

## TEMA 6 – LEVANTAMIENTOS TOPOGRAFICOS

### 1. RECONOCIMIENTO DE LA ZONA A LLEVAR DISEÑO Y SEÑALIZACIÓN DE LOS VÉRTICES DE UNA RED BÁSICA TOPOGRÁFICA<sup>1</sup>

- Pre-selección de vértices
- Reconocimiento y selección definitiva
- Señalización
- Monografía y croquis

#### 1.1. Pre-selección de vértices

Para la realización del levantamiento es necesario establecer una red básica que englobe la zona y nos permita obtener coordenadas de todos los puntos observados, en el sistema de coordenadas de proyecto.

El conjunto de puntos que forman una red topográfica debe cubrir toda la zona de trabajo. Su diseño depende de tres factores:

- El trabajo que se quiere realizar.
- El terreno donde deba establecerse.
- El costo del proyecto.

El diseño puede hacerse estimando la geometría sobre la cartografía existente o recurriendo a estudios de diseño óptimo de la distribución de vértices analizando las condiciones de altitud y visibilidad, así como la geometría de la figura resultante. La red ha de cubrir toda la zona de proyecto.

La búsqueda del diseño óptimo de redes, comienza definiendo una localización óptima de puntos de la red en función del tipo de medidas y del número de observaciones. Sus técnicas acerca del ajuste máxima precisión, minimización de costos y del tiempo de observación, son aceptados en la actualidad en la mayoría de los textos sobre diseños óptimos.

puede resumirse en:

- Elección de los vértices de la red.
- Estudio de las observaciones que se pueden realizar.
- Estudio de los instrumentos disponibles y métodos de observación para poder fijar una estimación a priori de la precisión.
- Compensación y estudio de los resultados.
- Cálculo de las influencias de las observaciones van a realizarse.
- Búsqueda de la solución óptima en el sentido necesario: buen costo, precisión, fiabilidad, etc. Lo cual puede realizarse por medio de:
  - Elección del instrumental
  - Diseño de tercer orden.
  - Elección de los métodos de observación
  - Eliminación o anexo de observaciones

---

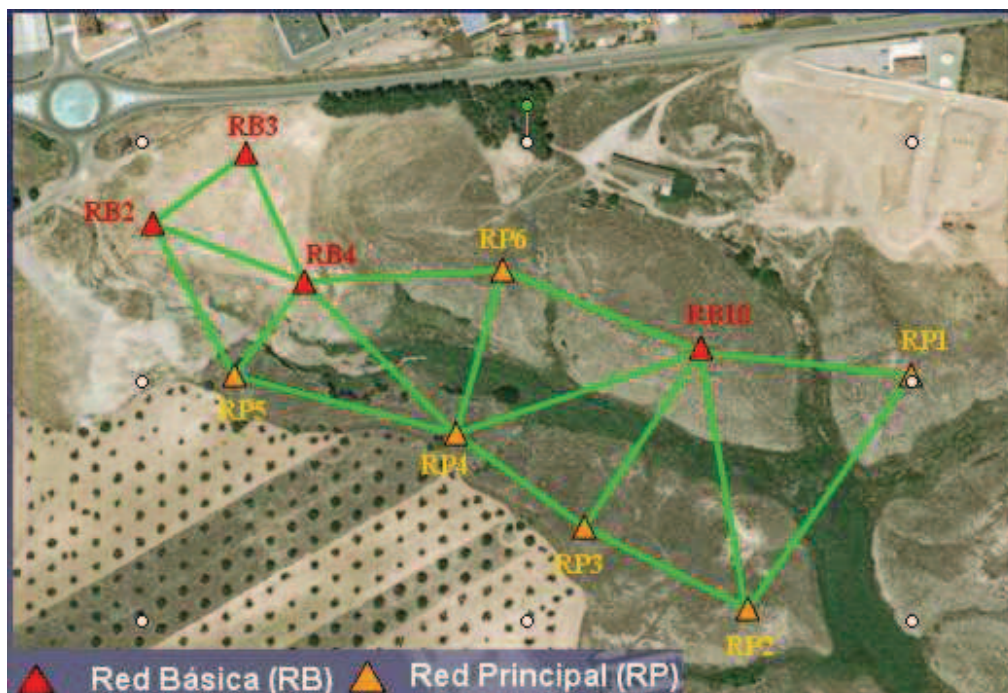
<sup>1</sup> Métodos Topográficos Dr. Mercedes Farjas Abadía. Dpto. Ing. Topogr y Cartog. Univ. Politecnica de Madrid

Dependiendo de las necesidades de nuestro trabajo recurriremos en mayor o medida a los procedimientos de simulación.

En general, los trabajos topográficos empiezan con la obtención de la cartografía a escala 1:50.000 y 1:25.000 –cartas Topográficas del IGN- de la zona del trabajo y de los alrededores, para la localización de los vértices de la red. También puede trabajarse con las fotografías aéreas, Google Earth u otro tipo de documentos. Analizado el objetivo del trabajo topográfico y las necesidades del mismo, se seleccionarán vértices pre-existentes en las proximidades que tengan coordenadas en el sistema de referencia en el que se hayan de entregar los resultados.

Sobre la cartografía existente se localizan estos vértices, se eligen los lugares idóneos para situar la red básica de nueva implantación, y se comprueba que dichos lugares cumplen las condiciones geométricas (triángulos equiláteros y que la geometría de la figura sea idónea). Se intentara que los vértices formen triángulos de la misma longitud y con forma geométrica regular para conseguir a posteriori un buen ajuste de la red.

Es importante que exista intervisibilidad como mínimo a tres vértices de la red desde cada punto para posibles enlaces por topografía clásica. Los puntos de la red se eligen de manera que estén en zonas estables.



Los vértices de una red básica han de cumplir las siguientes características:

- Estabilidad dimensional: que no varien de forma o tamaño.
- Estabilidad material: que sus materiales sean resistentes a los agentes externos.
- Estabilidad espacial: que no varíe su situación o posición absoluta en el espacio.
- Materialización de forma adecuada, fina, precisa e inequívoca.
- Fácilmente estacionable.

- Fácilmente visible desde cualquier otro punto de la zona.
- Con visibilidad sobre la zona del proyecto.
- Fácilmente localizable.
- Fácilmente sustituible, en caso de desaparición.

## 1.2. Reconocimiento, selección definitiva e implantación de la red básica

La selección definitiva de vértices se realiza en la fase de reconocimiento del terreno, comprobando la viabilidad del diseño establecido en la fase anterior.

La primera fase del trabajo de campo será la implantación de los vértices de la red básica. Recordemos que la red básica planimétrica no tiene por qué coincidir con la red básica altimétrica. El diseño, la materialización y la observación se planifica independientemente una y otra, según sea la precisión y los requisitos del levantamiento.



Tras llevar a cabo el diseño de la red sobre la cartografía existente, en campo se comprueba la viabilidad de la situación de los vértices previstos y se decide su posición definitiva.

## 1.3. Señalización

Se recorre la zona con el anteproyecto verificado, se materializan los vértices y se elabora la reseña de los mismos. La materialización puede realizarse con señales sobre la roca, clavos de acero, hitos o pilares hormigonados, hitos feno o mediante barras de acero corrugadas, clavadas en el terreno con maceta y consolidadas en la base con mortero de cemento u hormigón (concreto).



Las siguientes imágenes nos muestran el proceso de materialización de vértices de una red básica, para un trabajo de topografía, así como un ejemplo de la reseña final:



Se mezcla el cemento con el agua, se le añade arena para obtener el mortero y áridos (concreto)



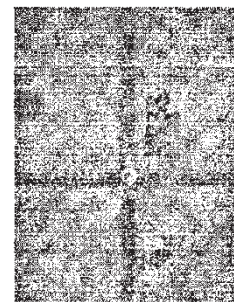
Se elige el punto del terreno, estabiliza la señal y procede a verter el concreto.

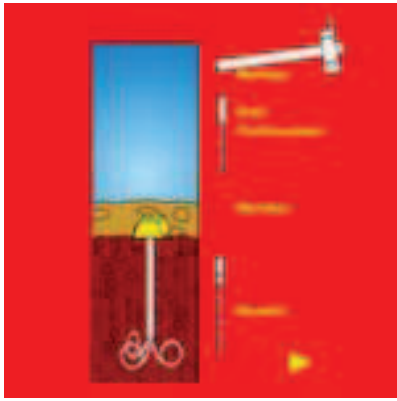
Materialización final del vértice

Materialización con barras de hierro de construcción

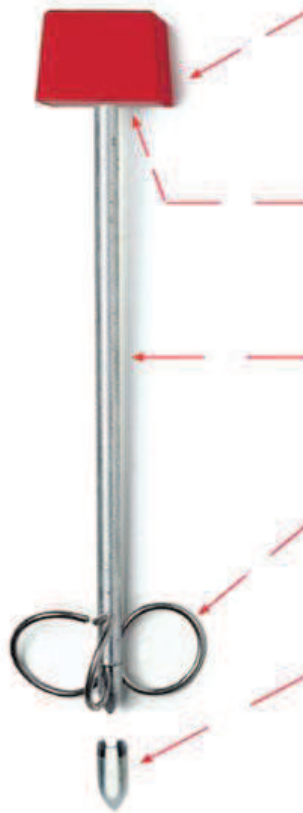


También se pueden utilizar clavos de acero con cabeza semiesférica, dependiendo del tipo de terreno en el que se vayan a ubicar los vértices





Hito Feno



**Cabeza**

Tenemos diferentes modelos (forma, material, color, etc.) para responder a las necesidades de los topógrafos. El objetivo de la cabeza es ofrecer una resistencia muy buena a los golpes y al envejecimiento para una mejor perpetuidad.

**El manguito brevettato**

El manguito, colocado sobre el anclaje, junta la cabeza y el anclaje. Para que no hay ninguna rotación posible entre las dos partes.

**El anclaje**

El sistema inventado por FENO tiene 3 ventajas:

- 1 - Resistencia a la corrosión: un anclaje totalmente galvanizado a caliente que conserva sus cualidades durante 30 años.
- 2 - Alta resistencia al arrancamiento con las tres varillas de metal.
- 3 - Colocación rápida: colocado muy rápidamente, en cualquier tipo de terreno.

**El señal subterráneo**

Perfecto complemento del hito FENO para las zonas con riesgos (zonas agrícolas...). Si por ejemplo, un arado saca el hito de su sitio, el señal subterráneo se queda en su sitio y sirve de testigo.

**1.4. Monografía y croquis de vértices de una red topográfica**

Nombre:

Coordenadas

X=

Y=

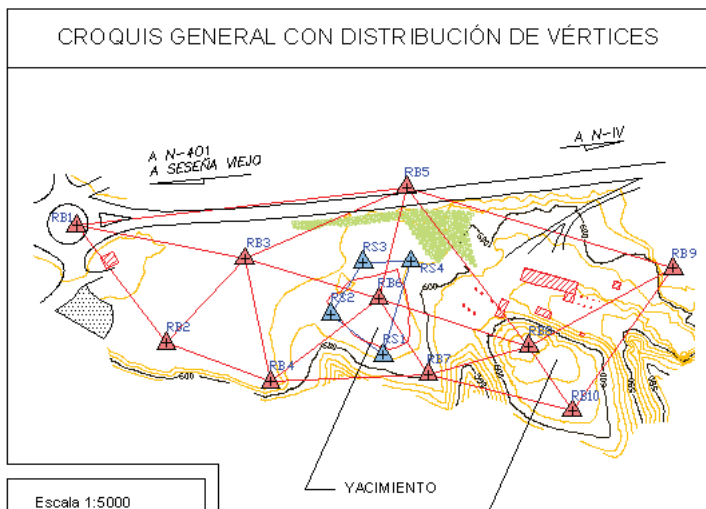
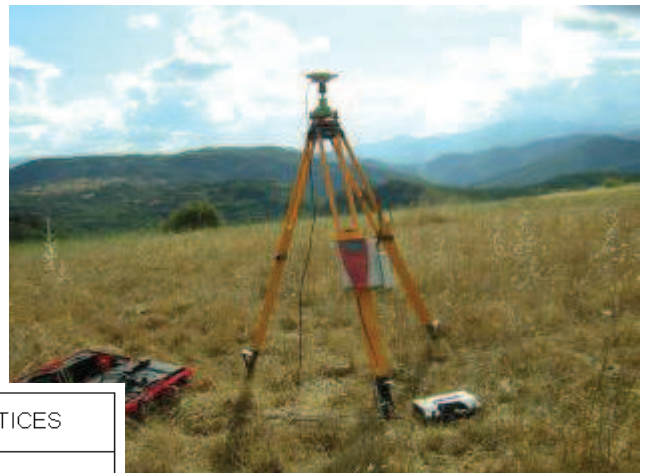
h=

Altura referida al nivel medio del mar

Croquis

Situación General

Acceso:



## 2. OBSERVACIÓN DE LA RED BÁSICA<sup>2</sup>

### 2.1. SELECCIÓN DE EQUIPOS Y MÉTODOS

Una vez concluida la materialización de los puntos que componen la red, comienzan los trabajos de observación. Para realizar los trabajos topográficos de un levantamiento, podemos elegir entre dos metodologías:

- Equipos de topografía clásica (estaciones totales y teodolitos)
- Equipos GPS

Cada una de ellas conlleva el uso de un equipo de observación específico, así como un tratamiento concreto de datos y de resultados. Dependiendo de las condiciones del terreno o del pliego de condiciones (costos), ambas técnicas se complementan o pueden ser utilizadas de forma independiente.

#### 2.1.1. Equipos de topografía clásica: Estación total

Un equipo topográfico muy generalizado es la estación total. Para su uso se requiere como equipo complementario, un trípode de madera, prisma estándar de reflexión total (opcional según el modelo), jalón, maza y otro material accesorio. Antes de realizar las observaciones con una estación o teodolito, es necesario determinar los errores sistemáticos del equipo.



- **Comprobaciones angulares**

Para realizar la verificación angular del equipo y cuantificar los errores sistemáticos en la medida de ángulos cenitales y acimutales, se utiliza el método de vueltas de horizonte (Bessel, CI y CD). Los valores se aplican a los sistemas de corrección automáticos de la estación. A continuación se observa otra vuelta de horizonte y se comprueba que los errores de colimación e índice están en los límites de los errores accidentales o incertidumbres propias del equipo.

- **Comprobación del distanciómetro**

Para comprobar el estado del distanciómetro, se efectúa la medición de distancias calibradas entre pilares o bases, realizando las observaciones con sistema de centrado forzoso.

Se estaciona el distanciómetro en uno de los pilares de la red de calibración y se observan placas de puntería situadas en los restantes. Posteriormente se exige que la suma de distancias de dos tramos consecutivos, coincida con la distancia medida del tramo completo. La diferencia entre los dos valores pondrá de manifiesto un error constante en la medida de distancias. Si el error está por debajo de la precisión que nos da el fabricante en su término constante, se considerará válido.

En las estaciones que permiten realizar medición con y sin prisma, esta operación se repetirá para ambos casos.

<sup>2</sup> Métodos Topográficos Dr. Mercedes Farjas Abadia. Dpto. Ing. Topogr y Cartog. Univ. Politécnica de Madrid

Si es posible, se realiza también la comprobación de coincidencia del eje de colimación del aparato con el rayo láser que utiliza la estación. Para ello se hace incidir el rayo sobre una diana (con poca luz para que la proyección del rayo sea visible). Mediante el ajuste de los tornillos se corrige la dirección del rayo, hasta que coincida el rayo con el centro de la diana, quedando los dos ejes coincidentes.

### 2.1.2. Equipos receptores satelitales (GPS)

Los equipos GPS que se utilizan en las aplicaciones topográficas y geodésicas, constan de una antena, un receptor y una terminal, así como trípodes, cables especiales, equipos de control meteorológico y diverso material auxiliar.

La antena es el elemento al que se refiere el posicionamiento, está conectada a través de un preamplificador al receptor, directamente o mediante cable. La misión de la antena es la de convertir la energía electromagnética recibida en corriente eléctrica.



## 2.2. ANÁLISIS DE LAS INCERTIDUMBRES A PRIORI

La cartografía se obtiene a partir de una nube de puntos que representa la superficie del terreno con la precisión que requiere la escala elegida.

Una vez decidido el equipo, se pueden determinar las incertidumbres a priori de las observaciones que se realizasen con él, y el estudio de las tolerancias que pueden admitirse en el trabajo.

Los observables posibles son: lecturas acimutales, lecturas cenitales, distancias, desniveles y posiciones (si se aplica la tecnología GPS). Las incertidumbres asociadas a cada una de estas observaciones son las siguientes.

### 2.2.1. Incertidumbre por dirección acimutal observada

Con el equipo elegido se calcula la incertidumbre o error angular  $e_a$  por dirección acimutal observada. Este parámetro se obtiene con la siguiente expresión:

$$e_a = (e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2)^{1/2}$$

Los sumandos son las incertidumbres máximas de verticalidad, dirección, puntería y lectura:

- Incertidumbre de verticalidad

$$e_v = 0 \text{ Con compensador}$$

$$e_v = S^{cc} / 12$$

- Incertidumbre de dirección

$$e_d = \frac{\sqrt{e_s^2 + e_e^2}}{D} r^{cc}$$

Siendo  $e_s$  la incertidumbre en el centrado del jalón sobre el punto en la señal;  $e_e$  la incertidumbre de la puesta en estación del aparato sobre el punto materializado; y  $D$  la distancia entre los puntos que definen la visual.

- Incertidumbre de puntería

$$e_p = C_a \cdot K / A \sqrt{n}$$

$C_a$  = coeficiente de observación angular:  $10^{cc} < C_a < 150^{cc}$

A = aumentos del anteojo .

K = constante de mayoración  $1,5 < K < 3$

n = número de observaciones realizadas. Si se utiliza Regla de Bessel  $n=2$

- Incertidumbre de lectura

Sistema óptico mecánico.

$$e_i = 2/3 \cdot m \cdot 1/\sqrt{n}$$

Siendo:

m el último salto en pantalla

n el número de observaciones.

Sistema electrónico

$$e_i = m_e / \sqrt{3}$$

Siendo  $m_e$  el último salto en pantalla en el sistema electrónico.

### 2.2.2. Incertidumbre por dirección cenital observada

La incertidumbre en la lectura de ángulos cenitales, ocasionada por los errores accidentales del aparato, vendrá dada por:

$$e_{a \text{ cenital}} = \sqrt{e_v^2 + e_l^2 + e_p^2}$$

- $e_v$  = incertidumbre de verticalidad

Es función de la precisión del nivel tubular del aparato. Como en el caso del error acimutal, este error se hace despreciable si la estación dispone de un compensador de doble eje.

$$e_v = 0 \text{ Con sensor de inclinación}$$

$$e_v = C_p \text{ (} C_p \text{ = característica de precisión del compensador automático)}$$

$$e_v = \frac{s^{cc}}{20} \text{ Con eclímetro de coincidencia}$$

- $e_p$  = incertidumbre de puntería.

Calculado con una expresión análoga a la utilizada en la incertidumbre por dirección acimutal:

$$e_p = \frac{C_v}{A} K \frac{1}{\sqrt{n}}$$

✓  $C_v$  el coeficiente de observación cenital

✓ A los aumentos del anteojo.

✓ K la constante de mayoración

$$1,5 \leq K \leq 3$$

✓ n = número de observaciones realizadas (Bessel  $n= 2$ )



- $e_l$  = incertidumbre de lectura

Tomamos como valor para esta incertidumbre el mínimo salto en pantalla en la lectura de ángulos cenitales.

#### Sistema óptico mecánico

$$e_L = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Siendo:

- $m$  el último salto en pantalla.
- $n$  el número de observaciones.

#### Sistema electrónico

$$e_L = \frac{m_e}{\sqrt{3}}$$

Siendo  $m_e$  el último salto en pantalla en el sistema electrónico.

### 2.2.3. Incertidumbre por distancia observada

La expresión de la incertidumbre por distancia observada, viene dada por:

$$e_D = \sqrt{e_{\text{estándar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- Incertidumbre propia del distanciómetro ( $e_{\text{estándar}}$ )

Es la incertidumbre asociada al tipo de aparato utilizado en la medida de las distancias.

$$e_{\text{estándar}} = a + b \text{ ppm}$$

Donde:

$a$  = error sistemático en la medida de distancias.

$b$  = incertidumbre que comete el aparato dependiendo de la distancia medida ( $b \text{ ppm} = \text{milímetros por kilómetro}$ ).

- Incertidumbre de estacionamiento ( $e_e$ )

Es la incertidumbre asociada al estacionamiento del instrumento.

- Incertidumbre de señal ( $e_s$ )

Es la incertidumbre asociada a la señalización del punto a observar.

- Incertidumbre por inclinación del jalón ( $e_j$ )

El jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca una incertidumbre en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:

$$e_j = \frac{m \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}$$

Siendo:

$m$  = altura del jalón.

$\alpha$  = sensibilidad del nivel de burbuja del jalón.

$\beta$  = ángulo de máxima inclinación de las visuales.

### 2.2.4. Incertidumbre por desnivel trigonométrico observado

La expresión para obtener el desnivel entre dos puntos mediante nivelación trigonométrica es:

$$\Delta H_A^B = t_A^B + i_A - m_B + C_{e-r}$$

- Donde:
- $t_A^B = Dr_A^B \cdot \cot g V_A^B$
  - $m_B$  = altura del jalón.
  - $i_A$  = altura de estación.
  - $C_{e-r}$  = corrección conjunta de esfericidad y refracción.

El error o la incertidumbre asociada a un desnivel en este tipo de observación, vendrá dado por la expresión:

$$e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

- $e_i$  : Incertidumbre en la medida de la altura del instrumento

Tiene un valor empírico de 5 mm.

- $e_t$  : Incertidumbre en el término t

Conocida la expresión de t:

$$t = D_g \cos V$$

Las leyes de propagación de errores e incertidumbres nos permiten obtener:

$$e_t = \sqrt{(\cos^2 V) e_D^2 + (D^2 \text{sen}^2 V) e_{a \text{ cenital}}^2}$$

El término  $e_D$  es la incertidumbre en la distancia observada y  $e_{a \text{ cenital}}$  la incertidumbre en la observación cenital, descritos anteriormente.

- $e_m$  : Incertidumbre producida en la medida de la altura de la señal

Esta incertidumbre la podemos descomponer en dos partes, siendo el error total ( $e_m$ ) es la componente cuadrática de dos valores  $e_m'$  y  $e_m''$ .

- ❖  $e_m'$  incertidumbre en el desnivel debida a la medida directa de la altura de la señal sobre el jalón inclinado

$$e_m' = m (1 - \cos \beta)$$

- ❖  $e_m''$  es la incertidumbre ocasionada al no observar exactamente en el centro del prisma. Se admite que esta incertidumbre toma los siguientes valores:

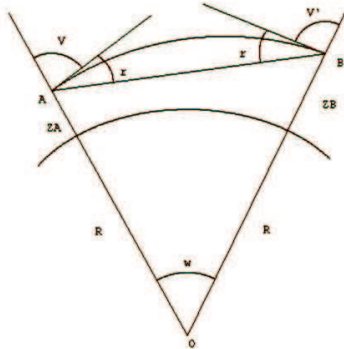
m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1500	2000
e"m	10				20					30		40

Para cualquier distancia intermedia puede realizarse una interpolación lineal entre estos valores.

**2.2.5. Incertidumbre de una observación de desnivel por visuales recíprocas y simultáneas**

El método de observaciones recíprocas y simultáneas consiste en estacionar el equipo topográfico en los puntos entre los que se quiere hallar el desnivel y realizar lecturas cenitales. Los efectos angulares de la refracción atmosférica serán iguales en las dos visuales y el desnivel vendrá dado por:

$$\Delta H_A^B = D \tan \frac{V' - V}{2}$$



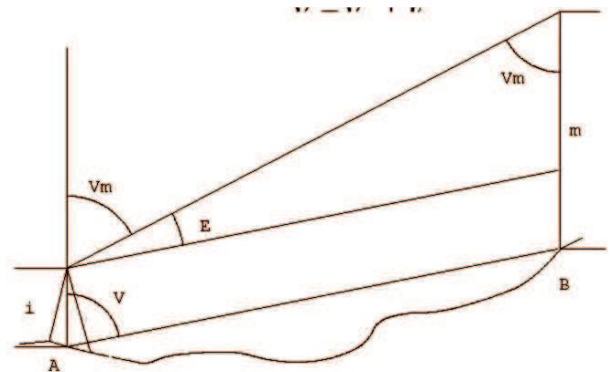
Esta expresión nos permite calcular el desnivel entre dos puntos B y A sin necesidad de tener en cuenta los efectos de la esfericidad y anulando los de la refracción.

La simultaneidad de las observaciones puede sustituirse por la condición de operar en condiciones atmosféricas semejantes. Por supuesto, tampoco deberá operarse cuando existan perturbaciones atmosféricas como tormentas, fuertes vientos, etc. Debe hacerse notar que las distancias cenitales V' y V son las que correspondería observar sin alturas de

instrumento y mira; es decir, que las distancias cenitales que han sido observadas deberán ser reducidas al terreno:

$$V = V_m + E \quad E^{cc} = \frac{m-i}{D} \text{sen} V$$

V<sub>m</sub> = lectura cenital medida en el campo  
 V = lectura cenital reducida al terreno,  
 E<sup>cc</sup> = ángulo de corrección expresado en segundos



La precisión del desnivel al aplicar el método de visuales recíprocas y simultáneas viene dada por:<sup>7</sup>

$$e_{\Delta H} = D_g \frac{1}{2} 0,000018692 \cos \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B) + D_g \frac{1}{100000} \text{sen} \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B)$$

Para un equipo de precisión angular de 8,4<sup>cc</sup>, y una precisión en distancias de 1/100.000 con un alcance de 2 a 3 km, aplicando esta fórmula, Pérez Martín obtuvo el siguiente cuadro:

V <sub>A</sub> <sup>B</sup> /D <sub>g</sub> (m.)	500	1.000	1.500	2.000
100 <sup>g</sup>	5	9	14	19
90 <sup>g</sup>	5	11	16	22
80 <sup>g</sup>	6	12	18	24
70 <sup>g</sup>	6	13	19	26
60 <sup>g</sup>	7	13	20	27
50 <sup>g</sup>	7	14	21	27

### 2.2.6. Incertidumbre en un desnivel observado por nivelación geométrica

Si se observa un desnivel aplicando el método de nivelación geométrica, la precisión se determina según el error kilométrico ( $e_k$ ) del equipo de nivelación utilizado.

Una vez obtenido este valor la precisión del desnivel dependerá de la distancia existente entre los puntos nivelados. Si llamamos  $K$  a la distancia en kilómetros existente entre ambos:  $e_{\Delta H} = e_k \sqrt{K}$

### 2.2.7. Incertidumbre en la posición de un punto observado con GPS

Se admite que las precisiones que se obtienen con un equipo GPS topográfico, son del siguiente orden

METODO	FRECUENCIA	OBSERVABLES	PRECISION	APLICACIONES
ABSOLUTO	L1	COD.C/A	±10 m	NAVEGACION
DIFERENCIAL	L1	COD. C/A	1 m	CARTO/GIS
DIFERENCIAL	L1	C/A Y FASE	1cm + 2ppm	TOPOGRAFIA
DIFERENCIAL	L1 Y L2	C/A,P,FASE	5mm + 1ppm	TOPO/GEO

Y según el método de observación, las precisiones pueden ser:

METODO DE OBSERVACIÓN	PRECISION
ESTÁTICO	5 mm + 1 ppm
ESTÁTICO-RÁPIDO	5-10 mm + 1 ppm
RTK	2 cm + 2 ppm

## 2.3. DISTANCIA MÁXIMA DE RADIACIÓN

En el apartado de tolerancias de un proyecto se incluye la precisión que ha de obtenerse en planimetría y altimetría. Este dato se proporciona directamente o a través de una escala de representación. La precisión requerida limita el error máximo permitido en el levantamiento, es decir la incertidumbre máxima de los puntos observados.

La incertidumbre no apreciable a simple vista en una cartografía, a una determinada escala de representación, vendrá dada por el resultado de multiplicar el límite de percepción visual (0,2 mm) por el denominador de la escala.

Si se trata de una, escala 1/200:

$$E_{\max} = l.p.v. * 200 = 0,04 \text{ m}$$

A una escala 1/500

$$E_{\max} = l.p.v. * 500 = 0,10 \text{ m}$$

Si la escala del levantamiento es 1/200 no se deben sobrepasar los 4 cm en las incertidumbres de los puntos radiados, mientras que si la escala es 1/500 la precisión asociada es de  $\pm 10$  cm.

Con el fin de que los errores de un punto radiado no tengan representación a la escala, o no sobrepasen los límites de precisión impuestos en el pliego de condiciones, se puede calcular a priori la distancia de radiación, ésta será la distancia límite que cumple la condición de precisión.

### 2.3.1. Planimetría

En los datos previos se indicará la precisión del trabajo. Esta precisión habrá de ser mayor que la resultante de efectuar la componente cuadrática de los errores o incertidumbres de cada una de las fases que se realicen.

Supongamos que el trabajo consta de una red básica desde la que se radian los puntos del levantamiento. El error final vendrá dado por la componente cuadrática de las incertidumbres de la red básica ( $E_{red}$ ) y de la radiación:

$$E_{TOTAL} = \sqrt{E_{red}^2 + E_{rad}^2}$$

Si hubiera redes intermedias, también tendrían que tenerse en cuenta.

Cuando haya sido observada la red básica, los parámetros de precisión serán la desviación típica máxima del ajuste. A priori puede acotarse la precisión con un determinado valor.

$E_{rad}$  cuantifica el error máximo que podemos permitirnos en la radiación, Conocida la precisión ( $E_{TOTAL}$ ) por imperativo del trabajo, y  $E_{red}$  al haber sido acotado el valor, o habiéndose observado ya la red, podrá determinarse:

$$E_{rad} = \sqrt{E_{TOTAL}^2 - E_{red}^2}$$

A partir de este valor se podrá calcular la distancia y ésta será la distancia máxima a la que podremos trabajar, sin sobrepasar los errores e incertidumbres permitidos.

Las incertidumbres asociadas al método de radiación son el error o incertidumbre longitudinal y el error o incertidumbre transversal. Debido a que ambas incertidumbres actúan en direcciones perpendiculares, no se puede considerar como error máximo la componente cuadrática de los dos, sino la mayor de ellas.

El proceso de cálculo consiste en determinar la distancia en la que el error transversal tomaría el valor  $E_{rad}$  y de modo análogo la distancia en la que sería el error o incertidumbre longitudinal. La menor de las dos distancias que calculemos será la distancia máxima de radiación, distancia que no se deberá sobrepasar en la fase de los trabajos de campo para cumplir con las precisiones requeridas.

- **Incertidumbre transversal en radiación**

La incertidumbre que se comete en la posición de un punto radiado debido a la

medida de los ángulos, viene dada por:

$$e_T = e_a \sqrt{2} D$$

Siendo  $e_a$ :

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

La distancia máxima para esta variable será:

$$D_{\text{máxima según error transversal}} = \sqrt{\frac{e_T^2 - (e_s + e_e)^2}{(e_p^2 + e_v^2 + e_l^2)}}$$

- **Incertidumbre longitudinal en radiación**

El error o incertidumbre longitudinal tiene su origen en la medida de distancias. Su expresión en el método de radiación es:

$$e_L = \sqrt{e_{\text{estándar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- Incertidumbre propia del distanciómetro ( $e_{\text{estándar}}$ )

Es el error o incertidumbre en la medida de las distancias, debida al equipo.

$$e_{\text{estándar}} = a_{\text{mm}} + b_{\text{mm}} D_{\text{Km}}$$

Donde:

a = error sistemático del aparato.

b = error que comete el aparato dependiendo de la distancia medida y definida en partes por millón.

- Incertidumbre de estacionamiento ( $e_e$ )

Es el error o incertidumbre que se comete al estacionar el instrumento.

- Incertidumbre de señal ( $e_s$ )

Es el error o incertidumbre producida en la señalización del punto. El objeto con el que se indica el punto, no se sitúa en su lugar exacto, sino cercano a él.

- Incertidumbre por inclinación del jalón ( $e_j$ )

El jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca un error o incertidumbre en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:

$$e_j = m \cdot \text{sen } \beta / \cos \alpha$$

Siendo:

m = altura del jalón.

$\alpha$  = sensibilidad del nivel de burbuja del jalón.

$\beta$  = ángulo de máxima inclinación para las visuales.

Podremos despejar de la expresión del error longitudinal la distancia máxima de radiación y obtendríamos:

$$D_{\text{máxima según error longitudinal}} = \frac{(\sqrt{e_L^2 - e_e^2 - e_s^2 - e_j^2} - a)}{b}$$

Una vez analizados estos dos errores o incertidumbres, se determina respecto a la precisión planimétrica la distancia que no se deberá superar en el momento de la toma de datos. Radiando puntos por debajo de esta distancia se garantiza que los errores o incertidumbres asociadas a la observación de esos puntos no van a tener representación a la escala del levantamiento.

### 2.3.2. Altimetría

En altimetría se considera una tolerancia igual a 1/4 de la equidistancia de las curvas de nivel. La equidistancia depende de la escala, pero también del desnivel existente en el terreno. Para una cartografía a escala 1/200 puede plantearse en principio una equidistancia entre curvas de nivel de 20 cm. La tolerancia altimétrica en estas condiciones sería de 5 cm.

Esta tolerancia también condiciona la distancia máxima de radiación, pero al ser el error en la medida de ángulos cenitales mucho menor que en la medida de ángulos acimutales esta condición suele ser menos restrictiva.

A partir de la expresión ya conocida del error total deberemos calcular igualmente el valor del error máximo de radiación para la altimetría y a partir de este una nueva distancia máxima de radiación. Si fuese ésta de valor inferior a la calculada en planimetría, sería la que se impondría finalmente como distancia máxima de radiación.

$$E_{\text{altimetria}} = \sqrt{E_{\text{altimetria RADIACIÓN}}^2 + E_{\text{altimetria RED}}^2}$$

## 3. RED BÁSICA <sup>3</sup>

- 3.1 Implantación de la red básica
- 3.2 Observación de los vértices
  - 3.2.1 Trabajos previos
  - 3.2.2 Observación por métodos tradicionales
  - 3.2.3 Observación por métodos de posicionamiento global (GPS)
- 3.3 Cálculo y precisión de una observación por métodos tradicionales
  - 3.3.1 Cálculo planimétrico
  - 3.3.2 Cálculo altimétrico
  - 3.3.3 Puntos complementarios
- 3.4 Cálculo y precisión de una observación por métodos de posicionamiento global (GPS)
- 3.5 Reseñas (monografías) de los vértices

<sup>3</sup> Métodos Topográficos Dr. Mercedes Farjas Abadía. Dpto. Ing. Topogr y Cartog. Univ. Politécnica de Madrid

### 3.1. Implantación de la red básica

Hemos comentado que la primera fase del trabajo de campo será la implantación de los vértices de la red básica. Es necesario disponer de una red en el sistema de referencia elegido, para desde ella poder llevar a cabo los trabajos de radiación de los puntos de relleno.

Recordemos que la red básica planimétrica no tiene por qué coincidir con la red básica altimétrica. El diseño, la materialización y la observación se planifica independientemente una y otra, según sea la precisión y los requisitos del levantamiento.

Tras llevar a cabo el diseño de la red sobre la cartografía existente, en campo se comprueba la viabilidad de la situación de los vértices previstos y se decide su posición definitiva.

En el momento de la materialización del vértice, se realiza un croquis de su situación y una monografía de cada uno, se adjuntarán con los resultados del levantamiento.



Para la materialización de los vértices ver punto 1.3. “Señalización”

### 3.2. Observación de los vértices

#### 3.2.1 Trabajos Previos

#### 3.2.2 Observación por métodos tradicionales

#### 3.2.3 Observación por métodos de posicionamiento global (GPS)

#### 3.2.1. Trabajos previos

A la vincular con un sistema de referencia oficial, se debe enlazar con la red geodésica o topográfica que corresponda. En estos casos es necesario observar y calcular la que se denomina **red de enlace o red externa**.

En esta red de enlace se aplicará lo estudiado en el tema *Redes Topográficas, poligonales*, Recordemos que es necesario realizar una planificación adecuada de estos trabajos para minimizar y optimizar el tiempo de las observaciones.

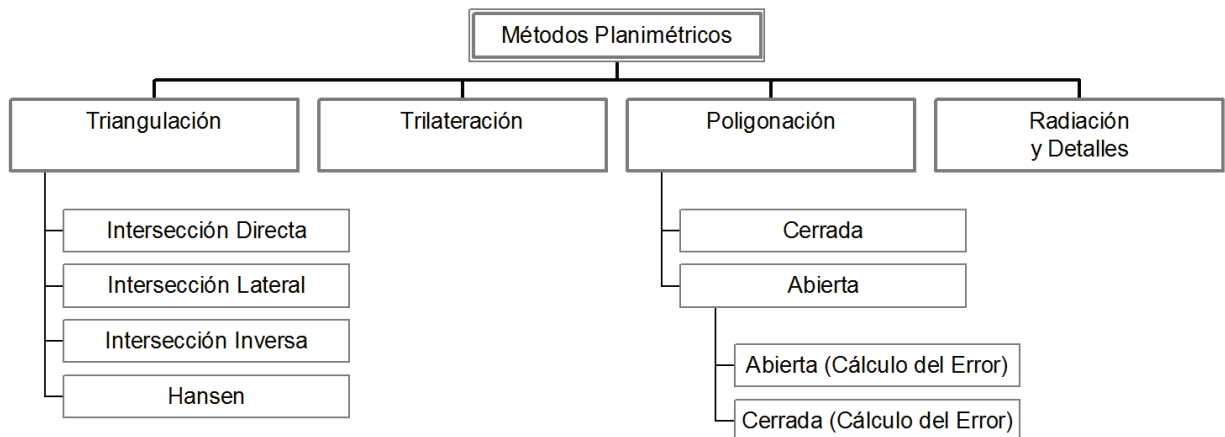
#### 3.2.2 . Observación de los vértices por métodos tradicionales

- Redes planimétricas
- Redes altimétricas
- Redes tridimensionales



## Planimetría

Clasificación de los métodos planimétricos



En la fase de diseño, se estudia la posición idónea de los vértices, pero es en la visita al campo cuando se eligen los emplazamientos óptimos y se materializan los emplazamientos definitivos. En la elección de los vértices es importante la intervisibilidad y obtener una geometría favorable, además de conseguir una cobertura total de la zona a levantar, con triángulos de la misma longitud y con forma geométrica regular. Los condicionantes de implantación de los vértices son diferentes si los equipos que van a utilizarse son equipos GPS o estaciones totales.

En los trabajos previos se habrán localizado vértices geodésicos que permitan enlazar dicho trabajo con la geodesia nacional.

En este momento se comprueban las monografías de los vértices geodésicos, así como los croquis de referencia y las fotografías. También es aconsejable visitarlos para comprobar el estado en que se encuentran, su accesibilidad, identificar el punto exacto de las coordenadas del vértice, la materialización de la señal (clavo reglamentario, placa, clavos de acero), etc.

La observación de una red planimétrica puede realizarse por triangulación, trilateración o por ambos métodos. Los datos básicos necesarios en una triangulación son:

- La determinación de las coordenadas del punto fundamental.
- La orientación de uno de los ejes. Se han de realizar los trabajos topográficos necesarios para transmitir orientación del sistema de referencia a la red, dotando de orientación a un lado de la misma.
- La medida de la base: proporciona la escala de la triangulación. El lado se llama base de la triangulación. Puede obtenerse mediante medición directa o puede calcularse indirectamente su longitud, por reducción de la de un lado geodésico o por ampliación de otra base más pequeña.

La base debe ocupar un lugar lo más centrado posible respecto de la triangulación. Es evidente que así serán necesarios menos encadenamientos de triángulos para enlazar desde ella los límites de la zona.

En cuanto a la precisión de la medida de la base será aquella que requiera la escala del plano que se pretende obtener y la mayor o menor superficie a representar.

La medida de la base se suele llevar a cabo con distanciómetros electrónicos. Anteriormente se realizaba mediante una estadía invar, fraccionando la distancia en tramos no mayores a 50 metros para conseguir precisiones del orden de 1/50.000.

En una red topográfica, se suponen los triángulos planos. El mejor triángulo es el equilátero, y en lo que respecta a la longitud de los lados, se trata de reducir el número de triángulos, lo que implica aumentar la longitud (siempre teniendo en cuenta la precisión de los equipos de medida).

El método de observación angular en una triangulación es el de vueltas de horizonte. La observación constará de dos vueltas de horizonte con reiteración de 180° entre ellas. Cada vuelta se realizará primero en CI y luego en CD, tanto acimutal como cenitalmente.

Estacionado el aparato en un vértice, la observación comienza visando en círculo directa (C.I.) a otro vértice y a una referencia bien definida. Se hace lectura de ángulos acimutales y cenitales y también de distancia (opcional según se vaya a aplicar el método de triangulación, trilateración o el método mixto), Se continúa con el siguiente vértice girando el aparato siempre en sentido retrógrado (agujas del reloj). Una vez visados de esta forma todos los puntos de la red, se cierra con la observación al punto visado inicialmente con el fin de poder calcular un error de cierre de la vuelta (C.I.). Si el cierre es tolerable se da una vuelta de campana al aparato y se vuelve a visar al primer punto (C.D.). Girando el equipo en sentido retrógrado se vuelven a observar todos los vértices hasta concluir nuevamente en el primer punto observado. Se obtiene el error de cierre en posición CI, y si fuese tolerable se da por concluida la observación de la vuelta de horizonte. En Topografía suelen observarse dos series, es decir dos vueltas de horizonte, para aumentar o asegurar la precisión

Este procedimiento se aplica en todos vértices de la red en los que se estaciona.

El método es rápido y su único inconveniente procede del número de direcciones a observar. Si el número de direcciones es elevado las operaciones pueden prolongarse durante un tiempo excesivo, dando lugar a que el aparato experimente algún pequeño movimiento y obligue a repetir la serie.

Recordemos que la tolerancia en el cierre de la observación en CD y en CI, en observaciones acimutales será de

$e_a \sqrt{2}$  siendo

$$e_{a \text{ acimutal}} = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_i^2}$$

y en observaciones cenitales, respecto a la suma a 400<sup>g</sup> o 360°, la tolerancia será

$$e_{a \text{ cenital}} = \sqrt{e_v^2 + e_p^2 + e_i^2}$$

Ver estos errores incertidumbres a priori, teniendo en cuenta las características del aparato y de la geometría de la red,

En la actualidad en la observación de la red planimétrica con las estaciones totales, se complementa la medida de la base con observaciones adicionales de distancia. Éstas se obtienen en la observación de la vuelta de horizonte. En la medida de distancias se

aplica la corrección metereológica, introduciendo los parámetros de presión y temperatura en el equipo en el momento de realizar la observación.

El método de trilateración consiste en realizar la medición de distancias entre todos los lados de la red básica, con distanciómetro. Las distancias que se obtienen en campo hay que reducirlas, por ello deberán medirse también los correspondientes ángulos de inclinación, es decir se deben tomar las lecturas cenitales.

A partir de las distancias pueden obtenerse por cálculo los ángulos en los vértices. Si se designan por a, b, c los lados del triángulo ABC, el valor del ángulo en A se puede deducir mediante el teorema del coseno.

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$$

o también

$$\cos(A/2) = \sqrt{p(p - a) / bc}$$

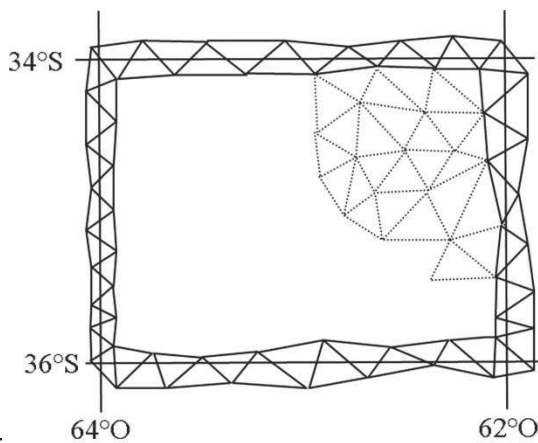
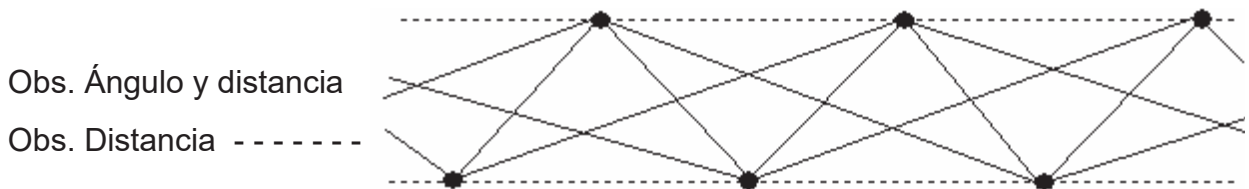
En la actualidad se trabaja con observaciones angulares y de distancias, es decir con el método de triangulación y trilateración conjunto.

Las observaciones permiten establecer ecuaciones donde las incógnitas son las coordenadas de los puntos.

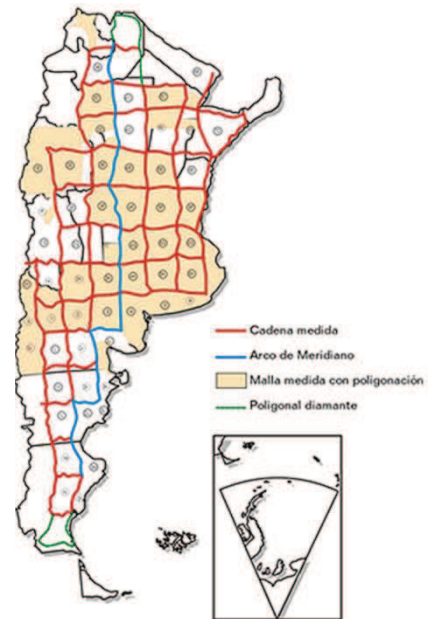
La redundancia se define como los datos adicionales a los que permiten resolver geoméricamente el problema.

Es importante contar con más información de la necesaria para el cálculo de una red topográfica, para lo que se deben tomar todas las medidas adicionales que se consideren oportunas.

Cuando nos encontremos con estructuras lineales recurriremos al uso de poligonación en red, con observaciones como el que aparece en la siguiente figura:



Cadenas de triangulación meridianas y paralelas (en línea continua) y mallas de relleno (en línea discontinua).



Red de Triangulación Fundamental Argentina

## Altimetría

En la fase de anteproyecto, considerando las dimensiones de la zona, y la precisión requerida, se habrá decidido el método de observación altimétrica, pudiendo optar por

Nivelación trigonométrica simple.

Nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas.

Nivelación geométrica

Nivelación geométrica de precisión.

Equipos GPS (receptores satelitales)

La metodología GPS permite obtener desniveles y altitudes elipsoidales.

Habiendo dotado de altitud a un punto origen se observarán los desniveles entre los vértices de la red básica por el método elegido.

## Tridimensionales

Como se ha definido anteriormente, una red tridimensional está formada por un conjunto de puntos con coordenadas  $(\varphi, \lambda, h)$  ó  $(X, Y, Z)$  con máxima precisión en el trabajo, de forma que la red básica altimétrica y planimétrica coinciden.

Mediante los equipos topográficos tradicionales (estaciones totales y teodolitos) se pueden establecer redes en las que los puntos tengan coordenadas  $X, Y, Z$  con precisión análoga en las tres dimensiones. Para ello es necesario eliminar como observable la altura de aparato y la altura de mira. Las observaciones se suelen realizar con centrado forzado.

### 3.2.3 Observación de los vértices por métodos de posicionamiento global (GPS)

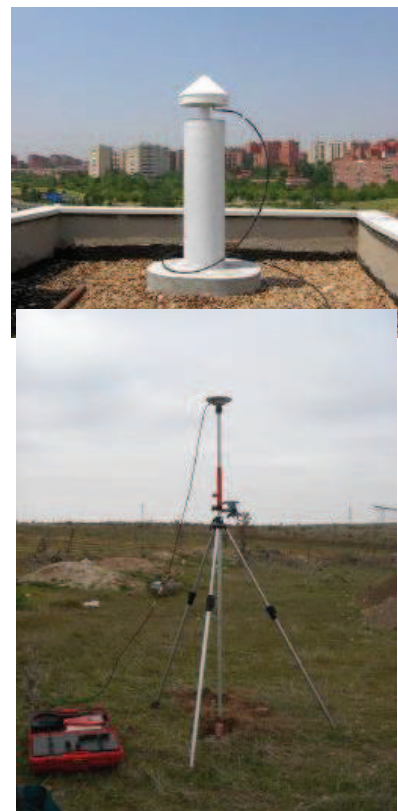
El material utilizado para observar una red básica mediante GPS puede estar formado por dos o tres receptores, con los accesorios necesarios para realizar la toma de datos en campo.

Cuando una red va a observarse por medio de técnicas GPS, en el diseño se consideran menos restricciones de visibilidad, no obstante no debe olvidarse el uso de estos vértices en trabajos posteriores por métodos de topografía clásica.

La metodología GPS (Global Positioning System) proporciona coordenadas cartesianas tridimensionales  $(X, Y, Z)_{WGS84}$  o coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)_{WGS84}$  en un sistema geocéntrico que utiliza el elipsoide WGS84.

Además de los vértices existen repartidas por el territorio nacional estaciones permanentes de observación GPS. También estarán a nuestra disposición los datos de estas estaciones.

La organización de la observación dependerá del objetivo



del trabajo, precisión y fiabilidad requerida, número y tipos de receptores y de las condiciones logísticas. El material para observar una red con métodos GPS suele constar de 2 o 3 receptores con el equipo complementario necesario.

Los receptores utilizados normalmente son bifrecuencia, registran el código C/A y P de L1 y fase de L1 y L2. Al tener mayor número de observables requieren un menor tiempo de observación, obteniéndose un mayor rendimiento que con receptores monofrecuencia.

Las precisiones que se obtienen con los equipos GPS en postproceso, puede ser del siguiente orden:

- Estático Relativo:  $5\text{mm} \pm 1\text{ppm}$
- Estático Relativo Rápido:  $5\text{-}10\text{mm} \pm 1\text{ppm}$
- RTK:  $2\text{ cm} \pm 1\text{ppm}$

Se deben planificar las puesta o sesiones, atendiendo: número de satélites, geometría de la constelación (DOP), actividad ionosférica (depende de la latitud y hora del día), longitud de la línea base a medir, número y calidad de las observaciones, obstrucciones físicas o electromagnéticas en los puntos e intervalo de registro; considerando necesario las mismas condiciones en ambos extremos de la línea base (datos comunes y simultáneos).

En función de la longitud de la línea base y el tipo de instrumental se consideran los siguientes valores de tiempos de observación:

	Monofrecuencia Estático	Bifrecuencia Estático	Bifrecuencia Estático Rápido
< 1 km	20 – 40 min	20 – 40 min	5 – 10 min
1 - 10 km	30 – 60 min	30 – 60 min	5 – 10 min
10 – 30 km	45 – 120 min	45 – 90 min	
> 30 km		> 60 min	

- El método **estático relativo** por diferencia de fase, consiste en hacer observaciones simultáneas con al menos dos receptores, obteniendo líneas base entre ambos. Para una determinada línea base AB, se obtienen por pseudodistancias las coordenadas absolutas del punto A (o bien se conocen previamente) y por medida de fase los incrementos de coordenadas  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  y  $\Delta Z$  entre A y B.

En este método general se diferencian a su vez dos modelos:

- El método estático relativo **estándar**:

Se trabaja como mínimo con dos receptores que se estacionan y observan durante un periodo de tiempo de una a dos horas, según la redundancia y la precisión necesarias, la distancia a observar y la bondad de la configuración de la constelación de satélites.

Se utiliza generalmente para medir líneas mayores de 20 kilómetros, como es el caso al pretender enlazar con estaciones cuyas distancias oscilarán entre 20 y 30 kilómetros. La precisión en la medida de la distancia se estima en  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ .

- El método estático relativo **rápido**:

Se utiliza para la observación de distancias menores a 20 kilómetros y la precisión en la medida de la distancia oscila de 5 a 10  $\text{mm} \pm 1 \text{ ppm}$ . Éste método utiliza el algoritmo FARA para la resolución estadística de la ambigüedades, permitiendo la disminución de los tiempos de observación frente al método estático estándar, estimándose el tiempo de observación necesario de 5 a 20 minutos. Es sólo utilizable con receptores bifrecuencia con medida de fase tras la demodulación de la portadora por correlación con ambos códigos (C/A y P).

Para la observación de la red se emplea el método **estático relativo rápido**. El tiempo mínimo de observación, para puestas simultáneas, suele ser de quince minutos entre vértices de la red interior, y de mayor duración en los vértices exteriores, dependiendo de las distancias existentes.

Para la toma de datos se estaciona el aparato fijo en un vértice, que consideramos como estación de referencia. Se configura el aparato para el método de posicionamiento estático relativo estándar.

Los dos equipos móviles se estacionan en dos de los vértices internos configurándolos para que el método de posicionamiento sea estático relativo rápido. Se utiliza un intervalo de grabación de 10-15 minutos en medición simultánea. Cuando la grabación concluye, uno de los aparatos móviles se sitúa en otro vértice con un solape temporal de 10-15 minutos, como mínimo.

Durante toda la observación se tiene en cuenta el GDOP, parámetro adimensional que da una idea de la geometría que forma el receptor y los vectores que determinan los satélites. Como es sabido su valor ideal es uno y en todo momento de la observación hay que controlar que el GDOP esté en un valor admisible ( $<6$ ).

Otros parámetros como la máscara de elevación se establece en  $10^{\circ}$ - $15^{\circ}$ , con el objetivo de captar el mayor número de satélites y evitar observaciones erróneas.

### 3.3. Cálculo y precisión de una observación por métodos tradicionales

#### 3.3.1 Cálculo planimétrico

El cálculo de las coordenadas más probables de los puntos de la red básica se realiza mediante un ajuste mínimo cuadrático de todas las observaciones.

Previamente se han de obtener y comprobar los cierres de los triángulos, desechando aquellas observaciones que superen la tolerancia. La tolerancia admisible en el cierre de triángulos será:

$$e_a * \sqrt{2} * \sqrt{3}$$

Previa a la compensación propiamente dicha, e independientemente de errores groseros que hayan podido detectarse, hay que efectuar correcciones a las magnitudes observadas.

Corrección a ángulos observados:

- Fundir observaciones de distintas vueltas de horizonte en cada estación.
- Reducción de estaciones excéntricas.

Corrección a distancias observadas:

- Corrección atmosférica.
- Reducción al horizonte.
- Reducción a la proyección.

Obtenidas y aplicadas las correcciones se procede a la compensación de la red. Para ello se necesitan observaciones redundantes en relación con el número de incógnitas lo que nos permitirá obtener los valores más probables de las magnitudes. Se aplica la teoría estadística de MMCC para obtener para cada incógnita:

- valores únicos,
- los valores más probables,
- e indicar su precisión.

El método exige conocer unas coordenadas iniciales de todos los puntos, tanto estacionados como observados, independientemente de que la red haya sido observada por triangulación, trilateración o poligonación.

Se decidirá, qué puntos van a considerarse como fijos, calculando unas coordenadas aproximadas de los restantes.

Se plantean, a partir de las observaciones de campo, las ecuaciones de observación correspondientes a cada visual en su forma linealizada. Las ecuaciones de dirección y de distancia para aplicar el método paramétrico de ajuste MMCC, son las siguientes:

**Ecuaciones de dirección:**

$$v^{\text{cc}} = \frac{r^{\text{cc}}}{D^2} \cdot [(Y_B - Y_A) \cdot dX_B - (Y_B - Y_A) \cdot dX_A - (X_B - X_A) \cdot dY_B - (X_B - X_A) \cdot dY_A] - d\Sigma + (\theta_{\text{cal}} - \theta_{\text{obs}})^{\text{cc}}$$

**Ecuaciones de distancia:**

$$v_m = \frac{1}{D} \cdot [(X_A - X_B) \cdot dX_A - (Y_A - Y_B) \cdot dY_A - (X_A - X_B) \cdot dX_B - (Y_A - Y_B) \cdot dY_B] - d\lambda \cdot D + (D_{\text{cal}} - D_{\text{obs}})_m$$

Una vez planteadas todas las ecuaciones, se asignan pesos a cada una de ellas en función del error o incertidumbre por dirección acimutal observada ( $e_a$  o  $\sigma_a$ ) y de la incertidumbre por distancia observada ( $e_D$  o  $\sigma_D$ ) multiplicando las ecuaciones de dirección por  $1/e_a^2$  o  $1/\sigma_a^2$ , y las de distancia por  $1/e_D^2$  o  $1/\sigma_D^2$ .

Si se considera un ajuste partiendo de dos puntos fijos, habría que calcular un factor de escala entre la distancia medida en campo, entre esos dos puntos, y la calculada a partir de sus coordenadas G-K (UTM) ajustadas. Este factor de escala puede ser irrelevante para distancias cortas.

Como resultado se obtendrán las coordenadas ajustadas de los vértices de la red, las precisiones de cada uno de ellos y las correspondientes elipses de error (semiejes y orientación).

Las precisiones del ajuste son relativas, reflejan la precisión interna del trabajo respecto de los puntos de origen que se hayan tomado (puntos fijos) y no tienen en cuenta el error, incertidumbre o precisión de la posición del punto fijo del que parten. Para calcular el error total de los puntos hay que hacer una composición cuadrática de la precisión del punto fijo y de la precisión obtenida en el ajuste interno de la red básica, para cada punto:

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\sigma_{x \text{ origen}}^2 + \sigma_{x_i}^2}$$

$$\sigma_{y_i} = \sqrt{\sigma_{y \text{ origen}}^2 + \sigma_{y_i}^2}$$

### 3.3.2 Cálculo y ajuste altimétrico

La observación altimétrica se habrá realizado por el método elegido, considerando las dimensiones de la zona y la precisión requerida, pudiendo optar por nivelación trigonométrica, nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas, nivelación geométrica o nivelación geométrica de precisión. La metodología GPS permite obtener desniveles y altitudes elipsoidales.

Como resultado de la observación y tras los cálculos previos que correspondan al método elegido, tendremos desniveles entre vértices. Habiendo dotado de altitud a un punto origen se habrán observado los desniveles entre los vértices de la red básica.

Cada desnivel observado da lugar a una ecuación de observación del tipo:

$$v_H = (\Delta H_A^B)_{\text{calculado}} - (\Delta H_A^B)_{\text{obs}}$$

Siendo:

$v_H$  = Residuo del desnivel

$(\Delta H_A^B)_{\text{calculado}}$  = Desnivel calculado

$(\Delta H_A^B)_{\text{obs}}$  = Desnivel observado

A cada ecuación se le asignan pesos inversamente proporcionales a la distancia existente entre los puntos observados.

Se realiza un primer ajuste y en función de los resultados se analizan los errores groseros y se eliminan de visuales oportunas, realizando iteraciones y eliminando las visuales que sucesivamente aporten mayor error al ajuste.

Finalmente se obtienen las altitudes ajustadas y las precisiones relativas de los puntos de la red básica. Estas precisiones (como en el caso de cálculo planimétrico) son precisiones internas, es decir precisiones relativas.

Si se tienen en cuenta las desviaciones típicas de los puntos fijos, la precisión absoluta de los puntos de la red, será la componente cuadrática de ambos parámetros; de las desviaciones típicas altimétricas, de los puntos considerados fijos y de la precisión altimétrica de cada punto obtenida en el ajuste de la red básica.



De este modo, las precisiones absolutas altimétricas de cada punto de la red se calcularán haciendo la componente cuadrática del error relativo total de cada punto y la precisión absoluta de los puntos fijos:

$$\sigma_H = \sqrt{\sigma_{H \text{ origen}}^2 + e_{\Delta H}^2}$$

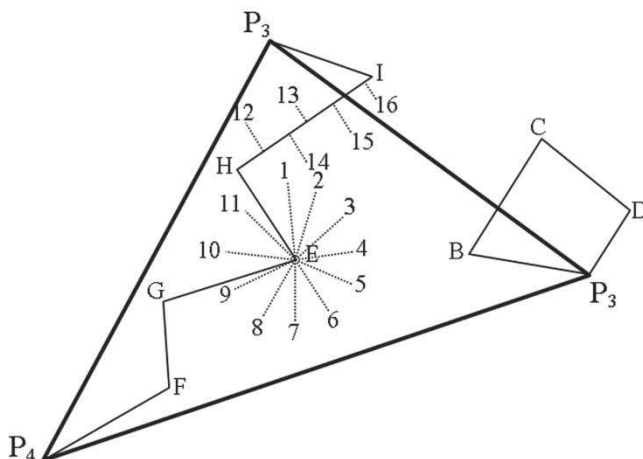
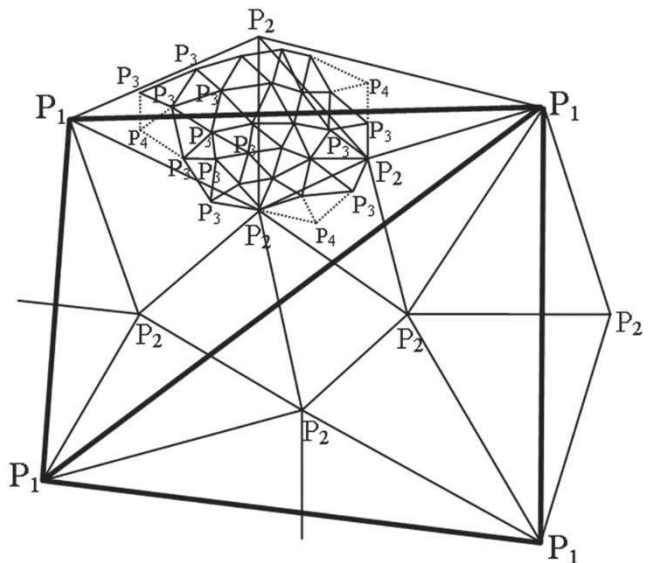
### 3.3.3. Puntos complementarios

Para completar el levantamiento puede ser necesario densificar la red básica con puntos complementarios que permitan dar cobertura total a la zona de trabajo y evitar zonas de calvas.

Las coordenadas de estas nuevas bases, que surgen a lo largo del trabajo, se obtienen mediante intersecciones múltiples, con observaciones de dirección y de distancia, a partir de los puntos de la red básica y tratando los datos de estas observaciones con ajustes mínimo cuadráticos.

Las precisiones internas de estos puntos se obtienen a partir del ajuste de las observaciones realizadas. Para determinar su precisión absoluta es necesario componer cuadráticamente las precisiones obtenidas del ajuste de las intersecciones múltiples correspondientes, con las precisiones relativas de los puntos de la red básica utilizados para dichas intersecciones

Densificar: red básica con intersecciones múltiples, con observaciones de dirección y de distancia con ajuste MMCC



Densificación de una triangulación de tercer y cuarto orden mediante poligonal cerrada, una radiación y un levantamiento por coordenadas rectangulares

## 4. MÉTODO DE INTERSECCION <sup>4</sup>

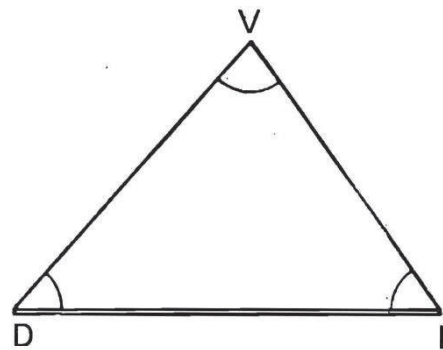
### 4.1. INTERSECCIÓN DIRECTA.

El método denominado de intersección directa es uno de los más precisos de todos los conocidos, utilizable en las triangulaciones topográficas y geodésicas; con él puede situarse un punto, con precisión, en algunas triangulaciones geodésicas de primer orden, a distancias, en algunos casos, hasta de centenares de kilómetros. La principal aplicación del método, en topografía, es el levantamiento de puntos **-vértices-**, con la mayor exactitud posible para que puedan servir de apoyo a los otros métodos menos precisos.

Los instrumentos que se usan son exclusivamente teodolitos (o estaciones totales) con apreciaciones variables; desde un minuto como mínimo, en intersecciones complementarias, hasta  $0",1$ , propios de los teodolitos perfeccionados, en la geodesia de primer orden.

Se funda el método en partir de un lado **DI**, denominado **base**, de longitud y acimut conocidos, estacionando en los extremos para medir con el mayor rigor posible, los ángulos que forman con la base las visuales a un punto **V** que tratamos de levantar.

En el **triángulo VDI** se conocerá después de la observación un lado y los dos ángulos adyacentes, y por consiguiente estará definido; para comprobación se mide además, casi siempre, el ángulo del vértice **V**; la suma de los tres deberá ser  $180^\circ$  o  $200^g$ ; la diferencia, si es aceptable, se reparte para el cálculo por terceras partes entre los tres ángulos del triángulo,



La notación empleada en la figura es la que se adopta generalmente; en ella se designa por **V** el vértice que pretendemos levantar; **D**, el extremo de la derecha de la base, vista desde **V**, e **I**, el que se ve a la izquierda, con esta notación se facilita el cálculo y se impiden equivocaciones.

Cada uno de los lados **VI** o **VD**, que acabamos de calcular, pueden servir a su vez de base para nuevos levantamientos.

#### 4.1.1. Elipse de tolerancia.

El vértice **V** quedará determinado con cierta imprecisión, ya al cometerse un error en la medida de los ángulos **D** e **I** en lugar de tomar la verdadera posición de los lados **DV** e **IV** tomaremos una errónea situada en el interior de las rectas, trazadas de puntos en la figura siguiente, que forman un ángulo **e''** (máximo error) a uno y otro lado de la posición correcta.

El punto **V**, intersección de las dos visuales, tendrá que ser interior al cuadrilátero que forman las posiciones extremas al cortarse, pero teniendo en cuenta que la probabilidad de producirse el error máximo en **D** y en **I** simultáneamente, es mucho menor que la de producirse en un solo lado, disminuirémos la tolerancia redondeando

<sup>4</sup> F. Domínguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

los vértices del cuadrilátero y sólo daremos por válido al punto V cuando resulte interior a la curva así trazada.

Dada la longitud de los lados DV e IV y la pequeñez del ángulo e, el cuadrilátero circunscrito podremos considerarlo como un paralelogramo y la curva de tolerancia como la elipse inscrita.

Esta elipse puede dibujarse a gran escala, para conocer la indeterminación de un punto levantado por intersección y más adelante hemos de hacer uso de esta construcción para determinar la situación más probable de uno levantado desde varias bases.

Sea V el punto levantado por intersección, y procediendo a la inversa vamos a dibujar una elipse, en cuyo interior podamos afirmar se encuentra el verdadero punto, que hubiésemos obtenido de no haber cometido error.

Tracemos las rectas VD y VI que formen el ángulo V deducido de la observación; los lados verdaderos se encontraran a uno y otro lado de los dibujados y serán prácticamente paralelos a ellos a una distancia máxima  $l e$ , siendo  $l$  la longitud del lado respectivo y  $e$  el máximo error angular, expresado en radianes, que pudiera cometerse con el instrumento en la medida del ángulo.

Con el teodolito, en una visual se comete un error angular:

$$e''_a < \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_i^2}$$

y expresado en radianes  $e_a = e''_a / \rho''$

y como en la medida del ángulo intervienen dos visuales, el máximo error tolerable será:

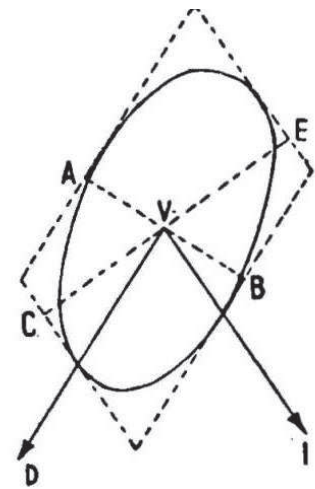
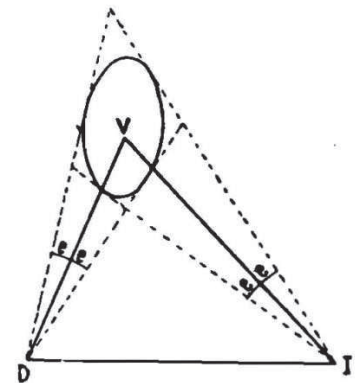
$$e < e_a \sqrt{2}$$

Según esto, en la figura levantemos las perpendiculares VA y VB al lado VD, y sobre ellas llevemos las magnitudes  $VA=VB=l e$ ;  $l$ =longitud del lado VD, lo conoceremos por el cálculo del triángulo y  $e$  lo habremos determinado como se acaba de indicar; por los extremos A y B tracemos rectas paralelas a VD. De igual modo, sobre las perpendiculares VC y VE al lado VI llevaremos las magnitudes  $VC=VE=l' e$ ;  $l'$  no será igual a  $l$  y por eso las paralelas a VI trazadas por los extremos E y C formaran, al cortar a las antes dibujadas, un paralelogramo, que será un rombo en el caso  $l = l'$ .

La elipse inscrita en el paralelogramo, a la escala a que la hayamos dibujado, dará la zona de incertidumbre de la verdadera posición del punto V.

#### 4.1.2. Error máximo.

Como máximo error en la situación de un punto levantado por intersección, admitiremos el semieje mayor de la elipse de tolerancia, que vamos a determinar en



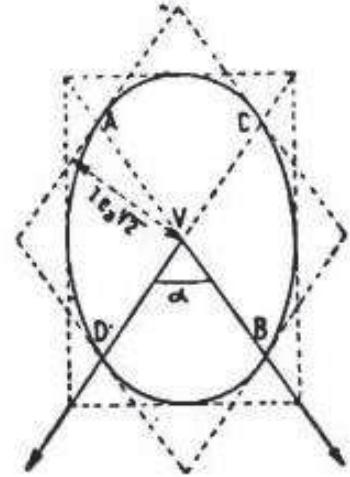
función del ángulo agudo  $\alpha$  de los dos suplementarios que forman las visuales al cortarse, de la longitud  $l$  de estas, que admitiremos sean las dos de la mayor longitud posible y, por tanto, iguales entre sí y el error angular  $e_a$  de una visual con el instrumento empleado.

Siendo iguales los dos lados, el paralelogramo circunscrito a la elipse será un rombo y se determinará trazando paralelas a uno y otro lado de las visuales, a la distancia  $l e_a \sqrt{2}$ , como antes vimos.

Las rectas AB y CD, prolongación de las visuales, serán dos diámetros conjugados de la elipse inscrita.

La longitud de estos semidiámetros será:

$$V A = \frac{l e_a \sqrt{2}}{\text{sen } \alpha}$$



el semieje mayor podremos determinarlo aplicando a la elipse las dos propiedades siguientes:

1º: el área del rectángulo circunscrito (de lados paralelos a los semiejes) es igual a la del rombo antes construido (de lados paralelos a los semidiámetros conjugados), y

2º : la suma de los cuadrados de los semidiámetros conjugados es constante.

Llamando  $a$  y  $b$  a los semiejes y expresando las dos propiedades enunciadas, tendremos:

$$\begin{cases} a b = \overline{V A}^2 \text{ sen } \alpha \\ a^2 + b^2 = 2 \cdot \overline{V A}^2 \end{cases}$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas fácil de resolver; multiplicando, en efecto, por 2 los dos miembros de la primera ecuación y sumándola y restándola de la segunda, se obtiene:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= 2 \cdot \overline{V A}^2 (1 + \text{sen } \alpha) \\ (a - b)^2 &= 2 \cdot \overline{V A}^2 (1 - \text{sen } \alpha) \end{aligned}$$

o sea, prescindiendo de los valores negativos:

$$\begin{aligned} a + b &= \overline{V A} \sqrt{2} \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} \\ a - b &= \overline{V A} \sqrt{2} \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \end{aligned}$$

y recordando que:

$$\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \text{sen } \alpha} + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha} \right] = \cos \frac{\alpha}{2}$$

y que:

$$\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right] = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

tendremos como valores de los dos semiejes:

$$a = V A \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$b = V A \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

Únicamente nos interesa el mayor de los semiejes, en el que, sustituyendo V A por el valor antes hallado, nos da:

$$a = \frac{2 l e_a \cos \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \alpha}$$

y sustituyendo  $\operatorname{sen} \alpha$  por su igual  $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ :

$$a = \frac{l e_a}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

a semieje mayor

Esta fórmula expresa la gran trascendencia del ángulo  $\alpha$  en la determinación del vértice V. Como hemos designado por  $\alpha$  el ángulo agudo de las visuales, interesa se aproxime al recto para que el denominador alcance el mayor valor, que en el caso límite de  $\alpha = 90^\circ$  será  $l e_a \sqrt{2}$

En lo expuesto el ángulo  $\alpha$  de intersección es menor de  $90^\circ$ . Si fuera  $92^\circ 53' 24''$  el ángulo en V que permite la obtención de la incertidumbre máxima sería  $87^\circ 06' 36''$ , es decir el suplemento.

En cambio, si  $\alpha$  fuese  $22^\circ$ , el error, sería, aproximadamente,  $a = 5 l e_a$  considerado como límite tolerable, señalándose el ángulo de  $22^\circ$ .

La incertidumbre depende de  $l$ ,  $e_a$ , y  $\alpha$ . El comportamiento de la incertidumbre aumenta al aumentar la longitud de la visual, también con el error angular y disminuye al aumentar el ángulo de intersección ya que el valor del seno aumenta con el valor del ángulo.

Como conclusión, la intersección directa será tanto más precisa cuanto más corta sean las visuales al punto a determinar, y cuanto mayor sea la precisión del instrumento. No debemos olvidar que las visuales corta incrementan el error de dirección.

Como condición general se acepta que **un ángulo de intersección no puede ser menor de  $30^\circ$** .

### 4.1.3. Longitud máxima de las visuales.

Utilizando la fórmula anterior, podremos calcular la longitud máxima de las visuales para que el error tolerable carezca de representación gráfica.

Para fijar el criterio sobre lo que cabe exigir a cada aparato, vamos a suponer dos intersecciones, ambas para un plano a escala 1:5.000, utilizando, en una, un teodolito de nonios, con anteojo de 25 aumentos, nivel de 30" de sensibilidad y apreciación de 30" en las lecturas, mientras en la otra se emplea un teodolito de micrómetro óptico de 28 aumentos, 20" de sensibilidad y 1" de apreciación.

Con uno y otro instrumento debe practicarse la regla de Bessel y en intersecciones muy precisas, cuando menos dos reiteraciones para atenuar los errores de puntería y lectura; supondremos no se hace sino una sola vuelta de horizonte con inversión de anteojo, como es usual en trabajos de topografía.

*Error de verticalidad.* – Viene dado por la fórmula  $\frac{s}{12}$  o sea:

$$\epsilon_v < \frac{30}{12} = 2''.5 \quad \text{y} \quad \epsilon'_v < \frac{20}{12} = 1''.67$$

Con niveles de coincidencia de burbuja, en el segundo teodolito, el error máximo de verticalidad se reduciría a 0",25.

*Error de dirección.* Aunque siempre importante este error, no lo es tanto como en el método itinerario, como consecuencia de la larga longitud de los lados: poniéndonos en casos desfavorables de un kilómetro con el primer teodolito y de 10 con el segundo, puesto que pretendemos hallar la máxima distancia, y suponiendo de 0,05 metros la desviación (suma de los errores de estación y señal), tendremos:

$$\epsilon_d < \frac{0,05}{1.000} 206265 = 10'' \quad \text{y} \quad \epsilon'_d < \frac{0,05}{10.000} 206265 = 1''$$

*Error de puntería.* Como se hacen dos punterías, una con el anteojo normal y otro

invertido, dividiremos por  $\sqrt{2}$  el resultado de la fórmula  $\frac{10''}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right)$  y obtendremos para ambos teodolitos, respectivamente:

$$\epsilon_p < 0''.57 \quad \text{y} \quad \epsilon'_p < 0''.53$$

*Error de lectura.* El error máximo de lectura con un nonio en el primer teodolito es de 20", y como se hacen cuatro lecturas (dos en cada nonio en las dos posiciones del anteojo), el máximo error será

$$\epsilon_l < \frac{20''}{\sqrt{4}} = 10''$$

Con el segundo teodolito, si es del tipo Wild o Kern, solo se hace una lectura en el micrómetro óptico, cada vez con error inferior a 2/3 de 1", y al repetirlo con antejo invertido:

$$e'_p < \frac{0'' \cdot 67}{\sqrt{2}} = 0'' \cdot 47$$

*Error angular de una visual.* El máximo error angular de una visual con uno y otro instrumento, será

$$e''_a < \sqrt{\epsilon_v^2 + \epsilon_d^2 + \epsilon_p^2 + \epsilon_l^2} = 14'' \quad e''_{a'} < \sqrt{\epsilon_v'^2 + \epsilon_d'^2 + \epsilon_p'^2 + \epsilon_l'^2} = 2'' \cdot 1$$

Y expresado en radianes:

$$e_a < \frac{14}{206265} = 0,00007 \quad e_{a'} < \frac{2,1}{206265} = 0,00001$$

*Limite de los lados.* A la escala 1:5.000, a que suponemos se trabaja, pueden cometerse en el terreno errores de 1 metro, que equivalen a 0,2 milímetros del plano; aplicando la fórmula del error máximo para el ángulo a más desfavorable, tendremos para el primer aparato:

$$l < 1 / 5e_a = 2.857 \text{ m}$$

o en números redondos, cerca de 3 kilómetros para ángulos extremadamente agudos.

El segundo teodolito podrá utilizarse en iguales circunstancias hasta distancias de:

$$l < 1 / 5e_{a'} = 20.000 \text{ metros}$$

Los limites hallados aún pueden ampliarse sin inconveniente, ya que se han calculado bajo el supuesto de que el ángulo agudo que forman las dos visuales al cortarse es solo de 22,5°, que no se presentara sino por muy rara excepción, y además, obtuvimos el error  $e$  bajo el supuesto de haber medido únicamente los ángulos D e I; como también se mide el V y se reparte por tercios del error de cierre, mejora la precisión de la medida y se disminuye la magnitud de la elipse.

En algunos casos necesitaremos calcular la longitud máxima de de la visual a la que podemos observar el punto V. Para ello debemos conocer la incertidumbre (o error máximo) permitida en dicho punto. Podrá venir expresada por el error gráfico (0,2 mm) a la escala, o por una determinada especificada en el pliego de condiciones del trabajo. La longitud máxima se calculará con las características del instrumento previsto, teniendo en cuenta que se debe aplicar regla de Bessel en la observación de la vuelta al horizonte.

$$L = \frac{e \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{V}}{2}}{e_a}$$

#### 4.1.4. Método de resolución del triángulo aplicando el teorema del seno.

A partir de los acimutes calculados desde el punto de estación al punto desconocido, se pueden obtener los ángulos en los vértices de estación

$$A = \theta_A^B - \theta_A^V$$

$$B = \theta_B^V - \theta_B^A$$

La distancia AB también es conocida ya que:

$$D_A^B = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

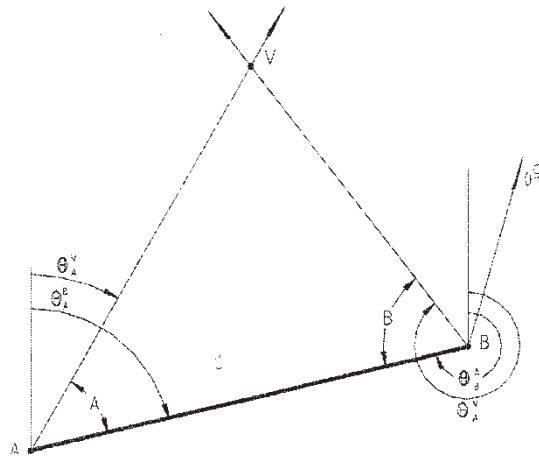
El problema de la intersección directa queda determinado con el cálculo de las distancias AV y BV. Los acimutes ya los tenemos calculados.

En el triángulo ABV, se cumple

$$\frac{D_{rA}^V}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{D_{rA}^B}{\text{sen}\hat{V}} = \frac{D_{rB}^V}{\text{sen}\hat{A}}$$

$$D_{rA}^V = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{V}} D_{rA}^B$$

$$D_{rB}^V = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{V}} D_{rA}^B$$



El ángulo en el vértice puede deducirse. En un triángulo la suma de los tres ángulos ha de ser 200°.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{V} = 200^\circ$$

$$\hat{V} = 200 - (\hat{A} + \hat{B})$$

Conocidos los tres ángulos del triángulo, y las tres distancias en el mismo, el problema ha quedado resuelto.

**4.1.5. Cálculo de coordenadas.**

Las coordenadas X, Y del punto V las obtendremos:

a) Partiendo del punto A:

Se calculan los incrementos de coordenadas entre A y V:

$$\Delta x_A^V = D_{rA}^V \cdot \text{sen}\theta_A^V$$

$$\Delta y_A^V = D_{rA}^V \cdot \text{cos}\theta_A^V$$

Las coordenadas de V vendrán dadas por:

$$X_V = X_A + \Delta x_A^V$$

$$Y_V = Y_A + \Delta y_A^V$$



b) Partiendo del punto B:

$$\Delta x_B^V = D_{rB}^V \cdot \text{sen} \theta_B^V$$

$$\Delta y_B^V = D_{rB}^V \cdot \text{cos} \theta_B^V$$

$$X_V = X_B + \Delta x_B^V$$

$$Y_V = Y_B + \Delta y_B^V$$

Las coordenadas que obtengamos por A y por B han de ser iguales. Con este procedimiento comprobamos el cálculo, pero no hay ninguna comprobación de datos de campo. No olvidemos que no existe redundancia. En una intersección simple la solución es única.

## 4.2. INTERSECCIÓN INVERSA<sup>5</sup>

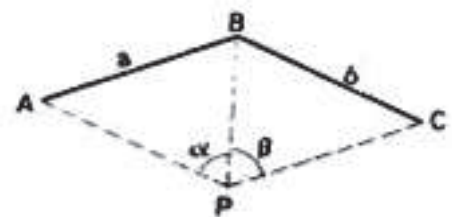
En la intersección directa que hemos estudiado, para levantar un punto se hizo estación en los extremos de la base sin ser indispensable, teóricamente, estacionar en él. En la intersección inversa, por el contrario, se estacionan únicamente en el punto que ha de levantarse y no es necesario estacionar en los extremos de la base.

Generalmente la intersección inversa se efectúa con teodolito y se emplea para obtener puntos complementarios de los hallados por intersección directa. Adopta dos formas principales:

- Problema de *Pothenot*, o también *problema de la carta* o de *vértice de pirámide*, conocida también con el nombre de *trisección inversa*
- Método de *Hansen* menos usado.

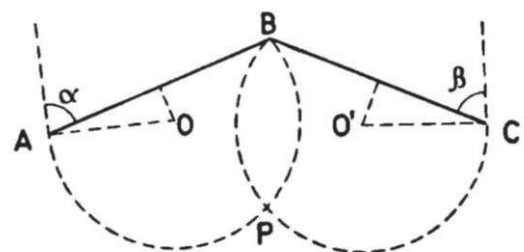
### 4.2.1. Problema de Pothenot o trisección inversa.

Consiste este método en estacionar el teodolito en el punto P que se trata de levantar y dirigir visuales a tres vértices conocidos A, B y C, midiendo los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ; con estos datos es posible situar el punto P resolviendo el problema gráfico o analíticamente.



Resolución gráfica. Se parte del supuesto de que los vértices A, B y C en que se apoya el levantamiento, son de coordenadas conocidas y están ya situados en el plano.

Dibujadas de este modo las rectas AB y BC basta construir sobre ellas los arcos capaces de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. Para ello trazaremos a partir de AB el ángulo  $\alpha$  de lado opuesto al del punto P, levantando la perpendicular  $A0$  a la recta dibujada hasta que corte a la mediatriz de AB; el punto O,

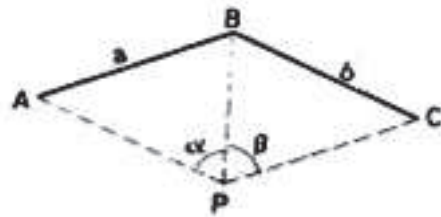


<sup>5</sup> F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

de intersección, será el centro del arco capaz del ángulo  $\alpha$ . Igualmente construiremos sobre BC el arco capaz del ángulo  $\beta$  y la intersección de los dos arcos nos dará el punta P que buscamos.

**Otro método gráfico**, es dibujar aparte las tres rectas concurrentes que formen entre si los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , en igual situación que la observada en el campo y colocando el gráfico sobre el AB y BC haremos, por tanteos, que cada recta pase por el punto A B o C que le corresponda.

**Resolución numérica.** Necesitamos conocer previamente las longitudes de AB y BC y el ángulo B. Si no se conociesen por operaciones anteriores, se deducirá la longitud y acimut de los dos lados en función de las coordenadas de los vértices. El ángulo B se deducirá por diferencia de acimutes. Llamando  $a$  y  $b$  las longitudes AB y BC, por la proporcionalidad de los lados a los senos de los ángulos opuestos, deduciremos de los triángulos BPA y BPC:



$$BP = \frac{a \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \beta} ;$$

O sea

$$\frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} ;$$

el primer miembro, siempre positivo y de valores conocidos, podrá igualarse a la tangente de un ángulo auxiliar  $\gamma$ , menor de  $90^\circ$ , ángulo que podremos conocer calculando la expresión

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha} ;$$

que sustituida en la anterior nos da:

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{tg} \gamma ;$$

esta expresión puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} C} = \frac{1 + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma} ;$$

en el primer miembro transformaremos la suma y la diferencia de senos en producto, y teniendo en cuenta en el segundo que  $\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ :

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + C) \cos \frac{1}{2} (A - C)}{2 \cos \frac{1}{2} (A + C) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - C)} = \frac{\operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} 50^{\circ} \operatorname{tg} \gamma}$$

que simplificada nos da:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - C)} = \operatorname{tg} (50^{\circ} + \gamma)$$

de donde deducimos:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - C) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C) \cot (50^{\circ} + \gamma)$$

$\frac{1}{2} (A + C)$  es conocido, deduciéndose su valor del cuadrilátero A B C P:

$$\frac{1}{2} (A + C) = 200^{\circ} - \frac{B + \alpha + \beta}{2} = M$$

valor que trasladado a la fórmula anterior nos permitirá deducir  $\frac{1}{2} (A - C) = N$ , obteniéndose en definitiva:

$$A = M + N$$

$$C = M - N$$

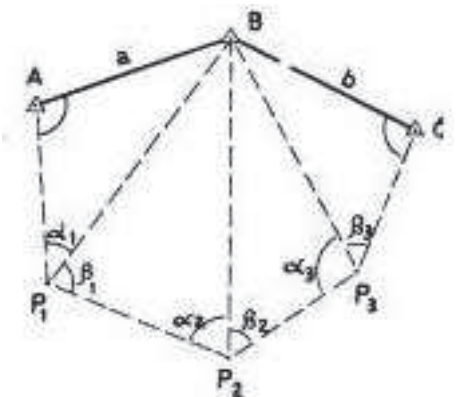
$$200^{\circ} = 180^{\circ}$$

Una vez hallados los valores de los ángulos A y C deduciremos las coordenadas del punto P por el método ya indicado para la intersección directa apoyándonos en las bases *a* y *b*, debiendo coincidir *exactamente* los valores que se obtengan, permitiéndonos comprobar que el cálculo ha sido correcto, pero que no dirá nada respecto a las observaciones de campo, ya que los datos son los estrictamente indispensables para la resolución matemática del problema; por eso se aconseja tomar siempre algún elemento de comprobación como por ejemplo la visual a un cuarto vértice o dirigir una visual directa al punto P desde uno de los de apoyo, método este último que constituye un caso de *intersección mixta*.

#### 4.2.2. Problema de Pothnot múltiple.

Cuando hayan de levantarse varios puntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  por intersección inversa puede simplificarse el trabajo calculándose simultáneamente sin necesidad de resolver un Pothnot para cada punto.

Lo mismo que en el caso anterior nos apoyaremos en tres vértices, A, B, y C, conociendo, bien directamente o deducidas de sus coordenadas, las longitudes y acimutes *a* y *b* y por tanto el ángulo



B; en el campo se medirán los ángulos  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$  de los triángulos que se formen se deduce:

$$\frac{a}{BP_1} = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } A}; \frac{BP_1}{BP_2} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \beta_1}; \frac{BP_2}{BP_3} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } \beta_2}; \frac{BP_3}{b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } \beta_3}$$

multiplicando miembro a miembro estas expresiones y despejando  $\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$  tendremos:

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{a \text{ sen } \beta_1 \text{ sen } \beta_2 \text{ sen } \beta_3}{b \text{ sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2 \text{ sen } \alpha_3}$$

El segundo miembro es positivo y conocido, por tanto podremos igualarlo a la tg de un ángulo menor de  $100^\circ$  que calcularemos por la fórmula:

$$\text{tg } \gamma = \frac{a \text{ sen } \beta_1 \text{ sen } \beta_2 \text{ sen } \beta_3}{b \text{ sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2 \text{ sen } \alpha_3}$$

valor que sustituido en la expresión anterior nos da:

$$\frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = \text{tg } \gamma$$

A partir de este momento procederemos exactamente igual que en el caso anterior hasta llegar a la expresión:

$$\text{tg } 1/2 (A - C) = \text{tg } 1/2 (A + C) \cot (50^\circ + \gamma)$$

Llamando  $n$  al número de lados del polígono  $ABC P_1 P_2 P_3$  tendremos:

$$M = 1/2 (A + C) = 100^\circ (n - 2) - \frac{B + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \dots}{2}$$

Sustituyendo este valor de  $M$  en las fórmulas anteriores nos permite hallar  $1/2 (A - C) = N$ , deduciéndose los valores:

$$A = M + N$$

$$C = M - N$$

Partiremos ahora de la base  $a$  para calcular el triángulo  $P_1BA$  y obtener las coordenadas de  $P_1$ , tomando después  $BP_1$ ; como base se deducirán las de  $P_2$  y así sucesivamente hasta llegar a  $C$  cuyas coordenadas, así como la longitud y acimut de  $BC$ , deberán coincidir matemáticamente con las ya conocidas, como comprobación de que no ha habido error de cálculo.

**4.2.3. Problema de Hansen.**

La principal aplicación del método de Hansen consiste en trasladar una base A B, de longitud y acimut conocidos, a otra P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> que sirva de apoyo a nuestro trabajo, por intersección inversa, o sea sin hacer más estaciones que las de P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> donde mediremos los ángulos α<sub>1</sub>, β<sub>1</sub>, α<sub>2</sub>, β<sub>2</sub>, respectivamente.

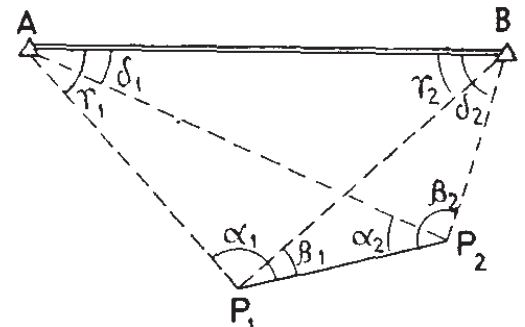
Con frecuencia se utiliza como base de un levantamiento un lado geodésico, que limitan, por ejemplo, las torres de las iglesias de dos pueblos, lado excesivamente grande para nuestro trabajo y alejada de él, por lo que interesa reducirle y trasladarle a P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>.

También tiene aplicación cuando pretendemos situar un punto P<sub>1</sub> y desde él no se vean sino sólo dos vértices A y B pudiendo sustituir el tercero del método *Pothenot* por uno auxiliar P<sub>2</sub> pero con la condición de estacionar en él.

**Resolución gráfica.** Para resolver el problema gráficamente comenzaremos por dibujar una figura semejante a la propuesta, partiendo de una recta arbitraria P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> homóloga a la verdadera; en sus extremos se construyen los ángulos α<sub>1</sub> y α<sub>2</sub> la intersección de los lados dará el punto A. De igual modo trazaremos los ángulos β<sub>1</sub>, β<sub>2</sub>, obteniendo el punto B y uniendo A con B se tendrá la recta homóloga a la de la base; la relación de esta recta en la figura auxiliar a la del plano, será la razón de semejanza entre la figura dibujada y la que pretendemos hallar.

Bastará ahora, procediendo a la inversa, apoyamos en la base *b* del plano y construir una figura semejante a la que acabamos de obtener, situando de este modo los puntos P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>.

No es necesario hacer notar que un método tan impreciso no podrá recomendarse sino en muy limitadas circunstancias y nunca cuando P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> hayan de servir de apoyo para otros levantamientos.



**Resolución numérica.** La resolución analítica tiene un fundamento semejante al de la resolución gráfica; partiremos de un valor arbitrario de P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> por ejemplo la unidad, calculando a partir de él una figura semejante a la del terreno, cuyos lados encerramos en un paréntesis para diferenciarlos de los verdaderos.

Del triángulo (AP<sub>1</sub>P<sub>2</sub>) haciendo (P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>) = 1 deducimos:

$$(AP_1) = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{y} \quad (AP_2) = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

De la misma manera del triángulo (BP<sub>1</sub>P<sub>2</sub>) se obtiene:

$$(BP_1) = \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)} \quad \text{y} \quad (BP_2) = \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)}$$

En los triángulos (P<sub>1</sub> A B) y (P<sub>2</sub> A B) acabamos de calcular dos lados en cada uno de ellos y si es conocido el ángulo comprendido, podremos obtener, por tanto, los ángulos que buscamos por las fórmulas:

$$\text{tg } \delta_1 (\alpha_1 - \alpha_2) = \text{tg } \delta_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{(BP_1) - (AP_1)}{(BP_1) + (AP_1)}$$

en los segundos miembros se verifica:

$$1/2 (\gamma_1 + \gamma_2) = 100g - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = M_1 \quad \text{y} \quad 1/2 (\delta_1 + \delta_2) = 100g - \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2} = M_2$$

sustituyendo estos valores en las expresiones anteriores deducimos:

$$1/2 (\gamma_1 - \gamma_2) = N_1 \quad \text{y} \quad 1/2 (\delta_1 - \delta_2) = N_2$$

obteniendo en definitiva:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= M_1 + N_1 & \delta_1 &= M_2 + N_2 \\ \gamma_2 &= M_1 - N_1 & \delta_2 &= M_2 - N_2 \end{aligned}$$

Como los ángulos son iguales en la figura semejante que hemos calculado y en el terreno podremos obtener ahora las coordenadas del punto  $P_1$ . tomando AB por base, cuya longitud y acimut hemos supuesto conocidos; después hallaremos los del punto  $P_2$  apoyándonos bien en  $BP_1$  o en la misma base AB, el resultado deberá ser idéntico y comprobará el cálculo.

Hemos de repetir en el método de *Hanssen* la misma salvedad que hicimos en el de *Pothenot*, y ahora con mayor motivo sobre la falta de comprobación de los trabajos de campo.

### Comprobaciones en la intersección inversa.

Cualquier error que se cometa en el campo en los diversos casos de intersección inversa quedará sin comprobación en el gabinete, donde únicamente podemos cerciorarnos de que el cálculo se ha hecho sin equivocación; por eso, siempre que se pueda en la intersección inversa, debe tomarse algún dato supletorio, que suele ser el dirigir, por lo menos, una visual más de las indispensables para el cálculo.

Por ejemplo, en el método *Pothenot*, si dirigimos visuales a cuatro vértices en vez de tres, podremos resolver cuatro problemas de *Pothenot*, que se forman por combinación de los cuatro vértices tres a tres; esto permite no solamente comprobar el trabajo, sino compensar la figura como se estudiará más adelante, obteniendo con ello resultados más precisos.

En este caso, la visual supletoria al cuarto vértice también evita el riesgo de que el punto esté situado en las proximidades del círculo peligroso de los tres primeros, ya que de los cuatro *Pothenots* que se forman sería mucha casualidad que no hubiera alguno alejado de dicha zona de indeterminación.

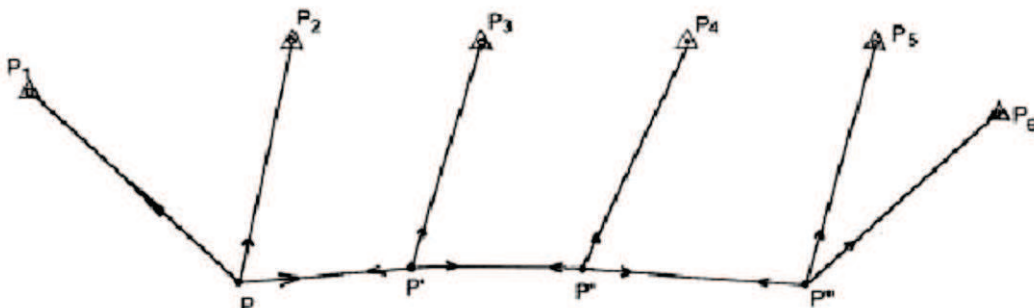
De operar por el método de *Hansen* y dirigir la visual a un tercer vértice desde los dos puntos que tratamos de levantar, podrían plantearse tres problemas *Hansen*, por combinación dos a dos de los tres vértices, un *Pothenot* para cada punto y un *Pothenot* múltiple, teniendo datos suficientes para obtener sobradas comprobaciones, permitiendo, como en el caso anterior, compensar la figura o bien, si no se requiere tanta precisión, hallar las coordenadas de los puntos que buscamos por dos o más métodos diferentes y tomar después el promedio, como definitivo, si los resultados son concordantes.

#### 4.2.4. Intersección mixta.

Una comprobación, aún más satisfactoria en muchas ocasiones que las anteriormente señaladas, la tendríamos si además de estacionar en los puntos que se trata de levantar y dirigir desde ellos las visuales indispensables a vértices conocidos para resolver la intersección inversa, estacionáramos, además, en alguno de estos vértices y dirigimos visuales directas a estos puntos. La intersección entonces recibe el nombre de *mixta* o *lateral*, que tiene el inconveniente, respecto a la intersección exclusivamente inversa, de obligar a desplazarse a alguno de los vértices, aumento de trabajo que en muchas ocasiones es de todo punto inexcusable, como, por ejemplo, en el caso antes citado del traslado de una base por el método de *Hansen*, en el que con frecuencia no basta ni aun la estación supletoria en un vértice, sino que precisa estacionar en los dos, formándose entonces un cuadrilátero con sus dos diagonales, del que se conocen todos los ángulos que éstas forman con los lados y la longitud de uno de éstos o de una diagonal, pudiendo ser compensada la figura por mínimos cuadrados, método el más recomendable para el traslado de bases.

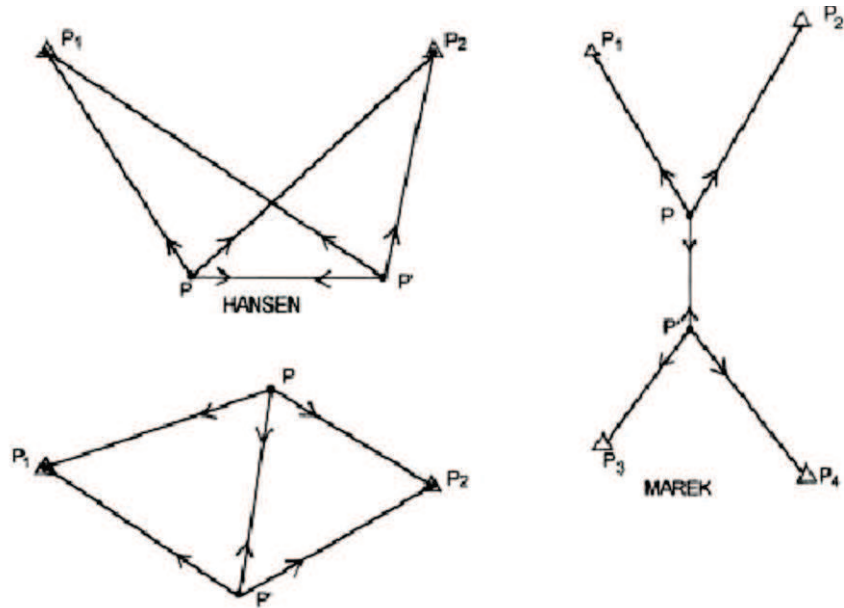
En el caso de trisección inversa puede estacionarse en un vértice como observación supletoria, por ejemplo, en el del centro del *Pothenot* y medir los ángulos que forma la visual al punto con los dos lados adyacentes.

Es posible presentar las intersecciones inversas dadas generalmente en la figura siguiente, esto es desde nuevas direcciones de puntos  $P, P', P'', P''', P''''$ ,... a puntos conocidos  $P_1, P_2 \dots P_6$  son vistos. En estos casos se debe notar que en el primer y último punto, son vistos dos puntos de control conocidos; en los puntos intermedios, además de sus direcciones recíprocas, un vistazo a uno de esos puntos es suficiente.



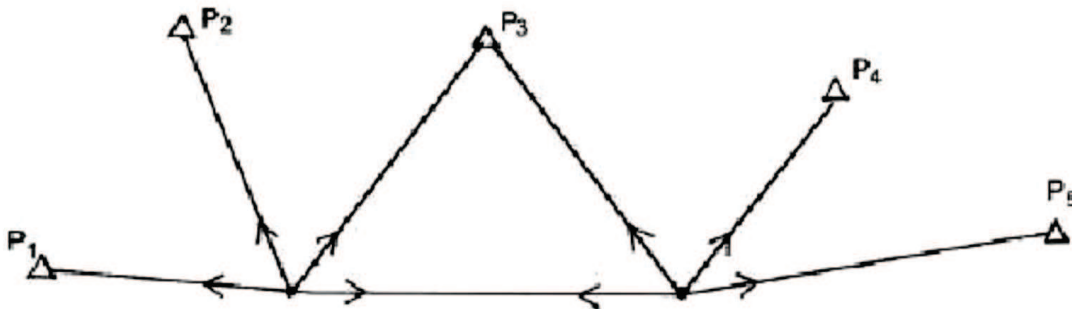
**Intersección Marek**

Donde sólo hay dos puntos nuevos y cuatro puntos de control son vistos, se conoce como la solución **Marek**. Si sólo los dos puntos de control vistos desde los dos puntos nuevos son usados, es llamada la solución **Hansen**. Estos casos son mostrados en la figura.



Más de tres direcciones a los puntos conocidos deben ser vistas desde cada punto nuevo, o que los nuevos puntos serán interconectados por líneas de vista recíprocas, como se muestra en la siguiente figura; aunque cada punto nuevo es determinado por direcciones a tres puntos conocidos, las líneas recíprocas de vista entre los puntos nuevos los incluye en los cálculos de puntos adyacentes

Las configuraciones originalmente cerca de la indeterminación pueden ser mejoradas de esta forma. Las soluciones de este tipo requieren algún tipo de ajuste, bien rigurosamente por cuadrados mínimos o por promedio reiterativo de varias soluciones positivas al tratar de dar más fuerza a los casos alejados de la situación de indeterminación.



**5. TRIANGULACIÓN <sup>6</sup>**

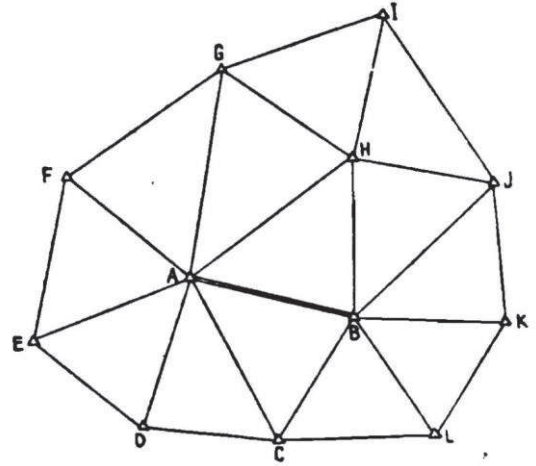
Elegido el método de intersección para el levantamiento de los vértices que han de constituir los puntos fundamentales de todo el trabajo, se partirá según sabemos, de una recta AB denominada base deducida que procuraremos ocupe la parte central del levantamiento; la longitud y acimut de esta recta han de ser conocidos, bien por enlazarla con un lado geodésico, del que se obtendrá una y otra determinación, o

<sup>6</sup> F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada



calculando la longitud a partir de otra recta más corta, denominada *base medida* que se obtendrá por medios directos utilizando siempre la máxima exactitud que sea posible, ya que de ella depende la de todo el levantamiento. El acimut, en este caso, es indispensable determinarle por ejemplo con observaciones por medio de receptores satelitales (GPS).

Como origen de coordenadas se toma, en general, un extremo de la base deducida o del lado geodésico, cuya meridiana servirá de referencia al acimut y daremos a dicho punto coordenadas arbitrarias, con la condición de que resulten positivas las de todo el levantamiento. Conocida la longitud y acimut de la base, se deducirán las coordenadas absolutas del otro extremo. Apoyándonos en la base AB levantaremos el punto C, determinando sus coordenadas, y una vez calculado el triángulo utilizaremos el lado AC como base para levantar el vértice D, y así sucesivamente.



Ya vemos con esto que para el levantamiento de todos los vértices no es indiferente seguir uno u otro camino, debiendo siempre tender a localizar los errores y a determinar cada punta con el mínimo de operaciones escalonadas.

Por este motivo y para tener siempre comprobaciones que nos garanticen de la bondad del trabajo, se enlazan siempre los vértices de modo que la agrupación de triángulos forme un polígono alrededor del punto A; se calcularán aquellos partiendo de la base hacia la derecha, situando los puntos C, D y E, y partiendo hacia la izquierda los H, G, F, y otra vez el E, cuyas coordenadas deberán comprobar, salvo una ligera discrepancia, con las antes halladas.

A su vez los vértices periféricos del polígono servirán de centro de otros nuevos, por ejemplo, el H; dando como definitivos los valores antes obtenidos para HG y HB, tornados como bases, darán para I coordenadas duplicadas que también deberán ser coincidentes.

Así continuaremos formando polígonos que cubran toda la superficie del levantamiento, aunque en la periferia sea preciso dejar algún triángulo suelto, sin que llegue a cerrar polígono, debiendo formar, por tanto, la triangulación una malla continua de triángulos enlazados entre sí.

Una red trigonométrica debe cumplir con dos condiciones: la primera, ser *precisa*, y la segunda, que no es indispensable, ser *homogénea*; entendemos por red precisa aquella cuyos cierres son inferiores a la tolerancia, que se habrá establecido con la condición de que la acumulación de errores no se traduzca al plano; y designamos por red *homogénea* o *compensada* la que es rigurosamente geométrica, por haber distribuido los errores de modo que las medidas cumplan exactamente con las condiciones matemáticas exigidas por la figura de que forma parte; por tanto, con una red de esta clase, se llegará a una solución única para cada vértice, lado o medida,

cualquiera que sea el camino seguido para determinarla, lo que no ocurre en una red sin compensar.

### 5.1. Forma de los triángulos y de los polígonos.

En el estudio del método de intersección vimos que un vértice viene tanto peor determinado cuanto más agudo sea el ángulo formado por las visuales; esto obliga a limitar los ángulos en  $22^\circ$ , -mejor sería  $30^\circ$ -, de cuyo límite no debe descenderse y, a ser posible, ni aun aproximarse.

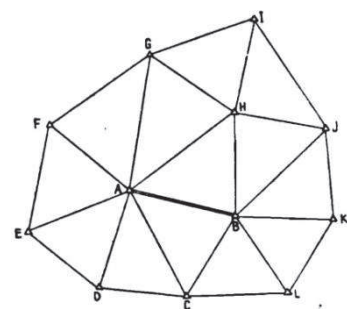
El ángulo más favorable para determinar un punto vimos también era el ángulo recto, sin embargo, tomando esto como regla general, al ser los catetos de un triángulo rectángulo menores que la hipotenusa y tornar esta como base, se reducirá la del triángulo siguiente, que si también es recto acortará aún más la nueva base para el triángulo que en ella apoye y no será posible constituir la red.

Por esta causa ha de tenderse, en la elección de vértices, a que los triángulos adopten la forma más regular posible; el ideal sería que todos fuesen equiláteros, forma teórica a la que procuraremos aproximarnos, señalando un límite a los ángulos, en ningún caso inferior al antes establecido.

También ha de limitarse el número de triángulos alrededor de cada vértice; en la figura se ha formado un pentágono, un hexágono y un heptágono. De aproximarse todos los triángulos a la forma equilátera obtendríamos hexágonos, tolerándose un triángulo más o menos formando polígonos de cinco, seis o siete lados; nunca será aceptable el cuadrilátero ni tampoco, como no sea excepcionalmente, el polígono de ocho lados.

Aunque teóricamente para la resolución de cada triángulo basta conocer un lado y dos ángulos, se exige siempre en las triangulaciones la medida de los tres ángulos; la diferencia entre su suma y  $180$  grados se denomina *error de cierre* y para el cálculo, si es aceptable, se reparte por terceras partes entre los tres ángulos.

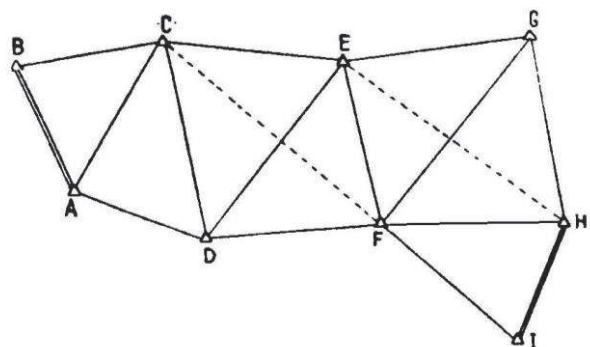
Es conveniente dirigir alguna visual supletoria, como las diagonales DB o HK, en previsión de variar en el gabinete el proyecto de triangulación, sin volver al campo, si así lo aconsejasen los errores de cierre.



### 5.2. Tipos de redes y sus órdenes.

Cuando todo el terreno queda cubierto por una malla de triángulos como la representada en la figura, se dice que la triangulación es en red continua.

También es frecuente el levantamiento de fajas de terreno largas y estrechas en las que está más indicada la forma de cadena.



Con este tipo de triangulación deben medirse dos bases en los extremos AB y HI, ya que al no obtenerse cierres de los polígonos no se podrá, de otro modo, comprobar o, en su caso, compensar el trabajo.

Los acimutes se refieren exclusivamente a una de las dos bases, la que se hubiese orientado con receptores satelitales, por ejemplo la AB, ya que si hubiésemos orientado también la HI el origen de acimutes, formaría un ángulo con el de AB igual al de la convergencia de meridianos en los dos puntos desde observaciones con GPS.

La comprobación, por eso, se reducirá a la longitud que se deduzca, por el cálculo, para la base de llegada, que deberá coincidir con la obtenida por medida directa. Si se desea comprobar, además, el arrastre de acimutes, deberá corregirse el obtenido con GPS para HI en la convergencia de meridianos, precisándose para ello conocer sus latitudes y la diferencia de sus longitudes geográficas. Con objeto de tener comprobaciones intermedias en la cadena, se aconseja, siempre que sea posible, observar la segunda diagonal de cada cuadrilátero formado por dos triángulos sucesivos.

Por ejemplo, la CF en el cuadrilátero CDFE, y la EH en el IEFHG.

En el primero de los cuadriláteros citados, tomando como base el lado CD, situaremos el vértice E, y apoyándonos después en el lado ED, determinaremos el vértice F, cuyas coordenadas deberán coincidir con las calculadas directamente desde CD utilizando la diagonal auxiliar, supliendo, de este modo, la comprobación, a la que se obtendría por el cierre de los polígonos. Si bien en las triangulaciones geodésicas se establecen tres órdenes de redes denominados, de mayor a menor, de primero, segundo y tercer orden, de modo que todos los vértices de primero sean también de segundo y todos los de segundo lo sean de tercero, no ocurre, en general, lo mismo en topografía, donde no suele utilizarse sino una sola red, que puede o no apoyarse en la geodesia, según los casos. Sin embargo, en zonas considerablemente extensas, de decenas de miles de hectáreas, como son los planos parcelarios de zonas alargadas con destino a su transformación o colonización, es indispensable establecer una red primaria, de lados comprendidos entre los cuatro y los siete kilómetros, de la mayor precisión posible, de la que formen parte todos los vértices geodésicos que se encuentren en la zona.

Esta red primaria sirve a su vez de apoyo a la red secundaria, de lados más cortos, de longitud variable, según el destino del plano y la escala que se utilice, pero casi nunca inferiores a 1 kilómetro ni superiores a 3. Fuera de estos casos no es frecuente se recurra en topografía a formar redes de varios ordenes, aunque pudiera estar indicado para escalonar mejor los errores.

Lo que sí suele hacerse es situar otros puntos de orden inferior, denominados **puntos trigonométricos complementarios**, en el interior de los triángulos, con objeto de aumentar la densidad de vértices, pero estos puntos ya no forman una red continua, sino que se apoyaran en la triangulación con independencia unos de otros y se levantarán utilizando métodos no tan precisos como en la triangulación.

Dejemos, pues, establecido, como resumen de todo lo expuesto, que la triangulación topográfica adopta dos formas: de *red continua* y de *red en cadena*, y que tanto en uno como en otro caso, si el trabajo es de gran extensión, se apoyara en la geodesia tomando como vértices propios todos los geodésicos enclavados en la zona o en sus

inmediaciones, y solo cuando no aparezcan los suficientes, o en zonas de gran extensión y siempre que se utilicen escalas de 1:10.000 o mayores, como ocurre en todos los trabajos de ingeniería, para los que no tienen suficiente precisión las triangulaciones geodésicas se suplirán o complementaran estas por una *red primaria* de escaso número de triángulos que sirva de apoyo a la *red secundaria*. Como complemento de la triangulación se situarán, si es preciso, en el interior de cada triángulo, cierto número de *puntos trigonométricos complementarios* sin formar red. El conjunto de los vértices, de uno o varios órdenes, y puntos trigonométricos complementarios constituye la red trigonométrica.

### 5.3. Ampliación de bases.

La medida de mayor precisión de un levantamiento ha de ser la de su base, y como es difícil operar con rigor en longitudes tan largas, como suelen ser los lados de una triangulación, se acostumbra a medir una longitud más corta y después ampliarla, por medio de una triangulación auxiliar, hasta enlazarla con la que hemos denominado *base deducida*

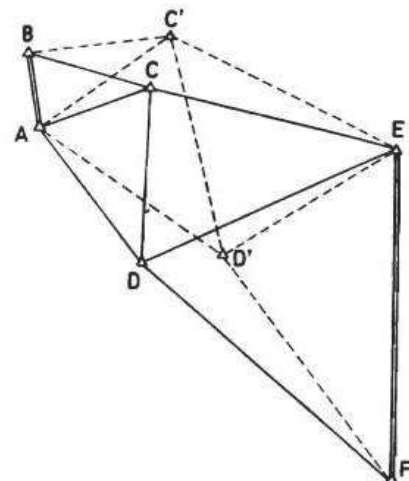
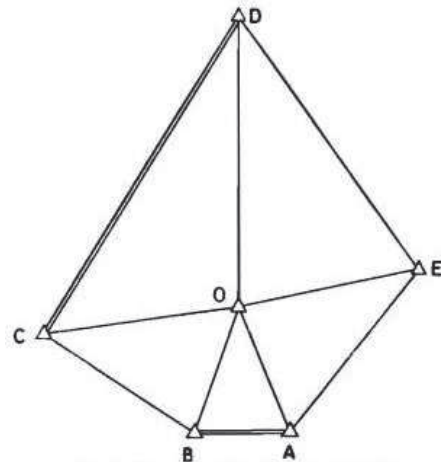
No cabe dar reglas sobre la forma de ampliación, si bien, como se trata del fundamento de todo el trabajo, han de extremarse las precauciones evitando ángulos inferiores a  $30^\circ$  y formando figuras que permitan ser compensadas.

Como norma señalaremos tres métodos que denominaremos de *polígono*, de *doble cadena* y *rómbico* o *alemán*, por orden creciente de amplificación.

Por el método de *polígono* mediremos una base AB sobre la que formaremos un triángulo aproximadamente isósceles AOB cuyos lados OA y OB, ya ampliados, se utilizarán como bases de otros triángulos hasta completar un polígono; el lado CD se tornara como *base deducida*.

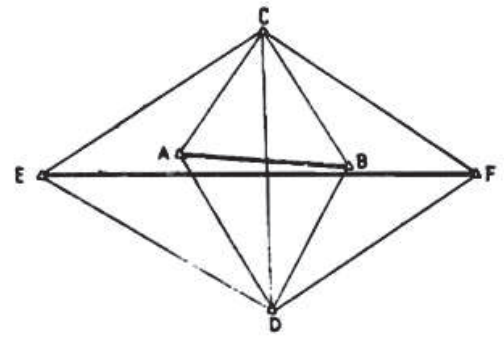
Esta puede calcularse partiendo de la base medida hacia la derecha o hacia la izquierda de la figura, tomando el promedio si la diferencia es pequeña, o mejor, se *compensará* el polígono por el método de mínimos cuadrados, adoptando como valores definitivos los que resulten de la compensación.

El método de *doble cadena* consiste en trazar dos cadenas independientes de triángulos de lados de longitud creciente, la ABCDEF y la ABC'D'EF que enlazan la base medida y la deducida; basta para esto desplazar, algunos metros, los vértices intermedios (C y D en la figura) y repetir la observación, De este modo obtendremos para EF dos medidas que han de resultar concordantes, pudiendo compensar la cadena como si fuese una sola que parte de la base medida y vuelve a terminar



en ella. Este método permite ampliaciones mucho mayores que el anterior.

Finalmente, el método **rómbico o alemán** es el que admite mayores ampliaciones; consiste en medir una base AB y levantar sobre ella, a uno y otro lado, los triángulos ABC y ABD, observando además los ángulos que forman los lados con la segunda diagonal del rombo ACBD. Tomando ahora como base la diagonal CD, se construyen dos nuevos triángulos CDE y CDF, tomando en E y en F, lo mismo que antes, los ángulos



referentes a la diagonal EF. Como base deducida se tomara la diagonal EF; en general, bastara con una o dos ampliaciones pero, si no estuviese suficientemente ampliada, aun la podemos tomar como diagonal menor para formar un nuevo rombo.

Cada uno de los rombos, en los que se habrán medido sus cuatro ángulos, y los que forman con sus lados las dos diagonales, deberán compensarse preferentemente por mínimos cuadrados, obteniéndose la base deducida con la mayor exactitud y ampliación.

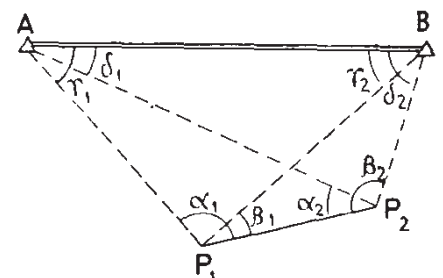
En muchos casos podrá no estar indicado ninguno de estos métodos y a veces convendrá seguir un método mixto, según sea la naturaleza del terreno, por lo que difícilmente pueden darse reglas fijas para la ampliación de bases.

#### 5.4. Reducción de bases.

Muchas veces, en lugar de medir una base y ampliarla, puede ser preferible tomar un lado geodésico y reducirle; el camino a seguir en este caso es el inverso del indicado para la ampliación.

Un método que puede recomendarse es el de aplicar el problema de *Hansen* con estaciones supletorias, con el que la base AB se reduce a la  $P_1P_2$ ; no permite este sistema grandes reducciones, ni tampoco suele ser necesario, bastando reducir el lado geodésico a la tercera o cuarta parte, lo que puede conseguirse por el método indicado. En general no bastará la aplicación estricta del método de *Hansen*, sino que convendrá estacionar en los cuatro vértices y medir no solo los cuatro ángulos del cuadrilátero, sino también los que forman los lados con las dos diagonales, compensando después la figura.

Si la superficie a levantar no fuese muy extensa, puede bastar el estacionamiento en uno solo de los vértices geodesicos para evitar, dada la gran distancia del otro, el tiempo que se pierde en la ida y en la vuelta; aun en este caso se poseen datos supletorios a los necesarios para la resolución del problema de *Hansen*, precisando igualmente compensar la figura. Lo que de ningún modo puede tolerarse es aplicar escuetamente el teorema de *Hansen* sin estacionar en ningún vértice, por no tener datos de comprobación que, si siempre son convenientes, se hacen indispensables en la determinación de la base.



Cualquier otro método de ampliación de bases puede servir, en sentido inverso, para reducir las.

## 6. TRILATERACIÓN TOPOGRÁFICA<sup>7</sup>

La tecnología asequible en distanciometría electrónica permite, según sabemos, disponer de instrumentos capaces de determinaciones suficientemente precisas a larga distancia, cubriendo cualquier dimensión topográfica.

Es pues, posible, determinar una red de puntos enlazados entre sí midiendo todas sus distancias respectivas. Llamaremos trilateración al proyecto, observación y cálculo de una red topográfica cualquiera, determinando todos los triángulos de la misma por medio de las longitudes de sus lados.

Y en cuanto al cálculo, se reduce también al estudiado obteniendo los valores de los ángulos de cada triángulo mediante las conocidas expresiones derivadas de la ley del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (1)$$

o bien

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \quad (2)$$

para un triángulo cualquiera  $ABC$ , siendo  $a, b, c$  las longitudes de los lados y  $p$  el semiperímetro.

Así, nos remitimos de nuevo al ejemplo desarrollado anteriormente en el epígrafe 5, Capítulo 1, suponiendo que el triángulo  $PCR$  (Casetas-Robledo-Puente) daría lugar a datos de observación distanciométrica análogos a los obtenidos por cálculo, es decir:

$$\begin{aligned} CR &= 1.237,69 \text{ m} \\ CP &= 1.473,74 \text{ m} \\ PR &= 1.794,86 \text{ m} \end{aligned}$$

de donde se obtiene de inmediato:

$$\begin{aligned} 2p &= 4.506,290 \text{ m} \\ p &= 2.253,145 \text{ m} \\ (p - CR) &= 1.015,455 \text{ m} \\ (p - CP) &= 779,405 \text{ m} \\ (p - PR) &= 458,285 \text{ m} \end{aligned}$$

resultando

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{(p-CP)(p-PR)}{p(p-CR)}} = 0,0395116 \quad P = 43^\circ 07' 10''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-CP)(p-CR)}{p(p-PR)}} = 0,875487 \quad C = 82^\circ 24' 13''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} R = \sqrt{\frac{(p-PR)(p-CR)}{p(p-CP)}} = 0,514780 \quad R = 54^\circ 28' 37''$$

### Intersección directa por observaciones distanciométricas

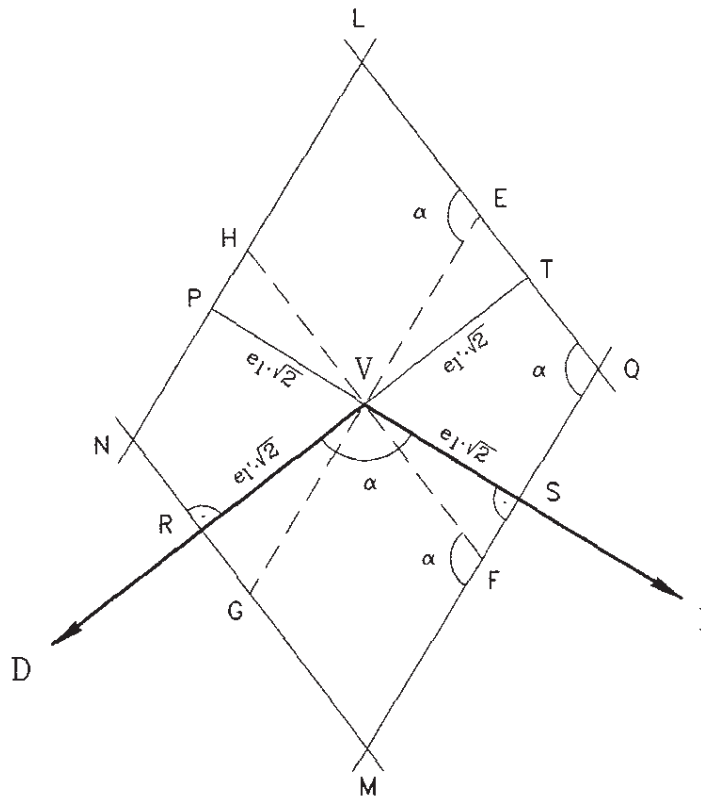
Sean según el usual  $I$  y  $D$  los vértices fijos y conocidos desde los que se observa el vértice  $V$  que se pretende situar por intersección directa, utilizando tan sólo mediciones distanciométricas,  $l$  y  $l'$  las distancias medidas desde  $I$  y  $D$   $IV=l$  y  $DV=l'$ .

$V$  queda situado en la disposición de la figura 3.1, conocida en la intersección de los arcos de circunferencia de radios  $l$  y  $l'$ .

Y siendo  $\pm e_l$  y  $\pm e_{l'}$  los errores máximos accidentales previsibles para ambas mediciones respectivamente, con fiabilidad 0,99 podremos afirmar que cualquier ubicación de  $V$  posible distará de la antes determinada  $\pm e_l\sqrt{2}$  a lo largo de  $l$  y  $\pm e_{l'}\sqrt{2}$  a lo largo de  $l'$ . La coexistencia de ambas condiciones conduce a definir el lugar de  $V$  como el área limitada por los cuatro arcos de circunferencia de centros dos a dos  $I$  y  $D$  y radios respectivos  $l \pm e_l\sqrt{2}$  y  $l' \pm e_{l'}\sqrt{2}$ .

Y supuesto suficientemente largo  $l$  y  $l'$ , podrán confundirse arcos con rectas y éstas con las tangentes en  $P$ ,  $S$  y  $T$ ,  $R$  o lo que es lo mismo, las normales a  $VI$  y  $VD$  en los puntos indicados, definiendo el paralelogramo de incertidumbre  $MNLQ$ .

Y con el mismo razonamiento desarrollado en intersección directa mediante observaciones angulares, reduciremos el paralelogramo a la elipse de incertidumbre en él inscrita, es decir, la de centro  $V$  y semidiámetros conjugados  $VE$  y  $VH$  (o  $VF$  y  $VG$  o combinaciones análogas).



Suponiendo que la observación se realiza con un mismo distanciómetro en ambos vértices, el error máximo puede expresarse según:

$$e_d = k \pm wd$$

donde  $k$ ,  $w$  = constantes

$d$  = longitud leída

admitiendo composición cuadrática de ambos términos, en nuestro caso se tendrá:

$$e_l = \sqrt{k^2 + w^2 l^2}$$

$$e_{l'} = \sqrt{k^2 + w^2 l'^2}$$

y de nuevo con el mismo razonamiento empleado en el caso anterior se tendrá:

$$VTQS = \text{cuadrilátero inscriptible}$$

$$VEL = VSQ = VFM = \alpha$$

luego

$$VE = \frac{e_l \sqrt{2}}{\text{sen } \alpha} \quad \therefore \quad VF = \frac{e_{l'} \sqrt{2}}{\text{sen } \alpha}$$

semidiámetros conjugados, y según los Teoremas de Apolonio, el semieje mayor de la elipse, aceptado como cota de error máxima, será:

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{VE^2 + VF^2 + 2VE VF \text{sen } \alpha} + \sqrt{VE^2 + VF^2 - 2VE VF \text{sen } \alpha})$$

y con  $l=l'$  resulta

$$a = \frac{\sqrt{k^2 + l^2 w^2}}{\text{sen } \alpha} (\sqrt{1 + \text{sen } \alpha} + \sqrt{1 - \text{sen } \alpha}) = \frac{\sqrt{k^2 + l^2 w^2}}{\text{sen } \alpha} 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

es decir

$$a = \frac{\sqrt{k^2 + l^2 w^2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}$$

expresión totalmente análoga a la hallada en intersección directa por observaciones goniométricas.

Si  $k=0$  la expresión resultante es la misma del caso mencionado, sustituyendo el error angular por el lineal  $w$ . En este caso, la construcción geométrica antes descrita evidencia que las dos elipses goniométrica y distanciométrica son ortogonales. Así, la dirección de máximo error en intersección directa por mediciones angulares (eje mayor de su elipse) coincidirá con la de mínimo error por mediciones distanciométricas (eje menor de su elipse) y recíprocamente.

En cuanto a la precisión alcanzable y refiriéndonos de nuevo al ejemplo resuelto en el Capítulo 1, epígrafe 5, supongamos que se ha trabajado con un distanciómetro de precisión en catálogo

$$e_d = 5 \text{ mm} \pm 5 \text{ ppm} = k \pm wd$$

y aceptamos que dicho valor corresponde al error estándar previsible, precaución usualmente aconsejable en evitación de optimismos excesivos.



Se tendrá para  $d = 1.600$  m

$$e_l = \sqrt{5^2 + (5 \cdot 1,6)^2} = \sqrt{25 + 64} = 9,4 \text{ mm}$$

aceptando como error máximo en una visual

$$E_l = 2,5e_l = 23,5 \text{ mm}$$

y con  $\alpha = 25^g$ , según sabemos

$$a = 5E_l = 11,75 \text{ cm}$$

En el supuesto de aceptar como despreciable el error de inclinación de portaprismas. Ello solamente está justificado si se sitúa sobre trípode, con centrado forzoso, análogamente al procedimiento estudiado en el trabajo con equipo de poligonación.

Si no es así, es preciso aceptar un error por dicho concepto similar al de dirección ya estudiado, estimándolo en cota máxima en

$$e_p = 2,5 \text{ cm}$$

su composición cuadrática con «a» nos daría el error total

$$E_T = \sqrt{11,75^2 + 2,5^2} = 12 \text{ cm}$$

Finalmente, otro criterio, extensible también al caso anterior (triangulación) y más conservador, es considerar como la tolerancia al eje  $2a$  de la elipse de incertidumbre. No obstante, la experiencia enseña que, a efectos de previsión, es suficiente con lo expuesto, pudiendo decirse lo mismo cuando se trata de determinar el error realmente cometido en que debe prevalecer la opción propuesta, según más adelante veremos.

La intersección inversa distanciométrica sólo requiere dos visuales para la determinación del punto de estación. Por tanto, su superficie de incertidumbre previsible se deduce como en la intersección directa, llegando a análoga expresión final.

Por la misma razón, el cálculo de la intersección inversa por observaciones distanciométricas se llevará a cabo determinando, como en la intersección directa, los ángulos del triángulo de que se trate por aplicación de las expresiones trigonométricas (1) y (2)

## 7. MEDICIÓN DE LA TRIANGULACIÓN.<sup>8</sup>

Los trabajos de campo en una triangulación constan de dos partes: el **proyecto** y la **observación**; el primero como ya lo hemos explicado, es el que ofrece más dificultad; consiste en elegir los vértices y determinar sus enlaces, dibujando un croquis a escala que constituye el proyecto.

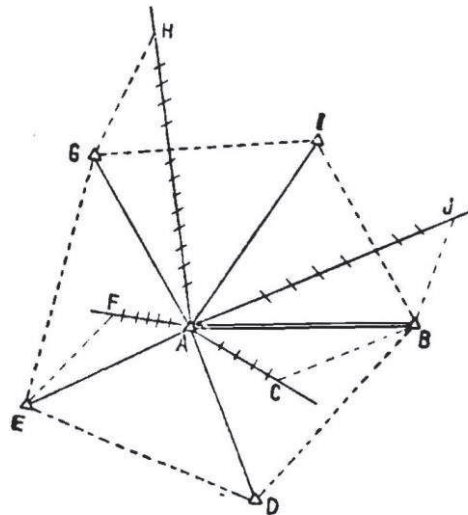
Recordemos que se comenzará por hacer un reconocimiento preliminar de la zona para formarnos idea de su relieve, y cómo desde los vértices que forman **nudo** han de

<sup>8</sup> F. Domínguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

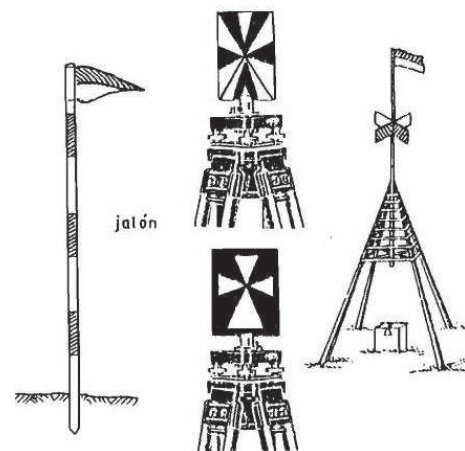
divisarse todos los de alrededor, nos fijaremos especialmente en los puntas más altos, que seguramente serán después elegidos; convendrá, siempre que se pueda, localizar estos vértices provisionales en la hoja de la Carta de IGN que comprenda la zona, o en algún plano que poseamos, lo que facilitará grandemente el trabajo por damos idea rápidamente de la forma y dimensiones que vayan adoptando los triángulos y polígonos.

Terminado el reconocimiento, se condensara el proyecto eligiendo el terreno más apto para medir la base; convendrá un terreno muy llano y sin obstáculos, como un carril de vía férrea o el encintado de una carretera recta y horizontal, eligiendo un paraje bien despejado para poder situar los vértices de ampliación; a la vista del terreno se elegirá el método que más convenga.

Para estos reconocimientos son muy útiles las brújulas o los GPS de bolsillo. Elegida la **base deducida**, partiremos de ella para hacer el proyecto de triangulación, que se dibujara en el mismo campo utilizando un transportador, trazando en el papel los triángulos y polígonos. Comenzaremos por medir la base a pasos, metro láser, odómetro, u otro elemento expeditivo, y trasladarla al croquis a la escala aproximada de la medida; nos situaremos después en uno de los extremos, por ejemplo el A, y dirigiremos visuales a todos los puntos altos de alrededor que pudieran utilizarse como vértices, teniendo en cuenta, para su elección, las observaciones hechas en el reconocimiento preliminar si los puntos provisionalmente elegidos tienen o no fácil visibilidad hacia el otro lado y son visibles entre sí, datos en los que la vista, desde A, nos engañara considerablemente.



Se trasladaran al croquis las visuales, siempre en número superior al de los lados del polígono, teniendo en cuenta que habrá de desecharse buena parte de ellas, y nos trasladaremos a B para ir recorriendo el contorno del polígono, con lo que iremos dando forma definitiva a los triángulos y a los polígonos, desechando las visuales provisionales que no se utilicen y estableciendo otras nuevas hacia el exterior del polígono hasta completar el proyecto. En los vértices elegidos iremos dejando jalones con banderas o algún otro señalamiento visible a la distancia de todos los vértices y levantando (arrancando) los que se vayan desechando.



Muchas de las dudas que surgen en el campo sobre la elección de vértices se aclaran por el estudio del

mapa y carta, obteniéndose en definitiva, utilizándolo como croquis, mejores soluciones con mayor rapidez.

En inmuebles reducidos se simplificará el trabajo considerablemente, aunque nunca se excusara de hacer el proyecto, asegurándonos de la perfecta visibilidad de los vértices entre sí y de la forma de los triángulos y polígonos.

En cambio, en zonas extensas llanas, las dificultades se multiplican; en más de una ocasión habrá que proyectar los vértices en los techos (losas) de los edificios, a pesar de los inconvenientes que esto ofrece. Una vez cerciorados de la viabilidad del proyecto, se sustituirán las señales provisionales por otras definitivas, en las que se dejara instalada las señales durante todo el tiempo que dure la observación.

Como señales definitivas de los vértices suelen utilizarse hitos pesados, de piedra u hormigón, bien empotrados en el suelo, de formas diversas, con un taladro en el centro de la cara superior para instalar el jalón con la bandera.

Si no interesase dejar señalado el vértice por más tiempo que el necesario para la observación, puede dejarse una simple estaca clavada, colocando la banderola exactamente superpuesta, formando a su alrededor un montón de piedras (pirca) o de tierra, de identificación fácil aún para un operador diferente al que hubiese efectuado el proyecto.

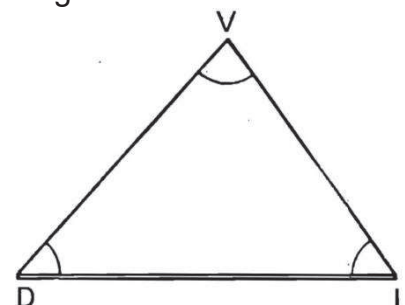
Una vez colocadas las señales se hará una monografía de su situación acompañada de un croquis y se medirán tres distancias a tres puntos fijos que, a falta de otros, pueden ser tres estacas clavadas, o cruces grabadas en piedra, que sirvan de referencia para el caso de que desaparezca o se mueva la señal, percance, a veces frecuente, que obliga a repetir el trabajo si no pudiera replantearse el vértice con absoluta seguridad.

**7.1. Caso de propiedades de mediana pequeña extensión.** El proyecto deberá adoptar la forma de un solo polígono, pentágono, hexágono heptágono, con un nudo central, cuyos vértices periféricos queden en las proximidades de la linde, para encuadrar entre ellos los itinerarios de la red topográfica y, si fuese necesario, completaran la triangulación alguno o algunos triángulos destacados que tengan por base los lados del polígono.

También si la superficie fuera alargada podrá disponerse la triangulación en forma de cadena con un número variable de triángulos en los que apoye, a su vez, alguno o algunos triángulos periféricos.

En extensiones aun menores puede simplificarse la triangulación dejándola reducida a un cuadrilátero, del que se observen, además de los lados, sus dos diagonales; y como límite mínimo puede simplificarse hasta dejar un solo triángulo inscrito en la linde, cuyos vértices la dividirán en tres itinerarios.

Únicamente podrá prescindirse de la triangulación en fincas tan pequeñas que permitan rodearla por un solo itinerario cuya longitud no exceda del límite que permita la tolerancia en el cierre.



## 7.2. Medida de la base.<sup>9</sup>

Una vez aprobado el proyecto, se procede a la observación, comenzando por la medida de la base. Cualquier error que se cometa en este trabajo se transmite ampliando al resto del levantamiento; de ser errónea la base, se construiría una figura semejante a la verdadera, cuya razón de semejanza sería la relación entre la medida adoptada para la base y la que debiera tomarse. De aquí la necesidad de medir la base con la mayor exactitud que sea posible.

Para el desarrollo de la triangulación es necesario conocer la longitud de uno de los lados, o sea la *base* de la triangulación. Puede obtenerse mediante medición directa o puede calcularse indirectamente su longitud, por *reducción* de la de un lado geodésico o por *ampliación* de otra base más pequeña. La base debe ocupar un lugar lo más centrado posible respecto de la triangulación. Es evidente que así serán necesarios menos encadenamientos de triángulos para enlazar desde ella los límites de la zona.

En cuanto a la **precisión de la medida de la base** será aquella que requiera la escala del plano que se pretende obtener y la mayor o menor superficie a representar, o dependerá de la precisión con la que se deseen las coordenadas de los vértices.

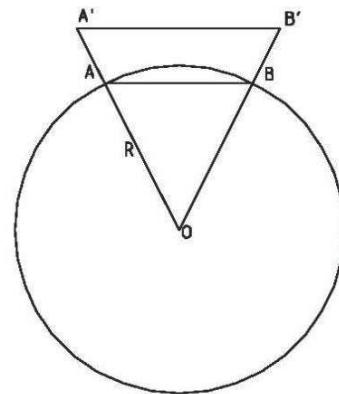
La medida de la base se suele llevar a cabo con distanciómetros electrónicos.

Anteriormente se realizaba mediante una estadía invar, y fraccionando la distancia en tramos no mayores a 50 metros. Se conseguían de este modo precisiones del orden de 1/50.000.

Las longitudes medidas han de experimentar diversas correcciones, siendo la primera la correspondiente a su *reducción al horizonte*, si es que el sistema empleado para obtenerla no da directamente este tipo de distancias. A su vez, si no es pequeña la altitud de la base puede llegar a tener cierta importancia la corrección denominada *reducción al nivel de mar* ya que los verticales de sus extremos A' y B' no son paralelos sino convergentes en O, centro de la Tierra. Así, si es H aquella altitud de la semejanza de triángulos OAB y OA'B' se deduce:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{R+H}{R} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$AB = A'B' \frac{R}{R+H}$$



## 7.3. Método angular de vuelta de horizonte

El método de observación es el mismo que el de la intersección, es decir el método de vueltas de horizonte. Cuando las observaciones angulares se efectúan según este método, se estaciona el instrumento en el vértice, por ejemplo en A y en posición de C.I. se observan todas las direcciones. De ellas se elige la que mejor definida esté, por ejemplo F, y se anotan las lecturas a cada una de las restantes B, C, ..., para volver a mirar a la visual de origen F, y comprobar si su lectura, llamada de *cierre*, es la misma que al comienzo. Ello permitirá comprobar que el instrumento no ha sufrido ningún tipo

<sup>9</sup> F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

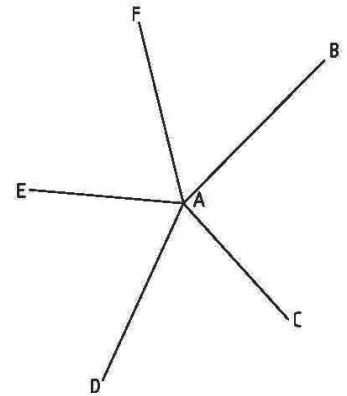
de movimiento durante la observación. De ser así se procederá a situar el equipo en posición de C.D. y se repetirán las observaciones, girando en sentido contrario al anterior y comprobando igualmente el cierre de F. Si es correcto se dice que se ha observado *una serie o vuelta de horizonte*.

Cuando se pretende alcanzar ciertas precisiones, se hace necesario observar más de una serie y si es  $n$  el número de ellas, el ángulo de reiteración  $\alpha$ , viene dado por el cociente:

$$\alpha = 180^\circ / n$$

que será el valor que habrá que incrementar la lectura origen de cada serie para conocer la de la siguiente. En Topografía no es frecuente observar más de dos series. Se ha dicho anteriormente que las lecturas de cierre deben ser coincidentes con las iniciales, pero se comprende que esta coincidencia no puede ser total, ya que estarán afectadas de errores de puntería y lectura por lo que la mayor diferencia admisible para el cierre de una vuelta de horizonte, será:

$$e \leq \left( \sqrt{e_p^2 + e_l^2} \right) \sqrt{2}$$



#### 7.4. Método de los pares sobre una referencia

Este método consiste en elegir una dirección de referencia R, que esté bien definida, y que puede ser o no alguna de las direcciones a observar. Se hacen las lecturas correspondientes sobre R y B como si se tratase de una vuelta de horizonte compuesta nada más que por dicho *par* de direcciones. A continuación se visan de igual modo a R y C, que constituirán el segundo par, y así, sucesivamente hasta haber combinado con R todas las direcciones. Como la observación de cada par se hace en muy poco tiempo se evitan posibles movimientos del equipo.

Si el número de direcciones es grande, es lógico que se tarde bastante en la observación de las direcciones, por lo que para abreviar se utiliza el método mixto que consiste en dividir las direcciones totales en varias de tal manera que se vise a la referencia y a unas direcciones y luego se vuelve a visar a la referencia y al resto de las direcciones y se refunden las vueltas de horizonte en una sola.

#### 7.5. Método de combinaciones binarias.(informativo)<sup>10</sup>

Conocido este rentado con el nombre de su autor, Schreiber, es más bien un método propio de observaciones geodésicas, que puede tener ventaja sobre el método de vueltas de horizonte, cuando el número de reiteraciones haya de ser muy grande, por permitir reducir el número de observaciones sin perjuicio del resultado.

Consiste en tomar como referencia del método de los pares, cada uno de los vértices y medir directamente los ángulos que forman todas las combinaciones binarias de las visuales.

Suponiendo se estaciona en un punto P se tornara como referencia la visual P1, después de la P2, etc..., y se medirán directamente, por el método de los pares, los

<sup>10</sup> F. Domínguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

ángulos que figuran a continuación, que designamos por los números de los vértices de las visuales respectivas:

$$\begin{array}{cccc} 1.2, & 1.3, & 1.4, & 1.5. \\ & 2.3, & 2.4, & 2.5. \\ & & 3.4, & 3.5. \\ & & & 4.5. \end{array}$$

Para cada ángulo tendremos una *medida directa* y si es  $n$  el número de vértices, podremos obtener otras  $n - 2$  *medidas indirectas* por sumas o diferencias de dos directas. El método consiste en tomar, como valor de cada Angulo, en cada reiteración, la media ponderada entre la medida directa y las  $n - 2$  medidas indirectas.

Designando por  $e$  el error probable de una medida directa, el de una indirecta será  $e\sqrt{2}$ ; y recordando que el peso esta en razón inversa del cuadrado de los errores, tomando como unidad de peso el de una medida directa, el de una medida indirecta será igual a  $1/2$ .

Para fijar las  $n$  direcciones basta obtener  $(n - 1)$  ángulos, que llamaremos fundamentales, todos los demis se obtienen por sumas o diferencias. En el caso supuesto, las medias ponderadas de los ángulos fundamentales, en una reiteración, multiplicando por 2 numerador y denominador, podrían ser:

$$(1.2) = \frac{2 \times 1.2 + (1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4) + (1.5 - 2.5)}{5}$$

$$(2.3) = \frac{2 \times 2.3 + (1.3 - 1.2) + 2.4 - 3.4) + 2.5 - 3.5)}{5}$$

$$(3.4) = \frac{2 \times 3.4 + (1.4 - 1.3) + (2.4 - 2.3) + (3.5 - 4.5)}{5}$$

$$(4.5) = \frac{2 \times 4.5 + (1.5 - 1.4) + (2.5 - 2.4) + (3.5 - 3.4)}{5}$$

Si se hacen  $r$  reiteraciones, adoptaremos como medida definitiva de cada ángulo la media aritmética de las  $r$  medias ponderadas obtenidas.

El ángulo (5 . 1) es consecuencia de los anteriores; en efecto, su media ponderada deducida de los datos de observación, será:

$$(5.1) = 360 - \frac{2 \times 1.5 + (1.2 + 2.5) + (1.3 + 3.5) + (1.4 + 4.5)}{5}$$

y si sumamos los cinco ángulos que hemos calculado, resulta automáticamente en el segundo miembro  $360^\circ$ . Resultan por tanto compensados los ángulos en el centro, como ocurre con el método de las series y con el de los pares sobre una referencia.

Se consigue la mayor ventaja, con este método, en las triangulaciones geodésicas de primer orden, en las que por ser muy grande el número de reiteraciones que han de hacerse, de utilizar el de vueltas de horizonte, permite llegar a resultados del mismo peso con un número de observaciones mucho menor.

Designando por  $s$  el número de series, al obtenerse un ángulo por diferencia de dos, hemos de darle un peso de  $1/2$ , y el peso final será:

$$\frac{s}{2}$$

Llamando  $r$  al número de reiteraciones por el método de combinaciones binarias llegaremos a un peso final del ángulo anterior, recordando que el peso de la media ponderada es la suma de los pesos:

$$r \left( 1 + \frac{n-2}{2} \right)$$

e igualando los pesos obtenidos por los dos métodos y despejando  $r$ :

$$r = \frac{s}{n}$$

Suponiendo que  $s$  sea igual a 24, numero de dobles series que se exigen para los vértices de las cadenas de meridiana y paralelo, y que  $n$  sea de 6 vértices, obtendremos:  $r=4$

El numero de ángulos que se miden en cada reiteración, por el método de combinaciones binarias, es de  $n(n-1) \cdot \frac{1}{2}$  que multiplicado por  $r$  nos da el total de ángulos doblemente medidos, que en el caso supuesto será:  $\alpha=60$

De aplicar el método de las vueltas de horizonte, con 24 dobles series y visuales a 6 puntos, el numero de dobles observaciones será:  $\alpha'=60$

No obstante el crecido numero, llegamos a un peso de cualquier Angulo final igual al que se obtiene por el método de las combinaciones binarias con solo 60 pares.

### 7.6. Error de cierre.<sup>11</sup>

Estacionados todos los vértices y efectuado en cada uno las correspondientes vueltas de horizonte, obtendremos la medida de los ángulos que intervengan en la triangulación, restando, en cada vértice, de la dirección más alejada, en el sentido que crece la graduación, la que se halla menos, sumando a la primera  $360^\circ$  si fuese menor que la segunda,

Conoceremos así los tres ángulos de cada triangulo, cuya suma debería ser  $180^\circ$  si no se hubiesen cometido errores, pero como éstos son inevitables, forzosamente habrá alguna diferencia que se denomina *error de cierre*; en el mismo campo deberán confrontarse los errores de cierre para cerciorarnos de que se hallan todos por bajo de la tolerancia, o rectificar en su caso, para evitar regresar de nuevo una vez terminado el trabajo al descubrirse, ya en el gabinete, errores inaceptables en el cierre de los triángulos.

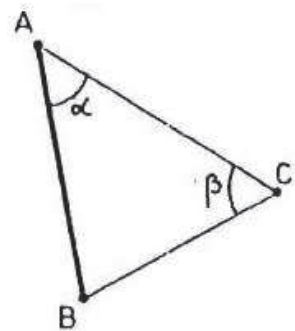
La tolerancia suele fijarse de acuerdo con la importancia del levantamiento, debiendo elegirse los instrumentos apropiados, ya que no podrá exigírsele una aproximación superior a la que es capaz.

Designando por  $e_a$  al máximo error angular cometido por el teodolito en cada visual, como en la medida de los tres ángulos intervienen 6 visuales la tolerancia en el cierre será:

$$c < e_a \sqrt{6}$$

### 7.7. Aplicaciones de la triangulación<sup>12</sup>.

Tengamos presente que al aplicar la **triangulación topográfica (o trigonométrico)** con este método un punto C (oP) queda posicionado al relacionarlo con otros A (o D) y B(o I), cuya ubicación se conoce, mediante la medición de dos (2) ángulos, por ejemplo. Este es un planteo básico que tiene numerosas variantes en cuanto a la posición de los puntos y



<sup>11</sup> F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

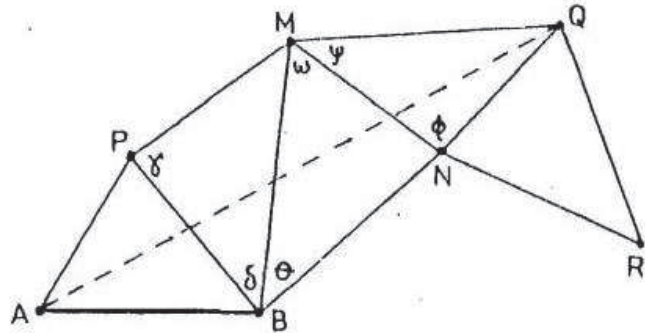
<sup>12</sup> Apuntes Topografía I. Agrimensura. Agrim. Mauricio Stolze. Nilda Croche. UNS

ángulos dando lugar a numerosos procedimientos.

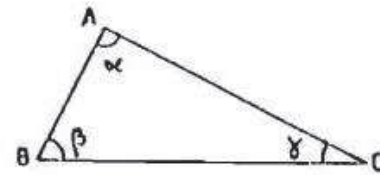
Al decir que se conoce la ubicación de A y B es análogo a identificarlos como puntos fijos o lo que es lo mismo puntos de coordenadas conocidas o simplemente que A y B constituyen una **base** y por tanto la distancia entre ellos es conocida,

Este método ha sido muy utilizado en el posicionamiento de puntos en particular cuando por razones de precisión y dificultades del terreno, deben limitarse o evitarse las mediciones lineales como ocurre en terrenos quebrados, haciendo que prevalezcan las determinaciones angulares.

Recordemos que las sucesivas determinaciones a partir de una base inicial van produciendo la conocida propagación de errores, consecuente de los que se cometen en cada medición, llegando el momento en que la precisión del posicionamiento no alcanza lo exigido por lo que, para continuar, habrá que recurrir a medir otra base.



Los cálculos en este método giran alrededor de la resolución de triángulos planos porque es de aplicación la trigonometría en particular los teoremas del seno y coseno, con alternativas según la ubicación relativa entre los ángulos medidos y el lado conocido.



$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 BC AC \cos \gamma$$

El método se aplica en trabajos geodésicos y topográficos. En ambos su uso ha cambiado; en los primeros ha sido en general reemplazado por los posicionadores satelitales (GPS) y en el ámbito topográfico, además la intervención de los distanciómetros electrónicos que subsanan gran parte de los problemas que encuentra la medición lineal clásica, principal argumento para la aplicación de las triangulaciones.

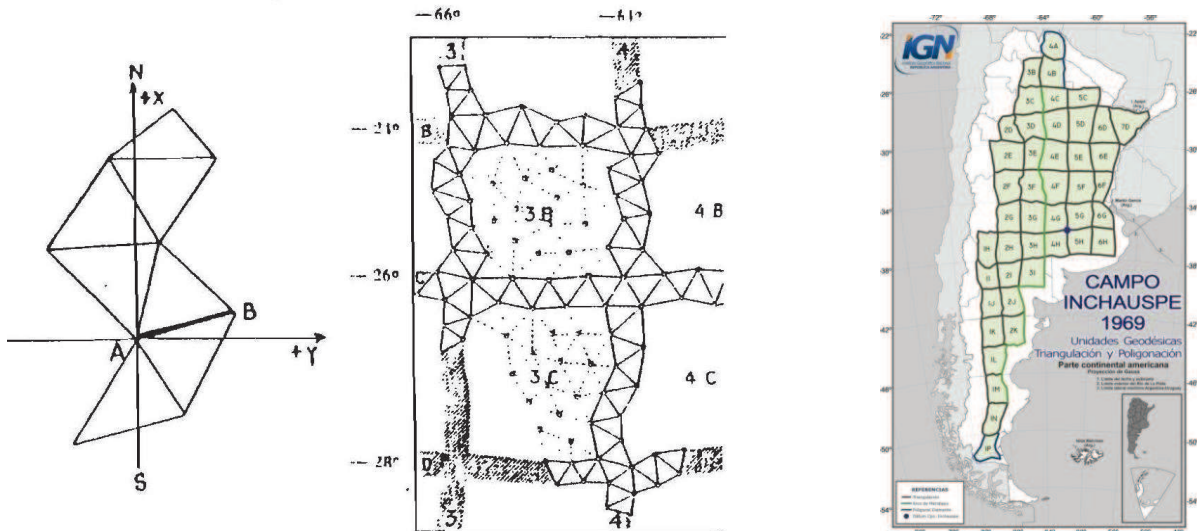
No obstante se ha intensificado su aplicación en el control y relevamiento y replanteos de en obras civiles e industriales, en estructuras e instalaciones especiales o de gran tamaño.

Siempre hemos dicho de vincular la medición a puntos geodésicos, donde esta ciencia utiliza posicionar puntos aislados o en conjuntos, como se esquematizamos al inicio de Topografía I, formando **Redes de Puntos Fijos** de ese orden, como apoyo o referencia de un sistema general (WGS84).

Antiguamente las **triangulaciones Geodésicas** sirvieron a la mayoría de los países para construir su red de puntos fijos durante los últimos siglos. La conformación de Red



de puntos fijos se realizaban partir de una base AB, se iban "armando" los sucesivos triángulos originando las denominadas "cadenas".

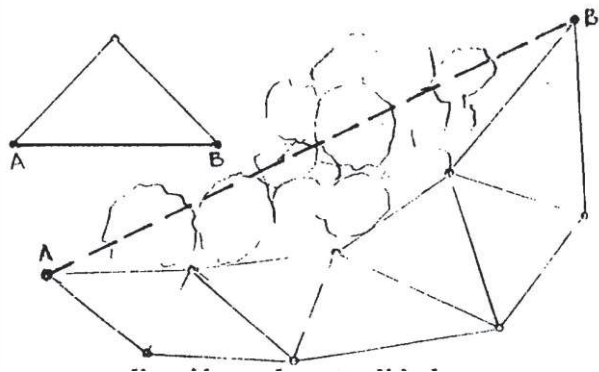
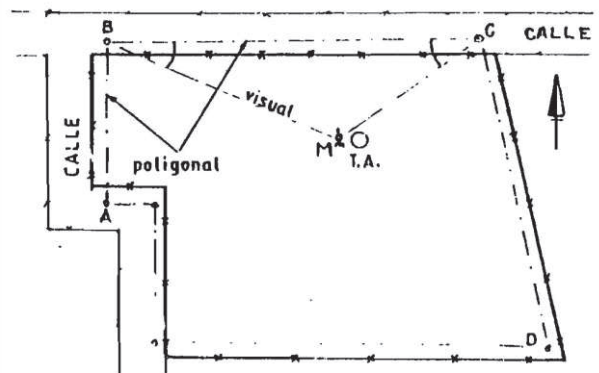


7.8. En topografía se pueden distinguir dos (2) objetivos principales:

- **Posicionar puntos aislados** o bien conjunto de ellos que conforman una red de puntos fijos de orden topográfico, que puede funcionar en forma independiente o bien como complemento de una geodésica.

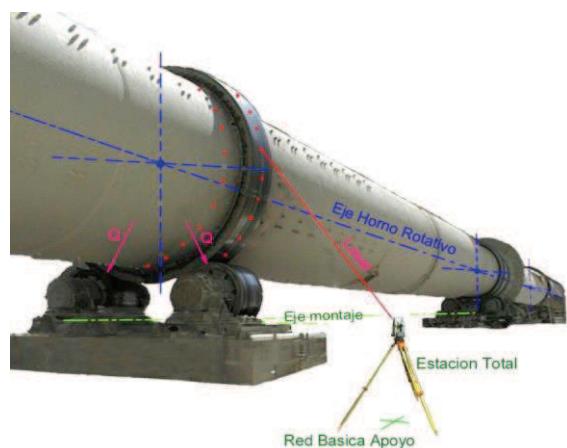
En la figura vemos un ejemplo de cómo se ha posicionado un punto aislado, un molino M, dentro de un campo medido con una poligonal perimetral A, B, C,...

- **Medir distancias.** Si bien los planteos básicos son similares en la figura vemos la determinación de la distancia AB con la resolución del triángulo simple y también puede ser con una serie de triángulos



En Topografía con la medición lineal electrónica (**MED**), el método quedó limitado a:

- Triangular puntos como labor accesoria de un relevamiento realizado con otro método.
- La medición de una Red de Puntos Fijos de orden topográfico,



- Posicionar puntos inaccesibles particularmente por causa de las distancias o ubicación

La **distancia** es un condicionante importante ya que, mientras se puedan posicionar puntos con cualquier método que se valga de un distancio metro electrónico –**Medición electrónica de distancia MED**- no conviene utilizar la triangulación, pues en general es más complicada e imprecisa. Cabe destacar que esa distancia esta en relación con el alcance del distanciómetro que, en los comunes es de alrededor de 2 a 3 Km, aunque hay instrumentos que triplican ese valor.

Cuando se desea posicionar puntos a distancias superiores a los 2 a 3 Km empieza a tener sentido el uso del método, circunstancia que habrá que analizar cuidadosamente en función del tipo de trabajo, las dificultades, distancias, instrumental disponible, precisión exigida, etc.

El posicionamiento de puntos indefinidos o inaccesibles por su ubicación o inestabilidad es donde más se justifica el uso de triangulaciones, donde es difícil o imposible instalar o mantener correctamente un prisma reflector o similar, o bien no es conveniente por razones técnicas; aunque muchas veces si la distancia lo permite lo “bombardeamos” con rayo láser.

El caso se puede presentar en grandes estructuras (edificios, instalaciones mecánicas industriales, puentes, represas, etc.) al controlar su construcción o armado y posteriormente en relevamientos para conocer sus formas, movimientos o deformaciones. También esa situación se puede presentar en minas, cavernas, bóvedas, galerías, túneles o terrenos escabrosos en general. Algo similar ocurre al operar en zonas cubiertas por las aguas o en general inestables, por ejemplo en relevamientos hidrográficos, pilotajes y construcciones importantes en lugares de ese tipo.

También es de aplicación cuando no existen puntos bien definidos para su relevamiento, por lo que los equipos suelen constar con un emisor Laser que permite "marcar" puntos, visibles para las observaciones



## 7.9. Mediciones. <sup>13</sup>

<sup>13</sup> Apuntes Topografía I. Agrimensura. Agrim. Mauricio Stolze. Nilda Croche.UNS

Estas labores comprenden la **medición de ángulos** y de la **base/s** cuando se trata de determinar indirectamente **distancias**; en el caso de posicionar puntos fijos se circunscribe a la medición angular ya que la base en general es medida con una operación independiente y de orden superior.

Tanto la medición lineal y angular se harán con una precisión acorde con las exigencias del trabajo, donde se deberá tener en cuenta la incidencia de los errores angulares y lineales que se cometan y la propagación de los mismos en la medida que se extiende la aplicación del método.

Regularmente la medición angular se hará con el método Bessel cuando se determinan distancias topográficas, con las reiteraciones que correspondan según la precisión exigida.

En cuanto a la medición lineal se realizaba cuidadosamente con cinta contrastada, verificando su tensión, alineación horizontal y vertical, corrigiendo los errores sistemáticos y reiterando las mediciones cuando sea necesario. **En la actualidad regularmente se hace con un distanciometro electrónico o sea Medición electrónica de distancia (MED).**

Los errores que se cometan en la medición de la **base**, influirán directamente en las medidas del triángulo conformado y en particular en las distancias determinadas, propagándose según la relación entre ambas. Tan importante como esa medición es definir la magnitud de la base y su posición relativa respecto a los puntos extremos de la distancia a determinar, o del otro punto si es una triangulación. Es esencial evitar posiciones inadecuadas para las determinaciones en general, y en particular deben preverse triángulos cuyos ángulos sean lo más semejante posible, tendiendo a excluir los menores de  $30^{\circ}$  y mayores de  $150^{\circ}$ .

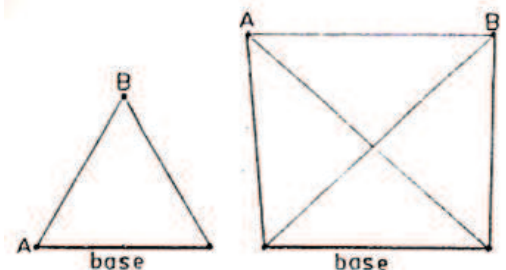
La ubicación de la base en cuanto al triángulo conformado o la distancia a determinar debe ser tal que:

- El triángulo formado con la distancia a medir AB o el punto posicionado B, tienda a ser equilátero.
- Formar un cuadrilátero con la distancia a medir, tendiendo al cuadrado, donde se tratara de ubicar la base paralela o perpendicular a AB.

Su magnitud debe ser la mayor posible ya que los errores cometidos en su determinación tendrán menor influencia relativa pues su propagación está en función de la relación entre ambas magnitudes.

De acuerdo al lugar en que se aplique el método, es común que existan dificultades para ubicar la base en la posición técnicamente más adecuada y además que pueda tener una dimensión acorde, por lo tanto, cuando la precisión exigida en las determinaciones esta en el límite de las posibilidades, habrá que mejorar al máximo los aspectos primarios de la base ya señalados: dimensión, precisión de su medida y ubicación, esto es la posición relativa de sus extremos respecto a los puntos.

Además se tendrá que optimizar la medición de lados y ángulos mediante la elección de métodos de medición e instrumental, operando cuidadosamente y en condiciones favorables.



En las figuras se observa una serie de formas o esquemas planimétricos correspondientes a los triángulos, o conjunto de ellos, dispuestos para las triangulaciones en general y particularmente para la determinación indirecta de distancias.

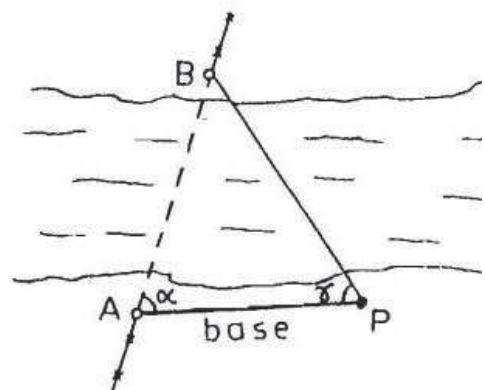
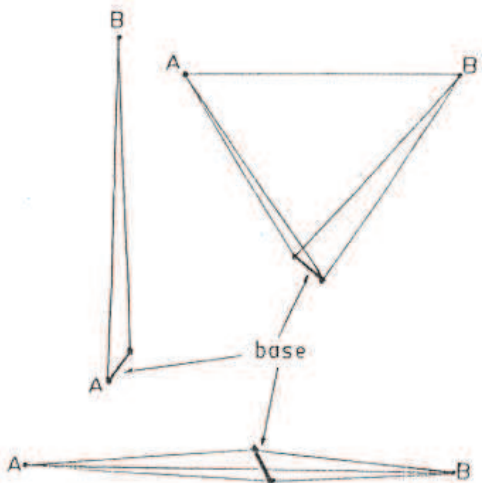
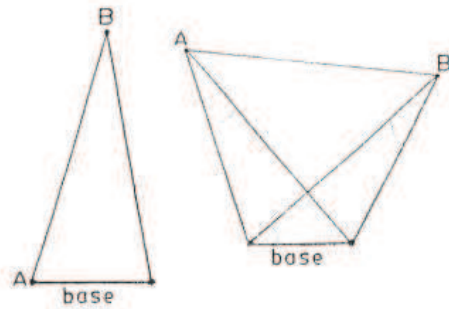
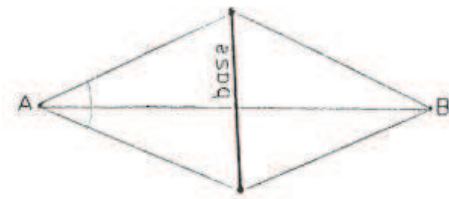
Los ejemplos se orientan hacia este último objetivo y en las respectivas figuras se destaca el lado AB a determinar indirectamente y el que cumple la función de base, con una serie de alternativas en cuanto a su dimensión y ubicación, que van desde situaciones teóricamente óptimas, pasando por otras aceptables, hasta las inadecuadas que figuran al final.

Estas últimas regularmente resultantes de las dificultades que presenta el lugar de la determinación, como terrenos anegados o inestables, vegetación, edificaciones, relieve, etc. Estos problemas limitan los lugares para disponer la base y los puntos estación en general, además de dificultar las mediciones por razones de visibilidad y desplazamientos.

**7.10. Algunas soluciones clásicas de las triangulaciones topográficas. Bisección.**

Se plantean a partir de complejidades de aplicar una triangulación simple; con dos principios básicos: llegar a conocer tres de los seis datos, entre ángulos y lados, que definen un triángulo, salvo cuando solo se conocen los tres ángulos. Para el cálculo es esencial aplicar las funciones trigonométricas planas de los triángulos rectángulos y los teoremas del seno y coseno en triángulos oblicuángulos

Se lo encara a partir de la determinación de la distancia desde los puntos A o P hasta B separados por dificultades como hechos físicos, y/o una distancia que impiden o dificultan la medición directa clásica y a veces también la electrónica. Se recurre a un punto P accesorio definiendo la base AP, desde cuyos extremos A y P es esencial que sea visible B pues allí se miden los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$ . La ubicación de P es fundamental para la precisión. Por lo tanto para resolver el triángulo los datos serán la distancia AP (base) y los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$ . Teniendo en cuenta que la incognita es AB, aplicando el teorema del seno tendremos:  $AB = AP \cdot \text{sen } \gamma / \text{sen } (\alpha + \gamma)$ .



Este procedimiento de intersección directa y se lo plantea considerando que los puntos A y P son puntos fijos de orden superior y el punto a posicionar es B. También se lo puede utilizar para el replanteo de un punto o bien verificar la ubicación del mismo cuando se controlan estructuras y/o instalaciones mecánicas de envergadura y/o minería como vemos en las figuras. La mayor virtud del método está en que no necesita que accedamos al punto con el extremo de una cinta o con un prisma,

En este caso se opera con dos instrumentos en forma simultánea dirigiendo visuales hacia puntos específicos materializados con puntos láser.

<sup>14</sup>. Es por ello que es un método ideal para levantar puntos de un río o la ladera de un cerro escarpado (lugar de emplazamiento de los cierres de las presas). Si la zona es demasiado escarpada, que no permita o haga muy riesgoso el desplazamiento de un mirero, como su función es solo la de marcar un punto del terreno para que sea apuntado por los dos teodolitos, sin margen de confusión; el mirero puede ser reemplazado por un punto luminoso.

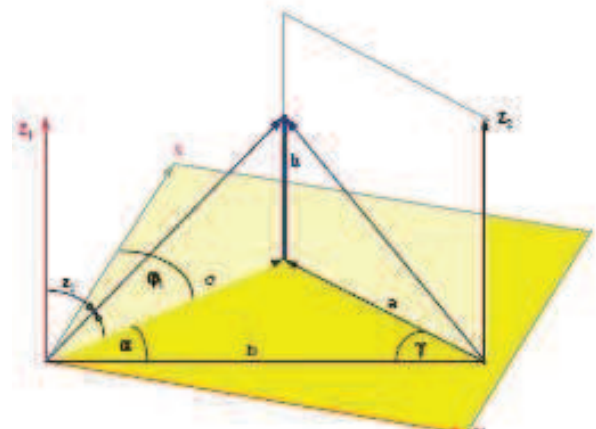
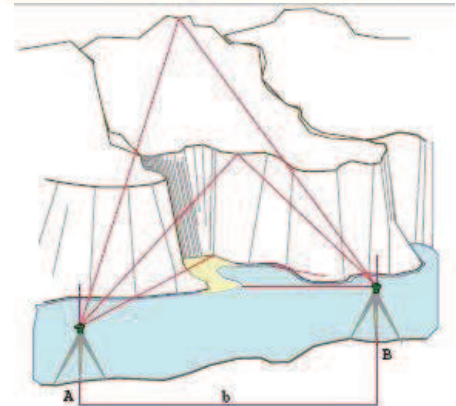
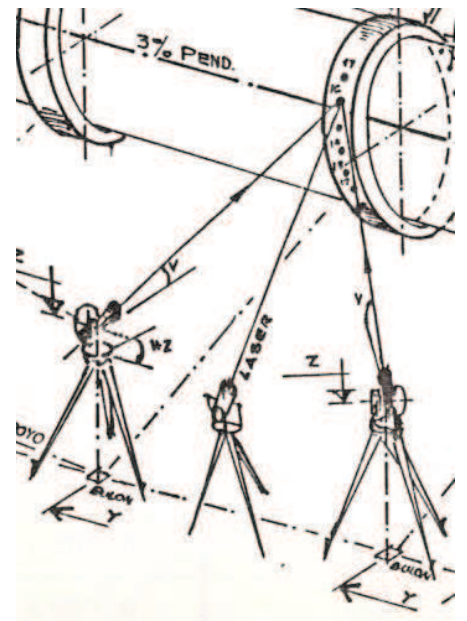
Para ello un tercer operador que maneje un colimador láser, cuya misión es la de marcar con un punto luminoso (láser visible) los puntos a medir, mientras los dos teodolitos dirigen las visuales a esos puntos.

Otra alternativa es la de acoplar al ocular de alguno de los dos teodolitos, un “ocular láser” de tal modo que ahora, uno de los teodolitos marca el punto hacia el cual dirigirá su visual el otro teodolito.

Esta virtud que posee este método, que permite realizar observaciones de puntos sin necesidad de mantener contacto con ellos, lo hace el método ideal para realizar las observaciones en las mediciones para control de deformación de las estructuras (Auscultación) y en las mediciones industriales.

En las mediciones industriales, los teodolitos o estaciones, se centran sobre trípodes especiales.

La posición planimétrica del punto queda fijada por la proyección de la intersección de dos planos verticales, por tal motivo no influye en el resultado el



<sup>14</sup> Topometría y Microgeodesia. Ap. Clases año 2000. Ing. Agrim. Armando Del Bianco. Dpto. FCEEyN. UNC:

ángulo de elevación como en el método polar. Las diferencias de coordenadas serán:

$$\Delta X_1 = c \cdot \cos \varphi_1$$

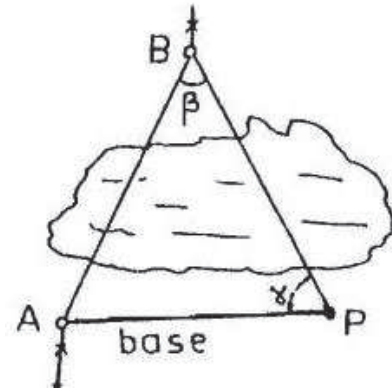
$$\Delta Y_1 = c \cdot \operatorname{sen} \varphi_1$$

$$\Delta X_2 = a \cdot \cos \varphi_2$$

$$\Delta Y_2 = a \cdot \operatorname{sen} \varphi_2$$

### 7.11. Intersección lateral.<sup>15</sup>

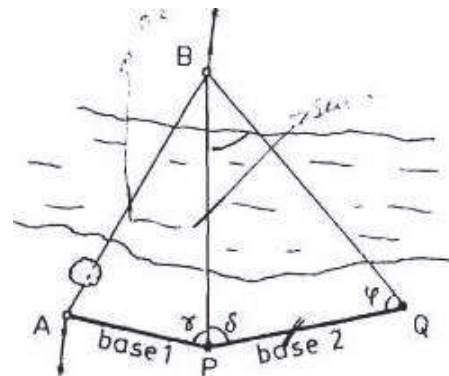
Una variante del caso anterior se ha esquematizado en la figura donde uno de los ángulos  $\beta$ , es medido en el otro extremo B de la distancia a determinar AB. Se la plantea considerando a A y P puntos fijos pertenecientes a una red y B al punto a posicionar, esto es determinar su ubicación a través de coordenadas o distancias.



### 7.12. Combinación de triángulos

Son de aplicación cuando con un solo triángulo no basta para lograr la solución, en general por los motivos comunes relacionados con la falta de intervisibilidad entre puntos y/o limitaciones en la accesibilidad.

- Una muestra simple es la del ejemplo, cuando no existe **intervisibilidad entre los puntos A y B** por lo que se recurre a una segunda base PQ con la cual tendremos dos triángulos APB y PBQ, donde la condición para su solución es que el punto B sea visible desde P y Q, y obviamente que desde Q se vea P y/o A. Primero se calcula el triángulo PBQ donde:



Datos: Distancia PQ (base), ángulos:  $\varphi$  y  $\delta$ .

La incógnita B se resuelve aplicando el teorema del seno:

$$BP = PQ \cdot \operatorname{sen} \varphi / \operatorname{sen}(\varphi + \delta)$$

Luego el triángulo ABP en el que:

Datos: Distancia AP (base)

Angulo medido:  $\gamma$ .

Lado calculado: BP

Aplicando el teorema del coseno:  $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos \gamma$

Este ejemplo es de aplicación solo en la determinación de distancias, ya que en las triangulaciones para posicionar puntos el problema no puede presentarse, pues es una condición esencial, al colocar los vértices, su intervisibilidad.

- **Distancia entre dos puntos A y B no intervisibles e inaccesibles.**

La tarea se plantea por la falta de intervisibilidad entre AB y la inconveniencia o imposibilidad de medir ángulos en esos puntos.

<sup>15</sup> Apuntes Topografía I. Agrimensura. Agrim. Mauricio Stolze. Nilda Croche.UNS

Esos puntos pueden ser señalizados o no, pueden ser hechos físicos notorios, por ejemplo cerros, antenas, columnas, molinos, postes, chimeneas, etc.

Se instala y mide una base  $P_1P_2$  de manera que desde cada uno de esos puntos sean visibles A y B, a efectos de poder medir los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

Se calcula el triángulo  $AP_1P_2$  donde los datos son:

Ángulos:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$

Base:  $P_1P_2$

$$\text{por lo que } AP_2 = \frac{P_1P_2 \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Luego el triángulo  $BP_1P_2$  donde:

Datos:

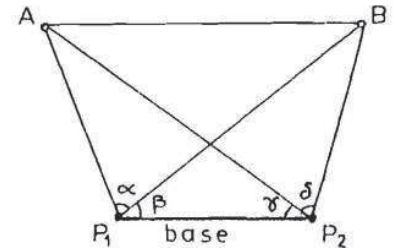
Ángulos:  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ .

Base:  $P_1P_2$

$$\text{por lo tanto } BP_2 = \frac{P_1P_2 \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$$

Finalmente de  $ABP_2$ :  $AB^2 = AP_2^2 + BP_2^2 - 2 AP_2 BP_2 \cos \delta$

Para un mejor entendimiento se ha agregado un ejemplo numérico.



Datos

$$P_1P_2 = 158,80 \text{ m.}$$

$$\alpha = 72^\circ 34' 18''$$

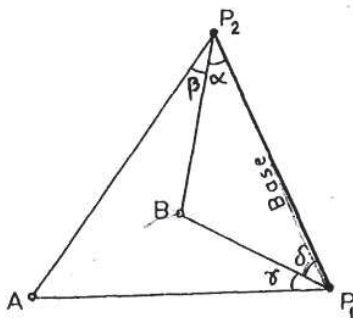
$$\beta = 34^\circ 14' 18''$$

$$\gamma = 46^\circ 06' 03''$$

$$\delta = 76^\circ 25' 27''$$

$$AB = 356,70 \text{ m.}$$

Este problema se puede generalizar teniendo en cuenta las variantes que resultan de las distintas posiciones que puede ocupar la base respecto a los extremos de la distancia AB a medir. A continuación se indican tres ejemplos gráficos con las medidas de campaña y el resultado correspondiente.



$$\text{Base } P_1P_2 = 153,69 \text{ m}$$

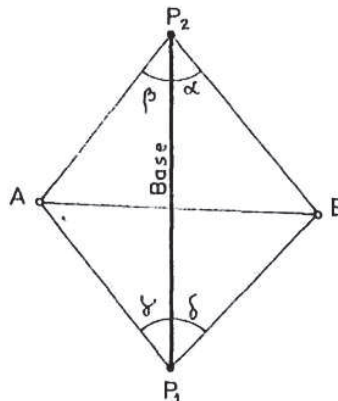
$$\alpha = 32^\circ 05' 21''$$

$$\beta = 34^\circ 05' 55''$$

$$\gamma = 34^\circ 39' 31''$$

$$\delta = 28^\circ 14' 12''$$

$$AB = 116,79 \text{ m}$$



$$\text{Base } P_1P_2 = 144,14 \text{ m}$$

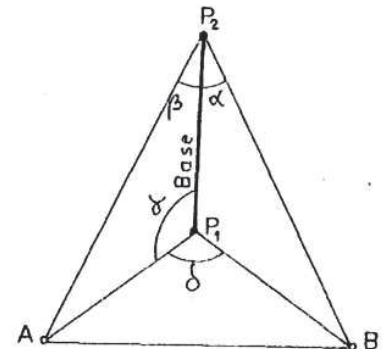
$$\alpha = 45^\circ 27' 51''$$

$$\beta = 49^\circ 11' 36''$$

$$\gamma = 45^\circ 27' 08''$$

$$\delta = 48^\circ 51' 14''$$

$$AB = 155,86 \text{ m}$$



$$\text{Base } P_1P_2 = 128,14 \text{ m}$$

$$\alpha = 25^\circ 15' 40''$$

$$\beta = 24^\circ 05' 17''$$

$$\gamma = 133^\circ 29' 24''$$

$$\delta = 93^\circ 40' 14''$$

$$AB = 207,05 \text{ m}$$

## 8. RED DE DETALLE (LEVANTAMIENTO PLANIALTIMÉTRICO)

Radiación por métodos tradicionales

Observación

Cálculo de coordenadas y precisiones

Radiación por métodos de posicionamiento global (GPS)

Observación

Cálculo de coordenadas y precisiones

Para obtener el modelo cartográfico, es importante tomar datos que permitan la descripción del terreno: líneas estructurales, puntos de relleno etc., independientemente de la metodología o del instrumental utilizado en su obtención.

Los puntos de relleno son aquellos que definen la topografía del terreno. La cantidad de puntos de relleno captados dependerá del relieve y de los detalles planimétricos a representar.

Las líneas de ruptura describen cambios en la pendiente del terreno y no pueden ser descritos mediante puntos de relleno. Algunas de estas líneas están representadas por: taludes, vaguadas, divisorias, etc.

### 8.1 Radiación por métodos tradicionales

Observación

Cálculo de coordenadas y precisiones

#### 8.1.1 Observación

Una vez conocidas las coordenadas de la red básica en el sistema de coordenadas adoptado para el proyecto, el siguiente paso es observar los puntos de la red de detalle por el método de radiación.

El método de radiación consiste simplemente en medir coordenadas polares de los puntos del terreno que se desea situar.

El equipo para realizar el levantamiento estará formado por: Estación total, trípode de madera, cinta métrica, bastón, jalón, prisma o miniprisma, otros accesorios



Es recomendable realizar un reconocimiento del terreno con el fin de decidir las zonas a levantar desde cada estación (teniendo en cuenta la distancia máxima de radiación)



así como para decidir dónde puede ser necesaria la radiación sin reflector por razones de inaccesibilidad (muros, escarpes y desplomes).

Los datos de campo serán:

- Lecturas acimutales a las referencias y a los puntos radiados
- Lecturas cenitales
- Distancias
- Altura de instrumento
- Altura de la señal, a la que se ha realizado la puntería
- Breve descripción del punto radiado

Dado que la toma de datos puede ocupar bastante tiempo, con el consiguiente riesgo de que el aparato sufra algún movimiento extraño, es conveniente visar una referencia bien definida periódicamente, así como al inicio y al final de cada estacionamiento.

La toma de datos se complementa con los croquis que identifican correctamente cada punto y que serán de gran ayuda en la edición cartográfica (plano topográfico). Los puntos levantados deben definir correcta y totalmente el terreno: vaguadas, divisorias, líneas de ruptura, puntos de relleno y puntos de detalle planimétricos (árboles, edificios, etc.).

Todas las observaciones de los puntos radiados quedan almacenados en la memoria interna de la estación (libreta electrónica) y se pueden transferir al ordenador en formato ASCII directamente, o mediante un elemento auxiliar (lectoras).

### **8.1.2 Cálculo de coordenadas y precisiones en métodos tradicionales**

Un paso previo al cálculo, es la comprobación de los ficheros para corregir las observaciones en las que haya incidencias que se hayan anotado en la libreta de campo.

Tras la comprobación de los ficheros, se procede al cálculo de las desorientaciones de todas las estaciones desde las que se ha radiado, utilizando las observaciones a puntos de coordenadas conocidas.

Una vez calculadas las desorientaciones, con ayuda de un programa de cálculo (TOPCAL, hojas Excel, u otros) se hace el cálculo de la radiación. Se seleccionan los ficheros de observaciones y los ficheros de puntos en los que se encuentran las coordenadas de todas las bases con sus correspondientes desorientaciones y se realiza el cálculo de las coordenadas de todos los puntos observados. Se obtiene un fichero con el número y coordenadas de cada punto.

Por último se exporta este fichero a un formato DXF para su posterior tratamiento mediante algún programa de CAD.

En el programa de dibujo AutoCad, se puede observar el estado de la nube de puntos y detectar posibles errores como zonas del terreno poco definidas.

### **Precisión Planimétrica en Radiación**

Para calcular el valor del error máximo que se ha cometido en el trabajo, es necesario realizar los cálculos con los valores más desfavorables. El valor de la distancia, será, por tanto, la distancia máxima a la que hemos radiado. La precisión vendrá dada por el valor máximo de error o incertidumbre longitudinal o transversal correspondiente a la distancia máxima a la que se ha radiado.

Recordemos que el error o incertidumbre transversal viene dado por:

$$e_T = e_a \sqrt{2} D$$

Siendo  $e_a$ :

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

- $e_v$  Incertidumbre de verticalidad.
- $e_d$  Incertidumbre de dirección.
- $e_p$  Incertidumbre de puntería.
- $e_l$  Incertidumbre de lectura.

y el error o incertidumbre longitudinal:

$$e_L = \sqrt{e_{\text{estandar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- $e_{\text{estandar}} = a_{\text{mm}} + b_{\text{mm}} D_{\text{Km}}$  Incertidumbre propia del distanciómetro o el error en la medida de las distancias, debida al equipo. Donde:  
a = error sistemático del aparato.  
b = error que comete el aparato dependiendo de la distancia medida y definida en partes por millón.
- $e_e$  Incertidumbre de estacionamiento, o error que se comete al estacionar el instrumento.
- $e_s$  Incertidumbre de señal o error producida en la señalización del punto. El objeto con el que se indica el punto, no se sitúa en su lugar exacto, sino cercano a él.
- $e_j$  Incertidumbre por inclinación del jalón, el jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca un error o incertidumbre en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:  $e_j = m \cdot \text{sen } \beta / \cos \alpha$

El mayor de los valores (longitudinal o transversal) será la incertidumbre o error total debido a la radiación, y por tanto será el error planimétrico a posteriori en el método de radiación.

### Precisión Altimétrica en Radiación

El error máximo o incertidumbre altimétrica a posteriori ocasionada por aplicar el método de radiación en la red de detalle, vendrá dado por la incertidumbre que se obtiene en un desnivel calculado por nivelación trigonométrica:

$$e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

- $e_i$  incertidumbre en la determinación de la altura de instrumento
- $e_t$  incertidumbre en el cálculo del término t
- $e_m$  incertidumbre en la medida de la altura de la señal.

Para calcular el error que cometemos en la medida del término t, debemos calcular la expresión con el valor del ángulo vertical más desfavorable, además de la distancia máxima a la que hemos radiado.

$$e_r = \sqrt{(\cos^2 V) e_D^2 + (D^2 \operatorname{sen}^2 V) e_{a \text{ cenital}}^2}$$

- $e_D$  incertidumbre
- $e_{a \text{ cenital}}$  incertidumbre en una dirección angular cenital observada

## 8.2. Radiación por métodos de posicionamiento global (GPS)

### 8.2.1 Observación

Si la orografía del terreno lo permite se puede optar por trabajar con metodología GPS, con observaciones en estático rápido en tiempo real (RTK).

Es importante aclarar que los trabajos de GPS en tiempo real (RT) no son una forma de posicionamiento, sino una manera de calcular las líneas-base que se originan en posicionamientos diferenciales.

El fundamento de! método consiste en establecer una estación fija de referencia, estática, y otra estación móvil, en los puntos del terreno que se desee tomar datos. Para trabajar con este método es necesaria una inicialización del equipo, que supone el cálculo de todos los parámetros de la línea base que une el móvil y la referencia en un instante. Una vez realizada esta operación, se conservan los valores de las ambigüedades, lo que hace que el número de incógnitas se reduzca a tres (X, Y, Z del equipo móvil), y que se requieran menos épocas de información para resolver el sistema, y por lo tanto menor período de puesta de observación.

Al equipo fijo se le introducen sus coordenadas (calculadas en el ajuste de la red). Este equipo emite señales a los equipos móviles y se procede a realizar el levantamiento.

El equipo fijo se estaciona sobre uno de los vértices de la red básica que se considerará como vértice de referencia, y será el encargado de transmitir la posición a los equipos móviles, encargados del levantamiento.

El tiempo real se consigue estableciendo una comunicación en directo entre el equipo fijo y el móvil, de tal forma que las ambigüedades se resuelven en el momento de la toma de datos y es, en ese mismo instante, cuando se calcula la línea-base requerida, o lo que es lo mismo, las coordenadas del punto móvil dadas desde el equipo fijo.

Este método presenta la ventaja de que se obtienen resultados fiables y con una precisión  $\pm 2$  cm en poco tiempo, pero presenta el inconveniente de la posible pérdida de señal. Si esto se produce, es necesario volver a determinar las ambigüedades en el lugar donde se produjo la pérdida de señal.

Las formas de establecer radio-comunicación entre equipos se consigue con la incorporación de radio módems, telefonía móvil, sistema de tracking, en ambos receptores.

El montaje del equipo en la estación de referencia se realiza sobre un trípode como se muestra en la siguiente figura



El montaje del equipo móvil en los trabajos topográficos en tiempo real se realiza sobre bastón, tal como se muestra en la figura

Los receptores se configuran de forma que el equipo fijo sea capaz de emitir a través de su radio módem una serie de correcciones al equipo receptor. Este interpretará dichas correcciones modificando las coordenadas que está obteniendo de los satélites, consiguiendo calcular la línea-base con precisiones de 20 mm + 1 ppm.

El trabajo en tiempo real se encuentra limitado por el radio enlace. Los radio módems (0,5 w.) no alcanzan más de 8 Km. Este problema se resuelve empleando telefonía móvil que asegure enlaces a larga distancia.

En resumen, las fases del trabajo son:

- Estacionamiento de la referencia en un punto de coordenadas conocidas, introducción de sus coordenadas y puesta en marcha
- Montaje del equipo móvil e inicialización del mismo
- Toma de datos asignando códigos a los puntos para reconocerlos cuando se vuelquen al ordenador a través de la terminal
- Cambio de estación cuando ha sido necesario

La definición de la máscara para la observación se programa también con anterioridad.

Cada punto se graba con su código correspondiente. Los puntos erróneos se editan en el momento, o bien se anotan para después corregir en gabinete.

La planificación de la zona de trabajo condiciona el número de vértices en los que se estaciona el aparato fijo para poder utilizar los otros dos aparatos móviles con un enlace de radio válido.

El cálculo puede realizarse de forma inmediata a la recepción de las observaciones en la unidad de control, obteniendo las coordenadas al momento, es decir, en tiempo real. Para ello se han incorporado los algoritmos de cálculo o parte de ellos, a los controladores para este tipo de aplicaciones.

El cálculo en tiempo real presenta la ventaja de eliminar el tiempo que se invierte en insertar, tratar y procesar los datos. También tiene inconvenientes, entre los que destacan:

- La limitación de los radio-modem de emisión y transmisión de datos.
- Imposibilidad de comprobar los ficheros de observación.
- Limitación en las correcciones de tipo atmosférico.
- Limitación en los procesos de transformación de coordenadas.
- Escaso tratamiento e información estadística.
- Escasa manipulación de los parámetros de cálculo.



El procesamiento de estas observaciones puede ser realizado con un software post-proceso, previa inserción de los datos de observación necesarios, ya sea en campo o en gabinete.

### 8.2.2 CÁLCULO DE COORDENADAS Y PRECISIONES CON GPS

Al trabajar con del método RTK, el cálculo de coordenadas se puede realizar automáticamente en campo. El receptor móvil con los datos que recibe vía radio-módem calcula líneas base y coordenadas de los puntos que se van tomando. Como sólo existe una línea base para cada punto no es necesario ajustar observaciones, simplemente se arrastran coordenadas desde la referencia.

El uso de equipos GPS, y concretamente en modo RTK permiten:

- Una mayor rapidez y un mayor rendimiento
- Reducir el trabajo de gabinete a un volcado de datos (sin considerar la edición cartográfica o plano).
- Usar varios receptores móviles de forma simultánea acelerando el proceso de toma de datos.

Terminado el trabajo de campo las fases de cálculo son:

- Descarga de datos. Tanto el equipo fijo como los dos equipos móviles mediante el programa informático correspondiente.
- Cálculo del levantamiento.

Se transforman los datos medidos a ficheros de trabajo compatible con el programa de cálculo, para trabajar con la nube de puntos del levantamiento.

- Crear un proyecto nuevo.
- Importar los archivos que generan la nube de puntos. Aparecen los vértices donde se estacionó el aparato fijo con sus correspondientes radio-vectores a los puntos medidos.
- Exportar la nube de puntos a ficheros con extensión .dxf para poder trabajar con programas de dibujo (Autocad) y realizar la edición del plano a la escala del levantamiento.

## 9. PRECISIÓN FINAL DEL LEVANTAMIENTO

### Precisión Planimétrica a posteriori

Realizado el trabajo de campo, se debe calcular la precisión final que se ha obtenido en el levantamiento para comprobar que se han cumplido los requisitos previos de tolerancias.

La precisión final vendrá dada por el error o incertidumbre de un punto radiado, y el encadenamiento de las incertidumbres de los métodos utilizados en las redes en las que se apoya la radiación

$$E_{TOTAL} = \sqrt{E_{red}^2 + E_{rad}^2}$$

Los parámetros estadísticos del ajuste mínimo cuadrático de la red, ya proceda de una observación por topografía clásica o de un ajuste de observaciones GPS, expresan el error o incertidumbre.

El error máximo planimétrico en la radiación, dependerá del método de observación utilizado:

- POR TOPOGRAFÍA CLÁSICA

La precisión vendrá definida por el mayor de los errores o incertidumbres propios de la radiación, es decir el mayor de los valores obtenidos en el error o incertidumbre longitudinal y transversal:

$$e_T = e_a \sqrt{2} D$$

Siendo  $e_a$ :

$$e_a = \sqrt{e_v^2 + e_d^2 + e_p^2 + e_l^2}$$

$$e_L = \sqrt{e_{\text{estandar}}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2}$$

- POR MÉTODOS GPS

Se admite que la precisión planimétrica al aplicar el método de RTK es de  $\pm 2\text{cm}$ .

### Precisión Altimétrica a posteriori

De igual modo, la precisión altimétrica vendrá dada por la componente cuadrática de la precisión obtenida en la red básica y la precisión obtenida al aplicar el método de radiación.

$$E_{\text{altimetrica}} = \sqrt{E_{\text{altimetrica RADIACIÓN}}^2 + E_{\text{altimetrica RED}}^2}$$

Ha de cumplirse que este valor sea inferior a la tolerancia altimétrica definida en el pliego de condiciones del trabajo o derivadas de la escala de representación.

La precisión de la red básica vendrá dada por los parámetros estadísticos del ajuste mínimo cuadrático, tanto cuando las observaciones se han realizado por topografía clásica o GPS.

El error máximo o incertidumbre en la radiación dependerá del método de observación utilizado:

- POR TOPOGRAFÍA CLÁSICA

La precisión vendrá dada por el error máximo o incertidumbre del método de radiación. En la red de detalle el desnivel se calcula por nivelación trigonométrica y su precisión es:

$$e_{\Delta H} = \sqrt{e_i^2 + e_t^2 + e_m^2}$$

- POR MÉTODOS GPS

Se admite que la precisión altimétrica al aplicar el método de RTK es de  $\pm 2\text{ cm}$ .

## 10. ESTACIÓN LIBRE

**Intersección inversa (cálculo de coordenadas de estación y orientación)**

El programa que traen las estaciones totales, calcula la posición y la altura de la estación del instrumento, así como la orientación del círculo horizontal a partir de la medición de por lo menos dos puntos de coordenadas conocidas.

Las coordenadas de los puntos de enlace se pueden ingresar manualmente o transferirse previamente al instrumento.

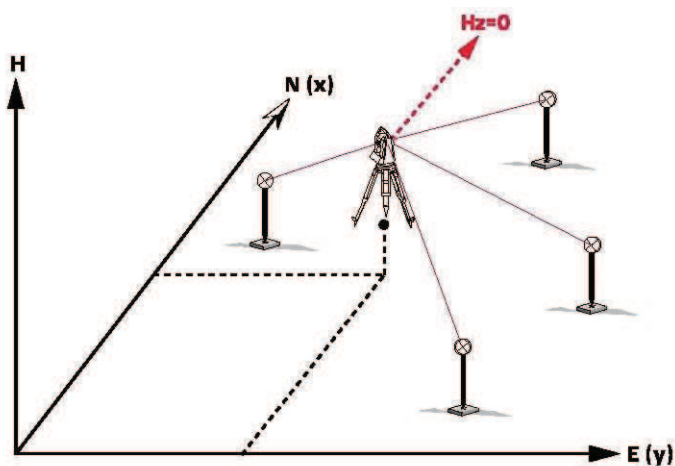
En proyectos grandes en los que se requiere efectuar mediciones o replanteos la puesta en estación libre tiene la gran ventaja de que el operador puede elegir la ubicación del instrumento que resulte más conveniente.

De esta forma, ya no queda obligado a colocarse en un punto de coordenadas conocidas pero con una ubicación poco satisfactoria.

Las opciones los procedimientos de medición se describen a detalle en los manuales del usuario.

**Nota:**

Al efectuar trabajos topográficos que impliquen la determinación de alturas o el replanteo de las mismas, tenga siempre presente que debe tomar en cuenta la altura del instrumento y la del reflector.



continúa