FUNDAMENTOS DE INSTRUMENTAL

ERRORES

Introducción

Toda medición cualquiera sea su tipo está afectada de error, tomando el término ***Error*** en referencia a una vacilación o indeterminación inevitable de las mediciones y no a una equivocación.

Ninguna medición es exacta porque nunca se conoce el valor verdadero de su magnitud que si bien existe, no puede determinarse, salvo que se admita como Valor Exacto al obtenido a través de mediciones efectuadas por métodos geodésicos con un orden de precisión muy superior.

Los errores, como todos los fenómenos naturales, obedecen a ciertas leyes que es indispensable conocer y en las cuales nos apoyamos para establecer los métodos de medición más adecuados y las tolerancias con las que vamos a trabajar.

Causa de los errores

Se las puede clasificar en tres grandes grupos:

- ***Personales***: asociados a las características físicas, nivel de adiestramiento y técnica operativa del observador. Por ejemplo, la limitación de los sentidos**,** principalmente el de la vista.

- ***Instrumentales***: asociados a la limitación constructiva del instrumental de medición y/o falta de calibración o mantenimiento del mismo.

- ***Naturales***:: por la variación continua de las condiciones ambientales como temperatura, presión, humedad, etc., que a pesar de ser tenidos en cuenta, comprometen la estabilidad dimensional o de funcionamiento del instrumental de medición.

Clasificación Fundamental de los Errores

***Errores groseros*:** es la discrepancia grosera entre el resultado de la observación o cálculo realizado y el real, debido a impericia del técnico. Son las equivocaciones que resultan de un descuido o perturbaciones evitables no percibidas por el observador y que pueden ser evitados operando con cuidado. Su magnitud excede la que puede preverse teniendo en cuenta los medios con los que se opera. Si se producen se deben eliminar detectándolos y repitiendo las observaciones o eliminando las que estén afectadas por los mismos.
Los ***errores groseros*** suelen ser grandes en relación con la magnitud que se mide, mientras que los ***errores*** son, en general, muy pequeños.

***Errores sistemáticos*:** son aquellos que, en igualdad de condiciones se repiten siempre en la misma cantidad y con el mismo signo. Este tipo de error tiende a acumularse en función del número de medidas que se tomen y obedece siempre a una ley matemática o física, por lo tanto, puede determinarse su magnitud y aplicarse la corrección correspondiente en la mayor parte de los casos. Se originan por la imperfección de alguna teoría física o de los instrumentos empleados y se dividen en dos grupos: a) Los que pueden eliminarse mediante la aplicación de correcciones. b) Los que solamente pueden atenuarse, porque la corrección que se aplica no es del todo correcta. Estos siempre dejan errores sistemáticos residuales y su existencia es casi inevitable. Ejemplos: la medición de direcciones con teodolitos mal graduados, la medición de distancias con cintas mal graduadas, con parches, etc.

Errores accidentales o aleatorios: Son aquellos producidos por factores que no pueden ser controlados por el observador y obedecen únicamente a la ley del azar; dentro de éstos entran los sistemáticos residuales. Su característica principal es que actúan de un modo irregular por lo que no pueden cuantificarse, y tienen igual probabilidad de ser positivos o negativos. Solamente es posible evaluar los efectos de su propagación, aplicando parámetros estadísticos y como obedecen a la ley de probabilidades en ocasiones, tienden a compensarse en observaciones sucesivas.
Los errores aleatorios quedan aún después de hacer la corrección de los errores sistemáticos.

Clasificación de los Errores Accidentales

Errores Verdaderos y Aparentes

Si se conociera la medida real de una magnitud y se midiera varias veces la misma, al comparar los distintos valores obtenidos con la medida exacta se obtienen los errores verdaderos cometidos en cada caso.

Esta medida real o exacta es imposible de conocer, entonces se adopta una medida más o menos aproximada: ***el Promedio o Media Aritmética*** que al compararla con las medidas realizadas permite obtener una serie de errores aparentes o residuos que si se pueden conocer.

a) Verdaderos: $e_i = x_i - X_e$ donde: x_i = valor de una observación

b) Aparentes: $v_i = x_i - \overline{X}$ X_e = valor exacto

$\overline{X}$ = Media Aritmética

Promedio o Media Aritmética: es el valor más probable de las medidas efectuadas siempre que hayan sido realizadas en las mismas condiciones. El valor más probable se aproximará tanto mas al verdadero cuanto mayor sea el número de medidas realizadas.

Siendo *n* el número de observaciones y x_i el resultado de cada una de ellas, se puede calcular un valor promedio cercano a la medida exacta:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \quad (1)$$

Donde X_i = valor de una observación aislada

$\overline{X}$ = Media Aritmética o Promedio

n = cantidad de observaciones

Tiene dos importantes propiedades:
a) anula la sumatoria de los errores aparentes o residuos: [V] = 0
b) hace mínima la sumatoria de los cuadrados de los errores aparentes: $[V^2]$ = MIN

Exactitud y Precisión de una medición

Exactitud: es la medida del grado de cercanía del valor más probable al verdadero. La exactitud está influenciada por errores sistemáticos no corregidos. En el gráfico 1, figuras c) y d) es un ejemplo de tiro al blanco donde ha influido una causa de error constante que es un error sistemático, por lo que se podría decir que en ambos casos los impactos son exactos.

<u>Precisión</u>: es la medida del grado de proximidad del valor medido al valor más probable entre las medidas repetidas de una misma cantidad. En el gráfico 1, una pequeña dispersión de los impactos indica alta precisión (figuras b y d) y una gran dispersión indica una baja precisión (figuras a y c).

El grado de precisión que se obtiene en una medición de campo depende de la sensibilidad del equipo, de la destreza del observador y de las condiciones ambientales imperantes.

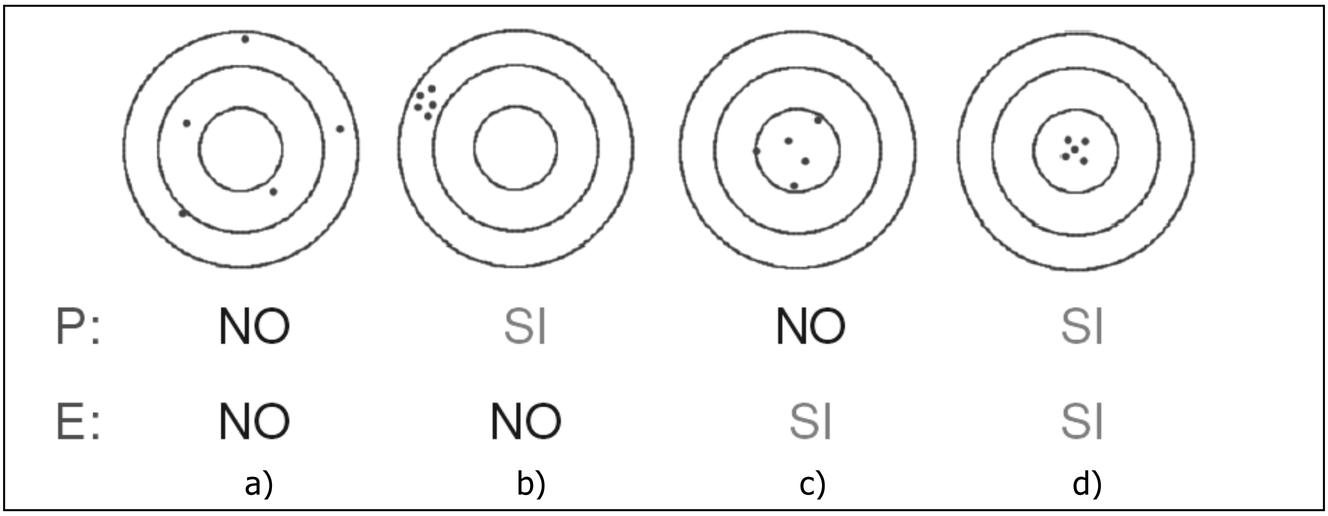

Gráfico 1: Ejemplo de Precisión y Exactitud

En el gráfico: una medida de la precisión lo da un gran número de observaciones realizadas en las mismas condiciones, mientras que una medida de la exactitud lo dan los valores medidos de distintos grupos de observaciones tomadas en diferentes condiciones. Se espera poner en evidencia los errores sistemáticos al variar las condiciones en que se realizan las observaciones.
<u>Conclusión</u>: la precisión mide los efectos aleatorios mientras que la exactitud mide los efectos sistemáticos.

Los errores medios que suelen utilizarse en las mediciones para dar una idea de la precisión con que fueron realizadas son los denominados ***Error Medio Cuadrático, Error Medio Aritmético, Error Medio del Promedio y Error Probable.***

***<u>Error Medio Cuadrático (m) o Desviación Standard</u>* <u>(σ) o rms</u>**: Se define como error medio de una observación a la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores verdaderos e_i. Como estos son desconocidos, utilizamos los errores aparentes v_i en cuyo caso, varía en una unidad el denominador del subradical.
Para conocer este error es necesario averiguar la diferencia entre cada observación y la media, o sea conocer el residuo o error residual ($V_i = X_i - \overline{X}$).

$$m = \sigma = \sqrt{\frac{[e^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[v_i]^2}{n-1}} \qquad (2)$$

De manera el error medio cuadrático se puede expresar como:

$$m = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^{\,2}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x-\overline{X})^2}{n-1}} \qquad (3)$$

El rms es el estimador más usual de la precisión de una observación y hace resaltar las observaciones cuyos errores aparentes o desvíos son fuertes. Una observación con rms menor que otra, es mas precisa que esta.

Error Medio Aritmético o Media de los errores (t): es la media aritmética de todos los errores aparentes conocidos, o sea es el cociente entre la suma de los valores absolutos de todos los errores aparentes de una serie de observaciones y el número total de estos.

$$\boxed{t = \frac{\sum |V|}{n}} \quad (4)$$

Error Medio del Promedio (M): dada la expresión del Promedio (1), aplicando la expresión general de Propagación de Errores (12) y considerando que todas las observaciones son de igual precisión (m), obtenemos:

$$\boxed{\mathrm{M} = \frac{m}{\sqrt{n}}} \quad (5)$$

Es la diferencia **mas probable** entre el valor del Promedio $\overline{X}$ y el Valor Exacto X_e (diferencia que teóricamente tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, según (5)). Surge de la Primera Premisa de Gauss que indica que el Promedio es el **Valor mas Probable** de la magnitud medida

Error Probable (e_p): analíticamente: sean v_1, v_2, ..., v_n los errores aparentes cometidos en una medida efectuada n veces, si se colocan por orden de magnitud prescindiendo del signo, se llama error probable, al situado en el centro de la serie, es decir aquel que tiene tantos errores mayores que él como más pequeños. O sea, e*l* error probable ocupa entre todos los errores de una serie de observaciones una posición equidistante de los errores extremos.
Es otro término utilizado para cuantificar la precisión, también llamado Nivel de Confianza.

Error absoluto y error relativo de una medición

El error absoluto está representado por las expresiones V, m y M (errores medios). El error relativo es el cociente entre el error absoluto y la magnitud medida (o calculada) y en las mediciones lineales el error relativo es mas indicativo de su precisión que el error absoluto, este por si mismo si no se consigna la magnitud medida carecería de significación.

El error relativo mide la precisión lineal, y se acostumbra expresarlo en forma de quebrado con la unidad como numerador.

$$\boxed{\epsilon_L = \frac{1}{\left(\frac{m}{L}\right)}} \quad (6)$$

Lo contrario ocurre en el caso de las mediciones angulares donde es el error absoluto el que expresa la precisión angular. En Topografía las precisiones lineales oscilan entre 1/200 y 1/20000.

Propagación de Errores

Cuando se hacen cálculos a partir de mediciones hechas en campo las cuales ya tienen errores, se presenta la propagación de esos errores y analíticamente se expresan de la siguiente manera:

1) **Producto**: sea X el producto de una variable x, cuyo error medio es m, por una constante a

X = a. x. El **error medio** de X será:

$$\boxed{M = a\,.m} \quad (7)$$

2) **Suma**: sea X suma de dos variables x_1 y x_2 cuyos errores medios respectivos son m_1 y m_2.

$X = x_1 + x_2$

Se demuestra que siendo igualmente probable que éstos se sumen o se resten, el **error medio** de la función X es:

$$\boxed{M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \quad (8)$$

La (8) es también válida en el caso de una resta ($X = x_1 - x_2$). En general dada la función:

$X = x_1 + x_2 + \dots\dots\dots\dots + x_n$ la expresión del **error medio** será:

$$\boxed{M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots\dots\dots + m_n^2}} \quad (9)$$

Caso Particular: sean $x_1 = x_2 = \dots\dots\dots = x_n$ medidas con igual precisión, entonces:

$m_1 = m_2 = \dots\dots = m_n = m$ caso frecuente en que las magnitudes que se suman sean iguales y afectadas del mismo error. La expresión (9) adopta la siguiente forma:

$$\boxed{M = m.\sqrt{n}} \quad (10)$$

Este caso se presenta al medir con cinta tramos de 50 m. o en una nivelación geométrica cuando se conserva equidistancia entre nivel y mira.

3) **Función lineal**: De las expresiones del producto (7) surge el error de una función lineal:

$X = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \dots\dots\dots + a_n\, x_n$ La expresión del **error medio** será:

$$\boxed{M = \sqrt{a_1^2.m_1^2 + a_2^2.m_2^2 + \dots\dots\dots\dots a_n^2.m_n^2}} \quad (11)$$

4) **Función no lineal de varias variables**: $m = f(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n)$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor se llega a la siguiente expresión de su error medio:

$$\boxed{M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_2^2}} \quad (12)$$

Expresión general de la Propagación de Errores

Se observa que las expresiones (7) (8) (9) (10) y (11) son expresiones particulares de la (12), razón por la cual ésta es de fundamental importancia.

Probabilidad de los errores

Desarrollada por Gauss, analizando una serie de gran cantidad de observaciones de **igual precisión** relacionadas a una misma magnitud, estableció cuatro premisas fundamentales:

1) La media aritmética o promedio es el valor mas probable de la magnitud medida.
2) La probabilidad de un error es función decreciente de la magnitud del mismo. Significa que errores pequeños son mas frecuentes que los grandes.
3) Errores positivos y negativos son igualmente probables.
4) La probabilidad de que un error está comprendido entre - ∞ y +∞ vale 1.

Eliminación de observaciones

Cuando una medición está presumiblemente afectada de error grosero, previo a su eliminación se debe efectuar su análisis a través de la Probabilidad de los errores. Está demostrado que:

$$\boxed{\epsilon_{max} \cong 3.\mathbf{m} \cong 4\,.\mathbf{e_p}} \qquad (19)$$

Esta expresión permite decidir sobre la eliminación de una observación presumiblemente afectada de error grosero. Su aplicación tiene algunos inconvenientes en la práctica, donde en general el número de observaciones no pasa de 10. El desplazamiento de $\overline{X}$ producido por una observación defectuosa acrecienta los residuos V y consecuentemente el valor de M. Entonces se aplican varios criterios para eliminar observaciones defectuosas, entre otras:

1) **Criterio de la Exclusión Provisoria:** Se excluye provisoriamente de la serie de observaciones, la medida presumiblemente afectada de error grosero y se efectúa el cálculo con las restantes hasta obtener el valor

$$\boxed{v_i < \epsilon_{max}} \quad \text{O sea:} \quad \boxed{x_i - \overline{X} < 3.\mathbf{m}} \qquad (20)$$

Que luego se compara con la diferencia entre la observación excluida y el Promedio.

2) **Criterio de Chauvenet:** Es elástico, adecuado al número de observaciones sin excluir ninguna, consiste en eliminar aquella observación cuya probabilidad de aparecer en la serie sea inferior a:

$$\boxed{\frac{1}{2n}} \qquad (21)$$

Tolerancias

Durante las mediciones se comenten errores tanto en distancia como en ángulo. La magnitud del error se obtiene comparado el valor observado con el valor esperado o teórico y se conoce con el nombre de error de cierre. Una de las variantes en el criterio de tolerancias es tomar como error máximo permitido:

$$\boxed{e_{max} \approx 3\sigma} \qquad (22)$$

Para las mediciones topográficas es conveniente partir siempre de la precisión exigida para el Promedio que dependerá de la necesidad técnica del relevamiento. O sea fijar el valor de M (o m) y luego elegir el instrumental y método de medición que permita cumplir con la tolerancia fijada.