas. Las coordenadas finales se encuentran expresadas en el plano local, son coordenadas locales y pueden compararse de forma directa con mediciones directas en el terreno.

Otra forma de proceder, tal vez más ilustrativa que una matriz de rotación, es convertir en primer lugar, las coordenadas geodésicas en coordenadas planas de proyección, pero utilizando una proyección local (para evitar deformaciones). Luego corregimos las coordenadas aplicando un factor de reducción del elipsoide al terreno, en este caso el factor escala será el inverso al que utilizamos para reducir distancias del terreno al elipsoide. De esta manera estaremos trabajando sobre un plano local, en cuyo caso no tendremos que corregir las mediciones tradicionales.

En mi opinión considero, que la utilización de sistemas geodésico presenta ventajas en la ejecución de grandes proyectos. La utilización de coordenadas de proyección presenta la dificultad de las deformaciones lineales, sin embargo estas reducciones se calculan fácilmente y no presenta mayor dificultad su cálculo. Será en última instancia el profesional quien deba decidir, a partir de su estudio, sus conocimientos y criterio, la mejor alternativa a la hora de ejecutar un proyecto que implique mediciones topográficas clásicas y GPS.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para trabajos dentro del ámbito de la topografía se concluye que algunas correcciones pueden llegar a ser importantes en relación a las características del trabajo, aconsejándose su estudio antes de tomar la decisión de despreciarlas.

En lo que se refiere a las correcciones de reducción de observables al elipsoide, es válido considerar que únicamente deba ser tenida en cuenta la reducción de distancias del terreno a la cuerda elipsoide, y además esta reducción se convierta en aplicar un único factor de escala para toda una zona, solo con limitaciones en zonas de mucho incremento de altitud elipsoidal, en la que es recomendable dividir la región de trabajo en zonas que presenten menos variación de altura.

Para distancias que normalmente se miden de forma directa, y consideradas en forma aislada, la reducción lineal puede resultar de poca magnitud y despreciable, sin embargo, en itinerarios de poligonación o intercalación entre vértices geodésicos, las correcciones se acumulan de manera sistemática afectando la exactitud de las coordenadas finales. La misma consideración se aplica a la deformación por uso de proyección.

Para alturas elipsoidales superiores a los 1000 m, se deberá considerar la reducción al nivel del elipsoide, si se buscan exactitudes mejores que 1 en 5000, independientemente de la distancia considerada.

Las reducciones angulares para pasar de las direcciones medidas sobre el terreno al elipsoide, se pueden despreciar en todos los casos topográficos. La corrección por desviación de la línea vertical, alcanza valores muy inferiores a la precisión instrumental y es poco probable que un trabajo requiera exactitudes que justifiquen el cálculo de valores de desviación de la vertical y la aplicación de estas correcciones.

En lo que se refiere a las reducciones de proyección, es decir, del elipsoide al plano de proyección, es factible que las distancias se puedan proyectar aplicando un único factor de anamorfosis común para toda la zona, o un factor de anamorfosis para las zonas resultantes de dividir la zona de trabajo en regiones con menor incremento de longitud geodésica, sobre todo si está en una zona alejada del meridiano central.

Para el extremo de una zona de 3° , la deformación lineal alcanza valores superiores a 20 cm, aun considerando distancias de forma aislada, la deformación lineal puede introducir errores relativos superiores a $1/4000$. Debemos considerar siempre la deformación lineal, cuando se pretende exactitud en el cálculo de las coordenadas.

La corrección angular por curvatura de la representación de la línea geodésica (corrección arco-cuerda), resulta despreciable para distancias pequeñas (inferiores a 5km), lo que normalmente ocurre en topografía. En los casos más comprometidos, por ejemplo en el extremo de una zona de 6° , la corrección puede alcanzar valores del mismo orden que la precisión instrumental, aconsejándose estudiar su aplicación al menos en ciertos trabajos de precisión, como en la medición de redes microgeodésicas.

De acuerdo a lo anterior, en los trabajos topográficos de poca exactitud será necesario considerar solamente las distorsiones lineales. El tratamiento de las observaciones lineales clásicas se reduce a aplicar un único factor de escala combinado. Resulta válido entonces realizar una única reducción, aplicando un factor de escala por altura (k_{alt}) y por anamorfosis lineal (k), combinando ambos factores en una sola operación de reducción. La aplicación de este factor de escala no presenta mayor inconveniente y debe ser tenido en cuenta, siempre que se comparen mediciones directas (en el plano topográfico local) con coordenadas de proyección, como así también cuando se densifiquen redes o poligonales combinadas.

En lo que se refiere a las superficies, se ha observado que puede llegar a ser necesario el considerar tanto la corrección de proyección como la de reducción al terreno, cuando se necesita un cálculo preciso de superficie, sobre todo si se encuentran involucrados derechos reales (operaciones de mensuras). Esta reducción se puede efectuar aplicando el módulo de anamorfosis lineal elevado al cuadrado.

El uso de la proyección Gauss-Krüger para trabajos topográficos, satisface las exigencias prácticas más rigurosas. La proyección es conforme, por eso las reducciones de las direcciones por curvatura de la representación de la línea geodésica sobre el plano son pequeñas y fáciles de calcular; las distorsiones lineales se calculan fácilmente.

El empleo de la proyección oficial Gauss-Krüger en nuestro país, según la división de zonas realizada por el IGM, presenta en su aplicación ventajas e inconvenientes que son muy importantes conocer para su correcta utilización. Al ser el sistema de proyección válido para todo el país, permite la interconexión de cualquier trabajo cartográfico sin ambigüedades, como así también levantamientos y cartografía catastral de vital importancia para el desarrollo territorial. Igualmente permite apoyar los levantamientos topográficos a vértices de la red geodésica, lo que posibilita la correcta vinculación de obras y proyectos.

El principal inconveniente de este sistema son las deformaciones introducidas por la proyección. Esto hace dificultoso su empleo a escalas pequeñas, ya que los errores que pueden acumularse en las medidas son mayores que la precisión exigida a esa escala.

La utilización de la proyección Gauss-Krüger de manera regional, es decir, utilizando un meridiano central que sea tangente al centro del levantamiento, permite despreciar las reducciones del plano de proyección al elipsoide hasta apartamientos de 45 km del meridiano central en dirección Este-Oeste según se analizó. En este caso solo será necesario reducir las distancias del terreno al elipsoide.

ANEXO 1

PLANO DE MENSURA ESTABLECIMIENTO “LA COSECHA”

ANEXO 2

UBICACIÓN GEOGRÁFICA DE LA POLIGONAL COMBINADA

ANEXO 3

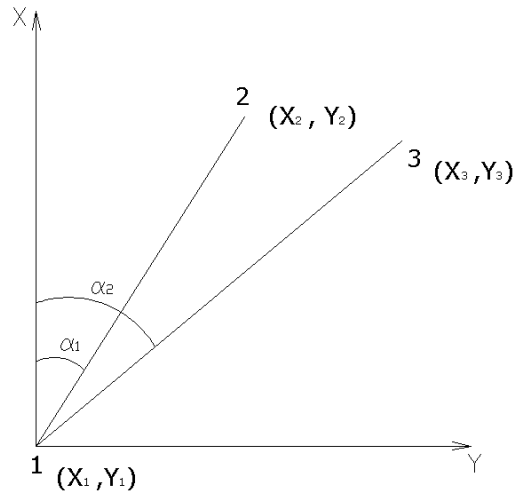
COMPENSACIÓN DE LA POLIGONAL ESTUDIADA

Compensación por variación de coordenadas

En este método de ajuste se utiliza el principio de mínimos cuadrados, el cual es aplicable a triangulaciones, trilateraciones y poligonaciones. El método requiere la determinación previa de las coordenadas aproximadas de las estaciones que se deben ajustar y, con base a estas, se realiza el ajuste de los rumbos de las líneas y las distancias.

La figura muestra dos líneas, 12 y 13, que conectan las estaciones 1, 2 y 3, cuyas coordenadas aproximadas (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) se han obtenido, por ejemplo, en forma directa a partir de mediciones sin compensar de longitudes y ángulos. De forma que los rumbos α_1, α_2 se pueden determinar, al igual que la distancia entre los puntos.

Es decir: $\tan \alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ $l_1^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$



Si se aplican pequeños cambios dx_1, dy_1 , etcétera, a estos valores, los cambios en las direcciones se pueden evaluar por diferenciación

La forma lineal del error en la observación angular se puede expresar:

$$d\alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{l_1^2} dx_1 - \frac{(x_2 - x_1)}{l_1^2} dy_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{l_1^2} dx_2 + \frac{(x_2 - x_1)}{l_1^2} dy_2$$

La forma lineal del error en la observación distanciométrica se puede expresar:

$$dl_1 = -\cos \alpha_1 dx_1 - \sin \alpha_1 dy_1 + \cos \alpha_2 dx_2 + \sin \alpha_2 dy_2$$

El resultado final será un valor que aceptamos como el valor más probable y resultará de ajustar el conjunto de las observaciones.

$$l_0 + v = l_a + dl$$

$v =$ corrección de la observación
 $l_0 =$ valor de la magnitud observada
 $l_a =$ valor aproximado del calculo
 $dl =$ corrección calculada

Luego, se establece la forma lineal para cada ángulo y distancia observada; resolviendo el problema a través de los algoritmos de las mediciones indirectas.

MEDICIONES INDIRECTAS

Planteo	Solución
n ⇒ mediciones m ⇒ incógnitas r ⇒ ecuaciones	$A\bar{X} = k$ $n > m$ A ⇒ Matriz de coeficientes X ⇒ Vector de incógnitas k ⇒ Vector de mediciones P ⇒ Matriz de pesos
Estimación del Valor más probable	$N = A^T P A$ $k' = A^T P A$ $\bar{X} = N^{-1} k'$ N ⇒ Matriz Normal X ⇒ Lineal aceptable y optimo A ⇒ debe ser previamente linealizada Partimos de una aproximación del valor real y luego compensamos.
Estimación del error de una medición de peso unitario	$m = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{n - m}}$ $V = A \bar{X} - k$ $A^T P V = 0$ $V^T P V \Rightarrow \min$ V ⇒ Vector de correcciones
Estimación del error medio del valor más probable	$M_{\bar{X}_i} = \sqrt{(N^{-1})_{ii}} m$ $M_{(f)} = \sqrt{F^T N^{-1} F} m$ F ⇒ Vector de las primeras derivadas de f(x)
Expresión del resultado Final	$X_0 = \bar{X} \pm M_{(x)}$

COMPENSACIÓN COORDENADAS SIN CORREGIR

VERTICES FIJOS: J, K, L

Errores instrumentales

error lineal ± 2 cmerror angular $\pm 10''$

COORDENADAS APROXIMADAS

Vertice	X	Y
J	6345454.61	4586898.65
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.25	4587125.89
2	6346967.74	4587409.45
3	6347386.08	4587554.96
4	6347869.71	4587663.91
5	6348374.72	4587777.26
6	6348890.45	4587892.23
7	6349370.46	4587999.64
8	6349776.27	4588090.04
9	6350289.32	4588205.29
10	6350799.04	4588319.43
L	6351253.16	4588420.32

Rumbo calculados

JK	12.58707669
K1	12.63620931
12	29.68233175
23	19.17906115
34	12.69540810
45	12.65044034
56	12.56726748
67	12.61307897
78	12.55840410
89	12.66058440
910	12.62184652
10L	12.52573509

Dist calculada

K1	521.348
12	572.628
23	442.924
34	495.750
45	517.574
56	528.390
67	491.881
78	415.757
89	525.835
910	522.343
10L	465.192

Rumbos medidos

JK	12.58707669
K1	12.63620931
12	29.68233175
23	19.17906115
34	12.69540810
45	12.65044034
56	12.56726748
67	12.61307897
78	12.55840410
89	12.66058440
910	12.62184652
10L	12.47868665

Dist medidas

K1	521.348
12	572.628
23	442.924
34	495.750
45	517.574
56	528.390
67	491.881
78	415.757
89	525.835
910	522.343
10L	464.549

		A																				K	
		dX1	dY1	dX2	dY2	dX3	dY3	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dX7	dY7	dX8	dY8	dX9	dY9	dX10	dY10	Obs - Cal	
K1		0.976	0.219	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12		-0.869	-0.495	0.869	0.495	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23		0	0	-0.944	-0.329	0.944	0.329	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34		0	0	0	0	-0.976	-0.22	0.976	0.22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45		0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56		0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.218	0.976	0.218	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.218	0.976	0.218	0	0	0	0	0	0	0	0
78		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.217	0.976	0.217	0	0	0	0	0	0	0
89		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0	0	0	0
910		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0	0
10L		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.217	0	-0.643
K		-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		0.001	-0.003	-9E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		-9E-04	0.002	0.002	-0.004	-7E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3		0	0	-7E-04	0.002	0.001	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4		0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	8E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6		0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	4E-04	1E-03	-1E-03	-5E-04	0.002	0	0	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	8E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	0	0	-0

X=inv N*k'

dX1	0.07
dY1	-0.06
dX2	0.21
dY2	-0.20
dX3	0.30
dY3	-0.29
dX4	0.36
dY4	-0.34
dX5	0.41
dY5	-0.35
dX6	0.46
dY6	-0.32
dX7	0.51
dY7	-0.28
dX8	0.52
dY8	-0.09
dX9	0.52
dY9	0.13
dX10	0.53
dY10	0.34

V (correcciones)

K1	0.05
12	0.05
23	0.05
34	0.05
45	0.05
56	0.05
67	0.05
78	0.05
89	0.05
910	0.05
10L	0.05
C	-30 "
1	-38 "
2	15 "
3	27 "
4	20 "
5	12 "
6	4 "
7	-12 "
8	-9 "
9	-6 "
10	-2 "

Error medio de las coordenadas

$\sigma X1$	0.14
$\sigma Y1$	0.31
$\sigma X2$	0.25
$\sigma Y2$	0.54
$\sigma X3$	0.30
$\sigma Y3$	0.68
$\sigma X4$	0.31
$\sigma Y4$	0.76
$\sigma X5$	0.31
$\sigma Y5$	0.76
$\sigma X6$	0.29
$\sigma Y6$	0.74
$\sigma X7$	0.30
$\sigma Y7$	0.88
$\sigma X8$	0.24
$\sigma Y8$	0.54
$\sigma X9$	0.19
$\sigma Y9$	0.41
$\sigma X10$	0.14
$\sigma Y10$	0.29

**COORDENADAS
COMPENSADAS**

Vértice	X	Y
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.32	4587125.83
2	6346967.95	4587409.25
3	6347386.38	4587554.67
4	6347870.07	4587663.57
5	6348375.13	4587776.91
6	6348890.91	4587891.91
7	6349370.97	4587999.36
8	6349776.79	4588089.95
9	6350289.84	4588205.42
10	6350799.57	4588319.77
L	6351253.16	4588420.32

COORDENADAS CON CORRECCION LINEAL

VERTICES FIJOS: J, K, L
COORDENADAS APROXIMADAS

Errores Instrumentales
error lineal ± 2 cm
error angular $\pm 10''$

Vertice	X	Y
J	6345454.61	4586898.65
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.29	4587125.90
2	6346967.81	4587409.48
3	6347386.18	4587555.00
4	6347869.85	4587663.96
5	6348374.89	4587777.31
6	6348890.66	4587892.29
7	6349370.70	4587999.71
8	6349776.54	4588090.12
9	6350289.63	4588205.37
10	6350799.38	4588319.52
L	6351253.16	4588420.32

Rumbo calculados

JK	12.58707669
K1	12.63620931
12	29.68233175
23	19.17906115
34	12.6954081
45	12.65044034
56	12.56726748
67	12.61307897
78	12.5584041
89	12.6605844
910	12.62184652
10L	12.52374573

Dist calculada

K1	521.385
12	572.668
23	442.955
34	495.785
45	517.611
56	528.427
67	491.916
78	415.787
89	525.873
910	522.380
10L	464.837

Rumbos medidos

JK	12.58707669
K1	12.63620931
12	29.68233175
23	19.17906115
34	12.69540810
45	12.65044034
56	12.56726748
67	12.61307897
78	12.55840410
89	12.66058440
910	12.62184652
10L	12.47868665

Dist medidas

K1	521.385
12	572.668
23	442.955
34	495.785
45	517.611
56	528.427
67	491.916
78	415.787
89	525.873
910	522.380
10L	464.582

	A																			K		
	dX1	dY1	dX2	dY2	dX3	dY3	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dX7	dY7	dX8	dY8	dX9	dY9	dX10	dY10	Obs - Ca	
K1	0.976	0.219	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-0.869	-0.495	0.869	0.495	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	-0.944	-0.329	0.944	0.329	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	-0.976	-0.22	0.976	0.22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.218	0.976	0.218	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.218	0.976	0.218	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.217	0.976	0.217	0	0	0	0	0	0
89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0	0	0
910	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.219	0.976	0.219	0	0
10L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.976	-0.217	-0.255
K	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.001	-0.003	-9E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-9E-04	0.002	0.002	-0.004	-7E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-7E-04	0.002	0.001	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	8E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	4E-04	1E-03	-1E-03	-5E-04	0.002	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5E-04	0.002	9E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	8E-04	-0.004	-4E-04	0.002	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-04	0.002	9E-04	-0.004	-0.001	0

X=inv N*k'

dX1	0.03
dY1	-0.03
dX2	0.09
dY2	-0.09
dX3	0.12
dY3	-0.14
dX4	0.15
dY4	-0.17
dX5	0.18
dY5	-0.19
dX6	0.20
dY6	-0.20
dX7	0.22
dY7	-0.20
dX8	0.21
dY8	-0.06
dX9	0.20
dY9	0.11
dX10	0.18
dY10	0.27

V (correcciones)

K1	0.021
12	0.020
23	0.021
34	0.021
45	0.021
56	0.021
67	0.021
78	0.020
89	0.020
910	0.020
10L	0.020
C	-13"
1	-16"
2	4"
3	9"
4	7"
5	4"
6	1"
7	-4"
8	-3"
9	-2"
10	0"

Error medio de las coodenadas

σ_{X1}	0.05
σ_{Y1}	0.12
σ_{X2}	0.10
σ_{Y2}	0.21
σ_{X3}	0.12
σ_{Y3}	0.27
σ_{X4}	0.12
σ_{Y4}	0.30
σ_{X5}	0.12
σ_{Y5}	0.30
σ_{X6}	0.11
σ_{Y6}	0.29
σ_{X7}	0.12
σ_{Y7}	0.34
σ_{X8}	0.09
σ_{Y8}	0.21
σ_{X9}	0.07
σ_{Y9}	0.16
σ_{X10}	0.05
σ_{Y10}	0.11

COORDENADAS COMPENSADAS

Vértice	X	Y
K	6345961.53	4587011.84
1	6346470.31	4587125.87
2	6346967.90	4587409.38
3	6347386.31	4587554.86
4	6347870.00	4587663.78
5	6348375.07	4587777.12
6	6348890.86	4587892.09
7	6349370.93	4587999.51
8	6349776.75	4588090.06
9	6350289.82	4588205.48
10	6350799.56	4588319.79
L	6351253.16	4588420.32

ANEXO 4

CÁLCULO Y COMPENSACIÓN DE UNA POLIGONAL INTERCALADA ENTRE
DOS VÉRTICES GPS

TRANSFORMACIONES BIDIMENSIONALES

Introducción

Un problema que frecuentemente nos encontramos en topografía es la conversión de un sistema de coordenadas rectangulares a otro. Debido a que en topografía, normalmente se determinan las coordenadas desconocidas de una serie de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares arbitrario. El proceso de conversión de un sistema a otro se denomina “*transformación de coordenadas*”. El procedimiento requiere que los mismos puntos tengan sus coordenadas conocidas en ambos sistemas, el arbitrario y el sistema final de coordenadas.

Un caso muy común que se presenta, es el de transformar las coordenadas locales de un levantamiento en coordenadas planas de un sistema general (coordenadas de proyección). Esta situación se da en los casos que se apoyan trabajos topográficos realizados con métodos clásicos en puntos de control de una red geodésica o puntos medidos con metodología GPS.

La transformación de coordenadas se realiza para figuras de la misma dimensión, por lo tanto tendremos dos tipos de transformaciones:

- Bidimensional
- Tridimensionales

Dentro de estos dos grupos, podemos diferenciar:

- Transformaciones de semejanza o conforme
- Transformaciones afines
- Transformaciones proyectivas

La transformación a la que nos referiremos en este caso es la *Transformación bidimensional conforme*, por ser ésta la más sencilla y la que tiene aplicación en la topografía.

TRANSFORMACIÓN BIDIMENSIONAL DE SEMEJANZA O CONFORME

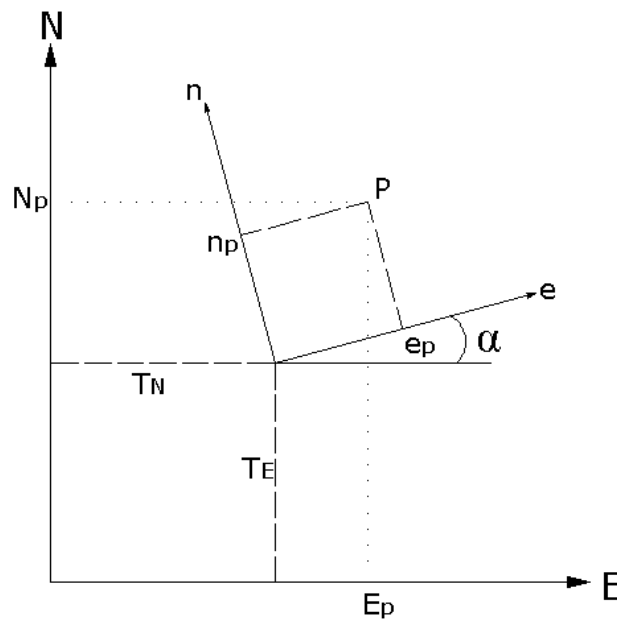
Una transformación conforme aplicada a una figura es aquella que no varía su verdadera forma después de la transformación. Para aplicar una transformación conforme es necesario como mínimo conocer las coordenadas en ambos sistemas de dos puntos. Se mejora la precisión de la transformación si los puntos se eligen lo más alejado posible.

Una transformación bidimensional conforme consiste en tres pasos básicos:

- Giro α
- Translación T_N T_E
- Cambio de escala λ

Supongamos dos sistemas de coordenadas ortogonales (N, E) , (n, e) ²⁵ independientes, donde un punto P está referido a los dos sistemas. Ver figura.

N, E son las coordenadas Norte y Este del punto en el sistema general
 n, e Son las coordenadas Norte y Este del punto en el sistema arbitrario.



²⁵ No utilizo las notaciones XY para evitar confusiones en cuanto a la posición de los ejes que se adopta en topografía y en álgebra en general.

Considerando el caso más general, es decir, con los ejes girados, trasladados y diferentes unidades de medida, tendremos:

$$N = \lambda(e \sin \alpha + n \cos \alpha) + T_N$$

$$E = \lambda(e \cos \alpha - n \sin \alpha) + T_E$$

Expresando en forma matricial la expresión anterior:

$$\begin{bmatrix} N \\ E \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_N \\ T_E \end{bmatrix}$$

Si reemplazamos $a = \lambda \cos \alpha$; $b = \lambda \sin \alpha$. Podemos expresar la relación anterior de esta manera:

$$\begin{bmatrix} N \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_N \\ T_E \end{bmatrix}$$

Donde los parámetro de transformación a calcular son respectivamente a, b, T_N , T_E .
Conocidos los parámetros a y b, podemos calcular el giro y el factor escala.

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad ; \quad \lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Los datos de partida son las coordenadas en los dos sistemas (N, E; n, e) de por lo menos dos puntos. Formando cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas resolvemos el problema.

Esta transformación se conoce como “*Transformación bidimensional de Helmert*” o de cuatro parámetros.

Determinación de los parámetros

Conocidas las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas podrán determinarse las cuatro incógnitas de la transformación. No obstante, si en alguna coordenada existiese algún error en su determinación, los elementos de la transformación serán calculados erróneamente, no existiendo la posibilidad de detectar el error. Por esta razón se debe utilizar un número de puntos mayor a dos, para poder determinar con más fiabilidad las incógnitas.

Por este motivo se recomienda utilizar más de dos puntos, resolviendo las incógnitas aplicando metodología de mínimos cuadrados (observaciones indirectas).

Partiendo de la expresión general para m puntos se tendrá:

$$\begin{array}{ll}
 P_1 \Rightarrow N_1 = a n_1 + b e_1 + T_N & E_1 = -b n_1 + a e_1 + T_E \\
 P_2 \Rightarrow N_2 = a n_2 + b e_2 + T_N & E_2 = -b n_2 + a e_2 + T_E \\
 \vdots & \vdots \\
 P_m \Rightarrow N_m = a n_m + b e_m + T_N & E_m = -b n_m + a e_m + T_E
 \end{array}$$

Expresando el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{bmatrix}
 n_1 & e_1 & 1 & 0 \\
 e_1 & -n_1 & 0 & 1 \\
 n_2 & e_2 & 1 & 0 \\
 e_2 & -n_2 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 n_m & e_m & 1 & 0 \\
 e_m & -n_m & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b \\
 T_N \\
 T_E
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 N_1 \\
 E_1 \\
 N_2 \\
 E_2 \\
 \vdots \\
 N_m \\
 E_m
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_{N1} \\
 V_{E1} \\
 V_{N2} \\
 V_{E2} \\
 \vdots \\
 V_{Nm} \\
 V_{Em}
 \end{bmatrix}$$

$$[A] \quad [X] - [L] = [V]$$

Donde $[A][X] - [L] = [V]$ representa la forma general de las observaciones indirectas. Aplicando la condición del mínimo y operando se obtiene:

$$[X] = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[L]$$

La matriz $[X]$ nos dará los parámetros de transformación a, b, T_N, T_E que buscamos.

Precisión de la transformación

Aplicando la expresión de la transformación e introduciendo en ella los parámetros que han sido obtenidos a partir de los mismos puntos $P_i ; (n_i, e_i)$ y que han servido para su determinación, se obtendrán unos nuevos valores para las coordenadas del sistema general (N, E) que no coincidirán con los datos de partida. Obtendremos una matriz columna $[V]$ de residuos de la transformación.

El error medio de las coordenadas transformadas será:

$$\sigma_{NE} = \sqrt{\frac{[V]^T[V]}{2m - 4}}$$

Donde m es el número de puntos utilizados.

La precisión de las coordenadas transformadas depende de la precisión de los parámetros de transformación y la precisión de los parámetros de transformación depende de la precisión de las coordenadas de los puntos comunes a los dos sistemas.

MEDICIÓN Y CÁLCULO DE UNA POLIGONAL INTERCALADA ENTRE DOS PUNTOS GPS²⁶

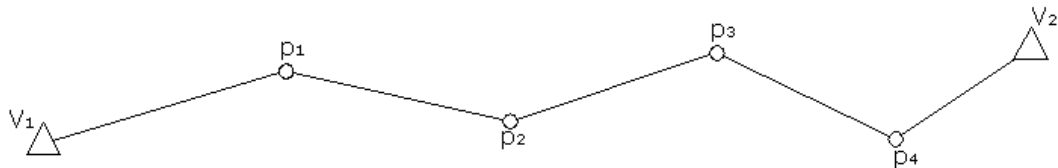
Una aplicación muy frecuente de la transformación bidimensional, aplicada a la topografía, es el cálculo de una poligonal intercalada entre dos puntos de orden superior.

Tenemos dos puntos medidos con metodología GPS o puntos de una red geodésica, cuyas coordenadas están expresadas en proyección Gauss-Krüger.

$$V_1 (N_1 E_1) ; V_2 (N_2 E_2)$$

Medimos una poligonal con métodos clásicos de levantamiento, partiendo desde V_1 con un valor arbitrario de coordenadas y sin orientación (los puntos no tienen pilar de acimut).

$$p_1 (n_1 e_1) \dots p_m (n_m e_m)$$



Procedimiento

En primer lugar verificamos la distancia $\overline{V_1 V_2}$, comparando la distancia obtenida a partir de las coordenadas locales con la distancia a partir de las coordenadas Gauss-Krüger. Debemos tener en cuenta el reducir la distancia medida aplicando el módulo de anamorfosis lineal y el módulo de reducción del terreno al elipsoide, según se ha estudiado.

²⁶ Ejercicio correspondiente a un trabajo mayor, elaborado por el Agrimensor Rubén Rodríguez para un curso dictado en el Observatorio Astronómico de La Plata.

Si la diferencia está dentro de la tolerancia impuesta, distribuimos el error en los vértices de la poligonal. Luego se procede a realizar la transformación y calcular sus parámetros.

Como hemos estudiado, las correcciones angulares se pueden despreciar en todos los casos, es decir, los ángulos medidos en el terreno puede considerarse sin corrección transformados al plano de proyección.

Podremos aplicar entonces la transformación bidimensional conforme (Helmert), por lo que debemos calcular sus parámetros de transformación (giro, traslación y escala).

Como solo tenemos dos puntos en común la solución es única y no tenemos residuos. Se calcula:

$$\begin{bmatrix} n_{V1} & e_{V1} & 1 & 0 \\ e_{V1} & -n_{V1} & 0 & 1 \\ n_{V2} & e_{V2} & 1 & 0 \\ e_{V2} & -n_{V2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{V1} \\ E_{V1} \\ N_{V2} \\ E_{V2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ T_N \\ T_E \end{bmatrix}$$

$$\text{inv } [A] * [L] = [X]$$

Donde n_{V1}, e_{V1} y n_{V2}, e_{V2} corresponde a las coordenadas locales de los vértices V_1, V_2 .

Luego para transformar las coordenadas locales en el nuevo sistema, realizamos:

$$a n_i + b e_i + T_N = N$$

$$-b n_i + a e_i + T_E = E$$

Como subproducto obtenemos los acimuts de todos los lados de la poligonal en el plano de proyección Gauss-Krüger.

Como vimos podemos conocer la rotación de los sistemas haciendo:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

El factor de escala se calcula

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Una forma de verificar el cálculo es obtener la distancia de los lados, a partir de las coordenadas Gauss-Krüger y aplicando el módulo de anamorfosis lineal y la reducción al terreno deben ser iguales a las distancias medidas.

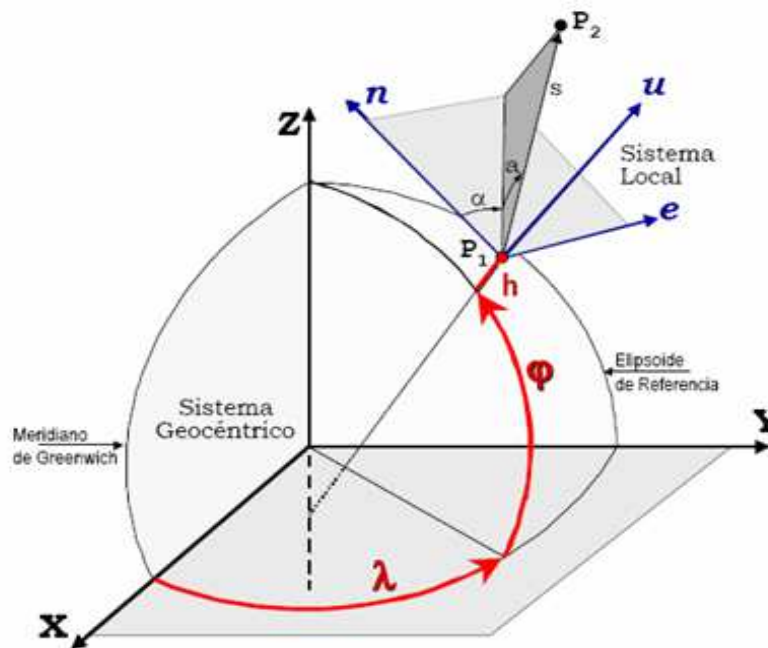
El factor de escala, que obtenemos en la transformación, permite pasar de las distancias medidas en el terreno a distancias en el plano de proyección, este valor así calculado combina la anamorfosis lineal y la reducción de distancias del terreno al elipsoide en un solo factor de escala combinado.

Debe tenerse en cuenta que los valores reales de módulo de deformación varían para cada punto, este módulo obtenido a partir de la transformación representa un valor medio. Si consideramos una poligonal que se extiende con dirección predominante Norte-Sur, esta transformación puede aplicarse correctamente, ya que podemos considerar que la anamorfosis lineal se mantiene constante (como se estudió); no así en los casos de poligonales con dirección Este-Oeste, en donde la variación de la escala es mayor y varía rápidamente cuando nos encontramos en los extremos de la faja, en estas condiciones la transformación bidimensional no debe ser aplicada.

Mientras se pueda considerar, en relación a las precisiones establecidas, que el módulo de anamorfosis y la reducción por altura se mantiene constante para la zona de trabajo, esta transformación dará buenos resultados. No es así cuando las variaciones son grandes ya que el modulo no podrá compensar las variaciones de escala de todo el levantamiento.

COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÉNTRICAS Y COORDENADAS LOCALES

La tecnología GPS para la determinación de coordenadas tridimensionales de los puntos geodésicos encuentra en muchas oportunidades de combinarse con mediciones topográficas convencionales, es decir ángulos, distancias y desniveles, obtenidos por medio de una estación total, o el uso de un teodolito y un distanciómetro y también, en algunos casos no tan frecuentes actualmente, la medición de distancias con cinta o en forma estadimétrica.



Las coordenadas obtenidas de las mediciones GPS deben estar expresadas en forma cartesiana XYZ a fin de calcular ΔX ΔY ΔZ del vector, y la latitud y la longitud del extremo que coincide con el punto de arranque de la medición terrestre.

Para coordenadas locales se le asignan valores arbitrarios a dicho punto de arranque. Mediante la medición de un ángulo α (también a partir de una orientación arbitraria), de la distancia s (inclinada) y del ángulo vertical a , se calculan las coordenadas del otro extremo.

Para facilitar la identificación de este tipo de coordenadas y evitar confusiones llamaremos Δn Δe Δu .

El problema se resuelve mediante dos rotaciones, expresadas por una matriz cuadrada (R1), multiplicada por el vector de los deltas X, Y, Z que nos proporcionará un juego de deltas n, e, u.

$$R1 = \begin{bmatrix} -(\sin \phi \cos \lambda) & -(\sin \phi \sin \lambda) & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{bmatrix}$$

Luego el producto es:

$$\begin{bmatrix} \Delta n \\ \Delta e \\ \Delta u \end{bmatrix} = R1 \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

En el caso más frecuente de considerar al vector GPS como de orden superior, la verificación se resuelve del siguiente modo:

- 1) En planimetría, dado que no disponemos del acimut de partida se comparan las distancias resultantes de aplicar el teorema de Pitágoras a ambos pares de n, e.
- 2) En altimetría a través de los u

Para el caso inverso, es decir convertir un vector local en uno cartesiano geocéntrico la matriz de rotación es la transpuesta de R1, es decir:

$$R2 = \begin{bmatrix} -(\sin \phi \cos \lambda) & -\sin \lambda & \cos \phi \cos \lambda \\ -(\sin \phi \sin \lambda) & \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix}$$

Luego el producto es:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = R2 \begin{bmatrix} \Delta n \\ \Delta e \\ \Delta u \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

Asin, Fernando. “Geodesia y Cartografía Matemática”. Editorial Parainfo. Madrid 1987. ISBN 84-131-6506-4

Chueca Pazos, Manuel. “Tratado de Topografía I. Teoría de Errores e Instrumentación”. Editorial Parainfo. Madrid 1995. ISBN 84-283-2309-6

Chueca Pazos, Manuel. “Tratado de Topografía II. Métodos Topográficos”. Editorial Parainfo. Madrid 1995. ISBN 84-283-2309-7

Comité Nacional de la Unión Geofísica y Geodésica Internacional. “Sistemas Geodésicos”. 1995.

Del Bianco, Armando. “Apuntes de clases”. Cátedra de Topometría y Microgeodésia. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba 2002.

Del Bianco, Armando. “Propuesta de Normas y Especificaciones Técnicas para mediciones Topográficas y Geodésicas en las Obras Públicas”. Trabajo presentado en CIELA. Córdoba 2006.

Drewes, Herman y otros. “Curso de Sistemas de Referencia”. Instituto Alemán de Investigaciones Geodésicas.

Fuentes, Sebastián. “Diagnóstico del uso de proyecciones transversales de Mercator en escalas Urbanas”. Tesis de grado. Universidad Tecnológica Metropolitana. Santiago de Chile 2006.

Giovane, Marcio. “Ajuste de una poligonal al elipsoide”. Trabajo presentado para obtener título de Maestría en geomática. Universidad de Santa María. Brasil 2006.

Ministerio de Obras Públicas (MOP). “Manual de Carreteras”. Ingeniería básica, aspectos geodésicos y topográficos. Santiago, Chile 2001.

Pérez Álvarez, Juan Antonio. “Apuntes de Fotogrametría II”. Universidad de Extremadura. España 2001.

Pina, Alicia. “Notas de clase. Cartografía Matemática”. Cátedra de Cartografía. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba 2006.

Pina, Alicia. “Teoría de Errores y Cálculos de Compensación”. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba 2003.

Raymon, Bannister, Baker. “Técnicas Modernas en Topografía”. Séptima Edición. Editorial Alfaomega. México 2001.

Rey, Jorge. “Nociones de Cartografía”. “Nociones de Geodesia y GPS”. España 2004

Robinson, Morrison y otros. “Elementos de Cartografía”. Editorial Omega. España 1987.

Sevilla, M; Núñez, A. “Ajuste y Análisis Estadístico de ondulaciones del geoide obtenido por métodos astrogeodésicos”. Publicación del Instituto de Astronomía y Geodesia. Universidad Complutense. Madrid.

Zakatov P.S. “Curso de Geodesia Superior”. Editorial MIR. Moscú 1981. ISBN 84-8041-097-3

PAGINAS WEB

Estudio de la influencia de las correcciones geodésicas sobre trabajos topográficos realizado a partir de mediciones clásicas y de GPS. Artículo publicado en www.cartesia.org

Sistemas de coordenadas y transformaciones. www.posc.org

Manuales de hidrografías, repasa conceptos básicos de sistemas de referencia y métodos de levantamiento. www.armada.mil.uy/sohma/web/manual-hidrografia.