Algebra Lineal y Geometría.

Unidad n°8: Algebra Vectorial.

AGREGAR EJERCICIOS A MODO DE EJEMPLO

Sea (V; +; R; .) espacio vectorial con producto interior.(e.v.p.i.)

- Propiedad 1:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i \qquad b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j . y_j$$

$$\text{con} \quad \alpha_i ,\ \beta_j \in R \quad y \quad x_i , y_j \in V$$

$$< a ; b >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i . \beta_j < x_i ; y_j >$$

- Caso particular:

$$< \alpha x + y ; \alpha x + y >= \alpha^2 < x ; x > + 2\alpha < x ; y > + < y ; y >$$

- Propiedad 2: $< x ; \theta > = < \theta ; x > = 0 \quad \forall x \neq \theta_V$

Contenidos

- *Función Producto Interior. Espacio Vectorial Euclidiano. Espacio métrico. Propiedades. Módulo o norma de un vector. Ortogonalidad. Desigualdad de Schwarz. Desigualdad Triangular. Angulo entre dos vectores no nulos. Conjunto Ortogonal de vectores. Base Ortonormal. Proyección de un vector sobre otro. Producto Vectorial. Producto mixto.*

Función Producto Interior.

- Sea (V; +; R; .) Espacio Vectorial Real sobre el cuerpo de los números reales.
- **Función Producto Interior en V**

$$<;>: V\mathrm{x}V \to R \ / \text{que satisface:}$$

$$\langle x ; y\rangle = \langle y ; x\rangle$$

$$\langle x + y; z\rangle = \langle x ; z\rangle + \langle y ; z\rangle$$

$$\langle \alpha x ; y\rangle = \langle x; \alpha y \rangle = \alpha \langle x ; y\rangle$$

$$\langle x ; x\rangle \geq 0, \ \forall x \in V$$

$$\langle x ; x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta_V$$

- **Introduce una métrica en V.**
- **Espacio Vectorial Euclidiano.**

Producto Interior Usual.

En $(R^n;+;R;.)$ espacio vectorial real.

$<;>: R^n \times R^n \rightarrow R / <x;y>=x^T.y$

$$< x;y > = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

PRODUCTO INTERIOR USUAL

- $a=(a_1; a_2 ; \ldots; a_n)$ y $b=(b_1; b_2 ; \ldots; b_n) \in R^n$

$$\langle a ; b \rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n$$

$$\langle a ; b \rangle \in R$$

Si n = 2; $\quad <x;y>= x_1.\, y_1+x_2.y_2.$

Si n = 3; $\quad <x;y>= x_1.\, y_1+x_2.y_2+x_3.\, y_3.$

Módulo o Longitud de un vector

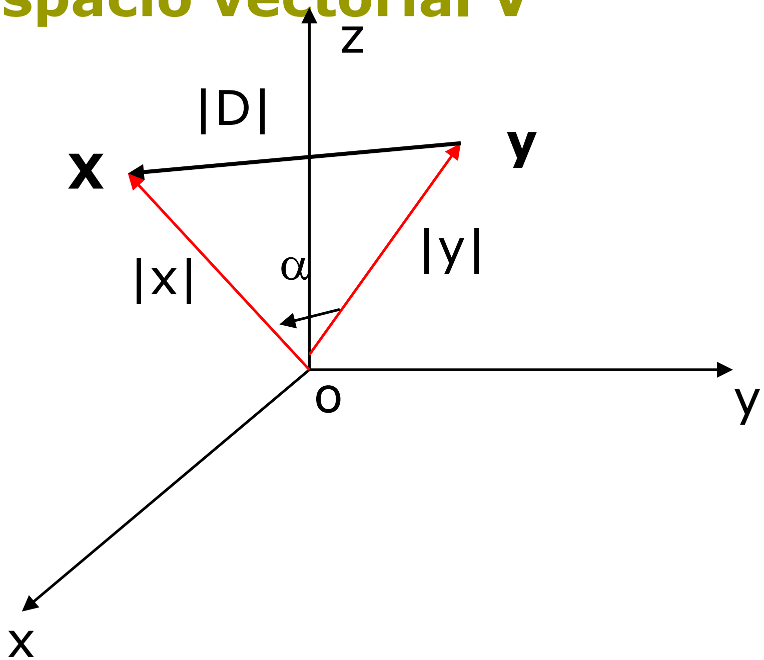
- Módulo de un vector en un espacio vectorial con producto interior, es la raíz cuadrada no negativa del producto interior de dicho vector por si mismo.

$$\boxed{|x| = \sqrt{< x; x >}} \Rightarrow |x|^2 = < x; x >$$

Demostrar

$\langle x;y\rangle = |x|.|y|.\cos\alpha = x_1.\ y_1+x_2.y_2+x_3y_3$ con x e y elementos del espacio vectorial V

$D = x - y$



Demostrar

- El módulo del producto de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por el módulo del vector.

$$\| \alpha\, x \| = | \alpha | . \| x \| \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

- El producto de un vector no nulo por el recíproco de su módulo, es un vector de módulo 1.

$$x \neq \theta; \quad \left\| \frac{1}{\|x\|} . x \right\| = 1 \qquad \boxed{x_0 = \frac{1}{\|x\|}.x}$$

x_o versor de x

Ortogonalidad

- Si dos vectores son ortogonales, su producto interior es nulo.

  $x \perp y \Rightarrow <x;y>=0$ con x e y vectores de un espacio vectorial con producto interior.

- Conjunto Ortogonal de vectores:Un conjunto de vectores de un espacio vectorial con producto interior es un ortogonal si y solo si dos vectores cualesquiera y distintos son ortogonales.

Demostrar:

- Teorema de Pitágoras.
- Desigualdad de Schwarz: En todo espacio vectorial con producto interior, el valor absoluto del producto interior de dos vectores cualesquiera es menor o igual que el producto de los módulos de dichos vectores.
- Desigualdad Triangular: En todo espacio vectorial con producto interior, el módulo de la suma de dos vectores cualesquiera es menor o igual que la suma de sus módulos.

Angulo de dos vectores no nulos .

- El número real φ que satisface:

$$\mathbf{0} \leq \varphi \leq \pi$$

$$\cos\varphi = \frac{\langle a;b \rangle}{\|a\|.\|b\|}$$

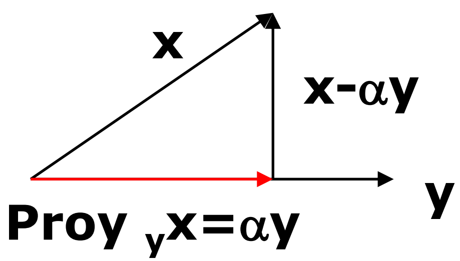
Base Ortonormal.

- Sea (V;+;R,.) espacio vectorial con producto interior y A=$\{x_1; x_2; ....; x_n\}$ base de V.

- A es una base ortonormal de V, si y solo si, A es un conjunto ortogonal de vectores de módulo 1.

Proyección Ortogonal de un Vector sobre Otro.

- Sean x e y dos vectores de un espacio euclidiano y uno de ellos distinto del vector nulo, entonces existe $\alpha \in R / (x - \alpha y) \perp y$

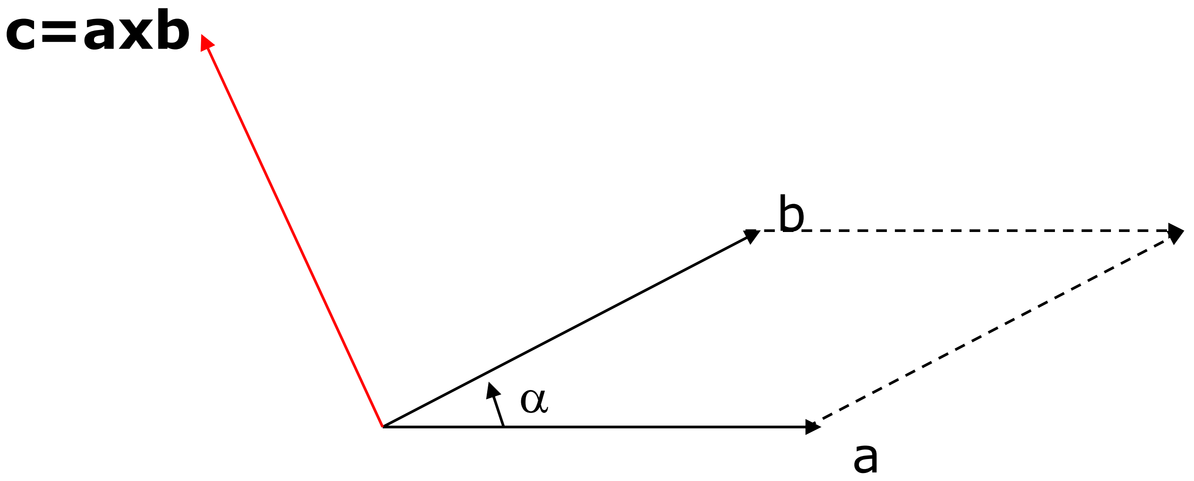


$$\mathrm{Proy}_{\,y}\, x = \frac{<x;y>}{|y|} \in R$$

Producto Vectorial. (x)

- Sea (R^3; +; R; .) espacio vectorial real.
- $\forall$**a, b** $\in$ $\mathbf{R^3}$**: a x b = c, c** $\in$ $\mathbf{R^3}$,
- La dirección de (a x b) es perpendicular al plano determinado por los vectores a y b .
- El sentido de (a x b) es tal que la terna (a ; b ; a x b) tiene la misma orientación que la base { i ; j; k }

$$\left\| a \ x \ b \ \right\| = \left\| a \right\| . \left\| b \right\| .sen \ \alpha$$


c=axb
b
α
a

Propiedades

- $a \times b = -(b \times a)$
- $\alpha(a \times b) = \alpha a \times b = a \times (\alpha b)$
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- Si $a \parallel b \Rightarrow a \times b = \theta_{R^3}$

  $a \perp b \Rightarrow |a \times b| = |a| . |b|$

Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial.

- $|a \times b| \in R$
- $|a \times b|$ es el área del paralelogramo que tiene por lados a los vectores “a” y “b”

Producto vectorial en función de las componentes de los vectores “a” y “b” de R^3

- $\{i; j; k\}$ base ortonormal de R^3.
- Determinar: $i \times i$; $j \times j$; $k \times k$; $i \times j$; $j \times k$; $k \times i$; $j \times i$; $k \times j$; $i \times k$.
- Sean $a = (a_1; a_2; a_3)$ y $b = (b_1; b_2; b_3) \in R^3$.

✍Hallar a x b en función de las componentes de a y de b.

Producto vectorial en función de las componentes de los vectores "a" y "b" de R^3

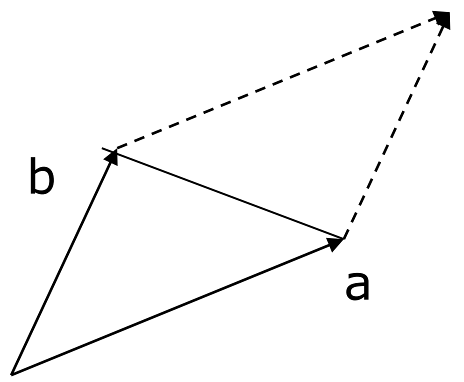
- $a=a_1 i+a_2 j+a_3\ k$ y
- $b = b_1\ i + b_2\ j + b_3\ k$
- $a x b=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$

$$\boxed{a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \in R^3}$$

Aplicación

- i) área del paralelogramo que tiene por lado a dichos vectores: $\left\| \boldsymbol{a} \ \mathbf{x} \ \boldsymbol{b} \right\|$

- ii)área del triángulo: $\dfrac{1}{2}\left\| \mathrm{a \ x \ b} \right\|$



Producto Mixto

- Dados tres vectores de R^3

$a = (a_1; a_2; a_3)$, $b = (b_1; b_2; b_3)$ y

$c = (c_1; c_2; c_3)$ en ese orden.

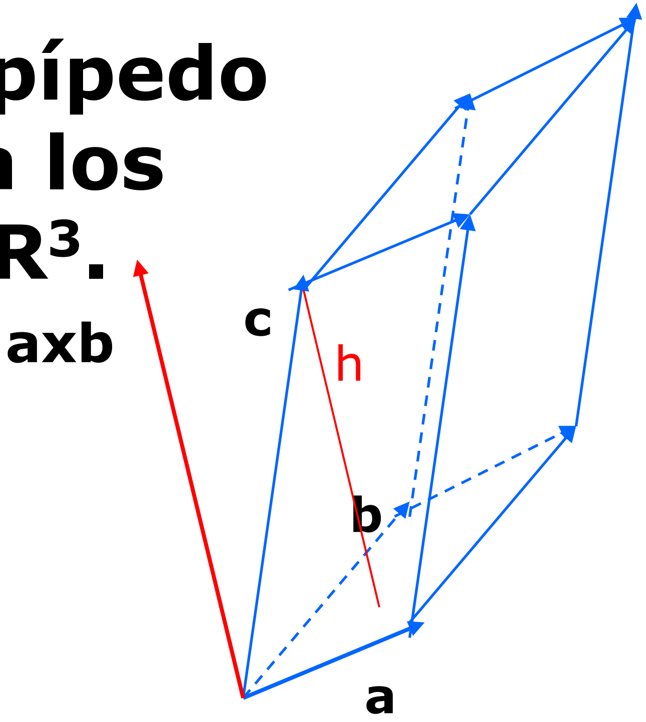
Producto mixto de a, b y c: $\langle \mathbf{a \times b ; c} \rangle$.

$$\boxed{< a \times b ; c > = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \in R}$$

Interpretación Geométrica de <axb;c>

$$\boxed{<a \times b; c> = V}$$

V: volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores a, b y c de R^3.



Aplicaciones

- El producto mixto $\langle a \times b ; c \rangle$ es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores a , b y c.

- a, b y c son coplanares $\Rightarrow \langle a \times b ; c \rangle = 0$