

**APUNTES DE**

**GEODESIA**

**Federico Mayer**

**LA PLATA**

**2009**

## **NOTA PRELIMINAR**

---

---

Al terminar un período, que supera los 20 años, a cargo de la Cátedra de GEODESIA en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI-UNLP), quiero dejar la última versión de los APUNTES que preparé como guía de mis clases.

La primera fue preparada en 1985 para los alumnos de la carrera de Geofísica (FCAG) y luego, en 1986, fue reproducida con leves modificaciones para alumnos de Agrimensura en la Facultad de Ingeniería (FI).

A partir de allí se fueron introduciendo algunas modificaciones pero recién en esta oportunidad se ha efectuado una revisión pormenorizada.

Hubo dos requerimientos de actualización, el primero de carácter formal está vinculado con los cambios de programas y planes de estudio. El segundo fue impuesto por la evolución de la tecnología; sin embargo, tanto en la formulación de programas como en el desarrollo de clases, me pareció prudente conservar la transmisión de algunos conceptos y modos de trabajos que parecen obsoletos (ejemplos: determinaciones astronómicas y triangulación) pero son necesarios para tomarlos como fundamentos de otros temas y también para ayudar a evaluar discrepancias cuando se requiere compatibilizar trabajos antiguos con nuevas determinaciones. Los apoyos geodésicos antiguos eran menos precisos pero, por lo general, abarcaron mayor densidad de información de campo, incluyendo la que corresponde a levantamientos apoyados por los mismos, ello nos lleva a pensar que durante varios años será necesario vincular antiguas redes y adaptar sus resultados.

Talvez los lectores noten que lo relacionado con la gravimetría es muy escueto y que la observación de técnicas satelitarias (GPS o GNSS en general) no cuenta con el detalle suficiente. De lo primero soy totalmente responsable de haber tomado la decisión de simplificarlo para darle mayor lugar a otros conceptos de marcada aplicación práctica para la Agrimensura.

En cuanto a lo relacionado con Geodesia Satelitaria, la falta de detalle aludido surge de la existencia de dos asignaturas: Instrumental y Técnicas Especiales e Ingeniería de Levantamientos; en las mismas se amplían los fundamentos, las técnicas de mediciones y los procesos a los que se someten las mismas.

Cabe asimismo aclarar que estos apuntes son simplemente una guía para el desarrollo teórico, su aprovechamiento mejorará con la ejecución de los trabajos prácticos y se obtendrá un óptimo resultado si se lo complementa con consultas a la bibliografía.

El análisis bibliográfico en inglés es un entrenamiento eficaz para acostumbrarse a leer novedades y en muchos casos, interpretar correctamente los manuales de equipos con los que se va tomando contacto. Por lo tanto, es aconsejable su práctica.

Si bien espero que estos apuntes sean útiles algunos años después de mi alejamiento de la docencia, soy consciente que no van a alcanzar la prolongada

utilización que lograron las LECCIONES DE GEODESIA que dejó el más prestigioso de los docentes que pasaron por esta cátedra: el Ing. Félix AGUILAR y que resultaron útiles durante más de 60 años.

No tuve el privilegio de conocer a Aguilar, pero sí a algunos de sus discípulos como el Ing. Heliodoro NEGRI (mi primer profesor de Geodesia) y el Ing. Simón GERSHANIK (que, si bien se dedicó a sismología, me transmitió mucho de la trayectoria del mismo). También tuve la oportunidad de conversar bastante con su hija: Inés Aguilar.

Dentro de las razones que me impulsan a dejar este texto está la necesidad de compartir la suerte de haber tenido acceso a cierta información. En la Universidad de Buenos Aires alcancé a ser alumno del Ing. Eduardo BAGLIETTO y en la Dirección de Geodesia (P.B.A.) disfruté durante más de 7 años del asesoramiento del Ingeniero Esteban HORVAT, cuyos conceptos forjaron gran parte de mi formación y criterio profesional. Horvat había sido profesor de Geodesia en la Universidad de Zagreb, Croacia, donde llegó a ser Rector. Durante la dictadura del Mariscal TITO fueron asesinados dos de sus hijos y él logró refugiarse en Italia, allí lo contactó y lo convocó uno de los directores del Instituto Geográfico Militar Argentino, donde desarrolló una fructífera labor, que se complementó con el mencionado asesoramiento a la Provincia de Buenos Aires.

Independientemente de lo mencionado, también tuve acceso a la obra "HANDBUCH DER VERMESSUNGSKUNDE" de Jordán - Eggert - Kneissl, cuya última edición se llevó a cabo a lo largo de las décadas de 1960 y 1970 y me fue obsequiada por mi Familia. Se trata de la enciclopedia de Geodesia, Topografía, Fotogrametría, Cartografía, etc. más completa que se haya editado. Dado que está escrita en Alemán, pude complementar la consulta con mis conocimientos de ese idioma, que surgen de mi ascendencia y educación bilingüe en el nivel primario. Por supuesto, esa obra quedó desactualizada en cuanto a los avances tecnológicos, pero tiene la virtud de contar con fundamentos detallados que ya no aparecen a los últimos textos y los geodestas alemanes renunciaron a preparar una nueva edición, cuyo esfuerzo superaría sustancialmente los beneficios comerciales.

Finalmente, durante el período 1990 a 2004, tuve la oportunidad de viajar 7 veces a Europa y tomar contacto con destacados especialistas, entre ellos los doctores Wolfgang TORGE y Günter SEEBER (de la Universidad de Hannover), Hermann DREWES (Instituto de Investigaciones Geodésicas de Munich) y Hans Werner SCHENKE (Instituto Alfred Wegener en Bremerhaven), que tuvieron la gentileza de proveerme publicaciones y mostrarme el desarrollo de sus investigaciones.

Mi experiencia profesional fue muy variada, diez años en la mencionada Dirección de Geodesia, 30 años en el Servicio de Hidrografía Naval y no menos de 15 años en servicios y consultoría relacionados con grandes proyectos nacionales, cuya lista sería muy extensa para describirla, al igual que mi participación en varias instituciones internacionales:

FIG	(Federación Internacional de Geómetras o Agrimensores)
IAG = AIG	(Asociación Internacional de Geodesia)
IHO = OHI	(Organización Hidrográfica Internacional)
IUGG = UGGI	(Unión Geodésica y Geofísica Internacional)
SCAR	(Comité Científico de Investigaciones Antárticas)

, pero lo que quiero destacar es la necesidad de compartir al menos algo de la muy variada información y experiencia que pude acumular la cual he tratado de

volcar en estos apuntes. Algo similar ocurrió con mi vocación por la docencia, que la ejercí sin descuidar mi ejercicio profesional paralelo.

El año 2009, que le hemos asignado a esta presentación, obedece a la revisión principal de estas notas; sin embargo, en las interminables correcciones llegamos al 2010 y hubo algunos retoques que corresponden a novedades de este último año, especialmente en lo que respecta a la problemática del proyecto POSGAR a partir del terremoto que se produjo a principios de 2010.

Como final de esta nota, dejo expresamente indicado que los últimos dos capítulos (9 y 10) van a requerir actualización y profundización, especialmente el 10, ya que la evolución y aplicación de la geodesia satelitaria así lo va a imponer.

F. Mayer





Nota Preliminar

Índice

Capítulo 6	<b>“Nociones de Gravimetría”</b>	<b>151</b>
6.1	Introducción	151
6.2	Términos principales por efectos de la masa e incidencia rotacional	152
6.3	Gravedad Normal	156
6.4	Mediciones de la Gravedad	157
6.5	Reducciones de la Gravedad	161
6.6	Correcciones Topográficas y Topoisostáticas	163
6.7	Anomalías y sus Aplicaciones	164
6.8	Correcciones a la Nivelación	165
6.9	Perfeccionamiento del concepto de geoide	170
6.10	Registros Gravimétricos Continuos	171
Capítulo 7	<b>“Geometría del Elipsoide”</b>	<b>172</b>
7.1	Objetivos y Fundamentos de este Capítulo	172
7.2	Las Latitudes y su Relación	173
7.3	Relación con las Coordenadas Rectangulares	175
7.4	Revisión de Algunos Conceptos de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies.	177
7.5	Radios de Secciones Normal, Meridiana y de un Acimut Cualquiera. Radio Medio	180
7.6	Arcos de Paralelo y Meridiano	183
7.7	Línea Geodésica y Cortes Normales	186
7.8	Trasposos (Directo e Inverso) de Coordenadas	191
7.9	Temas Adicionales	207
	7.9.1 Incidencia del Problema Inverso en la Compensación	207
	7.9.2 Teorema de Legendre	208
	7.9.3 Desarrollo de Weingarten y su Aplicación	209
	7.9.4 Fórmula de Bertrand y su Aplicación	212
	7.9.5 Exceso Angular y Esfera de Gauss	213
	7.9.6. El Tratamiento de Geodésicas Largas	214
	7.9.7. Algoritmos para Trasposos con Lados Largos	214
Capítulo 8	<b>“Cálculos sobre el Plano de Proyección”</b>	<b>217</b>
8.1	Planteo del Problema	217
8.2	Clasificación de las Representaciones Cartográficas	217
8.3	Punto o Línea Neutra y Convergencia Meridiana	218
8.4	Concepto de Proyección (o representación) Geodésica	219
8.5	Representación de Mercator y Expresiones Generales de la Proyecciones Conformes	219
8.6	Representación Gauss – Krüger	225
8.7	Cálculos sobre el Plano de Proyección	232
8.8	Otras Formas de la Representación Gauss Krüger	235
8.9	Otras Representaciones Geodésicas	236
Capítulo 9	<b>“Elementos de Geodesia Científica”</b>	<b>238</b>
9.1	Introducción	238

9.2 Desviación de la Vertical	239
9.3 Determinación de Parámetros Elípticos	244
9.4 Geodesia Intrínseca. Concepto de Sistema y Marco Geodésico	247
9.5 Relación entre las Componentes Locales y Generales en un Vector	249
9.6 Cambio de Coordenadas	251
9.7 Geodesia Física	257
9.8 Marcos de Referencia Generales, Regionales y Nacionales	263
9.9 Microgeodesia	264
9.10 Avances Recientes	270
Capítulo 10 “ <b>Geodesia Satelitaria</b> ”	<b>273</b>
10.1 Conceptos. Origen y Desarrollo	273
10.2 Temas básicos Preliminares	274
10.3 Método Doppler	279
10.4 Posicionamiento Global	285
10.5 Redes Geodésicas con GNSS	299
10.6 Servicios de Análisis y Augmentación	303
10.7 Satélites Geoestacionarios y Geosincrónicos	305
10.8 Sobre la Transformación de Coordenadas de un Marco	306
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>308</b>



## Capítulo 6

# NOCIONES DE GRAVIMETRÍA

---



---

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a tratar en forma elemental el potencial del campo de gravedad terrestre, su gradiente, que es el vector gravedad, las mediciones, tratamiento y aplicaciones geodésicas. El potencial es un escalar que ya hemos definido en el capítulo 1, del cual podemos determinar físicamente su gradiente: el vector gravedad cuyo módulo se determina mediante la gravimetría y su dirección (la vertical) en un determinado lugar, se puede materializar mediante una plomada física, al plano perpendicular a la misma (el horizonte, tangente a la superficie equipotencial que pasa por el punto), también se puede ubicar "in situ" mediante niveles, dispositivos de horizontalización automática o superficie de un líquido en reposo.

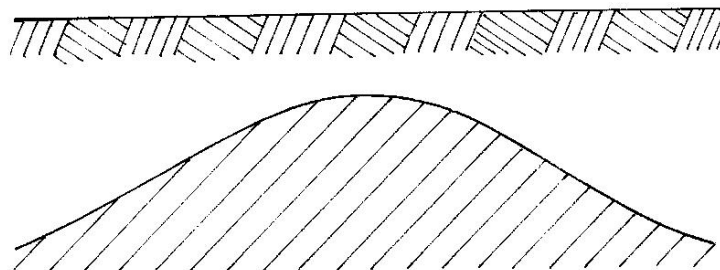
Para referir la orientación del mencionado vector a los planos fundamentales (ecuador y meridiano origen) es necesario recurrir a determinaciones astronómicas y si se lo quiere comparar con la normal al elipsoide es necesario relacionar las coordenadas astronómicas con las geodésicas (o elipsoidicas) referidas al sistema y parámetros que corresponden.

La gravimetría (medición de la gravedad) es, en rigor, una rama de la Geofísica que en su faz general contribuye a indagar en la estructura interior de la Tierra; desde el punto de vista geodésico tiene varias aplicaciones, entre ellas:

- a) Corregir nivelaciones de alta precisión por convergencia de superficies de nivel.
- b) Calcular cotas dinámicas, como alternativa para referir la altimetría (en rigor es dar valores de potencial expresados en metros).
- c) Contribuir al modelado del geoide que, además de su finalidad científica, sirve para definir parámetros de transformación de coordenadas. Esta posibilidad permite ampliar la capacidad de la geodesia satelitaria inclusive hasta para utilizar sus alturas y transformarlas en cotas sobre el nivel medio del mar.
- d) Corregir las mediciones mecánicas de distancia (alambres o cintas de INVAR).
- e) Contribuir a la determinación del parámetro elíptico de aplanamiento ( $f = \frac{(a-b)}{a}$ ) del elipsoide.

En síntesis, alguna vez dijimos que la geodesia, en su faz científica, tiende a determinar la forma y dimensiones de la Tierra; la geodesia gravimétrica hace un aporte importante en la definición de la forma y contribuye a perfeccionar las dimensiones.

Volviendo a la gravimetría, desde el punto de vista de la geofísica, a la finalidad general ya mencionada se le debe agregar lo que corresponde a la geofísica aplicada que, fundamentalmente, está vinculada a la exploración del subsuelo para la búsqueda de recursos naturales, aportar datos para la evaluación de proyectos de ingeniería y otros requerimientos utilitarios.

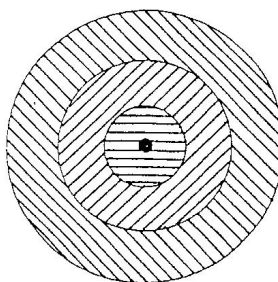


Por ejemplo, si en una llanura en la cual debajo del suelo orgánico prevalece material sedimentario y a cierta profundidad, el basamento rocoso (de densidad superior) presenta una elevación tipo anticlinal, es lógico que los valores de gravedad medida sobre la superficie se vean incrementados, entonces la diferencia entre la gravedad medida, reducida a cierto nivel, con respecto a la gravedad teórica (concebida para un modelo sin irregularidades) se incrementa. Ya veremos que esas diferencias se denominan ANOMALIAS y con cuya distribución hay ciertas posibilidades de inferir la morfología del basamento.

Para exploraciones de este tipo es necesario cubrir la zona en estudio con una red de puntos en los cuales, además de medir la gravedad, es necesario dar posición a los puntos utilizados y fundamentalmente, nivelarlos. Vale decir que la nivelación y la gravimetría están tan relacionadas en la Geofísica como en la Geodesia.

La densidad de puntos levantados depende del grado de detalle que se pretende analizar.

## **6.2 TÉRMINOS PRINCIPALES POR EFECTOS DE LA MASA E INCIDENCIA ROTACIONAL**



Las capas que pueden asimilarse a porciones entre esferas concéntricas admiten que, desde el exterior de la Tierra se pueda considerar la masa  $m$  concentrada en el centro, entonces el potencial de atracción newtoniana tiene la sencilla expresión vista en el capítulo 1:

$$V = G.M \int_r^{\infty} \frac{l}{r^2} dr = \frac{G.M}{r}$$

(trabajo para llevar una masa unitaria desde  $r=r$  hasta  $r=\infty$  donde el potencial se considera nulo)

La componente rotacional, también considerada en el capítulo 1, surge de una



integración hasta el eje z, así se obtiene el potencial total.

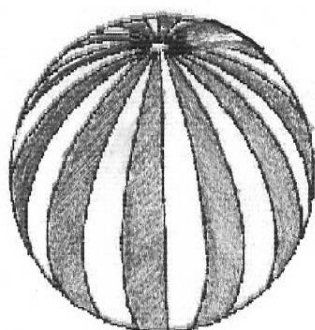
$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

También debemos recordar que, en la expresión de V, debería agregársele a  $G.M/r$  una serie de armónicos zonales, sectoriales y teselados y debemos aclarar que generalmente influyen otros términos de carácter transitorio, como la atracción lunisolar, la presencia de grandes masas de agua (por pleamar o inundación), etc.

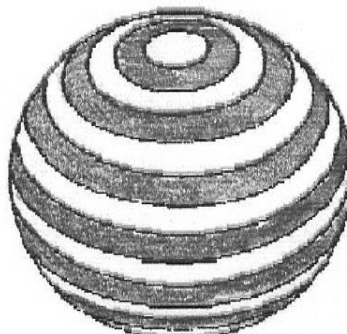
Recordando la expresión simplificada adelantada en el capítulo 1

$$V = \frac{G.M}{r} (\sum Z + \sum S + \sum T)$$

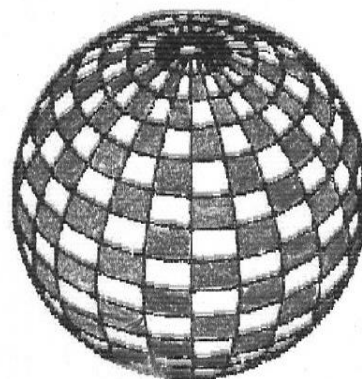
donde los componentes zonales (Z) son función exclusiva de la latitud, la sectoriales (S) de la longitud y la teseladas (T) dependientes de ambas. Las Z son las más importantes, las S muestran la tendencia generada por la alternancia de océanos y continentes (en tanto se les pueda asignar una variación cíclica) y las T tienen que ver con el relieve y cierta distribución irregular de densidades



SECTORIALES



ZONALES

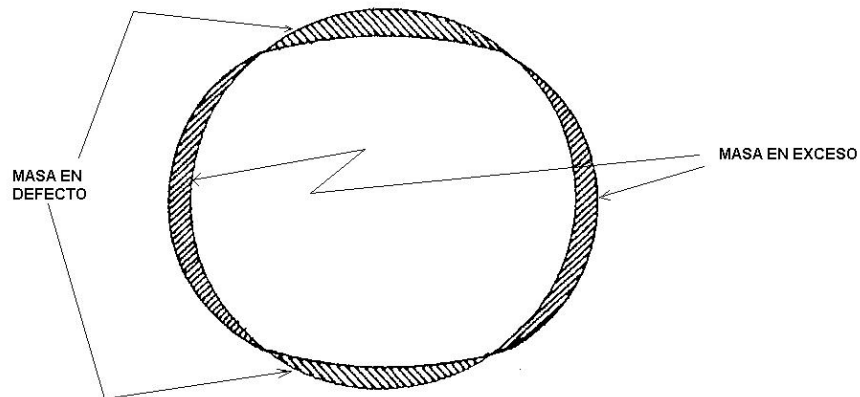


TESELADAS

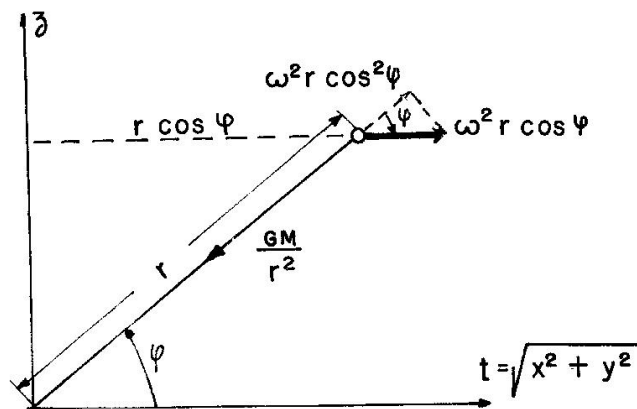
#### DISTRIBUCIÓN DE COMPONENTES DE ARMÓNICOS ESFÉRICOS CORRESPONDIENTES AL CAMPO DE GRAVEDAD

Los modernos modelos de potencial determinados presentan más de 300 componentes y se está trabajando intensamente para que el conjunto se aproxime a la realidad en la mayor parte del planeta Tierra, sobre todo en la proximidad de la superficie. Para esos estudios ha resultado muy valioso el aporte de los satélites artificiales, tanto en lo que respecta al comportamiento de sus órbitas como el uso de ciertos sensores montados en los mismos.

De los armónicos zonales el más importante es el que introduce el efecto de masa de la forma elipsódica de la Tierra, lo podemos concebir como que la masa actúa en forma distinta según la latitud, además de la variación de  $r$  y el efecto rotacional.



Para analizar como varía el módulo del vector gravedad con la latitud podemos considerar el siguiente esquema (en principio para  $r$  constante)



En un punto P la parte principal de la atracción newtoniana  $\frac{G.M}{r^2}$  se debe componer vectorialmente con la aceleración centrífuga  $\omega^2.r.\cos\varphi$ ; dado que este valor es considerablemente menor que  $\frac{G.M}{r^2}$ , prácticamente se le puede restar a este último la proyección de  $\omega^2.r.\cos\varphi$  sobre su línea de acción, o sea  $\omega^2.r.\cos^2\varphi$ . Entonces el módulo de  $\mathbf{g}$  toma la expresión:

$$(g) = \frac{G.M}{r^2} - \omega^2.R.\cos^2\varphi$$

en el supuesto caso de la  $r$  fuese constante, e igual a  $\mathbf{R}$  (tierra esférica) valdría:

$$g = \frac{G.M}{R^2} - \omega^2..R \cos^2\varphi$$

para  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  y 0 se tendría respectivamente

$$\frac{G.M}{R^2} = g_p \text{ (gravedad en el polo)}$$

$$\frac{G.M}{R^2} - \omega^2.R = g_e \text{ (gravedad en el ecuador)}$$

y se podría expresar:

$$g = g_e (1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \varphi)$$

Donde:

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e}$$

esta expresión, deducida para el modelo esférico, puede extenderse con buena aproximación a un modelo elipsoidal de revolución.

Vamos a omitir esa demostración que, por otra parte, implicaría probar que un elipsoide se asemeja considerablemente a una superficie equipotencial.

Un elipsoide de rotación se puede expresar mediante la siguiente expresión:

$$r = a(1 - f \cdot \text{sen}^2 \varphi)$$

donde:  $f = \frac{a-b}{a}$

esto surge de considerar las expresiones paramétricas de la elipse

$$t = a \cdot \cos \varphi$$

$$z = b \cdot \text{sen} \varphi$$

que equivalen a la expresión cartesiana ya que

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi = 1$$

el radiovector se puede expresar:

$$r = \sqrt{t^2 + z^2} = (a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} = a \left( \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2} = a \left( 1 - \text{sen}^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2}$$

$$r = a \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2}$$

pero  $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} \approx 2f$

o sea  $r \approx a \cdot (1 - 2f \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} \approx a \cdot (1 - f \cdot \text{sen}^2 \varphi)$  que es la expresión que expusimos anteriormente.

La variación de  $r$  con  $\varphi$  tiene una influencia similar a la que surge de la rotación, por lo cual conduce a una influencia que podría englobarse en la expresión  $g = g_e (1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \varphi)$ , desde el momento que  $\beta$  contempla la variación total de la gravedad entre el ecuador y el polo.

Vemos que hay dos “aplanamientos”, uno ( $f$ ) de carácter geométrico y otro de naturaleza gravimétrica ( $\beta$ ). Puede demostrarse que, con grado de aproximación similar al aplicado en las expresiones de  $g$  y  $r$  vale:

$$f + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 \cdot a}{g_e}$$

Que se conoce como la fórmula de CLAIRAUT (quien la publicó en 1738), aunque hay quienes llaman expresiones de CLAIRAUT a las tres:  $g = g_e(1 + \beta \cdot \text{sen}^2\varphi)$ ,  $r = a(1 - f \cdot \text{sen}^2\varphi)$  y la recientemente expuesta de  $f + \beta$

Otros, como TORGE, a la expresión  $f + \beta$  la denominan Teorema de Clairaut y a la  $g = g_e(1 + \beta \cdot \text{sen}^2\varphi)$  se la atribuyen a Newton.

La última ( $f + \beta$ ), en principio, permite calcular el aplanamiento elíptico a partir de datos gravimétricos (objetivo expresado en 6.1 e).

### 6.3 GRAVEDAD NORMAL

La primera expresión de Clairaut (o de Newton), expuesta en 6.2 toma un valor aproximado de:

$$g \approx 978 \text{ gal}(1 + 0.0053 \cdot \text{sen}^2\varphi)$$

1gal = 1cm/s<sup>2</sup> = unidad cgs de aceleración, denominada así en honor a Galileo que fue uno de los primeros en estudiar la aceleración de la gravedad.

Bruns y Helmert a principios del siglo XX (y fines del anterior) establecieron formulas más precisas tanto en el establecimiento de términos como en la determinación de sus constantes; el profesor G. CASSINIS en base a esos antecedentes obtuvo una expresión, que fue adoptada por la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (UGGI), reunida en Estocolmo, en 1930. La misma está reducida al elipsoide adoptado en Madrid 1924 por la misma Unión ( $a = 6378388$  m;  $1/f = 297$ ) y fue denominada expresión de la gravedad normal.

$$\gamma = 978.0490 \text{ gal} (1 + 0.0052884 \text{ sen}^2\varphi - 0.0000059 \text{ sen}^2(2\varphi))$$

Posteriormente fueron adoptados otros parámetros elípticos como hemos mencionado en el Capítulo 1. En 1967 la UGGI reunida en Lucerna (Suiza) adoptó el llamado "Sistema de Referencia Geodésico 1967" con un semieje  $a = 6378160$  m y una expresión de  $\gamma$  similar a la anterior.

Posteriormente (en 1978) en Canberra (Australia) se consideró que debía actualizarse y de allí surgió el SISTEMA DE REFERENCIA GEODESICO 1980 (GRS80) con los parámetros elipsódicos

$$a = 6378137 \text{ m}$$

$$1/f = 298.2572$$

Y la expresión  $\gamma = 978.0327 \text{ gal}(1 + 0.0053024 \cdot \text{sen}^2\varphi - 0.0000058 \cdot \text{sen}^2(2\varphi))$  Por lo tanto, cuando se usa una expresión de referencia, debe especificarse el sistema utilizado. Ello es importante puesto que una de las aplicaciones más importantes de  $\gamma$  es el cálculo de ANOMALÍAS.

$$A = g_o - \gamma$$

Donde  $g_o$  es la gravedad medida reducida a la superficie de referencia (en primer aproximación al nivel medio del mar); lógicamente, esos cálculos de anomalías deben estar referidos a una misma expresión de  $\gamma$ .

A continuación vamos a describir como se mide la gravedad, luego como se la reduce para obtener  $g_0$ , por el momento es suficiente aclarar que la existencia de anomalías se debe fundamentalmente a la morfología terrestre y a la distribución no homogénea de densidades en la corteza y sus proximidades.

#### 6.4 MEDICIONES DE LA GRAVEDAD.

Las mediciones de la gravedad se dividen en absolutas (determinaciones directas de  $g$ ) y relativas (mediciones de  $\Delta g$  con respecto a otro punto en el que se la conoce).

En las absolutas se pueden usar péndulos ( $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ), caída libre:

( $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ ) o tiro libre (ida y vuelta) ( $h = g \cdot t^2$ ), en todos estos casos hay que medir necesariamente dos parámetros (distancia y tiempo) cumplimentar una serie de requisitos y aplicar varias correcciones para que la determinación se asemeje a la ideal.

La medición de los parámetros principales y complementarios debe hacerse en condiciones muy estrictas y con el auxilio de dispositivos electrónicos que aseguren las precisiones necesarias que son muy severas.

Hasta alrededor de 1970 las mejores determinaciones absolutas fueron efectuadas con péndulos reversibles basados en el principio que se logra de aplicar un péndulo físico, que oscile con el mismo período suspendido de dos centros de giro distintos, la distancia entre estos centros de giro corresponde a la longitud de un péndulo matemático equivalente. Con dispositivos de esa naturaleza se llegaron a efectuar determinaciones con exactitudes del orden de  $\pm 0.5$  mgal. (1 miligal =  $10^{-3}$  gal).

En la actualidad se han llegado a determinar valores con exactitudes del orden de  $\pm 10$  a  $\pm 2$   $\mu$ gal (1 microgal =  $10^{-6}$  gal) mediante equipos de caída libre. Estos equipos dejan caer un cuerpo en una cámara de vacío y a su vez ese cuerpo va acompañado por una "jaula" que minimiza (por acompañamiento) el efecto de las pocas partículas de aire que quedan.

De todas maneras, no era habitual que en un país hubiese más de tres o cuatro determinaciones absolutas, las cuales por lo general, se vinculaban mediante métodos relativos y contribuían a la conformación de una red gravimétrica mundial (la cual ha dejado de ser necesaria gracias a exactitud de las nuevas determinaciones absolutas).

En las mediciones relativas el problema es más simple, se mide un solo parámetro. Los primeros intentos se llevaron a cabo con equipos pendulares, en cuyo caso lo que se mide es la variación del período y se prescinde del conocimiento de la longitud del péndulo:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{l/g_1} \quad \text{y} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{l/g_2}$$

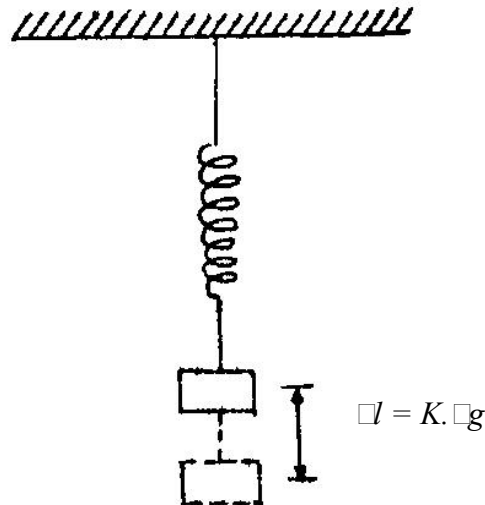
De donde:

$$g_2 = g_1 \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

Esos equipos, compactos, se fueron perfeccionando para mejorar la precisión; para evitar el problema de la “cooscilación del soporte” se diseñaron aparatos cuadripendulares y bipendulares, estos últimos tuvieron más éxito y llegaron a efectuarse determinaciones con exactitudes de  $\pm 0.1$  mgal a  $\pm 0.05$  mgal. Inclusive su uso se extendió hasta mucho tiempo después del desarrollo de los instrumentos estáticos o astatizados, que analizaremos más adelante, ya que se podían determinar incrementos  $\Delta g$  apreciables con poca propagación de errores, los cuales servían de control en las redes gravimétricas o daban la posibilidad de permitir la calibración de los otros instrumentos. En la actualidad están cayendo en desuso debido a dos causas fundamentales:

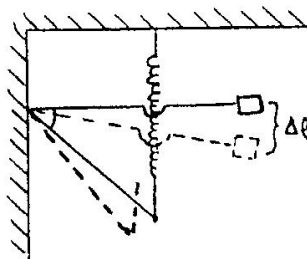
- a) Se han desarrollado gravímetros astatizados más estables y de mayor rango.
- b) Se pueden establecer puntos de control con determinaciones absolutas suficientemente precisas con mayor facilidad.

Los gravímetros estáticos se basan en medir una deformación provocada por un incremento de gravedad. El esquema aclara este principio.



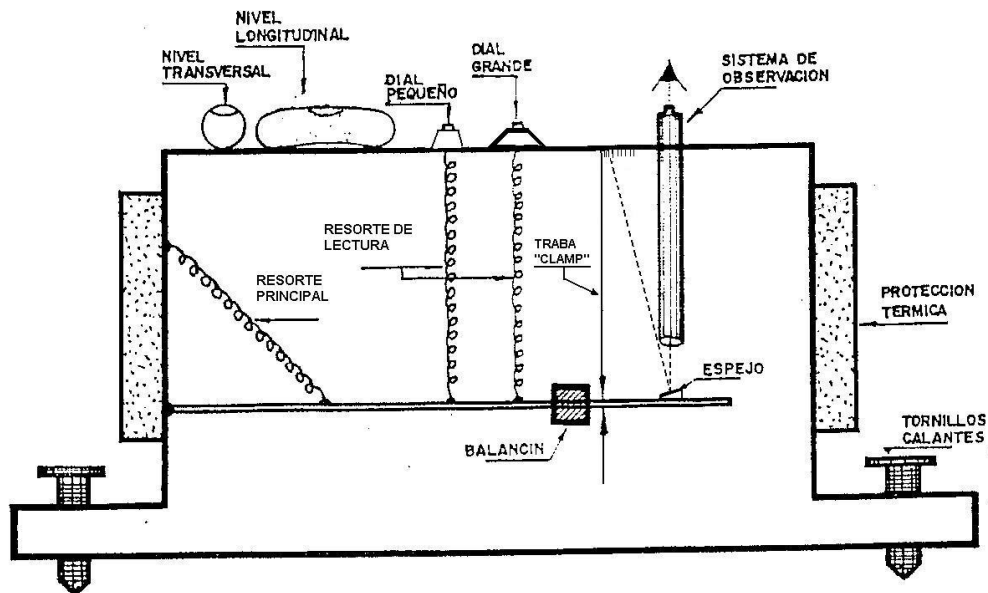
Para aumentar la sensibilidad de los instrumentos se recurrió a la “astatización”, es decir, a llevarlos a equilibrios casi inestables.

Esta situación se logra con sistemas como el de la segunda figura pero generalmente mucho más complicados, dentro de receptáculos protegidos, especialmente de las variaciones térmicas que tienden a modificar las constantes elásticas de los resortes, los cuales generalmente son de cuarzo.



A estos gravímetros se los debe nivelar y tratar con sumo cuidado, deben ser convenientemente calibrados para contar con la relación correcta entre las variaciones de lectura ( $\Delta l$ ) con los incrementos de gravedad ( $\Delta g$ ). Estando bien determinada la constante de calibración y con buena protección térmica, estos gravímetros permiten obtener valores de  $\Delta g$  dentro de  $\pm 0.01$  mgal a  $\pm 0.002$  mgal y son aptos tanto para fines geofísicos como geodésicos.

Esquemáticamente un gravímetro estatizado se lo puede describir con la figura siguiente:



La nivelación es sumamente necesaria para que el mecanismo se comporte en las mismas condiciones en cada estación; para ello cuenta con tres tornillos calantes y dos niveles: longitudinal y transversal, el primero es objeto de especial cuidado puesto que incide directamente en la sensibilidad.

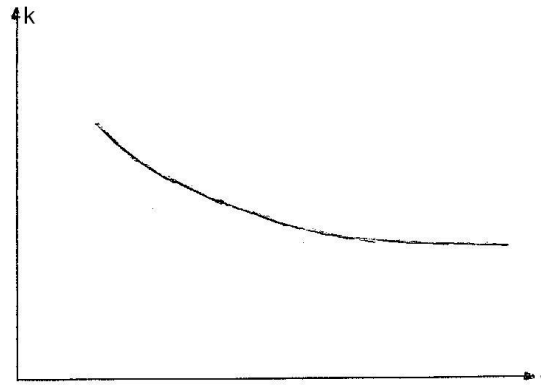
El resorte principal mantiene en equilibrio, casi estático, al sistema para ciertas condiciones iniciales, cuando varía la aceleración de la gravedad ( $g$ ) el equilibrio se restablece con los resortes de lectura cuya tensión se puede variar con los diales. Para describir el fenómeno se adoptará un ejemplo: el dial pequeño puede neutralizar una variación de hasta 100 mgal con una resolución de lectura de 0.01 mgal y el dial grande puede absorber 3000 mgal con resolución de lectura de 0.5 mgal; en este caso, obviamente el rango total del gravímetro debe cubrir las necesidades territoriales del lugar donde debe operar. Por ejemplo si está construido para que opere 979000 y 982000 mgal deberá tenerse en cuenta que las fluctuaciones por latitud y altura estén dentro de esos límites. (La variación del ecuador al polo es del orden de 978000 a 983000 mgal y la disminución por altura de 0.3 mgal/m de manera tal que 2000 metros de altura inciden en 600 mgal).

La lectura se efectúa cuando el balancín recupera su posición de equilibrio la cual se observa por un sistema óptico.

Esa concepción de los diales admite que en los tramos parciales se tengan precisiones dadas por la sensibilidad de lectura del dial fino (o pequeño). El grueso (grande) se acciona cuando se agotó la capacidad del otro, salvo casos excepcionales no se usa para las lecturas.

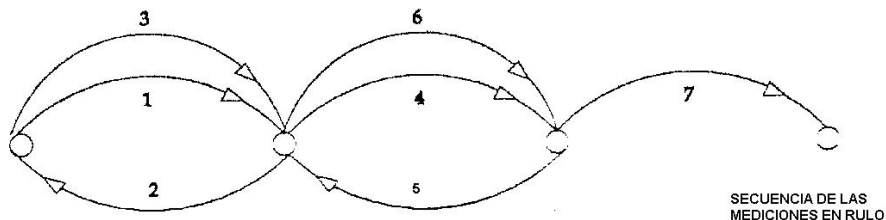
El sistema de protección térmica varía desde materiales o cámaras aislantes hasta sistemas de compensación con control electrónico. Dicha protección es fundamental ya que las condiciones elásticas de los resortes varían sustancialmente con la temperatura.

Además de la variación anterior, las constantes elásticas tienden a variar con el tiempo, aunque esta variación disminuye con la antigüedad del resorte.



En buenos instrumentos, por ejemplo de la línea "Lacoste y Romberg" se ha llegado a que, esa variación temporal (o deriva), este por debajo de 0.3 mgal/mes y en pocas horas no hay incidencia apreciable de ese tipo. No obstante ello, en general hay otra influencia, no lineal, que es la variación de la atracción lunisolar; en períodos cortos el efecto es similar.

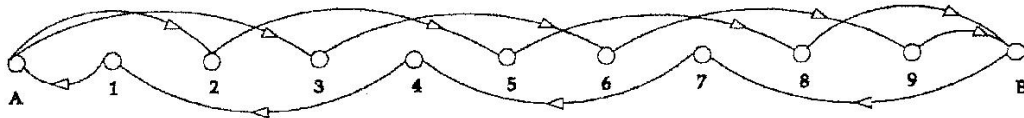
Una solución para atenuar los efectos de variación por deriva o atracción lunisolar es medir "en rulo".



De esta manera se tiende a controlar esa variación compensando el aumento del  $|\Delta g|$  en un sentido con la disminución cuando se mide en sentido contrario.

Cuando los puntos están muy próximos y la operación es suficientemente rápida se pueden tomar estaciones de control (A, B) mas separadas, como se indica en el siguiente esquema.





Vale decir, primero se obtiene en forma compensada el  $\Delta g$  entre A y B ajustada por "rulo" y luego se interpolan las parciales para cada camino.

Es fundamental calibrar periódicamente cada gravímetro, es decir determinar cuantos miligales (o fracción) corresponden a las divisiones de los diales.

Esta determinación se hace en bases o campos de calibración, sobre puntos cuyos valores fueron cuidadosamente determinados.

Como curiosidad por el momento, podemos decir que se han desarrollado gravímetros marinos, de superficie, que cuentan con acelerómetros que registran las fluctuaciones por movimientos periódicos y permiten obtener los valores de gravedad a través de un equipo a bordo de una embarcación en movimiento.

Desde el punto de vista geodésico se usan predominantemente gravímetros atastizados sobre las líneas de nivelación de alta precisión, algunos de los puntos cuentan con determinaciones absolutas, antiguamente se utilizaban puntos con determinaciones pendulares relativas vinculadas a una red gravimétrica mundial.

## 6.5 REDUCCIONES DE LA GRAVEDAD

Con el objeto de poder calcular las anomalías anunciadas anteriormente ( $A = g_o - \gamma$ ) es necesario introducir correcciones a la gravedad medida ( $g$ ), llevándola al valor que se hubiese obtenido sobre la superficie de referencia ( $g_o$ ). En primera aproximación diremos que  $g_o$  es el valor reducido "al nivel medio del mar".

Se denomina corrección de "aire libre" a la que tiene en cuenta la altura (o cota)  $H$  por efecto de pérdida de atracción newtoniana con la elevación.

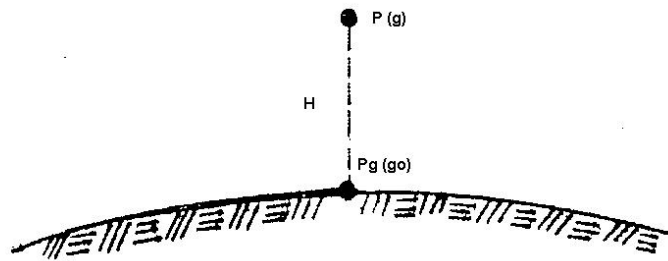
Tomando la atracción newtoniana

$$g = \frac{GM}{(R+H)^2} = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2} = g_o \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2}$$

$$g = g_o \left(1 - \frac{2H}{R} + \dots\right) \approx g_o - \frac{2g_o}{R} H$$

Para valores  $g_o$  y  $R$  promedios surge un coeficiente  $\frac{2g_o}{R} \approx 0.308 \frac{mgal}{m}$  entonces la corrección para pasar de  $g$  a  $g_o$  será positiva (cuando se opera por arriba del nivel de referencia)

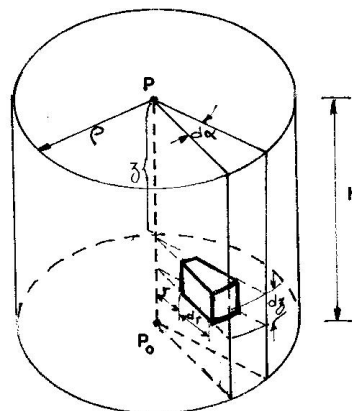
$$g_o = g + \left(0.308 \frac{mgal}{m}\right) H \quad \text{AL (Aire Libre)}$$



Esta corrección de “aire libre” supone que entre el punto de medición (P) y el reducido ( $P_0$ ) no hay masa terrestre que perturbe el valor.

Como, en rigor, entre P y  $P_0$  hay una capa de corteza, debería introducirse ese efecto (topográfico), que equivaldría a suprimir la atracción de esa capa.

La corrección “de Bouguer” es una simplificación de ese cálculo, para deducirla vamos a considerar el efecto de un cilindro de densidad  $\delta$ , altura H y radio  $\rho$  según la siguiente figura:



Un elemento de volumen en coordenadas cilíndricas valdrá:

$$r.d\alpha \times dz.dr \quad \text{y un}$$

elemento de masa (de densidad  $\delta$ )

$$dm = \delta r.d\alpha.dz.dr$$

el potencial de ese elemento será:

$$dV = \frac{G.dm}{\sqrt{r^2 + z^2}} = G.\delta.r \frac{d\alpha.dz.dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Integrando a todo el ámbito del cilindro se tendrá el potencial:

$$\begin{aligned} V &= G.\delta.\int_0^{2\pi} d\alpha.\int_0^H \int_0^\rho \frac{r.dz.dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi.G.\delta.\int_0^H dz \int_0^\rho d(\sqrt{r^2 + z^2}) = 2\pi.G.\delta.\int_0^H dz \left| \sqrt{r^2 + z^2} \right|_0^\rho \\ &= 2\pi.G.\delta.\int_0^H dz (\sqrt{\rho^2 + z^2} - z) \end{aligned}$$

Sin terminar la integración, vamos a considerar el potencial de un disco de espesor dz.

Si denominamos  $V'$  el potencial que genera dicho disco.

$$V' = 2\pi.G.\delta.\left[\sqrt{\rho^2 + z^2} - z\right]dz$$

La variación de  $V'$  con respecto a  $z$  será la atracción vertical por unidad de masa del mencionado disco cambiada de signo ( $g = -\text{grad } V$ )

$$-\frac{\partial V'}{\partial z} = 2\pi.G.\delta.dz\left[1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right]$$

Y la atracción de todo el cilindro se obtendrá integrando  $z$  de 0 a  $H$

$$\Delta g = 2\pi.G.\delta.\int_0^H\left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right).dz = 2\pi.G.\delta\left[z - \sqrt{\rho^2 + z^2}\right]_0^H = 2\pi.G.\delta.(H - \sqrt{\rho^2 + H^2} + \rho)$$

Para  $\rho \gg H$  (cilindro indefinido),  $\sqrt{\rho^2 + H^2} \rightarrow \rho$ , ese efecto será negativo (la capa tiende a disminuir la gravedad), como  $2\pi.G \sim 0.0418 \text{ mgal/m}$  la expresión de la corrección de Bouguer queda

$$\boxed{g_0 = g - 0.0418.\delta.H} \quad \text{B}$$

Y la reducción por aire libre y Bouguer será la siguiente:

$$g_0 = g + (0.308 - 0.0419.\delta).H$$

Si se introduce una densidad media de la corteza de 2.67, la reducción de AIRE LIBRE Y BOUGUER queda

$$\boxed{g_0 = g + 0.196 \frac{\text{mgal}}{\text{m}}.H} \quad \text{AL y B (Aire Libre y Bouguer)}$$

En geofísica, se suele determinar experimentalmente ese coeficiente planteando una simple correlación lineal entre  $g$  y  $h$  (Método de Nettleton), de esta manera se introduce el efecto de la real densidad que corresponde a la región.

## **6.6 CORRECCIONES TOPOGRÁFICAS Y TOPOISOSTÁTICAS**

Si la integral planteada en 6.5 se aplica a distintos segmentos circulares, correspondientes a las cotas alrededor de cada estación definidas por una carta topográfica, se podría obtener una corrección más rigurosa que la de Bouguer.

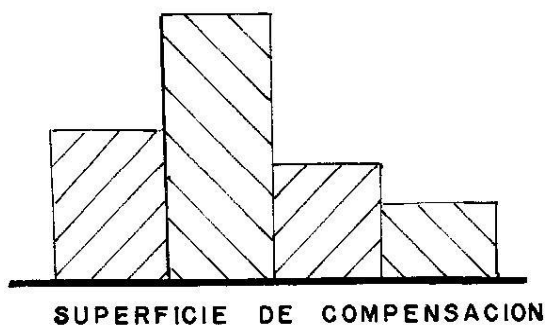
Las aplicaciones de las anomalías que veremos en 6.7 han demostrado que esa corrección resulta exagerada. Para explicar este fenómeno se han elaborado las hipótesis de la ISOSTASIA.

Estas hipótesis consideran que la corteza flota sobre el manto superior y que esa flotación se produce sobre una llamada "superficie de compensación" bajo la cual hay un equilibrio hidrostático.

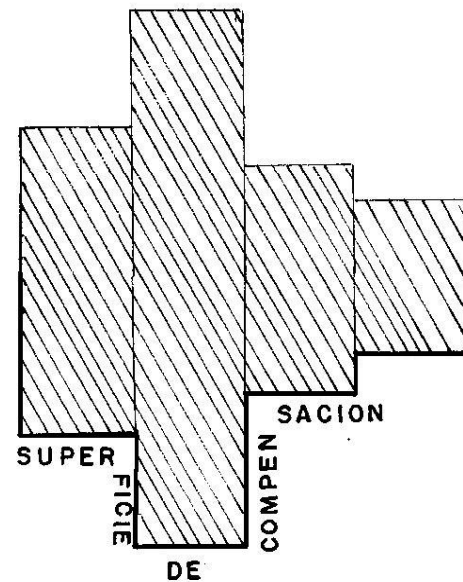
Según la hipótesis de PRATT (o Pratt – Hayford) los bloques más elevados tienen

menos densidad y la superficie de compensación es horizontal; la hipótesis de AIRY (o Airy – Heiskanen) considera que todos los bloques tienen la misma densidad pero los más elevados se hunden más para flotar. Indudablemente la segunda es más razonable, pero ambas conducen con resultados aceptables en cuanto a las correcciones.

Hipotesis de Pratt



Hipotesis de Airy



Hay hipótesis más elaboradas, por ejemplo la de VENING – MEINESZ, que considera la elasticidad de la corteza sobre una superficie mayor que la que cubren los bloques. En esta hay un efecto regional más amplio.

Aplicando cualquiera de estas hipótesis se llega a anomalías (ver 6.7) cuyas aplicaciones conducen a resultados más coherentes con otros tipos de investigación. El desarrollo de este tema es muy amplio y lo hemos reducido al máximo. (Ver final de 6.7)

## 6.7 ANOMALÍAS Y SUS APLICACIONES

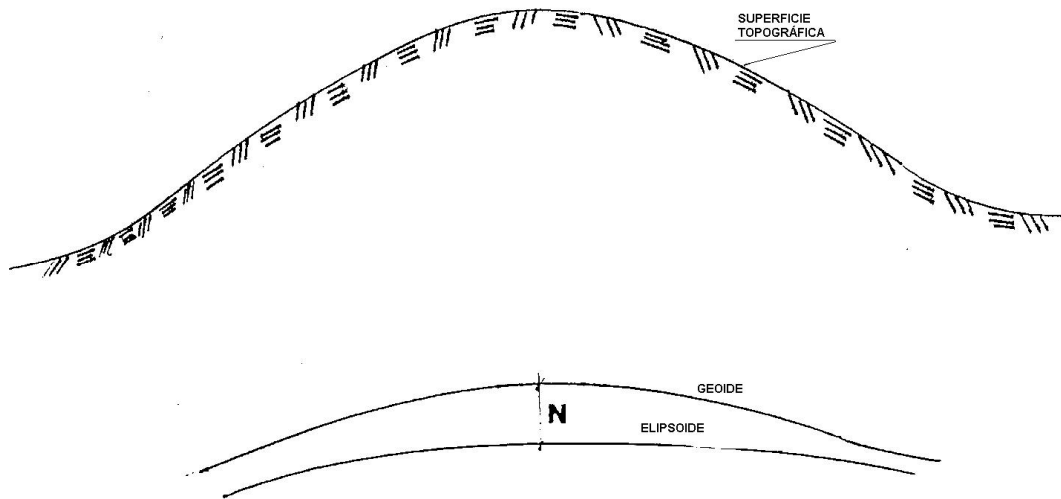
Definida la anomalía como la diferencia entre la gravedad reducida y la teórica

$$A = g_0 - \gamma$$

Debe aclararse si se trata de anomalía de aire libre, aire libre y Bouguer o si fueron considerados también efectos topográficos o topográficos – isostáticos.

Desde el punto de vista geofísico de exploración, las anomalías sirven para inferir morfología o propiedades de estructuras geológicas subyacentes, ese objetivo está

fuera de las necesidades geodésicas que se limitan a determinar la conformación del geoide o las desviaciones de la vertical



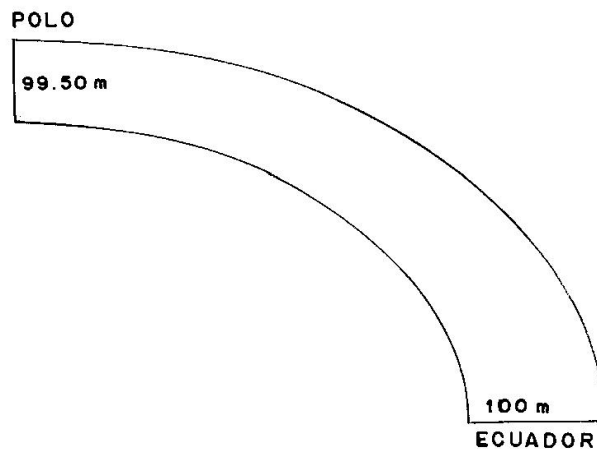
La separación geoide – elipsoide ( $N$ ) se puede calcular mediante la denominada FORMULA DE STOKES, que toma en cuenta la distribución de anomalías alrededor cada punto considerado.

Las componentes de la desviación de la vertical ( $\varepsilon$ ,  $\eta$ ) se pueden calcular mediante las llamadas FORMULAS DE VENING – MEINESZ que surgen de la derivación de la anterior en las direcciones Norte y Este.

Las exageraciones planteadas en 6.6 se pusieron de manifiesto cuando se compararon resultados de desviaciones de la vertical a partir de anomalías con las que surgen de determinaciones astronómicas y traspasos geodésicos (ver capítulo 9) y en las separaciones geoide elipsoide que surgen de los perfiles astrogeodésicos que se podían elaborar con esas mismas desviaciones. En la actualidad se han podido ratificar esas especulaciones a partir de las alturas sobre el elipsoide que surgen de la geodesia satelitaria.

## **6.8 CORRECCIONES A LA NIVELACIÓN**

La variación de la gravedad incide en la forma de las superficies de nivel y en su separación. Dicho de otra manera, dos superficies equipotenciales no son equidistantes desde el punto de vista geométrico, es conocido el efecto entre el Ecuador y el Polo, en donde los 5 gales de diferencia producen un acercamiento del medio metro de acuerdo al siguiente esquema: para una separación del orden de 100 metros.



$$100\text{m} \times 978\text{gal} \sim 99.50\text{ m} \times 983\text{ gal}$$

La gravimetría sobre las líneas de nivelación se puede aplicar mediante dos criterios. Uno de ellos tiende a calcular COTAS ORTOMÉTRICAS O VERDADERAS que son la distancia vertical entre cada punto y el geoide.

Dado que dos puntos con la misma cota ortométrica no tienen necesariamente el mismo potencial, es evidente que esos valores son poco aptos para la Ingeniería Hidráulica. Esta es la especialidad más exigente con respecto a la nivelación.

Para resolver ese problema se introduce el concepto de COTAS DINAMICAS, las cuales están directamente vinculadas con el potencial pero están expresadas en metros al igual que las anteriores.

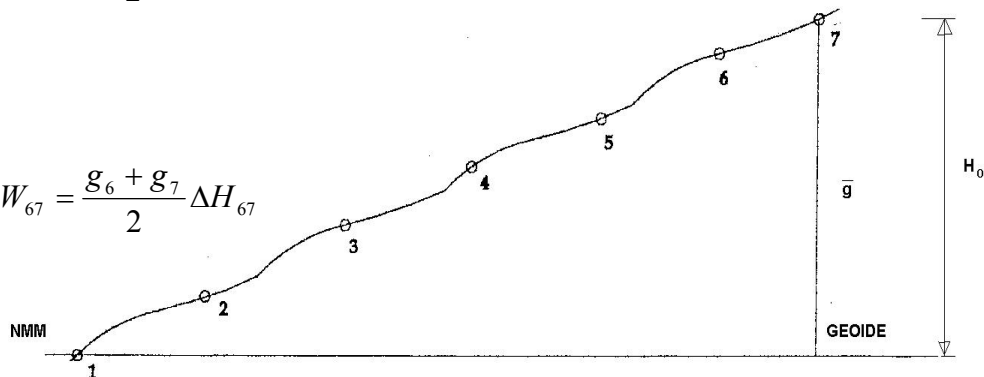
A partir de una determinación del nivel medio del mar (estación mareográfica) se pueden calcular los incrementos de potencial. Estos incrementos de potencial son de signo contrario a los desniveles.

$$-\Delta W_{12} = \frac{g_1 + g_2}{2} \Delta H_{12}$$

$$-\Delta W_{23} = \frac{g_2 + g_3}{2} \Delta H_{23}$$

- 
- 
- 

$$-\Delta W_{67} = \frac{g_6 + g_7}{2} \Delta H_{67}$$



Siendo  $H_0$  la cota verdadera (distancia vertical del punto 7 al geode y  $\bar{g}$  la gravedad media a lo largo de la vertical, se deberá cumplir:

$$-\sum \Delta W = \bar{g} \cdot H_0$$

de donde

$$H_0 = \frac{1}{\bar{g}} \left( -\sum \Delta W \right)$$

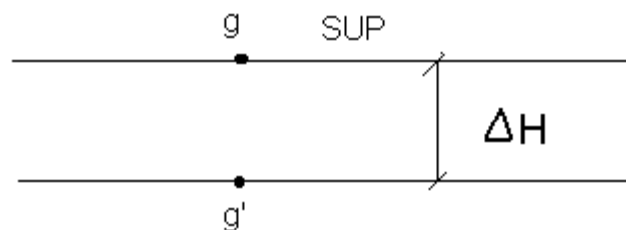
O sea

$$H_0 = \frac{1}{\bar{g}} \sum \left( \frac{g_i + g_j}{2} \right) \Delta H_{ij}$$

La dificultad surge a partir de la forma que se obtiene la gravedad media  $\bar{g}$  en el punto considerado. El subíndice "o" indica que se trata de cota "ortométrica".

$\bar{g}$  debería ser equivalente al valor que se obtendría al contar con un pozo en el cual se midió la gravedad en niveles equiespaciados y se obtuvo el promedio.

Una de las formas más simples de obtener  $\bar{g}$  es mediante la denominada expresión de Helmert, la cual da resultados aceptables en regiones predominantemente llanas, donde la aplicación de la corrección de Bouguer es un modelo razonable para tener en cuenta la masa de la corteza entre la superficie y el geode.



Si quisiéramos pasar de la gravedad medida  $g$  al valor que le correspondería bajo una capa de espesor  $\Delta H$  deberíamos agregar el efecto de "aire libre" o sea  $+0.3086 \text{ mgal/m} \times \Delta H$  (estamos agregando un dígito más al expuesto en 6.5 para llegar al valor recomendado por Helmert y los que aceptan el método).

Pero se debería quitar el efecto de esa masa mediante la corrección de Bouguer, que para una densidad media de corteza de 2.67, da el valor (también con un dígito más) de

$$-0.1119 \text{ mgal/m} \times \Delta H$$

no obstante ello, si el gravímetro estuviera ubicado en la posición de  $g'$ , la existencia de esa capa le producirá una atracción ascendente, por la cual habría que sustraerle nuevamente el valor mencionado vale decir que el valor reducido debería ser

$$(+0.3086 - 0.1119 - 0.1119) \text{ mgal/m} \times \Delta H$$

o sea

$$+0.0848 \text{ mgal/m} \times \Delta H$$

Tratándose de un coeficiente constante el valor  $\bar{g}$  se podría obtener para  $\frac{H}{2}$  o sea que

$$\bar{g} = g + 0.0424 \text{mgal} / m.H$$

Y así obtendríamos la cota ortométrica mediante la expresión de Helmert

$$H_0^H = \frac{1}{g + 0.0424 \text{mgal} / m.H_0^H} \sum \frac{(g_i + g_2)}{2} \Delta H_{ij}$$

La aplicación de procedimientos aptos para morfologías más variadas conduce a complicaciones apreciables, en los cuales entran los efectos topográficos e isostáticos más un detallado análisis y cómputo de la densidad regional de la corteza.

En algunas oportunidades se ha llegado a aplicar una corrección ortométrica deducida de la variación teórica de la gravedad, cuando no se disponía de valores de gravedad medida, a partir de la expresión simplificada

$$g = 978 \text{gal} (1 + 0.0053 \cdot \text{sen}^2 \varphi)$$

para un incremento de latitud  $d\varphi$  surge

$$dg = 978 \times 2 \times 0.0053 \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

que equivale a

$$\frac{dg}{g} = 0.0053 \cdot \text{sen} 2\varphi \cdot d\varphi$$

Como en una superficie equipotencial  $g \times H = \text{cte}$

$$g \cdot dH + H \cdot dg = 0$$

$$dH = -\frac{dg}{g} H$$

Y surge la expresión

$$dH = -0.0053 \cdot \text{sen} 2\varphi \cdot H \cdot d\varphi$$

donde el valor  $d\varphi$  (incremento de latitud) se debería aplicar en radianes.

No resulta aconsejable aplicar correcciones de este tipo, conviene esperar los valores gravimétricos cuya obtención es sustancialmente menos onerosa que la nivelación y aplicar correcciones, como la de Helmert, para resolver razonablemente el caso.

El otro criterio para tener en cuenta la convergencia de superficies de nivel es el uso de COTAS DINÁMICAS, estas resultan de dividir la suma de incrementos geopotenciales

$$\frac{g_i + g_j}{2} \Delta H_{ij}$$

desde el nivel del mar por una gravedad única para todo el territorio en el cual se va a aplicar, hay algunos textos que mencionan  $g_{45}$  = gravedad a 45° de latitud, pero en rigor se debería aplicar para el baricentro de la zona en la cual se opera. Por ejemplo, en la Argentina continental se podría pensar en un lugar de la provincia de Córdoba a una cota media. Si llamamos a ese valor  $g_r$  (gravedad de referencia) la cota dinámica de un punto estaría dada por



$$H_D = \frac{1}{g_r} \sum \frac{(g_i + g_j)}{2} \Delta H_{ij}$$

Estas cotas tienen la virtud de que cuando hay dos puntos con el mismo valor el agua no correría entre los mismos, sería el tipo de cotas adecuado para su uso en la ingeniería hidráulica.

Seguramente convendría tener un doble listado, con cotas ortométricas y dinámicas donde debería estar muy bien aclarado la forma en que se obtuvo la gravedad  $\bar{g}$  en el cálculo de las cotas ortométricas y el valor  $g_r$  adoptado para las dinámicas.

Las últimas décadas se comenzaron a usar las denominadas COTAS NORMALES, para lo cual en vez de  $\bar{g}$  se aplica  $\bar{\gamma}$  = gravedad teórica media sobre la vertical del punto

$$H_N = \frac{1}{\bar{\gamma}} \sum \frac{(g_i + g_j)}{2} \Delta H_{ij}$$

para calcular  $\bar{\gamma}$  se puede recurrir a la expresión

$$\gamma = \gamma_0 \left[ 1 - \frac{2}{a} \left( 1 + f + \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - 2f \text{sen}^2 \varphi \right) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right]$$

que da la influencia que corresponde a la altura, donde h es la altura sobre el elipsoide,  $\gamma_e$  la gravedad teórica en el ecuador y  $\gamma_0$  el valor de  $\gamma$  que vimos en 6.3 (gravedad normal sobre el elipsoide).

Dicha expresión, cuya deducción omitiremos figura como 4.63 de TORGE (2001). Para obtener el valor medio aplicaremos el teorema del valor medio

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H_N} \int_0^{H_N} \gamma \cdot dh \quad \text{o sea (despreciando el término en } h^2 \text{):}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{\gamma_0}{H_N} \int_0^{H_N} \left[ 1 - \frac{2}{a} \left( 1 + f + \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - 2f \cdot \text{sen}^2 \varphi \right) h \right] dh \\ &= \frac{\gamma_0}{H_N} \left[ H_N - \frac{H_N^2}{a} \left( 1 + f + \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - 2f \cdot \text{sen}^2 \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

O sea

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left[ 1 - \frac{H_N}{a} \left( 1 + f + \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - 2f \text{sen}^2 \varphi \right) \right]$$

Que, para el GRS 80 (ver 1.1 y 6.3) vale

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left( 1 - \frac{1.006853 - 0.006706 \cdot \text{sen}^2 \varphi}{6378137} H_N \right)$$

Para  $|\varphi| = 45^\circ$  toma el valor

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left( 1 - 0.0000001573 H_N \right)$$

A un valor muy parecido se llega aplicando un proceso similar al considerado para la corrección de aire libre (ver principio de 6.5)

$$\gamma = \gamma_0 \left( 1 - 2 \frac{H_N}{R} \right)$$

que, tomando  $\bar{\gamma} = \gamma$  para  $\frac{H_N}{2}$  da

$$\boxed{\bar{\gamma} = \gamma_0 \left( 1 - \frac{H_N}{R} \right)}$$

y para  $R = 6371000$  da

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left( 1 - 0.0000001570 H_N \right)$$

Nótese que, tanto para el cálculo de  $\bar{g}$  para las cotas ortométricas, como el de  $\bar{\gamma}$  para las cotas normales, se requieren los valores de dichas cotas ( $H_0$  y  $H_N$ ), lo cual se logra mediante un proceso iterativo.

Los defensores del uso de cotas normales argumentan que la reducción se hace sin ninguna suposición, lo cual no es así para el caso de cotas ortométricas en la cual se acepta un valor de densidad y a veces, la simplificación de BOUGUER (caso del procedimiento de acuerdo a HELMERT)

Los valores  $\sum \frac{(g_i + g_j)}{2} \Delta H_{ij}$  se suelen llamar números geopotenciales o cotas geopotenciales y son necesarios para cualquiera de los cálculos de cotas ortométricas, dinámicas o normales. En nuestros desarrollos hemos supuesto que se sale del nivel medio del mar y así los hemos considerado. Analizando el tema con mayor profundidad, deberíamos considerar con mucho cuidado el origen geopotencial, para ello sería conveniente vincular varias estaciones mareográficas y determinar un origen representativo que se aproxime a la definición de geoide que damos en 6.9.

Cuando no se han computado cotas ortométricas, ni dinámicas ni normales, es decir que compensaron los desniveles mezclando los errores de cierre con los efectos descriptos, se dice que se han calculado COTAS BRUTAS.

## **6.9 PERFECCIONAMIENTO DEL CONCEPTO DE GEOIDE**

Un nivel medio del mar, aún contando con períodos de 18.67 años, como hemos expuesto en 5.6, siempre está perturbado por la circulación oceánica, la presencia de vientos predominantes, la presión atmosférica tendenciosa, ciertas descargas fluviales, etc., por lo cual el conjunto de puntos con determinaciones mareográficas no están ubicados estrictamente sobre una superficie equipotencial ( $W = \text{constante}$ ).

Por esa razón, en la actualidad se dice que el GEOIDE (definido provisoriamente en 1.1) es una superficie EQUIPOTENCIAL del campo de gravedad terrestre ajustado a determinaciones del nivel medio del mar corregidas por los mejores modelos de circulación oceánica, de las perturbaciones atmosféricas y toda influencia no periódica

que afecte el nivel del agua.

Hemos mencionado la posible influencia de una descarga fluvial, posiblemente los desprendimientos de barreras de hielo apoyados en el continente antártico pueden influir más bruscamente y los defensores de ciertas hipótesis del “CAMBIO GLOBAL” frecuentemente argumentan que el calentamiento puede producir ciertas evaporaciones tendenciosas alguna expansión térmica de la superficie oceánica y fusiones masivas de hielo.

Por otra parte, ciertos fenómenos sísmicos provocan ondas perturbadoras que se propagan sobre la superficie oceánica (TSUNAMI) y hay lugares cuyos procesos tectónicos y volcánicos afectan los movimientos corticales y la morfología de fondos marinos perturbando los registros mareográficos costeros. Para mejorar estos estudios, hay estaciones mareográficas dotadas de receptores de geodesia satelitaria para vigilar la estabilidad altimétrica de las mismas.

Esta problemática, que acá la tratamos en forma muy superficial, ha llevado a concebir que EL GEOIDE NO ES UNA SUPERFICIE TOTALMENTE ESTABLE.

El concepto de la superficie equipotencial de referencia ligada al nivel medio del mar como forma de la Tierra fue concebido por C.F. GAUSS en 1828 y la denominación de GEOIDE la introdujo J.B. LISTING en 1872. BRUNS y HERMERT le dieron una fuerte difusión a dicha denominación. La concepción de que no es una superficie totalmente estable es muy reciente (1980), apoyada por detalladas investigaciones que surgen de sensores montados en satélites artificiales.

## **6.10 REGISTROS GRAVIMÉTRICOS CONTINUOS**

Una de las formas de medir la variaciones periódicas del nivel de la corteza (mareas terrestres) es mediante el registro permanente del valor de la gravedad. Esto se consigue con gravímetros estatizados con lectura (generalmente digital) continua. También hay equipos que operan con superconductores, ver TORGE (2001) 5.4.6. El tema es bastante complejo, ya que debe desafectarse la atracción lunisolar.





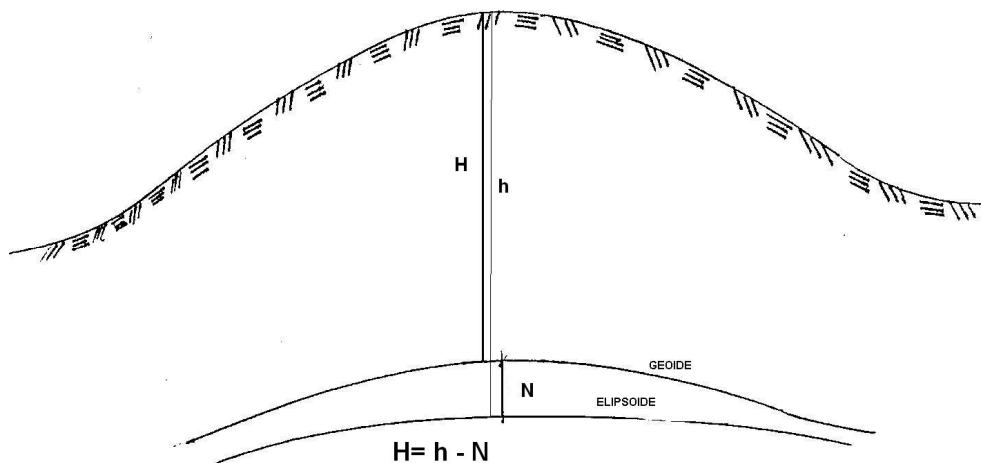
## 7.1 OBJETIVOS Y FUNDAMENTOS DE ESTE CAPÍTULO

Por razones que expusimos en el Capítulo 1 la Geodesia adoptó, como superficie geométrica simple, un elipsoide de rotación para su representación. En el capítulo 6 hemos ampliado algunos conceptos y completaremos otros en el 9, donde aclararemos de que forma se fueron determinando sus parámetros (a,f) hasta llegar a los actuales que corresponden al Sistema de Referencia Geodésico vigente (GRS 80).

Ahora nos detendremos en definir las coordenadas elípticas o geodésicas, si bien nos interesan

- $\varphi$ : Latitud Elipsódica
- $\lambda$ : Longitud Elipsódica
- h: Altura sobre el elipsoide

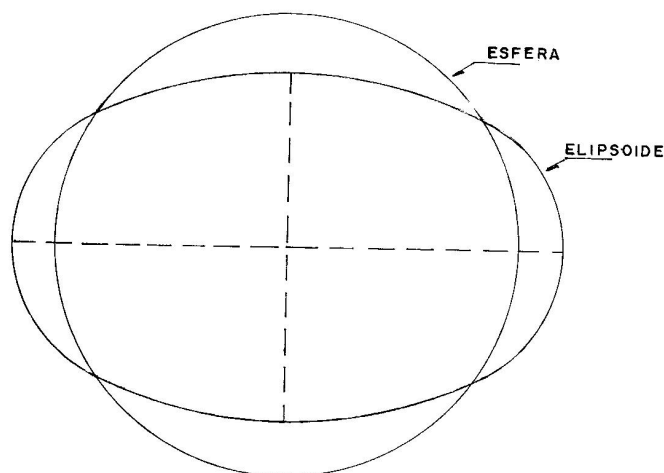
con mayor detalle nos ocuparemos de las dos primeras ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) y dejaremos para más adelante la tercera (h) ya que, como hemos analizado en el capítulo 6, el requerimiento altimétrico por excelencia se cubre con las alturas sobre el geoide (H). No obstante ello, en el capítulo 9 veremos como, modelando el geoide, de h se puede pasar a H, lo cual es un recurso de aplicación creciente para darle validez altimétrica a la geodesia satelitaria.



Primero vamos a estudiar los distintos tipos de latitud, la relación entre coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ , h) con las rectangulares (x, y, z), los radios de curvatura, los arcos sobre la superficie elipsódica y cierta propiedades relativas a las líneas sobre esa superficie, para eso tendremos que recurrir a conceptos de la geometría diferencial de curvas y superficies. Luego nos ocuparemos de los dos problemas geodésicos fundamentales (llamados así tradicionalmente):

1. Pasar de las coordenadas de un punto a las de otro, conociendo la distancia y acimut del primero al segundo. Este cálculo incluye la obtención de la modificación del acimut de la línea que los une.
2. Dados dos puntos con sus coordenadas, calcular la distancia (sobre el elipsoide) entre los mismos y los acimutes recíprocos.

Cabe aclarar que ni sobre el elipsoide ni sobre la esfera los acimutes recíprocos de una línea difieran  $180^\circ$  como en la concepción plana, a esa modificación se la denomina CONVERGENCIA MERIDIANA y proviene del hecho que los meridianos se unen en los polos.



La adaptación de un elipsoide de rotación, al geoide, es notablemente mayor que la esfera, en general la aproximación de las normales llega a que entre la vertical de cada lugar y la correspondiente perpendicular al elipsoide (desviación de la vertical) no haya valores que superen sustancialmente los  $10''$ . Por otra parte, la separación entre ambas superficies por lo general no supera los 100 metros.

Si esa comparación se realizase con una esfera única, tales discrepancias podrían superar los  $7'$  y  $10$  Km respectivamente. Ello no quiere decir que los cálculos esféricos deban desecharse, ya que utilizando radios de curvatura adecuados, adaptados a cada necesidad, la trigonometría esférica sigue constituyendo una poderosa herramienta.

El hecho de que el elipsoide sea de rotación hace que las funciones (radios, arcos, etc.) sean, por lo general, función exclusiva de la latitud.

## **7.2 LAS LATITUDES Y SU RELACIÓN**

La latitud astronómica, geoidica o natural es el ángulo entre la vertical y el plano del ecuador.

La latitud geodésica, elipsoidica o geográfica es el ángulo de la perpendicular al elipsoide que pasa por el punto considerado con el plano del ecuador, el cual a su vez coincide con el plano que describe el semieje mayor (a) al rotar sobre el eje al cual pertenece el semieje menor (b), en lo que sigue de este capítulo la designaremos como  $\varphi$  y expresaremos las funciones a partir de la misma.

La latitud geocéntrica, es el ángulo que forma un radiovector desde el centro del elipsoide dirigido al punto considerado con el plano del ecuador (descrito para el caso anterior). La denominaremos  $\varphi_g$ .

La latitud reducida ( $\varphi_r$ ), o paramétrica, es un valor auxiliar para expresar en forma sencilla la proyección del punto considerado sobre el plano ecuatorial a partir del semieje a y al que corresponde sobre el eje polar (z) a partir del semieje b.

$$r = a \cdot \cos \varphi_r$$

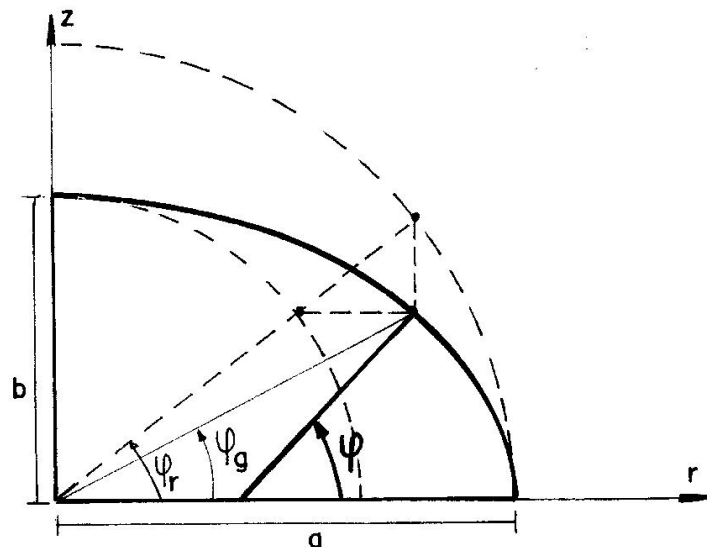
$$z = b \cdot \sin \varphi_r$$

donde  $r$  puede coincidir con los ejes  $x$  y  $o$  cualquier orientación intermedia, el centro de coordenadas corresponde al centro del elipsoide.  $\varphi_r$  es una variable útil para ciertas deducciones.

En un sistema geocéntrico, concepto que se está generalizando con la aplicación de la geodesia satelitaria, el centro del elipsoide se hace coincidir con el centro de masas de la Tierra, el eje "z" con la orientación del polo convencional (ver 2.8) y el plano  $x, z$  con el meridiano origen del tiempo.

En los antiguos sistemas, que hoy denominamos "locales", la ubicación del elipsoide y su orientación surgían de la posición astronómica determinada en el PUNTO DATUM (cuyas coordenadas se aceptaban al igual que un acimut desde el mismo).

En lo que sigue de este capítulo omitiremos el uso de la latitud astronómica (natural). Ahora analizaremos las relaciones entre  $\varphi$ ,  $\varphi_g$  y  $\varphi_r$ .



$$r = a \cdot \cos \varphi_r \quad z = b \cdot \sin \varphi_r \quad \left. \begin{array}{l} r = a \cdot \cos \varphi_r \\ z = b \cdot \sin \varphi_r \end{array} \right\} \quad \text{tg } \varphi = - \frac{1}{\left( \frac{dz}{dr} \right)} = - \frac{dr}{dz} = \text{tg } \varphi \quad (\text{pendiente de la normal a la curva})$$

$$\frac{a-b}{a} = f \quad (\text{aplanamiento}) \quad \left. \begin{array}{l} dr = -a \cdot \sin \varphi_r \cdot d\varphi_r \\ dz = b \cdot \cos \varphi_r \cdot d\varphi_r \end{array} \right\} \text{tg } \varphi = \frac{a}{b} \text{tg } \varphi_r$$

$$1 - \frac{b}{a} = f \Rightarrow b = a(1 - f), \text{ entonces:}$$

$$\boxed{\text{tg } \varphi_r = (1 - f) \text{tg } \varphi}$$

$$\boxed{\text{tg } \varphi = \frac{1}{(1 - f)} \text{tg } \varphi_r}$$

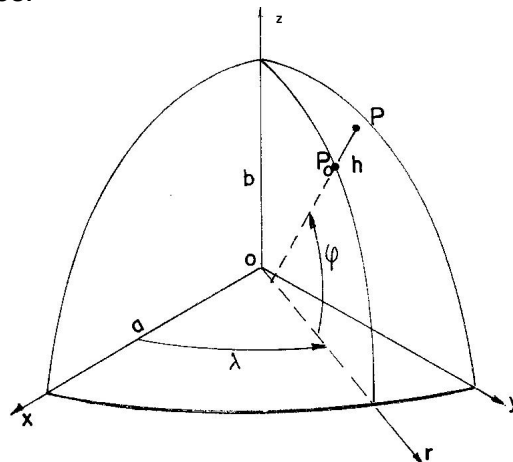
$$\operatorname{tg} \varphi_g = \frac{z}{r} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \varphi_r}{b \cdot \cos \varphi_r} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi_r = (1-f) \operatorname{tg} \varphi_r$$

$$\text{O sea } \boxed{\operatorname{tg} \varphi_g = (1-f) \operatorname{tg} \varphi_r = (1-f)^2 \operatorname{tg} \varphi}$$

### 7.3 RELACIÓN CON LAS COORDENADAS RECTANGULARES

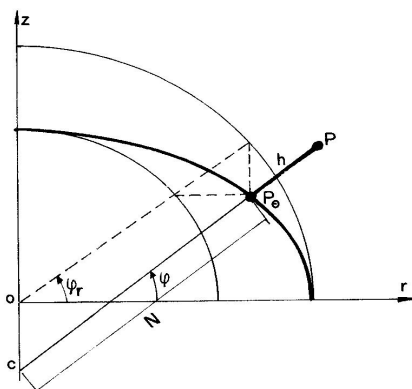
Adoptada la terna; en la que idealmente el centro de coordenadas (0) coincide con el centro de masas de la Tierra (sistema geocéntrico), el eje z con la dirección al polo adoptado (ver 2.8) y el plano xz con el meridiano origen convencional del tiempo; pero que también podría estar ubicada de acuerdo al punto astronómico usado como Datum; las relaciones entre las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ , h) surgen de la simple centración del elipsoide de rotación en dicha terna haciendo coincidir el semieje menor con el eje z y el mayor con el ecuador (Plano xy).

Convencionalmente el plano x z se hace coincidir con el meridiano, origen del tiempo y de las longitudes.



Un punto cualquiera en el espacio (P) definirá con el eje z el meridiano geodésico, que formará la elipse meridiana al interceptarse con el elipsoide. La perpendicular a esa línea desde P, (que es, a su vez, la perpendicular al elipsoide que pasa por P) define la altura h sobre el elipsoide como la distancia de P al elipsoide (P P<sub>0</sub>) y el ángulo entre la normal citada y el plano x, y es la latitud geodésica  $\varphi$ .

“h” se considera positiva fuera del elipsoide y  $\varphi$  tiene el mismo signo de z (o sea positiva en el hemisferio norte y negativa en el sur)



La longitud geodésica es el diedro entre el plano xz y el meridiano geodésico, se mide de x hacia y, es decir que es positiva hacia el este (tiene el signo de y). Rebatiendo la elipse meridiana para su estudio podemos calcular las coordenadas z y r de P, a partir de las z<sub>0</sub>, r<sub>0</sub> de P<sub>0</sub> y h.

A la distancia CP<sub>0</sub> la llamaremos N más adelante vamos a ver que N es el

radio de curvatura de la sección normal al meridiano en el punto  $P_0$ , o sea el radio que en dicho punto tiene la línea que se forma al interceptarse el primer vertical geodésico con el elipsoide.

$$(r_0 = N \cdot \cos \varphi)$$

$$(r_0 = r.de.P_0)$$

$$N = \frac{r_0}{\cos \varphi} = \frac{a \cdot \cos \varphi_r}{\cos \varphi}, \text{ reemplazando } \cos^2 \varphi_r = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_r} \text{ y } \operatorname{tg} \varphi_r = (1-f) \operatorname{tg} \varphi$$

$$\Rightarrow N = \frac{a}{\cos \varphi \sqrt{1 + (1-f)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi - 2f \operatorname{sen}^2 \varphi + f^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2-f) \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$r = (N + h) \cos \varphi, \text{ de donde se pueden deducir } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \quad (x = r \cdot \cos \lambda, y = r \cdot \operatorname{sen} \lambda)$$

Para  $z$  es necesario obtener primero  $z_0$

$$z_0 = b \cdot \operatorname{sen} \varphi_r = a(1-f) \cos \varphi_r \cdot \operatorname{tg} \varphi_r = \frac{a \cdot \cos \varphi_r}{\cos \varphi} (1-f)^2 \operatorname{sen} \varphi$$

$$z_0 = N(1-f)^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Para obtener  $z$  hay que sumarle  $(h \cdot \operatorname{sen} \varphi)$

Tenemos así las expresiones buscadas

$x = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$
$y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \lambda$
$z = [N(1-f)^2 + h] \cdot \operatorname{sen} \varphi$

La geodesia tridimensional efectúa sus cálculos en coordenadas  $x, y, z$  (del punto  $P$ ). La geodesia clásica, o bidimensional, trabaja sobre el elipsoide, para lo cual previamente es necesario reducir las mediciones a esa superficie; en esas reducciones se supone, en primera aproximación, que la cota es igual a  $h$  ( $P_0P$ ) y que los ángulos fueron medidos donde la perpendicular al elipsoide. Estas simplificaciones introducen ciertos vicios que se pueden corregir recién en una segunda aproximación, cuando se elaboró un primer modelo de geoide. A estos problemas los veremos en forma sumaria en el capítulo 9; su análisis obedece a requerimientos científicos que, si bien tienen su aplicación frente al avance tecnológico, por lo general se posterga y se utiliza la primera aproximación para el apoyo a los relevamientos apoyados en procedimientos tradicionales. (Esto se va a ir revirtiendo).

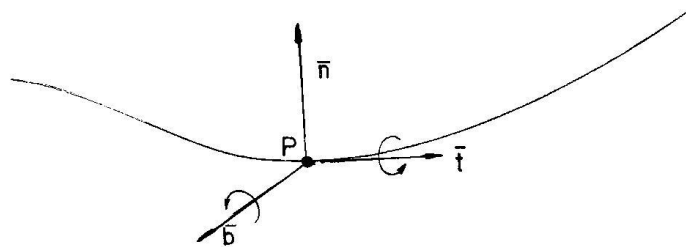
En general, en lo que sigue de este capítulo vamos a ocuparnos de los cálculos sobre el elipsoide. Dejaremos para después (cap.9) el cálculo del problema inverso de las fórmulas vistas, esto es  $\varphi, \lambda, h$ , a partir de  $x, y, z$



## 7.4 REVISIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES.

En general una curva alabeada (o “gausa”) se la puede expresar en función de un parámetro (t) con el cual se calculan las tres coordenadas rectangulares

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$



En un punto cualquiera (P) se forma un triedro por tres versores:

$\bar{t}$  = tangente (versor en la componente de la tangente)

$\bar{n}$  = normal (versor en el sentido en que se produce la flexión  $\frac{1}{\rho}$ )

$$\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n}$$

$\bar{n}$  y  $\bar{t}$  definen el plano osculador al que se puede concebir también como el formado por tres puntos de la curva infinitamente próximos.

$\bar{n}$  y  $\bar{b}$  definen el plano normal, (a la curva)

$\bar{b}$  y  $\bar{t}$  definen el plano rectificante, (perpendicular a los anteriores)

Las fórmulas de Frénet – Serret vinculan a esos vectores unitarios ( $\bar{n}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{b}$ ) con las curvaturas de flexión  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$  y de torsión  $\left(\frac{1}{\tau}\right)$

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n}$$

$ds$  = elemento de arco

$\rho$  = radio de flexión

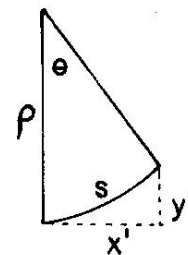
$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \frac{1}{\tau} \bar{n}$$

$\tau$  = radio de torsión (admitido como positivo si tuerce como un tirabuzón al avanzar)

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{t} - \frac{1}{\tau} \bar{b}$$

La curva se puede expresar en potencias del arco refiriéndola al triedro intrínseco

$$(x' \equiv \bar{t} \quad y' \equiv \bar{n} \quad z' \equiv \bar{b}).$$



$$x' = S - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{S^3}{6}$$

$$y' = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S^2}{2}$$

$$z' = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{S^3}{6}$$

Las dos primeras surgen de la flexión (limitando los desarrollos de  $\theta^3$ )

$$x' = \rho \cdot \text{sen} \theta = \rho \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} \right)$$

$$y' = \rho \cdot (1 - \cos \theta) = \rho \left( 1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right)$$

$$\theta = \frac{S}{\rho}$$

En la tercera entra la torsión con la convención de signo mencionada (\*)

Una superficie alabeada ( gausa) surge de introducir dos parámetros en las ecuaciones, por ejemplo el elipsoide de rotación se podría expresar en función de  $\varphi$ ,  $\lambda$  con las expresiones que vimos en el punto anterior para  $h = 0$

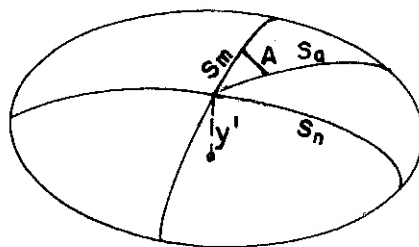
$$x = N \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$y = N \cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda \quad \text{donde N depende de } \varphi \quad N = a \cdot [1 - f(2 - f) \cdot \text{sen}^2 \varphi]^{-1/2}$$

$$z = N(1 - f) \cdot \text{sen} \varphi$$

Para un parámetro constante se tiene una curva sobre la superficie (para  $\varphi = \text{cte}$  un paralelo y para  $\lambda = \text{cte}$  un meridiano).

Si tuviéramos dos secciones normales principales (la del meridiano si lo es, la del paralelo no, pero sí la de la sección normal al meridiano) podríamos expresar la curvatura de una sección cualquiera en función de la dirección con respecto a una de ellas (p.ej. el acimut desde el meridiano).



aplicándole a cada una de ellas la expresión de  $y'$  vista antes queda

(\*) por más detalles ver: Análisis Matemático, Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo Vol. II, Cap. XX, 73-81)

$$y' = \frac{1}{M} \cdot \frac{S.m^2}{2} = \frac{1}{N} \frac{S.n^2}{2} = \frac{1}{R_A} \frac{S.a^2}{2} \begin{cases} \frac{S.a^2}{S.m^2} = \frac{R_A}{M} \\ \frac{S.a^2}{S.n^2} = \frac{R_A}{N} \end{cases}$$

donde estamos llamando:

**M** al radio de curvatura de flexión del meridiano (elemento de arco  $Sm$ )

**N** al radio de curvatura de flexión de la sección normal perpendicular al meridiano.

**R<sub>A</sub>** al radio de curvatura de flexión para una sección que corresponde a un acimut  $A$  y considerando la ecuación de la elipse

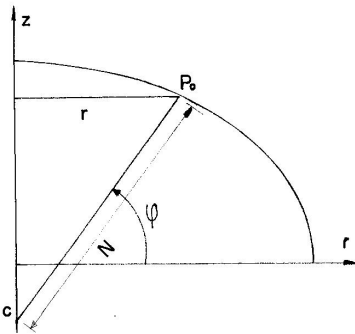
$$\frac{S_a^2 \cdot \cos^2 A}{S_m^2} + \frac{S_a^2 \cdot \operatorname{sen} A}{S_n^2} = 1$$

queda:

$$\frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\operatorname{sen}^2 A}{N} = \frac{1}{R_A}$$

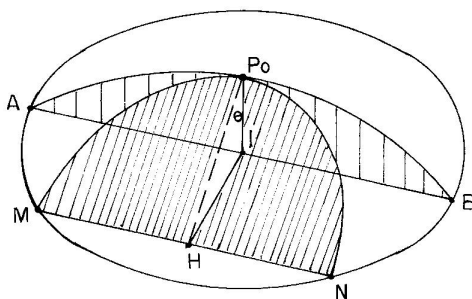
denominada fórmula de Euler, con la cual se puede obtener el radio de curvatura en una sección cualquiera. En general esta expresión vale para cualquier superficie de revolución.

Cuando tenemos una sección no normal (como el paralelo) vale el teorema de MEUSNIER, que dice: El radio de curvatura de una sección es la proyección ortogonal (sobre el plano de la misma) del radio de la sección normal correspondiente.



Este teorema tiene una aplicación para interpretar el valor de  $N$ , que vimos antes:  $r$  resulta de proyectar  $N$  sobre el plano del paralelo. Como  $r$  es, sin ninguna duda, el radio del paralelo, el segmento  $CP_0$  es forzosamente el radio de la sección normal.

La demostración general de este teorema surge de la siguiente consideración:



Arco de sección oblicua  $MP_0N$

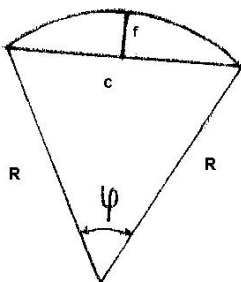
Arco de sección normal  $AP_0B$

Los radios de curvatura de la sección oblicua (bajo ángulos  $\theta$ ) y el de la normal se pueden expresar en función de sus correspondientes cuerda y flecha.

$$R = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{c^2}{8f}$$

esta fórmula que se podría aplicar para deducir el radio de

curvatura de un riel de vía férrea se comprueba fácilmente a partir de la figura auxiliar



$$\left. \begin{array}{l} c = 2.R.\text{sen} \frac{\varphi}{2} \\ f = R \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right) \end{array} \right\} \lim_{f \rightarrow 0} \left( \frac{c^2}{8f} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{4R^2.\text{sen}^2(\varphi/2)}{8R(1 - \cos(\varphi/2))} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{4R^2.2\text{sen}(\varphi/2).\cos(\varphi/2).\frac{1}{2}}{8R.\text{sen}(\varphi/2).\frac{1}{2}} = R$$

– - aplicando la regla de L'Hospital –

Aplicando este principio a la sección oblicua

$$R = \lim_{P_0H \rightarrow 0} \frac{(MN)^2}{8(P_0H)} = \lim_{P_0I \rightarrow 0} \frac{(MN)^2 \cdot \cos \theta}{8(P_0I)}$$

pero para  $P_0I \rightarrow 0$   $MN \rightarrow AB$

$$R = \cos \theta \lim_{P_0I \rightarrow 0} \frac{(AB)^2}{8(P_0I)} = R_N \cdot \cos \theta \quad \text{o sea} \quad \boxed{R = R_N \cdot \cos \theta} \quad (\text{Teorema de Meusnier})$$

De las líneas sobre la superficie nos interesan en particular las líneas geodésicas. Por definición son aquellas en las cuales el plano osculador contiene permanentemente la normal a la superficie. Al no girar hacia los costados son la menor distancia entre dos puntos sobre la superficie. El meridiano y el ecuador son líneas geodésicas, aún sobre el elipsoide, no así los paralelos.

## 7.5 RADIOS DE SECCIONES NORMAL, MERIDIANA Y DE UN ACIMUT CUALQUIERA. RADIO MEDIO

Aplicando el teorema de Meusnier surge directamente que el radio de la sección normal al meridiano vale lo que ya habíamos deducido:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2 - f).\text{sen}^2 \varphi}}$$

El radio de la sección meridiana lo vamos a deducir a partir de  $M \cdot d\varphi = \sqrt{d^2z + d^2r}$

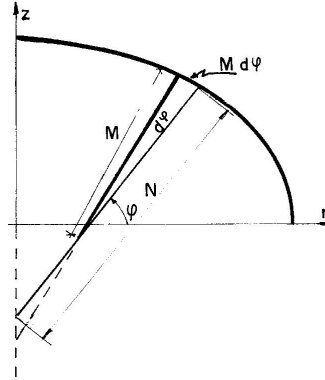
$$z = b \cdot \operatorname{sen} \varphi_r \quad dz = b \cdot \cos \varphi_r \cdot d\varphi_r = a(1-f) \cdot \cos \varphi_r \cdot d\varphi_r$$

$$r = a \cdot \cos \varphi_r \quad dr = -a \cdot \operatorname{sen} \varphi_r \cdot d\varphi_r$$

$$M^2 (d\varphi)^2 = a^2 \cdot (d\varphi_r)^2 \cdot [\operatorname{sen}^2 \varphi_r + (1-f)^2 \cdot \cos^2 \varphi_r]$$

Pero  $\operatorname{tg} \varphi_r = (1-f) \operatorname{tg} \varphi$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi_r} d\varphi_r = (1-f) \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi_r}{d\varphi} = (1-f) \frac{\cos^2 \varphi_r}{\cos^2 \varphi}$$



$$\text{Donde } M = a(1-f) \cdot \frac{\cos^2 \varphi_r}{\cos^2 \varphi} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_r + (1-f)^2 \cdot \cos^2 \varphi_r} =$$

$$= a(1-f) \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_r)} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_r + (1-f)^2 \cdot \cos^2 \varphi_r}{\operatorname{sen}^2 \varphi_r + \cos^2 \varphi_r}} =$$

$$= a(1-f) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + (1-f)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_r + (1-f)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi_r + 1}} =$$

$$= a(1-f) \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{1 + (1-f)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1-f^2)}{1 + (1-f)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} =$$

$$= \frac{a(1-f)^2}{\{\cos^2 \varphi [1 + (1-f)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi]\}^{3/2}} = \frac{a(1-f)^2}{[1-f(2-f) \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}}$$

$$M = \frac{a(1-f)^2}{[1-f(2-f) \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}}$$

La propiedad aplicada  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$  surge de que  $\cos^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi}$ , dividiendo luego numerador y denominador por  $\cos^2 \varphi$  queda demostrado.

Nótese que siempre será  $N \geq M$ .

$$\text{pues } \frac{N}{M} = \frac{1-f(2-f) \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1-f)^2} = \frac{1-f(2-f) \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}{1-f(2-f)}$$

$$\text{para } \varphi = 0 \quad N/M = \frac{1}{(1-f)^2} \gg 1 \therefore N \gg M$$

$$\text{para } \varphi = \pi/2 \quad N/M = \frac{1-f \cdot (2-f)}{(1-f)^2} = \frac{(1-f)^2}{(1-f)^2} = 1, N = M$$

(o sea que  $N > M$ , salvo en el polo en que  $N = M$ )

Contando con  $N$  y  $M$  se puede aplicar la fórmula de Euler y obtener el radio de curvatura para una sección de acimut  $A$  (ver 7.4)

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}$$

El valor del radio medio a una latitud  $\varphi$  se puede calcular de  $\frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R_A \cdot dA$

$$R_\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{MN}{M \cdot \sin^2 A + N \cdot \cos^2 A} \cdot dA =$$

$$R_\varphi = \frac{2MN}{\pi} \int \frac{\sqrt{N/M} \cdot \sqrt{M/N} \cdot \frac{dA}{\cos^2 A}}{N \left( 1 + \frac{M}{N} \cdot \text{tg}^2 A \right)} = \quad \text{haciendo } \sqrt{\frac{M}{N}} \text{tg} A = t$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot M \cdot \sqrt{\frac{N}{M}} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left[ \text{arc.tg.t} \right]_0^\infty = \sqrt{MN}$$

$$\text{Entonces } R_\varphi = \sqrt{MN} = \frac{a \cdot (1-f)}{(1-f \cdot (2-f) \cdot \text{sen}^2 \varphi)}$$

Si se utiliza una función  $W = \sqrt{1-f(2-f) \cdot \text{sen}^2 \varphi}$

Se puede resumir:

$$N = \frac{a}{W} \quad M = \frac{a \cdot (1-f)^2}{W^3} \quad R_\varphi = \frac{a \cdot (1-f)}{W^2}$$

El radio  $R_\varphi$  es el radio de la esfera que mejor se adapta al elipsoide alrededor de un punto para calcular lados; se puede demostrar que hasta 150 Km. los lados calculados por trigonometría esférica son correctos pero no quiere decir que las perpendiculares de la esfera coincidan en todo el ámbito con las perpendiculares al elipsoide, entonces esos arcos no pueden aplicarse directamente para el cálculo de coordenadas.

Paulatinamente le vamos a ir encontrando solución a este problema.

En la siguiente tabla se dan datos de  $R_A$  para distintas latitudes y Acimutes y para el elipsoide Madrid 1924.

RADIOS DE CURVATURA EN HTS  
ELIPSOIDE INTERNACIONAL MADRID 1924  
 $R = 6378388$  HTS  $1/f = 297$

LATITUD (φ)	ACIMUT (GRADOS)											
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	RADIO	
0	6355368	6355368	6340484	6346174	6355155	6367601	6366714	6373342	6377087	6378388	6358912	
5	63725994	6337268	6340542	6346280	6353508	6363898	6367858	6373343	6377259	6378551	6357237	
10	6337449	6335682	6342213	6347784	6354557	6361781	6368584	6374140	637772	6379035	6358201	
15	6343750	6346990	6344447	6349752	6356270	6363222	6369769	6375115	6378610	6379885	6358776	
20	6342989	6344125	6347400	6352424	6358597	6365180	6371378	6376440	6379748	6380897	6361915	
25	6346936	6347994	6351043	6355721	6361467	6367594	6373363	6378073	6381151	6382221	6364554	
30	6351514	6352481	6355268	6359843	6364795	6370394	6375664	6379946	6382776	6383785	6366714	
35	6356595	6357451	6359248	6363777	6368481	6373494	6378212	6382063	6384579	6385453	6371003	
40	6361997	6362756	6364442	6368295	6372173	6375900	6380029	6383499	6385506	6385718	6374618	
45	6367587	6368234	6370100	6372960	6376672	6380214	6383734	6386607	6388453	6388195	6378352	
50	6373185	6373720	6375264	6377831	6380536	6383631	6386542	638917	6390488	6391007	6382089	
55	6378620	6379048	6380278	6382165	6384481	6386947	6389267	6391159	6392234	6392822	6385718	
60	6383727	6384053	6384989	6386424	6388180	6389762	6391025	6391925	6392425	6392829	6391126	
65	6388349	6388582	6389252	6390278	6391536	6392879	6394140	6395168	6395899	6396072	6392209	
70	6392744	6392496	6392935	6393698	6394474	6395213	63956139	6395812	6396252	6396405	6394874	
75	6395587	6395674	6395926	6396311	6396784	6397288	6397761	6398147	6398399	6398486	6397036	
80	6397978	6398017	6398131	6398304	6398517	6398744	6398957	6399131	6399244	6399284	6398631	
85	6399440	6399483	6399582	6399730	6399859	6399960	6399990	6399934	6399782	6399772	6399609	
90	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	6399937	

### 7.6 ARCOS DE PARALELO Y MERIDIANO

Para el arco de paralelo se puede adoptar sin inconveniente ni límite una esfera de radio N

$$\Delta p = N \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \lambda$$

$\Delta \lambda$  tiene que estar expresado en radianes, para que no afecte la precisión deben calcularse los elementos (N);  $(\cos \varphi)$  ,  $(\Delta \lambda)$  con alrededor de 7 a 10 cifras correctas (según la extensión de  $\Delta \lambda$ ) y en la reducción de segundos a radianes debe usarse:

$$\rho'' = 206264",806$$

Para un arco de meridiano entre dos latitudes ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) debería integrarse

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M.d\varphi$$

Es común usar la función "Arco de Meridiano"

$$B = \int_0^{\varphi} M.d\varphi$$

y por diferencia obtenerlo como  $B_2 - B_1$  esa función se obtiene de la integración

$$B = a.(1-f)^2 \cdot \int_0^{\varphi} [1-f.(2-f).\text{sen}^2\varphi]^{-3/2} d\varphi$$

El corchete se puede desarrollar a partir del binomio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{2!} .x^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\text{sen}^2 \varphi$  se pueden reemplazar por  $\text{sen}^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\cos 2\varphi$  que surge de  $\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi = 1$  y  $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi$  luego es necesario introducir  $\cos^2 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi$  que surge de una consideración similar y también se puede demostrar que

$$\cos^3 2\varphi = \frac{3}{4} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos 6\varphi$$

$$\cos^4 2\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi + \frac{1}{8} \cos 8\varphi$$

y es así como, al integrar se obtiene una serie

$$B = \alpha\varphi + \beta.\text{sen}2\varphi + \gamma.\text{sen}4\varphi + \delta.\text{sen}6\varphi + \dots$$

donde  $\varphi$  en el primer término debe introducirse en radianes y los coeficientes toman las siguientes expresiones

$$\alpha = a.(1-f)^2 \cdot \left( 1 + \frac{3}{2}f + \frac{36}{16}f^2 + \frac{85}{32}f^3 \right)$$

$$\beta = -\frac{a}{2}(1-f)^2 \cdot \left( \frac{3}{2}f + 3f^2 + \frac{285}{64}f^3 \right)$$

$$\gamma = \frac{a}{4}(1-f)^2 \cdot \left( \frac{15}{16}f^2 + \frac{75}{32}f^3 \right)$$

$$\delta = -\frac{a}{6}(1-f)^2 \cdot \left( \frac{35}{64}f^3 \right)$$

que, para los elipsoides más usados en nuestro medio tienen valores que damos a continuación:



	<b>MADRID 1924</b>	<b>WGS 84</b>	<b>GRS 80</b>
a	6378388 m	6378137 m	6378137 m
f	1/297	1/298.2572236	1/298.2572221
$e^2=f(2-f)$	0.0067226922	0.0066943800	(*)
$\alpha$	6367354.500 m	6367449.146 m	(*)
$\beta$	-16107.035 m	-16038.509 m	(*)
$\gamma$	16.976 m	16.833 m	(*)
$\delta$	-0.022 m	0.022 m	(*)
Q	10002288.30 m	10001965.73 m	(*)

(\*) no damos estos valores para no confundir, ya que en el POSGAR se adoptaron los valores de WGS 84 (ver Cap. 10)

Nótese que la diferencia entre el GRS 80 (ver1.1) y el WGS 84 (World Geodetic System 1984 = Sistema Geodésico Mundial 1984) generalmente adoptado para el GPS es ínfima y surge de una leve diferencia en el aplanamiento f.

Hemos agregado el valor de Q = arco de meridiano del ecuador al polo.

Cabe destacar que en este texto hemos expresado las funciones en función de f. Hay bibliografía que usa la excentricidad

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

fácilmente se puede demostrar que  $e^2 = f(2 - f)$  y que  $1 - e^2 = (1 - f)^2$ , entonces las expresiones de M, N,  $R_\varphi$  se pueden escribir

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$N = \frac{a}{W} \quad M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad R_\varphi = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{W^2}$$

Y también se suele usar la segunda excentricidad  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

$$c = \frac{a^2}{b}$$

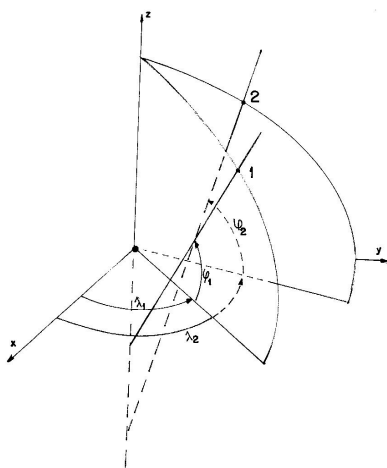
Entonces

$$N = \frac{c}{V} \quad M = \frac{c}{V^3} \quad R_\varphi = \frac{c}{V^2}$$

Lo mismo ocurre con la expresiones de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  y con las vistas para x, y, z, donde la z suele expresarse  $z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi$

## 7.7 LÍNEA GEODÉSICA Y CORTES NORMALES

Al final de 7.4 hemos definido matemáticamente a la línea geodésica. Sobre la esfera todo arco de círculo máximo (que corresponde a un plano que contiene al centro) es una línea geodésica. No ocurre lo mismo con el elipsoide, como adelantamos a continuación de tal definición los meridianos y el ecuador sí son líneas geodésicas sobre el elipsoide, la razón fundamental es que esas líneas son una consecuencia de la intersección de planos con la superficie en donde las normales a la misma siempre pertenecen a dichos planos. En general las normales a la superficie siguen perteneciendo a los sucesivos planos osculadores de la línea, pero esas normales dejan de ser coplanares, como lo muestra la siguiente figura

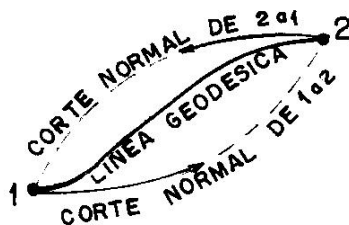


Entonces un supuesto teodolito emplazado en 1 no podría recorrer la normal en 2 sin variar la orientación, ni su intersección con el elipsoide correspondería a una línea geodésica.

Se llama corte normal a la línea formada por el plano que pasa por la normal a un punto con el elipsoide. Evidentemente el corte normal 1 – 2 difiere del 2 – 1, en el medio de ambas líneas tendremos la línea geodésica 1-2 o 2-1.

Además de las pequeñas diferencias angulares entre el corte normal y la línea geodésica (que afectan  $0''.02$  para lados de 150Km. a  $\varphi = 45^\circ$  y Acimut  $45^\circ$ ) se produce un efecto adicional por la “altura del punto visado” que es independiente de la altura del punto estación, como veremos más adelante.

Exagerando lo expresado tenemos:



En las operaciones geodésicas tradicionales, difícilmente lleguemos a figuras con esas dimensiones (150Km.) y menos con el avance de la geodesia satelitaria en su reemplazo. Sin embargo podría ser necesario tener que replantear una geodésica larga y allí tendría sentido la consideración de estas diferencias de orientación.

En cuanto a la corrección por altura en puntos elevados ( $h \sim 5.000$  m) puede tomar valores del orden de  $\pm 0''.5$  y debe computarse en trabajos de primer orden.

Al final de este capítulo vamos a analizar la procedencia y cálculo de este efecto, al igual que la fórmula que expresa la diferencia entre corte normal y línea geodésica.

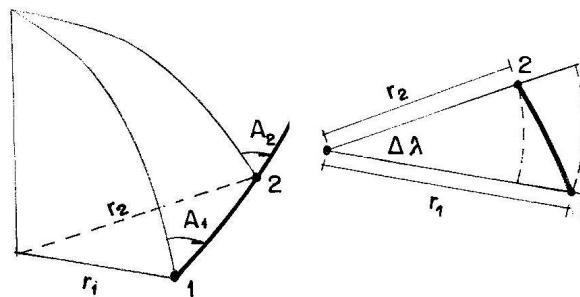
Para una superficie de revolución (como el elipsoide que nos ocupa) las líneas geodésicas cumplen con la fórmula de Clairaut

$$N \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen} A = \text{cte.}$$

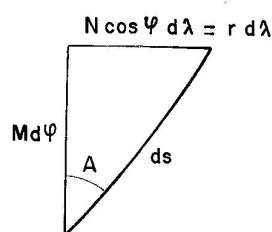
o

$$r \cdot \text{sen} \varphi = \text{cte.}$$

(Sobre una línea geodésica se mantiene constante el producto del radio del paralelo por el seno del acimut)



Esta propiedad se puede demostrar matemáticamente de



$$\cos A = M \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\text{sen} A = N \cdot \cos \varphi \frac{d\lambda}{ds} = r \frac{d\lambda}{ds}$$

de donde

$$r \cdot \cos A \cdot dA = M \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot dA$$

$$dr \cdot \text{sen} A = dr \cdot r \cdot \frac{d\lambda}{ds}$$

Vamos a demostrar que ambas expresiones se anulan al sumar con lo cual quedaría validada la fórmula de Clairaut ya que

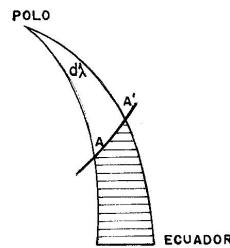
$$r \cdot \cos A \cdot dA + dr \cdot \text{sen} A = 0$$

significa que

$$d(r \cdot \text{sen} A) = 0$$

$$\boxed{r \cdot \text{sen} A = \text{constante}}$$

Para ello primero veremos que  $dA = d\lambda \cdot \text{sen} \varphi$ , lo cual surge del exceso esférico del cuadrilátero rayado en la figura siguiente



$$EE = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - A + A' - 2\pi$$

$$A' - A = dA = EE$$

Para el cual debe dividirse por el cuadrado del radio (suposición esférica)

$$EE = \frac{1}{R^2} \int_{\lambda}^{\lambda+d\lambda} \int_0^{\varphi} R \cdot d\varphi R \cos \varphi d\lambda = d\lambda \cdot \text{sen} \varphi$$

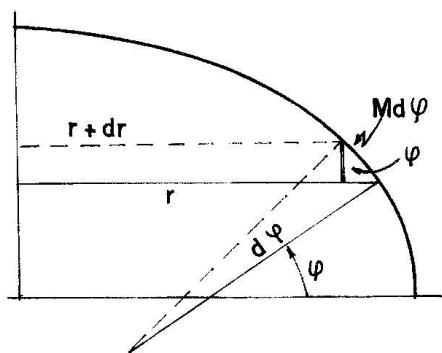
O sea

$$\boxed{dA = d\lambda \cdot \text{sen} \varphi}$$

(También llamada Fórmula de Bessel)

$$\text{entonces } r \cdot \cos A \cdot dA = M \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \text{sen} \varphi \cdot d\lambda$$

en la otra ecuación reemplazamos  $dr$  por  $-M \cdot d\varphi \cdot \text{sen} \varphi$  que se puede deducir de la siguiente figura

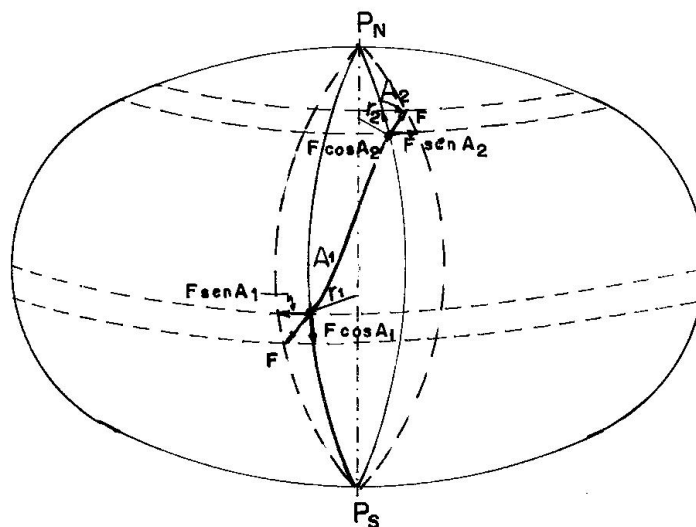


$$dr = -M d\varphi \cdot \text{sen} \varphi$$

$$dr \cdot \cos A = -M \cdot r \cdot \frac{d\lambda}{ds} \cdot \text{sen} \varphi \cdot d\varphi = -M \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \text{sen} \varphi \cdot d\lambda$$

y de ambos resultados queda  $r \cdot \cos A \cdot dA + dr \cdot \text{sen} A = 0$  que corresponde a la justificación de la fórmula de Clairaut.

Hay una interpretación física que permite llegar al mismo resultado, si la línea geodésica es la menor distancia entre dos puntos 1 y 2, es el lugar geométrico que ocuparía un hilo que se puede mover libremente sobre la superficie tensado por una fuerza arbitraria  $F$ .



Si al vector  $F$  lo descomponemos de Norte a Sur y Este – Oeste en los puntos 1 y 2, las segundas componentes (E-W) serían  $F \cdot \text{sen} A_1$  y  $F \cdot \text{sen} A_2$ . Para que el sistema esté en equilibrio los momentos deberían igualarse  $F \cdot \text{sen} A_1 \cdot r_1 = F \cdot \text{sen} A_2 \cdot r_2$  que también conduce a la fórmula de Clairaut

$$r_1 \cdot \text{sen} A_1 = r_2 \cdot \text{sen} A_2$$

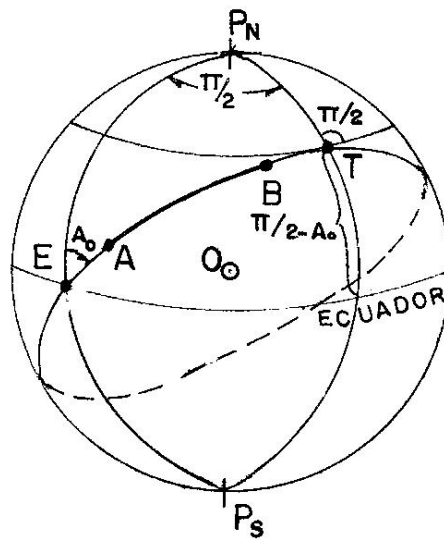
o

$$N_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} A_1 = N_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} A_2$$

Esta fórmula es particularmente útil en geodésicas largas, para analizar los acimutes extremos recíprocos.

Hay libros completos dedicados al estudio de las líneas geodésicas, acá veremos temas muy escuetos. Una de las curiosidades es que, a medida que crece (en valor absoluto) la latitud va aumentando el acimut, cuando este valor llega al ángulo recto ( $A = \pi/2$ ) la línea geodésica comenzará a aproximarse al ecuador. Al paralelo que corresponde a esa latitud máxima se lo denomina “trópico de la línea geodésica”. Evidentemente esa trayectoria que puede llegar a tomar se asemeja a una suave senoide sobre la superficie elipsoidal, hay algunos textos que tomaron la denominación italiana (del antiguo libro de Pizetti: Geodesia Teoretica) “andamamiento de la geodesica” para expresar este particular comportamiento.

Para terminar con este tema vamos a dar dos ejemplos elementales que permiten consolidar los conceptos desarrollados. En primer lugar mencionaremos el caso esférico, para el cual ya expresamos que la línea geodésica entre dos puntos es el arco de círculo máximo que los vincula, o sea la sección de un plano que pasa por los mismos y el centro de la esfera



En la figura, el arco AB es el tramo de línea geodésica entre esos puntos y corresponde a la sección del plano OAB con la esfera. La prolongación de ese arco corta al ecuador en el punto E y allí cuenta con un acimut  $A_0$ . A los  $90^\circ$  de ese arco, una vez que pasó A y B llega al punto T y allí la línea será perpendicular al meridiano a una latitud  $(\pi/2 - A_0)$  y tangente al paralelo que corresponde a T.

Si R es el radio de la esfera, el radio de citado paralelo será

$$R \cdot \cos(\pi/2 - A_0) = R \cdot \text{sen} A_0$$

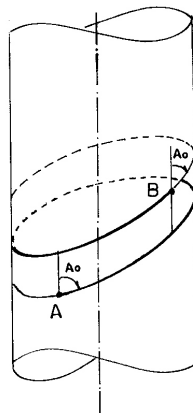
valor que permite verificar el cumplimiento de la expresión de Clairaut.

En E:  $R \cdot \text{sen} A_0$

$$\text{En T} = R \cdot \text{sen} A_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} = R \cdot \text{sen} A_0$$

Aclaremos, además que los meridianos de E y T son perpendiculares entre sí y que en T se alcanza el trópico de la línea geodésica analizada.

En segundo lugar vamos a considerar un cilindro con su eje que contiene al de rotación terrestre. Evidentemente se trata de una superficie de rotación donde se debería cumplir la fórmula de Clairaut

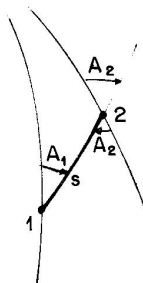


Si bien el tramo de geodésica directo entre A y B sería la distancia menor sobre la superficie cilíndrica entre esos puntos, también podríamos considerar otra línea geodésica con una vuelta adicional (marcada con línea gruesa) y esa debería corresponder una hélice permanecer con  $A_0$  constante. Dado que, en este caso, el radio del paralelo es el radio del cilindro, también acá se sigue cumpliendo la fórmula de Clairaut

## **7.8 TRASPASOS (DIRECTO e INVERSO) DE COORDENADAS**

Ahora vamos a ocuparnos de los dos problemas geodésicos fundamentales que hemos planteado en 7.1.

El primero consiste en pasar de las coordenadas del punto 1 a las del 2, conociendo el acimut de la línea geodésica que los une (en el punto 1) y la distancia  $S$  que los separa sobre el elipsoide.



También nos interesa conocer el valor de la convergencia meridiana  $\Delta A = (A_2 - A_1)$  para poder calcular el acimut recíproco y poder continuar con el cálculo poligonal.

Como adelantamos en 7.1, suele llamarse a este “primer problema geodésico” o el “problema geodésico directo”. El inverso (“inversión geodésica”) consiste en determinar la distancia y ambos acimutes cuando se conocen las coordenadas geodésicas de los puntos 1 y 2 (2° problema fundamental)

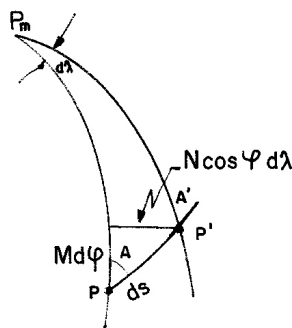
Las soluciones son varias, una de ellas utiliza desarrollos en serie.

$$\Delta\varphi = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)s + \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right)\frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3}\right)\frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$\Delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)s + \left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)\frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right)\frac{s^3}{3!} + \dots$$

$$\Delta A = \left(\frac{dA}{ds}\right)s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)\frac{s^2}{2!} + \dots$$

El cálculo de las derivadas se hace a partir de



$$ds \cdot \cos A = M \cdot d\varphi$$

$$ds \cdot \operatorname{sen} A = N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$$

$$dA = d\lambda \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Las dos primeras son inmediatas, la tercera surge de admitir la “Ecuación de Bessel”, desarrollada en 7.7

de la primera surge

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{[1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}}{a(1 - f)} \cdot \cos A$$

de la segunda

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\operatorname{sen} A}{N \cdot \cos \varphi} = \frac{[1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi]^{1/2}}{a \cdot \cos \varphi} \cdot \operatorname{sen} A$$

de la tercera

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dA}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{[1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi]^{1/2}}{a \cdot \cos \varphi} \operatorname{sen} A$$

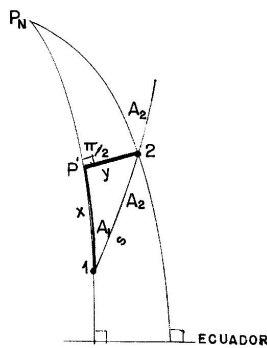
$$\frac{dA}{ds} = \frac{[1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi]^{1/2}}{a} \operatorname{sen} A \operatorname{tg} \varphi$$

las derivadas siguientes tienen que tener en cuenta las funciones de  $\varphi$  y así se llega a las expresiones finales. Con distintos tipos de simplificaciones se llega a varios algoritmos.

Otro procedimiento, más común en nuestro medio, es efectuar el cálculo mediante el auxilio de la trigonometría esférica. Las fórmulas originales fueron desarrolladas por SCHREIBER alrededor de 1870, vamos a usar una versión elaborada por HORVAT (ex asesor del IGM), adaptándola a la posibilidad que tienen las computadoras o calculadoras con funciones incorporadas con 9 cifras significativas correctas. Aclaramos esto porque, en bibliografías anteriores a 1970, en estas soluciones, se empleaba el Teorema de Legendre, según el cual para calcular los lados de un triángulo geodésico se usaba la trigonometría plana previa deducción de un tercio del exceso a cada ángulo (ver apéndice de este capítulo).

Eso era para calcular los lados al cm con tablas de 7 decimales; hoy, al contar con funciones con más cifras, se pueden usar directamente los teoremas esféricos





El primer paso consiste en calcular las coordenadas esféricas ortogonales  $x$  e  $y$ , para lo cual adoptamos una esfera de radio medio en el punto 1

$$R_1 = \frac{a(1-f)}{(1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_1)}$$

Con ese valor el lados  $S$  se puede pasar a radianes o grados.

$$S_{rad} = \frac{S_m}{R_1}$$

o

$$S^\circ = 57,2957795 \cdot \frac{S_m}{R_1}$$

Si se quiere trabajar con grados

sexagesimales y fracción decimal.

Trabajando con el triángulo esférico 1P'1 podemos obtener  $x$  e  $y$

$$\frac{\text{sen}.s}{\text{sen}\pi/2} = \frac{\text{sen}.y}{\text{sen}A_1}$$

$$\text{sen}.y = \text{sen}.s \cdot \text{sen}A_1$$

$$\text{sen}.s \cdot \cos A_1 = \text{sen}x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen}y \cdot \cos \pi/2$$

$$\cos.s = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}x \cdot \text{sen}y \cdot \cos \pi/2$$

al eliminarse el  $\pi/2 = 0$

al dividir queda

$$\text{tg}x = \text{tg}.s \cdot \cos A_1$$

El valor  $x$  se puede llevar a metros

$$x_m = x_{rad} \cdot R_1 = x^\circ \frac{R_1}{57,2957795}$$

Con lo cual estamos en condiciones de calcular el arco de meridiano en el punto P' a partir de B<sub>1</sub> (ver 7.6)

$$B = \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \text{sen}2\varphi + \gamma \cdot \text{sen}4\varphi + \delta \cdot \text{sen}6\varphi$$

aplicándolo para  $\varphi_1$  obtenemos B<sub>1</sub> y sumándole  $x$  (en metros) obtenemos

$$B' = B_1 + x_m$$

El próximo paso es calcular  $\varphi'$  o sea la  $\varphi$  que corresponde a B' o latitud del punto P'. Esto se puede hacer mediante un proceso iterativo.

$\varphi_1' = \varphi_1 + x$  (primera aproximación aplicando  $x$  en dimensión angular)

$\varphi_2' = \varphi_1' + \frac{B' - B(\varphi_1')}{6362000 m}$  (El valor 6362000 m corresponde a un M medio, es suficiente

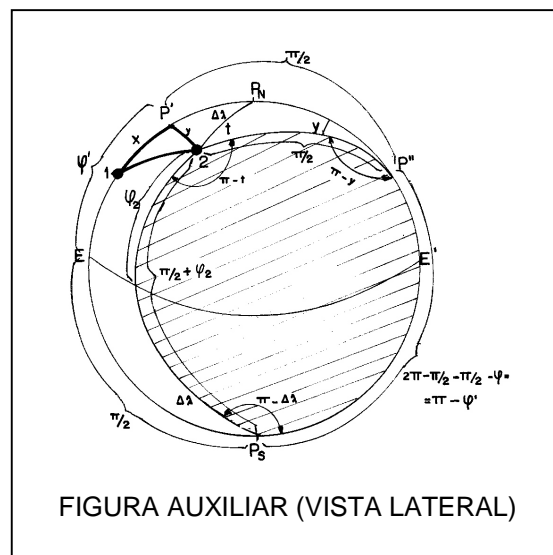
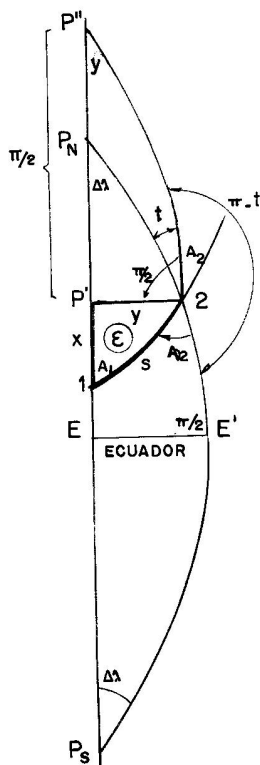
$\varphi_3' = \varphi_2' + \frac{B' - B(\varphi_2')}{6362000 m}$

para el cálculo correctivo)

Las iteraciones se interrumpen cuando la variación tiende a ser menor de  $0''0001$ .

Cabe aclarar que adoptamos  $\pm 0''0001$  de error en  $\varphi$  o  $\lambda$  para que la posición esté asegurada con un error menor de 1 cm. En acimut ese límite se puede bajar a  $\pm 0''01$ .

Una vez obtenido  $\varphi'$  pasamos a calcular otros elementos, no nos olvidemos que  $P'$  es solo un punto auxiliar. Para ello vamos a considerar un triángulo esférico extenso prolongando arriba de  $P'$  un arco  $\pi/2$  y hacia abajo hasta el otro polo ( $P_s$ ).



El triángulo esférico  $2P''P_s$  tiene la interpretación que surge de la figura auxiliar donde puede observarse que el ángulo  $2$  vale  $\pi - t$

el ángulo  $P_s$  vale  $\pi - \Delta\lambda$

el ángulo  $P''$  vale  $\pi - y$

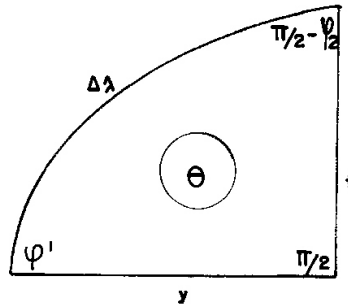
el lado  $2P_s$  vale  $\pi/2 + \varphi_2$

el lado  $P_sP''$  vale  $\pi - \varphi'$

el lado  $P''2$  vale  $\pi/2$

si a este triángulo le consideramos el suplementario o polar (ver 2.2) los lados valdrán

suplementario de 2:  $t$   
 suplementario de P":  $y$   
 suplementario de Ps:  $\Delta\lambda$   
 y los ángulos suplementarios opuestos:  $\square'$ ,  $(\pi/2 - \varphi_2)$ ,  $\square/2$ , respectivamente



Este triángulo de lados pequeños es apto para el cálculo de ciertos elementos. Al exceso esférico de éste triángulo lo vamos a denominar  $\theta$  y al exceso del anterior  $(1, P', 2)$ :  $\varepsilon$

Antes de seguir adelante vamos a ver el significado de  $t$  (ver figura pre anterior) en el cuadrilátero  $EP'2E'$  los ángulos internos valen  $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/2$  y  $(\pi/2 + t)$ , de modo que  $t$  es el exceso esférico de ese cuadrilátero. En cambio el  $12EE'$  tiene por ángulos  $(\pi - A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $\pi/2$  y  $\pi/2$  de donde  $(A_2 - A_1) = \Delta A =$  convergencia meridiana corresponde a ese exceso esférico, entonces, para calcular  $\square A$ , a  $t$  se le debe restar  $\varepsilon$ :

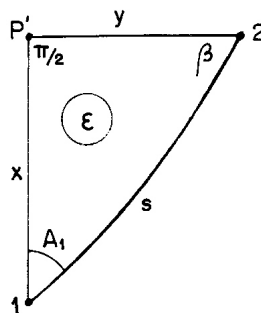
$$\boxed{\Delta A = t - \varepsilon}$$

(ya que la diferencia de superficie corresponde a la diferencia de exceso esféricos) de allí la importancia de calcular  $t$ . (ver final de 2.2)

Los excesos esféricos  $\varepsilon$  y  $\theta$  se pueden calcular rigurosamente mediante fórmulas esféricas iterativas

$$\text{sen } \varepsilon = \text{tg}^2 \frac{S}{2} \cdot \text{sen}(2A_1 - \varepsilon) \quad \text{tg } \frac{\theta}{2} = \text{tg } \frac{y}{2} \cdot \text{tg} \left( \varphi' - \frac{\theta}{2} \right)$$

La primera surge del triángulo geodésico inicial



$$\text{sen } s \cdot \cos A_1 = \text{sen } x \cdot \cos y \quad (\text{Form. sen } \cdot \cos)$$

$$\text{sen } -s \cdot \text{sen } A_1 = \text{sen } y \cdot 1 \quad (\text{Teor. sen})$$

$$tg A_1 = \frac{tg.y}{sen.x}$$

Análogamente  $tg\beta = \frac{tg.x}{sen.y}$

Multiplicando  $tg A_1 \cdot tg\beta = \frac{1}{\cos.s} \cdot \frac{1}{\cos.y} = \frac{1}{\cos.s}$  (por el teorema del coseno)

$$\frac{sen A_1 \cdot sen\beta}{\cos A_1 \cdot \cos\beta} = \frac{1}{\cos.s} \Rightarrow \frac{\cos A_1 \cdot \cos\beta - sen A_1 \cdot sen\beta}{\cos A_1 \cdot \cos\beta + sen A_1 \cdot sen\beta} = \frac{\cos.s - 1}{\cos.s + 1}$$

$$\cos.s = \cos^2 \frac{s}{2} - sen^2 \frac{s}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos.s - 1 = -2sen^2 \frac{s}{2} \\ \cos.s + 1 = 2\cos^2 \frac{s}{2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \frac{\cos.s - 1}{\cos.s + 1} = -tg^2 \frac{s}{2} \\ \frac{\cos.s - 1}{\cos.s + 1} = -tg^2 \frac{s}{2} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\cos(A_1 + \beta)}{\cos(A_1 - \beta)} = -tg^2 \frac{s}{2} \left\{ \begin{array}{l} A_1 + \beta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \rightarrow \cos(A_1 + \beta) = -sen\varepsilon \\ \beta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon - A_1 \\ A_1 - \beta = (2A_1 - \varepsilon) - \frac{\pi}{2} \\ \cos(A_1 - \beta) = \cos 2A_1 - \varepsilon - \frac{\pi}{2} = \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (2A_1 - \varepsilon) \right] \end{array} \right.$$

Entonces queda demostrado que

$$sen\varepsilon = tg^2 \frac{s}{2} \cdot sen(2A_1 - \varepsilon)$$

La segunda se deduce del triángulo suplementario (de exceso esférico  $\theta$ )

$$sen\Delta\lambda \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = sen.t \cdot \cos.y \quad (\text{Fórmula del seno-coseno})$$

$$sen\varphi_2 = \frac{sen.t}{sen\Delta\lambda} \cdot \cos.y = \frac{sen\varphi'}{1} \cdot \cos.y$$

$$\frac{sen\varphi'}{sen\varphi_2} = \frac{1}{\cos.y}$$

$$\frac{sen\varphi' - sen\varphi_2}{sen\varphi' + sen\varphi_2} = \frac{1 - \cos.y}{1 + \cos.y}$$

$$\frac{tg \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi_2)}{tg \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi_2)} = \frac{1 - \cos.y}{1 + \cos.y} = tg^2 \frac{y}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) - \frac{\pi}{2} = \theta \\ \varphi' - \varphi_2 = \theta \Rightarrow \varphi_2 = \varphi' - \theta \\ \varphi' + \varphi_2 = 2\varphi' - \theta \\ \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi_2) = \left(\varphi' - \frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right.$$

De donde queda lo que queríamos demostrar:

$$\boxed{tg \frac{\theta}{2} = tg^2 \frac{y}{2} \cdot tg \left( \varphi' - \frac{\theta}{2} \right)}$$

Para el cálculo de ambos excesos esféricos primero suponemos que  $\varepsilon$  o  $\theta$  son nulos y luego introducimos el valor para el cálculo; normalmente en la segunda iteración ya queda resuelto; recuérdese que  $\varepsilon$  se calcula para  $\Delta A$ , entonces  $\pm 0''01$  es suficiente, en cambio  $\theta$  que incide en el cálculo de  $\varphi_2$  y  $\Delta\lambda$ , deben obtenerse con  $\pm 0''0001$ .

Del triángulo polar surgen también las expresiones de  $\Delta\lambda$  y  $t$ , como así también la de  $\varphi_2$  ya vista

$$\varphi' - \varphi_2 = \theta$$

$$\varphi_2 = \varphi' - \theta$$

$$\frac{\text{sen} \Delta\lambda}{1} = \frac{\text{sen} t}{\text{sen} \varphi'}$$

$$\boxed{\text{sen} t = \text{sen} \varphi' \cdot \text{sen} \Delta\lambda}$$

$$\frac{\text{sen} \Delta\lambda \cdot \cos \varphi'}{\cos \Delta\lambda} = \frac{\text{sen} y \cdot \cos t}{\cos y \cdot \cos t} \quad (\text{fórmula sen-cos})$$

$$\frac{\text{sen} \Delta\lambda \cdot \cos \varphi'}{\cos \Delta\lambda} = \frac{\text{sen} y \cdot \cos t}{\cos y \cdot \cos t}$$

$$tg \Delta\lambda \cdot \cos \varphi' = tg y \Rightarrow \boxed{tg \Delta\lambda = \frac{tg y}{\cos \varphi'}}$$

Salvo el caso de  $\varphi'$ , en que hemos considerado el cambio de curvatura a través del arco finito del meridiano, nos falta aún aplicar ciertos cambios de radios de curvatura adecuados para que sea correcto el traspaso sobre el elipsoide.

En primer lugar el valor "y" a emplear para el cálculo de  $\theta$  lo tenemos que transformar para que corresponda a la latitud  $\varphi'$ , ya que lo requerimos para pasar de  $\varphi'$  a  $\varphi_2$

$$y' = y \cdot \frac{R_1}{R'}$$

ya que antes habíamos dividido S por  $R_1$  y de esta manera se introduce el cambio de radio de curvatura

$$\boxed{y' = y \cdot \frac{[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi']}{[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi_1]}}$$

Con el que se calcula  $\theta$

$$\boxed{tg \frac{\theta}{2} = tg^2 \left( \frac{y'}{2} \right) \cdot tg \left( \varphi' - \frac{\theta}{2} \right)}$$

Y luego  $\boxed{\varphi_2 = \varphi' - \theta}$

Para el cálculo de  $tg \Delta\lambda = \frac{tg y}{\cos \varphi'}$  el valor de y debería transformarse de manera

que el radio corresponda a la sección normal en  $\varphi'$  ya que la esfera tangente al paralelo (de radio  $N'$ ) es la que mejor se adapta para la transferencia de longitudes

$$y'' = y \frac{R_1}{N'} = y \cdot \frac{a \cdot (1-f)}{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_1]} \Bigg/ \frac{a}{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi']^{1/2}}$$

$$y'' = y \frac{(1-f) \cdot \sqrt{1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi'}}{1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_1} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{tg}\Delta\lambda = \frac{\text{tg} \cdot y''}{\cos\varphi'}}$$

En el ejemplo ordenaremos mejor la secuencia del cálculo, por ahora basta aclarar que

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$$

$$\text{sent} = \text{sen}\varphi' \cdot \text{sen}\Delta\lambda$$

$$A_2 = A_1 + t - \varepsilon$$

Y que si se quiere el acimut recíproco en el punto 2 hay que aplicarle  $\pm 180^\circ$ .

El ejemplo que vamos a desarrollar corresponde a

$$\varphi_1 = -45^\circ$$

$$\lambda_1 = -60^\circ$$

$$A_1 = 45^\circ$$

$$S = 150000 \text{ m}$$

para el Elipsoide Internacional (Madrid 1924) que son los valores que utiliza el Ing. Horvat en el artículo de la Revista Cartográfica (ver Bibliografía), donde presenta el algoritmo, aclaramos que en el procedimiento hemos modificado algunos pasos dándole prioridad al uso de funciones con 9 o más decimales y a la eliminación del uso de tablas.

Recuadraremos las fórmulas que se van usando y en el cálculo de valores angulares en radianes le agregaremos entre paréntesis el equivalente en grados sexagesimales con fracción decimal para facilitar el eventual seguimiento con calculadora.

$$\boxed{R_1 = \frac{a \cdot (1-f)}{1-f \cdot (2-f) \cdot \text{sen}^2\varphi_1}}$$

$$R_1 = \frac{6378388 \cdot (0.996632997)}{1 - 0.006722670 \cdot \text{sen}^2\varphi_1} = 6378351.72 \text{ m}$$

$$\boxed{S_{rad} = \frac{S_m}{R_1}}$$

$$S = \frac{150000}{6378351.742} = 0.023517047_{rad} = (1^\circ 34' 42.754")$$

(Factor para pasar a  $^\circ = 57.2957795^\circ = 206264.806''$ )

$$\boxed{\text{tg}x = \text{tg}S \cdot \cos A_1} + 0.0166321299$$

$$x = + 0.16630596 \text{ rad} = (+0^\circ 95286299)$$

$$\boxed{\text{sen } y = \text{sen } S \cdot \text{sen } A_1} \quad +0.0166273509$$

$$y = +0.016628297 \text{ rad} = (+0^\circ 95273125)$$

$$\boxed{x_m = x_{rad} \cdot R_1} \quad x_m = + 106075.79 \text{ m}$$

$$\boxed{B = 6367654.500 \cdot \varphi - 16107.035 \cdot \text{sen } 2\varphi + 16.976 \cdot \text{sen } 4\varphi - 0.022 \cdot \text{sen } 6\varphi}$$

(para otro elipsoide van otras constantes, ver 7.6)

para  $\varphi_1$ ,  $B_1 = -4985037.14 \text{ m}$

$$\boxed{B' = B_1 + x_m} = -4878961.35 \text{ m}$$

primera aproximación de  $\varphi' = \varphi_1 + x = -45^\circ + 0^\circ 95286299$   
 $\varphi_1' = -44^\circ 0471370$

El B de  $\varphi_1'$ , B ( $\varphi_1'$ ) da -4879149.28 m

La corrección para la segunda aproximación será

$$\frac{B' - B(\varphi_1')}{6362000} = \frac{-4878961.35 + 4879149.28}{6362000} =$$

$$= \frac{+187.93}{6362000} = +0.000029539 = (+0^\circ 00169246)$$

o sea  $\varphi_2' = (-44^\circ 045445)$

repetiendo la operación surge  $\varphi_3' = (-44^\circ 04544566)$

y no es necesaria más aproximación pues  $0''0001 \equiv 0^\circ 0000003$  (aunque conviene verificar si para ese  $\varphi'$  se cumple B' dentro del centímetro) de manera que

$$\underline{\varphi'} = (-44^\circ 04544566) = \underline{-44^\circ 02' 43'' 6043}$$

Ahora corresponde calcular  $y'$

$$\boxed{y' = y \frac{[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi']}{[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi_1]}}$$

$$[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi'] = 0.996750645$$

$$[1 - f(2 - f)\text{sen}^2 \varphi_1] = 0.996638665$$

$$y' = 0^\circ 95273125 \cdot \frac{0.996750645}{0.996638665} = (0^\circ 652838296) = 0.0166301655 \text{ rad}$$

Para calcular  $\theta$  a través de la expresión

$$\boxed{tg \frac{\theta}{2} = tg^2 \frac{y'}{2} \cdot tg \left( \varphi' - \frac{\theta}{2} \right)}$$

Haremos un calculo previo aproximado de  $\theta/2$

$$\frac{\theta}{2} = \left( \frac{y'_{rad}}{2} \right)^2 \cdot tg \varphi' \quad (\text{primera aproximación})$$

$$\frac{\theta}{2} = -0.000066874_{rad} = (-0^{\circ}003832)$$

Valor que introducimos en la expresión anterior

$$tg^2 \frac{\theta}{2} tg^{20^{\circ}476419148} \cdot tg(-44^{\circ}04544566 + 0^{\circ}003832)$$

$$tg \frac{\theta}{2} = -0.000066869$$

$$\frac{\theta}{2} = (-0^{\circ}00383131)$$

$$\theta = (-0^{\circ}00766363) = -27''5854 \quad (\text{segunda aproximación})$$

proceso que se puede reiterar introduciendo este valor

$$tg \frac{\theta}{2} = tg^{20^{\circ}476419148} \quad tg(44^{\circ}04544566 + 0^{\circ}00383131)$$

$$tg \frac{\theta}{2} = -0.0000668685$$

$$\frac{\theta}{2} = -0^{\circ}003831128$$

$$\theta = (-0^{\circ}007662566) = -27''5852$$

pero, como puede apreciarse, en este caso la variación es muy leve y no requiere otra aproximación.

Ahora estamos en condiciones de calcular  $\varphi_2$

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi' - \theta}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (-44^{\circ}04544566) + 0^{\circ}007662566 \\ &= (-4403778300) = -44^{\circ}02'16''0191 \end{aligned}$$

o directamente en valores sexagesimales

$$\begin{array}{r} -44^{\circ}02'43''6043 \\ \quad \quad \quad + 27''5852 \\ \hline \varphi_2 = -44^{\circ}02'16''0191 \end{array}$$

Para calcular  $\lambda_2$  debemos primero calcular  $y''$

$$\boxed{y'' = y \frac{(1-f)\sqrt{1-f(2-f)} \cdot \text{sen}^2 \varphi'}{[1-f(2-f) \cdot \text{sen}^2 \varphi_1]}}$$



$$y'' = 0.016628297 \frac{0.996632997 \sqrt{1 - 0.006722670 * 0.483342966}}{(1 - 0.006722670 * 0.5)}$$

$$y'' = 0.016601165 = (0^\circ 95' 11.76693'')$$

y luego

$$\boxed{tg \Delta \lambda = \frac{tgy''}{\cos \varphi'}}$$

$$tg \Delta \lambda = 0.023098155$$

$$\Delta \lambda = (1^\circ 32' 31.91521'') = +1^\circ 19' 23.4895''$$

Valor con el que se calcula  $\lambda_2$

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda}$$

$$-60^\circ$$

$$\underline{+1^\circ 19' 23.4895''}$$

$$\underline{\lambda_2 = 58^\circ 40' 36.5105''}$$

Ahora, para traspasar el acimut debe calcularse

$$\boxed{A_2 = A_1 + t - \varepsilon}$$

$$\boxed{\text{sen } t = \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \Delta \lambda}$$

$$= -0.69522872 * 0.02309200$$

$$= -0.1625422$$

$$t = (-0^\circ 9' 19.8786'') = -55' 11.56''$$

$$\boxed{\text{sen } \varepsilon = tg^2 \frac{s}{2} \cdot \text{sen}(2A_1 - \varepsilon)}$$

El valor de  $\varepsilon$  aproximado se puede obtener de  $\left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{sen} 2A_1$  en radianes

$$\left(\frac{0.0235170}{2}\right)^2 \cdot 1 = 0.000138262 = (0^\circ 00' 7.922'')$$

$$= 28'' 52$$

$$\text{sen } \varepsilon = tg^2 0^\circ 67' 37.14'' \cdot \text{sen} 89^\circ 99' 20.8''$$

$$= 0.000138258$$

$$\varepsilon = (0^\circ 00' 7.9216'') = 28'' 52$$

$$A_1 = 45^\circ$$

$$+ t = \dots 55' 11.56''$$

$$- \varepsilon = \dots 28'' 52$$

$$\underline{\underline{A_2 = 44^\circ 04' 19.92''}}$$

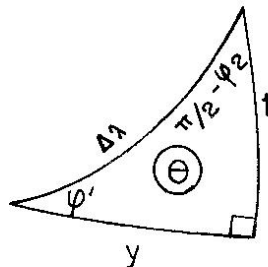
y si se quiere al acimut recíproco (línea 2-1) hay que aplicarle  $\pm 180^\circ$  (en este caso +)

$$\underline{\underline{A_{21} = 224^\circ 04' 19.92''}}$$

Vamos ahora a resolver el problema inverso (inversión geodésica) o 2º problema geodésico fundamental o sea que si tenemos  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$  y  $\varphi_2$ ,  $\lambda_2$  queremos calcular  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  y  $S$  (o  $S_{12}$ ).

Como es lógico, mediante la misma concepción de cálculo, comenzaremos con el

triángulo polar ya planteado



Del cual conocemos  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  y  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)$ . Para calcular el exceso esférico  $\theta$  podemos utilizar una expresión similar a la utilizada para  $\varepsilon$  en el caso anterior

$$\left[ \text{sen } \varepsilon = \text{tg}^2 \frac{s}{2} \text{sen}(2A_1 - \varepsilon) \right]$$

que, en esta oportunidad, introduciendo los elementos conocidos, será

$$\text{sen } \theta'' = \text{tg}^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \text{sen} \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right) - \theta \right]$$

$$\text{sen } \theta'' = \text{tg}^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \text{sen}(2\varphi_2 + \theta)$$

Lo hemos denominado  $\theta''$  puesto que, al ser calculado a través de  $\Delta\lambda$  corresponde a una esfera de radio  $N_2$  y como lo necesitamos para pasar de  $\varphi_2$  a  $\varphi'$  deberíamos introducir un cambio para que responda a  $M_2$ , o sea que a  $\theta''$  lo deberíamos multiplicar por  $\frac{N_2}{M_2}$ , dado que  $\theta$  es muy pequeño, ese factor se lo podríamos aplicar directamente

a la expresión deducida de  $\text{sen } \theta''$  y obtener así  $\text{sen } \theta$ .

$$\frac{N_2}{M_2} = \frac{a}{\sqrt{1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_2}} \cdot \frac{a(1-f)^2}{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_2]^{3/2}} = \frac{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_2]}{(1-f)^2}$$

Y queda

$$\text{sen } \theta = \frac{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi_2]}{(1-f)^2} \text{tg}^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \text{sen}(2\varphi_2 + \theta)$$

en la primera iteración podemos calcular un valor aproximado de  $\theta$  considerando el primer factor igual a 1,  $\theta = 0$  y  $\text{tg} \Delta\lambda = \Delta\lambda$  en radianes

$$\theta_{apr} = \frac{\Delta\lambda^2}{4} \text{sen } 2\varphi_2$$

Una vez introducido este valor, calculado  $\theta$  con la fórmula completa y reiterada el cálculo con ese nuevo valor, podemos obtener

$$\varphi' = \varphi_2 + \theta$$

$$\text{sent} = \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \Delta\lambda$$

y

$$\boxed{tgy'' = tg\Delta\lambda \cdot \cos\varphi'}$$

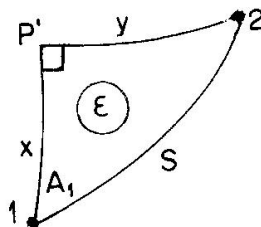
Fórmulas que provienen del desarrollo anterior, la diferencia que lleva a designar  $y''$  proviene de que el cálculo se está haciendo a partir de  $\Delta\lambda$ , que responde a la latitud  $\varphi_2$  o  $\varphi'$  y quisiéramos que corresponda al radio medio ( $R_\varphi$ ) a una latitud media  $\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$ , de manera que el factor debería ser

$$\frac{N'}{R_{12}} = \frac{a}{\sqrt{1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi'}} \cdot \left[ \frac{a(1-f)}{1-f(2-f)\text{sen}\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \right]$$

y así tendremos

$$\boxed{y = \frac{\left[ 1-f(2-f)\text{sen}^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \right]}{(1-f)\sqrt{1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi'}} y''}$$

Y ahora podemos pasar a considerar el primer triángulo esférico rectángulo que planteamos en el cálculo directo



Donde valen las siguientes expresiones de la trigonometría esférica (teor. 5 elementos y del seno, simplificados por el ángulo recto)

$$\text{sen } S \cdot \cos A_1 = \text{sen } x \cdot \cos y$$

$$\text{sen } S \cdot \text{sen } A_1 = \text{sen } y$$

de donde surge

$$\boxed{tg A_1 = \frac{tgy}{\text{sen } x}}$$

(el cuadrante se determina a partir de los signos de  $x$  e  $y$ , como en las coordenadas polares, el valor de  $X$  surge de

$$\boxed{X_{\text{metros}} = B' - B_1}$$

$$\text{Donde } \begin{cases} B = \alpha\varphi + \beta \cdot \text{sen} 2\varphi_1 + \gamma \cdot \text{sen} 4\varphi_1 + \delta \cdot \text{sen} 6\varphi_1 \\ B' \quad \text{para } \omega' \quad B_1 \text{ para } \omega_1 \end{cases}$$

Que se puede pasar a radianes dividiéndolo por  $R_{12}$ , o sea  $x_{rad} = \frac{x_{metros}}{R_{12}}$  donde

$$R_{12} = \frac{a(1-f)}{\left[1 - f(2-f) \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right]}$$

El lado se logra a partir del mismo par de expresiones (elevados al cuadrado y sumados):

$$\text{sen}S = \sqrt{\text{sen}^2x + \text{sen}^2y - \text{sen}^2x \cdot \text{sen}^2y}$$

que se puede pasar a metros multiplicándolo por  $R_{12}$

$$S_m = S_{rad} \cdot R_{12}$$

Para calcular el acimut  $A_2$  volvemos a aplicar las expresiones deducidas para el traspaso directo

$$A_2 = A_1 + t - \varepsilon$$

donde  $\text{sent} = \text{sen}\varphi' \cdot \text{sen}\Delta\lambda$  y

$$\text{sen}\varepsilon = \text{tg}^2 \frac{S}{2} \cdot \text{sen}(2A_1 - \varepsilon)$$

(expresiones que vienen del problema directo)

En el argumento  $(2.A_1 - \varepsilon)$  vale introducir un valor aproximado

$$\varepsilon_{apr} = \frac{xy}{2}$$

Donde x e y deben introducirse en radianes, lo cual equivale a  $\frac{SUP}{R^2}$ .

Si se quiere obtener el acimut recíproco ( $A_{21}$ ) hay que aplicarle  $\pm 180^\circ$  a  $A_2$  (que es el acimut que corresponde a la continuación de la línea geodésica).

Como ejemplo vamos a aplicar los resultados del caso anterior, con algunas variantes corresponde al artículo de la revista GEODESIA de 1969, cuyo autor es también el Ing. HORVAT (ver bibliografía) utilizando el elipsoide Madrid 1924.

$$\varphi_1 = -45^\circ 00' 00" 0000 \quad \lambda_1 = -60^\circ 00' 00" 0000$$

$$\varphi_2 = -44^\circ 02' 16" 0191 \quad \lambda_2 = -58^\circ 40' 36" 5105$$

$$(-44^\circ 03' 78" 308)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 01^\circ 19' 23" 4895$$

$$(1^\circ 32' 31" 9153)$$

$$0.023094048 \text{ rad}$$

$$\theta_{apr} = \frac{\Delta\lambda^2}{4} \cdot \text{sen}2\varphi_2 = -0.00013325 \text{ (radianes)}$$

$$(-0^\circ007635)$$

con esa primera aproximación de  $\theta$  pasamos a calcularlo con mayor exactitud

$$\text{sen}\theta = \frac{[1 - f(2 - f)\text{sen}^2\varphi_2]}{(1 - f)^2} \cdot \text{tg}^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \text{sen}(2\varphi_2 + \theta)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{(1 - 0.00672267002 * 0.483209304)}{0.993277331} 0.00013334563 \cdot \text{sen}(-88.083201) = 0.000133737$$

$$\theta = (-0^\circ0076657)$$

El cálculo se podría reiterar introduciendo este valor de  $\theta$ , sin embargo en este caso particular no es previsible que mejore puesto que  $\text{sen}(2\varphi_2 + \theta)$  está muy próximo a 1 (en valor absoluto, o sea -0.9994...) y la variación del seno resulta imperceptible. Pero es necesario aclarar que esta situación cambia para otras orientaciones y puede ser necesario utilizar una iteración adicional.

Con este valor estamos en condiciones de calcular  $\varphi'$

$$\begin{aligned} \varphi' = \varphi_2 + \theta &= (-44^\circ04544565) \\ &= -0.768738047 \text{ radianes} \end{aligned}$$

valor que puede introducir en el cálculo de  $B = \alpha\varphi + \beta \cdot \text{sen}2\varphi_1 + \gamma \cdot \text{sen}4\varphi_1 + \delta \cdot \text{sen}6\varphi_1$  (ver 7.6 para elipsoide Madrid 1924)

y da:

$$B' = -4878961.346 \text{ m}$$

para  $\varphi_1$  da:

$$B_1 = -4985037.134 \text{ m}$$

de donde surge

$$x_m = B' - B_1 = 106075.79 \text{ m}$$

que para pasarlo a radianes, debemos dividir por

$$R_{12} = \frac{a \cdot (1 - f)}{\left[ 1 - f(2 - f) \cdot \frac{\text{sen}^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right]}$$

que da

$$R_{12} = 6377990.49 \text{ m}$$

entonces

$$x_{rad} = \frac{x_m}{R_{12}} = 0.016631537$$

$$(0^\circ952916923)$$

Para calcular y obtenemos primero  $y''$

$$\begin{aligned} \text{tgy}'' &= \text{tg}\Delta\lambda \cdot \cos\varphi' \\ &= 0.023098155 * 0.718788587 \\ &= 0.0166026902 \\ y'' &= (0^\circ951176674) = 0.0166101164 \text{ rad} \end{aligned}$$

y luego

$$y = \frac{1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}{(1 - f) \sqrt{1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi'}} \cdot y''$$

$$y = (0^\circ 95278521) = 0.016629238 \text{ rad}$$

que, para llevarlo a metros multiplicamos por  $R_{12}$

$$y = 106061.12 \text{ m}$$

(nótese que el valor de  $y$  en unidad angular es levemente mayor que el obtenido en el cálculo directo, ello se debe al cambio de radio de curvatura  $R_1$  a  $R_{12}$ , sin embargo los valores en metros coinciden).

Ahora estamos en condiciones de calcular el Acimut  $A_1$

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\operatorname{tgy}}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{0.0166317719}{0.0166317711} = 1.000000048$$

$$A_1 = (45^\circ 00' 00'' 005)$$

y la distancia

$$\operatorname{sen} S = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 y}$$

$$= \sqrt{0.0005530122} = 0.023516211$$

$$S = (1^\circ 34' 50'' 3858) = 0.023518379_{\text{rad}}$$

$$S_{\text{metros}} = S_{\text{rad}} \cdot R_{12} = \underline{\underline{149999.998 \text{ m}}}$$

Para calcular el acimut en 2 hay que obtener  $t$  y  $\varepsilon$

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \varphi' \cdot \operatorname{sen} \Delta \lambda$$

$$\operatorname{sen} t = -0.01605422$$

$$t = (-0^\circ 9' 19'' 865) = -55' 11'' 563$$

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{S}{2} \cdot \operatorname{sen}(2A_1 - \varepsilon)$$

donde el valor  $\varepsilon$  aproximado se obtiene de

$$\varepsilon_{\text{apr}} = \frac{xy}{2}$$

$$= 0.00013828 \text{ rad} = (0^\circ 00' 7'' 223)$$

Que ahora se puede introducir en la expresión mencionada

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{tg}^2 0^\circ 6' 7'' 51929 \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - 0^\circ 00' 7'' 223)$$

$$= 0.000138291$$

$$\varepsilon = (0^\circ 00' 7'' 235)$$

$$= 28'' 525$$

Y ahora obtenemos el acimut de la línea geodésica en el punto 2

$$A_2 = A_1 + t - \varepsilon = \underline{\underline{44^\circ 04' 19'' 912}}$$

redondeando, tenemos entonces los resultados finales

$$S = 15000.00 \text{ m}$$

$$A_1 = A_{12} = 45^\circ 00' 00'' 00$$

$$A_2 = 44^{\circ}04'19''91$$

$$A_{21} = 224^{\circ}04'19''91$$

Corresponde comentar nuevamente que las coordenadas  $x$ ,  $y$  las hemos procesado redondeándolas al diezmilésimo de segundo sexagesimal para que quede protegido el centímetro en la Posición (en  $x$ ,  $1'' = 30$  m o sea  $0''0001 = 0.3$  cm) mientras que para los acimutes es suficiente el centésimo, valor muy inferior a la exactitud de las mediciones angulares que son del orden de  $\pm 0''1$ .

## **7.9 TEMAS ADICIONALES**

### **7.9.1 Incidencia del Problema Inverso en la Compensación.**

Independientemente de requerimientos propios del problema inverso, como podría ser determinar la posición de dos puntos alejados mediante geodesia satelitaria y tener que calcular la distancia geodésica (sobre el elipsoide) entre los mismos y las orientaciones recíprocas (por ejemplo, para encarar la construcción de una obra de desarrollo lineal desde ambos extremos), veremos que tiene una aplicación en la compensación de una red.

Recordemos lo desarrollado en el Capítulo 4 donde el método de variación de coordenadas lleva a ecuaciones de observación para las direcciones del siguiente tipo

$$-z - b.dx + a.dy - l = v$$

Y para los lados

$$-K + a - dx + b.dy - l' = v'$$

donde

$$l = A_0 + d - (A)$$

$$l' = \rho'' \left( \frac{S - (-S)}{S} \right)$$

d= dirección observada

S= lado medido

(A) = Acimut deducido de coordenadas preliminares

(S) = Lado deducido de coordenadas preliminares

Tal planteo se puede generalizar, en redes extensas geodésicas si se modifican las incógnitas

$$dx = M.d\varphi$$

$$dy = N.\cos\varphi.d\lambda$$

Y en los términos independientes se calculan a partir de (A) y (S) obtenidos del problema que acabamos de desarrollar.

Alrededor de 1970, el Agrimensor A. V. ELIAS y el señor A. CHRISTENSEN fueron enviados por el IGM a el U. S. TOPOGRAPHIC COMMAND allí desarrollaron un paquete de programas con los cuales se recompensó la Triangulación Fundamental Argentina.

El Agrim. Elías fue Ayudante de la Cátedra de Geodesia (FIUNLP) a fines de la década de 1950 y luego tuvo una destacada actuación en el IGM, el Ing. HORVAT prestó su asesoramiento en esa época y el mencionado reproceso fue uno de los hitos

fundamentales de la Geodesia Argentina (de donde surgió el SISTEMA INCHAUSPE'69)

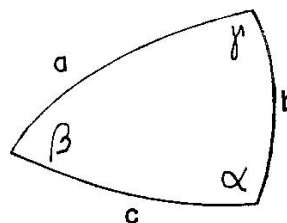
### 7.9.2 Teorema de Legendre

Antes de la disponibilidad de unidades de procesamiento con funciones (trigonométricas, etc.) incorporadas con 9 o más decimales correctos y técnicas de programación, resultaba muy práctico aplicar el TEOREMA DE LEGENDRE:

*PARA EL CALCULO DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO GEODÉSICO, SE PUEDE REEMPLAZAR LA FIGURA ESFÉRICA POR UNA PLANA, DONDE LOS ÁNGULOS SE REDUCEN EN UN TERCIO DEL EXCESO ESFÉRICO.*

Se puede demostrar que esto vale, con las exactitudes de cálculo requeridas, para lados de hasta 150 km, en figuras mayores hay términos esféricos y elipsódicos que no se pueden despreciar.

Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son los lados en metros y  $r$  el radio medio de la esfera adoptada, el teorema del coseno se puede expresar de la siguiente forma:



$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \operatorname{sen} \frac{b}{r} \operatorname{sen} \frac{c}{r} \cos \alpha$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\operatorname{sen} \frac{b}{r} \operatorname{sen} \frac{c}{r}}$$

Los arcos  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{c}{r}$  son pequeños y se pueden reemplazar las funciones por los primeros términos de las series de Mc. Laurin

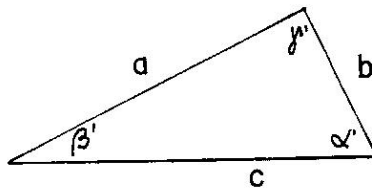
$$\cos \alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right) \left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Limitando, en los productos, el 4º orden y después de algunas operaciones y ordenamientos queda

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24r^2bc}$$

Pero, de acuerdo al teorema del coseno de la trigonometría plana





$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \alpha'$$

Y pasando ese término al miembro de la izquierda queda

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{2 + r^2bc}$$

Si  $T$  es la superficie del triángulo  $\left( T = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen} \alpha \right)$  y consideramos

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = d \cdot \cos \alpha = -\text{sen} \alpha \cdot d\alpha$$

surge que  $d\alpha = \alpha' - \alpha$  se puede expresar de la siguiente manera

$$d\alpha = \frac{16.T^2}{24.r^2 \cdot b.c.\text{sen} \alpha}$$

O sea  $d\alpha = \frac{2T^2}{3.r^2(2T)} = \frac{T}{3.r^2} = \frac{\varepsilon}{3}$  ya que el exceso esférico ( $\square$ ) equivale a la superficie del triángulo dividida por  $r^2$ .

O sea

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$$

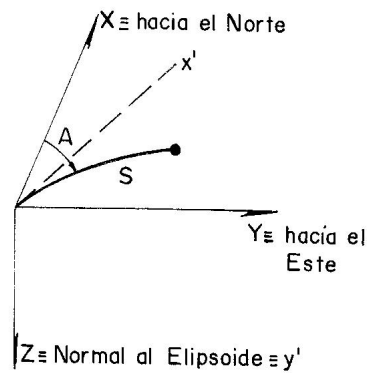
Que expresa el Teorema de Legendre.

Dicho teorema fue muy utilizado para resolver triángulos geodésicos y algunos aspectos de los trasposos de coordenadas sin requerir funciones con 9 decimales ya que, por lo general, con 7 eran suficientes para proteger los cálculos de lados dentro del centímetro.

Aún en la actualidad, cuando se miden los tres lados de un triángulo (o más propiamente un trilátero) se puede recurrir al mismo para calcular los ángulos internos.

### **7.9.3 Desarrollo de Weingarten y su Aplicación.**

Se trata de una adaptación del desarrollo de una curva en potencia del arco visto en 7.4 y lo aplicaremos al análisis de la variación angular entre el corte normal y la línea geodésica, y planteada en 7.7



Recordando que  $x'$  expresa sobre la tangente la componente del desarrollo del arco, se la puede descomponer en los sentidos norte (X) y este (Y) y denominaremos Z a la componente sobre la normal al elipsoide, coincidente con la denominada  $y'$  en 7.4

O sea

$$X = S \cdot \cos A - \frac{S^3}{6 \cdot R_A \cdot M} \cdot \cos A$$

$$Y = S \cdot \text{sen} A - \frac{S^3}{6 \cdot R_A \cdot N} \cdot \text{sen} A$$

Que se complementa con el valor de  $Z = y' = \frac{S^2}{2\rho}$  donde, para  $\square$  tomamos el valor del radio de curvatura del arco de geodésica de acimut A

$$Z = \frac{S^2}{2R_A}$$

Esas tres expresiones constituyen el desarrollo de Weingarten, con las dos primeras podemos deducir el acimut del corte normal (ver 7.7)

$$\text{tg} A_N = \frac{Y}{X}$$

y luego compararlo con el acimut A de la línea geodésica

$$\text{tg} A_N = \frac{S \cdot \text{sen} A \cdot \left(1 - \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot N}\right)}{S \cdot \cos A \cdot \left(1 - \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot M}\right)}$$

$$\text{tg} A_N = \text{tg} A \cdot \frac{\left(1 - \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot N}\right)}{\left(1 - \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot M}\right)} \approx \text{tg} A \cdot \left(1 + \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot M}\right) \cdot \left(1 - \frac{S^2}{6 \cdot R_A \cdot N}\right)$$

(dado que para  $x$  pequeño  $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ ) siguiendo con el desarrollo

$$tgA_N = tgA + \frac{S^2}{6.R_A} tgA \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)$$

vamos a demostrar que

$$\left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \approx \frac{2.f.\cos^2 \varphi}{a}$$

lo cual sirve tanto para el caso que estamos tratando como para el del apartado siguiente (7.9.4)

$$\frac{1}{M} = \frac{[1-f.(2-f).\text{sen}^2 \varphi]^{3/2}}{a.(1-f)} \approx \frac{(1-2.f.\text{sen}^2 \varphi)^{3/2}}{a.(1-2f)} \approx \frac{(1-3.f.\text{sen}^2 \varphi)(1+2f)}{a}$$

$$\frac{1}{M} \approx \frac{1}{a}(1-3f.\text{sen}^2 \varphi + 2f)$$

(donde se consideró que para  $x$  pequeño vale  $(1+x)^n \approx 1+nx$  y se despreciaron los términos con  $f^2$ )

$$\frac{1}{N} = \frac{[1-f.(2-f).\text{sen}^2 \varphi]^{1/2}}{a} \approx \frac{(1-2.f.\text{sen}^2 \varphi)^{1/2}}{a} \approx \frac{1-f.\text{sen}^2 \varphi}{a}$$

$$\frac{1}{N} \approx \frac{1}{a}(1-f.\text{sen}^2 \varphi)$$

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{N} \approx \frac{1}{a}(1+3.f.\text{sen}^2 \varphi + 2.f - 1 + f.\text{sen}^2 \varphi)$$

$$\left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \approx 2\frac{f}{a}(1-\text{sen}^2 \varphi)$$

o sea

$$\boxed{\left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \approx \frac{2f}{a}.\cos^2 \varphi}$$

Con lo cual

$$tgA_N - tgA = \frac{S^2 tgA.f.\cos^2 \varphi}{3 - R_A.a}$$

Reemplazando  $tgA_N - tgA = d.tgA = \frac{A}{\cos^2 A} dA$  y admitiendo  $R_A \approx a \approx R$

$$dA = \frac{S^2.f.\cos^2 \varphi}{3.R^2} .\text{sen}A.\cos A = \frac{S^2}{6R^2} \cos^2 \varphi (2.\text{sen}A.\cos A) = \frac{S^2.f}{6.R^2} \cos^2 \varphi.\text{sen}2A$$

$$A_N - A = \frac{f}{6} \cos^2 \varphi \cdot \text{sen} 2A \left( \frac{S}{R} \right)^2$$

Para  $S = 100 \text{ Km}$   
 $R \sim 6371 \text{ Km}$   
 $\varphi = 45^\circ$   
 $A = 45^\circ$

Queda  $A_N - A \approx 0.00000007$  radianes que equivale aproximadamente a  $0''014$   
 para  $S = 60 \text{ Km}$  resulta  $0''005$

y

para  $S = 150 \text{ Km}$  resulta  $0''032$

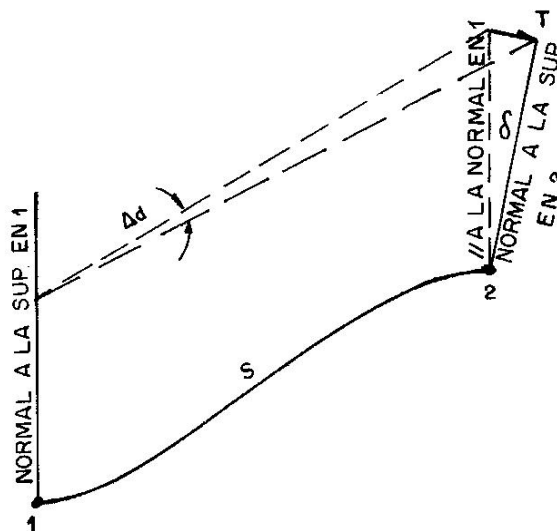
quiere decir que para lados de hasta  $60 \text{ Km}$  no afecta el centésimo de segundo sexagesimal y hasta  $150 \text{ Km}$  prácticamente no afecta el error angular, estos valores justifican que, en la geodesia tradicional se suele despreciar esa influencia.

#### 7.9.4 Fórmula de Bertrand y su Aplicación

La fórmula de Bertrand, o de Ossian – Bonnet, vincula la torsión  $\left(\frac{1}{\tau}\right)$  con la diferencia de curvaturas máxima  $(1/M)$  y mínima  $(1/N)$  y la orientación  $(A)$ , intuitivamente se puede entender que cuando la diferencia  $\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)$  mayor será la torsión y que para acimutes  $0$  y  $\varphi/2$  será mínima o nula, entonces es comprensible la fórmula (cuya demostración vamos a omitir)

$$\frac{1}{\tau} = \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cdot \text{sen} A \cdot \cos A$$

Independientemente del problema de los cortes normales, ya analizado en 7-9-3, la torsión incide en una medición angular cuando se observa un punto elevado



La Torsión producida entre 1 (estación) y 2 (señal observada) hará rotar el plano

osculador de la línea geodésica en un ángulo  $\square$

$$\delta = \frac{1}{\tau} \cdot S$$

Si el punto se observa a una altura  $h$  producirá un desplazamiento transversal  $\square$

$$T = \delta \cdot h$$

Y si a  $T$  lo dividimos por  $S$  obtendremos el efecto angular

$$\Delta d = \frac{T}{S}$$

O sea

$$\Delta d = \frac{1}{\tau} S \cdot h \cdot \frac{1}{S} = \frac{1}{\tau} \cdot h$$

Aplicando la fórmula de Bertrand (u Ossian Bonnet) queda

$$\Delta d = \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) \cdot \text{sen} A \cdot \cos A \cdot h$$

Tomando lo deducido en 7-9-4

$$\left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right) = \frac{2f}{a} \cos^2 \varphi, \text{ queda:}$$

$$\Delta d = \frac{f}{a} \cos^2 \varphi \cdot 2 \text{sen} A \cdot \cos A \cdot h = \frac{f}{a} \cos^2 \varphi \cdot \text{sen} 2A \cdot h$$

Y tomando, a los efectos de esta evaluación, a  $\sim R$  queda

$$\Delta d = f \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{sen} 2A \left( \frac{h}{R} \right)$$

Suponiendo, como en el caso anterior (7.9.3)  $\square = 45^\circ$ ;  $A = 45^\circ$  y agregando  $h = 1000\text{m}$

$$\square d = 0.00000026 \text{ radianes equivalente a } 0''054$$

Vale decir que afecta en el orden de 5 centésimos de segundo sexagesimales, de allí que se recomienda aplicar esta corrección cuando se observan puntos con cotas superiores a los 200 metros sobre el nivel del mar, donde comienza a afectar el centésimo.

Debe tenerse en cuenta que esta corrección depende exclusivamente de la altura del punto observado y es independiente de la distancia. Su influencia es significativa debido a que la relación  $(h/R)$  es lineal y no aparece una influencia cuadrática como en el caso anterior,  $(S/R)^2$  en 7.9.3.

### 7.9.5 Exceso Angular y Esfera de Gauss

El concepto de exceso esférico, que hemos desarrollado al final de 2.2, admite la generalización a otras superficies y el exceso angular de una figura  $F$  sobre la misma se puede expresar, para el caso de un elipsoide de rotación, con la integral

$$\varepsilon = \iint_F \frac{d \sup}{MN}$$

Donde los límites de la integral doble corresponde a los contornos de la figura (F) analizada y donde M y N deben ser considerados variables dentro de la misma.

Vale aclarar que la adopción de un radio medio para el baricentro de un triángulo es una muy buena aproximación esférica. se puede demostrar que si se desarrolla una representación conforme del elipsoide a la esfera se llega a que la misma debe tener ese radio a la latitud donde se quiere conservar la escala. Esa esfera (de Gauss) sirve para fines cartográficos, por ejemplo si se quiere aplicar una proyección estereográfica como se mencionará en 8.9.

### **7.9.6. El Tratamiento de Geodésicas Largas.**

Los algoritmos que hemos desarrollado en 7.8 tienen una vigencia para lados de 150 Km, con exactitudes de cálculo de  $\pm 0''0001$  en  $\square, \square$  y  $0''01$  en Acimut. Para distancias superiores se comienzan a presentar errores mayores.

Si tenemos miles de kilómetros se pueden aplicar con cierta aproximación fórmulas esféricas y adoptar radios medios para latitudes medias. La falencia más notoria en esos casos se presenta con los acimutes, para evaluar esta influencia suele ser útil recordar la formula de Clairaut

$$N_1 \cos \varphi_1 \operatorname{sen} A_1 \approx N_2 \cos \varphi_2 A_2$$

Sin embargo, estos análisis suelen resultar muy limitados y resulta conveniente recurrir a algoritmos aptos para distancias mayores, de los cuales se da una idea en 7.9.7.

### **7.9.7. Algoritmos para Traspasos con Lados Largos**

Por lo general, más que algoritmos, se utilizan programas, los cuales se basan en tratamientos adecuados, hay una gran variedad y debe prestarse especial atención a su rango de aplicación.

Vamos a mencionar que uno de los algoritmos más potentes es el de BESSEL – HELMERT – BODEMÜLLER. En la obra de GROSSMANN (1976) – ver Bibliografía . hay un ejemplo sumamente apto para prueba de programas donde se usa un lado de 15000 Km y se efectúa el cálculo sobre el Elipsoide Internacional (Madrid 1924)

Para el problema directo, a partir de los datos

$$\begin{aligned} \square_1 &= 50^\circ 00' 00'' 0000 \\ \square_1 &= 10^\circ 00' 00'' 0000 \\ S_{12} &= 15000000,000 \\ A_1 &= 140^\circ 00' 00'' 0000 \end{aligned}$$

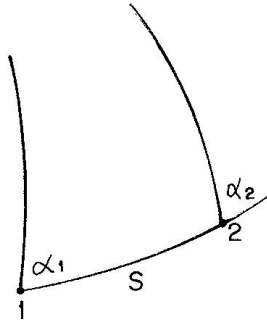
Y obtiene

$$\begin{aligned} \square_2 &= -62^\circ 57' 03'' 20387 \\ \square_2 &= 105^\circ 05' 38'' 29967 \\ A_2 &= 114^\circ 46' 41'' 484 \\ A_{21} &= 294^\circ 46' 41'' 484 \end{aligned}$$

Por supuesto, con los mismos valores también se puede probar el problema

inverso.

Una versión muy difundida y con modalidades propias fue publicada por VINCENTY T. (1975) – también en este caso ver bibliografía- donde, a grandes rasgos se aplican los siguientes pasos de acuerdo a la figura siguiente, donde cambiamos la nomenclatura de los acimutes ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) para no confundirlos con otros elementos que entran en el cálculo.



Para el problema directo se calcula los siguientes valores iniciales:

$$\sigma_1 = \frac{(1-f)tg\varphi_1}{\cos\alpha_1}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha_1}{\sqrt{1+(1-f)^2tg\alpha_1}}$$

a partir de los cuales se calcula

$$u^2 = f.(2-f).(1-\text{sen}^2\alpha)$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{256} [64 + u^2(-12 + 5u^2)]$$

$$B = \frac{u^2}{512} [128 + u^2(-64 + 37u^2)]$$

$$C = \frac{f}{16} \cos^2\alpha [4 + f(4 - 3.\cos^2\alpha)]$$

luego se obtiene el valor de  $\sigma$

$$\sigma = \frac{S}{a(1-f).A} + \Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma = B.\text{sen}\sigma \left[ \cos 2\sigma_m + \frac{B}{4} \cos\sigma (-1 + 2.\cos^2 2.\sigma_m) \right]$$

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$$

se comienza con  $\sigma = 0$  y se repite hasta que entre 2 valores sucesivos de  $\sigma$  no haya modificación superior a  $1 \times 10^{-10}$ .

Luego se calcula

$$tgU_1 = (1-f)tg\varphi_1$$

a partir de lo cual se obtiene

$$tg\varphi_2 = \frac{\text{sen}U_1 \cdot \cos\sigma + \cos U_1 \cdot \text{sen}\sigma \cdot \cos\alpha_1}{(1-f) \cdot \sqrt{\text{sen}^2\alpha + \text{sen}U_1 \text{sen}\sigma + \cos U_1 \cdot \cos\sigma \cdot \cos\alpha_1}}$$

Y agregando otro valor auxiliar

$$tgL = \frac{\text{sen}\sigma \cdot \text{sen}\alpha_1}{\cos U_1 \cdot \cos\sigma + \text{sen}U_1 \cdot \text{sen}\sigma \cdot \cos\alpha_1}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + L - (1-C) \cdot f \cdot \text{sen}\alpha \left\{ \sigma + C \cdot \text{sen}\sigma \cdot \left[ \cos 2\sigma_m + C \cdot \cos\sigma \cdot (2 \cdot \cos^2 2\sigma_{m-1}) \right] \right\}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{\text{sen}\alpha}{-\text{sen}U_1 \cdot \text{sen}\sigma + \cos U_1 \cdot \cos\sigma \cdot \cos\alpha_1}$$

Para el proceso inverso, dados  $\alpha_1, \alpha_2; \varphi_1, \varphi_2$  se buscan  $S, \alpha_1, \alpha_2$ .

No vamos entrar en detalles de este procedimiento, las expresiones básicas son:

$$S = b \cdot A \cdot (\sigma - \Delta\sigma)$$

$$tg\alpha_1 = \frac{\cos U_2 \cdot \text{sen}L}{\cos U_1 \cdot \text{sen}U_2 - \text{sen}U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \cos L}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{\cos U_1 \cdot \text{sen}L}{-\text{sen}U_1 \cdot \cos U_2 + \cos U_1 \cdot \text{sen}U_2 \cdot \cos L}$$

donde

$$U_1 = \text{arc.tg}[(1-f) \cdot tg\varphi_1]$$

$$U_2 = \text{arc.tg}[(1-f) \cdot tg\varphi_2]$$

y  $\alpha$  se obtiene mediante proceso iterativos comenzando con la aproximación  $L \sim (\varphi_2 - \varphi_1)$  para la primera y algoritmos similares al del problema directo para la segunda.

Estos procedimientos (Vincenty) han sido utilizados en “softwares” como Geographic Calculador (GEO – CAL), DELMAR, CARIS – LOTS, etc







## 8.1 PLANTEO DEL PROBLEMA

Si bien es posible hacer todos los cálculos de posiciones geodésicas sobre el elipsoide y luego pasarlas a su representación en el plano, especialmente para su posterior uso topográfico, en muchos casos resulta más sencillo calcular directamente las coordenadas planas. Esta posibilidad es esencialmente aplicable en redes de densificación mediante triangulaciones, triangulateraciones y poligonales intercaladas entre puntos con coordenadas ya adoptadas.

Para que ello sea correcto es necesario introducir reducciones de los valores medidos, (direcciones y distancias). Además de permitir el cálculo con los algoritmos propios de la trigonometría plana y la geometría analítica, esas correcciones permiten analizar correctamente los errores de cierre sin que las discrepancias debidas a errores de medición se confundan con las deformaciones que implican pasar del elipsoide al plano.

Antes de entrar específicamente en el tema, haremos una introducción somera de la naturaleza de las representaciones sobre el plano y analizaremos en particular la proyección Gauss – Krüger, no solamente por ser la adoptada para la República Argentina, ya que (con distintas modalidades) es la que más se aplica a nivel mundial.

## 8.2 CLASIFICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES CARTOGRÁFICAS

Las representaciones cartográficas tienen por objeto pasar de una superficie elipsoidal o esférica al plano de proyección (o representación), en general cualquier par de expresiones

$$x = x(\varphi, \lambda)$$

$$y = y(\varphi, \lambda)$$

constituye una transformación para esa necesidad.

La superficie sobre la que se representa puede ser directamente un plano u otra superficie que, al desarrollarse se transforme en un plano, como un cilindro o un cono. Cuando ese traspaso se hace proyectando desde un punto o una línea, se trata específicamente de una proyección perspectiva; más general es hablar de una representación, que admite otras modalidades de transferencia, sin embargo la costumbre ha llevado a utilizar también el término proyección para cualquier tipo de traspaso del elipsoide (o la esfera) al plano.

Las formas de clasificarlas son las siguientes:

Por sus propiedades	$\left\{ \begin{array}{l} \textit{conforme} \\ \textit{equivalentes} \\ \textit{equidistantes} \\ \textit{afilácticas} \end{array} \right.$

Las primeras conservan la semejanza de figuras elementales, las segundas mantienen la superficie, las terceras algunas distancias y las últimas no cuentan con

ninguna de esas propiedades.

Por la naturaleza de la transformación  $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Geométricas} \\ \textit{Convencionales} \end{array} \right.$

Las primeras son las que la transferencia se hace mediante algún camino que se puede interpretar geoméricamente; las proyecciones perspectivas, en las que se proyecta desde un punto, son un caso particular.

Las segundas surgen de algún algoritmo matemático que no admite una interpretación geométrica, en general surgen de imponerle alguna propiedad buscada.

Por la superficie desarrollable usada  $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Planas (o acimutales)} \\ \textit{Cónicas} \\ \textit{Cilíndricas} \end{array} \right.$

El cono, en rigor incluye al plano o al cilindro según si su vértice lo hace tangente a la superficie terrestre (y el cono se abre en un plano) o si se traslada al infinito (cilindro).

Por la orientación del eje  $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Directas} \\ \textit{Transversas} \\ \textit{Oblicuas} \end{array} \right.$

En el primer caso el eje del cono (o en los límites la perpendicular al plano o el eje del cilindro), coincide con el eje de rotación terrestre. En el segundo, cuando tal eje es perpendicular al de rotación y en el tercer caso cuando ocupa una orientación intermedia.

Por la transferencia de superficie  $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Directas} \\ \textit{Dobles} \end{array} \right.$

En las primeras se produce una transformación directa del elipsoide al plano (Caso típico Gauss – Krüger) y en las segundas hay un paso intermedio

Elipsoide – Esfera  
Esfera – Plano

### **8.3 PUNTO O LÍNEA NEUTRA Y CONVERGENCIA MERIDIANA**

En las proyecciones planas, donde el plano es tangente a la superficie esférica o elipsoidica, las distancias se conservan en las proximidades del punto de tangencia. Si el plano fuese secante y se tratase de una esfera, lo mismo ocurriría sobre una circunferencia, pero la variación mínima de la deformación se presentaría en el baricentro de la misma. A ese lugar lo llamaremos punto neutro. Si la proyección fuese cilíndrica o cónica deberíamos hablar de una línea neutra, si se trata de proyecciones secantes habrá dos líneas, una a cada lado de la anterior, en las cuales no habrá deformaciones.

En general podemos definir al punto o línea neutra al lugar geométrico en el cual la variación de la deformación es mínima.

A medida que nos alejamos del punto o línea neutra la deformación aumenta su tasa de variación, si se quieren utilizar las coordenadas planas para fines geodésicos esta deformación hace que deban adoptarse varias fajas de representación.

Por lo general en la línea neutra se aprovecha que la orientación de uno de los ejes de coordenadas coincida con ella, por ejemplo el meridiano central de la faja con una paralela al eje X. Puede ocurrir entonces que a medida que nos alejamos se produzca un ángulo entre la paralela al eje X y la tangente al meridiano, a este ángulo se lo denomina convergencia meridiana. (es la diferencia entre el acimut plano y el geodésico).

Este valor suele estar indicado en la parte superior de las cartas topográficas (ejemplo 1:50000 o 1:100000 del IGM o IGN) y no debe confundirse con la declinación magnética.

#### **8.4 CONCEPTO DE PROYECCIÓN (o REPRESENTACIÓN) GEODÉSICA**

Una proyección geodésica es una representación cartográfica en la cual las coordenadas de los puntos se pueden utilizar con fines topográficos, en general debe cumplir con las siguientes características:

- Debe ser conforme.
- Las deformaciones de distancias deben ser menores a medio metro por kilómetro.
- Debe contar con un claro traspaso analítico para pasar de las coordenadas geodésicas a las planas y viceversa.
- Las deformaciones de distancias deben ser fácilmente computables.
- La convergencia meridiana no debe exceder los  $2^\circ$  (salvo casos excepcionales, por ejemplo cerca de los polos) y debe poderse calcular con rigurosidad.
- Un territorio nacional debe poderse representar en un número mínimo de fajas.

Volvemos a repetir que la proyección geodésica adoptada por la Argentina es la Gauss – Krüger y ahora podemos agregar que cumple con las condiciones anteriores.

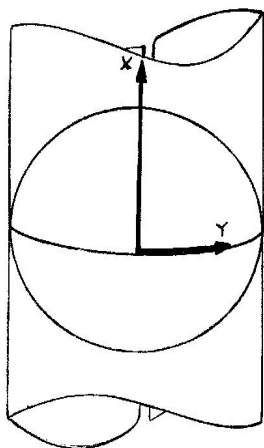
#### **8.5 REPRESENTACIÓN DE MERCATOR Y EXPRESIONES GENERALES DE LA PROYECCIONES CONFORMES**

En general hay una serie de tratamientos analíticos desarrollados por M-A. Tissot, que en 1881 publicó su trabajo “Memoire Sur la Representacion de Surfaces” que sirven para analizar el comportamiento de la representación de una superficie sobre otra. Vamos a obviar gran parte de este tratamiento general para dedicarnos a las proyecciones conformes del elipsoide al plano.

En la asignatura Cartografía tendrán oportunidad de analizar el planteo general con mayor profundidad, entre ellos que una circunferencia de radio unitario siempre se proyecta como una elipse (elipse indicatriz de Tissot) cuyos semiejes “a” y “b” permiten computar las deformaciones. Por supuesto, en una representación conforme,

$a = b = m = \frac{ds'}{ds}$  donde  $ds$  es una distancia elemental sobre la superficie elipsoidal, o esférica, y  $ds'$  el elemento homólogo transferido al plano.

La representación de Mercator más elemental se plantea desde una esfera a un cilindro tangente al ecuador.



Por comodidad colocaremos el eje X sobre el meridiano origen del tiempo y las longitudes ("de Greenwich") y el Y sobre el ecuador.

Además vamos a imponer que las distancias se mantengan sobre el ecuador, o sea:

$$Y = R \cdot \lambda$$

Si queremos mantener la conformidad la X no puede ser arbitraria ya que la semejanza a lograr impone

$$\frac{dX}{R \cdot d\varphi} = \frac{dY}{R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda} = m$$

donde  $R \cdot d\varphi$  es un elemento de distancia sobre el meridiano y  $R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$  uno similar sobre el paralelo. Si tenemos en cuenta la

imposición acordada  $Y = R \lambda$ ,  $dY = R \cdot d\lambda$  y el término del medio de la igualdad anterior se transforma en  $\frac{1}{\cos \varphi}$ , de manera que

$$m = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Vale decir que, a una latitud de  $60^\circ$   $m = 2$ , o sea que las distancias sobre el plano quedan representadas al doble y si la carta sobre el ecuador fuese 1:1000000, a los  $60^\circ$  pasaría a ser de 1:500000.

Por eso, en una carta elaborada con la representación de Mercator, debe aclararse a qué latitud corresponde la escala.

Volviendo a la relación de semejanza, podemos expresar

$$\frac{dX}{R \cdot d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$X = R \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

Donde los límites de la integral definida corresponden al origen de la X en el ecuador ( $\varphi = 0$ ) y la latitud en cuestión.

Queda entonces determinado el conjunto de expresiones de esta representación

$$X = R \cdot \ln \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$Y = R \cdot \lambda$$

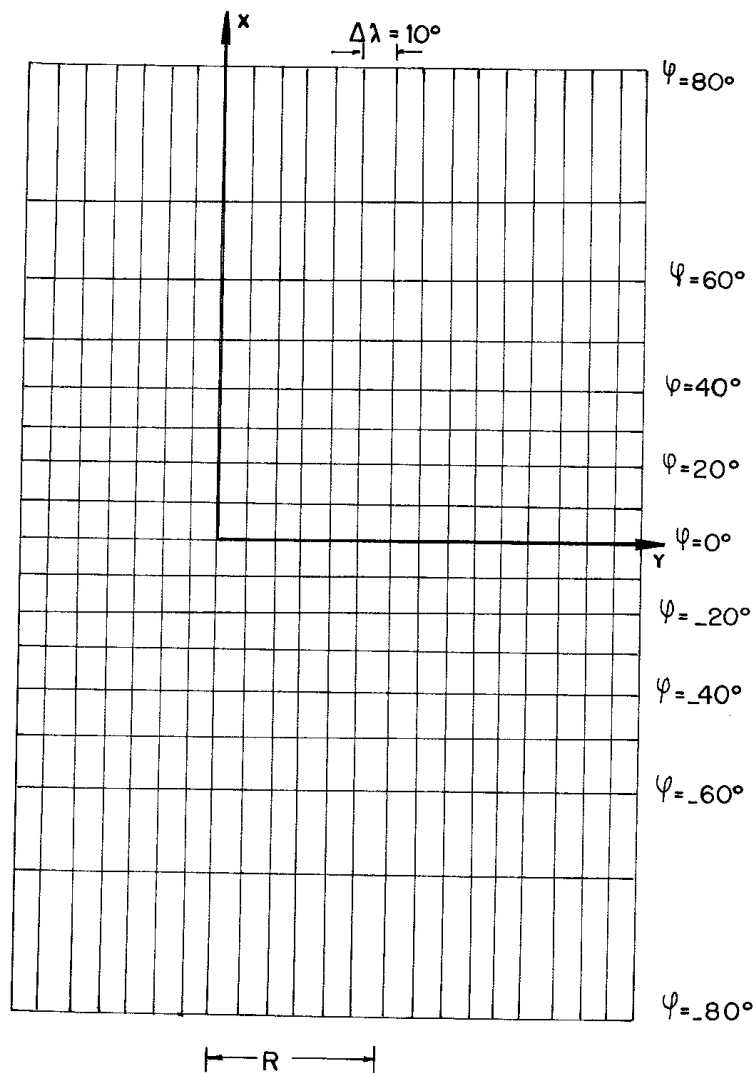
$$m = \frac{1}{\cos \varphi}$$

La red de meridianos y paralelos queda graficada de acuerdo al siguiente esquema.

Debe tomarse en cuenta que el radio R corresponde a un incremento de longitud de  $57^{\circ},29\dots$  sobre el ecuador, o sea un radian.

El origen de Y podría coincidir con el meridiano origen (como está planteado en las expresiones anteriores) pero no habría inconvenientes en fijar un origen en una longitud  $\lambda_0$ , entonces la Y sería

$$Y = R (\lambda - \lambda_0)$$



Si ahora planteamos lo mismo para el elipsoide, la relación de semejanza sería

$$\frac{dX}{M.d\varphi} = \frac{dY}{N.\cos\varphi.d\lambda} = m$$

para la tangencia en el ecuador, la expresión de Y será

$$Y = a.\lambda$$

Y la expresión de X queda determinada por

$$X = a.\int_0^\varphi \frac{M.d\varphi}{N.\cos\varphi}$$

Evidentemente, como N y M son funciones de  $\varphi$ , esta integral es algo más complicada y se puede demostrar que

$$q = \int_0^\varphi \frac{M.d\varphi}{N.\cos\varphi} = \ln \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon.\text{sen}\varphi}{1 + \varepsilon.\text{sen}\varphi} \right)^{\varepsilon/2} \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

donde  $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = f(2 - f)$  o sea  $\varepsilon = \sqrt{f(2 - f)}$ , a esa función q se la denomina

LATITUD ISOMÉTRICA  
o  
LATITUD CRECIENTE  
o  
LATITUD de MERCATOR

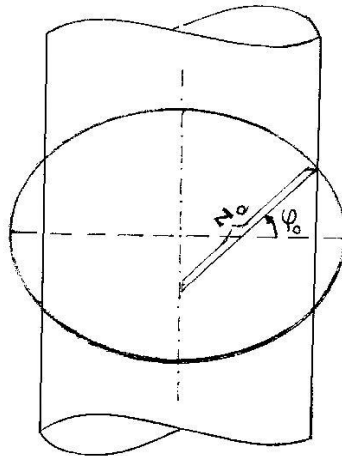
Admitiendo la misma como variable, se puede prescindir de  $\varphi$  y las expresiones de la representación son

$$\begin{aligned} X &= a.q \\ Y &= a.\lambda \\ m &= \frac{a}{N.\cos\varphi} \end{aligned}$$

Si en lugar de mantener la escala sobre el ecuador, se la quiere conservar en un paralelo de latitud  $\varphi_0$ , las expresiones pasan a ser:

$$\begin{aligned} X &= N_0.\cos\varphi_0.q \\ Y &= N_0.\cos\varphi_0.\lambda \\ m &= \frac{N_0.\cos\varphi_0}{N.\cos\varphi} \end{aligned}$$

Lo que equivale a utilizar un cilindro secante en los paralelos de  $\varphi_0$  y  $-\varphi_0$ .



Esta modalidad se utiliza en la cartografía náutica y se suele tomar como  $\varphi_0$  la latitud media de la carta, esto es, la latitud promedio entre la que corresponde a los límites superior e inferior de la lámina.

Tal representación tiene varias ventajas para su uso en navegación, una de ellas es que una línea de ACIMUT o RUMBO CONSTANTE queda representada como una recta. A una trayectoria de este tipo se la denomina LINEA LOXODRÓMICA y la representación de una línea geodésica (ORTODRÓMICA) resulta una curva cóncava hacia el ecuador. Dado que la escala varía con la latitud, los navegantes utilizan el marco de la carta como un escalímetro de escala variable tomando un minuto sobre la graduación de las latitudes como una milla.

Esa unidad de medida, adoptada por necesidades prácticas tiene una leve variación ya que  $M$  es función de la latitud, para subsanar este inconveniente se adoptó la MILLA NAUTICA INTERNACIONAL = 1852m que es un arco de un minuto sexagesimal sobre el meridiano a  $45^\circ$  de latitud para el Elipsoide Internacional (Madrid 1924, también llamado de Hayford) redondeando al metro.

Estos conceptos los exponemos para aclarar la utilidad principal de esta representación, para nuestros fines es suficiente recordar que

$$q = \int_0^\varphi \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos \varphi}$$

donde el dominio  $\lambda - q$  es netamente plano y se corresponde con otro dominio plano que es el de las coordenadas  $X, Y$

Matemáticamente esto se podría expresar utilizando una función analítica de variable compleja donde

$$f(q + i\lambda) = X + iY$$

donde valen las clásicas condiciones de CAUCHY – RIEMANN

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial q} = -\frac{\partial X}{\partial \lambda}$$

Para que las variables que estamos usando no lleguen a confundir, conviene recordar que el planteo usual en matemática es

$$f = (x + i.y) = U + i.V$$

donde las condiciones C.R. son

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

(evidentemente en la aplicación que estábamos planteando  $q$  y  $\lambda$  reemplazan a  $x$ ,  $y$  (y  $X, Y$  reemplazan a  $U, V$ ).

Siguiendo con las proyecciones conformes, vamos a analizar la forma de poder obtener la relación de aumento  $m = \frac{ds'}{ds}$  en forma general partiendo de

$$x = x(\varphi, \lambda)$$

$$y = y(\varphi, \lambda)$$

$$dx = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) d\lambda$$

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\lambda$$

$$ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{(M \cdot d\varphi)^2 + (N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda)^2}$$

Para  $\lambda = \text{cte.}$ ,  $d\lambda = 0$

$$ds'^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2$$

$$ds^2 = M^2 \cdot d\varphi^2$$

Entonces  $m^2$  valdrá

$$m^2 = \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2}{M^2}$$

Análogamente, para  $\varphi = \text{cte.}$  se obtiene

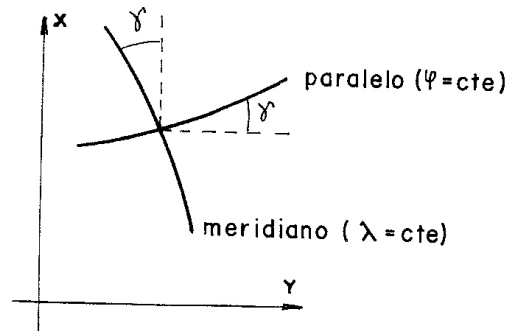
$$m^2 = \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Luego



$$m^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}{M^2} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

También se puede obtener un juego de expresiones para la convergencia meridiana (ver final de 8.3)



Prescindiendo del signo, puede verse que

$$tg \gamma = \frac{dy}{dx} \quad \text{para } \lambda \text{ constante}$$

$$tg \gamma = \frac{dx}{dy} \quad \text{para } \varphi \text{ constante}$$

Y volviendo a usar los incrementos diferenciales

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) d\lambda$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) d\lambda$$

Para  $\lambda$  y  $\varphi = \text{cte}$  quedan respectivamente:

$$tg \gamma = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}$$

Tanto en la expresión de  $m^2$  como en la de  $tg \gamma$  se pueden usar indistintamente la expresión de la izquierda o de la derecha, veremos luego que para la representación Gauss – Krüger resulta más sencillo utilizar las de derecha.

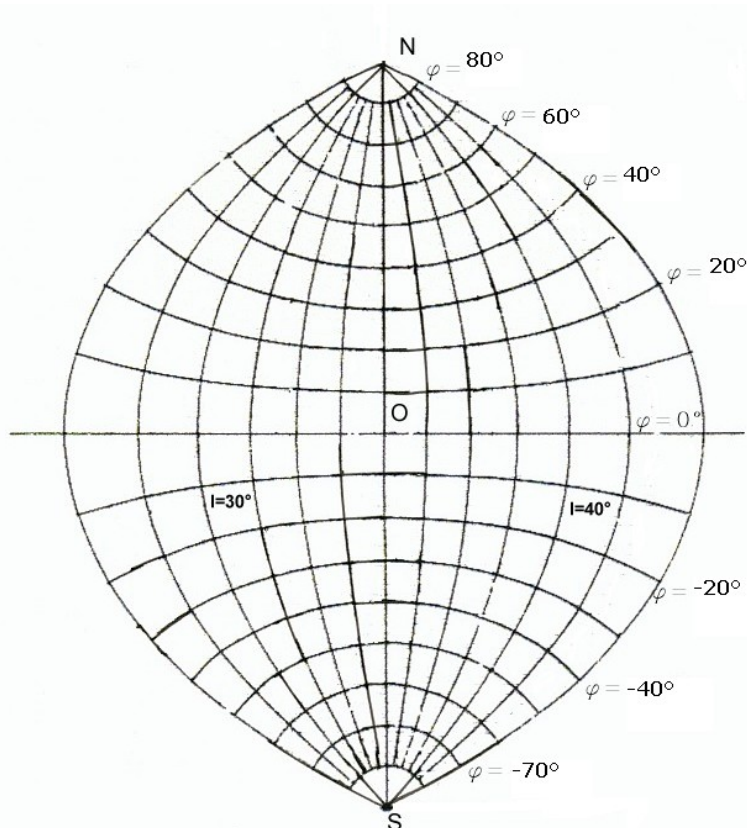
## 8.6 REPRESENTACIÓN GAUSS – KRÜGER

Es la proyección adoptada, con distintas características, por la mayoría de los

países americanos y también del mundo, consiste en una transformación similar a la de Mercator para un cilindro elíptico, tangente y con eje perpendicular a un meridiano central, eventualmente a varios (cuando se usan varias fajas).

Se la divide en fajas con aplicación de 2 o 3° a cada lado de cada meridiano central, según su uso. En nuestro país se la utiliza con el origen del eje X en el polo sur, en el hemisferio norte se la suele usar con X = 0 en el ecuador, países con el ecuador al medio, como Brasil, suelen utilizar 5.000.000 m en el ecuador.

El meridiano central y el ecuador quedan representados como rectas; fuera de estos, los meridianos y paralelos se proyectan curvos.



Para cada faja se utiliza un valor de  $y$  (minúscula) referido al meridiano central y un valor  $l = \lambda - \lambda_0$ , o sea una longitud referida al mismo.

Relatando un poco de historia, C. F. Gauss luego de haber efectuado sus estudios en la Universidad de Göttingen (Alemania) fue enviado a ámbitos científicos de San Petersburgo (Rusia), a su regreso pasó a organizar el Observatorio Astronómico y luego también geofísico en Göttingen. Desde allí, entre otras investigaciones midió y analizó un arco de meridiano desde esa ciudad hasta Altona (cerca de Hamburgo), pasando por Hannover.

Hannover, famosa por su industria y su Universidad Técnica, en ese tiempo (alrededor de 1820) era un reino bastante importante, actualmente es la capital estado de la Baja Sajonia en Alemania. De la Universidad de Hannover provienen TORGE, SEEBER, GROSSMANN, KRÜGER y muchos destacados geodestas más.

El Rey de Hannover le pidió a Gauss que le preparara una representación para la

cartografía de su reino y que, además sirviera para expresar las coordenadas sobre un plano para fines topográficos, ese fue el origen de la representación. A principios del siglo XX, Helmert, director del Instituto Geodésico Prusiano, le pidió al Dr. Krüger estudiar el tema y ahí quedaron planteadas las fórmulas que actualmente estamos usando, aunque Hristow, más recientemente aún, volvió a analizar con mucho detalle el tema. Por eso, cuando se dice que “Gauss desarrolló la proyección y Krüger introdujo las fajas” se comete una burda y superficial aseveración, realmente L. Krüger fue el que hizo posible su aplicación exitosa y expuso claramente los fundamentos.

Después de la Segunda Guerra Mundial, Estados Unidos de América (U.S.A.), que hasta ese momento usaba para su territorio una representación policónica, la adoptó previendo el uso de una cartografía mundial y la denominó UTM (Universal Transverse Mercator).

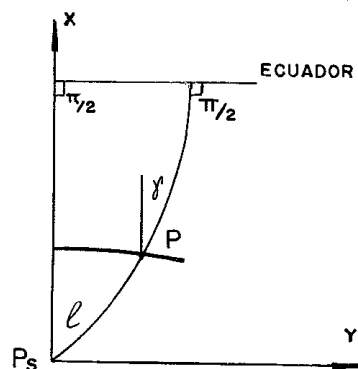
Vale la aclaración que la adopción de esta representación en la Argentina fue anterior a la que promovió U.S.A.

Para representar una faja, utilizando los valores  $l = \lambda - \lambda_0$  y la “y” referidos al meridiano central, las fórmulas dadas en 8.5 las expresamos como

$$f(q + i.l) = x + i.y$$

$$m^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}{M^2} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)}$$



Desarrollando  $f(q + i.l)$  en serie de Taylor queda

$$X + i.y = f(q) + \left(\frac{df}{dq}\right) i.l + \left(\frac{d^2 f}{d^2 q}\right) \frac{(i.l)^2}{2!} + \left(\frac{d^3 f}{dq^3}\right) \frac{(i.l)^3}{3!} + \left(\frac{d^4 f}{dq^4}\right) \frac{(i.l)^4}{4!} \quad \text{de donde,}$$

separando la parte real para la X y la imaginaria para y queda

$$X = f(q) - \left(\frac{d^2 f}{dq^2}\right) \frac{l^2}{2!} + \left(\frac{d^4 f}{dq^4}\right) \frac{l^4}{24} + \dots$$

$$y = \left(\frac{df}{dq}\right) l - \left(\frac{d^3 f}{dq^3}\right) \frac{l^3}{6} + \dots$$

Si queremos que sea tangente (conserva las distancias) sobre el meridiano central y tenga su origen en el polo sur:

$f(q) = Q + \int_0^q M \cdot d\varphi = Q + B$  y en general  $f(q) = cte. + \int_0^q M \cdot d\varphi$  donde la función B ya la conocemos (arco de meridiano)

$B = \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \text{sen}2\varphi + \gamma \cdot \text{sen}4\varphi + \delta \cdot \text{sen}6\varphi + \dots$  y Q es el arco del ecuador al polo o sea B para  $\varphi = \pi/2$ .

Recordamos, del capítulo anterior, los valores para los elipsoides Madrid 1924 (Hayford) y WGS 84 (ver 7.6)

	Madrid 1924	WGS 84
a	6378388 m	6378137 m
1/f	297	298.2572236
$\alpha$	6367654.500 m	6367449.146 m
$\beta$	- 16107.035 m	- 16038.509 m
$\gamma$	16.976 m	16.833 m
$\delta$	- 0.022 m	- 0.022 m
Q	10002288.30 m	10001965.73 m

Donde  $\alpha$  está dado para  $\varphi$  en radianes.

La primera derivada  $\frac{df}{dq}$  se puede calcular como  $\frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$  siendo  $f = \int_0^q M \cdot d\varphi$ , surge  $\frac{df}{d\varphi} = M$  y como  $q = \int_0^q \frac{M}{N \cdot \cos \varphi} \cdot d\varphi$

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{M}{N \cdot \cos \varphi} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dq} = \frac{N \cdot \cos \varphi}{M}$$

entonces  $\frac{df}{dq} = N \cdot \cos \varphi$

la derivada siguiente surge de  $\frac{d^2 f}{dq^2} = \frac{d(N \cdot \cos \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$

y resulta  $-N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$  así sucesivamente surgen las derivadas sucesivas que, aplicadas a las expresiones anteriores, dan las siguientes fórmulas

$$X = B + cte + \frac{N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}{2} \cdot l^2 + \frac{N \cdot \cos^3 \varphi \cdot \text{sen} \varphi}{24} \cdot (5 - \text{tg}^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 + \dots$$

$$y = N \cdot \cos \varphi \cdot l + \frac{N \cdot \cos^3 \varphi}{6} \cdot (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2) l^3 + \dots$$

Corresponde aclarar que en estas expresiones  $l = \lambda - \lambda_0$  debe estar expresado en

radianes además

$$\eta^2 = \varepsilon'^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad \text{donde} \quad \varepsilon'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$\text{Se puede demostrar que también } \eta^2 = \frac{f \cdot (2 - f)}{[1 - f \cdot (2 - f)]} \cdot \cos^2 \varphi$$

Los términos dados acá (hasta  $l^4$ ) alcanzan hasta  $2^\circ$  del meridiano central para una exactitud de cálculo de un par de centímetros, de manera que para asegurar el centímetro hay que tomar más términos. Por lo general los “softwares” disponibles toman hasta  $l^6$ .

Con respecto a los términos de potencias altas ( $6^\text{a}$  en adelante), las fórmulas de Krüger (ver referencia histórica al principio de este apartado 8.6) se limitan a los términos esféricos (sin  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  o  $f$ ), en cambio las de Hristow siguen conservando tales valores elipsoidales, aunque apenas afectan algún milímetro a los  $3^\circ$ .

Las expresiones anteriores para  $X$  e  $y$  deben complementarse con las que corresponden a la convergencia meridiana  $\gamma$  y la razón de aumento  $m$  ellos surgen de

$$\begin{aligned} \text{tg} \gamma &= \frac{\left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)}{\left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)} \\ m^2 &= \frac{\left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2}{(N \cdot \cos \varphi)^2} \\ \text{tg} \gamma \approx \gamma &\approx \frac{N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot l + \dots}{N \cdot \cos \varphi + \dots} \approx \text{sen} \varphi \cdot l + \dots \end{aligned}$$

Tomando más términos y calculando  $\gamma$  a partir de  $\text{tg} \gamma$  se llega a

$$\gamma = l \cdot \text{sen} \varphi \left[ 1 + \frac{\cos^2 \varphi \cdot l^2}{3} \cdot (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \dots \right]$$

$$m^2 = \frac{\left[ N \cdot \cos \varphi + \frac{N \cdot \cos^2 \varphi}{2} \cdot (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2) \cdot l^2 \right]^2 + (N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot l)^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Despejando  $m$  a partir de  $m^2$  con limitación de términos al  $2^\circ$  grado se llega a

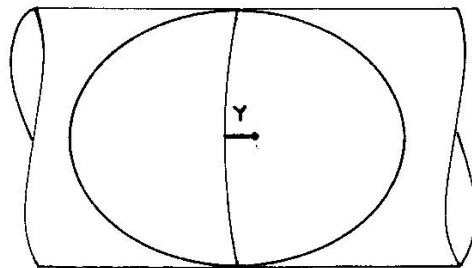
$$m = 1 + \frac{\cos^2 \varphi \cdot (1 + \eta^2)}{2} \cdot l^2 + \dots$$

Que también se puede expresar en función de  $y$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \dots$$

Donde  $R = R_\varphi = \frac{a.(1-f)}{[1-f(1-f).\text{sen}^2\varphi]}$  expresión a la que se puede llegar más

fácilmente a partir de una concepción esférica a la que se la aplica la transformación de Mercator a un cilindro transversal donde  $y/R$  opera como la latitud en la representación de Mercator y se toma su origen en el meridiano central.



$$m = \frac{1}{\cos \frac{y}{R}} \approx \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2R^2}} \approx 1 + \frac{y^2}{2R^2}$$

En la Argentina se adoptaron 7 fajas, en las cuales se tomaron valores de  $Y_0$  (ordenada del meridiano central) de  $Y_0 = (F+0.5) \cdot 10^6$  en metros para individualizar las fajas a partir de la  $Y$

$$Y = Y_0 + y$$

El esquema de fajas queda expresado en la siguiente tabla

FAJA N° (F)	$\lambda_0$	$Y_0$
1	-72°	1.500.000
2	-69°	2.500.000
3	-66°	3.500.000
4	-63°	4.500.000
5	-60°	5.500.000
6	-57°	6.500.000
7	-54°	7.500.000

En concordancia con lo anterior  $l = \lambda - \lambda_0$

Las fajas tienen un rango de aplicación ideal de 1°30' a cada lado del meridiano central pero, para darle continuidad a los trabajos se la suele ampliar hasta 2°. El ancho de faja está limitado fundamentalmente por el valor de  $m$ , cuando  $y \sim 200\text{Km}$   $m \rightarrow 1,0005$ , quiere decir que la deformación de los lados pasa a ser de medio metro por Km, valor que se suele tomar como límite para la aplicación de este tipo de coordenadas en los relevamientos.

La transformación inversa (de coordenadas Gauss – Krüger a geográficas) se puede hacer por proceso iterativo inverso o, directamente, con fórmulas inversas.

Las expresiones más conocidas utilizan coeficientes en función de  $\varphi_1$  (latitud cuyo

arco de meridiano desde el origen es igual a X) y potencias de  $y = (Y - Y_0)$ .

Este proceso surge de la expresión  $y = N \cdot \cos \varphi \cdot l + \frac{N}{6} \cdot \cos^3 \varphi \cdot (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2) l^3$  de donde se puede obtener una primera aproximación de  $l$  del primer término  $l = \frac{y}{N \cdot \cos \varphi}$  que podemos reemplazar en el término de  $l^3$

$$y = N \cdot \cos \varphi \cdot l + \frac{N}{6} \cdot \cos^3 \varphi (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2) \cdot \frac{y^3}{N^3 \cos^3 \varphi}$$

$$y = N \cdot \cos \varphi \cdot l + \frac{y^3}{6N^2} (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2)$$

De donde se puede despejar  $l$  con mejor aproximación

$$l = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 \cdot N^3 \cos^3 \varphi} \cdot (1 - \text{tg}^2 \varphi + \eta^2)$$

Este valor de  $l$  se puede reemplazar en la fórmula de  $X$

$$X - S = \frac{N}{2} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot l^2 + \dots$$

y,  $\frac{X - S}{M} = \varphi_1 - \varphi = \Delta \varphi$  y se pueden deducir las correcciones de los coeficientes

para que queden expresados en función de  $\varphi_1$  en lugar de  $\varphi$  así se llega a las fórmulas

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\text{tg} \varphi_1}{2} \left( \frac{y^2}{M_1 \cdot N_1} \right) + \frac{\text{tg} \varphi_1}{24} (5 + 3\text{tg}^2 \varphi_1 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 \text{tg}^2 \varphi_1) \left( \frac{y^4}{M_1 N_1^3} \right)$$

$$l = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left( \frac{y}{N_1} \right) - \frac{(1 + 2\text{tg}^2 \varphi_1 + \eta_1^2)}{6 \cos \varphi_1} \left( \frac{y}{N_1} \right)^3$$

(Los valores de  $l$  y  $\Delta \varphi$  están expresados en radianes)

Cabe aclarar que  $N_1 = N(\varphi_1)$ ,  $M_1 = M(\varphi_1)$ , etc.

$$\eta_1^2 = \eta^2(\varphi_1) = \frac{f(2-f)}{1-f(2-f)} \cos^2 \varphi_1$$

El valor de  $\varphi_1$  surge de buscar el valor de  $\varphi$  mediante un procedimiento similar al que ya vimos en el capítulo anterior:

$B_1 = X - 10.002.288,30 \text{ m}$  (X-Q) donde, para el elipsoide Madrid 1924

$B_1 = 6367564,500 \text{ m} \varphi_1 - 16107,035 \cdot \text{sen} 2\varphi_1 + 16,976 \cdot \text{sen} 4\varphi_1 - 0.022 \cdot \text{sen} \varphi_1$

Primero se extraerá un  $\varphi_1' = \frac{B_1}{6362000}$  (radianes)

Con el valor que se obtendrá de B con mayor aproximación

$$\varphi_1'' = \varphi_1' + \frac{B_1 - B_1'}{6362000}$$

$$B_1' = B(\varphi_1')$$

$$\varphi_1''' = \varphi_1'' + \frac{B_1 - B_1''}{6362000}$$

Hasta que la diferencia sea menor 0",0001 a partir de  $\varphi_1$ , se calculen  $\varphi$  y  $l$  con las fórmulas precedentes y finalmente

$$\lambda = \lambda_0 + l$$

## 8 - 7 CALCULOS SOBRE EL PLANO DE PROYECCIÓN

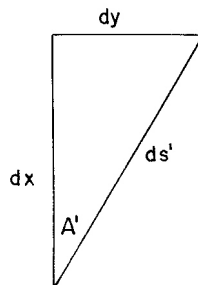
Para calcular y compensar una red de apoyo sobre el plano de proyección, por lo general lo que se hace es lo siguiente:

- Se calculan coordenadas provisionarias aplicando las mediciones efectuadas a las coordenadas de puntos conocidos (sin corregir por deformación).
- Se distribuyen provisionalmente las diferencias que se deben a las deformaciones de la proyección y a los errores de medición.
- Con las coordenadas provisionarias de los puntos nuevos y las conocidas de los puntos dato se calculan las correcciones a los lados y direcciones medidos para llevarlos a figuras rectilíneas sobre el plano de proyección.
- Son las mediciones así corregidas se efectúan los cálculos y compensaciones definitivos.

Vamos a describir el proceso correctivo ( c ) para el caso de la proyección Gauss – Krüger, pero aclaramos que se puede aplicar un procedimiento análogo para cualquier proyección geodésica.

Para resolver este problema vamos a prescindir de los términos elípticos, los cuales se considerarán solo para calcular el radio medio ( $R = \sqrt{M.N}$ ) en la zona de trabajo.

Un elemento de distancia plana se podría expresar en función del incremento  $dy$  (elegimos la  $y$  pues es la coordenada que incide directamente en el cómputo de la deformación)



$$ds' = \frac{dy}{\text{sen}A'}$$



Como  $m = \frac{ds'}{ds}$ , el incremento de distancia geodésica será  $ds = \frac{ds'}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dy}{\text{sen}A'}$  y la distancia finita entre dos puntos 1 y 2 estará dada por

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\text{sen}A' \left(1 + \frac{y^2}{2R^2}\right)} \approx \frac{s'}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \left(1 - \frac{y^2}{2R^2}\right) dy$$

$$s = \frac{s'}{(y_2 - y_1)} \left[ (y_2 - y_1) - \frac{y_2^3 - y_1^3}{6R^2} \right]$$

o sea

$$s = s' \left[ 1 - \frac{1}{6R^2} \cdot \frac{(y_2^3 - y_1^3)}{(y_2 - y_1)} \right]$$

El cociente de polinomios da un resultado sin resto

$$y_2^3 - y_1^3 \Big| \frac{(y_2 - y_1)}{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2}$$

De donde surge

$$\frac{s}{s'} = 1 - \frac{1}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$\boxed{\frac{s'}{s} = 1 + \frac{1}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)}$$

Nótese que para  $y_1 \approx y_2 \approx y$  la relación vuelve a dar la razón de aumento

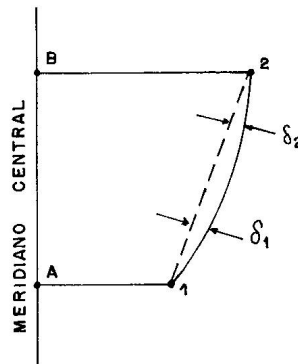
$$\boxed{m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}}$$

pero ahora lo podemos aplicar a una distancia finita entre puntos reales (separados).

Esa expresión sirve para calcular las distancias planas  $s'$  a partir de las geodésicas  $s$ .

Es oportuno destacar que si los puntos 1 y 2 estuviesen uno de cada lado del meridiano central, el producto  $y_1 y_2$  sería negativo, ese término toma en cuenta que las deformaciones locales (en cada uno de los puntos) son mayor es que el aumento medio entre los mismos (ya que pasa por la línea neutra donde no hay deformación lineal)

Para considerar el efecto angular es necesario dejar en claro que, si bien la proyección es conforme y conserva los ángulos, las líneas geodésicas no pasan al plano como rectas y presentan una concavidad hacia el meridiano central



allí presentan diferencias  $\delta_1$  y  $\delta_2$  entre la representación de las mismas y la cuerda (línea de trazos) que forma el segmento rectilíneo entre los puntos. Obviamente nos interesan esos valores para pasar a la cuerda plana y conformar así figuras rectilíneas que se pueden resolver mediante la trigonometría plana y la geometría analítica.

La suma de los valores absolutos de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  debe dar por resultado el exceso esférico del cuadrilátero A - 1 - 2 - B, o sea (recordando que ese exceso, en radianes, se obtiene dividiendo la superficie por  $R^2$ )

$$|\delta_1| + |\delta_2| = \frac{\rho''}{2R^2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

Si convenimos que  $\delta$  es la corrección acimutal para pasar de la dirección geodésica a la plana (sin tener en cuenta aún la convergencia meridiana)

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{\rho''}{2R^2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

Si  $y_1 \approx y_2 \approx y$  (puntos infinitamente próximos se podría expresar

$$d\delta = \frac{2\rho''}{R^2} y \cdot dx$$

Lo cual muestra claramente que el incremento de  $\delta$  aumenta linealmente con "y", o sea que la curvatura se hace mayor cuando el punto está más alejado del meridiano central.

Haciendo ciertas consideraciones sobre ese cambio de curvatura, se llega a que debe aplicarse con peso doble la "y" del punto estación y peso simple la del punto hacia donde se dirige la visual y así resulta

$\delta_1 = \frac{\rho''}{6R^2} (2y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$
$\delta_2 = \frac{\rho''}{6R^2} (2y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$

Donde interviene la diferencia ( $x_{\text{ESTACIÓN}} - x_{\text{PUNTO OBSERVADO}}$ ) y de esta manera quedan las reducciones con su signo (además deben respetarse los signos de las "y").

Contando con esas expresiones corresponde volver a analizar el principio de este

apartado (8.7), vale decir que, una vez obtenidas las coordenadas provisorias (a, b), con las mismas se calculan los lados sobre el plano (c)

$$s'_{ij} = s_{ij} \left( 1 + \frac{y_i^2 + y_i y_j + y_j^2}{6R^2} \right)$$

Y las direcciones de las cuerdas planas

$$d'_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}$$

Donde  $\delta_{ij} = \frac{\rho''}{6R^2} (2y_i + y_j)(x_i - x_j)$

A partir de esos valores sobre el ámbito plano se plantea y resuelve la compensación de la red lo que permite el cálculo de las coordenadas finales (d)

Podría plantearse la duda si la aproximación de las coordenadas provisorias es suficiente. En general, para redes de densificación habitual con lados de 5 o más kilómetros, si los errores de esas coordenadas no superan los  $\pm 10$  metros no se presentan problemas, no obstante ello suele ser una buena práctica reiterar el proceso de cálculo de correcciones y ajuste tomando como provisorias las coordenadas ajustadas obtenidas y verificar que, en un nuevo proceso, queda ratificado el resultado. Esto es prácticamente viable si se opera mediante un proceso digital suficientemente automatizado.

## **8.8 OTRAS FORMAS DE LA REPRESENTACIÓN GAUSS KRÜGER**

En 8.6 hemos desarrollado la teoría general de la proyección G.K., con énfasis de su aplicación en la Argentina. Hay otras formas de aplicarla, especialmente variando su origen en las X y adoptando un factor de escala, menor que 1, para contar con una contracción sobre el meridiano central, tener la isometría ( $m = 1$ ) sobre dos líneas equidistantes de dicho meridiano y llegar a los extremos de la faja con menor deformación, pudiendo aplicar fajas más anchas.

Así la ya mencionada UTM, aplicada por los Estados Unidos de América (USA), utiliza para la coordenada hacia el Norte

$$N = 0.9996 \left( \frac{N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}{2} l^2 + \dots \right) \text{ en el hemisferio Norte y}$$

$$N = 10000000 + 0.9996 \left( \frac{N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}{2} l^2 + \dots \right) \text{ en el hemisferio Sur}$$

Y para la coordenada hacia el Este

$$E = 500000 + 0.9996 (N \cdot \text{sen} \varphi \cdot l + \dots) \text{ en ambos hemisferios.}$$

Obviamente, la razón de aumento será

$$m = 0.9996 \left[ 1 + \frac{(E - 500000)^2}{2R^2} \right]$$

Los meridianos centrales se aplican por Zonas de acuerdo al siguiente detalle

ZONA	LONGITUD DEL MERIDIANO CENTRAL	APLICACIÓN (LÍMITES DE FAJA)
31	3°	0° a 6°
32	9°	6° a 12°
...	...	...
60	177°	174° a 180°
1	-177°	180° a -174°
...	...	...
30	-3°	-6° a 0°

Brasil aplica un coeficiente de contracción de **0.99933333** y para la coordenada norte un valor de 5000000 sobre el ecuador.

Solamente hemos mencionado algunos ejemplos dentro de un amplio espectro de aplicaciones.

## **8.9 OTRAS REPRESENTACIONES GEODÉSICAS**

La proyección de Mercator puede servir como proyección geodésica en una franja próxima al ecuador terrestre (hasta  $\pm 2^\circ$ ). Claro está que son muy pocos los países que podrían aprovecharla.

Se podría adoptar una Mercator Oblicua tomando como ecuador auxiliar una línea perpendicular a un meridiano en determinado punto sobre el mismo, esto se hizo muy pocas veces a lo largo de la historia de la geodesia cartográfica.

Una aplicación algo más usada es la denominada REPRESENTACIÓN CÓNICA CONFORME DE LAMBERT, utilizando un cono tangente a determinado paralelo o secante en dos paralelos separados.

Los meridianos son rectas que se cortan en el cetro (vértice) del cono que luego se desarrolla y los paralelos son circunferencias cuyo centro es la representación del polo (donde se cortan los meridianos citados). Se aplican las condiciones de conformidad y determinan las constantes en función de las propiedades que se imponen.

Otra proyección apta es la llamada ESTEREOGRÁFICA. Si se ubicara un plano tangente al polo sur y sobre el mismo se proyectaran los puntos de la esfera desde el centro perspectivo ubicado en el polo norte, estaríamos en presencia de una representación Estereográfica Polar. También en este caso sería muy escasa su aplicación geodésica, sin embargo se podría aplicar una modalidad oblicua. Por ejemplo, la ciudad de Buenos Aires, permitiría esa aplicación a la Capital Federal que podría extenderse hasta todo el conurbano, incluyendo localidades como La Plata y Belén de Escobar con una deformación lineal de un 50% de la que correspondería a una Gauss – Krüger con el meridiano central convenientemente ubicado para ese fin.

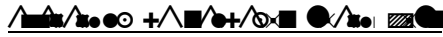
Claro está que, tratándose de una representación de la esfera al plano, habría que aplicar una transformación doble:

ELIPSOIDE → ESFERA → PLANO

donde, se puede demostrar que el radio más conveniente es el que corresponde al radio medio a la latitud seleccionada para el punto de tangencia ( $R_\phi = \sqrt{M \cdot N}$ ).

Países de forma y dimensiones adecuadas (ejemplo República Oriental del Uruguay) podrían contar con un sistema único de coordenadas planas aplicable a todo su territorio; por el contrario otros, con extensiones mayores, no podrían aplicarlo puesto que la disposición de más de un sistema plano resulta poco práctico y allí tienen ventaja las representaciones Gauss – Krüger en extensiones predominantes de norte a sur y Cónica de Lambert, cuando la extensión mayor se presenta de oeste a este.





---

## **9.1- INTRODUCCIÓN**

En el capítulo 1 hemos definido el concepto de GEODESIA y mencionamos que, si bien la finalidad práctica es establecer un conjunto de puntos aptos para el arranque de trabajos topográficos, cartográficos, etc., se requiere un componente científico destinado a determinar la FORMA y DIMENSIONES de la TIERRA, la superficie elipsoidal de referencia, el CAMPO DE GRAVEDAD, la ROTACIÓN y sus variaciones. A todos estos fines, en los últimos años se le fue agregando la vigilancia y determinación de los MOVIMIENOS CORTICALES, ya que la sutileza y exactitud de las determinaciones requiere tener en cuenta los movimientos que sufren los puntos geodésicos implantados sobre la CORTEZA.

En la antigüedad y hasta aproximadamente 1950, lo habitual era efectuar un cálculo preliminar de las redes geodésicas, el mismo servía para referir los trabajos topográficos y subsiguientes. Luego, por comparación entre las coordenadas obtenidas por traspaso desde un punto (DATUM) con las astronómicas, en lugares convenientemente distribuidos, se obtenían las componentes de la DESVIACIÓN DE LA VERTICAL y luego se procedía a corregir las mediciones por ese efecto y efectuar un cálculo perfeccionado. En rigor, pocas veces se llegó a satisfacer dicho perfeccionamiento y aún en los casos que se logró, comenzaron a aparecer discrepancias con los valores obtenidos a partir de otro punto datum.

En la actualidad los nuevos medios han mejorado la situación, se han ido logrando marcos internacionales y regionales que permiten lograr redes con suficiente homogeneidad desde el comienzo e inclusive, prever la reducción de las coordenadas a distintas épocas de referencia, para tener en cuenta los mencionados movimientos corticales.

Por otra parte, en este capítulo trataremos las maneras que se pueden adoptar para reducir las coordenadas de antiguos marcos de referencia al nuevo adoptado. Esa transformación es un requerimiento frecuente para actualizar coordenadas, compatibilizándolas con las necesidades actuales.

Lo expresado anteriormente no sería necesario si se hiciese todo de nuevo, pero resultaría sumamente gravoso lograrlo rápidamente y resulta muy útil tal transformación, ya que la densidad de la antigua información no es fácil de lograr con los recursos que generalmente se disponen para ello. Dicho de otra manera, si bien los medios actuales son mucho más eficientes, la asignación de recursos del Estado, para fines geodésico – cartográficos es comparativamente muy inferior a la que se efectuó en épocas anteriores.

En este capítulo nos dedicaremos a analizar los temas planteados, incluyendo algunas ramas vinculadas, como la GODESIA FÍSICA y LA MICROGEODESIA.

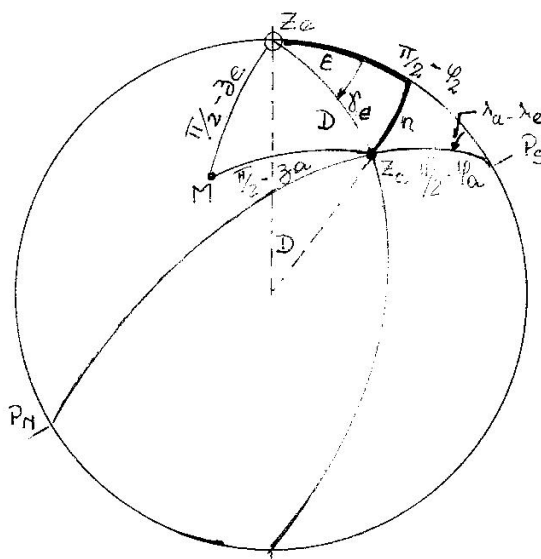
Vale asimismo reflexionar en el sentido que la denominada antiguamente GEODESIA SUPERIOR (o CIENTÍFICA) ya no es una especulación casi filosófica reservada a pocos especialistas como ocurrió a fines del siglo XIX, en la actualidad es requerida para apoyar las nuevas tecnologías en temas eminentemente prácticos; por

ejemplo, la determinación de las ondulaciones del geode es una necesidad concreta para darle capacidad altimétrica a la determinación de la coordenada vertical mediante procedimientos satelitarios.

## 9.2 – DESVIACIÓN DE LA VERTICAL

Ya hemos definido (1.1) a la desviación de la vertical como el ángulo que forma la vertical, o perpendicular al geode, con la normal al elipsoide. Si contáremos con un sistema geodésico mundial, o sea que las coordenadas referidas al mismo obedezcan a una posición definitiva sobre una superficie elipsoidal que responda a un par de parámetros (a y f) inalterables, estaríamos frente a desviaciones absolutas. En realidad son desviaciones casi absolutas con el auxilio de las determinaciones satelitarias y la existencia de marcos internacionales y regionales; el más importante es el ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

Para estudiar el tema vamos a plantear una esfera celeste donde están representados los cenites episódico (Ze) y astronómico o geodica (Za)



Si bien a la desviación la podríamos determinar por su valor total  $D$  y la orientación  $\gamma_e$  del plano que la contiene, es más frecuente expresarla a través de dos componentes:  $\epsilon$  en la dirección del meridiano y  $\eta$  en la dirección del primer vertical, estos dos ángulos se obtienen fundamentalmente de comparar las coordenadas geodésicas o elipsoidicas ( $\varphi_e, \lambda_e$ ) con las astronómicas ( $\varphi_a, \lambda_a$ ). Si se usaron coordenadas con su signo ( $\varphi$  negativa al sur y  $\lambda$  negativo al oeste) se obtienen  $\epsilon$  positiva hacia el norte y  $\eta$  positiva hacia el este; en los desarrollos siguientes vamos a considerar positivas a  $\varphi, \lambda$  en nuestro ámbito de trabajo (sur y oeste) y consecuentemente tendremos los valores positivos hacia el sur ( $\epsilon$ ) y oeste ( $\eta$ ).

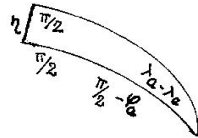
Como puede verse, en la figura,

$$\epsilon = \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_e \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_a \right)$$

$$\varepsilon = (\varphi_a - \varphi_e)$$

ya que la influencia de  $(\lambda_a - \lambda_e)$  en esa componente es ínfima. Además

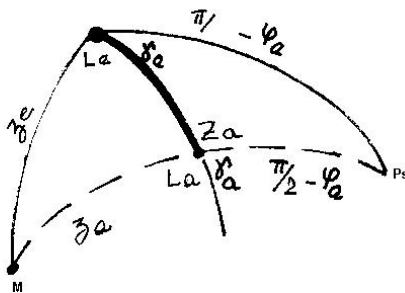
$$\frac{\operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen}(\lambda_a - \lambda_e)} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \varphi_a)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} \text{ o sea}$$



$$\eta = (\lambda_a - \lambda_e) \cos \varphi$$

en esa expresión, además de los senos iguales al arco hemos supuesto  $\varphi_a \sim \varphi_e$ , llamada directamente  $\varphi$  pues su diferencia no influye significativamente.

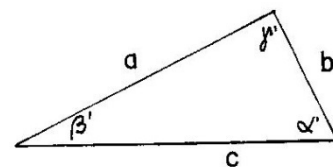
Para considerar los acimutes ( $A_a, A_e$ ) hacia un punto cualquiera (M), vamos a dividir los mismos en dos valores antes y después del plano de la desviación



$$A_e = \gamma_e + L_e$$

$$A_a = \gamma_a + L_a$$

Para el tratamiento de las expresiones debemos recurrir a una de las fórmulas de Delambre y Neper de la trigonometría esférica. \*



$$\frac{\operatorname{tg} \frac{c}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{c}{2}c} = \frac{\operatorname{csc} \frac{c}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{csc} \frac{c}{2}(\alpha + \beta)}$$

aplicándola al triángulo de la derecha

\* Si bien a estas no las tratamos en la revisión 2.2, se pueden consultar en cualquier texto de trigonometría.



$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_e \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_a \right) \right]}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\eta - \gamma_a - \gamma_e)}{\cos \frac{1}{2} (\eta - \gamma_a + \gamma_e)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{\frac{1}{2} D} = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right)}{\cos \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma_a - \gamma_e}{2} \right]}$$

Donde  $D \operatorname{sen} \gamma = (\gamma_a - \gamma_e) \operatorname{cotg} \varphi$  pero  $D \operatorname{sen} \gamma = \eta$

O sea  $\eta = (\gamma_a - \gamma_e) \operatorname{cotg} \varphi$  y  $(\gamma_a - \gamma_e) = \eta \operatorname{tg} \varphi$  haciendo un tratamiento similar con el otro triángulo (de la izquierda)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (z_a + z_e)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\pi - L_a - L_e)}{\cos \frac{1}{2} (\pi - L_a + L_e)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} z}{\frac{1}{2} D} = \frac{\operatorname{sen} L}{\frac{(L_a - L_e)}{2}} \quad \text{o sea} \quad (L_a - L_e) = \frac{D \operatorname{sen} L}{\operatorname{tg} z} \quad \text{entonces}$$

$$(A_a - A_e) = (\gamma_a - \gamma_e) + (L_a - L_e) = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{D \operatorname{sen} L}{\operatorname{tg} z}$$

El término  $\frac{D \operatorname{sen} L}{\operatorname{tg} z}$  se puede despreciar en redes geodésicas en donde  $z \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , no así en zonas montañosas en donde el valor de  $\operatorname{tg} z$  no resulta suficientemente elevado por la inclinación de las visuales. Para esos casos (\*\*) la expresión de  $\eta$  en función de la diferencia de acimut es

$$\eta = (A_a - A_e) \operatorname{cotg} \varphi \quad \text{Valido en zonas llamas}$$

Igualando a ésta con la otra  $[\eta = (\lambda_a - \lambda_e) \operatorname{cos} \varphi]$  se llega a la ECUACIÓN DE LAPLACE que ya hemos mencionado en el capítulo 2 (2.9)

$$(A_a - A_e) = (\lambda_a - \lambda_e) \operatorname{sen} \varphi \quad (**)$$

Esta expresión permite calcular las orientaciones fundamentales en geodésica clásica bidimensional:  $A_e = A_a - (\lambda_a - \lambda_e) \operatorname{sen} \varphi$  el término correctivo del acimut astronómico  $[-(\lambda_a - \lambda_e) \operatorname{sen} \varphi]$  requiere un cálculo previo de  $\lambda_e$ , pero como la precisión requerida en  $A$  ( $\pm 0''1$ ) es menor que la utilizada en  $\lambda$  ( $\pm 0''001$ ) por lo general el cálculo previo de  $\lambda$  **alcanza para aplicar la mejora en orientación.**

Durante los siglos XIX y primera mitad del XX esa ecuación fue el principal uso que se hizo de los puntos astronómicos fundamentales, por eso se los denomina "Puntos de Laplace".

Sin embargo, la expresión completa de  $(A_a - A_e)$  sigue siendo

$$A_a - A_e = \eta \operatorname{tg} \varphi + D \frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{tg} z}$$

O, lo que es equivalente,  $A_a - A_e = (\lambda_a - \lambda_e) \operatorname{sen} \varphi + D \frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{tg} z}$  si ahora reemplazamos  $L = A - \gamma$  el último término se transforma en

\*\* Expresiones simplificadas válidas en redes sobre territorio predominantemente llanos.

$$\frac{D \operatorname{sen}(A - \gamma)}{\operatorname{tg} z} = \frac{D \operatorname{sen} A \cos \gamma - D \cos A \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{tg} z}$$

donde se puede reemplazar  $\varepsilon = D \cos \gamma$   
 $\eta = D \operatorname{sen} \gamma$

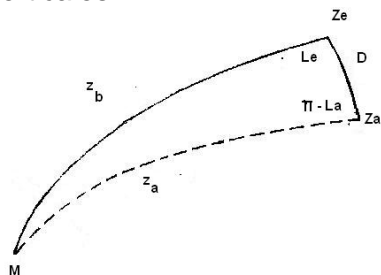
(pasando las coordenadas polares a rectangulares, considerando que  $D, \gamma, \varepsilon, \eta$  son valores pequeños) queda

$$A_\alpha - A_\varepsilon = (\lambda_\alpha - \lambda_\varepsilon) \operatorname{sen} \varphi + \frac{\varepsilon \operatorname{sen} A - \eta \cos A}{\operatorname{tg} z}$$

Nótese que la primera parte  $(\lambda_\alpha - \lambda_\varepsilon)$  que constituye de por sí la ECUACIÓN DE LAPLACE y es una CONSTANTE DEL PUNTO INDEPENDIENTE DE LA DIRECCIÓN OBSERVADA. La segunda parte varía para cada dirección.

En el primer cálculo de las redes, por lo general se despreció esa segunda parte y recién se la aplicó en un cálculo perfeccionado posterior, ya que se requerían las componentes  $\varepsilon$  y  $\eta$ , no solamente en los puntos de Laplace si no en el resto (por interpolación).

Además de la corrección acimutal vista podríamos deducir una corrección para los ángulos verticales.



Aplicando otra de las expresiones de Delambre y Neper

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

Al triángulo M, Ze, Za, nos queda

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(z_\varepsilon - z_\alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} D} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - L_\alpha - L_\varepsilon)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - L_\alpha + L_\varepsilon)}$$

o sea

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(z_\varepsilon - z_\alpha)}{\operatorname{tg} \frac{D}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - L_\alpha - L_\varepsilon)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\pi - L_\alpha + L_\varepsilon)}$$

dado que  $\Delta z$  y  $D$  son pequeños vale

$$\frac{1}{2}(z_\varepsilon - z_\alpha) = \frac{D}{2} \frac{\cos L}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{L_\alpha + L_\varepsilon}{2} \right)}$$

pero

$$\operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{L_\alpha + L_\varepsilon}{2} \right) \right] = \cos \left( \frac{L_\alpha + L_\varepsilon}{2} \right)$$

que tiende a  $\rightarrow \cos 0 \sim 1$ , luego

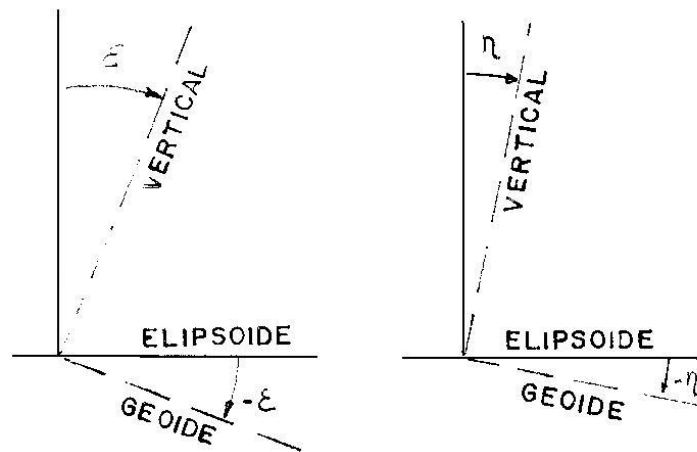
$$z_\varepsilon - z_\alpha = D \cos L = D \cos(A - \gamma) =$$

$$= \underbrace{D \cos \gamma}_{\varepsilon} \cos A + \underbrace{D \sin \gamma}_{\eta} \sin A$$

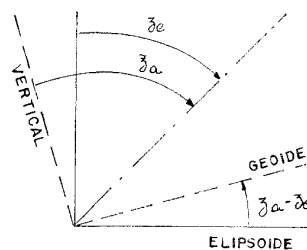
$$z_B = z_A + (\varepsilon \cos A + \eta \sin A)$$

Con esta expresión podríamos calcular desniveles sobre el elipsoide y corregir sobre esta superficie las reducciones de las bases al horizonte, etc. Sin embargo, la mayor utilidad que se le dio hasta mediados del siglo XX fue la de obtener PERFILES ASTROGEODÉSICOS, es decir perfiles del geode sobre el elipsoide en base a determinaciones astronómicas sobre puntos geodésicos.

La pendiente del geode sobre el elipsoide vale  $-\varepsilon$  sobre el meridiano y  $-\eta$  sobre el primer vertical considerando acimutes de avance de  $0^\circ$  y  $90^\circ$



Para una sección de acimut cualquiera sería aplicable la fórmula anterior



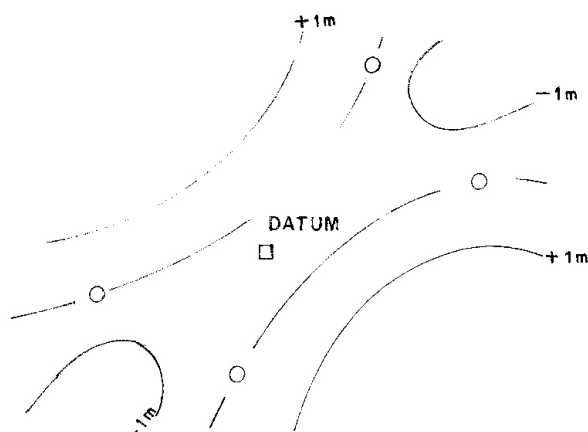
O sea que la pendiente que corresponde a una sección de acimut  $A$ , considerando tal acimut como sentido de avance, valdrá

$$z_A - z_B = -(\varepsilon \cos A + \eta \sin A)$$

E integrando perfiles a partir de un punto astronómico próximo a una estación mareográfica, en la cual se obtuvo un buen valor del nivel medio del mar, se estaría en condiciones de obtener alturas del geode sobre el elipsoide.

Con varios circuitos de ese tipo se debería estar en condiciones de obtener la morfología o la modelación del geode.

Por lo general, el punto datum debería quedar en un máximo, un mínimo o en un “punto de silla” de las isolíneas que corresponden a esa morfología, por ejemplo:



En rigor este método es el más rudimentario, pero a su vez el que cuenta con menor suposición para resolver el problema. El problema mayor, por lo general, ha sido la baja densidad de puntos astronómicos. Una ayuda fue la aplicación de la fórmula de STOKES (ver 6.7), aunque su aplicación siempre queda afectada por las reducciones topoisostáticas. En la actualidad la mayor ayuda la brinda la combinación de determinaciones satelitarias, que brindan alturas sobre el elipsoide ( $h$ ) sobre líneas de nivelación en la que se determinaron cotas ortométricas  $H$  (ver 6.8).

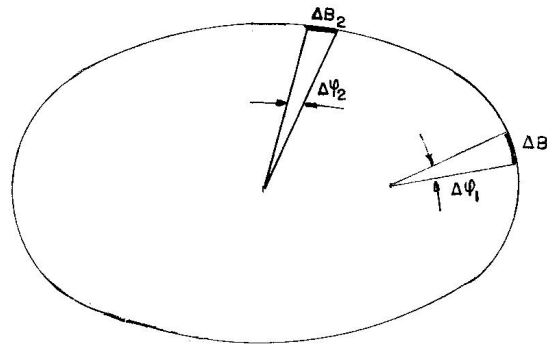
Justamente, en lo que respecta al método gravimétrico, las hipótesis de isostasia se desarrollaron a partir de las exageraciones que introducían en  $N, \xi, \eta$  las anomalías calculadas a partir de las correcciones topográficas (ver 6.5, 6.6 y 6.7), cuando se las comparaba con los perfiles astrogeodésicos.

### **9.3 DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS ELÍPTICOS.**

En la antigüedad y hasta fines del siglo XIX, la determinación de los elementos del elipsoide de referencia ( $a, f$ ) se concretó a partir de medición de arco de meridiano. No se usaron arcos de paralelos por la limitación en obtener buenas longitudes ( $\lambda$ ) dado que, en esa época, era muy difícil comparar tiempos (falta de medios de comunicación para transmitir señales horarias).

A principios del siglo XX se comenzaron a usar redes que cubrían ámbitos de longitud y latitud variables, de allí surgió el primer Elipsoide Internacional (Madrid 1924). Después de 1960 y hasta la actualidad, se fueron incorporando el uso de satélites artificiales y recepción coordinada de radiaciones extragalácticas (VLBI – Very Long Baseline Interferometry) que dieron los valores usados por el GRS 80 y WGS 84 (ver final de 7.6).

El método de los arcos de meridiano requería, como mínimo, dos arcos (uno en latitudes bajas ( $\Delta B_1$ ) y otro en latitudes altas ( $\Delta B_2$ ) más la determinación de  $\varphi$  y sus incrementos  $\Delta\varphi$ .



En líneas generales, esos arcos surgirán de cadenas de triangulación.  
En forma muy simplificada podríamos plantear

$$\Delta B_1 = M_1 \Delta \varphi_1$$

$$\Delta B_2 = M_2 \Delta \varphi_2$$

Dividiendo surge

$$\frac{\Delta B_1}{\Delta B_2} = \frac{M_1 \Delta \varphi_1}{M_2 \Delta \varphi_2}, \text{ de donde } \frac{M_1}{M_2} = C$$

donde

$$C = \frac{\Delta B_1 \Delta \varphi_2}{\Delta B_2 \Delta \varphi_1}$$

que es un valor que surge de las determinaciones.

Por otra parte,  $M_1$  y  $M_2$  están vinculados directamente a los valores  $a$  y  $f$  y su cociente depende exclusivamente de  $f$

$$\frac{M_1}{M_2} = \left[ \frac{1-f(2-f) \operatorname{sen}^2 \varphi_2}{1-(2-f) \operatorname{sen}^2 \varphi_1} \right]^{3/2}, \text{ (ver 7.5)}$$

$$C = \frac{M_1}{M_2} = \left[ \frac{1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi_2}{1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi_1} \right]^{3/2}$$

O sea (admitiendo  $1-f(2-f) \sim 1-2f$  y  $\frac{1}{1-x} \sim 1+x$ )

$$\frac{1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi_2}{1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi_1} = C^{2/3}$$

$$1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi_2 + 2f \operatorname{sen}^2 \varphi_1 = C^{2/3}$$

De donde

$$f = \frac{1-C^{2/3}}{2(\operatorname{sen}^2 \varphi_2 - \operatorname{sen}^2 \varphi_1)}$$

Por supuesto, en este desarrollo simplificado  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son las latitudes medias de los arcos  $\Delta B_1$  y  $\Delta B_2$ .

Recordando, ahora, que

$$\Delta B = M \Delta \varphi$$

$$\frac{a(1-f)^2}{[1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi]^{3/2}} = \frac{\Delta B}{\Delta\varphi}, \quad y$$

$$a = \frac{\Delta B [1-f(2-f)\text{sen}^2\varphi]^{3/2}}{\Delta\varphi (1-f)^2}$$

Se pueden obtener valores de “a” para ambos arcos  $\Delta B_1$  y  $\Delta B_2$  a ambas latitudes medias ( $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ).

Indudablemente el mecanismo fue, en general, más elaborado y ha incluido ajustes para más de dos arcos.

Un planteo similar se puede efectuar para dos arcos de paralelos a latitudes separadas

$$\Delta p_1 = N_1 \cos\varphi_1 \Delta\lambda_1$$

$$\Delta p_2 = N_2 \cos\varphi_2 \Delta\lambda_2$$

Pero, como hemos indicado anteriormente, no fue aplicado por las dificultades en obtener en forma precisa los tiempo coordinados que permitan obtener los  $\Delta\lambda$  en forma suficientemente precisa.

A principios del siglo XX, John F. HAYFORD presentó el primer método areal a partir de la red geodésica de los Estados Unidos de América del Norte (USA), publicó tanto el método como los valores numéricos en un trabajo titulado “THE FIGURE OF THE EARTH AND ISOSTASY FROM MEASUREMENT IN THE UNITED STATES”. Los primeros valores los obtuvo en 1906, los perfeccionó en 1907 y finalmente obtuvo los resultados que estimó más consistentes en 1909, estos dieron lugar a la adopción del ELIPSOIDE INTERNACIONAL MADRID 1924, adoptado ese año por la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, reunida en ese lugar de España.

El método partió de un cálculo preliminar con los valores uno de los elipsoides de CLARKE (ver lista más adelante) a partir de los cuales introdujo como incógnitas  $\Delta a$ ;  $\Delta f$ , más  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  y  $\Delta A$  (posición del Punto Datum y orientación fundamental desde el mismo) a fin de minimizar la diferencia entre las desviaciones de la vertical en todos los puntos astronómicos, tomando en cuenta el efecto topográfico isostático de la gravedad (ver 6.6 y 6.7), para lo cual ensayó la hipótesis de PRATT para distintas superficies de compensación y eligió la que presentaba una distribución de residuos más normal (gaussiana). Por esa razón se suele hablar de la HIPOTESIS PRATT – HAYFORD, lo cual es consistente con el título de la publicación de Hayford citada anteriormente. Sin lugar a dudas fue la aplicación más extensa de dicha hipótesis hasta principios del siglo XX.

A partir de 1960 se comenzaron a aplicar los estudios de las orbitas de los satélites artificiales para mejorar esas determinaciones. Uno de los que más aportó en los comienzos de esta etapa fue W. M. Kaula, estadounidense, que en 1966 publicó en Londres (Blasdel Publ.) su libro THEORY OF SATELLITE GEODESY. Fundamentalmente por ese camino se mejoró sustancialmente la determinación del aplanamiento  $f$ .

Los principales valores que se fueron obteniendo se resumen a continuación, la lista completa es más extensa.

AUTOR O INSTITUCIÓN INVOLUCRADA	AÑO	a	1/f
BOUGUER MAPERTIUS	1738	6 397 300	216.8
DELAMBRE	1800	6 375 653	334.0
EVEREST	1830	6 377 276	300.8
BESSEL	1841	6 377 397	299.2
CLARKE	1880	6 378 249	293.5
HAYFORD (UGGI 1924)	1909	6 378 388	297.0
FISCHER	1960	6 378 155	298.3
KAULA	1964	6 378 160	298.25
UGGI 67	1967	6 378 160	298.247
WGS 72	1972	6 378 135	298.260
UGGI (GRS 80)	1980	6 378 137	298.2572221
WGS 84	1984	6 378 137	298.2572236

Debemos aclarar que la serie WGS fue adoptada por lo Estados Unidos (USA) para los sistemas satelitarios TRANSIT (72) y GPS (84) y que el marco geodésico argentino POSGAR (tanto 94 como 07) tomó los valores de WGS 84.

#### **9.4 GEODESIA INTRÍNSECA. CONCEPTO DE SISTEMA Y MARCO GEODÉSICO.**

La geodesia clásica, o bidimensional, trabaja reduciendo los valores medidos al elipsoide. Si es necesario, completa las correcciones en sucesivas iteraciones.

Podría encararse el problema en forma diferente:

- Partir de un punto origen con coordenadas  $x_0, y_0, z_0$  y la orientación de la dirección ( $A_0$ ), asignándole un potencial  $W_0$ .
- A partir de ese punto armar la red con distancias oblicuas, direcciones horizontales, distancias cenitales, determinaciones astronómicas ( $\varphi, \lambda, A$ ) y medición de diferencia de potencial ( $g \cdot \Delta h$ ).
- Calcular las coordenadas  $x, y, z$  de los puntos sin el empleo de elipsoide alguno.
- Armar un poliedro que cubra toda la tierra y compensarlo.

Además de las variaciones de coordenadas y de las incógnitas de orientación en este tipo de cálculo aparece una nueva incógnita: el coeficiente de refracción – k - (Ver 5.2)

Hirvonen, Hotine y Marussi, entre otros, desarrollaron este tipo de geodesia, que llamaron INTRISECA O TRIDIMENSIONAL, a partir de 1950.

Las nuevas superficies de referencia se determinan a partir del citado poliedro (d). Una de ellas es el TELUROIDE, que se aproxima a la superficie topográfica (luego lo definiremos), bajando los puntos del poliedro hasta una gravedad igual a la gravedad teórica se obtiene el QUASI GEOIDE y finalmente, para fines prácticos se establece un elipsoide, cuyo baricentro coincide con el del Quasi Geoide y en general se adapte al mismo. El Teluroide se obtiene de subir desde ese elipsoide una altura igual a lo COTA NORMAL ( $H_N$ , ver 6.8). Dentro de la geodesia intrínseca se manejan otras definiciones más rigurosas a partir del potencial.

De modo que para el cálculo de  $\varphi, \lambda$  la única diferencia práctica con la geodesia

bidimensional estriba en que no se debieron reducir las observaciones iniciales antes de la compensación.

En la actualidad la geodesia tomó algunos de los lineamientos de este planteo teórico, pero el avance tecnológico le imprimió otras características motivadas por la geodesia satelitaria.

Sintéticamente podemos decir que el nexo de vinculación en la geodesia satelitaria actual está definido por las órbitas de los satélites empleados, las determinaciones se efectúan a través de mediciones relativas entre cada satélite y los puntos a posicionar utilizando modelos orbitales. Los valores de posición de los satélites constituyen su efeméride, calculada en base a rastreos y suposiciones, estos datos se pueden utilizar en forma directa obteniendo la posición  $x, y, z$  de cada punto referido al modelo orbital, pero se podrían introducir ciertas variantes (relajación o ajuste orbital) y mejorar así las posiciones relativas, es decir modificar levemente las efemérides para un mejor ajuste regional de los puntos geodésicos.

Por el momento lo que más nos interesa es como relacionar un marco geodésico (por ejemplo local, que surgió de un determinado Datum) con otro (por ejemplo referido al Sistema Geodésico Mundial – WGS – vinculado a las efemérides satelitarias).

Antiguamente cuando se adoptaba un punto datum y los parámetros elípticos ( $a, f$ ) se solía confundir el vocablo SISTEMA GEODÉSICO con el de MARCO GEODÉSICO. En la actualidad se reserva el concepto de SISTEMA para indicar cuales son las constantes fundamentales (geométricas, como  $a, f$  origen, orientación de ejes y físicos como las gravitacionales) adoptadas y se utiliza el vocablo MARCO para indicar la identidad de un conjunto de puntos y sus valores de coordenadas.

Indudablemente cada marco ha adoptado un sistema y su vigencia queda respaldada por el conjunto de coordenadas que corresponden a esa red, cuya integridad está asegurada por mediciones entre los puntos que la componen.

Uno de los problemas que frecuentemente debe resolverse es el cambio de coordenadas de un marco geodésico cuando se quiere introducir una referencia distinta, por cambio de origen y a veces, por cambio de parámetros elípticos.

Los antiguos marcos tenían un origen que surgía de las coordenadas y orientación adoptadas en el punto datum y el centro del elipsoide difícilmente coincidían con el centro de masas de la Tierra (geocentro), por eso, cuando se quiere pasar de sus coordenadas a un marco geocéntrico (donde el centro del elipsoide está ubicado en el citado centro de masas) el conjunto de valores más significativos consiste en la traslación de tales puntos (centros) con sus componentes en  $X, Y$  y  $Z$ .

Pero, además de las componentes de dicha traslación, deberían tomarse en cuenta cambios de orientación y aún ciertas deformaciones, estos temas serán tratados a continuación, previo análisis de otro problema que luego será necesario considerar.

Volviendo al tema de geodesia intrínseca, que hemos tratado en forma muy elemental, el que quiera ampliarlo puede consultar las siguientes obras:

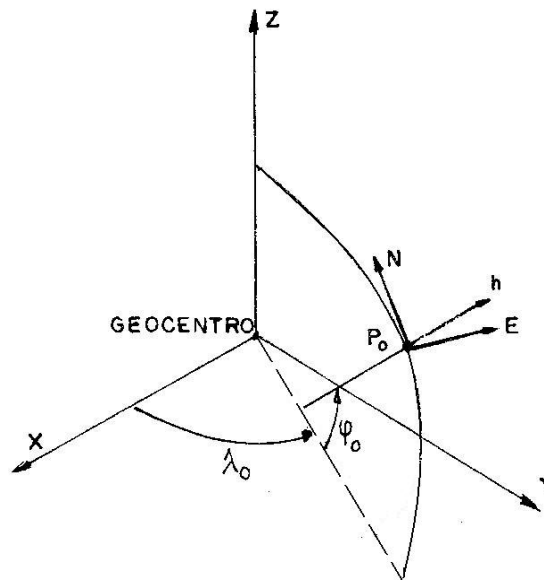
- MARUSSI A. (1985) *Intrinsic Geodesy*, Editorial SPRINGER, Berlin, Heidelberg, N.Y.
- HOTNE M. (1969) *Mathematical Geodesy*. ESSA Monogr. 2, Washington.



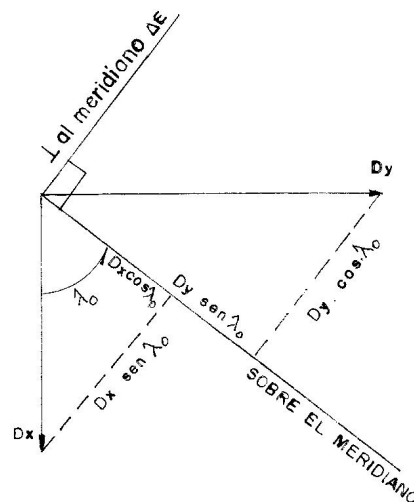
- HIRVONEN R.A. (1960) New Theory of the Gravimetric Geodesy, IAG, Helsinki.

### 9.5 RELACIÓN ENTRE LAS COMPONENTES LOCALES Y GENERALES DE UN VECTOR

En el capítulo 10 vamos a ver que en una sesión de geodesia satelitaria, donde opera simultáneamente un par de receptores instalados en dos puntos, se obtienen las tres componentes del vector formado  $D_x, D_y, D_z$ , orientadas de acuerdo a una terna de ejes, como la definida al principio de 7.3. Ahora nos proponemos obtener, a partir de dichas componentes, los valores topográficos locales con ejes hacia el norte, este y cenit en un punto que denominaremos  $P_0$  de coordenadas  $\varphi_0, \lambda_0$ .



Para tratar esto, primero consideremos un plano paralelo al ecuador (plano X, Y) que pasa por  $P_0$ , allí los incrementos en X, Y sobre el meridiano y su perpendicular tomarían los siguientes valores



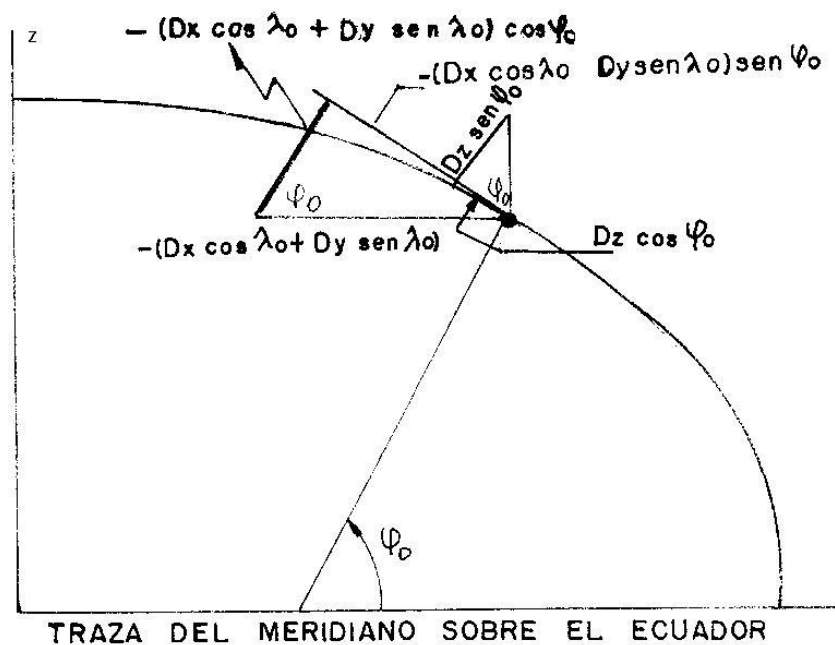
La componente, sobre el ecuador, hacia el norte será  $-(D_x \cos \lambda_0 + D_y \sin \lambda_0)$ , el signo negativo proviene en que la suma  $D_x \cos \lambda_0 + D_y \sin \lambda_0$ , en este esquema, están

dirigidas hacia el sur y hay que referirlos hacia el norte.

La componente hacia el Este coincide con el incremento  $\Delta E$

$$\Delta E = -D_x \cos \lambda_0 + D_y \operatorname{sen} \lambda_0$$

La primera (hacia el norte) todavía debe proyectarse sobre el plano horizontal y debe tomarse en cuenta también la influencia de  $D_z$ , que es  $D_z \cos \varphi_0$



Entonces la componente en N será

$$\Delta N = -D_x \cos \lambda_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - D_y \operatorname{sen} \lambda_0 \cos \varphi_0 + D_z \cos \varphi_0$$

La componente en E no requiere ser proyectada y valdrá

$$\Delta E = -D_x \operatorname{sen} \lambda_0 + D_y \cos \lambda_0$$

Y la componente en h deberá cambiar el signo de  $-(D_x \operatorname{sen} \lambda_0 + D_y \cos \lambda_0) \cos \varphi_0$  pues el sentido de crecimiento en h es contrario al obtenido, e cambio la parte  $D_z \operatorname{sen} \lambda_0$  concuerda:

$$\Delta h = (D_x \cos \lambda_0 + D_y \operatorname{sen} \lambda_0) \cos \varphi_0 + D_z \operatorname{sen} \varphi_0$$

Dichas expresiones se pueden ordenar de acuerdo a la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \Delta N \\ \Delta E \\ \Delta h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi_0 \cos \lambda_0 & -\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \lambda_0 & \cos \varphi_0 \\ -\operatorname{sen} \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 & \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \lambda_0 & \operatorname{sen} \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

Una de las aplicaciones de esta transformación se tratará en 9.6 para las denominadas FÓRMULAS DE MOLODENSKIJ pero tiene otras, por ejemplo para hacer intervenir en un sistema local topográfico vectores de geodesia satelitaria con

mediciones tradicionales de ángulos y distancias o para evaluar errores horizontales (en N y E) con verticales (en h) a través de unos coeficientes que, como ya veremos se denominan HDOP y VDOP.

(DOP = Dilution Of Precision, H es Horizontal - en  $\varphi, \lambda$  - y V es Vertical – en h -).

## **9.6 CAMBIO DE COORDENADAS.**

Ahora vamos a tratar la transformación de coordenadas de un marco (por ejemplo antiguo, que se calculó a partir de un Punto DATUM) a otro (por ejemplo geocéntrico). Es un problema que se está presentando frecuentemente cuando se quiere aprovechar información existente y se la quiere expresar en coordenadas actuales. Para ello, lo más común es efectuar determinaciones nuevas en algunos puntos bien distribuidos y determinar los parámetros de transformación en base a las coordenadas de los mismos, expresadas en ambos sistemas.

El caso más elemental, válido para redes no muy extensas (ejemplo 100 a 500 Km) es suponer que ambas ternas de ejes (  $x,y,z$  /  $x',y',z'$  ) son suficientemente paralelas.

Como vimos en 7.3, la relación entre las coordenadas geodésicas y rectangulares está dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}x &= (N + h) \cos\varphi \cos\lambda \\y &= (N + h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\z &= [N(1 - f^2) + h] \operatorname{sen}\varphi\end{aligned}$$

Para el nuevo grupo de coordenadas valdrá

$$\begin{aligned}x' &= (N' + h') \cos\varphi' \cos\lambda' \\y' &= (N' + h') \cos\varphi' \operatorname{sen}\lambda' \\z' &= [N'(1 - f'^2) + h'] \operatorname{sen}\varphi'\end{aligned}$$

Vale aclarar que para  $N'$  será necesario tomar en cuenta parámetros elípticos  $a', f'$  los cuales son conocidos de antemano.

En base a los puntos comunes en los cuales se cuenta con coordenadas expresadas en ambas modalidades se podrán calcular las traslaciones

$$\begin{aligned}\Delta x &= x' - x \\ \Delta y &= y' - y \\ \Delta z &= z' - z\end{aligned}$$

y si se llega a resultados coherentes, se adoptarán valores promediados de las constantes de traslación ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ).

Entonces se podrán calcular las coordenadas rectangulares transformadas de todos los puntos

$$\begin{aligned}x' &= x + \Delta X \\ y' &= y + \Delta Y \\ z &= z + \Delta Z\end{aligned}$$

a partir de las cuales, mediante transformación inversa, se podrán calcular las coordenadas geodésicas  $\varphi', \lambda', h'$ , en cuyo proceso deberán aplicarse los valores  $a', f'$ .

Nos falta entonces establecer un algoritmo para dicha transformación inversa.

De las dos primeras fórmulas que expresan  $x, y$  (para este desarrollo omitiremos  $x', y'$ ) podemos deducir fácilmente

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}$$

Ello se debe fundamentalmente a que se trata de una figura de revolución alrededor del eje  $z$  que, a su vez, es la arista del diedro en que se mide  $\lambda$ . Para la latitud, en cambio, influye la elipticidad.

Para obtener el algoritmo partimos de

$$x^2 + y^2 = (N + h)^2 \cos^2 \varphi$$

de donde

$$(N + h) \cos \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

además, a partir de la expresión de  $z$  tenemos

$$z = [N + Nf^2 - 2Nf + h] \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = (N + h) \operatorname{sen} \varphi - Nf(2 - f) \operatorname{sen} \varphi$$

$$(N + h) \operatorname{sen} \varphi = z + Nf(2 - f) \operatorname{sen} \varphi$$

y a través del cociente surge

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z + Nf(2 - f) \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

claro que la complicación surge de que entra  $\varphi$  en el cálculo de  $\varphi$ , esto se resuelve mediante un proceso iterativo para lo cual se comienza con un valor aproximado de  $\varphi$  (que bien podría ser el que corresponde al primer grupo de coordenadas) y luego se va introduciendo el valor calculado en aproximaciones sucesivas hasta que la variación sea despreciable.

Hay quienes recomienda un camino más convergente a través de

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{p(1 - f)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z + \frac{f(2 - f)}{(1 - f)} a \operatorname{sen}^3 \alpha}{p + f(2 - f) a \operatorname{cos}^3 \alpha}$$

para  $h$ , su valor puede obtenerse a partir de la relación ya vista

$$(N + h) \cos \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de donde

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N$$

Otra, forma de efectuar la transformación es a través de la fórmulas de MOLODENSKIJ (o MOLODENSKY) que calcula  $\Delta \varphi, \Delta \lambda$  y  $\Delta h$  a partir del

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta a$  y  $\Delta f$ , donde

$$\begin{aligned}\Delta a &= a' - a \\ \Delta f &= f' - f\end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\rho''}{(M+h)} [-\Delta X \operatorname{sen}\varphi \cos\lambda - \Delta Y \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi + \Delta Z \cos\varphi + (a \Delta f + f \Delta a) \operatorname{sen}2\varphi]$$

$$\Delta\lambda = \frac{\rho''}{(N+h)} [-\Delta X \operatorname{sen}\lambda + \Delta Y \cos\lambda]$$

$$\Delta h = \Delta h = \Delta X \cos\varphi \cos\lambda + \Delta Y \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda + \Delta Z \operatorname{sen}\varphi + (a \Delta f + f \Delta a) \operatorname{sen}^2\varphi - \Delta a$$

La primera parte de esas expresiones, es decir, la que no depende de  $\Delta f$  y  $\Delta a$ , se obtiene directamente de la matriz a la que arribamos en 9.5 si reemplazamos

$\Delta N$  por  $(M+h) \cdot \Delta\varphi$  (incremento elemental sobre el meridiano)

$\Delta E$  por  $(N+h)\cos\varphi \cdot \Delta\lambda$  (incremento elemental sobre el paralelo)

Y pasamos de radianes a segundos sexagesimales

$$\begin{pmatrix} (M+h) \Delta\varphi \\ (N+h)\cos\varphi \Delta\lambda \\ \Delta h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda & \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\rho''}{(M+h)} (-\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda \Delta X - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda \Delta Y + \cos\varphi \Delta Z)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\rho''}{(N+h)\cos\varphi} (-\operatorname{sen}\lambda \Delta X + \cos\lambda \Delta Y)$$

$$\Delta h = \cos\varphi \cos\lambda \Delta X + \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \Delta Y + \operatorname{sen}\varphi \Delta Z$$

Para el caso del  $\Delta\lambda$  hay coincidencia pues se repite la ventaja de usarse una figura de rotación alrededor del eje z, en cambio para  $\Delta\varphi$  y  $\Delta h$  falta introducir la influencia de la variación de  $a$  y  $f$ .

Para eso vamos a diferenciar  $d\varphi, da$  y  $df$  de la expresión de  $\operatorname{tg}\varphi$  y  $dh, da$  y  $df$  en la de  $h$  considerando constantes las variables ya consideradas

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z + Nf(2-f)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\ln \operatorname{tg}\varphi = \ln[z + Nf(2-f)\operatorname{sen}\varphi] - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi \cos^2\varphi} \sim \frac{d(z + 2Nf \operatorname{sen}\varphi)}{z + 2Nf \operatorname{sen}\varphi}$$

donde se ha considerado  $Nf(2-f) \sim 2Nf$

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi} \sim \frac{2Nf \cos\varphi d\varphi + 2f \operatorname{sen}\varphi dN + 2N \operatorname{sen}\varphi df}{[N(1-f)^2 + h] \operatorname{den}\varphi + 2Nf \operatorname{sen}\varphi}$$

$$\text{pero } z = [N(1-f)^2 + h] \operatorname{sen} \varphi \sim N(1-2f) \operatorname{sen} \varphi + h \operatorname{sen} \varphi \sim \\ \sim N \operatorname{sen} \varphi - 2Nf \operatorname{sen} \varphi + h \operatorname{sen} \varphi \sim (N+h) \operatorname{sen} \varphi - 2Nf \operatorname{sen} \varphi$$

entonces

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} \sim \frac{2Nf \cos \varphi d\varphi + 2f \operatorname{sen} \varphi dN + 2N \operatorname{sen} \varphi df}{(N+h) \operatorname{sen} \varphi}$$

$$\frac{(N+h)}{\cos \varphi} d\varphi \sim 2Nf \cos \varphi d\varphi + 2 \operatorname{sen} \varphi (f dN + N df)$$

a los efectos de esta expresión diferencial, en el último término, puede admitirse que  $dN \sim da$  y que  $N \sim a$ , entonces

$$\left[ \frac{(N+h)}{\cos \varphi} - 2Nf \cos \varphi \right] d\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi (f da + a df)$$

$$(N+h-2Nf \cos^2 \varphi) d\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (f da + a df)$$

$$[N(1-2f \cos^2 \varphi) + h] d\varphi = \operatorname{sen} 2\varphi (f da + a df)$$

pero

$$N(1-2f \cos^2 \varphi) \sim \frac{a(1-2f)}{(1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \cdot \frac{(1+2f \operatorname{sen}^2 \varphi)}{[1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}} \sim M$$

$$\sim \frac{a(1-2f)}{(1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} (1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi)} \sim \frac{a(1-2f)}{[1-2f \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}} \sim M$$

entonces

$$(M+h) d\varphi = \operatorname{sen} 2\varphi (f da + a df)$$

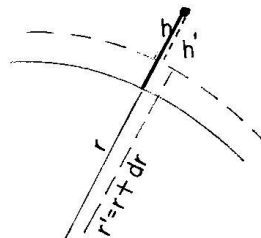
que, pasando  $d\varphi$  de radianes a segundos sexagesimales completa lo que le falta a la expresión incompleta de  $\Delta\varphi$  y justifica la primera fórmula de Molodenskij.

La segunda fórmula ( $\Delta\lambda$ ), como hemos indicado, no requiere término correctivo.

La tercera ( $\Delta h$ ) se puede tratar a partir de la expresión elemental del radiovector vista en 6.2

$$r = a(1-f \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

haciendo variar  $r$  en función de  $a$  y  $f$  queda  $dr = da - (a df + f da) \operatorname{sen}^2 \varphi$  y si ese es el incremento de la separación de la superficie,



la corrección en altura debe tener signo contrario  
 $(a df + f da) \operatorname{sen}^2 \varphi - da$

Con cuyo agregado queda expresada la tercera fórmula de Molodenskij.

Debe quedar bien claro que la transformación a través de las tres fórmulas de Molodenskij es equivalente al esquema inicial que planteamos

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \varphi \\ \lambda \\ h \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] \end{array} \xrightarrow{\text{Utilizando a, f}} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{l} x' = x + \Delta X \\ y' = y + \Delta Y \\ z' = z + \Delta Z \end{array} \right] \end{array} \xrightarrow{\text{utilizando a' f}} \left[ \begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right]$$

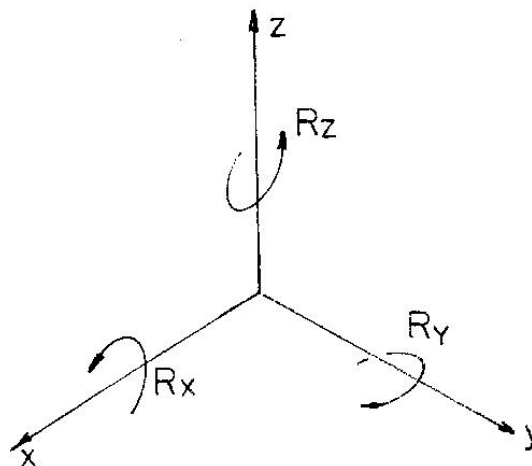
Un perfeccionamiento que se puede introducir es pasar de  $x, y, z$  a  $x', y', z'$  agregando leves rotaciones  $R_x, R_y, R_z$  alrededor de los tres ejes y una dilatación que llamaremos  $(1 + m)$ , es decir tomando en cuenta 7 parámetros, como corresponde a una orientación absoluta de un modelo fotogramétrico.

La transformación es

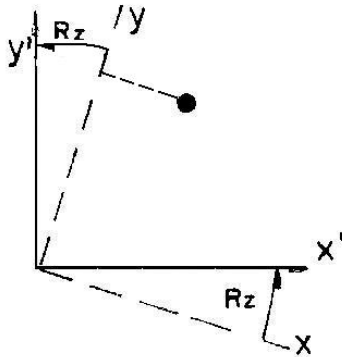
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

Nótese que, para  $R_x, R_y, R_z$  y  $m$  nulos, estamos en el caso anterior ( $x' = x + \Delta X$ , etc) ahora vamos a justificar la matriz de rotación y aclaramos que la misma es válida para pequeños giros, por lo general entre redes geodésicas los mismos son inferiores a  $1'' \sim 0.000005$  radianes. Aunque la expresión podría conservar su validez hasta  $1 \sim 0.0003$  y aun más, de ninguna manera es aplicable para el citado ejemplo fotogramétrico, donde son previsibles giros mucho mayores.

Si bien la justificación se podría plantear a través del producto de tres matrices de rotación, lo vamos a resolver analizando individualmente los tres giros.



giro alrededor del eje z:



$$x' = x \cos R_z + y \operatorname{sen} R_z \sim x + y R_z$$

$$y' = y \cos R_z - x \operatorname{sen} R_z \sim y - x R_z$$

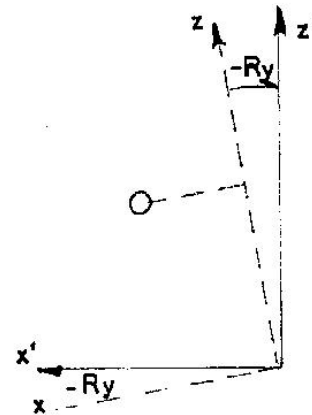
(en este caso se considera  $R_z$  con su signo pues un tirabuzón para pasar de  $xy$  a  $x'y'$  toma esos valores avanzando de acuerdo al eje  $z$  con sentido horario)

Giro alrededor del eje  $y$ :

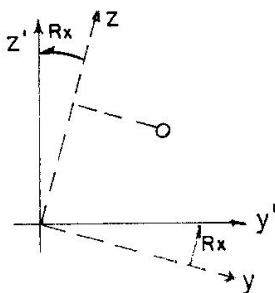
$$x' = x \cos(-R_y) + z \operatorname{sen}(-R_y) \sim x - z R_y$$

$$z' = z \cos(-R_y) - x \operatorname{sen}(-R_y) \sim z + x R_y$$

(en este caso se considera  $R_y$  con signo cambiado pues el giro del tirabuzón para avanzar por  $y$  debe hacerse en sentido anti horario)



Giro alrededor del eje  $x$ :



$$y' = y \cos R_x + z \operatorname{sen} R_x \sim y + z R_x$$

$$z' = z \cos R_x - y \operatorname{sen} R_x \sim z - y R_x$$

si ahora a cada coordenada le agregamos el término correctivo de los dos giros que la modifican queda

$$x' = x + R_z y - R_y z$$

$$y' = -R_z x + y + R_x z$$

$$z' = R_y x - R_x y + z$$

que, en forma matricial es



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la aplicación de la dilatación, como factor, es fácilmente comprensible, al igual que el agregado de las componentes de la traslación.

Si bien este tipo de transformación pareciera que debería tener una vigencia amplia (ejemplo: redes de varios miles de kilómetros) la experiencia no demuestra significativamente tal beneficio y se suelen conseguir mejores resultados efectuando simples traslaciones por sectores en los cuales se subdivide la red. En este caso de sectores, con tratamiento individuales, debe tomarse la precaución de calcular los puntos de una franja divisoria (entre dichos sectores) en ambos grupos y someter los resultados a un promedio para evitar discontinuidades abruptas.

Con respecto a los puntos con coordenadas que, por lo general, corresponden a arranques distintos y hasta a elipsoides distintos caben dos aclaraciones fundamentales:

- a) Los puntos con valores nuevos en general contarán con  $\varphi, \lambda, h$  (altura sobre el elipsoide), pero los valores antiguos suelen estar expresados en  $\varphi, \lambda, H$  (cotas sobre el nivel del mar) entonces es necesario contar con una modelación del geoide para conocer la transformación de H a h (ver final de 9.2).

La falta de este aspecto bien resuelto suele ser una de las limitaciones mayores en la obtención de parámetros de transformación.

- b) Si bien para resolver el problema a través de simples traslaciones resulta formalmente necesario contar con un punto en los que se conozcan  $\varphi, \lambda, h$  y  $\varphi', \lambda', h'$ , para obtener razonablemente confiable las traslaciones  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  convendría contar con no menos de tres puntos bien distribuidos, en los cuales se obtengan esos valores por promedio de resultados compatibles.

Para el caso de 7 parámetros  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, m, R_x, R_y, R_z)$  es necesario formalmente contar con, por lo menos, tres puntos, dentro de lo posible formando un triángulo que encierre la mayor parte de la zona a tratar. Sin embargo, además de esos tres puntos, sería conveniente que haya por lo menos cada 500 km un punto adicional para poder resolver el cálculo de los parámetros a través de un buen ajuste por mínimos cuadrados.

Lo expuesto con respecto a la poca mejora que, en la práctica, ofrece la solución de 7 parámetros se debe fundamentalmente al hecho de que los valores de las redes antiguas introducen deformaciones que surgen de la propagación de errores en dichas redes y no se produce una transformación entre grupos con suficiente rigidez como para hacer óptima la transformación planteada.

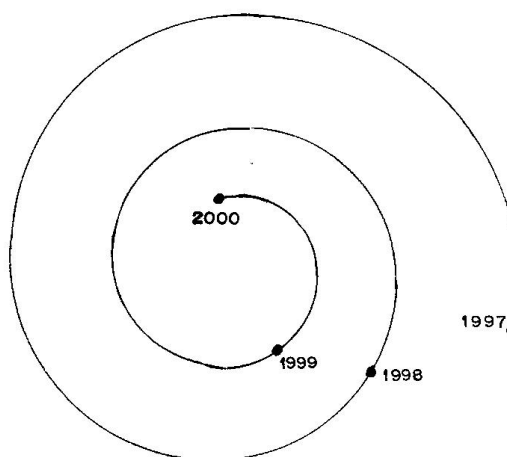
Para resolver el problema se han establecido REGRESIONES MULTIPLES, las cuales se reducen al pasaje de  $\varphi$  a  $\varphi'$  y de  $\lambda$  a  $\lambda'$  mediante un polinomio que en gran medida absorbe las deformaciones descriptas y evita la limitación en contar con  $h$  y  $h'$  en todos los puntos comunes. Si bien este procedimiento termina resolviendo numéricamente las limitaciones planteadas, debe reconocerse que no se basa en fundamentos científicos sólidos si no en una solución práctica.

## 9.7 GEODESIA FÍSICA.

En líneas generales, la geodesia física es la rama de la disciplina que nos ocupa

en la que se aplican conceptos de física, especialmente del campo de la atracción newtoniana y de la dinámica. La teoría del potencial, de la cual nos ocupamos brevemente en los capítulos 1 y 6 y la gravimetría, desarrollada también en el capítulo 6, forman parte de la geodesia física, pero se le deben agregar ciertos fenómenos dinámicos, como ser:

- a) Estudio de las atracciones lunisolares (algo vimos sintéticamente en 5.6) y sus efectos en los niveles de agua (mareas).
- b) Incidencia de esas atracciones en las deformaciones periódicas de la Tierra (marea terrestre). Una de las formas de medir los efectos (a y b) juntos es efectuando determinaciones continuas de la gravedad sobre un punto o registrando permanentemente oscilaciones de ciertos péndulos especialmente diseñados, aunque esta técnica se ha suplantado por la determinación secuencial de posiciones a través de geodesia satelitaria.
- c) Influencia de los movimientos de masas de agua, fundamentalmente por variaciones que pueden afectar nivelaciones y aún determinaciones astronómicas.
- d) Determinaciones de movimientos corticales en relación con los estudios de la tectónica de placas, deriva de los continentes y otros movimientos de la corteza terrestre. Uno de las principales herramientas en este sentido es la reiteración de mediciones, por ejemplo la remediación de líneas de nivelación desde puntos más estables hacia otros menos estables. En la actualidad el estudio de estos fenómenos está fortalecido por las técnicas de geodesia satelitaria y la interferometría de base muy larga (VLBI) que describiremos a continuación. Cabe aclarar que los satélites artificiales, además de proveer la tecnología que analizaremos en el capítulo siguientes, han permitido otras determinaciones como la distanciometría laser a satélites (SLR = Satellite Laser Ranging) y la gradiometría gravimétrica que permite estudiar variaciones en el campo de gravedad en el espacio.
- e) Estudio de la influencia de los cambio en el núcleo terrestre. El movimiento del polo, que hemos mencionado en 2.8, se produce por ciertos cambios en la distribución de las masas dentro del núcleo. Es sabido que dentro del núcleo hay una parte líquida y otra sólida, cuyo cambio de posición aumenta y disminuye la amplitud de la poloide o curva que representa la posición del polo instantáneo, el siguiente diagrama da una idea de la variación entre los años 1997 y 2000



donde la separación entre una espira y la contigua es del orden de  $0^{\prime\prime}1$  (un

décimo de segundo sexagesimal). Una vuelta demora aproximadamente 435 días y se denomina PERÍODO DE CHANDLER. Al margen de disminución sistemática del radiovector de la poloide (con respecto a un punto central) debe aclararse que, con posterioridad debe preverse un aumento, también gradual. De una manera muy elemental, esa variación se debe a que cierta masa de mayor densidad dentro del núcleo sufre ciertos movimientos observando cierta perioricidad. Por otra parte, desde 1890 hasta al actualidad, se ha detectado un desplazamiento sistemático hacia el oeste del orden de  $0''5$ .

- f) Singularidades en el nivel medio del mar. Hasta aproximadamente 1970 el estudio del nivel medio del mar se basaba fundamentalmente en los registros de estaciones mareográficas. A Partir de esa época comenzaron a desarrollarse servicios de altimetría radar. Esto significa que satélites muy bien controlados en su posición efectúen mediciones altimétricas entre los mismos y la superficie oceánica, ello ha permitido detectar variaciones de nivel provocadas por las corrientes marinas a lo largo de los corredores donde se producen con mayor intensidad. Además ha permitido detectar la influencia de la topografía del fondo marino y hasta se han llegado a inferir y describir parte de tales morfologías en lugares donde la exploración batimétrica (de medición de profundidad) es escasa.

Antes de ocuparnos de la técnica VLBI vamos a agregar que BRUNS en 1878 afirmó que el objeto de la geodesia física es la determinación de las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre. Este concepto permanece intacto pero desde hace algunos años (1970, 1980) se le fue agregando la necesidad de vigilar los movimientos corticales, especialmente entre placas y aún la deformación de las mismas. Esto ha dado origen a la GEODINÁMICA.

Con respecto a la vigilancia de los movimientos de corteza, las técnicas de mayor aplicación son

GNSS  
SLR  
VLBI

GNSS (Global Navigation Satellite System = Sistema Global de Navegación Satelitaria) comprende a los grupos

GPS (de USA)  
GLONASS (de Rusia)  
GALILEO ( de la UNION EUROPEA)

Serán estudiados en el Capítulo 10.

Si bien su uso más inmediato es posicionar vehículos en movimiento y permitir medir redes geodésicas, su uso sistemático también contribuye a los estudios de movimientos corticales.

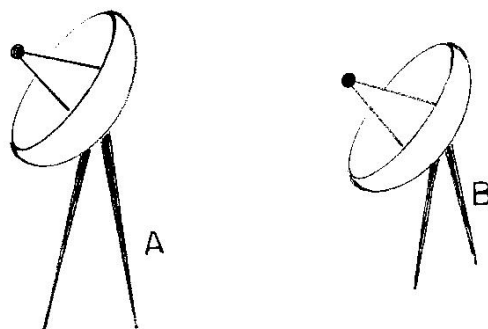
SRL (Satellite Laser Ranging = Distanciometría Laser Satelital) consiste en satélites recubiertos de prismas reflectores a los que se le mide la distancia con distanciómetro laser especialmente diseñados. Hay varios de estos, por lo general están limitados a fines netamente científicos.

VLBI (Very Long Baseline Interferometry = Interferometría sobre líneas de base muy larga) consiste en la operación simultánea de pares de radiotelescopios en los cuales se reciben y luego correlacionan radiaciones extragalácticas. Permiten determinar las componentes  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  del vector que los une y con su variación a lo largo del tiempo

y se pueden obtener datos para determinar las componentes del movimiento del polo y una muy precisa estimación de la velocidad angular en la rotación terrestre.

Por lo general la técnica GNSS cubre vectores de hasta algunos cientos de kilómetros, la SLR es apta para el orden de 1000 Km y la VLBI admite separaciones de varios miles de kilómetros (generalmente 5000 a 10000).

Como ya mencionamos, la técnica VLBI trabaja sobre vectores en cuyos extremos se han montado sendos RADIOTELESCOPIOS (A y B)

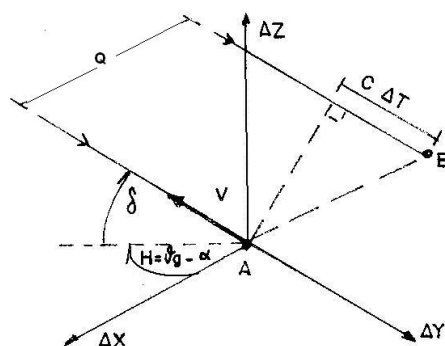


Los cuales se pueden orientar para recibir una determinada fuente de radiación (Q) extragaláctica (cuásares = quasars = quasi stellar radio sources = fuentes radioeléctricas casi estelares) cuya longitud de onda es de algunos centímetros (1 a 10).

Para tener una idea de lo que es un radiotelescopio, recomendamos a los alumnos visitar la estación del IAR (Instituto Argentino de Radio – Astronomía) en el Parque Pereyra – Iraola, entre Villa Elisa y el Cruce de Gutiérrez, próxima al camino General Belgrano. En dos oportunidades alumnos de Agrimensura efectuaron mediciones para ajustar la superficie paraboloidal (ver Trabajos Finales) de esos equipos. (En realidad reciben ondas del orden de  $\lambda \sim 30$  cm para ciertos estudios astrofísicos)

Para VLBI se necesitan superficies reflectores de mayor tamaño. La esencia consiste en determinar la diferencia de tiempo con lo que llega la radiación a los mismos ( $\Delta T$ ) y la variación de ese retardo  $\frac{d\Delta T}{dt}$ . Ello se consigue mediante correlación entre ambas recepciones y un muy preciso control del tiempo. Se requieren estabilidades de  $1 \times 10^{-15}$ .

Para plantear las ecuaciones que se relacionan con este tipo de determinación vamos a considerar una terna de ejes con origen en una de la estaciones (A) paralela a los ejes fundamentales (x, y, z)



A partir de A vamos a considerar un vector  $v$ , de módulo unitario, dirigido hacia la fuente Q con ángulo  $\delta$  = declinación con respecto al plano  $\Delta X, \Delta Y$ , que a su vez es paralelo al ecuador y cuya proyección sobre el mismo plano forma con el plano  $\Delta X, \Delta Z$  (paralelo al meridiano origen del tiempo) un ángulo  $H$  = ángulo horario, cuya relación con el tiempo sidéreo universal ( $\theta_g$ ) y la ascensión recta de la fuente  $\alpha$  es  $H = \theta_g - \alpha$  (reparar conceptos de astronomía, Cap. 2). Ese vector responde a la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \cos\delta \cos H \bar{i} - \cos\delta \sin H \bar{j} + \sin\delta \bar{k}$$

Asimismo vamos a considerar el vector AB:

$$\overline{AB} = \Delta X \bar{i} + \Delta Y \bar{j} + \Delta Z \bar{k}$$

El producto escalar entre ambos da:

$$\vec{v} \cdot \overline{AB} = \cos\delta \cos H \Delta X - \sin\delta \sin H \Delta Y + \sin\delta \Delta Z$$

Pero, por definición de producto escalar, debe valer:

$$1 \times AB \cos(\vec{v} \cdot \overline{AB}) = AB \cdot \left( -\frac{C \cdot \Delta T}{AB} \right) = -C \Delta T$$

De donde surge la ecuación:

$$\Delta T = \frac{1}{C} (-\Delta X \cos\delta \cos H + \Delta Y \sin\delta \sin H - \Delta Z \sin\delta)$$

Derivando con respecto a  $t$  y teniendo en cuenta que  $\frac{dH}{dt} = \omega$  (velocidad angular terrestre) surge la segunda ecuación:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{\omega \cos\delta}{C} (\Delta X \sin H + \Delta Y \cos H)$$

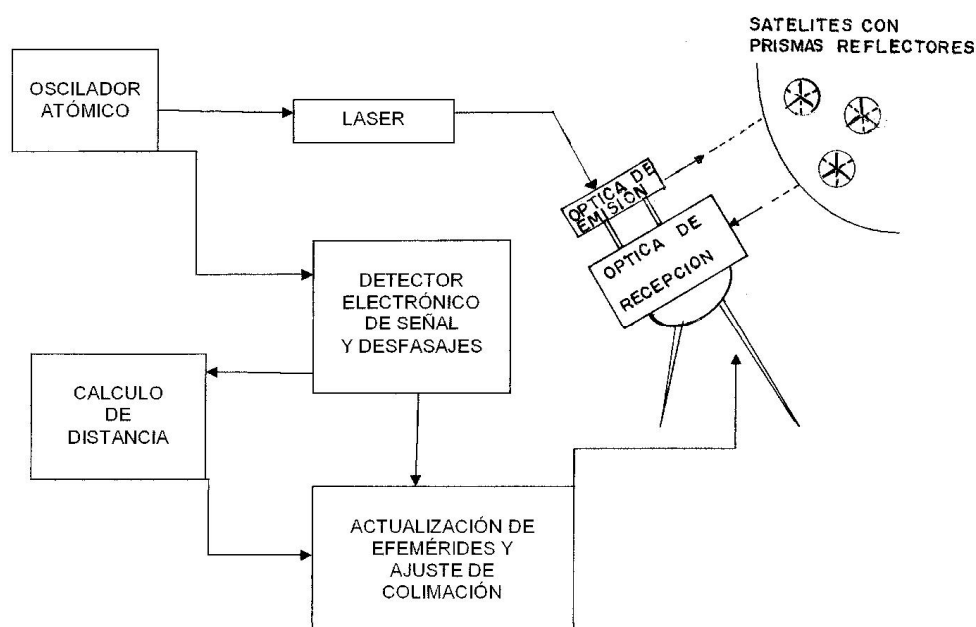
Sometiendo a ajuste ambos tipos de ecuaciones se pueden obtener  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  y  $\omega$ . Las variaciones  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  a lo largo del tiempo permiten ir determinando el movimiento del polo.

Desde el punto de vista geodésico resulta muy importante contar con las

componentes de vectores largos para relacionar estaciones distantes, generalmente unidas con otras a través de varios vectores GNSS y SLR. Nótese que la técnica VLBI es sensiblemente independiente del campo de gravedad, propiedad que no tienen GNSS y SLR.

Las observaciones mediante SLR comenzaron en 1964 a través de varios proyectos especialmente de Estados Unidos de América (USA), Francia y Japón. A partir de 1990 hubo importantes aportes de Alemania.

En general los dispositivos cuentan con un esquema como el siguiente:



Por supuesto que el trabajo sistemático con varias estaciones que interactúan es fundamental para intervenir en el establecimiento de las efemérides (estimación de las posiciones del satélite); las mismas son necesarias predecirlas en tiempo real para la operación, pero luego el cálculo de valores interpolados (no extrapolados como la predicción) a través de las distancias bien corregidas, permite resolver tanto las posiciones de los satélites como las coordenadas de las estaciones y sus variaciones (principal objetivo de la geodinámica).

Aunque no vamos a detallar sobre la **ALTIMETRÍA RADAR**, que ya hemos mencionado en f, debe destacarse que los satélites altimétricos son posicionados a través de distancias SLR.

Al principio de este apartado (9.7) hemos mencionado algo de la gradiometría gravimétrica. Es una técnica muy reciente, prácticamente desarrollada a partir del comienzo del siglo XXI. Se lleva a cabo a través de dos técnicas SGG y SST, la primera (SGG = Satellite Gravity Gradiometry) se miden variaciones de aceleración dentro de un satélite cuya posición se controla mediante GNSS, la segunda (SST = Satellite to satellite tracking) requiere el control entre pares de satélites, en los cuales además del control de posiciones individuales a través de GNSS, se hace una cuidadosa determinación de la distancia entre los mismos, más el análisis de las mediciones de aceleración dentro de cada uno de ellos.

Aunque estos temas exceden los alcances de nuestro curso, diremos que en los mismos entra el gradiente de  $g$ , que es el gradiente del potencial ( $W$ ). Es un tensor, también llamado TENSOR DE EÖTVÖS cuyas componentes se expresan en una matriz

$$\begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}$$

## **9.8 MARCOS DE REFERENCIA GENERALES, REGIONALES Y NACIONALES.**

Hasta mediados del siglo XX los marcos geodésicos eran predominantemente nacionales. A partir de 1960 se comenzaron a desarrollar esfuerzos para lograr estructuras geodésicas mundiales, el primer logro fue el proyecto PAGEOS, (PActive GEOdectic Satellite) que estableció una red con puntos cada 3000 a 4000 Km que cubrió el planeta, la Argentina contó con una de esas estaciones en Villa Dolores (Córdoba), las observaciones se llevaron a cabo entre 1966 y 1970. Siete lados fueron tomados como base, medidos mediante cadenas de triangulación tradicional, reforzadas con algunas mediciones mediante distanciómetros. Las mediciones consistieron en fotografiar satélites y medir las paralajes con respecto al fondo de estrellas, fue la primera técnica de aplicación geodésica de los satélites, se la denominó TRIANGULACIÓN ESTELAR, consistía en determinar los ángulos internos de los grandes triángulos formados.

Una vez concluido el proyecto, la Tierra quedó, por primera vez, rodeada por un poliedro geodésico medido.

La puesta en servicio de los satélites Doppler y luego Globales (GNSS) obligó a la adopción de sistemas geocéntricos (ver 9.4). Los Estados Unidos (USA) adoptaron los Sistemas Geodésicos Mundiales (WGS = World Geodetic System), de los cuales en la Argentina se llegaron a usar versiones WGS 72 y WGS 84. Esos sistemas permitieron usar los satélites, las efemérides se relacionaban con un marco propio dentro del cual estaban las redes operacionales, pero poco a poco se fueron logrando redes más densas que constituían un “esqueleto” geodésico amplio. Desde alrededor de 1990 se fue consolidando el Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF = International Terrestrial Reference Frame) a través de varias versiones, cada vez más coherentes. El marco argentino vigente POSGAR 2007 está referido al ITRF 2005.

A partir de 1996 se encaró un marco regional denominado SIRGAS cuya denominación (acrónimo) es principio significa **S**istema de **R**referencia **G**eocéntrico de **A**mérica del **S**ur, luego se asociaron países de América del Norte y pasó a ser el **S**istema de **R**referencia **G**eocéntrico de la **A**mérica**S**. Durante dos campañas se hicieron mediciones simultáneas, en varios países americanos, pero en la actualidad ello dejó de ser necesario, gracias al nexo que proveen las numerosas Estaciones Permanentes de GNSS que se fueron instalando.

El marco nacional argentino (POSGAR = Posiciones Geodésicas Argentinas) se midió por primera vez en 1993, de donde surgió el MARCO POSGAR 94, el cual se refirió a WGS 84. En 2007 fue suplantado por el POSGAR 2007, el cual, como ya hemos adelantado, corresponde al ITRF 2005. En el capítulo siguiente daremos más detalles al respecto.

Los marcos más modernos cuentan, además de las coordenadas para una EPOCA DE REFERENCIA, con valores de las TASAS DE VARAICÓN en los puntos

que lo componen (hay quienes las denominan “VELOCIDADES”) las cuales generalmente se expresan en mm/año o en m/año. Esos valores son necesarios en los nuevos cálculos precisos cuando se quiere ampliar o densificar un marco. Para eso es necesario llevar las coordenadas de puntos de referencia que se van a usar a la época de la medición y una vez ajustadas las nuevas coordenadas retrotraerlas a la época de referencia.

Si bien todo esto parece razonable, hay que tener la precaución que los movimientos graduales se hayan mantenido. Podría presentarse el caso de que un movimiento telúrico importante modifique tal continuidad y en ese caso, el marco debería ser sometido a revisión para delimitar los puntos que quedan afectadas. Por supuesto que para esos puntos deberán aplicarse correcciones especiales.

### **9.9 MICROGEODESIA.**

Llamamos microgeodesia a un conjunto de mediciones muy precisas que se efectúan en redes, relativamente pequeñas, con el objeto de apoyar construcciones, montajes o medir deformaciones, para esto último es necesario efectuar mediciones periódicas.

Las deformaciones a medir pueden corresponder a estructuras, generalmente de hormigón, en cuyo caso deben ser muy precisas ya que deben detectarse milímetros y a veces fracciones de milímetros.

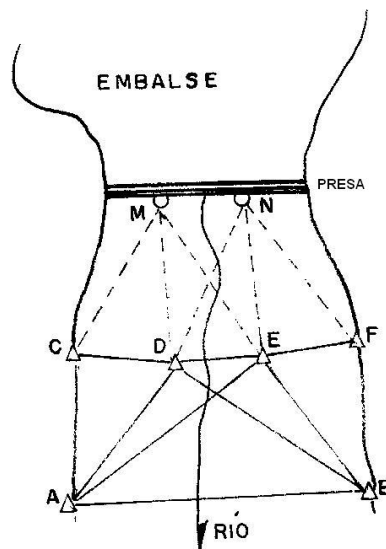
Cuando deben controlarse movimientos de terraplenes, presas de tierra o fallas geológicas la precisión es algo menor (del orden del centímetro) pero por lo general abarcan mayores extensiones.

Los métodos son muy variados, (triangulación, poligonales, intersecciones), por lo general se recurre a sistemas de centración forzosa, en donde los teodolitos, distanciómetros, prismas y pantallas de puntería se montan en las mismas bases y a veces sobre apoyos especiales en pilares o estructuras apropiadas.

Uno de los problemas críticos es la distancia, no siempre alcanza con la que proveen los distanciómetros comunes ( $\pm 0.5$  cm a  $\pm 1$  cm en distancias cortas) y debe recurrirse a cintas o alambres de INVAR o bien a distanciómetros especiales que tienen mayor discriminación.

El uso de los métodos indicados (triangulaciones, poligonales, intersecciones) depende del tipo de obra o fenómenos vigilar. Por ejemplo, una presa hidroeléctrica construida sobre una garganta estrecha por la que pasa un río puede ser analizada a través de triangulación e intersecciones. Los puntos A y B deberían estar emplazados en lugares donde sea donde sea improbable que se muevan cuando se cargue el embalse, los C, D, E, F también deberían ser suficientemente estables pero cuentan la posibilidad de ser verificados con respecto de A y B





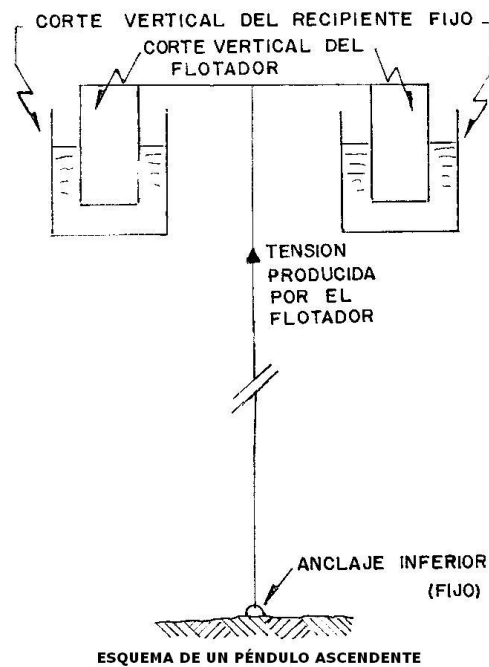
Por otra parte desde CDEF se pueden medir puntos de estructura (como M y N, pero en una cantidad mucho mayor) cuyo cambio de posiciones permitirán medir las deformaciones (cuando se carga el embalse y luego periódicamente).

Cuando entran distancias mayores, por ejemplo la presa de Salto Grande sobre el Uruguay, que supera los 2 Km y el río sigue considerablemente ancho, las visuales de varios kilómetros la restarían exactitud. En ese caso se puede recurrir a una poligonal sobre el coronamiento de la misma obra.

Para las verificaciones alimétricas se efectúan nivelaciones de alta precisión, además de miras se pueden utilizar regletas milimétricas empotradas en la estructura.

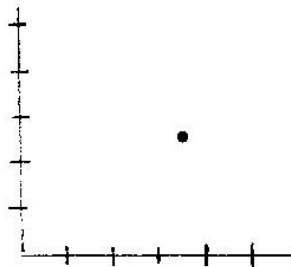
Para verificar inclinaciones, además del cambio de desniveles se pueden utilizar inclinómetros (o clinómetros) que operan a través de lecturas de niveles toroidales (de burbuja). También se pueden utilizar plomadas ópticas más precisas que las de los teodolitos (que están preparadas para distancias no mucho mayores de 1 m o 1.50 m), en general son más exactas las ascendentes. Sin embargo, para verticales de 20 a 40 metros son considerablemente más confiables las plomadas físicas o péndulos.

Los péndulos descendentes se amortiguan para evitar oscilaciones mediante paletas sumergidas en líquidos (generalmente aceite) y los ascendentes, que consisten en un flotador en la parte superior, se amortiguan con el mismo sistema de flotación.

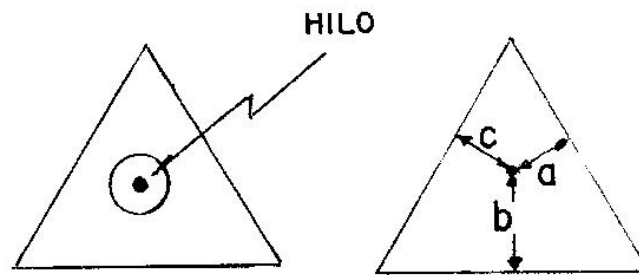


Cabe aclarar que, en el esquema anterior, debe interpretarse que tanto el recipiente como el flotador son circulares y que el flotador debe entrar holgadamente dentro del recipiente.

La detección de movimiento en la parte opuesta al anclaje del hilo (cable o alambre) se efectúa mediante un coordinómetro en el que se miden las coordenadas del hilo en un sistema solidario a la estructura, de esa manera

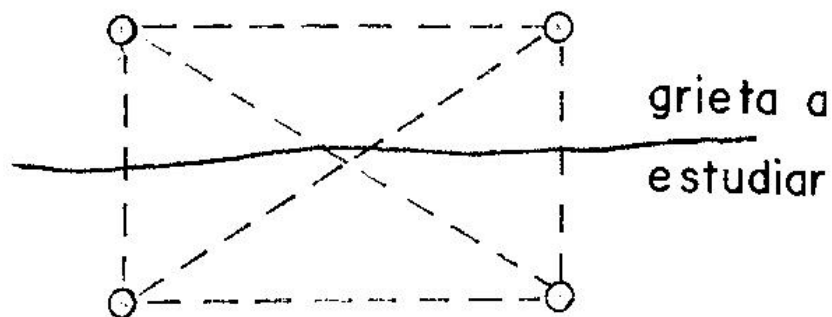


se puede medir el desplazamiento de la estructura con respecto a la vertical del punto de anclaje. La ex empresa del Estado AGUA Y ENERGÍA ELÉCTRICA desarrolló un ingenioso dispositivo donde se hace pasar el hilo por un orificio amplio dentro de un triángulo equilátero. Cuenta



además con un pequeño anteojo que se puede desplazar lateralmente sobre una escala graduada que se coloca perpendicular a cada una de las caras del triángulo y permita medir las tres distancias (a.b.c) de donde se puede deducir las componentes de la posición del hilo.

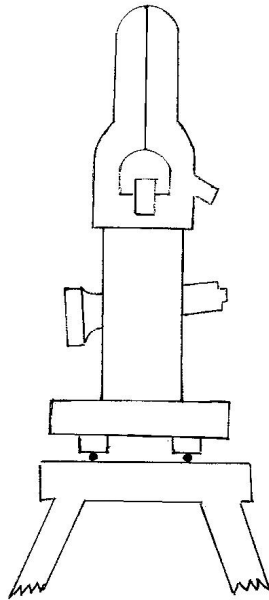
Si las deformaciones se encuentran en un mismo nivel se suelen usar extensímetros. A veces se puede improvisar un simple dispositivo empotrando 4 pernos y donde mediante de un calibre se miden las distancias que corresponden a los 6 lados



Para el caso de la figura dos lados permanecerán inalterables y con los otros cuatro se pueden efectuar determinaciones del movimiento entre los bloques separados por una grieta. Por supuesto, el calibre sirve para distancias muy cortas (20 cm) y deben medirse y promediarse las distancias internas y externas entre pernos, tiene la ventaja de que pueden apreciarse décimos y hasta centésimos de milímetros, para distancias algo mayores (1 m) se podrían utilizar reglas milimetradas donde es probable estimar décimas de milímetros pero es necesario tomar la temperatura para considerar la dilatación.

Para materializar planos y direcciones se pueden utilizar colimadores laser, hay de varios tipos de acuerdo a las distancias y necesidades.

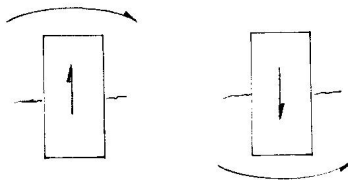
En los trabajos en túneles, uno de los problemas críticos es bajar las orientaciones, generalmente hacerlo a través de dos verticales (generalmente muy próximas) produce errores inaceptables, lo más indicado es utilizar teodolitos giróscopos, que permiten determinar acimutes dentro de  $\pm 10''$  sin que los afecte la profundidad del túnel.



Un teodolito giroscópico es un teodolito (generalmente de 1" tipo Wild T2 o Zeiss Th2) en cuya parte superior se monta un dispositivo que consiste en un volante que está asociado a un motor eléctrico que lo puede hacer girar a un valor muy alto de revoluciones por minuto, ese dispositivo está suspendido para que pueda girar libremente perpendicularmente a su eje de rotación.

Si bien son aplicables las reglas del giróscopo, es fácilmente comprensible, recordando la rueda de una bicicleta, donde el cambio de inclinación que le provoca la rotación terrestre trata de girarlo sobre un eje coincidente con el citado hilo.

Si miramos la parte superior del volante girando, como indica la figura de la izquierda, hacia el norte



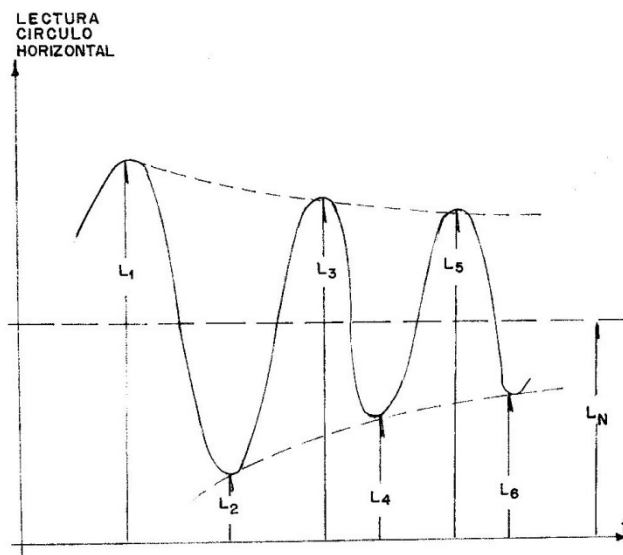
el momento tenderá a hacerlo girar en sentido horario, en cambio si esa misma parte superior se presentara hacia el sur (figura, a la derecha) el momento se ejercería en sentido contrario. Sin llegar a esos extremos, si el eje estuviera orientado próximo a la dirección norte – sur



se produciría una oscilación, cuyo eje de simetría sería precisamente la dirección del eje coincidiendo con la línea indicada (N-S).

Aprovechando ese principio, el teodolito se coloca aproximadamente con su eje

de colimación sobre el meridiano, se hace girar el dispositivo y se lo libera. Mediante un anteojo que permite seguir el movimiento del giróscopo, girando el teodolito, se pueden leer las lecturas del círculo horizontal que corresponden a las elongaciones (máxima y mínima)



La Lectura correspondiente a la media de este movimiento armónico amortiguado se puede obtener a través de los promedios llamados Medias de Schuhler =  $M_i$

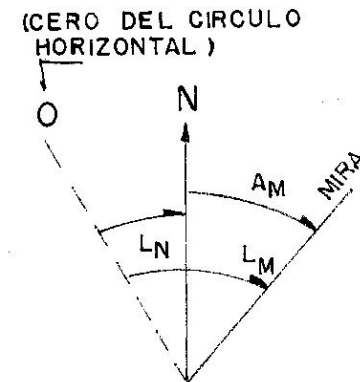
$$M_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1 + L_3}{2} + L_2 \right)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{L_2 + L_4}{2} + L_3 \right)$$

Entonces con varios de esos valores se puede llegar al promedio

$$L_N = \bar{M}$$

Si todo fuese perfecto, esa lectura promedio  $L_M$  correspondería a la línea Norte – Sur, pero puede haber un leve desajuste entre el eje de colimación y la indicación del giróscopo que corresponde a su eje, entonces debe preverse una corrección  $C$



Luego el acimut hacia una mira  $A_M$  estará dado por

$$A_M = L_M - L_N + C$$

La determinación de la corrección  $C$  se denomina CALIBRACIÓN del giroteodolito y conviene hacerla antes y después de cada campaña de determinaciones.

Esa calibración se efectúa determinando el acimut de una dirección en la cual se conoce el acimut  $A_M$ , entonces

$$C = A_M - (L_M - L_N)$$

Por supuesto, cada vez que el equipo haya sufrido un transporte o recibido perturbaciones importantes, hay que reiterar la calibración y solo deben aceptarse determinaciones cuando las calibraciones anterior y posterior dan valores aceptablemente concordantes.

### **9.10 AVANCES RECIENTES.**

Hay una serie de proyectos o misiones relativamente recientes (posteriores a 1990) cuya breve descripción muestra que la tendencia es perfeccionar el conocimiento del campo de gravedad terrestre y como complemento de esto, el nivel del mar

#### **PROYECTO TOPEX – POSEIDON:**

Se lleva a cabo desde 1992 a través de un convenio entre la NASA (National Aeronautics and Space Administration – USA) y el CNES (Centre National d'Etudes Spatiales – Francia) donde se efectúa un estudio preciso de la órbita a través de GPS, tiene capacidad de rastreo Satélite – Satélite y fundamentalmente cuenta con altímetro – radar para determinar el nivel del mar.

### PROYECTO CHAMP:

Desarrollado por el Centro de Geoinvestigaciones de Potsdam (Alemania) (GFZ = Geoforschungszentrum) a partir del año 2000 CHAMP surge de CHAlenging Minisatellite Payload.

Tiene como objetivos iniciales describir el campo de gravedad global, incluyendo sus variaciones por redistribución oceánica y cambios del nivel del mar por modificación de las masas de hielo polares.

También incluye el estudio de la interacción del campo magnético con la determinación de la influencia del núcleo y el perfilado de la ionósfera y tropósfera sobre todo con datos de la humedad, temperatura, contenido electrónico, etc.

Se trata satélites con órbitas casi polares (inclinaciones con respecto al ecuador del orden de 87°), altura del orden de 450 Km sobre la superficie terrestre. Cuenta con receptores GPS de doble frecuencia, acelerómetros en tres ejes, reflectores LASER para la técnica SLR, magnetómetro, elementos para registrar la ionización, temperatura y parámetros del campo eléctrico. Operan con posibilidad de mediciones de satélite a satélite.

### PROYECTO GRACE:

La denominación proviene de GRAVity recovery and Climate Experiment y se lleva a cabo a través de la U.S. National Aeronautics and Space Administration (NASA) y el Centro para Navegación Aérea y Espacial (DLR = Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt) de Alemania. Los dos satélites se lanzaron en el año 2002. Las alturas son del orden de 500 Km, la separación entre satélites ronda los 200 Km y cuenta con medios para adecuar las órbitas cada dos meses. También cuenta con acelerómetros y reflectores para la distancia entre ambos satélites.

### PROYECTO GOCE:

En este caso la denominación obedece a Gravity field and steady – state Ocean Circulation Explorers. Está a cargo de la Agencia Espacial Europea (ESA) Pretende justificar las ondulaciones del geoide y contribuir a investigar las diferencias encontradas. Fue lanzado en el año 2006, cuenta con gradiómetros en tres ejes, receptores GPS de doble frecuencia, reflectores para SLR, sensores magnéticos, etc.

### PROYECTO PRARE:

Es una misión alemana (PRARE= Precision RAnge and Rate Experiment) opera con varios satélites desde aproximadamente 1992, utilizada también estaciones terrestres.

La órbitas de este satélite son relativamente bajas, se denominan LEO (Low Earth Orbit).

### PROYECTO SAPOS:

Es un seguimiento intensivo de satélites GNSS desde alrededor de 200 estaciones permanentes en Alemania (SAPOS = SatellitenPOSITIONierungsdienst der deutschen Landesvermessung = Tarea de Posición Satelitaria de la Agrimensura Alemana). Con esos resultados se perfeccionan las posiciones geodésicas de las estaciones y se estudian detenidamente las perturbaciones orbitales de los satélites.

### OTROS:

Hay, también, algunos proyectos con fuerte participación argentina:

SAGA (South American Geodynamics Activities)

CAP (Central Andes Project)

GIANT (Geodetic Infrastructure for the ANTartics)

Fundamentalmente consisten en usar estaciones permanentes y algunas temporarias para describir los movimientos entre placas y algunas deformaciones de las mismas.







## 10.1 CONCEPTOS, ORIGEN Y DESARROLLO.

La geodesia Satelitaria es la rama de la Geodesia que trata sobre técnicas de observación y cálculo hacia, desde o entre satélites artificiales, por lo general muy cercanos a la Tierra.

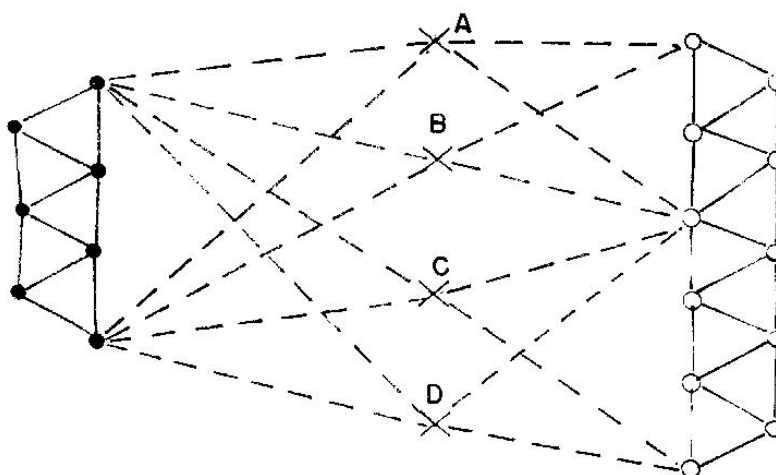
Seeber (ver SEEBER G. – 2003) plantea los siguientes problemas básicos:

1. Determinación de posiciones tridimensionales  $(\varphi, \lambda, h)$  precisas.
2. Determinación del campo de gravedad terrestre (en particular la descripción precisa del geode).
3. Medición y modelado de los fenómenos geodinámicos (movimiento del polo, rotación terrestre y deformaciones de la corteza).

Nosotros, en este capítulo, nos dedicaremos al grupo 1., de los 2 y 3 ya hemos hecho alguna mención en el capítulo 9.

Por razones que hemos aclarado en la Nota Preliminar de estos apuntes, el desarrollo será bastante escueto y el contenido deberá reforzarse con la consideración de novedades, que se producen con bastante intensidad. Hay detalles que modifican constantemente las posibilidades.

Si bien los satélites artificiales comenzaron a lanzarse en 1957, la geodesia ya había avanzado a desarrollar técnicas para salvar las limitaciones de la INTERVISIBILIDAD. Mediante aviones se lanzaron paracaídas con bengalas, entonces desde puntos de dos redes geodésicas no conectadas se podían determinar, por intersección la posición de puntos como A, B, ..., D y luego calcular la posible transformación de puntos de un marco al sistema de coordenadas del otro.



Otra técnica que se usó fue la de medir distancias desde el avión hacia pares de puntos alejados, registrando simultáneamente la altura, así se detectaba la distancia entre los puntos como la mínima de las sumas desde el avión, corrigiendo además por altura. Esta técnica se utilizó por lo general para efectuar trilateraciones sobre regiones carentes de apoyo y uno de los equipos más empleados fue el denominado SHORAN.

Si bien pudieron salvarse algunos cientos de kilómetros, para el primer procedimiento mencionado seguía siendo poca la altura. Väisälä durante la década de 1940 desarrolló un procedimiento que, en principio, utilizaba fotografías de la luna sobre el fondo de estrellas y de la obtención de las diferencias (por paralaje) podía determinar ángulos de triángulos muy extensos y desarrollar una “triangulación estelar” (Astronomical Method of Triangulation). Lamentablemente la luna resultaba muy lejana, pero con el advenimiento de los satélites artificiales pasó a ser el primer método de geodesia satelital aplicable.

Personalmente recuerdo haber escuchado una conferencia del General Laclavère, Director del Instituto Geográfico Nacional (IGN) de Francia, alrededor de 1967, en la cual nos maravilló con la forma en que habían efectuado el apoyo del desierto de Sahara con esta técnica. (Ver, además, proyecto PAGEOS al principio de 9.8)

Con el tiempo, los requerimientos de la navegación y aeronavegación, llevaron al desarrollo de los sistemas de posicionamiento, desde antes de la década de 1970 se pusieron en servicio los métodos DOPPLER (NNSS o TRANSIT por parte de USA y TSIKADA por parte de la Unión Soviética) y a partir de la década de 1980 comenzaron a aplicarse los sistemas GLOBALES (GPS de USA, GLONASS por Rusia y GALILEO – aún en desarrollo- por parte de la Unión Europea). Estos medios, especialmente los últimos (globales), serán el principal contenido de este capítulo. El aprovechamiento geodésico surgió en forma simultánea, pero debe quedar en claro que la justificación de la invención y desarrollo estuvo impulsada por lo indicado anteriormente (navegación).

Paralelamente se fueron desarrollando las técnicas SLR, altimetría satelitaria y gradiometría, gravimétrica; de estas ramas, de aprovechamiento científico, en estos apuntes nos vamos a limitar a lo expuesto en forma resumida en el Capítulo 9.

## **10.2 TEMAS BÁSICOS PRELIMINARES**

Debemos aclarar que hay una serie de fenómenos y requerimientos de los cuales no nos ocuparemos con demasiado detalle pero es necesario que, al menos se conozcan ciertos aspectos íntimamente relacionados a nuestro tema específico que es el posicionamiento. Esta palabra puede ser que no sea la suficientemente castiza, pero se usa y deriva del vocablo inglés positioning.

Uno de los temas es la tecnología espacial que abarca la forma con la que se lanzan los satélites para ponerlos en órbita, por lo general esto se hace con trasbordadores espaciales, especie de vehículos que permiten lanzarlos próximos a las órbitas preestablecidas en el lugar previsto y a la velocidad adecuada. Además incluye ciertos medios de propulsión en los mismos satélites para poder corregir su trayectoria, cuenta con la generación de energía eléctrica para alimentar el equipamiento (generalmente aprovechando la energía solar a través de procesos fotoeléctricos) y varios dispositivos más.

Otro tema es el rastreo, es decir la determinación de la trayectoria para poder determinar la posición precisa del satélite, esto se logra mediante estaciones que observan las señales que transmiten los mismos y efectúan un cálculo coordinado de los resultados de esas recepciones. Generalmente hay una red operacional que va obteniendo las efemérides con cierta antelación, las cuales son transmitidas por el satélite en su mensaje, pero además hay una serie de estaciones más abundantes

que permiten con posterioridad brindar efemérides precisas (es decir interpoladas y no extrapoladas como las anteriores)

También es necesario obtener datos de la refracción, es decir, tomar en cuenta los cambios de velocidad que va tomando la propagación de las señales a medida que van atravesando la atmósfera. Se la divide en ionosférica y troposférica.

La refracción ionosférica se produce en la capa exterior de la atmósfera (la ionósfera) y está afectada por el contenido electrónico de dicha región, afecta con mayor irregularidad las mediciones que se efectúan cerca de la salida y puesta del sol, pero, fuera de ese problema local, hay regiones de mayor influencia, una próxima al ecuador y dos próximas a los casquetes polares. La imposibilidad de poder contar con datos para efectuar la corrección de dicho efecto se subsana aprovechando que el mismo es función de la frecuencia de las ondas portadoras, básicamente la modificación del índice de refracción es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Esta propiedad permite neutralizar en gran medida el problema efectuando mediciones en dos frecuencias; para los satélites doppler se usaron frecuencias del orden de 150 y 400 MHz y para los globales se emplean valores de

$$L_1 \sim 1570\text{MHz} (\lambda \sim 19 \text{ cm})$$

$$L_2 \sim 1230\text{MHz} (\lambda \sim 24 \text{ cm})$$

Se está previendo incorporar en el futuro, especialmente en el sistema GALILEO (Unión Europea) y en el GPS modernizado, una tercera

$$L_3 \sim 1180\text{MHz} (\lambda \sim 25 \text{ cm})$$

La refracción troposférica, en cambio, se produce cuando la propagación se efectúa a través de las capa inferiores de la atmósfera, donde actúan fundamentalmente la presión la temperatura y la humedad del aire. Esta parte se puede modelar y mejorar con esos datos físicos, de hecho se ha avanzado bastante al respecto. Además de aplicar los resultados de los mejores modelos, para neutralizar su efecto, especialmente en las determinaciones de latitud y longitud, es importante esperar una nueva distribución de los satélites observados en cada sesión y buscar una buena geometría de la red para equilibrar la influencia.

Independientemente de lo mencionado, es necesario conocer algunos elementos de los parámetros orbitales.

El aspecto fundamental es el denominado problema de los dos cuerpos que se refiere al caso de un cuerpo que se pone de orbita alrededor de otro, generalmente de una masa mucho mayor.

Esa puesta en órbita se consigue cuando la aceleración centrípeta queda provista por la atracción newtoniana.

J. Kepler (1571 – 1630), a partir de la observación del movimiento de los planetas alrededor del sol, estableció tres leyes o principios:

- 1) La órbita del cuerpo que gira es una elipse, donde el cuerpo alrededor del cual se mueve tiene su centro de masa en uno de los focos.
- 2) El radiovector (foco – cuerpo que orbita) barre áreas iguales en tiempos iguales.

- 3) El cubo del semieje mayor de la elipse es proporcional al cuadrado del tiempo que ocupa en describir una revolución.

El mismo I. Newton (1643 – 1727) en su obra fundamental “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” (Filosofía Matemática de los Fenómenos Naturales) reconoce en la “ley de gravitación universal” que la atracción de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  es:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia que las separa, que la misma surgió de las leyes o principios enunciados por Kepler.

Esto es muy sencillo de verificar para el caso de una órbita circular de radio A (que podría extenderse al semieje mayor de la elipse orbital)

La atracción por unidad de masa (del cuerpo que gira) si M es la masa del cuerpo alrededor del cual gira debería ser:

$$G \cdot \frac{M}{A^2}$$

Y la aceleración centrípeta si n es la velocidad angular vale  $n^2 \cdot A$  igualando ambos surge

$$n^2 \cdot A = G \cdot \frac{M}{A^2}$$

De donde

$$n = \sqrt{\frac{GM}{A^3}}$$

o sea que se puede calcular la velocidad angular a partir de la constante de gravitación universal G, la masa del cuerpo alrededor del cual se produce la órbita y el semieje mayor de la elipse orbital.

La expresión anterior, que surge de la ley de Newton (atracción universal) permite expresar que

$$n^2 \cdot A^3 = cte$$

O, si T es el período de las revoluciones

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A^3 = cte$$

Queda claro que  $\frac{A^3}{T^2}$  se mantiene constante lo cual es equivalente a la 3ª Ley de Kepler que ya hemos mencionado y demuestra que el enunciado de Newton surge de los enunciados keplerianos.

Evidentemente, la expresión dada para la velocidad angular n de un satélite alrededor de la Tierra corresponde a una velocidad angular media y debe preverse una serie de perturbaciones.

La mayor se debe a la existencia de la Luna, cuya masa, su proximidad y sus movimientos afectan al caso de los “dos cuerpos” y luego aparecen causas adicionales como la “presión solar” (bombardeo de fotones de la luz solar), las irregularidades del campo de gravedad terrestre, etc.

Para describir una órbita a través de la elipse kepleriana se utilizan algunos elementos que pasamos a detallar.

El apogeo y el perigeo son los puntos en los cuales el satélite está más alejado y cercano respectivamente.

La línea que contienen ambos focos de la elipse, su centro, el apogeo y el perigeo se denomina línea de los ápsides.

El ángulo que forma el plano orbital con el ecuador se denomina inclinación de la órbita.

El punto en el que el satélite pasa del hemisferio sur al hemisferio norte (cortando el ecuador se denomina nodo ascendente y el que corresponde al paso en sentido contrario (norte a sur), nodo descendente.

Para ubicar la elipse con respecto a la terna triaxial (x, y, z) se utiliza, además de la inclinación (i), la ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega$ , el argumento del perigeo  $\omega$  y por supuesto, el tiempo sidéreo  $\theta_g$  en el meridiano de origen (plano x,z)

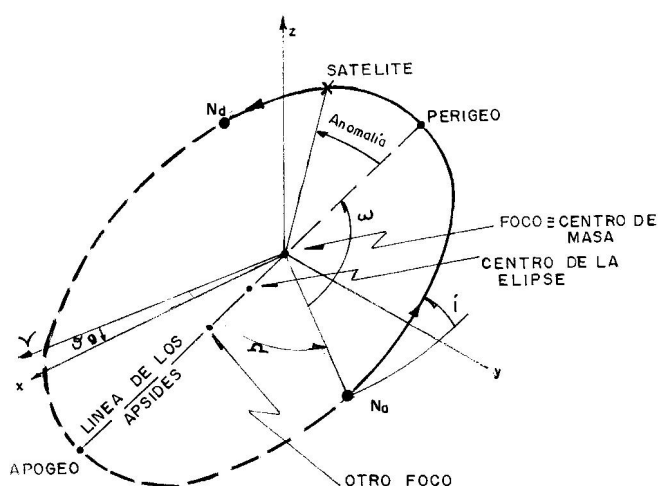
El argumento  $\omega$  es el ángulo entre los radiovectores hacia el nodo ascendente y al perigeo.

En un determinado momento la dirección del radiovector hacia el perigeo forma con el que va dirigido al satélite un ángulo que se denomina anomalía.

El ángulo i se mide desde el ecuador de manera tal que, en el nodo ascendente, se toma hacia el semiplano de la elipse orbital que corresponde al hemisferio norte.

Si A y B fuesen los semiejes de la elipse (mayor y menor, respectivamente), en general se utilizan el semieje mayor (A) y la excentricidad e

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$$



Cabe el comentario que, tradicionalmente, las posiciones en navegación se efectuaron midiendo ángulos de altura a astros conocidos (método similar al descrito en 2.7.6), para resolver el problema del movimiento de la embarcación se medía con sextante haciendo coincidir la imagen del astro con el horizonte. Para poder efectuar la

determinación había que esperar el crepúsculo, es decir, contar con la posibilidad de ver los astros y el horizonte; por supuesto que, además, era necesario que no estuviese nublado.

Lo descrito permite evaluar la tremenda ventaja de tener un medio que permita determinar las posiciones en forma continua y el hecho de utilizar ondas del espectro electromagnético que estén fuera de las luminosas crea la independencia de la luz solar y la nubosidad. Volvemos a repetir que, gracias a la presión económica del transporte por agua y aire, se desarrollaron estos medios, los cuales pudieron luego aplicarse a la geodesia, topografía, hidrografía y a muchas otras actividades, las cuales aumentan día a día.

Volviendo a la elipse kepleriana, la filosofía de emitir las efemérides de los procedimientos norteamericanos (USA) es a través de los parámetros descritos más las perturbaciones, los medios soviéticos y rusos, en cambio, acostumbran dar las coordenadas  $x, y, z$  las velocidades  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  y las aceleraciones  $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ .

Otro tema a considerar es la numeración de los días, lo más frecuente es usar el "día juliano" o más correctamente el "día del año" que comienza con 1 el 1ero de enero y termina con 365 o 366 (años bisiestos) el 31 de diciembre, la siguiente planilla presenta la forma de convertir a esos días las fechas basadas en los meses.

#### **TRANSFORMACION DE MES Y DIA A DIA DEL AÑO**

D/M	E	F	Mr	A	My	Jn	Jl	A	S	O	N	D
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361

28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	60	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

**ZONA SOMBREADA: SUMAR 1 EN LOS AÑOS BISIESTOS.**

### **10.3 MÉTODO DOPPLER**

Recordemos que el efecto Doppler se pone de manifiesto cuando el movimiento afecta la recepción de ciertas ondas (acústicas, electromagnéticas, etc.) variando la frecuencia.

El principio del posicionamiento satelitario doppler se basa en recibir señales del satélite y contar los ciclos de diferencia con respecto a un oscilador de referencia, que posee el receptor, durante intervalos conocidos. Esa “cuenta doppler” por supuesto no es constante, resulta mayor cuando el satélite se acerca y menor cuando se aleja. Ese número de ciclos, como veremos, permite calcular la diferencia de distancias (receptor – satélite) entre el comienzo y fin de cada intervalo.

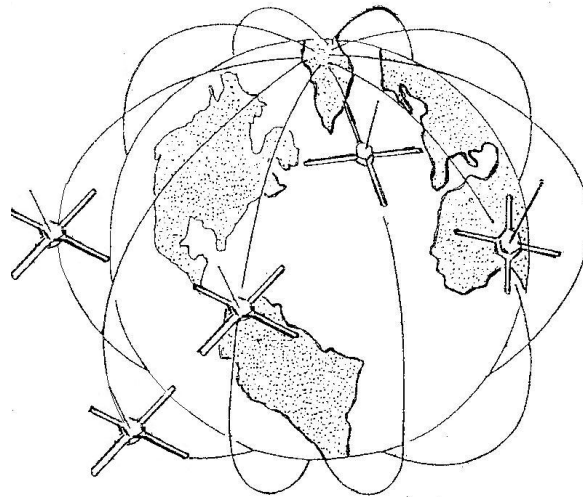
Por otra parte, gracias a los servicios de rastreo operacional, los satélites reciben, almacenan y transmiten datos para que se puedan calcular las posiciones del mismo. Si se estima una posición aproximada  $(\varphi, \lambda, h)$  del receptor y se calculan las sucesivas distancias al satélite, es posible comparar las diferencias de las mismas con las que surgen de las cuentas doppler. Si esa comparación fuese concordante, es por que la posición estimada es correcta, como por lo general eso no será así, es posible plantear ecuaciones cuyas incógnitas son las correcciones  $d\varphi, d\lambda, dh$  a las coordenadas preliminares estimadas del receptor y así obtener las coordenadas correctas.

Los satélites TRANSIT o NNSS (Navy Navigation Satellite System) fueron la versión de USA. Si bien la Unión Soviética desarrolló un sistema similar denominado TSIKADA, nos referiremos al ya indicado, del cual poseemos mayor información y hemos tenido la oportunidad de usarlo en nuestro país, especialmente entre 1970 y 1990.

La constelación estaba constituida por satélites de órbita polar ( $i \sim 90^\circ$ ), si bien estuvo planificado el uso de 12 satélites, por lo general no pasaron de 7 y generalmente se disponía de 5. Las órbitas pasaban a unos 1100 Km de altura sobre la superficie terrestre y los satélites daban una vuelta cada 110 minutos. Cada paso se podía observar desde un lugar alrededor de 10 a 12 minutos sobre el horizonte.

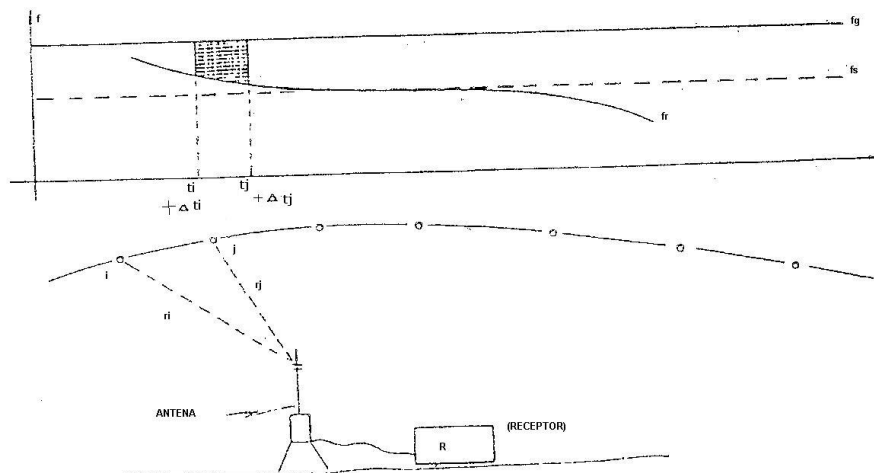
Por lo general se podía disponer de un paso cada 2 horas, por supuesto en latitudes altas esa disponibilidad aumentaba.

La disposición de la constelación era la del siguiente esquema



Para resolver el problema de la refracción ionosférica se utilizaban dos frecuencias, una del orden de 400 MHz y otra de 150 MHz; por simplicidad vamos a considerar sólo lo que ocurre en la primera.

La frecuencia con que emitía el satélite la llamaremos  $f_s$ . es del orden de 399.968 MHz, la del receptor  $f_r$ . del orden de 400.000 MHz y la recibida  $f_r$ . variable por efecto Doppler.



En el receptor, básicamente se contaba el número de ciclos de diferencia entre  $f_g$  y  $f_r$  en el intervalo que media entre la recepción del comienzo del intervalo (tiempo  $t_i$  en la emisión) y el fin del mismo (tiempo  $t_j$  en la emisión), o sea

$$N_{t_j} = \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_j + \Delta t_j} (f_g - f_r) dt$$

Donde  $\Delta t_i$  y  $\Delta t_j$  son los retardos por propagación del satélite al receptor desde  $t_i$  y  $t_j$  respectivamente, admitiendo la propagación en el vacío:

$$\Delta t_i = r_i/c \quad \Delta t_j = r_j/c$$

Siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío



$$N_{ij} = \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_i + \Delta t_j} fg \, dt - \int_{t_i + \Delta t_i}^{t_i + \Delta t_j} fr \, dt$$

La segunda integral la podemos igualar a

$$\int_{t_i}^{t_j} fs \, dt = fs (t_j - t_i)$$

ya que es el mismo número de ciclos el que debe llegar entre  $t_i + \Delta t_i$  y  $t_j + \Delta t_j$  que el que sale durante cada intervalo  $t_i \rightarrow t_j$ , luego:

$$N_{ij} = fg (t_j - t_i) + fg (r_j/c - r_i/c) - fs (t_j - t_i)$$

$$N_{ij} = (fg - fs)(t_j - t_i) + fg/c(r_j - r_i)$$

Vale decir que con la “cuenta Doppler”  $N_{ij}$  es posible determinar la diferencia: de distancias sucesivas  $(r_j - r_i)$ , en este principio se basa la determinación, como habíamos adelantado. Las señales de tiempo (para  $t_j, t_i$ ), se emitían cada 2 minutos, pero se podía subdividir en intervalo utilizando la codificación del mensaje hasta subintervalos del orden de 4,6 segundos, dentro de los cuales se podían efectuar las determinaciones del número de ciclos  $N_{ij}$  y relacionarlos con la diferencia de distancia, planteada en la ecuación anterior.

Con las efemérides de los satélites se podían obtener las coordenadas de los mismos en cada instante  $(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j; \text{etc.})$ , las que admitían calcular las distancias al punto que correspondía a coordenadas provisorias de esa estación:  $(\varphi), (\lambda), (h)$  o  $(x), (y), (z)$ .

$$(r_i - r_j) = \sqrt{[(x) - x_j]^2 + [(y) - y_j]^2 + [(z) - z_j]^2} - \sqrt{[(x) - x_i]^2 + [(y) - y_i]^2 + [(z) - z_i]^2}$$

Si permanentemente la cuanta  $N_{ij}$  medida hubiese resultado igual a la  $(N_{ij})$  calculada, la posición provisorio se podría considerar correcta. Como ello en general no era así, más adelante vamos a plantear ecuaciones con las cuales se podían deducir las correcciones a la posición provisorio para reducir las diferencias de acuerdo a los criterios corrientes en cálculo de compensación.

Las efemérides radiodifundidas, eran procesadas por la red TRANSIT u OPNET (OPERATIONAL NETWORK), e inyectadas a los satélites cada 12 horas.

Esta red TRANSIT consistía en estaciones distribuidas entre HAWAII y el NORESTE de USA, vale decir que cubrían una buena porción de un octante con una orientación próxima a los  $45^\circ$  en acimut, sus recepciones se transmitían a un centro de cómputo ubicado en CALIFORNIA que las elaboraba y luego modificaba el mensaje de los satélites (se llamaba “inyección” a cada provisión de datos).

Las efemérides daban elementos detallados en 2.2 (A, e,  $\varphi, \Omega$ , seni. cosi y variaciones). La velocidad angular media  $n = \sqrt{GM/A^3}$  se la podía calcular y corregir según la 2da ley de Kepler. En estos satélites el valor de n era del orden de  $3.4^\circ/\text{min} \sim 360^\circ/108^m$ .

Se proveían, además, otros datos correctivos para la anomalía, el eje mayor (A), e inclusive, apartamentos fuera de la elipse Kepleriana.

Además se daba el día y la hora de la última inyección, datos de la frecuencia del satélite ( $f_s$ ) y el número del mismo.

Los datos del mensaje venían modulados en fase con la misma onda que se usaba para la cuenta Doppler N, la recepción de los datos siempre sufría alguna perturbación, la depuración se hacía por VOTACION MAYORITARIA, lo cual es posible gracias a que durante cada paso el mensaje se recibe varias veces (una cada dos minutos).

La cuenta Doppler (N) también sufría perturbaciones, la depuración se hacía mediante técnicas de filtrado digital.

La refracción, como dijimos, sufría dos correcciones una, de carácter ionosférico, utilizando las dos cuenta Doppler (N400, N150). La refracción troposférica se corregía aplicando un modelo para atmósfera estándar en función de las coordenadas ( $\varphi; \lambda$ ) y época del año para los procesos más elementales y con datos regionales y ciertas calibraciones especiales para los procesos más elaborados, uno de los modelos más usados fue el de Hopfield en el que entra la altura  $h$  como elemento fundamental junto con datos de presión y temperatura (a bulbo seco y húmedo).

El resultado de la aplicación de las correcciones por refracción es el valor de N que corresponda la vacío, o sea que se corrige la cuenta Doppler para que valga la expresión que ya vimos.

$$N_{ij} = (fg - fs) (t_j - t_i) + \frac{fg}{c} (r_j - r_i)$$

Para las coordenadas provisorias y para  $(fg - fs) = \Delta f$  admitidos obtenemos un valor ( $N_{ij}$ ), la ecuación de observación surge de

$$(N_{ij}) + dN = N_{ij} + v$$

Donde  $dN$  la expresamos en función de  $dX$ ,  $dY$ ,  $dZ$  (correcciones a la posición (X), (Y), (Z) de la estación y de  $df$ , corrección a  $\Delta f$ , que se aplica para cada paso.

$N_{ij}$  es la cuanta Doppler reducida al vacío, es decir corregida por refracción y  $v$  es el residuo que debe someterse a mínimos cuadrados.

Diferenciando la expresión  $N_{ij}$  queda:

$$dN = (t_j - t_i) df + \frac{fg}{c} (dr_j - dr_i)$$

$$\begin{aligned} (dr_j - dr_i) &= d \left[ \sqrt{((x) - x_j)^2 + \dots} - \sqrt{((x) - x_i)^2 + \dots} \right] \\ &= \frac{(x) - x_j}{r_j} dx + \frac{(y) - y_j}{r_j} dy + \frac{(z) - z_j}{r_j} dz - \frac{(x) - x_i}{r_i} dx + \frac{(y) - y_i}{r_i} dy + \frac{(z) - z_i}{r_i} dz \end{aligned}$$

O sea que en cada paso se obtiene un conjunto de ecuaciones de observaciones

del tipo:

$$(t_j - t_i) df + a_{ij} dx + b_{ij} dy + c_{ij} dz + [(N_{ij}) - N_{ij}] = v_{ij}$$

$$\text{donde } a_{ij} = \left[ \frac{(x) - x_j}{r_j} - \frac{(x) - x_i}{r_i} \right] \frac{fg}{c}$$

$$\text{donde } b_{ij} = \left[ \frac{(y) - y_j}{r_j} - \frac{(y) - y_i}{r_i} \right] \frac{fg}{c}$$

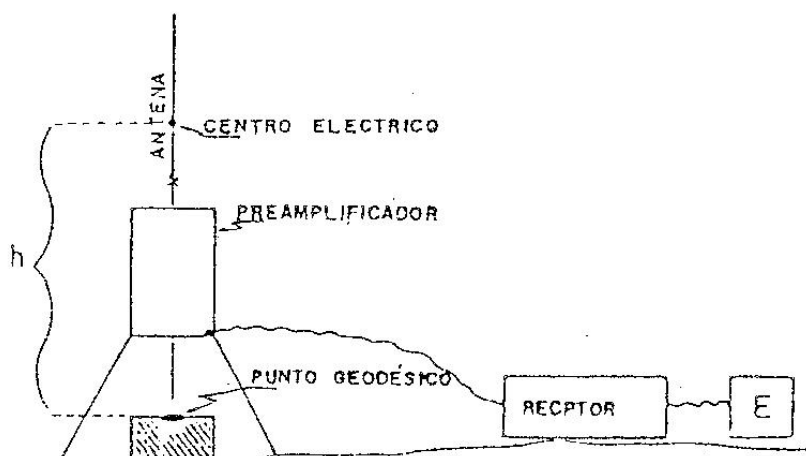
$$\text{donde } c_{ij} = \left[ \frac{(z) - z_j}{r_j} - \frac{(z) - z_i}{r_i} \right] \frac{fg}{c}$$

El término  $df$  mejora el ajuste no sólo corrige el error en frecuencia, tiene además en cuenta otros efectos residuales y hasta puede decirse que toma parcialmente en cuenta el concepto relativista de “efecto doppler transversal”.

La compensación de un paso daba la posición con errores entre 30 y 50 metros.

Una buena compensación de 40 a 50 pasos, cosa que se lograba en 4 o 5 días, llevaba a errores del orden de  $\pm 1$  a  $\pm 2$  m con efemérides precisas. Para conseguir ello tomaba satélites cuyo ángulo de altura máxima estaba entre  $15^\circ$  y  $80^\circ$  y se buscaba un buen balanceo entre pasos al este y oeste, etc., para atenuar los errores residuales de refracción.

En la práctica se instalaba la antena, con un preamplificador sobre el punto que se deseaba posicionar, y en un lugar algo más protegido al receptor propiamente dicho, que por lo general tenía incorporado un microprocesador. A su vez se conectaba una fuente de energía  $E$  (220V o batería de 12V)



Debía tenerse especial cuidado en medir la altura  $h$  entre el centro eléctrico de la antena y el punto, para relacionar la altura sobre el elipsoide ( $h$ ) con la referencia física.

El instrumento se podía usar de varios modos. Antes de emplearlo para recibir, debían introducirse ciertos datos de inicialización tales como el día y hora de comienzo, coordenadas y cota aproximada, límites de altura (por ej.  $15^\circ$  y  $80^\circ$ ), límites de dispersión y constantes del sistema de coordenadas ( $a$ ,  $f$ ,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ )

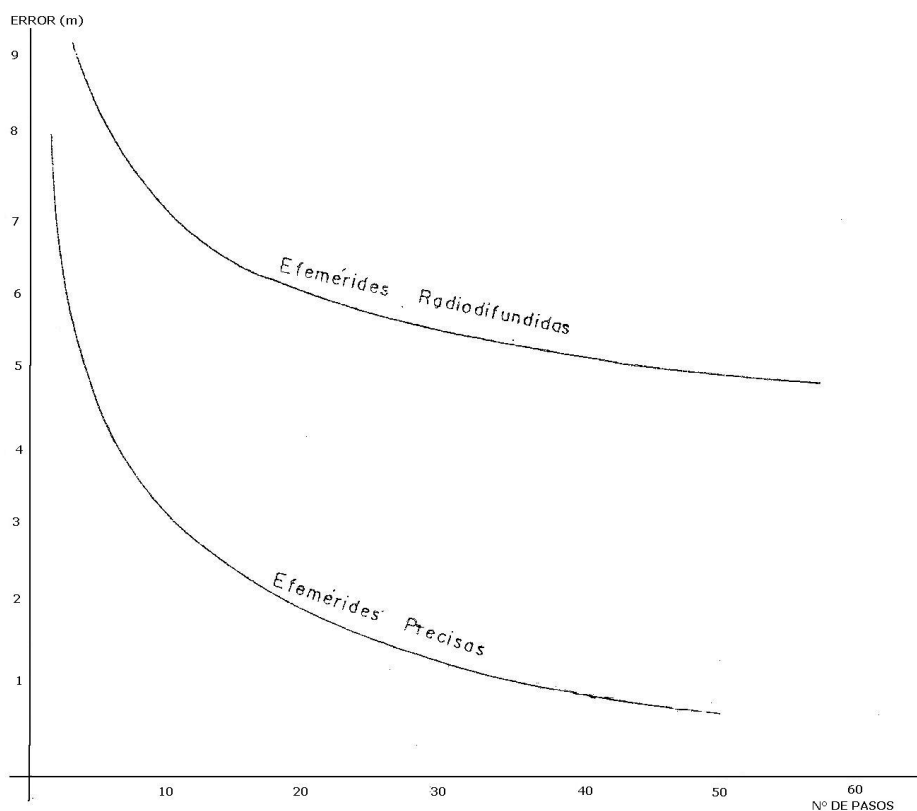
Todo lo descrito corresponde a determinaciones aisladas, pero el sistema servía también para efectuar determinaciones relativas con operaciones simultáneas. Se

acostumbraba llamar a esta técnica TRASLOCACION (traducción no del todo correcta de "translocation" = transferencia de posición), hasta 500 Km la operación se llevaba a cabo obteniendo las diferencias  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta h$ , entre ambas determinaciones puntuales cuidando que sean estrictamente los mismos pasos en cada estación los que se sometían a proceso.

Es razonable pensar que una serie de influencias sistemáticas, tales como las refracciones residuales, los errores de frecuencia, los de predicción orbital, etc., tengan el mismo signo y magnitud en ambas ecuaciones, luego la diferencia de posición es mucho más precisa que las determinaciones aisladas.

Obviamente para desarrollar cualquiera de estas técnicas, que conducían a errores por debajo del metro (en algunos casos por debajo de 0.3m), se necesitaban como mínimo dos instrumentos.

Todos los procesos (puntuales y relativos), se podían hacer con los microprocesadores o bien con computadoras de mayor capacidad. En los primeros había una serie de restricciones que llevaban a soluciones aproximadas.



#### **10.4 POSICIONAMIENTO GLOBAL.**

Se estila denominar de esta forma a los sistemas que cuentan con una constelación con la cual en la mayor parte de la superficie terrestre se cuenta permanentemente con cuatro o más satélites sobre el horizonte, entonces se puede determinar la posición de un receptor y la corrección de su reloj

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \frac{c^2}{n^2} (t_1 - \Delta t)^2$$

•  
•  
•

$$(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = \frac{c^2}{n^2} (t_4 - \Delta t)^2$$

Si  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4$  son las coordenadas de los satélites y  $t_1, \dots, t_4$  las diferencias de tiempo entre el satélite y el receptor, es posible determinar las coordenadas del mismo (x, y, z) y la corrección  $\Delta t$  de su reloj. Evidentemente las incógnitas son 4 (x, y, z,  $\Delta t$ ) y por eso son necesarias, al menos, cuatro ecuaciones, o sea disponer de 4 satélites,

Para el uso en navegación resulta fundamental poder efectuar permanentemente la determinación de la posición del vehículo

- 1°) Para controlar continuamente su trayectoria.
- 2°) Para poder determinar las componentes de su velocidad.

Con los procedimientos Doppler no se satisfacían plenamente ambos requerimientos, frecuentemente quedaban una o dos horas sin poder determinar las posiciones y era necesario contar con medios adicionales para determinar las componentes de la velocidad (sus errores afectaban sensiblemente la exactitud de las posiciones).

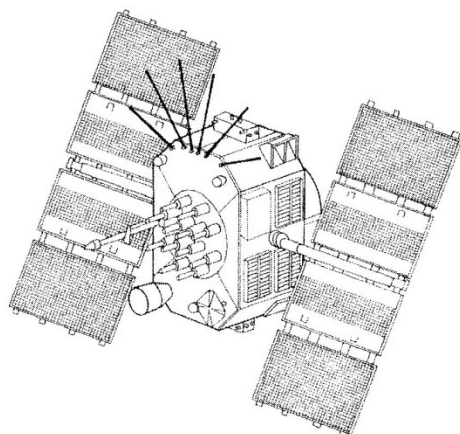
En la actualidad se dispone de tres servicios:

**GPS** (Global Positioning System) también denominado NAVSTAR (NAVigation System with Time and Ranging), o sea Sistema de Navegación con tiempo y distanciometría sostenido por USA.

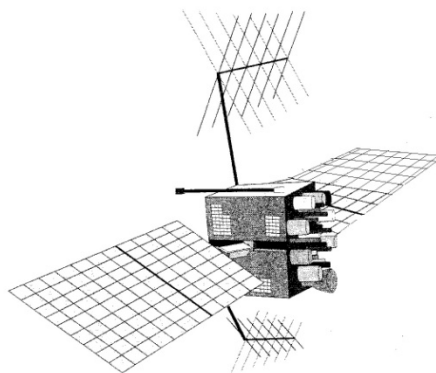
**GLONASS** (GLObal NAVigation Satellite System) o en ruso GLObal'naya Navigatsionaya Sputnikowaya Sistema, sostenido por la Confederación Rusa.

**GALILEO** Sostenido por la Unión Europea a través de la agencia ESA (European Space Agency)

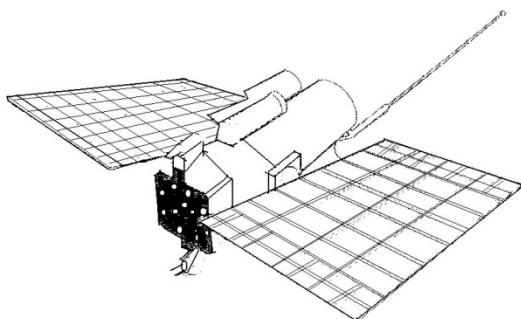
El aspecto de dichos satélites es el que se indica a continuación



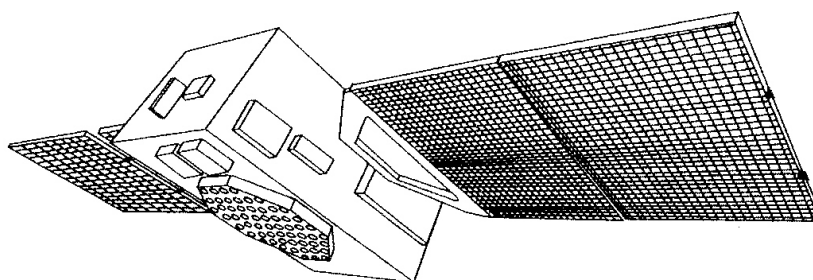
GPS Inicial ( $\sim$  1990) masa  $\sim$  800 Kg



GPS Modernizado ( $\approx 2005$ ) masa  $\approx 1100$  Kg



GLONASS, masa  $\approx 1400$  Kg



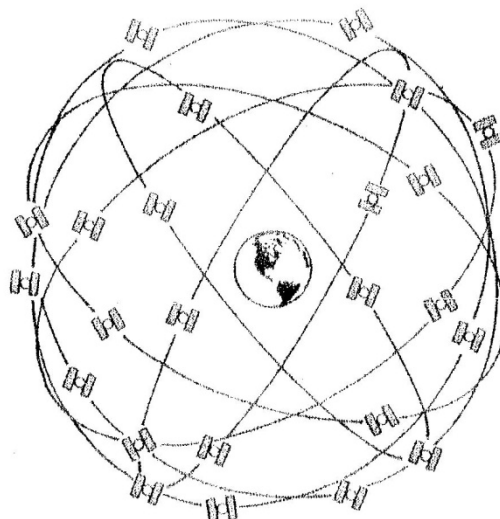
GALILEO, masa  $\approx 600$  Kg

La constelación GPS consta de 24 a 28 satélites distribuidos en 6 planos orbitales con una inclinación  $i \approx 55^\circ$ , pasan a unos 20200 Km sobre la superficie ( $A \approx 26600$  Km) y cumplen una revolución alrededor de la Tierra en 12 horas sidéreas.

Los 6 planos orbitales se denominan A, B, ..., F y cuentan con una separación de  $60^\circ$  en sus ascensiones rectas de sus nodos ascendentes ( $\square$ ), cada uno de esos planos orbitales cuenta con 4 o 5 satélites activos y algunos de repuesto. Las mencionadas ascensiones rectas son del orden de los siguientes valores

Plano Orbital	□
A	326°
B	26°
C	86°
D	146°
E	206°
F	265°

La correspondiente constelación tiene la siguiente disposición aproximada



Se puede apreciar que, con esa densidad de satélites es posible cumplimentar la premisa de poder disponer 4 o más satélites sobre el horizonte en la mayor parte de la superficie terrestre y en forma permanente.

La constelación GLONASS cuenta también con 24 satélites pero están agrupados en 3 planos orbitales con 8 satélites, aproximadamente equidistantes, cada uno. La inclinación es del orden de  $i \approx 65^\circ$  y pasan a unos 19100 Km sobre la superficie, describen una revolución alrededor de la tierra cada 11.25 horas. Frecuentemente se ha detectado una disminución del número de satélites en servicio.

El sistema GALILEO está todavía en desarrollo, prevé contar con 27 satélites en operación y 3 de repuesto dispuestos en 3 planos orbitales con inclinaciones de  $56^\circ$ , los satélites pasan a 23000 Km de altura sobre la superficie terrestre y dan una vuelta cada 14 horas.

Aunque todavía falta que se cumplan ciertos acuerdos formalizados, pero de difícil cumplimiento, está previsto que los tres sistemas se puedan utilizar en forma combinada y se ha convenido en llamar a este servicio mixto GNSS (Global Navigation Satellite System), nótese que esta denominación concuerda con la versión occidental de GLONASS ya mencionada. Si bien hay dificultades, éste será el medio que posiblemente subsista, sin embargo en lo que sigue de este capítulo nos referiremos predominantemente al GPS, por ser la técnica aplicada en nuestro país, especialmente después de 1990.

Un oscilador patrón en cada satélite GPS con frecuencia de 10.23 MHz origina las dos frecuencias portadoras  $L_1$  y  $L_2$ .

$$L_1 \equiv 10.23 \times 154 = 1575.42 \text{ Mhz}$$

$$L_2 \equiv 10.23 \times 120 = 1227.60 \text{ Mhz}$$

Y la  $L_5$ , analogamente, surge de  $10.23 \times 115 = 1176.45$  MHz. Todas entran dentro de las frecuencias ultra altas (UHF que van desde los 300 hasta los 3000 MHz)

Las longitudes de onda  $\left(x = \frac{c}{f}\right)$  son de

$$\frac{299792458 \text{ m/s}}{1575.42 \times 10^6 \text{ 1/s}} \sim 0.1903 \text{ m}$$

$$\frac{299792458 \text{ m/s}}{1227.60 \times 10^6 \text{ 1/s}} \sim 0.2442 \text{ m}$$

De donde surgen los valores aproximados que frecuentemente se mencionan

$$\lambda L_1 \sim 19.0 \text{ cm}$$

$$\lambda L_2 \sim 24.4 \text{ cm}$$

a las que se debe agregar  $\lambda L_5 \sim 25.48 \text{ cm}$

Los receptores más elementales reciben solamente las señales de  $L_1$  y los destinados a operaciones más precisas operan con ambas recepciones.

Para obtener las distancias resulta inapropiada la medición de la fase de la onda portadora ya que subsistiría la ambigüedad de cuántas longitudes de onda deberían adicionarse

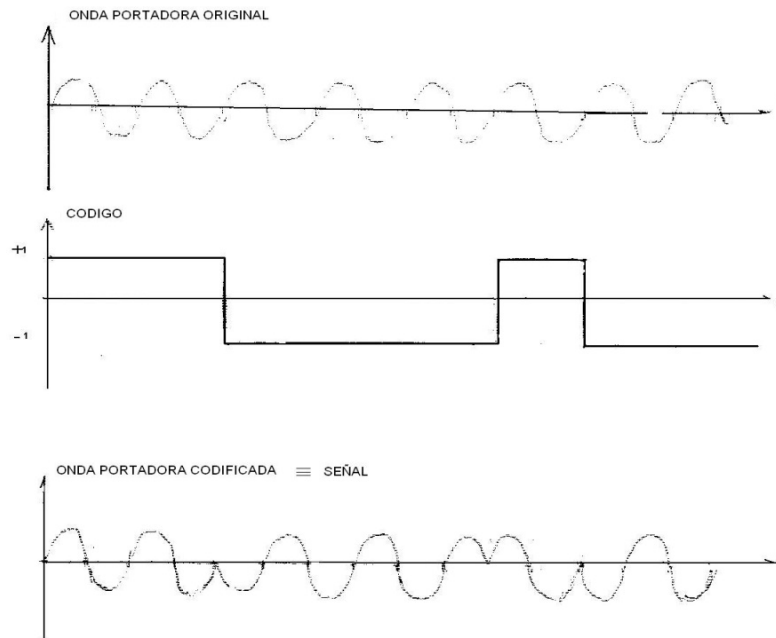
$$R = N\lambda + \Delta\lambda$$

entonces se agrega un CODIGO, señal compuesta de frecuencia considerablemente más baja que la podemos representar como una onda cuadrada que multiplica a la portadora por +1 y -1 alternativamente, vale decir que le mantiene o le invierte la fase.

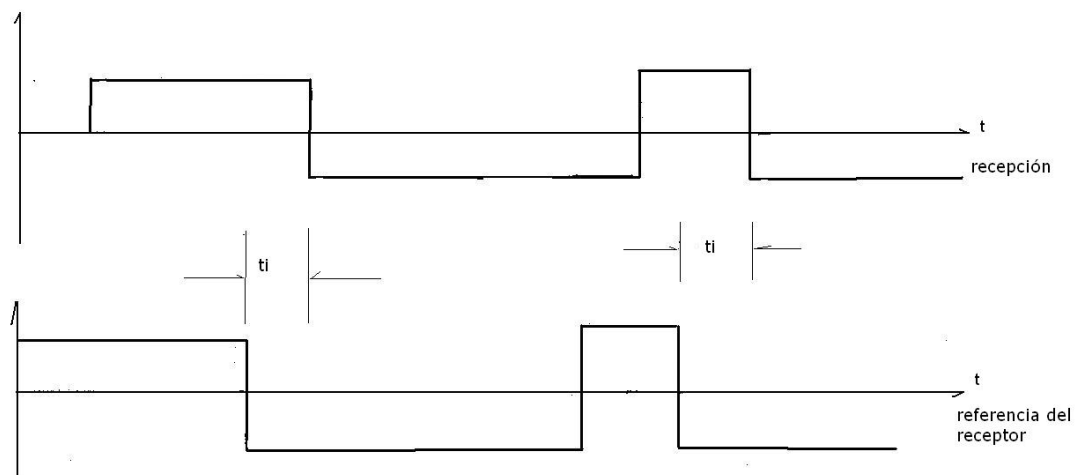
En la bibliografía a ese código se lo denomina PRN (Pseudo Random Noise = Ruido Pseudo Aleatorio) que una sucesión de +1 y -1 distribuidos de manera tal que el receptor lo reconozca y así puede detectar el retardo con respecto a la emisión del satélite y así determinar la PSEUDO DISTANCIA (Pseudo Range) Satélite – Receptor. Podríamos decir que esa pseudo distancia es una distancia obtenida por diferencia de tiempo  $(t_r - t_t)$  sin haber corregido el reloj del receptor.

El siguiente esquema aclara el concepto de codificación mencionado





El receptor recibe la señal, la decodifica (recupera el código) y compara el código recibido y el que conserva el receptor



En realidad, los códigos utilizados son dos C/A (Clear Acquisition = Obtención Clara Coarse Acquisition = obtención grosera) y P (Preciso), el primero está disponible para cualquier usuario y el segundo, en principio, está disponible para “usuarios calificados”, léase para fines militares de USA.

El primero (C/A) equivale a una longitud de onda de 293.1 m con el cual, admitiendo una discriminación de 1/100, permitiría tener una vacilación del orden de  $2.9 \approx 3$  m en la determinación de la pseudodistancia.

El código P, en cambio, equivale a una longitud de onda del 10% de la anterior, por lo cual el error en pseudodistancias sería del orden de 0.3 m; evidentemente, en la

operación de un vehículo o un misil en tiempo real es una ventaja importante.

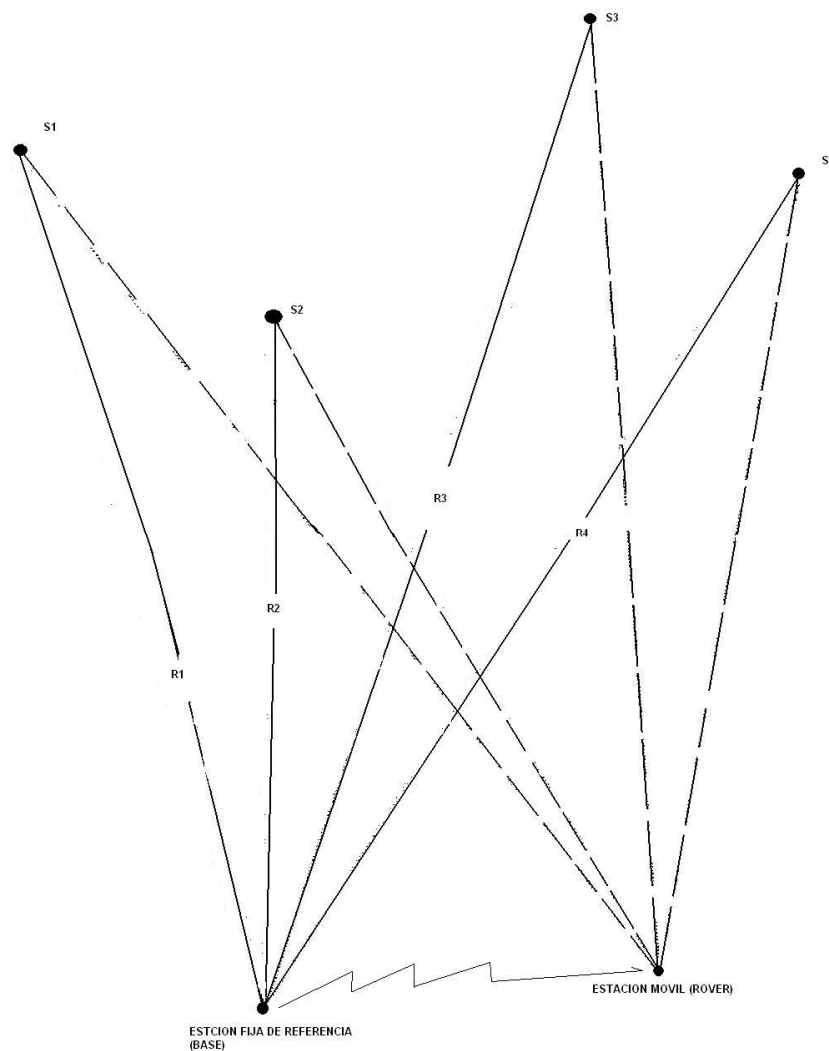
Como veremos más adelante, los receptores geodésicos pueden utilizar al código P como un complemento de señal, aunque no lo conozcan, pero eso no sirve en tiempo real.

Aclaremos el concepto de “tiempo real” en los equipos de levantamiento se pueden almacenar datos, pero también se pueden obtener resultados a medida que se efectúan las operaciones; a esos resultados, que a veces se traducen en valores numéricos, visualizaciones en pantalla o impresiones en impresora o plotter, se los denomina PROCESO EN TIEMPO REAL. Es muy útil cuando se debe proceder a un replanteo o a asegurar la densidad de los recorridos cubiertos.

Independientemente de ese resultado, que en el anterior, se los depura con mayor cuidado o se agregan datos adicionales obtenidos de otra fuente (ejemplo datos de altura de agua, elementos correctivos, temperatura, etc.); de ese proceso que incluye verificaciones, reprocesos parciales, ajustes, interpretaciones, etc., surgen los resultados finales.

De esta forma se está en condiciones de determinar la posición en un lugar fijo o en un móvil con un error que puede variar entre 10 y 15 metros, como ya dijimos la discriminación de una distancia con código C/A es del orden de 3 metros, a esto hay que agregarle los problemas de la refracción, de las efemérides (posición estimada del satélite), más la incidencia de estos efectos en todas las pseudo distancias al calcular la posición (de allí los  $\pm 10$  m a  $\pm 15$  m).

Un primer perfeccionamiento es el denominado POSICIONAMIENTO DEFERENCIAL, que consiste en mantener un receptor fijo (de referencia) en un punto de coordenadas conocidas, calcular las distancias al satélite por diferencia de coordenadas, se pueden calcular las correcciones a las pseudo distancias determinadas y luego tenerlas en cuenta en otro receptor, que puede ser móvil u ocupar posiciones fijas sucesivas. Este proceso se puede efectuar en forma diferida, almacenando la información, o bien en tiempo real si se transmiten esas correcciones. La estación fija se suele denominar BASE y la móvil ROVER (vagabundo o itinerante en inglés)



Esta modalidad, también denominada, DGPS (GPS DIFERENCIAL  $\equiv$  DIFFERENTIAL GPS) se usa en levantamientos hidrográficos (para determinar la topografía del fondo subacuático) geofísica (para inferir propiedades bajo el suelo o fondo), etc. también en operaciones aéreas o marítimas y hasta para controlar el tránsito de vehículos de distinta naturaleza. Se consignan errores de posición entre  $\pm 3$  m y  $\pm 5$  m, aunque hay algunos artificios para mejorar esa precisión, de todas maneras no constituye un procedimiento geodésico. La mejora con respecto a las determinaciones aisladas (cuyo error ya hemos evaluado en  $\pm 10$  m a  $\pm 15$  m) se debe a que los efectos en la estación de referencia, debido al error de las efemérides, influencia de la refracción, etc. deben ser muy similares a los que afectan a la estación móvil.

El concepto es muy similar al que expusimos al final de 10.3 para la TRANSLOCACIÓN.

Ahora vamos a tratar el tema de las EFEMERIDES en el sistema GPS.

Hay una estación principal (MCS = Master Control Station) en Colorado Springs (USA) que recibe información de cuatro estaciones (Monitor Stations) en Cabo Cañaveral (USA frente a Cuba), en las islas Ascensión (Océano Atlántico Sur), Diego

García (Océano Indico) y Kwajalein (Océano Pacífico Occidental), más dos adicionales para usar en caso especiales en las islas Hawaii y próxima a la principal.

Hay otras estaciones que dependen de la Fuerza Aérea (U.S. Air Force), una de las cuales funciona en dependencia del IGN (Instituto Geográfico Nacional) nuestro, en Miguelete (próximo a Av. Gral. Paz y vías del Ferrocarril Mitre que va a José León Suarez), estos permiten ciertos ajustes periódicos pero la operación permanente es de la MCS con las cuatro monitoras mencionadas.

Desde la MCS se inyectan a los satélites los datos, que constituyen la efeméride radiodifundida, la cual llega al usuario codificada en la onda portadora de cada satélite (en forma similar a los códigos C/A y P) hay varios grupos de datos:

a) De tiempo

**toe:** tiempo de referencia para el cual se dan los datos (efemérides)

**toc:** tiempo de referencia para el cual se dan los datos del reloj (clock)

**$a_0, a_1, a_2$ :** corrección, marcha y aceleración del reloj; o sea que la corrección vale  $a_0 + a_1(t - toc) + a_2(t - toc)^2$

**IODC:** un número que da la identificación de los datos del reloj (Issue of Data Clock)

b) Datos de la elipse kepleriana

$\sqrt{A}$ : Raíz cuadrada del semieje mayor en metros

$e$  = Excentricidad  $\left(\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}\right)$

$i_0$  = Inclinación para toe

$\Omega_0$  = ascensión recta del nodo ascendente para toe

$\omega$  = argumento del perigeo

$M_0$  = anomalía media para toe

IODE = un número que da la identificación de los datos kepleriano (Issue of Data Ephemeris) [Los valores angulares se dan en grados  $\square$  1]

c) Valores de perturbación

$\delta n$ : corrección a la velocidad angular media, que se obtiene de  $n = \sqrt{\frac{GM}{A^3}}$

donde, para GPS se toma  $GM = 3986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$

$\dot{\Omega}$  = tasa de variación de  $\Omega$

$\dot{i}$  = tasa de variación de  $i$

$\left. \begin{array}{l} CUS \\ CUC \\ cis \\ csc \\ crs \\ crc \end{array} \right\}$  variaciones periódicas s = seno, c = coseno del argumento de latitud (u)

$(\omega + M_0) \equiv u$ , de la inclinación (i) y del radio vector r. Contemplan varias causas, la principal es la atracción lunar.

La señal  $L_1$  tiene la siguiente estructura:

$$S_{L1} = A_p P_i(t) D_i(t) \text{sen}(\omega_1 t) + A_c C_i(t) D_i(t) \text{cos}(\omega_1 t)$$

y la  $L_2$ :

$$S_{L2} = B_p P_i(t) D_i(t) \text{sen}(\omega_2 t)$$

Donde :  $A_p$  = amplitud del código P en  $L_1$

$P_i(t)$  = Código P (función del tiempo para el satélite i)

$$\omega_1 = 2\pi L_1$$

t = tiempo

$A_c$  = amplitud del código C/A en  $L_1$

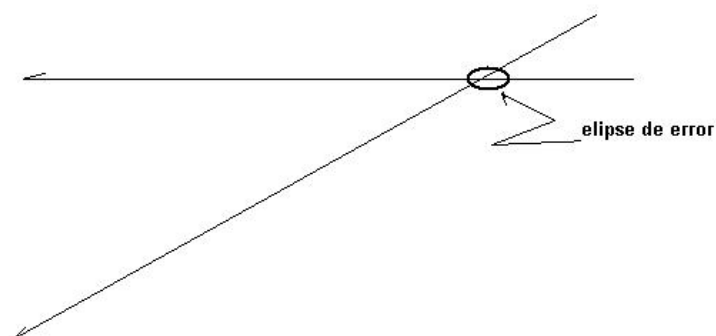
$C_i$  = Código C/A (función del tiempo para el satélite)

$D_i$  = Datos para el satélite i

$B_p$  = amplitud del código P en  $L_2$

$$\omega_2 = 2\pi L_2$$

Los errores en posición y tiempo no solo dependen de los errores de los datos y de la obtención de los retardos ( $t_i$ ), están también sujetos a la geometría, en forma similar a una intersección que, además de los errores angulares interviene el ángulo de corte y la ubicación.



En el ajuste de una determinación puntual con GPS, la matriz de cofactores permite calcular el error de posición con los elementos de la diagonal principal (ver 3.3)

$$\begin{pmatrix} D_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D\Delta t \end{pmatrix}$$

A partir de los tres primeros elementos se podría calcular el error en posición  $\sigma_p$  a partir del error en pseudo distancias  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \cdot \sigma_r$$

y el error en tiempo

$$\sigma_t = D\Delta t \cdot \sigma_r$$

a esos coeficientes que, a partir de  $\sigma_r$ , permite calcular los errores en posición  $\sigma_p$  y en tiempo  $\sigma_t$  se denomina

#### P DOP y T DOP

Respectivamente. El acrónimo DOP significa Dilution Of Precision (Dilución de la precisión) que se aplica a la posición y al tiempo.

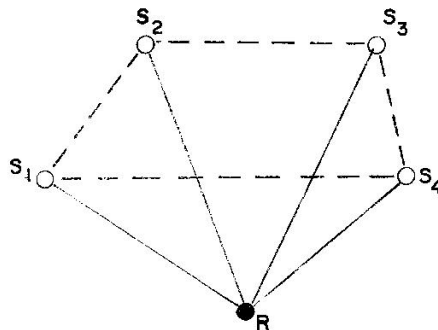
Mediante una matriz como la expuesta en 9.5 se podría pasar de las componentes en x y z a las horizontales  $\sigma_N$ ,  $\sigma_E$  y vertical  $\sigma_h$ , de allí sale una descomposición del PDOP en H DOP y V DOP (Dilución de la Precisión Horizontal y Vertical), por supuesto que debe cumplirse que

$$P\ DOP^2 = H\ DOP^2 + V\ DOP^2$$

Y también se define la dilución general de la precisión G DOP con la cual debe cumplirse

$$G\ DOP^2 = P\ DOP^2 + T\ DOP^2$$

Desde el punto de vista geodésico, el valor más importante es el P DOP; intuitivamente se puede apreciar que si los 4 satélites estuviesen muy próximos entre sí o se presentaran en forma "alineada" el P DOP sería muy alto, lo mismo ocurriría si estuviesen los 4 próximos al horizonte. Cuando la pirámide que forma el receptor con los 4 satélites toma el volumen máximo el error será menor y el PDOP será suficientemente bajo



Por lo general, con la constelación actual, se pueden conseguir valores por debajo de 2 o 1.5.

Este concepto de los valores DOP, si bien sirven específicamente para las posiciones puntuales con código, debe observarse también en las determinaciones relativas que veremos más adelante. Es verdad que las determinaciones relativas tienen la ventaja de neutralizar una serie de efectos que son comunes a ambas estaciones (refracción, error de efemérides, et.) pero en este caso no es tan así ya que un par de malas geometrías pueden producir errores diferentes en ambos puntos y, consecuentemente quedará afectada la diferencia de posición, que es lo que se mide.

Ahora vamos a ocuparnos de la posibilidad de introducir la medición de la fase de la onda portadora en las mediciones. Indudablemente la posibilidad de discriminar 3 metros, a través del código C/A puede mejorarse notablemente si se mide la fase de la onda portadora ( $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_5$  en los futuros equipos) ya que, al tratarse de longitudes de onda ( $\lambda$ ) del orden de los 20 cm, se estaría en condiciones de discriminar  $\pm 2$  mm.

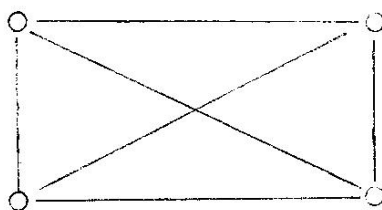
El problema sigue siendo la ambigüedad (número entero de  $\lambda$ ) pero, en las determinaciones relativas, se cuenta con varias ventajas, entre ellas:

- En los algoritmos no entran directamente las pseudo distancias, si no más bien las diferencias entre las dos estaciones.
- Ya se cuenta con valores aproximados provistos por las determinaciones aportadas por el uso de código (s).

Excluyendo el caso de receptores que solo utilizan el código C/A, generalmente de uso manual y denominada "navegadora", los equipos de uso geodésico utilizan:

- ✓ Código C/A + Fase de  $L_1$
- ✓ Código C/A + Fase de  $L_1$  + Fase de  $L_2$
- ✓ Código C/A + Código P+ Fase de  $L_1$  + Fase de  $L_2$

Todos ellos operan, como mínimo de a pares, es decir, se mide un vector entre cada par de equipos; ello no quita que, por ejemplo, operen 4 equipos simultáneamente y durante una sesión de observación, quedan determinados 6 vectores.



Los elementos que se observan son CODIGOS Y DIFERENCIAS DE FASE, a esos elementos comúnmente se los denomina "observables", simplemente por una burda traducción de la misma palabra en inglés.

Una pseudo distancia  $R$  se puede expresar como  $R = \lambda \left( N + \frac{\varphi}{2\pi} \right)$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda ( $L_1$  o  $L_2$ ),  $N$  un número entero (mientras no se lo conoce constituye una ambigüedad) y  $\frac{\varphi}{2\pi}$  el ángulo de desfasaje (por lo cual  $\frac{\varphi}{2\pi}$  varían entre 0 y 1)

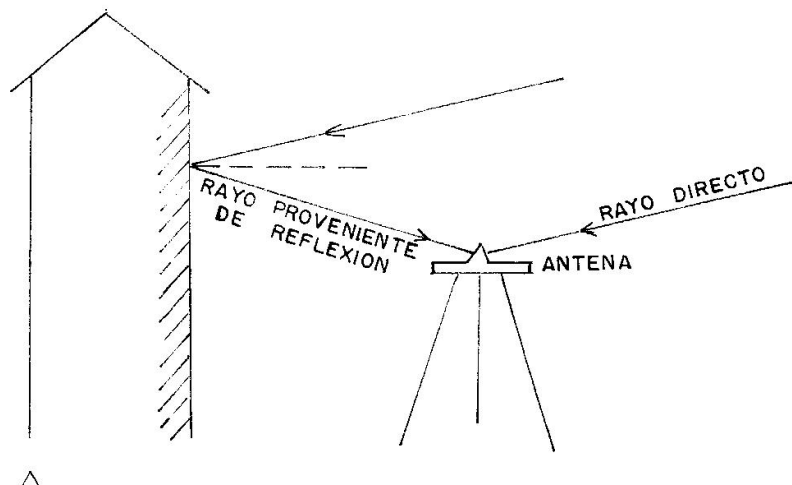
$\frac{\varphi}{2\pi}$  se mide entre la onda recibida y la señal de referencia del receptor. Los problemas que pudieran existir en el reloj del satélite se neutralizan al trabajar en

forma relativa, problemas análogos que se pueden presentar por error diferente en ambos receptores se resuelven sincronizando los mismos entre sí y luego, también, por operar en forma relativa.

Hay algún error que se puede producir por la diferencia que pudiese existir entre el centro eléctrico y el centro físico de las antenas, para neutralizarlo conviene orientar todas las antenas en forma paralela, por ejemplo, con cierto detalle hacia el norte.

Los puntos de partida o previstos para el ajuste deben estar con coordenadas en el sistema GPS (WGS 84) o ITRF (para el caso es lo mismo) dentro de los 5 metros, en caso contrario puede afectar más de 0.5 ppm (parte media por millón) la determinación.

Cuando se establece una estación, debe cuidarse que no se puedan producir reflejos que perturben la recepción directa.



Ese fenómeno (similar al "ground swing mencionado próximo al final del 4.3) en GPS se denomina MULTIPATH (multicamino) y debe evitarse esa situación, pese a que se han diseñado antenas con la base antirreflejo y que observando sesiones largas la combinación del reflejo puede hacer desaparecer esa perturbación (por cambio de orientación de los rayos).

Otro efecto nocivo es la pérdida o salto de ciclo (cycle slip) debida a ruidos de la recepción, a veces perturbada por un follaje u objeto volador. Por lo general el "software" del receptor lo puede detectar y corregir, pero si eso no ocurre aparece una ambigüedad mal resuelta.

En 10.2 hemos mencionado los dos problemas de la refracción, en especial cuando se opera con  $L_1$  y  $L_2$  se neutraliza el efecto ionosférico, cuando se usa solamente  $L_1$  debe recurrirse a un modelo que se incluye en el mensaje, pero esto no es suficiente para distancias largas, por lo cual no conviene pasar los 20 o 30 Km con ese tipo de receptor, a los 40 Km ya afecta 1 a 2 ppm. De todas maneras ambas refracciones dejan errores residuales pero, en las determinaciones relativas, esos efectos quedan sustancialmente disminuidos.

El tema de las ambigüedades, por lo general se resuelve por SIMPLES DIFERENCIAS que toman en dos puntos A y B las diferencias de fase de un mismo satélite.

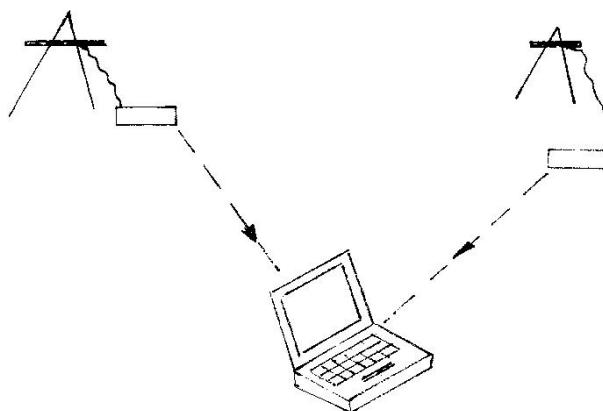


También se usan DOBLES DIFERENCIAS que toman simples diferencias para dos satélites y pueden también utilizarse TRIPLES DIFERENCIAS que corresponden a la consideración de dobles diferencias para dos épocas.

En realidad hay distintos tratamientos y cada tipo de equipo usa el propio, en los de dos frecuencias ( $L_1, L_2$ ) hay mayor posibilidad de resolver el problema.

Queda por aclarar que para los equipos de doble frecuencia y doble código, cuando no se dispone del código P, que es lo que realmente ocurre para el usuario común, se puede obtenerlo a través de un posproceso y aplicarlo. Claro está que esto no se puede hacer en TIEMPO REAL y es precisamente lo que esperan los dueños del sistema, por razones militares.

Lo cierto es que, para procesar una sesión lo primero que hay que hacer es contar con un par de receptores que actúen simultáneamente en dos puntos. Una vez registrados los datos se los baja a una computadora (generalmente LAP TOP o NOTE BOOK) y allí se procesa esa sesión.



Se pueden obtener las componentes del vector, o sea la diferencia en X, en Y y en Z:  $D_x, D_y, D_z$ , acompañados de una serie de valores estadísticos que permiten evaluar la consistencia de la determinación.

Los primeros tratamientos consistían en aplicar un “software” para obtener los datos del vector, ejemplo de estos fueron

SKI (de LEIKA)  
GPS Survey (de TRIMBLE)  
GPPS (de ASHTECH)

Y luego pasar a un ajuste de la red, para lo cual se usaban, entre otros, los programas

TRIMNET  
FILLNET  
GEOLAB

Después del año 2000, aproximadamente, se comenzaron a usar paquetes de programas que permiten cumplir los dos objetivos, e inclusive con el tratamiento de otras técnicas como RTK, que mencionaremos más adelante entre ellos

SKI – Pro (de LEIKA)  
TGO (de TRIMBLE)  
PINNACLE (de JAVAD/TOPCON)

Estos tratamientos que hemos mencionados se denominan “Software”

COMERCIALES y son usados generalmente por los agrimensores y otros profesionales en levantamientos (geofísicos. Hidrográficos, etc.) para vectores que por lo general no superan los 200 o 300 kilómetros.

Cuando se opera con vectores más largos y se quiere arribar a resultados más precisos, se han desarrollado los “softwareS” denominados CIENTÍFICOS, entre ellos  
 BERNESE (o de Berna, desarrollado por la Universidad de esa ciudad suiza)  
 GEONAP (de la Universidad Técnica de Hannover, Alemania)  
 GYPSI (del U.S. Jet Propulsion Laboratory – JPL)  
 GAMIT (del Instituto Tecnológico de Massachuset –MIT, USA)

El método geodésico por excelencia es el denominado ESTÁTICO que, por lo general requiere sesiones de 2 o 3 horas para vectores de hasta 200 o 300 KM, en distancias más cortas (10, 15 Km) se suele usar el ESTÁTICO RÁPIDO, que se logra con sesiones del orden de ½ hora.

Con los mejores equipos, en los métodos estáticos, se pueden conseguir errores por debajo de

$$\pm 5 \text{ mm } \pm 0.5 \text{ ppm}$$

lo cual es realmente asombroso, en general, a los fines prácticos, es suficiente con lograr

$$\pm 1 \text{ cm } \pm 1 \text{ ppm}$$

Los equipos cuentan, por lo general con su formato de datos propios, si se quieren usar equipos de distinta marca, antes del proceso hay que transformarlos a formato RINEX (Receiver INdependent EXchange format) o sea Formato de Intercambio Independiente del Receptor.

Hay procedimientos que, si bien son más aptos para levantamientos que para apoyo geodésico, tienen aplicación para apoyos expeditivos, entre ellos mencionaremos

RTK, Real Time Kinematic (Cinemático en Tiempo Real), requiere equipos de transmisión para emitir datos desde una estación fija (instalada sobre un punto geodésico) a otra móvil que se traslada a los lugares que se quiere dar posición. Trabaja también por fase de onda portadora y se pueden conseguir errores por debajo de  $\pm 5 \text{ cm } \pm 5 \text{ ppm}$ .

STOP & GO (de Parar y Andar) Consiste en detenerse algunos minutos en cada punto a posicionar. En este caso, por lo general, se almacena la información y luego, en posproceso, se obtiene los resultados.

También opera por fase y si se trabaja con cuidado, se consiguen resultados que se aproximan al método anterior.

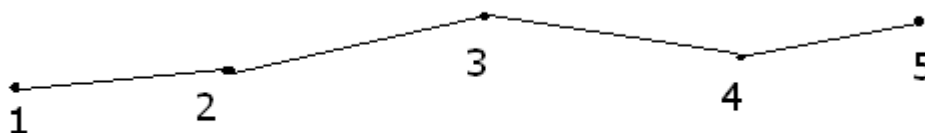
En cualquier de estos procedimientos debe tenerse en cuenta que, para que no se desordene la resolución de ambigüedades, no debe interrumpirse la recepción. Es decir, con la estación móvil no debe pasarse por debajo de una puente o introducirse en la vegetación cerrada.

Vamos a limitar a este nivel la descripción de GPS, o GNSS en general, somos conscientes que hay una fuerte evolución que rápidamente vuelve obsoletos ciertos conceptos, los cuales deben actualizarse permanentemente con la información que va surgiendo.

## 10.5 REDES GEODÉSICAS CON GNSS

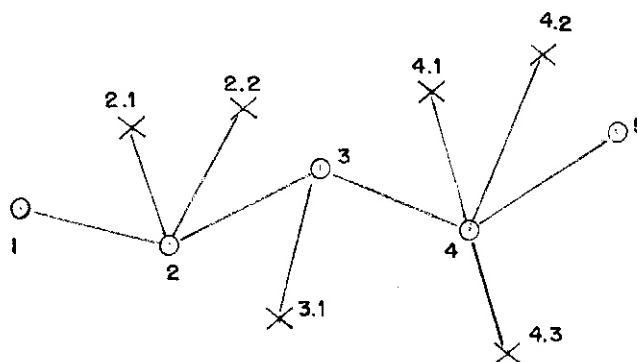
Desde el punto de vista geodésico, el establecimiento de redes de apoyo mediante GNSS es de vital importancia.

Una de las primeras formas de densificar puntos con coordenadas es la “poligonal GNSS”



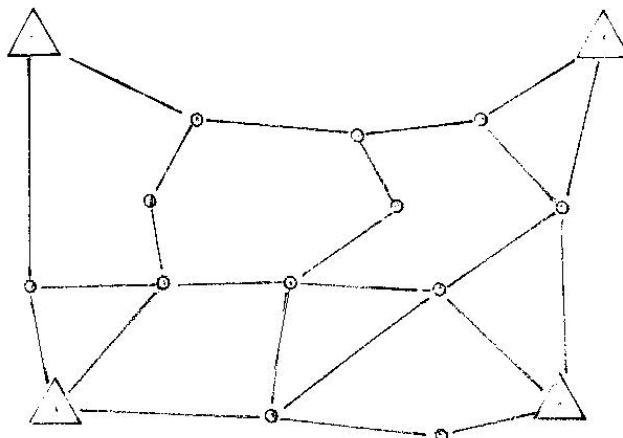
es decir, comenzar con una sesión entre los punto 1 y 2, luego el receptor que estaba en el punto 1 pasa al 3, luego de del 2 al 4 y así sucesivamente, suele llamarse modalidad “salto de rana”, en general conviene que se parta de una punto fundamental y se llegue a otro, en ese sentido el criterio es similar a una poligonal que se establece mediante la medición de ángulos y distancias.

Se puede mejorar el rendimiento de densificación si en cada traslado se determinan puntos adicionales como se indican en el siguiente esquema



Pero no es aconsejable tomar como válidos esos puntos laterales hasta que no se las verifique con un cierre adicional, vinculándolos entre sí o logrando algún circuito que los vincula en forma independiente a esa determinación abierta.

Si bien el uso de este tipo de “poligonal” es aplicable en territorios de escaso apoyo, lo más conveniente es medir una red con figuras cerradas, lo ideal sería un esquema como el siguiente intercalado entes varios puntos de apoyo fundamentalmente, como los indicados en el siguiente esquema mediante triángulos



Es suficiente que los puntos de apoyo fundamental estén espaciados en el orden de los 200 Km y que los de apoyo densificado queden cada 50 Km, en general con esa densidad se pueden realizar levantamientos sin mayores inconvenientes.

Sin lugar a dudas, las mejores redes son las que tienen formados triángulos, si es posible aproximadamente equiláteros, de esa manera los puntos quedan determinados con una rigidez mayor, ya que en cada vector queda neutralizada la propagación de errores longitudinales y también la transversal, una combinación de ambas conduce a una menor propagación de errores en la red ajustada.

Las redes de apoyo fundamental, por la general, cuentan con puntos activos y pasivos, los activos cuentan con una estación GNSS permanente y los pasivos quedan determinados a través de campañas de medición y cuando se los quiere utilizar hay que ocuparlos con equipos para el arranque o el cierre de las mediciones de vectores. Las estaciones permanentes (o activas) constituyen lo que se denomina una red de orden 0, y los otros se someten a un ajuste manteniendo estas coordenadas para una época acordada (de referencia).

Este tema de la época se está imponiendo dentro de lo que se ha denominado GEODESIA 4D. A los valores 3D: X, Y, Z ( en metros para una época de referencia) se le deben agregar las tasas de variación ("velocidad")  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  en metros por año o mm/año y así se pasa a 4D, donde a la posición se le agrega la época.

El territorio argentino goza del privilegio de contar con la mayor parte de su población activa en la PLACA SUDAMERICANA. El principal fenómeno se presenta por la introducción de la placa de NAZCA, cuyo principal desarrollo se encuentra en el Océano Pacífico, por debajo de la anterior. Esta actividad geodinámica está relacionada con la mayor parte de los terremotos que se producen en Chile, en San Juan, en Mendoza, etc. Al sur, la placa Sudamericana limita con la denominada placa de SCOTIA, afortunadamente, si bien se detecta un desplazamiento horizontal entre las mismas, no lleva a fenómenos telúricos como los mencionados anteriormente. El límite tiene una traza aproximadamente ESTE – OESTE, ocupa el Lago Fagnano, en Tierra del Fuego y continua por algunos Canales Fueguinos hacia el Océano Pacífico, para luego más hacia el norte limitar con la ya mencionada placa de Nazca. Omitimos en esta descripción los fenómenos propios de la Antártida, los cuales son bastantes complejos y han promovido un interesante programa internacional: GIANT (Geodetic

Infraestructure for the ANTartics) coordinado por el Comité Científico de Investigaciones Antárticas (SCAR)

Antes de entrar en algunos detalles del Marco Geodésico Argentino (POSGAR) debemos recordar lo tratado en 9.8 en lo que respecta al ITRF y SIRGAS.

Cabe agregar que el ITRF no solo está sostenido por técnicas GNSS, también hay involucrados varias estaciones de VLBI y SLR (ver 9.7) y es el marco mundial. SIRGAS es un marco regional que, si bien se originó en América del Sur, se lo considera de todo el continente americano.

El marco nacional (POSGAR) tuvo básicamente dos versiones oficiales POSGAR 94 y POSGAR 2007. Entre ambas hubo un intento de mejora pero no se llegó a adoptar.

El POSGAR 94 se midió fundamentalmente en 1993 y se procesó en 1994, surgió de un acuerdo entre las universidades de MENPHIS y CAROLINA DEL NORTE (USA) que estaban desarrollando el llamado CAP (Central Andes Project) una interesante investigación sobre el comportamiento geodinámico de los Andes Centrales.

A cambio de facilitarle apoyo logístico a ese proyecto, se pudieron compartir equipos y concretar las mediciones. Gran parte de esos puntos se establecieron en coincidencia con los PUNTOS DE LAPLACE (ver 2.9, pág. 106 y puntos 4.5 y 9.2) o astronómicos principales ubicados en la intersección de las cadenas fundamentales de triangulación, de manera que, en promedio la separación entre puntos POSGAR 94 fue del orden de los 200 Km.

Cabe destacar que la medición de POSGAR 94 fue anterior a la primera campaña SIRGAS, lo cual constituyó una de las razones para referirlo, lo mejor que se pudo a WGS 84, afortunadamente al poco tiempo del Departamento de Defensa (USA) (DoD) hizo coincidir WGS 84 con ITRF.

Con el tiempo se decidió que ese marco (denominado POSGAR 94) debía actualizarse a fin de poderle asignar nuevos valores  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y las variaciones  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ . Dentro de las razones figuran también:

- La existencia de un número importante de ESTACIONES PERMANENTES que proveen el nexo con los marcos ITRF y SIRGAS
- La posibilidad de introducir vectores medidos con equipos más modernos.

Desgraciadamente, en febrero de 2010 se produjo un terremoto importante en el sur de Chile que produjo, al menos, un salto brusco y ciertos cambios en las "velocidades".

Los desplazamientos mayores fueron de Este a Oeste y abarcaron puntos entre las latitudes 30° y 45° con mayor incidencia en las proximidades de la Cordillera de la Andes.

A mediados de 2010 se coordinaron acciones para oficializar las acciones a llevar a cabo para neutralizar esta interrupción de la variación lineal de las coordenadas.

Sin perjuicio de que debería actualizarse la información sobre este problema, vale tener en cuenta que para establecer este marco se contó con la operación de 26 estaciones GNSS permanente, se midieron vectores durante 36 horas en dos sesiones independientes entre junio de 2005 u octubre de 2007. Se adoptó como época de

referencia la época 2006.632 o sea día 231 del año 2006 para ITRF 2005. O SIRGAS 2008.

Se encontró que POSGAR 94 tenía un desplazamiento del orden del 30 cm en el GEOCENTRO ( $X = 0, Y = 0, Z = 0$ ). En total, esa red de apoyo fundamental (orden 1) cuenta con 180 puntos propios. Fueron relacionados también más de 400 puntos pertenecientes a catastro provinciales y al programa PASMA (Programa de Asistencia al Sector Minero Argentino) que constituye una red encarada por la Secretaría de Minería para apoyar al catastro minero, en el cual los valores de las coordenadas pasaron a tener valor jurídico. Algunos países, muy evolucionados en este tema, han adoptado el mismo criterio para el dominio de las parcelas.

Fuera del tema de la perturbación del terremoto (febrero 2010), que tiene que resolverse, la idea es contar con una época de referencia ( $t_r$ ) para la cual valen las coordenadas del marco. Para una campaña de medición se llevan esas coordenadas a la época de medición ( $t_m$ )

$$X_m = X_r + \frac{dx}{dt} (t_m - t_r)$$

$$Y_m = Y_r + \frac{dy}{dt} (t_m - t_r)$$

$$Z_m = Z_r + \frac{dz}{dt} (t_m - t_r)$$

se realiza el ajuste correspondiente y después se retrotraen todas las coordenadas ajustadas a la época de referencia.

Para el esquema de tasas de variación (“velocidad”)  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , se tomarán los valores que producen las estaciones permanentes y se tendrá en cuenta el “modelo e velocidad” de SIRGAS. Se ha encontrado que, fuera de los problemas que trajo el terremoto de febrero de 2010, la dispersión de este modelo no supera los 5 mm en las estaciones permanentes al norte del paralelo  $42^\circ$  S. Ello no es anormal ya que en la Patagonia la red pasa a ser menos compacta y, además, a una latitud próxima a los  $54^\circ$  S hay una discontinuidad de placa (SUDAMERICANA – SCOTIA), como lo hemos descripto previamente en este mismo apartado (10.5).

El uso de la red de apoyo fundamental sirve para ajustar redes de densificación y si la zona a levantar está próxima, también se puede utilizar para instalar estaciones de referencia y a partir de las mismas, efectuar levantamientos topográficos, hidrográficos, fotogramétricos, geofísicos, etc.

Si se pretende trabajar en las proximidades de una estación GNSS permanente, que es parte de la red fundamental, se puede prescindir de la instalación de un equipo sobre la misma.

Los métodos para levantamientos son varios, dos de ellos ya los hemos mencionados unas páginas atrás (RTK y STOP & GO). Se le pueden agregar métodos llamados DINAMICOS, que permiten determinar la trayectoria de un vehículo en movimiento, lo más elementales trabajan por código y los hemos mencionados próximo al principio de 10.4, denominados DGPS, muy utilizados en levantamientos hidrográficos y navegación precisa, como expresamos allí se trata de usar código con estación de referencia y se pueden conseguir errores de posición del orden de  $\pm 3$  a  $\pm 5$  metros en horizontal. Algunos equipos cuentan con una mejora a través del efecto doppler sobre la onda portadora y bajan esas vacilaciones. Para mejorarlo efectivamente se introducen mediciones de fase sobre la onda portadora y allí se

consiguen errores por debajo de 1 metro, a estos métodos se los suele llamar PDGPS (GPS Diferencial Preciso) y tienen que observarse precauciones similares a las mencionadas para RTK y STOP & GO en cuanto a evitar la interrupción de la solución de ambigüedades.

El uso de estos equipos en movimiento asociados a otro sensor (sonda, magnetómetro, cámara fotogramétrica, etc.) lleva a tener que considerar lo que se denomina TIEMPO DE LATENCIA. Es el tiempo que demora una señal, cuando es captada por el receptor, en llegar al procesador (computadora); son fracciones de segundo cuya incidencia, de no ser neutralizada, afecta y lo hace con mayor incidencia cuando la velocidad del vehículo es grande.

Los equipos tienen la posibilidad que se introduzcan los tiempos de latencia, tanto del GPS como de los sensores asociados al levantamiento, pero para ello hay que determinarlos. Una de las formas es efectuando un recorrido y luego invertirlo, si se puede registrar el mismo lugar o la misma singularidad para el sensor y no concuerdan las posiciones es por que hay un efecto de esta naturaleza, como se pueden determinar las velocidades también se pueden traducir los desplazamientos detectados en tiempos. Una vez introducidos los valores de tiempo de latencia determinado, debe producirse una coincidencia entre entre los resultados de ida con la vuelta.

## **10.6 SERVICIO DE ANÁLISIS Y AUGMENTACIÓN**

Cuando nos referimos al servicio de ANALISIS en GNSS, estamos mencionando a instituciones que toman datos, los procesan y ofrecen resultados de uso científico. Generalmente esos resultados son útiles para mejorar investigaciones locales con el apoyo de un ámbito global, por ejemplo la provisión de efemérides precisas.

Cuando hablamos de Servicio de AUGMENTACION, como de costumbre una traducción que podríamos tildar de demagógica del vocablo inglés AUGMENTATION, nos estamos refiriendo a transmisiones que permiten trabajar en forma relativa con equipos que, de otra manera se limitarían a operar como autónomos. La traducción original del vocablo augmentation está relacionada con el acrecentamiento o aumento, el uso que se le da en GNSS es precisamente un aumento de la capacidad propia gracias al apoyo de esas servicios. Tal vez el servicio de análisis más completo sea el IGS (International GPS for Geodynamics Service = Servicio Internacional de GPS para Geodinámica), el cual fue establecido por la Asociación Internacional de Geodesia (AIG = IAG) durante la década de 1990. Fundamentalmente está destinado a proveer información que surge de GNSS para investigaciones geofísicas.

En especial produce Efemérides Precisas, parámetros de rotación terrestre, coordenadas de sus estaciones con sus tasas de variación y datos sobre las refracciones ionosférica y troposférica a nivel mundial. Cuenta con una red de estaciones que suman aproximadamente 30 en Europa, 25 en América del Norte, 16 en América del Sur, 30 en Asia, 10 en Oceanía, 10 en el Océano Atlántico (islas), 15 en el Pacífico, 5 en el Indico y 10 en la Antártida.

Hay otros centros como el de Determinación de Orbitas (COD) de la Universidad de Berna, el de la Agencia Espacial Europea (ESA), el de Geoinvestigaciones de Potsdam (Alemania) GFZ (Geo Forschung Zentrum), el Laboratorio de Propulsion a Chorro JPL (Jet Propulsion Laboratory) de California (USA), que también cubren requerimientos de este tipo, aunque cada uno de ellos especializado en determinados

temas.

En cuanto a los servicios de AUGMENTACION, los más importantes, son los siguientes:

**WAAS** (Wide Area Augmentation System) de USA que cuenta especialmente con estaciones en los aeropuertos con receptores GPS de doble frecuencia, vinculados al Observatorio Naval (USNO) que controla el Tiempo GPS y posee también varios sensores meteorológicos. Transmite las correcciones mediante un satélite GEO. Si bien la finalidad esencial es apoyar la navegación aérea y marítima precisa, se puede utilizar para otras finalidades, por ejemplo levantamientos. Se limita a información relacionada con GPS.

**EGNOS** (European Geostationary Navigation Overlay System = Sistema Europeo de Cobertura Geoestacionaria para Navegación) Este servicio provee información para GPS, GLONASS y GALILEO, vinculado a la Agencia Espacial Europea (ESA). Recibe datos de 40 estaciones.

**MSAS** (Multifunctional Satellite based Augmentation Service) de Japón.

**SNAS** (Satellite Navigation Augmentation Service) de China.

A nivel nacional contamos con la red RAMSAC (Red Argentina de Monitoreo Satelital Continuo), que utiliza la información que proveen las Estaciones GNSS permanentes. Está operada por el IGN (Ex IGM), a principio de 2010 contaba con el aporte de cerca de 30 estaciones permanentes.

Esas estaciones son de variado origen, gran parte de ellas pertenecen a universidades y son apoyadas por grupos de investigación extranjeras dedicadas a la geodinámica. Hay quienes sostienen que la geodesia puede llegar hasta la geodinámica, es decir, hasta la descripción de los movimientos y que, para llegar a la geodinámica, es necesario agregar interpretaciones geofísicas, geológicas, etc. Puede ser que sea así, pero, desde ya, el aporte de la descripción de los movimientos es grande y real (hay mediciones concretas que lo avalan).

Otras son apoyadas por otros usuarios, no faltan organizaciones de agrimensores que prevén el uso del servicio dentro de determinado ámbito; generalmente hasta 30 o 40 Km se puede operar con equipos de simple frecuencia y a distancias mayores se requieren de ambas ( $L_1$ ,  $L_2$ ) y así se puede llegar a 200 Km o más.

Por su origen heterogéneo estas estaciones están dedicadas a producir resultados que sean útiles a los patrocinadores. Sin embargo, por lo general, están dispuestas a suministrar datos; el acopio coordinado y ciertos aspectos de suministro es coordinado por la red RAMSAC a través del IGN.

Todavía falta para que la potencialidad del servicio se consolide a fin de satisfacer requerimientos como cumple, por ejemplo, el sistema EGNOS. Para ello es necesario coordinar varias acciones institucionales, especialmente vinculadas a los usuarios destinados al transporte aéreo y marítimo; por supuesto que la navegación en alta mar o en los largos trechos de la aeronavegación ello no es necesario, en cambio, en los accesos a puertos y aeropuertos, navegación en canales o pasos críticos y operaciones varias (atraques, aterrizajes, etc.) el requerimiento queda muy claro.

Ocurre lo mismo con otras aplicaciones como revisión de cañerías sumergidas,



agricultura de precisión y levantamientos varios.

Para poder satisfacer esos servicios, especialmente cuando se requiere trabajar en TIEMPO REAL (ver primeras páginas de 10.4) es necesario contar con:

- Atención permanente asegurada.
- Coordinación permanente.
- Transmisión con estaciones equipos de alcance suficiente.
- Compatibilidad con los equipos de los usuarios..

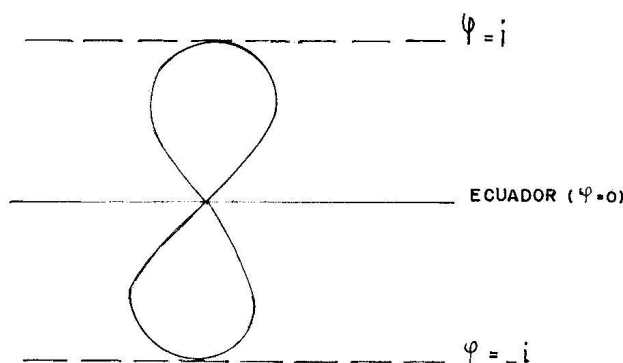
Indudablemente, con el tiempo tanto la red RAMSAC como otras, a niveles nacionales o regionales, cumplirán servicios de esa naturaleza. Por el momento la información se puede bajar a través de INTERNET; salvo casos muy particulares, eso se hace en tiempo diferido. Esa modalidad, a los fines geodésicos o topográficos, por lo general es suficiente, no así para replanteo, cobertura de densidad levantada o maniobras de vehículos.

### **10.7 SATÉLITES GEOESTACIONARIOS Y GEOSINCRÓNICOS.**

Especialmente para fines de comunicaciones, se utilizan satélites geoestacionarios. Son satélites cuya órbita se mantiene en el ecuador ( $i = 0$ ) y cuya velocidad angular ( $n = \sqrt{\frac{GM}{A^3}}$ ) es tal que cumplen una revolución por día en el mismo sentido de la rotación terrestre). De tal forma para un observador, es como si permaneciera quieto permanentemente. Eso se cumple aproximadamente a una altura de 35800 Km sobre la superficie terrestre.

Indudablemente, para la comunicación son el medio ideal, en 10.6 hemos mencionado que el servicio WAAS utiliza un satélite GEO, nos estábamos refiriendo precisamente a uno de estos, lo mismo ocurre con los otros servicios similares (EGNOS, etc.)

Si  $i \neq 0$ , para una misma altura se mantendría el período pero el mencionado observador no lo vería siempre en el mismo lugar, 2 veces por día cortaría al ecuador, un vez por día alcanzaría una declinación  $\delta = i$  y otra vez  $\delta = -i$ , es como si la vertical que lo alcanza describiera sobre la Tierra una trayectoria como la siguiente



Si se quisiera llegar a la comunicación cerca de los polos, este tipo de satélites la facilita en determinados horarios.

Durante la década de 1990 se ensayaron, por parte de la Unión Europea, satélites de este tipo para montar un sistema de posicionamiento propio, que especularmente

también hubiese sido útil para África, pero luego se desestimó el procedimiento y se avanzó en el proyecto GALILEO, el cual promete transformarse en el más evolucionado dentro de GNSS.

## **10.8 SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UN MARCO**

Este tema lo hemos tratado en 9.G, en donde analizamos fundamentalmente dos alternativas:

- a) Traslación simple, donde se determinan los valores  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  considerando que la antigua terna  $x, y, z$  es paralela a la nueva  $x', y', z'$  y donde no hay cambio de escala.
- b) Desplazamiento, similar al anterior, con cambio de escala y leves giros, donde además de las traslaciones  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  se deduce un factor de aumento o contracción general y leves giros alrededor de los tres ejes.

Habíamos indicado que, por lo general, el problema crítico es que las coordenadas del marco antiguo  $(x, y, z)$  no tienen bien definida la altura sobre el elipsoide ( $h$ ). Si se quisiese hacer este trabajo con cierta rigurosidad habría que modelar el geoide mediante perfiles astrogeodésicos y ciertos auxilios de las anomalías gravimétricas, entonces se podría pasar de las cotas sobre el nivel del mar ( $H$ ) a las alturas sobre el elipsoide ( $h$ ).

Las coordenadas nuevas  $(x', y', z')$  no tienen ese problema ya que las determinaciones de geodesia satelitaria cuentan con los valores  $\varphi', \lambda', h'$ .

Indudablemente, si la transformación quiere hacerse entre dos redes, ambas establecidas mediante geodesia satelitaria, tal problema no existe.

En la actualidad la forma más eficiente para modelar el geoide es efectuar mediciones GNSS sobre puntos de las líneas de nivelación, claro está que esta modelación no se puede aplicar directamente a las redes antiguas. Para ello habría que adaptar estos resultados a ciertos perfiles astrogeodésicos de esas redes antiguas.

Dicho de otra manera, el geoide es prácticamente el mismo, pero la forma hay que referirla al antiguo elipsoide y para ello se necesita de algunas determinaciones genuinas sobre el mismo. Todo ocurre como si los nuevos perfiles se deben acomodar a otras referencias de altura y hasta con algún cambio de pendiente, sin embargo la tendencia de las sinuosidades es válida.

Vale decir que para las antiguas redes de apoyo horizontal tradicional (triangulación, poligonación, etc.) las directrices principales de la modelación están dadas por los perfiles astrogeodésicos y tanto el aporte de GNSS como de la gravimetría son una buena herramienta para la interpolación.

También habíamos mencionado al final de 9.6 que, una de las formas de hacer la transformación cuando no se cuenta con suficientes valores de  $h$  en ambos grupos de coordenadas, es mediante regresiones múltiples. En rigor este es un artificio matemático para resolver el cambio de las coordenadas pero no constituye un mecanismo bien fundamentado desde el punto de vista técnico – científico. Sin

embargo debe reconocerse que admite tener en cuenta la deformación que puede tener un marco por propagación de errores.

De todas maneras, cualquiera que sea el procesamiento, debe velarse por una buena distribución de los puntos comunes para obtener las constantes del traspaso. Si bien se podrían ensayar modelos de buena distribución a través de los conceptos estadísticos de la compensación, por lo general es suficiente analizar la red y evaluar intuitivamente si ese conjunto de vínculos lo provee rigidez suficiente.

Otro tema a tener en cuenta es la aceptación de los desvíos que presenta el ajuste; en este caso hay que tener en cuenta que entre dos redes, obtenidas por geodesia satelitaria, las discrepancias no deberían superar las 3 ppm, en cambio si una de las redes proviene de antiguas redes de triangulación, podrían admitirse diferencias que lleguen hasta 40 ppm pero sin saltos erráticos si no con cierta ley de variación que surge de la propagación de errores.






---



---

AGUILAR F.(1937 a 42) **Lecciones de Geodesia**

1era. Parte: Teoría de Errores y Cálculo de Compensación por el Método de los Cuadrados Mínimos.

2da Parte: Nociones de Astronomía Esférica y Determinaciones Geográficas.

3ra. Parte}. Nociones sobre Proyecciones Cartográficas.

Editado por el Centro de Estudiantes de Ingeniería (CEILP). La Plata, Argentina con varias reimpresiones posteriores.

ASHKENAZI – GOUGH – STIKES (1977) Traducciones de un Manual de la Universidad

de Nottingham (Reino Unido) sobre Posicionamiento Satelitario Doppler. Seminario sobre esa disciplina organizado por IGM Buenos Aires, Argentina.

ASIN F. M (1985) **Problemas de Astronomía**. Editorial Paraninfo, Madrid, España.

ASIN F. M (1990) **Geodesia y Cartografía Matemática**. 3era Edición. Editorial Paraninfo, Madrid, España.

BENAVIDEZ SOSA A. (2004) **Fundamentos de Geodesia Física**. Edición del Autor, Montevideo, Uruguay.

BOMFORD G. (1980) **Geodesy** 4th Edition. Oxford Clarendon Press. Reino Unido (UK)

BRUNNER f. (1998) **Advances in Positioning and Reference Frames**. Editorial Springer, Heidelberg (Alemania) New York (USA)

CHUECA PAZOS et al. (1996) **Tratado de Topografía** (3 Volúmenes) Editorial Paraninfo, Madrid, España.

CNUGGI (1996) **Estándares Geodésicos (GPS)** Comité Nacional de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, Subcomité de Geodesia. Editado por el Instituto Geográfico Militar, Buenos Aires, Argentina.

D'ALVIA A. (2001) **Cálculo de Compensación**, Editado por el Centro de Estudiantes de Ingeniería (CEILP), La Plata, Argentina.

D'ALVIA A. (2002) **Relaciones entre Sistemas Geodésicos**. Universidad de Morón, Facultad de Ingeniería, Morón, Argentina.

D'ALVIA A. (2002) **Elementos de Probabilidad y Estadística**, Universidad de Morón, Facultad de Ingeniería, Morón, Argentina.

DANJON A. (1959) **Astronomie Generale**. Editorial J. R. Sennac, Paris, Francia.

DE FREITAS et al. (1998) **The Geocentric Position of the Brazilian Vertical Datum. Proceedings of the International Symposium on Marine Positioning (INSMAP)**. Florida Institute of Technology. Melbourne, Fl., USA.

DUSS R. (1984) **Project Surveying** 2<sup>nd</sup>. Ed. Editorial Balkema, Holanda.

EGGE D. (2000) **Grid Computation, Geodesy Map Projections**. Apuntes para el curso de la International Maritime Academy, Trieste, Italia.

FGCC (1984) **Standards and Specifications for Geodetic Control Networks**. Federal Geodetic Control Committee. NOAA, Rockville, Maryland, USA:

GARCÍA TEJERO (2002) **Topografía General y Aplicada**. 13a Edición. Ediciones Mundi – Prensa. España.

GOLDAN H.J. (1996) **Beiträge zur GPS Gestützten Höhenbestimmung im Küstenbereich**. Tesis Doctoral publicada por la Universidad

- Técnica de Hannover, Alemania (Institut für Erdmessung)
- GONZALEZ FERNANDEZ M. (1948) **Elementos de Geografía Matemática**. Observatorio Astronómico UNLP. La Plata, Argentina.
- GRAF A. (1970) **Gravimetrische Instrumente und Messmethoden**. Handbuch der Vermessungskunde J.E.K. Band Va. Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- GROSSMANN W. (1976) **Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landvermessung**. Editorial Wittwer, Stuttgart, Alemania.
- HEISKANEN – MORITZ (1985) Geodesia Física. Traducción de “Physical Geodesy” (Ed Freeman, San Francisco – London 1967) editado por el Instituto Geográfico Nacional. Madrid, España.. (Excelente traducción por el Profesor Miguel J. Sevilla de la Universidad de Valencia, contiene además un capítulo breve de actualización elaborado por el Dr. Helmut Moritz para la edición española)
- HOFMANN WELLWENHOF – LICHTNEGGER – COLLINS (2001) GPS Theory and Practice, 5th Edition. Editorial Springer, Wien (Austria), New York (USA).
- HOFMANN WELLWENHOF – MORITZ (2005) Physical Geodesy. Editorial Springer, Wien (Austria), New York (USA).
- HORVAT E. (1961) **Cálculo de Coordenadas Geodésicas con Máquina**. Revista Cartográfica del Instituto Panamericano de Geografía e Historia (IPGH) Buenos Aires, Argentina.
- HORVAT E. (1969) Cálculo de Distancia y Acimut Entre Dos Puntos Dados por sus Coordenadas Geográficas. Revista Geodesia, Tomo XIII (1-2) M.O.P., La Plata, Argentina.
- IAG (1985) **The Geodetic Handbook**. Asociación Internacional de Geodesia (IAG), Paris, Francia.
- IHO (2005) Manual on Hydrography International Hydrographic Organization. Mónaco. Hay traducción al español (consultar cátedra de Hidrografía)
- IGM (actual IGN) Publicaciones Técnicas del Instituto Geográfico Militar (IGM):
- Nº 1 **Tablas Gauss – Krüger de Esquinas de cuadrículas**
  - Nº 2 **Tablas de Radios de Curvatura.**
  - Nº 3 **El Problema de la Medición de Bases Geodésicas** (Autor Ing. Heliodoro Negri)
  - Nº 6 **(IT6a). Instrucciones Técnicas para Trabajos Geodésicos.** Reemplazada por ITTC (Fascículos de Instrucciones Técnicas para Trabajos de Campo)
  - Nº 9 **Fórmulas y Tablas para el Cálculo de Coordenadas Gauss Krüger** (Autor Ing. Riggi O’Dwyer)
  - Nº 20 **Catálogo de 1170 Parejas y Tablas Auxiliares para el Método de Zinger**
  - Nº 29 **Coordenadas Gauss Krüger y Polares Esferóidicas** (Autor Ing. Esteban Horvat)
  - Nº 41 **Problemas de Cálculos Geodésicos para la Aplicación de Computadoras Electrónicas** (Autor Ing. Esteban Horvat)
  - Nº 43 **Nuevas Fórmulas para Calcular las Magnitudes Relacionadas con el Elipsoide** (Autor Ing. Esteban Horvat)
  - Nº 46 **Determinaciones Astronómicas Expeditivas** (Autor Agrim. Enrique Spiess). Buenos Aires, Argentina.
- INTROCASO A. (1997) Gravimetría. UNR Editora, Rosario, Argentina.
- KNEISSL M. (1956) **Hohenmessung, Techymetrie**. Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band III. Editorial Metzler,

- Stuttgart, Alemania.
- KNEISSL M. (1958) **Mathematische Geodäsie**. Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band IV. Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- KNEISSL M. (1963) **Feld und Landmessungs, Absteckungsarbeiten**. Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band II. Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- LAURILLA (1983) **Electronic Surveying in Practice**. Editorial J. Wiley & Sons, New York, USA.
- LEDERSTEGER K. (1968) **Astronomische und Physikalische Geodäsie** Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band V Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- LEICK A. (1995) **GPS Satellite Sureying 2<sup>nd</sup>. Ed** . Editorial John Willey & Sons, New York, USA
- LEMOINE – SMITH et al. (1998) **The Development of the joint NASA GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 96**. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, USA.
- LEVALLOIS J.J. (1970) **Geodesie Generale**. Editorial Eyrolles, Paris, Francia.
- LI – GÖTZE (2001) **Ellipsoid Geoid, Gravity, Geodesy and Geophysics**. Revista Geophysics. Vol. 66 N° 6 USA.
- MATEO J. (1968) **El Potencial Terrestre**. Observatorio Astronómico UNLP, La Plata, Argentina.
- MAYER F. (1965) **Cálculo Gráfico de Promedios Ponderales y Aplicaciones Relacionadas con la Compensación de Redes Altimétricas**. Revista Cartográfica. Instituto Panamericano de Geografía e Historia (IPGH). México.
- MAYER F. (1971) **Tablas para el Cálculo de Coordenadas Geodésicas y Otras Constantes desde Valores Planos Conformes Gauss – Krüger**. Publicación H – 305 del Servicio de Hidrografía Naval. Buenos Aires, Argentina.
- MAYER F. (1982) **El Problema de la Cartografía en Relación con los Sistemas Modernos de Navegación**. Boletín del Centro Naval N° 730. Buenos Aires, Argentina.
- MAYER F. (1992) **Algorithms for the Calculation of Geodetic Distances for Maritime Jurisdictional Boundaries**. The International Hydrographic Review. Monaco.
- MAYER F. (1993) **Cartographic Problems of Global Positioning**. The International Hydrographic Review. Monaco.
- MAYER F. (2002) **Posibilidad de Mejorar el sistema Altimétrico Argentino**. Temas de Geociencia, UNR Editora, Rosario, Argentina.
- MINGO – ORTIZ BASUALDO (1996) **Cálculo de Compensación**. Consejo Profesional de Agrimensura. Buenos Aires, Argentina.
- MUELLER I. I. (1969) **Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy**. Editorial Ungar, New York, USA.
- NÄUBAUER M. (1963) **Mathematische Grundlagen Ausgleichungsrechnung und Rechenhilfsmittel**. Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band I Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- NEGRI H. (1950) **Reconocimiento Trigonométrico de 1° y 2° Orden**. Facultad de Ingeniería UNLP. La Plata, Argentina.
- PAVLIS N. et al. (1994) **Tidal Models and Temporal Variations of the Global Sea Level Determined From TOPEX/POSEIDON Altimetry**. International Symposium o Marine Positioning (INSMAP), Hannover, Alemania.
- RAMSAYER K. (1970) **Geodätische Astronomie**, Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band IIa Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.

- RINNER – BENZ (1966) **Die Entfernungsmessung mit Elektromagnetische Wellen und ihre Geodätische Anwendung.** Handbuch der Vermessungskunde J-E.K. Band VI Editorial Metzler, Stuttgart, Alemania.
- SAASTAMOINEN J. (1968) **Sobre la Curvatura de la Trayectoria de Ondas Electromagnéticas** (Traducido por F. Mayer Revista Geodesia tomo XII n° 2 M.O.P. (Dir, de Geodesia), La Plata, Argentina.
- SCHWARZ – LACHAPELLE (1983) **Geodesy in Transition.** University of Calgary, Alberta, Canada.
- SEEBER G. (2003) **Satellite Geodesy 2<sup>nd</sup>.** Ed. Editorial W. de Gruyter, Berlin (Alemania) New York (USA)
- SHN (ANUAL) Suplemento de Almanaque Náutico y Aeronáutico. Servicio de Hidrografía Naval, Buenos Aires, Argentina. (Disponible en disco compacto –CD- y por Internet)
- SHUREMAN P.A. (1958) **Manual of Harmonic Analysis and Prediction of tides. Special** Publication n° 98 Coast & Geodetic Survey. Washington, USA.
- TARDI – LACLAVERE (1958) **Traite de Geodesia.** Editorial Gauthier – Villard. Paris, Francia.
- THOMAS P.D. (1968) **Conformal Projections in Geodesy and Cartography.** Special Publication n° 251, Coast & Geodetic Survey, Washington, USA.
- THOMAS P.D. (1970) **Spheroidal Geodesics, Reference Systems & Local Geometry.** Special Publication n° 138, Naval Oceanographic Office. Washington, USA.
- TROGE W. (1994) **The Involvement of IAG in Marine Geodesy.** Proceedings of the International Symposium on Marine Positioning (INSMAP), Hannover, Alemania
- TORGE W. (2001) **Geodesy, 3<sup>rd</sup>.** ed. Editorial W.de Gruyter, Berlin (Alemania), New York (USA)
- USACE (2002) **Geodetic and Control Surveying.** U.S Army Corps of Engineers. Washington, USA.
- USACE (2003) **NAVSTAR Global Positioning Systems Surveying.** U.S Army Corps of Engineers. Washington, USA.
- VANICEK – KRAKIWSKY (1984) **Geodesy. The Concepts.** Editorial Holland Publ. Co Amsterdam (Holanda) , New York (USA), Oxford (Reino Unido – UK-. Hay una edición mejorada (1986) de la editorial Elsevier, Amsterdam, Holanda.
- ERGOS – SIDERIS (1998) **On Improving the Determination of the Gravimetry Field by Estimation the Bottom Ocean Topography with Satellite Altimetry and Shipborne Gravity Data.** Department of Geomatics Engineering. Univer of Clagary, Canada.
- VINCENY T. (1975) **Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations.** Revista: Survey Review XXII n° 176, Reino Unido (UK)
- VINCENY T. (1986) **Application of the Chord Method to Solutions of Geodetic Lines.** Revista: Surveying & Mapping Vol. 46 n° 4, USA.
- VINCENY T. (1987) **On the Use of GPS Vectors in Densification Adjustments.** Revista: Surveying & Mapping Vol. 47 n° 2, USA.
- VIVES T-J- (1971) **Astronomía de Posición.** Editorial Alhambra S.A., Madrid, España.
- WOLF BRINKER (1998) **Topografía.** Editorial Alfaomega, México.
- ZAKATOV P.S. (1981) **Curso de Geodesia Superior.** Editorial MIR, Ex Unión

Soviética (URSS).

ACLARACIONES (S/ Bibliografía)

EGM, citado en la obra de LEMOINE – SMITH et al (1998) significa EARTH GRAITATIONAL MODEL.

Et al. Figura a continuación de algunas citas de uno o dos autores. Es una abreviatura de la expresión latina ET ALTRI, que significa Y OTROS.

GSFC Goddard Space Flight Center

IGM – IGN El Instituto Geográfico Militar (IGM) argentino en el año 2008 pasó a ser Instituto Geográfico Nacional (IGN). Las publicaciones citadas corresponden al IGM, por la época en la que fueron editadas.

J.E.K Figura a continuación de las citas a la obra HANDBUCH DER VERMESSUNGSKUNDE (en alemán) y corresponde a los responsables académicos históricos de su edición

J. = Jordan

E. = Eggert

K. = Kneissl

En la primera presentación, a fines del siglo XIX el responsable fue J., en la segunda, alrededor de 1935 fueron J. – E. y en la tercera (1956 a 1970) figuran J.E.K..

En rigor, esta última presentación coordinada por el Dr. Max Kneissel, figura como 10<sup>a</sup> edición, ello se debe a que se fueron intercalando ediciones, con distintas actualizaciones (sobre todo de las obras de J. y J. – E.) Si bien Kneissel preparó algunos tomos (como los II, III y IV) cada uno tiene un responsable específico (como Näubauer en el Tomo I). La obra completa cuenta con 6 tomos principales y otros tantos complementarios (como el Va de Graf)

NASA National Aeronautics and Space Administration (USA)

NIMA National Imagery and Mapping Administration (USA)

NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration (USA)

UNLP Universidad Nacional de La Plata

UNR Universidad Nacional de Rosario

URSS Unión de Repúblicas Soviéticas Socialistas (designación usada para la ex Unión Soviética que abarcaba la actual Confederación Rusa y una serie de países asiáticos que luego se independizaron)

El listado bibliográfico corresponde a obras consultadas para la elaboración de los presentes apuntes. Muchas de esas publicaciones son difíciles de consultar (por no estar en las bibliotecas o por razones idiomáticas). Por eso hemos subrayado las más accesibles. Ejemplo HORVAT E. (1969).

