

LA INTERSECCIÓN INVERSA: MÉTODO GEOMÉTRICO, TOPOGRÁFICO Y CARTOGRÁFICO

Jacinto Santamaría Peña

Universidad de La Rioja, España
Área de Expresión Gráfica en la Ingeniería
jacinto.santamaria@dim.unirioja.es

RESUMEN

El método planimétrico denominado “Intersección Inversa”, cuya solución geométrica se basa en el conocimiento de la Ley de igualdad de ángulos inscritos en arcos iguales, ha sido estudiado y utilizado por distintos autores a lo largo de la Historia. Las soluciones gráficas y/o trigonométricas dadas por ellos, tienen desde el aspecto didáctico un valor fundamental. Además, es interesante destacar la evolución de su aplicación en observaciones astronómicas y geodésicas hasta nuestros días.

En este artículo, además de hacer en breve recorrido histórico del método, se pondrá especial hincapié en relacionar cada solución gráfica con su correspondiente solución trigonométrica, para terminar aportando la solución topográfica dada en cada caso.

En definitiva, se va a presentar en este artículo un método básicamente geométrico, ciertamente cada vez más olvidado y en pocas ocasiones utilizado, pero con una riqueza didáctica incuestionable.

Palabras clave: intersección inversa; geometría; métodos topográficos.

1.- INTRODUCCIÓN

El Método Planimétrico de Intersección Inversa consiste en la determinación de la posición planimétrica de puntos, mediante observaciones angulares hechas desde éstos y dirigidas a otros puntos de coordenadas conocidas (vértices geodésicos, generalmente). Es necesario realizar al menos tres visuales a puntos de posición conocida.

La obtención de las coordenadas X e Y que definan la posición planimétrica de los puntos, puede hacerse por métodos gráficos o por métodos analíticos. Los primeros se basan en conceptos puramente geométricos y los segundos en conceptos matemáticos (trigonométricos). A la vez, a los métodos analíticos y/o gráficos se les puede dar una orientación o resolución topográfica, como veremos.

El caso más general, es el que se observa en la Figura 1. Se tienen tres puntos **A**, **B**, **C**, de posición planimétrica conocida y se pretende calcular la posición de un punto **P**, estacionando en él con un Teodolito y midiendo exclusivamente los ángulos α y β .

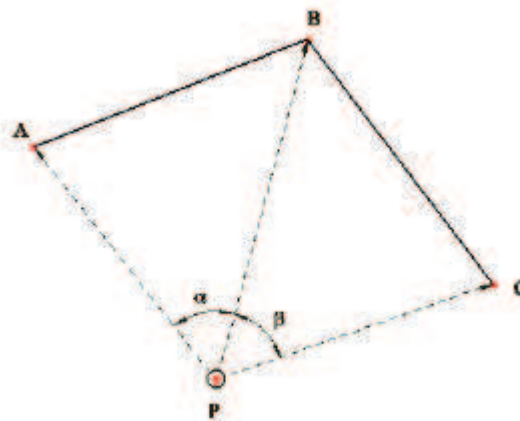


Fig. 1

El problema planteado es comúnmente denominado Problema de Pothenot, aunque también se le conoce como Problema del Vértice de la Pirámide, Problema de los Tres Vértices, Trisección Inversa o simplemente Intersección Inversa. La solución geométrica de la Intersección Inversa, basada en el conocimiento de la Ley de igualdad de los ángulos inscritos en arcos iguales, la dio ya hace más de 2.000 años Euclides. Después fue utilizada en observaciones astronómicas por Hiparco y Ptolomeo. Pero su aplicación geodésica no se hizo hasta bien entrado el siglo XVII.

El primero en resolver el Problema de la Intersección Inversa, tanto geoméricamente como por cálculo trigonométrico, fue el holandés Willebord Snellius, en su obra "Eratosthenes batavus", publicada en 1.624. Este mismo problema fue tratado en 1.671 por John Collins en su obra "Transactions philosophiques". Laurent Pothenot, que trabajaba en la definición del meridiano al Norte de París, presentó un trabajo sobre el tema en 1.692. Pero según opinión de W. Jordan en su Libro "Tratado General de Topografía", Pothenot no aportó nada nuevo a la solución del problema y lo único que hizo es publicar con su nombre los trabajos de Snellius y Collins. Otros autores han estudiado esta materia, entre los que desatacan: Lambert (1765), Cagnoli (1786), Bessel (1813), Gauss (1823) y Gerling (1840). A pesar de todo, el problema de la Intersección Inversa sigue conociéndose popularmente como Problema de Pothenot.

2.- SOLUCION GEOMÉTRICA DE LA INTERSECCIÓN INVERSA

El caso más sencillo es el planteado en la figura 1, en el que se pretende determinar la posición de un punto P, estacionando en él y midiendo acimutalmente los ángulos α y β que forman entre sí las visuales dirigidas a tres puntos conocidos A, B y C. Es evidente que el punto P quedará determinado por la intersección de los arcos capaces de ángulos α (sobre el segmento AB), β (sobre el segmento BC) y $\alpha + \beta$ (sobre el segmento AC). Con dos cualesquiera de ellos es suficiente.

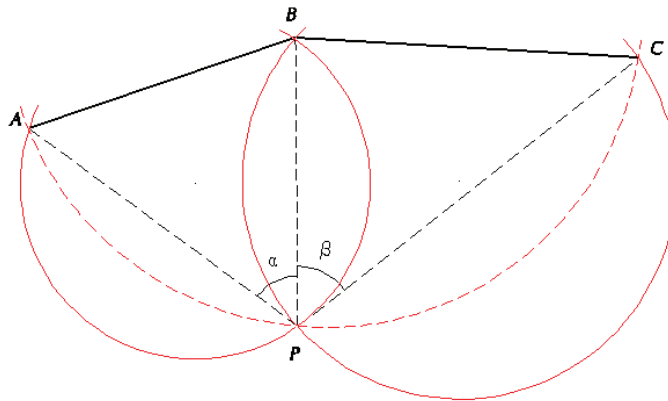


Fig. 2

El problema tendrá solución siempre que el punto P no se encuentre en la llamada "circunferencia peligrosa" que determinan los puntos A, B y C, ya que los tres arcos capaces se confundirían en uno solo. Cuando el punto P está en esta circunferencia, el cuadrilátero PABC es inscrito y se cumple que: $B + \alpha + \beta = 200^\circ$. En todo cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos son suplementarios.

Cuanto más se parezca $\alpha + \beta$ al valor $200 - B$, más cerca estaremos de la circunferencia peligrosa y peor definido quedará el punto P. En la práctica el ángulo B se conoce de antemano, ya que se tienen las coordenadas X, Y de los tres puntos A, B y C. Por tanto, se sabe cuánto no deben sumar $\alpha + \beta$, para no caer en indeterminación.

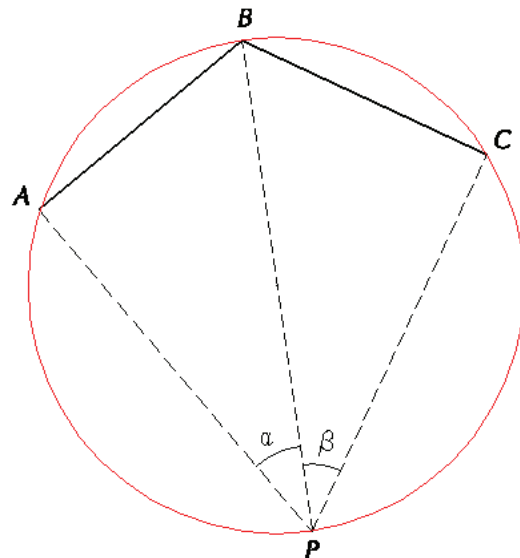


Fig. 3

El punto P se determina pues por la intersección de dos arcos capaces. El ángulo que forman dos curvas al cortarse es igual al formado por las tangentes a las dos curvas en el punto de contacto. Como la precisión que se consigue en los problemas de intersección está relacionada con este ángulo, también lo estará con las tangentes. Analizaremos por tanto las propiedades de las tangentes. (Fig. 4)

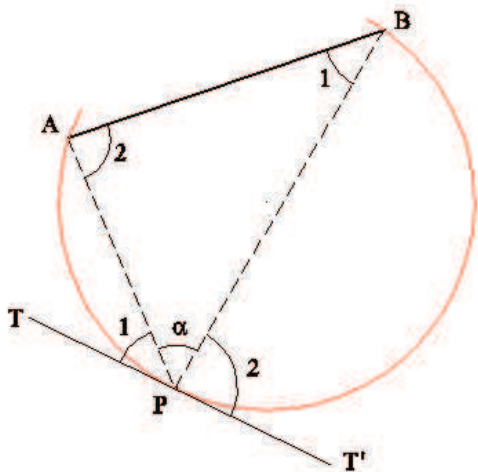


Fig. 4

Si TT' es la tangente al arco capaz del ángulo α , en el punto P , tenemos que: $BPT' = \hat{2} = BAP$, ya que los dos ángulos valen la mitad del arco PB .

Lo mismo sucede con: $APT = \hat{1} = ABP$.

La tangente es **antiparalela** de la base AB con respecto a las rectas PA y PB que unen el punto P con los extremos de la base AB .

Para obtener la tangente TT' , tendremos que dibujar los ángulos:

$$BPT' = BAP \quad \text{ó} \quad APT = ABP.$$

De la propiedad de ser la tangente antiparalela de la base, se puede deducir el valor del ángulo de intersección de las dos tangentes (Fig. 5):

$$T = (1 + 2 + \alpha + \beta) - 200^\circ$$

$$1 + 2 = B$$

$$T = (B + \alpha + \beta) - 200^\circ$$

Si $(B + \alpha + \beta) = 200$ el ángulo que forman las tangentes es 0° y no hay intersección de tangentes por coincidir las circunferencias de arco capaz. Estaríamos en la *circunferencia peligrosa*.

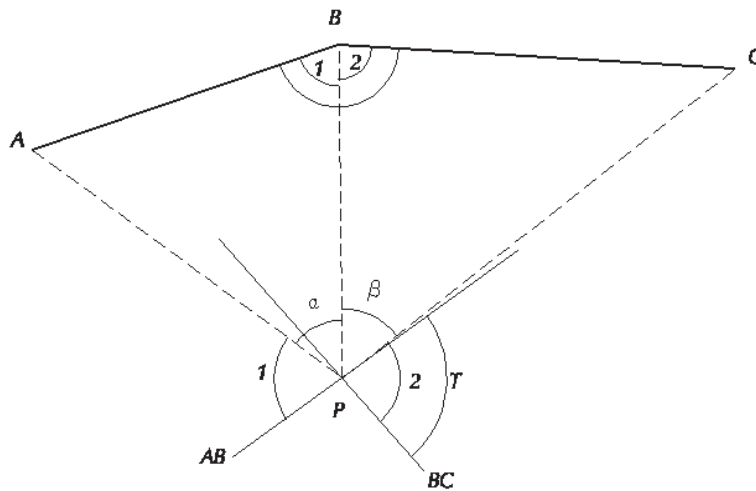


Fig. 5

3.- SOLUCIONES GRÁFICAS DE LA INTERSECCIÓN INVERSA

3.1 Solución clásica por arcos capaces

Es necesario obtener los centros de las circunferencias que pasan por los puntos ABP y BCP. Para ello trazaremos las mediatrices de los lados AB (M) y BC (N).

Trazaremos la recta AR que forma el ángulo α con el lado AB, y una perpendicular a AR que pasaría por O para obtener el centro del círculo por intersección. Haremos lo mismo con el lado BC. Obtenemos los centros O y O', y trazando los círculos de radios OA y O'C, pasarán por B y P, siendo P la solución buscada.

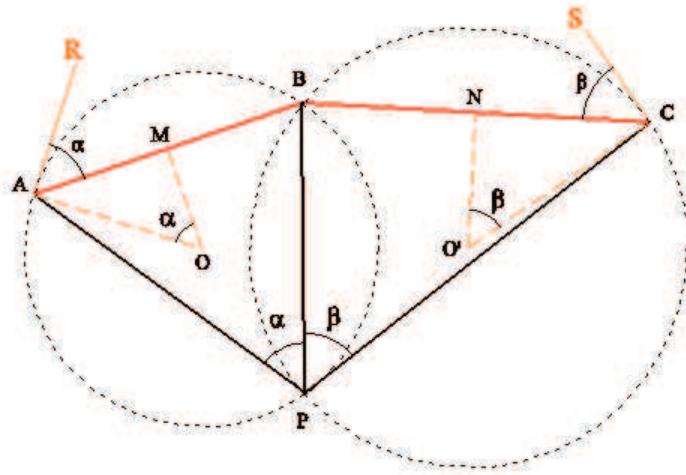


Fig. 8

Considerando los tres arcos capaces posibles, se tiene:

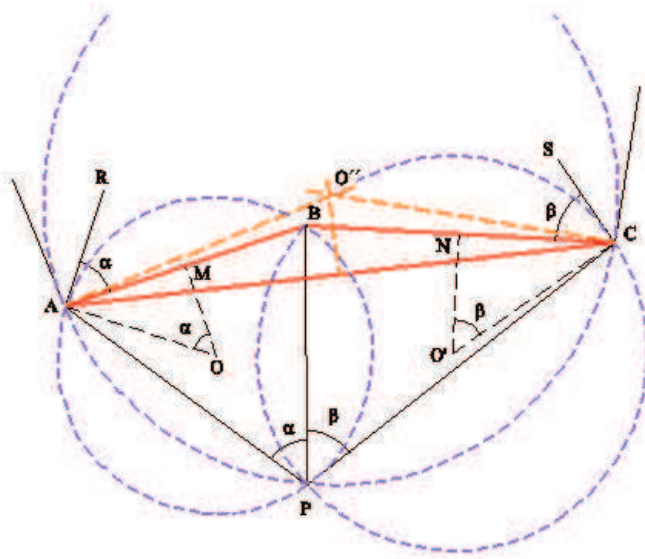


Fig. 9

3.2 Solución por el método de Cassini.

Sean A, B y C los tres puntos de coordenadas conocidas. Si llevamos sobre la base AB los ángulos 100° con vértice en A y $100-\alpha$, con vértice en B, obtenemos un punto intersección M, que forma parte del arco capaz de ángulo α de AB, ya que el ángulo en el vértice M es precisamente α . Si hacemos lo mismo en la base BC, llevando los ángulos 100° y $100-\beta$ sobre C y B

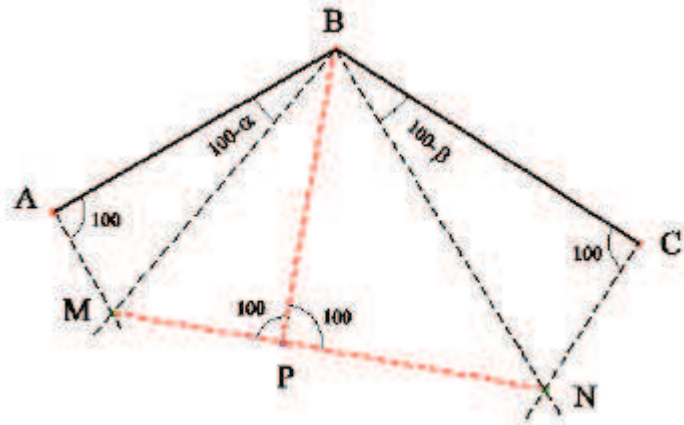


Fig. 10

respectivamente, obtendremos otro punto N que forma parte del arco capaz de ángulo β de BC. El punto P buscado estará en la recta que une los puntos M y N y exactamente será el pie de la perpendicular trazada desde B a MN.

La justificación de este método se deduce de la Fig. 11, en la que se observa que el eje BM es un diámetro de la circunferencia de arco capaz de ángulo α de base AB y también el eje BN es diámetro de la circunferencia de arco capaz de ángulo β de base BC. Por tanto, los ángulo BPM y BPN son rectos y los puntos M, P y N están alineados.

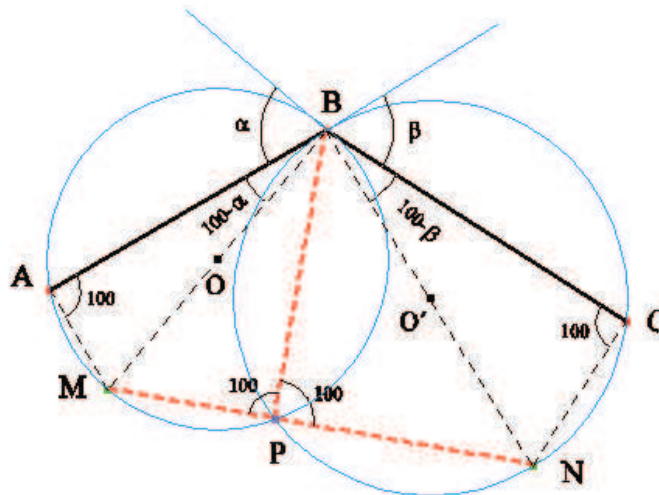


Fig. 11

Esta solución fue utilizada por primera vez por J.D. Cassini en problemas astronómicos hacia 1670 y posteriormente Carlos Federico Gauss en 1903 la aplicó en sus trabajos con plancheta.

3.3 Solución por el método de la "regla y el transportador".

Sean A, B y C los tres vértices de coordenadas conocidas y P el punto que queremos determinar por Intersección Inversa. Medimos α y β desde P. Si con vértice en B llevamos sobre el eje BA y sobre el eje BC, el ángulo $\alpha + \beta$. Con vértice en A, sobre base AB, llevamos el ángulo β y con vértice en C sobre la base CB, llevamos el ángulo α . Las intersecciones respectivas me generan dos puntos M y N. Uniendo M con C y N con A, se obtiene el punto intersección P.

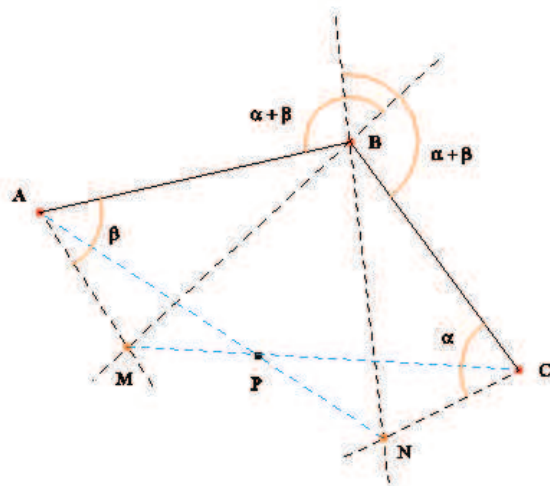


Fig. 12

El fundamento del método puede observarse en la Fig 13. La intersección de las rectas AM y BM es un punto M y dichas rectas forman un ángulo α . Por tanto, M pertenece al arco capaz de ángulo α de la base AB. La circunferencia de arco capaz será la que pasa por los tres puntos A, B y M. Si unimos M con C, la recta MC cortará a dicha circunferencia en un punto P, que también mirará a la base AB con un ángulo α . El cuadrilátero ABPM es inscrito en la circunferencia y por tanto, el ángulo BPM es suplementario del β . Luego el ángulo BPC tiene que valer β , y P es la solución, porque mira a AB con un ángulo α y a BC con un ángulo β . El mismo razonamiento podría hacerse sobre la base BC.

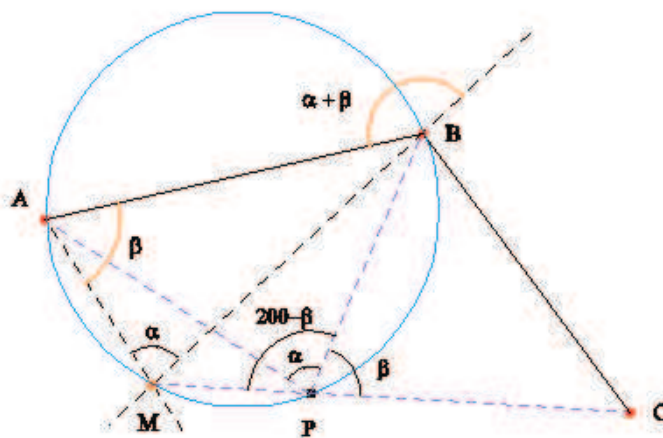


Fig. 13

3.3.1 Una variante "italiana" del método anterior.

Consiste en obtener la recta MC, correspondiente al primer arco capaz y sobre cualquier punto de ella se construye el ángulo β . La paralela a esta recta obtenida, trazada desde B, nos da el punto P en la intersección con MC. La justificación se observa claramente en la Figura anterior nº 13.

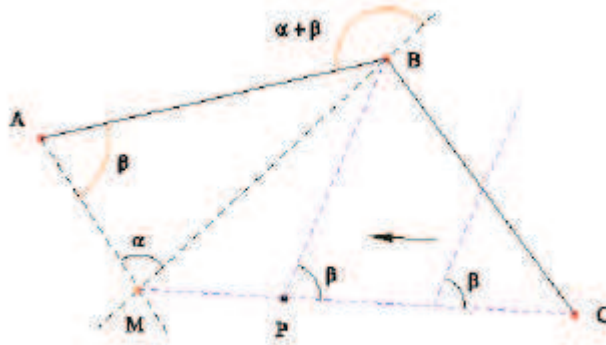


Fig. 14

3.4 Solución basada en el método de Collins.

Sean A, B y C los tres vértices de coordenadas conocidas y P el punto que queremos determinar por Intersección Inversa. Medimos α y β desde P. Llevando α sobre la base CA y β sobre la AC como se indica en la Figura 15, la intersección nos da un punto R (punto auxiliar de Collins). Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A, R y C. Uniendo el punto R con el vértice B y prolongando hasta cortar a la circunferencia, se obtiene el punto P buscado.

La justificación del método se fundamenta en que desde el vértice R se mira a la base

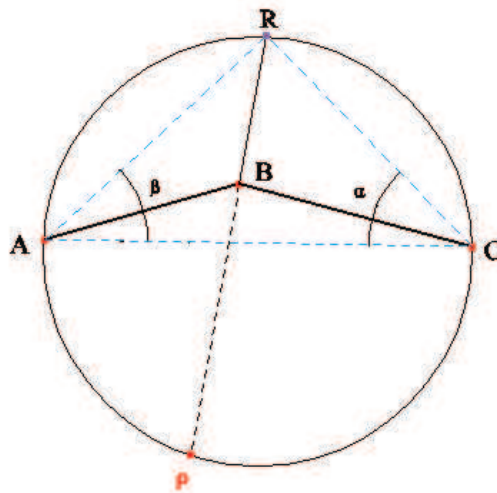


Fig. 15

AC con un ángulo $200 - (\alpha + \beta)$, Por tanto desde P se verá con un ángulo $\alpha + \beta$. Además, si desde C miramos a AR con un ángulo α también lo miraremos desde P, porque son ángulos inscritos sobre la misma cuerda. También desde P miramos a RC con un ángulo β , al igual que desde A. Por todo ello, el punto P es pues la solución que buscábamos. El mismo resultado hubiésemos obtenido si en vez de basar toda la construcción sobre la base AC lo hubiésemos hecho sobre cualquiera de las otros dos bases.

4. SOLUCIONES ANALÍTICAS DE LA INTERSECCIÓN INVERSA

Partiendo del caso general expuesto en la Fig. 1, se observa que el problema analítico para la determinación de la posición del punto P estriba en que en ninguno de los tres triángulos que se forman, con vértice en P, se conocen dos de sus ángulos. Sólo se conoce un ángulo y su lado opuesto. Por tanto, no podemos aplicar el teorema del seno en ellos, para deducir sus lados y ángulos. Llamemos "a" y "b" a las distancias AB y BC conocidas, por ser A, B y C puntos de coordenadas también conocidas (generalmente vértices geodésicos).

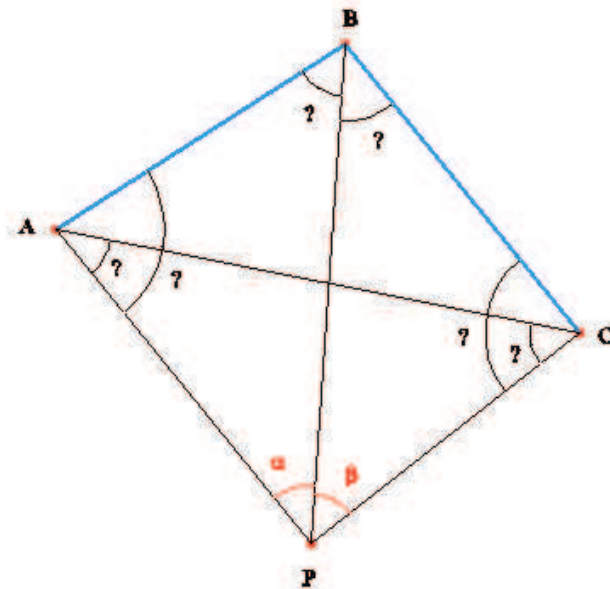


Fig. 16

Los dos triángulos considerados, tienen una diagonal común PB y el valor de su distancia en cada uno de ellos es:

$$\text{en el triángulo APB} \quad \frac{PB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \alpha} \longrightarrow PB = a \frac{\sin A}{\sin \alpha}$$

$$\text{en el triángulo BPC} \quad \frac{PB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \beta} \longrightarrow PB = b \frac{\sin C}{\sin \beta}$$

Igualando ambas expresiones, tenemos: $a \frac{\sin A}{\sin \alpha} = b \frac{\sin C}{\sin \beta}$

Luego $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \text{constante}$, ya que las distancias AB y BC son conocidas, y los ángulos \hat{a} y \hat{b} se han medido en campo.

Conocemos por tanto cuál es la relación de senos, pero no cuánto valen A y C. A partir de aquí surgen distintas metodologías para deducir el valor de A y de C.

Describiremos las más utilizadas:

4.1 Método de Pothenot

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = k$$

$A+C = Z$ (valor conocido) Luego $C = Z - A$.

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen}(Z - A)}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } Z \cos A - \cos Z \text{sen } A}{\text{sen } A} = \text{sen } Z \cot A - \cos Z = K (\text{conocido})$$

$$\cot A = \frac{K + \cos Z}{\text{sen } Z} \quad \boxed{A = \text{arctg}\left(\frac{\text{sen } Z}{K + \cos Z}\right) \quad C = Z - A}$$

Conocidos A y C, el problema está resuelto. En efecto, del triángulo APB se deduce:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_A^P = \theta_A^B + \hat{A} \\ AP = a \frac{\text{sen}(A + \alpha)}{\text{sen } \alpha} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} X_P = X_A + AP \text{sen } \theta_A^P \\ Y_P = Y_A + AP \cos \theta_A^P \end{array} \right\}$$

4.2 Solución de Kästner

Podemos sustituir el valor de la constante por la tangente de un ángulo δ , de forma que:

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = \text{tag } \delta \quad \text{Y operando:}$$

$$\frac{1 + \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}}{1 - \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}} = \frac{1 + \text{tag } \delta}{1 - \text{tag } \delta} \quad \frac{\text{sen } A + \text{sen } C}{\text{sen } A - \text{sen } C} = \frac{1 + \text{tag } \delta}{1 - \text{tag } \delta} = \frac{\text{tag } 50^\circ + \text{tag } \delta}{1 - \text{tag } 50^\circ \text{tag } \delta} = \text{tag}(50 + \delta)$$

Pero

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } C}{\text{sen } A - \text{sen } C} = \frac{2 \text{sen } \frac{1}{2}(A + C) \cos \frac{1}{2}(A - C)}{2 \cos \frac{1}{2}(A + C) \text{sen } \frac{1}{2}(A - C)} = \text{tag}(A + C) \cot(A - C)$$

Luego

$$\text{tag}(A - C) = \text{tag}(A + C) \cot(50 + \delta)$$

Expresión que nos permite calcular el valor de A-C, ya que A+C se conoce desde el principio. En efecto, en el cuadrilátero ABCP se conocen los ángulos interiores α , β y B , ya que los dos primeros se han medido directamente en campo y $B = \theta_B^A - \theta_B^C$. Por tanto, $A+C = 400 - (\alpha + \beta + B)$.

Tenemos pues dos ecuaciones con dos incógnitas, A y C:

$$\left. \begin{array}{l} A + C = K_1 \\ A - C = K_2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \hat{A} = \frac{K_1 + K_2}{2} \\ C = \frac{K_1 - K_2}{2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \theta_C^P = \theta_C^B - C \\ CP = b \frac{\text{sen}(C + \beta)}{\text{sen } \beta} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} X_P = X_C + CP \text{sen } \theta_C^P \\ Y_P = Y_C + CP \cos \theta_C^P \end{array} \right\}$$

4.3 Otra forma: (resolución de D. Luis Martín Morejón)

$$\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A} = \frac{a \text{ sen } \beta}{b \text{ sen } \alpha} = \text{constante} = K_1$$

$$\frac{1 + \frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}}{1 - \frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}} = \frac{1 + K_1}{1 - K_1} = K_2 = \frac{\text{sen}A + \text{sen}C}{\text{sen}A - \text{sen}C} = \frac{\text{tag} \frac{1}{2}(A + C)}{\text{tag} \frac{1}{2}(A - C)}$$

$$\left. \begin{aligned} A - C &= 2 \arctg \left(\frac{\text{tag} \frac{1}{2}(A + C)}{K_2} \right) = K_3 \\ A + C &= 400 - (\alpha + \beta + B) \end{aligned} \right\} \text{despejamos A y C}$$

5. RESOLUCIÓN TOPOGRÁFICA SIGUIENDO MÉTODOS GRÁFICOS

5.1 Basado en la resolución gráfica general por arcos capaces

Sea la Fig. 17, en donde se representa el caso general de la determinación por Intersección Inversa de un punto P, lanzando visuales a tres puntos A, B y C, de coordenadas planimétricas conocidas. Se partirá pues de unos datos conocidos (θ_A^B y θ_B^C , AB y BC) y otros medidos en campo (α y β).

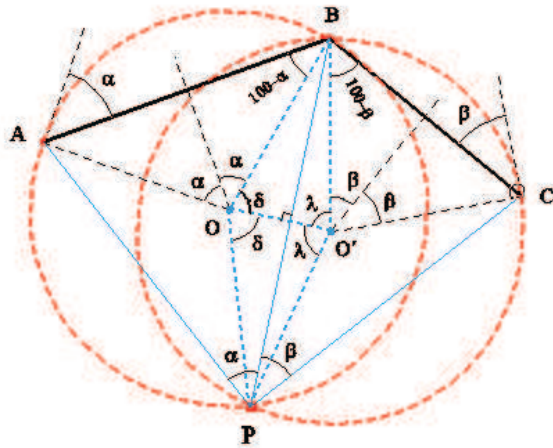


Fig. 17

Las coordenadas de los centros de los arcos capaces serán:

$$\left. \begin{aligned} \theta_B^O &= \theta_B^A - (100 - \alpha) \\ \overline{BO} &= \frac{\overline{AB}}{2 \text{ sen } \alpha} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_B^O &= \overline{BO} * \text{sen } \theta_B^O \\ y_B^O &= \overline{BO} * \text{cos } \theta_B^O \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} X_O &= X_B + x_B^O \\ Y_O &= Y_B + y_B^O \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_B^{O'} &= \theta_B^C + (100 - \beta) \\ \overline{BO'} &= \frac{\overline{BC}}{2 \text{ sen } \beta} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_B^{O'} &= \overline{BO'} * \text{sen } \theta_B^{O'} \\ y_B^{O'} &= \overline{BO'} * \text{cos } \theta_B^{O'} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} X_{O'} &= X_B + x_B^{O'} \\ Y_{O'} &= Y_B + y_B^{O'} \end{aligned} \right\}$$

A partir de las coordenadas de los centros, puedo calcular el acimut y la distancia que los separa:

$$\theta_o^o = 200 - \operatorname{arctg} \left| \frac{x_o^o}{y_o^o} \right| \quad \overline{OO'} = \sqrt{(x_o^o)^2 + (y_o^o)^2}$$

Ya puedo deducir las coordenadas X e Y del punto P, a partir de O ó de O':

$$\left. \begin{array}{l} \theta_o^B = \theta_o^O \pm 200 \\ \delta = \theta_o^O - \theta_o^B \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \theta_o^P = \theta_o^B + 2\delta = \theta_o^O + \delta \\ \overline{OP} = \overline{OB} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_o^P = \overline{OP} \operatorname{sen} \theta_o^P \\ y_o^P = \overline{OP} \operatorname{cos} \theta_o^P \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{X}_P = \mathbf{X}_O + \mathbf{x}_O^P \\ \mathbf{Y}_P = \mathbf{Y}_O + \mathbf{y}_O^P \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_o^B = \theta_o^{O'} \pm 200 \\ \lambda = \theta_o^{O'} - \theta_o^B \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \theta_o^P = \theta_o^B - 2\lambda = \theta_o^{O'} + \lambda \\ \overline{O'P} = \overline{O'B} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_o^P = \overline{O'P} \operatorname{sen} \theta_o^P \\ y_o^P = \overline{O'P} \operatorname{cos} \theta_o^P \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{X}_P = \mathbf{X}_{O'} + \mathbf{x}_{O'}^P \\ \mathbf{Y}_P = \mathbf{Y}_{O'} + \mathbf{y}_{O'}^P \end{array} \right\}$$

5.2 Basado en la resolución por el método de Cassini

Conocemos, como en el caso anterior, las distancias AB, BC y AC, los θ_A^B , θ_B^C y θ_A^C y los ángulos α , β y λ .

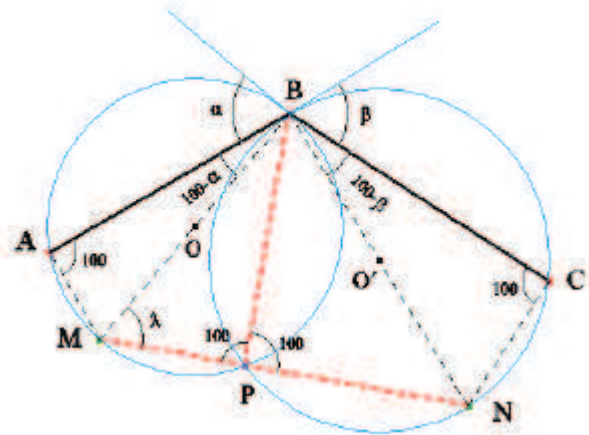


Fig. 18

Calculemos las coordenadas de los puntos M y N y el problema estará resuelto:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_B^M = \theta_B^A - (100 - \alpha) \\ \overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} \alpha} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_B^M = \overline{BM} * \operatorname{sen} \theta_B^M \\ y_B^M = \overline{BM} * \operatorname{cos} \theta_B^M \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} X_M = X_B + x_B^M \\ Y_M = Y_B + y_B^M \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_B^N = \theta_B^C + (100 - \beta) \\ \overline{BN} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \beta} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_B^N = \overline{BN} * \operatorname{sen} \theta_B^N \\ y_B^N = \overline{BN} * \operatorname{cos} \theta_B^N \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} X_N = X_B + x_B^N \\ Y_N = Y_B + y_B^N \end{array} \right\}$$

A partir de las coordenadas puedo calcular:

$$\left. \begin{aligned} \theta_M^N &= 200 - \arctg \left| \frac{x_M^N}{y_M^N} \right| \\ \lambda &= \theta_M^N - \theta_M^B = \theta_M^N - \theta_B^M - 200 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \overline{MP} &= \frac{\overline{BM}}{\cos \lambda} \\ \theta_M^P &= \theta_M^N \end{aligned} \right\}$$

Las coordenadas del punto P serán:

$$\left. \begin{aligned} x_M^P &= \overline{MP} * \text{sen } \theta_M^P \\ y_M^P &= \overline{MP} * \text{cos } \theta_M^P \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} X_P &= X_M + x_M^P \\ Y_P &= Y_M + y_M^P \end{aligned} \right\}$$

5.3 Basado en la resolución por el método de Collins

Igual que en los dos casos anteriores, conocemos las distancias \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} , los θ_A^B , θ_B^C y θ_A^C y los ángulos α , β y γ . Las coordenadas del punto auxiliar de Collins, X_R e Y_R , son fácilmente deducibles:

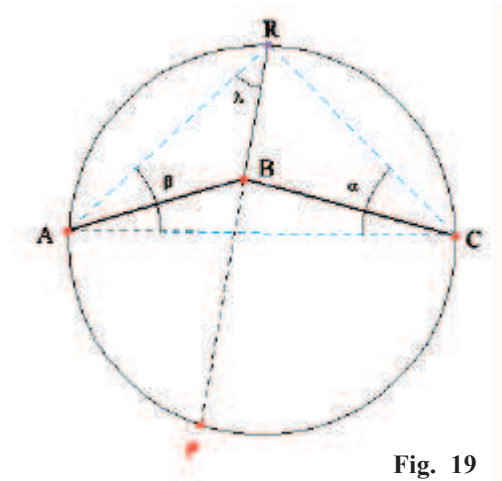


Fig. 19

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AR}}{\text{sen } \alpha} &= \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \\ \theta_A^R &= \theta_A^C - \beta \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \overline{AR} &= \overline{AC} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_A^R &= \overline{AR} * \text{sen } \theta_A^R \\ y_A^R &= \overline{AR} * \text{cos } \theta_A^R \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} X_R &= X_A + x_A^R \\ Y_R &= Y_A + y_A^R \end{aligned} \right\}$$

Con las coordenadas de R y de B , se puede calcular el acimut θ_R^B , que es igual que el acimut θ_R^P .

$$\theta_R^B = 200 + \arctg \left| \frac{x_R^B}{y_R^B} \right| = \theta_R^P$$

En el triángulo ARP, se deduce:

$$\lambda = \theta_R^A - \theta_R^P = \theta_A^R + 200 - 200 + \operatorname{arctg} \left| \frac{x_R^B}{y_R^B} \right| = \theta_R^A + \operatorname{arctg} \left| \frac{x_R^B}{y_R^B} \right|$$

$$\frac{RP}{\operatorname{sen}(\alpha + \lambda)} = \frac{AR}{\operatorname{sen} \alpha} \quad RP = AR \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \lambda)}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} x_R^P &= \overline{RP} * \operatorname{sen} \theta_R^P \\ y_R^P &= \overline{RP} * \operatorname{cos} \theta_R^P \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{X}_P &= \mathbf{X}_R + \mathbf{x}_R^P \\ \mathbf{Y}_P &= \mathbf{Y}_R + \mathbf{y}_R^P \end{aligned} \right\}$$

6. CONCLUSIONES

A lo largo de los anteriores apartados, se ha podido comprobar la versatilidad del método de Intersección Inversa y las profundas relaciones que tiene con los conceptos geométricos básicos. Con ello queda demostrado cómo un método de aplicación claramente Topográfica, tiene su fundamento en la Geometría Clásica, a la cual a veces no se le concede la importancia que merece.

La comprensión y asimilación de todos los razonamientos y desarrollos expuestos, más que perseguir introducir gran cantidad de formulismos y procesos geométricos complicados, lo que pretende es desarrollar su concepción espacial y demostrar que los conceptos teóricos básicos que se le inculcan a los alumnos en materias como el Dibujo Técnico o la Expresión Gráfica, tienen siempre una aplicación práctica concreta.

Es interesante destacar la triple forma de resolución de los casos planteados. Por un lado, se comprueba que la resolución gráfica del método va asociada siempre a una justificación gráfica básica. Por otra parte, se comprende cómo toda solución gráfica tiene una solución analítica. Y por último, se plantea otro método de resolución de los problemas planteados: la resolución por razonamientos topográficos, basada en las dos anteriores.

7.- BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Dominguez Garcia-Tejero, F.** *Topografía General y Aplicada*. Madrid: MUNDI-PRENSA, 1997.
- [2] **Jordan, J.** *Tratado General de Topografía*. Barcelona: GUSTAVO GILI, S.A., 1978
- [3] **Martín García-Cuerva, G.** *Dibujo Técnico: Fundamentos Geométricos*. Logroño: el autor, 1990
- [4] **Ojeda Ruiz, J. L.** *Métodos Topográficos y Oficina Técnica*. Madrid: el autor, 1984