

# RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE HANSEN POR UN PROCEDIMIENTO GRÁFICO

MARTÍN PASTOR, Andrés  
Universidad de Sevilla, España  
EUITA, Departamento de Ingeniería Gráfica  
[archiamp@us.es](mailto:archiamp@us.es)

## RESUMEN

Utilizando un procedimiento puramente gráfico y con el apoyo de un programa de CAD, se propone una solución novedosa y precisa al problema conocido como *problema de Hansen*.

La solución al problema de Hansen, se puede encontrar de forma analítica en numerosa bibliografía, sin embargo la resolución gráfica no es frecuente, estando ésta basada en la búsqueda indirecta de una figura equivalente a la solución real a partir de un lado fingido, siendo éste el otro nombre con el que se conoce al problema: *problema del lado fingido*.

La solución al problema que se propone en esta comunicación se obtiene de forma directa a partir únicamente de datos reales y utiliza para su resolución la geometría del triángulo y el círculo.

Gracias a los programas de CAD, los trazados “a escuadra y compás” (la geometría del triángulo y del círculo) resurgen de forma paradójica en nuestro tiempo, no sólo como potentes herramientas de precisión, sino como coherentes sistemas metodológicos.

**Palabras clave:** Topografía, geometría, métodos gráficos, método de intersecciones.

**Grupo temático:** Topografía.

## 1. Introducción

La inmersión de las aplicaciones informáticas y los programas de Diseño Asistido por Ordenador (CAD) en el ámbito de la Topografía, hace que nos replanteemos la eficacia, desde el punto de vista operativo y también didáctico, de las resoluciones gráficas a ciertos problemas topográficos.

Las resoluciones gráficas, tan denostadas en la bibliografía tradicional, por carecer de la suficiente precisión<sup>1</sup>, han sido sustituidas una tras otra, por las resoluciones analíticas paralelas de planteamiento matemático.

Esta falta de confianza en los instrumentos de trazado, ha favorecido una tendencia histórica de concebir cualquier problema geométrico como un problema numérico, llegando incluso a prescindir del problema geométrico como un asunto relacionado con un planteamiento gráfico primitivo. La maquinaria matemática se ha encargado de dotar de la suficiente precisión a la imprecisa maquinaria del instrumental gráfico.

Nos hemos visto obligados a pensar de forma paralela, a veces olvidando u obviando otros razonamientos geométricos implícitos en los ejercicios.

Sin embargo, la concepción abstracta del problema geométrico como problema numérico, ha sido uno de los pilares del progreso. La “numerización” del conocimiento humano, iniciada ya por los pitagóricos, es hoy una realidad consagrada en todas las disciplinas técnicas. ¿Qué ocurre con la geometría que se dibuja o con las disciplinas que en ellas se apoya? La traducción en forma de ecuaciones matemáticas de los trazados gráficos primigenios, han dotado muchas veces de lenguajes paralelos a planteamientos y resoluciones geométricas.

Pero hoy en día nos situamos ante un nuevo panorama. Aquellos instrumentos deficitarios se han sustituido por otros, que tienen hoy una precisión inconmensurable: hablamos de los sistemas de CAD. Esta aportación instrumental revaloriza los estudios gráficos de problemas geométricos, aportando una maquinaria de cálculo igual de válida que la numérica.

Podemos hacer una división, una raíz cuadrada, una intersección directa o inversa, la sección de un poliedro con un plano, etc., utilizando procedimientos gráficos, con la misma precisión que por procedimientos analíticos<sup>2</sup>.

El hecho de que ya no se explique en muchas carreras técnicas la forma de resolver una raíz cuadrada de forma gráfica es bastante esclarecedor. ¿Estamos empezando a olvidar parte del pensamiento gráfico heredado?

Gracias a nuestros nuevos instrumentos de expresión gráfica, los trazados “a escuadra y compás” (la geometría del triángulo y del círculo) resurgen, de forma paradójica en nuestro tiempo, no sólo como potentes herramientas de precisión, sino como coherentes sistemas metodológicos.<sup>3</sup>

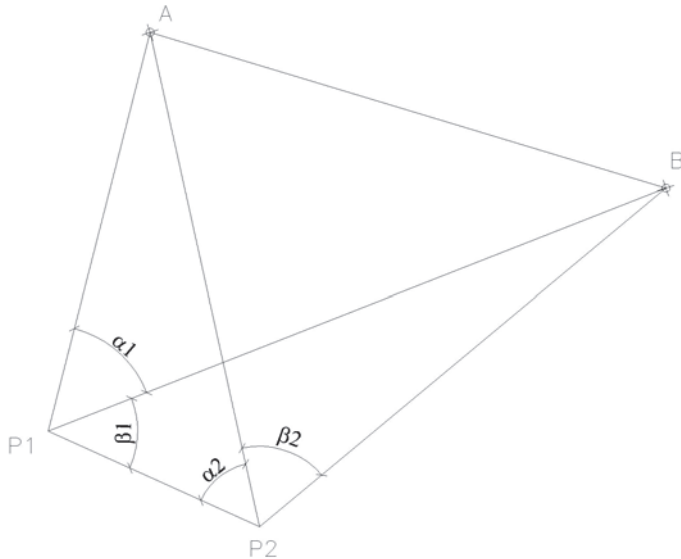
Desde el punto de vista didáctico, la resolución gráfico-geométrica de algunos problemas subyacentes en la topografía, ayuda a comprender los fundamentos geométricos, la lógica geométrico-deductiva en el alumno, y recupera del olvido construcciones básicas de la geometría plana, que pensamos deben estar vigentes en la educación técnica universitaria.

Un ejemplo de todo esto podríamos verlo en la resolución gráfica del problema de Hansen, resolución gráfica que casi ninguna bibliografía consultada aborda de forma directa<sup>4</sup>.

## 2. Desarrollo del trabajo.

### 2.1 Planteamiento clásico.

El problema de Hansen es un problema de intersección inversa, mediante el cual podemos hallar las coordenadas de los puntos P1 y P2, realizando desde ellos lecturas angulares a dos puntos inaccesibles de coordenadas conocidas A y B.



Los únicos datos de partida son cuatro lecturas angulares:  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  y las coordenadas de los puntos A y B.

“La solución del problema consiste en determinar una figura semejante a la formada por los cuatro puntos, partiendo de un valor arbitrario que se le da a la base auxiliar P1P2, de este valor se deduce uno para el lado AB y como conocemos el valor real de éste, determinado por las coordenadas de sus extremos, podemos establecer la relación de semejanza de ambas figuras. Una vez conocida la relación de semejanza, determinamos los verdaderos valores de AP y BP, y por radiación desde A y B se determinan las coordenadas de P”<sup>5</sup>

Resolución analítica clásica<sup>6</sup>:

Partiremos de un valor arbitrario del segmento P1P2, por ejemplo la unidad, calculando a partir de él una figura semejante a la del terreno.

Del triángulo (A-P1-P2) haciendo P1P2= 1 deducimos:

$$AP1 = [\text{sen } \alpha_2] / [\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)]$$

$$AP2 = [\text{sen } \alpha_1] / [\text{sen } (\alpha_1 + \alpha_2)]$$

De la misma manera del triángulo (B-P1-P2) se obtiene:

$$BP1 = [\text{sen } \beta_2] / [\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)]$$

$$BP2 = [\text{sen } \beta_1] / [\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)]$$

En los triángulos (P1-A-B) y (P2-A-B) acabamos de calcular dos lados en cada uno de ellos y si es conocido el ángulo comprendido podremos obtener, por tanto, los ángulos que buscamos por las fórmulas:

$$Tg^{1/2} (\gamma_1 - \gamma_2) = Tg^{1/2} (\gamma_1 + \gamma_2) * [(BP_1) - (AP_1)] / [(BP_1) + (AP_1)]$$

$$Tg^{1/2} (\delta_1 - \delta_2) = Tg^{1/2} (\delta_1 + \delta_2) * [(BP_1) - (AP_1)] / [(BP_1) + (AP_1)]$$

En los segundos miembros se verifica:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2} = 100^g - (\alpha_1 - \beta_1) / 2 = M_1$$

$$(\delta_1 + \delta_2)^{1/2} = 100^g - (\beta_2 - \alpha_2) / 2 = M_2$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones deducimos:

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^{1/2} = N_1$$

$$(\delta_1 - \delta_2)^{1/2} = N_2$$

Obteniendo en definitiva:

$$\gamma_1 = M_1 + N_1 \qquad \gamma_2 = M_2 + N_2$$

$$\delta_1 = M_1 - N_1 \qquad \delta_2 = M_2 - N_2$$

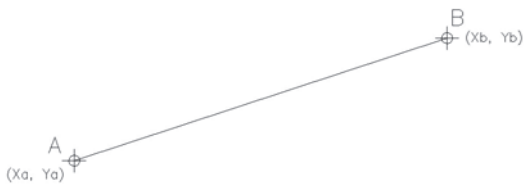
Los ángulos son iguales a la figura semejante que hemos calculado. Podremos obtener ahora las coordenadas del punto P1 y P2 tomando AB por base.

Esta manera de abordar el problema, partiendo de una figura semejante, tiene el mismo fundamento que la única solución gráfica encontrada hasta la fecha, estando ésta basada en la búsqueda indirecta de una figura equivalente a la solución real a partir de un lado fingido, siendo éste el otro nombre con el que se conoce al problema: *problema del lado fingido*.<sup>7</sup>

Creo interesante señalar estas concomitancias en cuestiones procedimentales, que derivan de una manera preestablecida de enfocar el planteamiento del ejercicio.

Nuestra propuesta de *solución gráfica* no ha sufrido esa influencia, y ha buscado otras relaciones geométricas. Se ha pretendido abordar el problema geométrico sin partir de un valor arbitrario inicial en una de las bases.

## 2.2. Solución gráfica propuesta



Planteamiento del ejercicio:

Dado una base definida por dos puntos A y B, de coordenadas conocidas, hallar las coordenadas de los puntos P1 y P2, conocidos los ángulos entre las alineaciones y la situación relativa de los puntos entre sí.

$\alpha_1$   
 $\beta_1$   
 $\alpha_2$   
 $\beta_2$

$\alpha_1$  : A-P1-B  
 $\beta_1$  : B-P1-P2  
 $\alpha_2$  : P1-P2-A  
 $\beta_2$  : A-P2-B

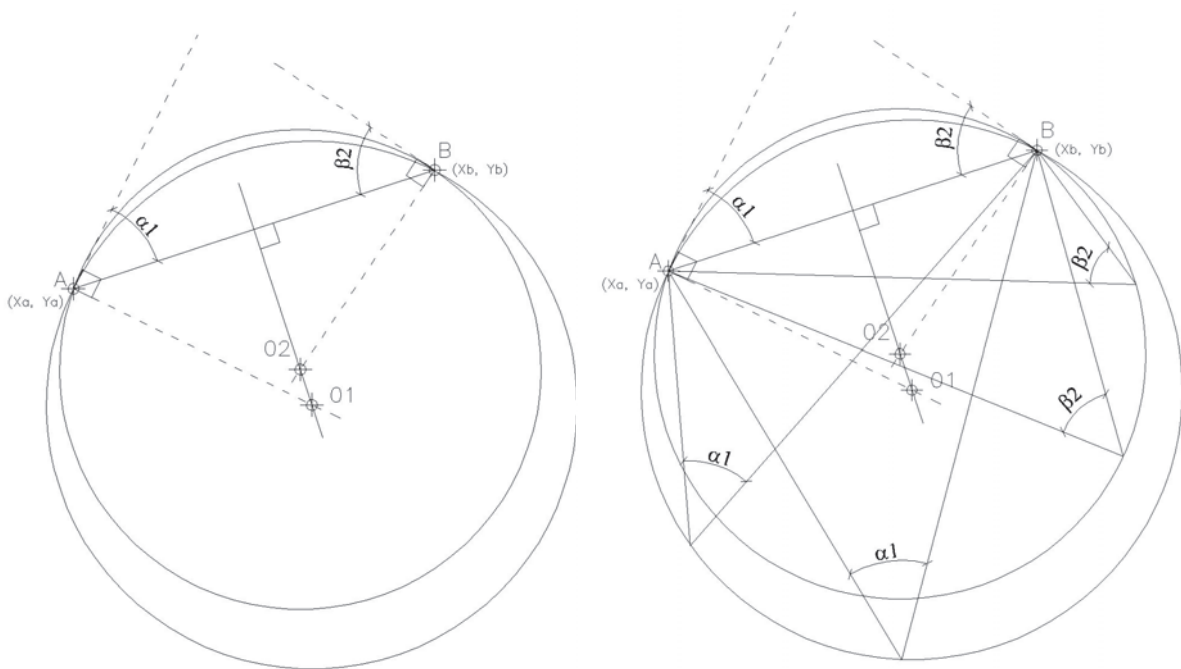
Representamos los puntos A y B en un programa de CAD según sus coordenadas conocidas.

Si conocemos el ángulo  $\alpha_1$  entre alineaciones A-P1-B, podemos hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se cumple esa condición. Para ello realizamos el arco capaz de  $\alpha_1$  para los extremos del segmento AB.

Igualmente calculamos el arco capaz de  $\beta_2$  para AB.

El punto P1 debe estar situado en el arco capaz de centro O1. Sólo desde alguno de sus puntos podremos abarcar exactamente un ángulo  $\alpha_1$  entre los extremos de la base A-B.

Del mismo modo P2 debe estar en algún punto del arco capaz de centro O2.



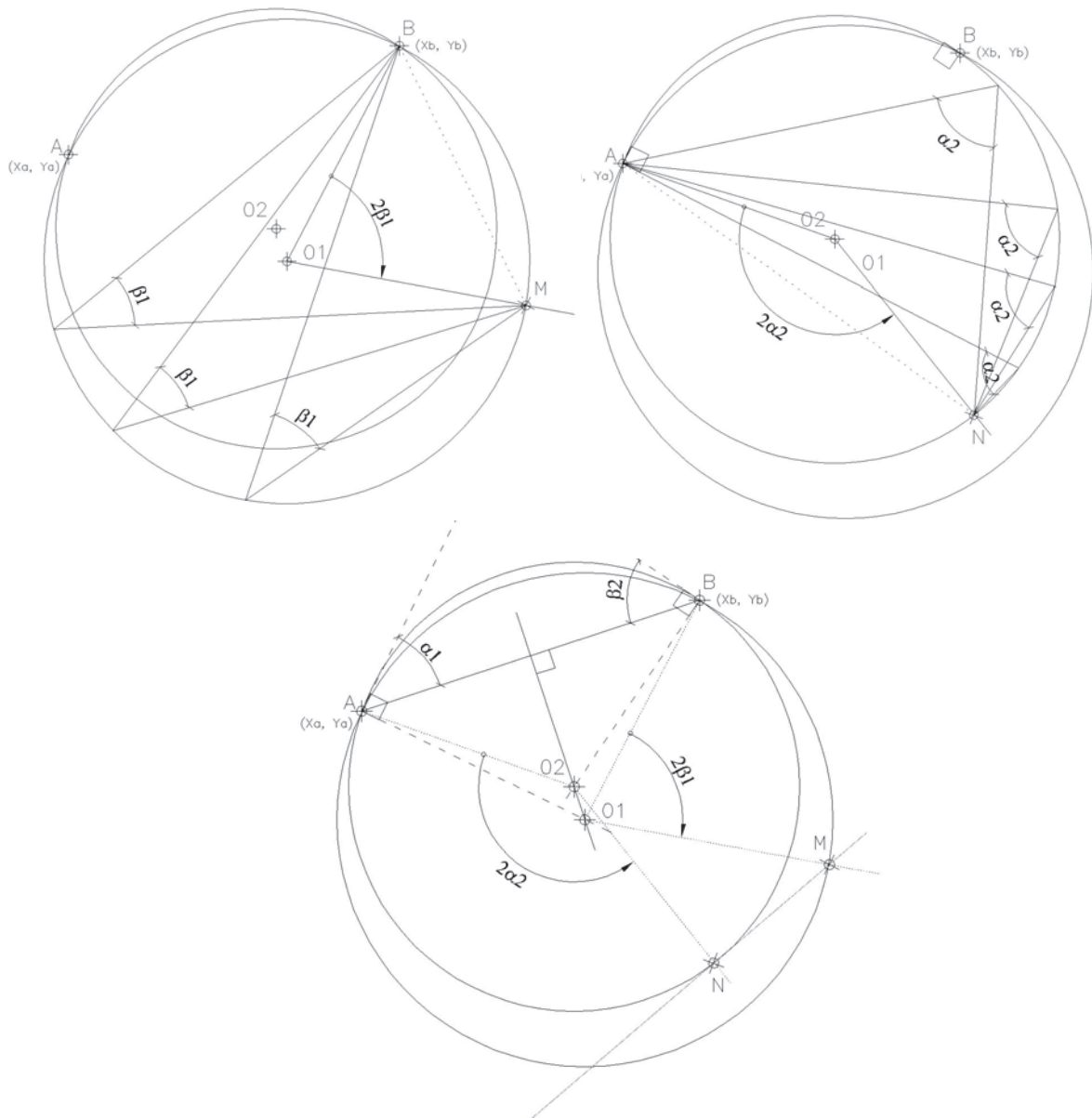
Aplicamos la relación de ángulo doble existente ente el ángulo comprendido desde un punto del arco capaz para un segmento dado y el ángulo comprendido desde el centro del propio arco.

Sabemos, por la situación relativa de los puntos, que ángulo  $\beta_1$  se sitúa a la derecha de la alineación P1-B. Se dedujo que P1 esta situado en el arco capaz 01, por lo tanto, trazaremos un ángulo  $2\beta_1$  desde el centro de la circunferencia 01 hacia la derecha del segmento 01-B. Hallamos el punto M del arco capaz 01.

Los extremos de la cuerda B-M comprenderán un ángulo  $\beta_1$  desde cualquier punto de su arco capaz en 01.

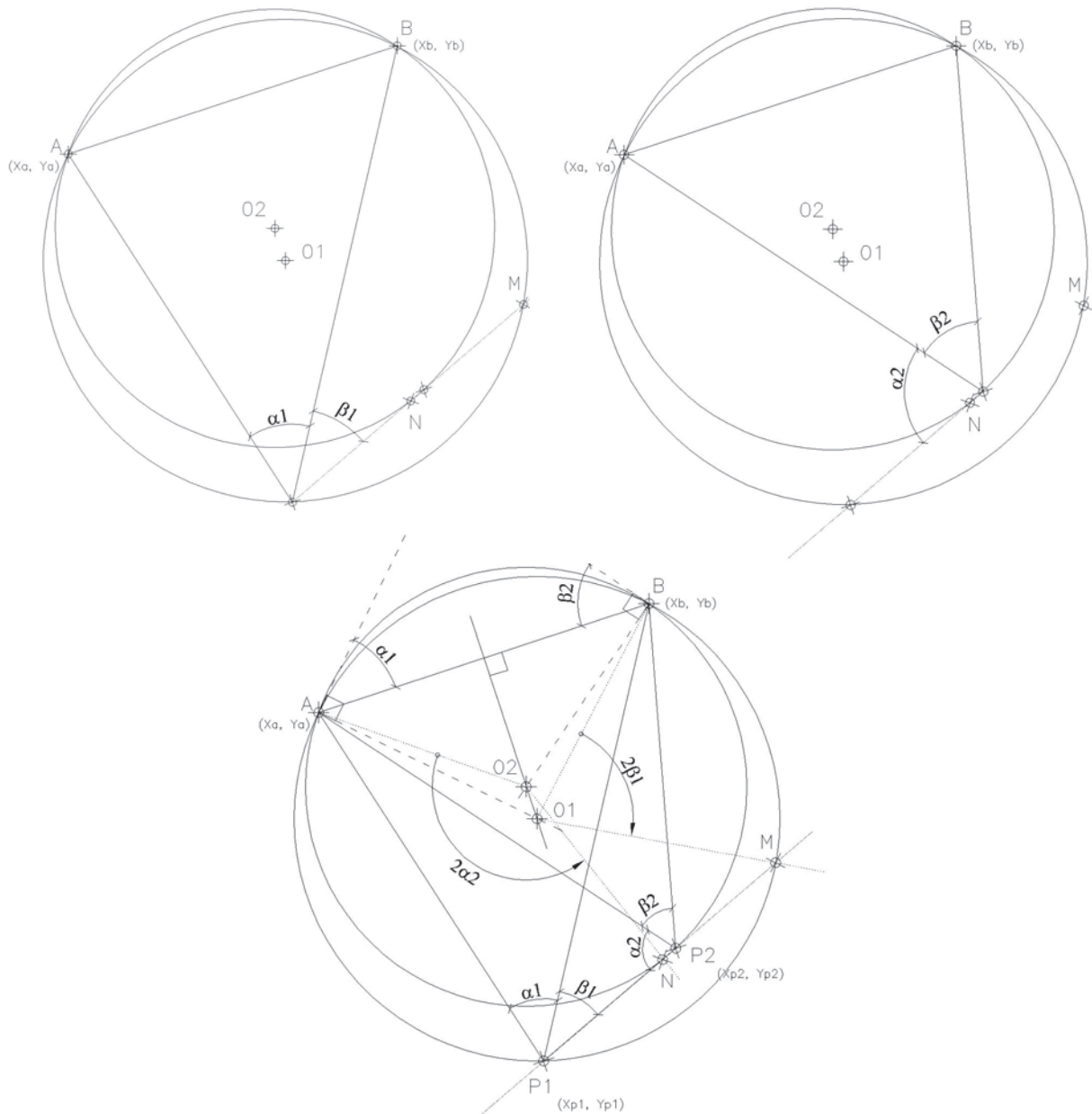
El ángulo  $\alpha_2$  se sitúa a la izquierda de la alineación P2-A. P2 ya se dedujo estar situado en el arco capaz 02. Ahora trazaremos un ángulo  $2\alpha_2$  desde el centro 02 hacia la izquierda del segmento 02-A. Hallamos el punto N del arco capaz 02.

Los extremos de la cuerda A-N comprenderán un ángulo  $\alpha_2$  desde cualquier punto de su arco capaz en 02.



Llegados a este punto hacemos la siguiente deducción:

- Desde cualquier punto del arco capaz 01, se abarca  $\alpha_1$  entre los extremos de la cuerda A-B y  $\beta_1$  entre los extremos de la cuerda B-M.
- $\beta_1$  es a su vez el ángulo comprendido entre las alineaciones P1-B y P1-P2
- Por lo tanto la dirección P1-M es coincidente a P1-P2
  
- Desde cualquier punto del arco capaz 02 se abarca  $\beta_2$  entre los extremos de la cuerda A-B y  $\alpha_2$  entre los extremos de la cuerda A-N.
- $\alpha_2$  es el ángulo comprendido entre las alineaciones P2-A y P2-P1
- Por lo tanto la dirección P2-N es coincidente a P2-P1
  
- La dirección P1-P2 coinciden con P1-M y P2-N, por lo tanto P1-P2 coincide también con la dirección M-N.
  
- Como conclusión, los puntos M y N nos definen la recta, que en su intersección con la circunferencia 01, determina el punto P1 y en su intersección con 02, determina el punto P2. Quedando los puntos definidos en una solución única.



### 3. conclusiones

Las coordenadas de los puntos obtenidos por este procedimiento gráfico pueden ser consultadas directamente por el programa de CAD utilizado, siendo los resultados igual de fiables que con un desarrollo analítico-matemático.

Debemos replantearnos la eficacia desde el punto de vista operativo y también didáctico, de las resoluciones gráficas a ciertos problemas geométricos en general y topográficos en particular.

Los trazados “a escuadra y compás” (la geometría del triángulo y del círculo) resurgen de forma paradójica en nuestro tiempo con las herramientas de CAD, no sólo como potentes herramientas de precisión, sino como coherentes sistemas metodológicos.

### Referencias

---

[<sup>1</sup>] “Resolución grafica:(...)No es necesario hacer notar que un método tan impreciso no podrá recomendarse sino en muy limitadas circunstancias y nunca cuando hayan de servir de apoyo a determinados levantamientos”. F. DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, *Topografía abreviada*, Madrid, 1997, p. 217

[<sup>2</sup>] Igualmente ocurre en otras disciplinas como la “Estática Gráfica del Sólido Rígido”, que se pueden apoyar en programas de CAD.

[<sup>3</sup>] En este sentido, merecen mención especial los lenguajes de programación basados exclusivamente en trazados gráficos para sistematizar operaciones, que de no ser así, deberían ser programadas en ecuaciones matemáticas.

[<sup>4</sup>] La única solución gráfica encontrada consiste en hallar una figura semejante a la solución buscada y posteriormente restituir la semejanza.

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., *Topografía abreviada*, Madrid, 1997, p. 217

VALDÉS DOMÉNECH, Francisco, *Topografía*, Barcelona, 1985, p. 245

[<sup>5</sup>] Op cit, *Topografía*, Barcelona, 1985, p. 245 y 246

[<sup>6</sup>] DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., *Topografía abreviada*, Madrid, 1997, p.217

[<sup>7</sup>] Op cit. Resolución gráfica basado en la semejanza de figuras P.217

VALDÉS DOMÉNECH, Francisco, *Topografía*, Barcelona, 1985, p. 245