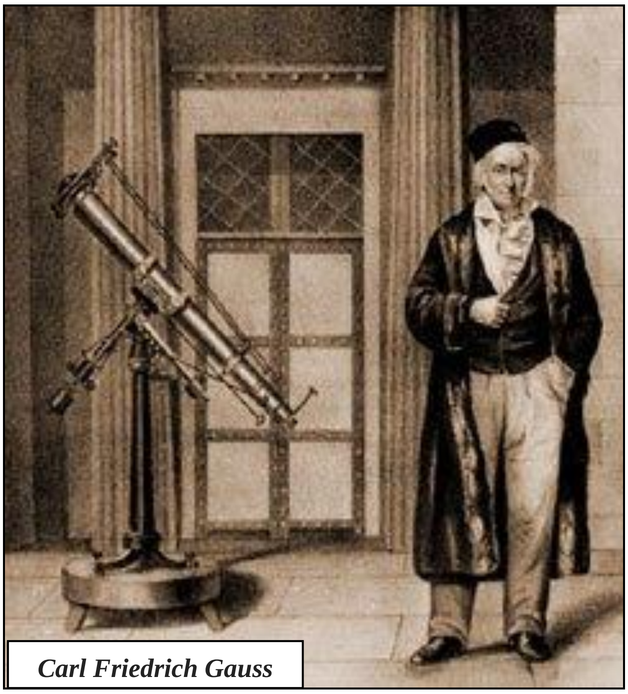
Departamento de Agrimensura
Facultad de Ingeniería - UNLP
Fundamentos de Instrumental.

TEORÍA DE ERRORES.



Carl Friedrich Gauss

TEORÍA DE ERRORES

Necesidad de su estudio.

Todas las operaciones topográficas se reducen, en último extremo, a la medida de distancias y a la medida de ángulos; la vista humana, como cualquiera de los demás sentidos, tiene un límite de percepción y, por consiguiente, cualquier medida que obtengamos auxiliándonos de la vista, no podrá ser sino aproximada.

Los instrumentos tienen por objeto, no solo, efectuar la medida sino además ampliar la percepción visual. Disminuyendo los errores a causa de nuestros sentidos pero no eliminándolos.

Los instrumentos no son perfectos y se cometerán errores a causa de su manejo. Algunos instrumentos se aproximan más que otros al verdadero valor de una medición, pero ninguno puede obtenerlo.

Existen además errores provocados por circunstancia externas (Variación de temperatura, viento, etc.).

Por lo tanto, dentro de cierto límite, no hay certeza sobre la medida obtenida.

F. Domínguez García Tejero -
"Topografía General y Aplicada"

Toda medida que realicemos tiene errores y por lo tanto su valor verdadero nunca se conocerá. De esto se desprende que el error verdadero tampoco puede conocerse, ya que su valor se obtiene como diferencia entre la medición y el valor verdadero.

Tratamiento De Los Errores De Medición.

Dado que los errores siempre estarán presentes en las mediciones es importante:

- Conocer los distintos tipos de errores, sus causas, posibles magnitudes y su propagación.
- La elección del instrumental y método de trabajo que permita reducir los errores a magnitudes tolerables.
- Definir correcciones o compensaciones de los errores. En algunas situaciones se deberán descartar las mediciones.

Causas de los errores.

Naturales: Variaciones en la temperatura, presión o humedad. Acción del viento, la gravedad o el campo magnético de la Tierra.

Instrumentales: Se deben a imperfecciones en la construcción o ajuste de los instrumentos y del movimiento de sus partes individuales. Por ejemplo, las graduaciones sobre una cinta pueden no estar perfectamente espaciadas. El efecto de muchos errores instrumentales puede reducirse, e incluso eliminarse, adoptando procedimientos topográficos adecuados o aplicando correcciones calculadas.

Personales: Surgen de las limitaciones de los sentidos humanos (Vista o tacto). Ejemplo: Puntería con un teodolito.

Clasificación de los errores.

Mediciones repetidas de una dada magnitud, por un mismo observador, con el mismo instrumento y en circunstancias análogas, no conducen siempre al mismo resultado. Este hecho muestra que ellas están afectadas de errores que es propio atribuir a los agentes que concurren a la medición: el observador, el instrumento y las condiciones del ambiente en que se desarrollan las experiencias.

Ing. Félix Aguilar -
"Lecciones de Geodesia".

Estos errores de observación se clasifican en tres categorías:

- Equivocaciones o Errores groseros.
- Errores Sistemáticos.
- Errores Accidentales.

Errores groseros (equivocaciones).

Son causados por el observador y debido a descuidos, fatiga, mala concepción del problema o inconvenientes en la comunicación.

Ejemplo:

Medida: 156,14 Anotación: 1<u>65</u>,14

Se detectan trabajando de modo metódico y realizando controles sobre las observaciones. Si una medición está afectada por este tipo de error debe ser descartada y se realiza nuevamente. Caracteriza a los errores groseros el hecho de que su magnitud exceda la que puede preverse teniendo en cuenta los medios con que se opera. Pero hay excepciones, errores groseros con valores reducidos que son difíciles de detectar:

Medida: 156,14 Anotación: 156,1<u>1</u>

En el ejemplo anterior un descuido durante la anotación de la medida hace que se cometa un error de - 3 cm. En proporción a la distancia medida, esta es una diferencia pequeña pero no obstante es un error grosero.

Errores sistemáticos (Sesgos).

Las condiciones que ocasionan errores sistemáticos se deben a leyes físicas que se pueden representar matemáticamente. Por lo tanto, si se conocen las condiciones y se pueden medir, es posible calcular una corrección y aplicarla a los valores observados[1].

[1] Wolf & Ghilani, "Topografía", Undécima edición, Cap. 3: Teoría de errores.

Son el resultado de factores que comprenden el medio ambiente, los instrumentos y el observador. Este tipo de errores mantienen su signo y magnitud mientras que las condiciones de medición no cambien y por lo tanto son acumulativos.

Ejemplos:

- Dilatación de una cinta de Agrimensor.
- Error de índice.
- Nivel tubular descorregido.

Errores accidentales o aleatorios.

Los errores aleatorios son los que quedan después de haber eliminado los errores groseros y sistemáticos. Son ocasionados por factores que quedan fuera del control del observador, obedecen las leyes de la probabilidad y se les llama también errores accidentales. Estos errores están presentes en todas las mediciones topográficas.

Sus magnitudes y signos son consecuencia del azar y por lo tanto no existen métodos para calcularlos o eliminarlos absolutamente, pueden definirse intervalos donde acotarlos con un cierto nivel de confianza o probabilidad. Son compensatorios, esto significa que tienden a cancelarse parcialmente entre sí en una serie de mediciones.

Ejemplos:

- Error de lectura en un teodolito.
- Error de puntería.
- Estimación entre graduaciones de una cinta.

Los errores groseros y los sistemáticos pueden ser prácticamente eliminados de las mediciones u observaciones, pero **siempre habrá errores accidentales**. Estos tiene un comportamiento aleatorio, sus magnitudes y la frecuencia con que ocurren siguen las leyes de la probabilidad.

Se supondrá que todas las equivocaciones y errores sistemáticos han sido eliminados antes de considerar los errores aleatorios.

Los errores accidentales siguen las leyes de la probabilidad. La Probabilidad se puede definir cono la razón entre el número de veces que puede ocurrir un resultado sobre el número total de posibilidades.

Si un resultado puede ocurrir de ***m*** maneras y la no ocurrencia de ***n*** maneras, la probabilidad de que ocurra es ***m/(m + n)***. La probabilidad de que cualquier resultado ocurra es una fracción entre *0* y *1*, el cero indica la imposibilidad y el *1* la certeza absoluta. La suma de las posibilidades de ocurrencia y no ocurrencia es 1.

Probabilidad de que al lanzar un dado salga un *dos*= 1/6

Probabilidad de que al lanzar un dado **No** salga un *dos*= 5/6

La probabilidad de que salga cualquier número del dado es:

$$1/6+ 1/6+ 1/6+ 1/6+ 1/6+ 1/6 = 1$$

Precisión y exactitud.

La precisión tiene relación con el grado de dispersión de un conjunto de mediciones. Permite evaluar la calidad de una serie de observaciones en base a los valores de las discrepancias. A menor discrepancia entre las mediciones individuales más alta precisión. El grado de precisión alcanzable depende de la sensibilidad del instrumento y de la habilidad del observador.

La precisión de una medición o grupo de mediciones tiene relación con la magnitud de los errores accidentales presentes en ellas.

La exactitud denota la aproximación absoluta de las observaciones a la medida verdadera (Desconocida). La exactitud de las mediciones depende de la existencia de errores sistemáticos en las mismas.

Comportamiento de los errores accidentales (postulados de Gauss).

En topografía casi siempre los errores se comportan de acuerdo a distribuciones normales o cerca de lo normal, por lo que en este apunte se supone esta condición.

Postulados de Gauss:

- Los errores accidentales pequeños ocurren con mayor frecuencia que los grandes; es decir, su probabilidad es mayor.
- Los errores accidentales grandes ocurren con poca frecuencia y son, por tanto, menos probables; en el caso de los errores con distribución normal, los excepcionalmente grandes pueden ser equivocaciones en y no errores aleatorios.
- Los errores accidentales positivos y negativos de la misma magnitud ocurren con igual frecuencia, es decir, son igualmente probables. La campana de Gauss es simétrica, por lo que el valor más probable de una seria de mediciones, hechas con el mismo equipo y procedimientos, es la media aritmética (o simplemente media).

Valor más Probable.

Para una sola incógnita, como la longitud de una línea, que ha sido medida directa e independientemente varias veces usando el mismo equipo y procedimiento, la primera medición determina un valor para la longitud y todas las mediciones adicionales son redundantes. El valor más probable en este caso es la media aritmética, definida como:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

x_i: observaciones

n: número de observaciones.

Errores aparentes o Residuos.

Una vez calculado el valor más probable de una magnitud, es posible calcular los errores aparentes o residuos (v_i). Estos últimos son la diferencia entre las mediciones y el valor más probable:

$$v_i = x_i - \bar{X}$$

Los errores verdaderos no pueden calcularse pero los residuos sí.

Características del Valor más Probable.

1.- La sumatoria de todos los residuos de una serie de observaciones es igual a cero.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad => \qquad n\,.\bar{X} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \cdots + (x_n - \bar{X})$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n.\bar{X} = 0$$

2.- La sumatoria de los cuadrados de los residuos es mínima.

$$v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + \cdots + v_n^{\,2} : mínima$$

Ya que su primera derivada es igual a cero.

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

Medidas de Precisión.

Para poder determinar el grado de precisión de una medida o grupos de medidas se utiliza un parámetro denominado desviación estándar. Para poder entender su origen se analiza un ejemplo de medición angular extraído del libro “Topografía” de los autores Wolf & Ghilani. Se realizaron 100 repeticiones de una dirección medida con un teodolito, esas mediciones se encuentran libre se errores groseros y sistemáticos. Por una cuestión de comodidad se indica el valor angular completo para la primer medición y para el resto solo se indican los segundos, ya que debido a la precisión del teodolito usado las variaciones en las medidas solamente aparecen en los segundos.

En la primera columna la tabla 1 se han ordenado las observaciones angulares de manera que se inicia por el valor medido más pequeño, y se enlistan en orden creciente. Si el valor se obtuvo más de una vez, se anota en la segunda columna el número de veces que apareció o su *frecuencia*. El valor más chico medido fue 23°43’19,5” y el más grande 23°43’30,8”. Se puede apreciar que las mediciones en la parte central del intervalo son las más frecuentes.

Para poder analizar los datos medidos se elabora un histograma, este es una gráfica de barras que muestra los tamaños de las medidas (o sus residuos) contra su frecuencia de aparición. Se obtiene una impresión visual del patrón de distribución de las mediciones (o sus residuos).

Tabla 1 ("Topografía" - Wolf & Ghilani.). Valor más probable (promedio): 27°43'24,9"

Observed Value (1)	No. (2)	Residual (Sec) (3)	Observed Value (1 Cont.)	No. (2. Cont.)	Residual (Sec) (3 Cont.)
27°43′19.5″	1	5.4	27°43′25.1″	3	−0.2
20.0	1	4.9	25.2	1	−0.3
20.5	1	4.4	25.4	1	−0.5
20.8	1	4.1	25.5	2	−0.6
21.2	1	3.7	25.7	3	−0.8
21.3	1	3.6	25.8	4	−0.9
21.5	1	3.4	25.9	2	−1.0
22.1	2	2.8	26.1	1	−1.2
22.3	1	2.6	26.2	2	−1.3
22.4	1	2.5	26.3	1	−1.4
22.5	2	2.4	26.5	1	−1.6
22.6	1	2.3	26.6	3	−1.7
22.8	2	2.1	26.7	1	−1.8
23.0	1	1.9	26.8	2	−1.9
23.1	2	1.8	26.9	1	−2.0
23.2	2	1.7	27.0	1	−2.1
23.3	3	1.6	27.1	3	−2.2
23.6	2	1.3	27.4	1	−2.5
23.7	2	1.2	27.5	2	−2.6
23.8	2	1.1	27.6	1	−2.7
23.9	3	1.0	27.7	2	−2.8
24.0	5	0.9	28.0	1	−3.1
24.1	3	0.8	28.6	2	−3.7
24.3	1	0.6	28.7	1	−3.8
24.5	2	0.4	29.0	1	−4.1
24.7	3	0.2	29.4	1	−4.5
24.8	3	0.1	29.7	1	−4.8
24.9	2	0.0	30.8	1	−5.9
25.0	2	−0.1	Σ = 2494.0	Σ = 100	

Mean = 2494.0/100 = 24.9″

Most Probable Value = 27°43′24.9″

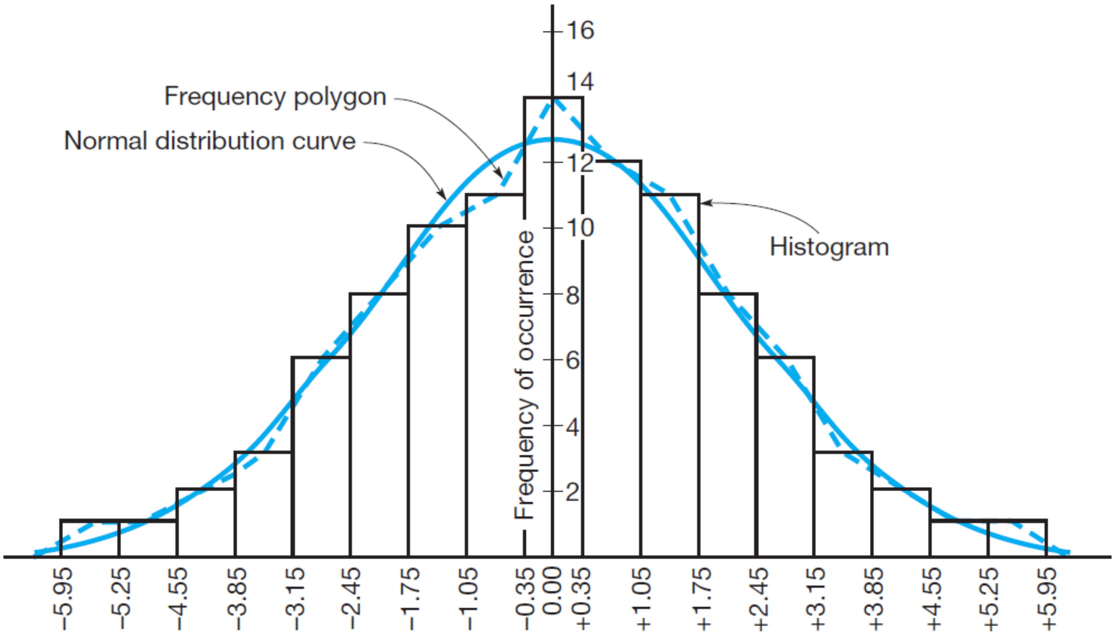
A continuación se grafica el histograma correspondiente a los datos de la tabla 1, donde se muestra la frecuencia de aparición de los residuos. Para graficar un histograma de residuos, primero se necesita calcular el valor más probable (media aritmética o promedio) para el ángulo medido, su valor es 27°43’24,9”. Luego se calculan los residuos (v_i) de todos los valores medidos, estos pueden encontrarse en la tercera columna de la tabla 1. Los residuos varían de 5,4” a -5,9”.

Para obtener un histograma con el número de barras que demuestre gráficamente la distribución de los residuos en forma apropiada, el intervalo de los residuos representados por cada barra, o el intervalo de clase, se escogió como 0,7”.Esto produjo 17 barras en la gráfica. La escala de residuos cubiertos por cada intervalo y el número de residuos que aparecen dentro de cada intervalo se enlistan en la tabla 2

Tabla 2 (“Topografía” - Wolf & Ghilani.). 17 intervalos de 0,7” cada uno utilizados para la elaboración del histograma.

Histogram Interval (Sec)	Number of Residuals in Interval
−5.95 to −5.25	1
−5.25 to −4.55	1
−4.55 to −3.85	2
−3.85 to −3.15	3
−3.15 to −2.45	6
−2.45 to −1.75	8
−1.75 to −1.05	10
−1.05 to −0.35	11
−0.35 to +0.35	14
+0.35 to +1.05	12
+1.05 to +1.75	11
+1.75 to +2.45	8
+2.45 to +3.15	6
+3.15 to +3.85	3
+3.85 to +4.55	2
+4.55 to +5.25	1
+5.25 to +5.95	1
	$\Sigma = 100$

Al graficar intervalos de clase en las abscisas contra el número de residuos (frecuencia de aparición) en cada intervalo en la ordenada, se obtuvo el histograma.



Histograma elaborado a partir de los datos de la tabla 1.

Si se unen con líneas rectas los puntos superiores centrales de las barras del histograma, línea de trazos, se obtiene el llamado polígono de frecuencia. Si se incrementara el número de mediciones que se consideran en este análisis y, por consiguiente, el intervalo de clases del histograma se considera más y más pequeño, finalmente el polígono de frecuencia se aproximará a una curva uniforme continua, simétrica con respecto a su centro, como la que se muestra con una línea gruesa continua en la misma figura del histograma. La forma de campana de esta curva es característica de un grupo de errores normalmente distribuidos y, por ello, en ocasiones se le cita como curva de distribución normal. En topografía, casi siempre ocurren distribuciones con errores normales o cerca de lo normal.

En la práctica, los histogramas y los polígonos de frecuencia casi no se usan para representar distribuciones de error. En lugar de ello se prefieren las curvas de distribución normal que más se les aproximan.

El histograma para una seria de mediciones muestra gráficamente la probabilidad de ocurrencia de un error de determinada magnitud mediante áreas de barras. Por ejemplo, 14 de los 100 residuos (errores) se la tabla 1 están entre -0,35” y +0,35”, según se aprecia analizando los valores de los ejes del histograma. Esto representa el 14% de los errores, y la barra central del histograma, que corresponde a este intervalo, es un 14% del área total de todas las barras. El área total bajo la curva de distribución normal es 1.

Desviación Estándar

A continuación se muestran una curva en forma de campana también denominadas campanas de Gauss. El área bajo la curva para un intervalo dado por dos residuos sobre el eje de abscisas, equivale a la probabilidad de ocurrencia de esos errores. En particular si se considera los valores -σ y + σ obtenidos al proyectar los puntos de inflexión de la campana sobre el eje de abscisas, se genera un intervalo que contiene al 68,3% de los residuos (errores).

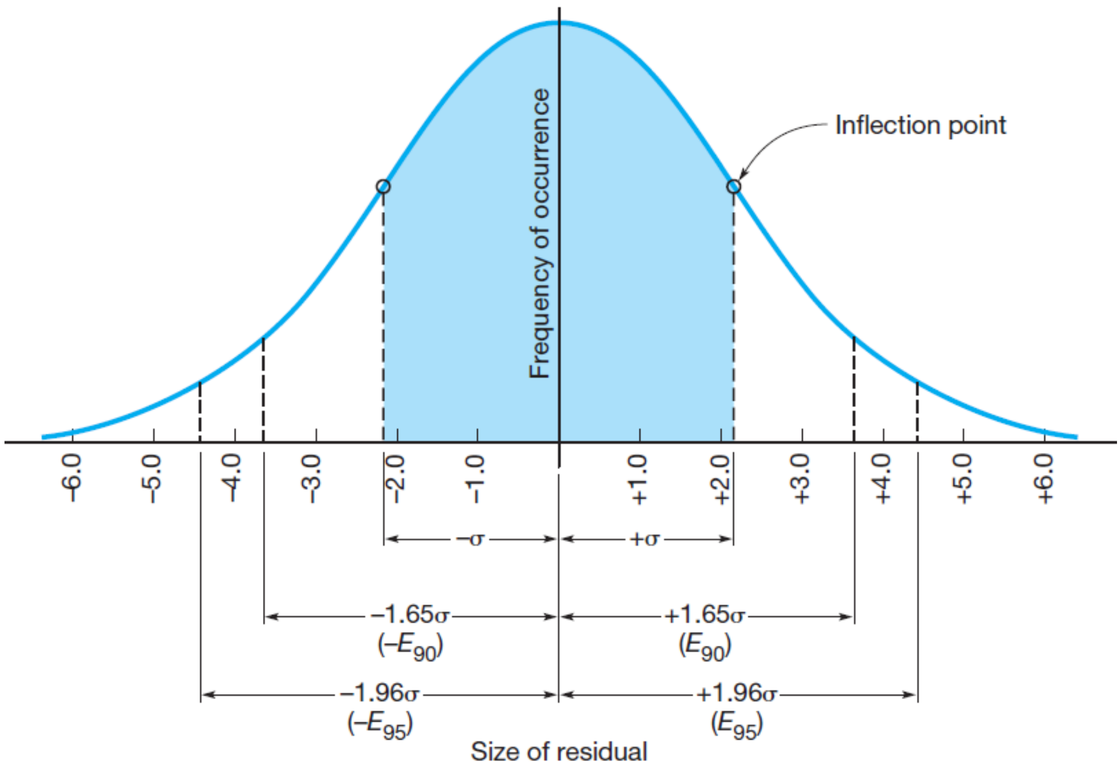
Este valor ±σ se denomina desviación estándar y es utilizado como parámetro de medición del grado de dispersión o precisión de una medida.

Interpretaciones de la desviación estándar (Wolf & Ghilani - "Topografía"):

La desviación estándar fija los límites dentro de los cuales debe esperarse que queden las mediciones el 68,3 % de las veces.

Si una medición se repite diez veces, podría esperarse que, aproximadamente, siete de los resultados queden dentro del intervalo [-σ ; +σ] determinado por la desviación estándar, e inversamente, que tres de ellos queden afuera.

Otra interpretación es que una medición adicional tendría 68,3 % de probabilidad de quedar dentro de los límites determinados por la desviación estándar. El criterio de exclusión provisoria se basa en esta interpretación.



Para el cálculo del valor de la desviación estándar (σ) se utiliza la siguiente expresión analítica:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum {v_i}^2}{n-1}}$$

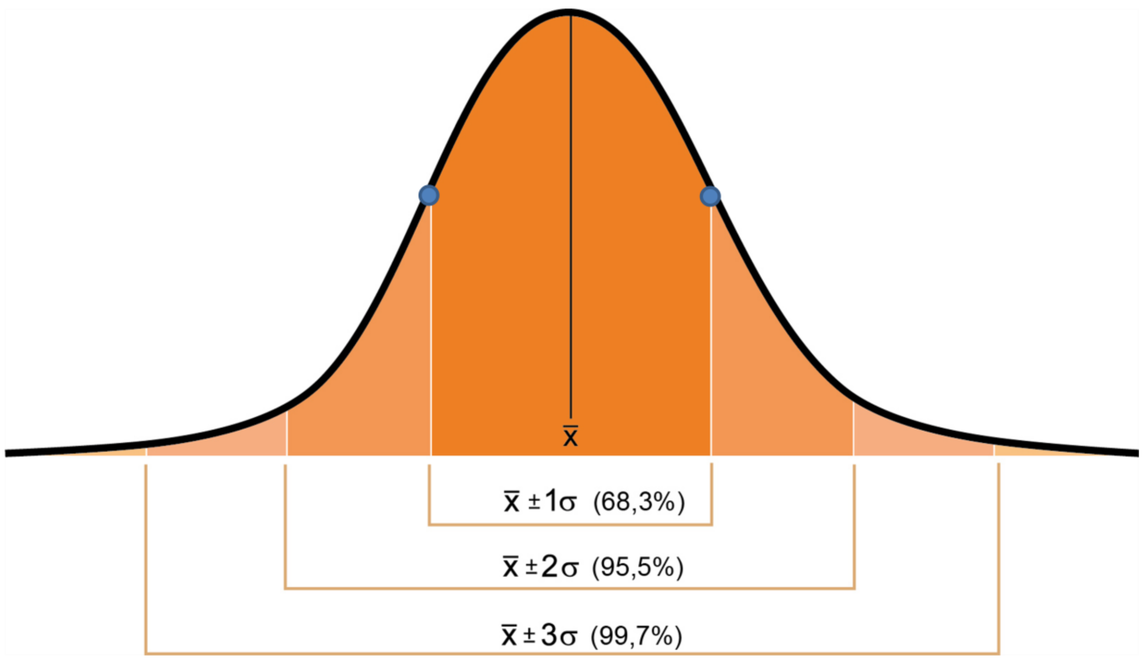
Probabilidad de los errores.

En la campana ilustrada antes se muestra el porcentaje del área total bajo una curva de distribución normal que existe entre intervalos de residuos (errores) que tienen valores positivos y negativos iguales. La escala de las abscisas se muestra en múltiplos de la desviación estándar. En esta curva, el área entre residuos -σ y +σ es igual al 68,3% del área total bajo la curva de distribución normal. Por tanto, la curva indica el intervalo de residuos que puede esperarse que ocurran el 68,3% de las veces. Este porcentaje se aplica a todas las distribuciones normales.

A partir del valor de la desviación estandar pueden obtenerse otros intervalos de probabilidad:

Un intervalo de ±2σ representa un intervalo que contiene al 95,5% de los errores. El error del 95,5% o *dos sigma* (2σ) se usa comúnmente para especificar precisiones necesarias en proyectos topográficos.

Un intervalo de ±3σ representa un intervalo que contiene al 97,3% de los errores El error del 99,7% o *tres sigmas* (3σ) se utiliza como criterio para rechazar mediciones individuales. Hay una probabilidad del 99,7% de que un error sea menor que esta cantidad. En un conjunto de mediciones, cualquier valor cuyo residuo exceda de 3σ se considera como error grosero y deberá rechazarse (criterio de exclusión provisoria).



Ejemplo ("Topografía" - Wolf & Ghilani.):

Length (ft)(1)	Residual ν (ft)(2)	ν^2 (3)
538.57	+0.12	0.0144
538.39	−0.06	0.0036
538.37	−0.08	0.0064
538.39	−0.06	0.0036
538.48	+0.03	0.0009
538.49	+0.04	0.0016
538.33	−0.12	0.0144
538.46	+0.01	0.0001
538.47	+0.02	0.0004
538.55	+0.10	0.0100
Σ = 5384.50	Σ = 0.00	$\Sigma\nu^2$ = 0.0554

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5.384,50}{10} = 538,45\ pies$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0,0554}{9}} = \pm 0,08\ pies$$

El 68,3 % (aprox. 7 de 10) de los residuos pertenece al intervalo:± 0,08 pies.

El 68,3 % de las mediciones pertenecen al intervalo: 538,45 ± 0,08 pies

[538,37 ; 538,53]

Si es necesario establecer una tolerancia puede adoptarse:

$E_{99,7}$= 3 . 0,08 = ± 0,24 pies.

Cualquier nueva medición con residuos que excedan los ± 0,24 pies será rechazada.

Propagación de Errores.

Como todas las mediciones contienen errores, cualquier cantidad calculada a partir de ellas también los contendrá. El proceso de evaluar los errores en valores calculados con medidas que contienen errores se denomina *propagación de errores*.

La propagación de los errores aleatorios se calcula usando la ley general de la propagación de varianzas. En topografía normalmente las mediciones son matemáticamente independientes.

Sean $a,b,c,..,n$ los valores medidos que contienen los errores E_a, E_b, E_c, ..., E_n, respectivamente.

Sea Z un valor que se calcula a partir de los valores medidos $a,b,c,..,n$ mediante la función:

$$Z = f(a, b, c, \dots, n)$$

$$E_Z = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{da}\ E_a\right)^2 + \left(\frac{df}{db}\ E_b\right)^2 + \left(\frac{df}{dc}\ E_{ac}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df}{dn}\ E_n\right)^2}$$

Por ejemplo, veamos cómo se aplica la propagación de errores en el cálculo del promedio de tres mediciones independientes X_1, X_2 y X_3 , siendo E_{X1}, E_{X2} y E_{X3} los errores aleatorios que afectan a dichas mediciones y considerémoslos iguales:

$$\bar{X} = f(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\frac{df}{dX_1} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{df}{dX_2} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{df}{dX_3} = \frac{1}{3}$$

$$E_{\bar{X}} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{3}\ E_{X1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\ E_{X2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\ E_{X3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}\ {E_{X1}}^2 + \frac{1}{9}\ {E_{X2}}^2 + \frac{1}{9}\ {E_{X3}}^2}$$

$$E_{X1} = E_{X2} = E_{X3} = \boldsymbol{E_X} \qquad E_{\bar{X}} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\ \boldsymbol{E_X}^2} = \pm\ \frac{\boldsymbol{E_X}}{\sqrt{3}}$$

Podría generalizarse para cualquier número n de mediciones, afectadas cada una de ellas por el mismo error $\pm E$:

$$\boldsymbol{E_{\bar{X}} = \pm\ \frac{E}{\sqrt{n}}}$$

21

TOPOGRAFIA I

T. PRACTICO N° 2:

TURNO:

GRUPO:

ALUMNO: Salgado

JEFE DE T.P.:

AYUDANTE:

AÑO :

TEORIA DE LOS ERRORES

Siempre que se mide se cometen errores. Es imposible evitarlos. Consecuentemente el VALOR EXACTO de una magnitud es desconocido.

En el lenguaje técnico el vocablo "error" es sinónimo de vacilación o indeterminación y no de equivocación; ésta, también llamada "error grosero" tiene su causa en la negligencia, descuido o cansancio del operador.

Causas de los errores :

a) Falta de definición de los extremos de las magnitudes que se comparan.

b) Limitación de nuestros sentidos, principalmente el de la vista.

c) Limitaciones constructivas del instrumental de medición.

d) Variación contínua de las condiciones ambientales: temperatura, presión, humedad, etc.

Clasificación fundamental de los errores.

Por su naturaleza:
- a) sistemáticos
- b) accidentales

a) Sistemáticos: Obedecen a leyes conocidas . Consecuentemente pueden anularse o reducirse sustancialmente sus efectos.

Ejemplo: Incidencia de la temperatura en la longitud de la cinta de agrimensor.

22

Ley : $l_t = l_o(1 + \alpha \Delta t)$

conocido α y evaluado Δt con un termómetro, se calcula la magnitud y el signo del error sistemático.

b) Accidentales: Son fortuitos. Obedecen únicamente a la ley del azar. Consecuentemente su característica esencial, que los distingue netamente de los sistemáticos, es que tienen igual probabilidad de ser positivos o negativos. De allí que suelen ir precedidos del signo ($\pm$). Además, (ver curva de Gauss, fig. 6) su magnitud tampoco puede evaluarse a priori de una medición (solo puede acotarse el límite del error o la probabilidad de su entorno)

Ejemplo: La lectura de una escala graduada con un Nonius.

En lo que sigue trataremos exclusivamente los errores accidentales.

MEDIA ARITMETICA SIMPLE

Sea L una magnitud medida n veces en iguales condiciones, obteniéndose los valores : $x_1 \quad x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$

Dado que todos ellos nos merecen igual grado de fe, se intuye que lo más razonable es adoptar como valor de L a la media aritmética de las lecturas u observaciones efectuadas:

$$X_m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \qquad (1)$$

Más adelante veremos el grado de aproximación del valor X_m, o lo que es equivalente su error medio "M".

Clasificación de los errores accidentales:

$$\text{Por su referencia} \begin{cases} \text{verdadero} : e = x - X \\ \text{aparente} \ : v = x - X_m \end{cases}$$

siendo: x = valor de 1 observación

X = valor exacto.

X_m = Media aritmética

Esta última tiene 2 importantes propiedades :

1ra.) Anula la sumatoria de los errores aparentes: $[v] = 0$

2da) Hace mínima la sumatoria de los cuadrados de los errores aparentes: $[v^2]$ = MIN -

Error medio cuadrático de una observación

Está dado por la expresión:

$$m = \sqrt{\frac{[e^2]}{n}} \qquad (2)$$

Siendo desconocidos los errores verdaderos "e", utilizaremos en su reemplazo los aparentes "v", en cuyo caso se demuestra que la (2) adopta la sig. forma:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad (3)$$

Obsérvese que el error medio cuadrático de "una observación" (m) se refiere a una cualquiera de la serie, pues todas merecen igual grado de fe o peso - (se dice también que son observaciones de igual precisión).

Media de los errores.

Está dada por la expresión: $t = \frac{[|v|]}{n}$ (4)

La expresión (3) hace resaltar más que la (4), las observaciones cuyos errores aparentes o desvíos sean fuertes. De allí que a " m "se lo denomine índice de precisión y gire en torno a él toda la teoría de los errores.

PROPAGACION DE ERRORES

1) Producto: sea X el producto de una variable x, cuyo error medio es m, por una constante a

$$X = a \cdot x \quad (5)$$

Evidentemente el error medio de X será :

$$\boxed{M = a \cdot m} \quad (6)$$

2) Suma: $X = x_1 + x_2$ (7)

Sea (fig. 1) X una magnitud suma de otras dos x_1 y x_2 cuyos errores medios respectivos son m_1 y m_2.

Se demuestra (fig. 2) que siendo igualmente probable que éstos se sumen o se anulen, la acumulación está dada por

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad (8)$$

La (8) es también válida en el caso de una resta ($X = x_1 - x_2$)

En general será: $X = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots x_n$ (9)

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} \quad (10)$$

(ver fig. 3)

25

En particular: Si $m_1 = m_2 = \ldots\ldots = m_n = m$

(caso frecuente en que las magnitudes que se suman sean iguales y afectadas del mismo error). La (10) adopta la siguiente forma:

$$\boxed{M = m \cdot \sqrt{n}} \quad \text{error medio de una suma} \qquad (11)\text{(ver fig. 4)}$$

3) Función lineal: De las expresiones (6) y (10) surge el error de una función lineal:

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n \qquad (12)$$

Evidentemente será :

$$M = \sqrt{a_1^2 \, m_1^2 + a_2^2 \, m_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 \, m_n^2} \qquad (13)$$

Nos quedaría por ver el caso de una función no lineal de varias variables:

$$X = f\,(x_1\,,\; x_2, \ldots\ldots,\; x_n) \qquad (14)$$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor se llega a la siguiente expresión de su error medio

$$\boxed{M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2}} \qquad (15)$$

Obsérvese que las (6) (8) (10) (11) y (13) son expresiones particulares de la (15), razón por la cual ésta es de fundamental importancia .-

Error Medio del Promedio: La función "Promedio" es de la forma:

$$X_m = \frac{[x]}{n} = \frac{1}{n}\,x_1 + \frac{1}{n}\,x_2 + \ldots + \frac{1}{n}\,x_n$$

Aplicando la (12) o (15) se llega a que

$$\boxed{M = \frac{m}{\sqrt{n}}} \qquad (16)$$

La Gráfica de la expresión (16) (ver fig. 5) ilustra sobre la conveniencia de no efectuar más de 15 ó 16 observaciones para disminuír el error medio del promedio.

Error absoluto y Error Relativo

Los errores precedentes ("v", "m" y "M") son absolutos.

En el caso de mediciones lineales, carecerían de significación si no se los relaciona con el valor de la magnitud medida. Es pues el Error relativo el que evalúa la precisión de una medición lineal.

Ej) $X_m = 12.000 \text{ m} \pm 1,2 \text{ m}$

Error absoluto : 1,2 m

Error relativo: $\frac{1}{10.000} = \frac{M}{L} = \frac{1}{\frac{1,2}{12.000}}$

En topografía las precisiones lineales oscilan entre 1/200 y $\frac{1}{20.000}$.-

----oo------

EJEMPLO DE APLICACION

x_i	L (m)	V	v^2
x_1	314, 30	+ 1	1
x_2	21	- 8	64
x_3	25	- 4	16
x_4	29	0	0
x_5	30	+ 1	1
x_6	27	- 2	4
x_7	47	+ 18	324
x_8	28	- 1	1
x_9	26	- 3	9
x_{10}	27	- 2	4
	290	$[v] = 0$ $[\lvert v\rvert] = 40$	$[vv] = 424$

$$\frac{[x]}{n} = \frac{290}{10} = 29$$

$$X_m = 314,29 \text{ m}$$

$$t = \frac{[|v|]}{n} = 4,0 \text{ cm}$$ Media de los errores

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{424}{9}} = \pm\ 6,9 \text{ cm}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{6,9}{\sqrt{10}} \simeq \pm \quad 2,3 \text{ cm}$$ en 1/2 de Proced.

$$\mathcal{E}_L = \frac{M}{L} = \frac{2,3 \text{ cm}}{314 \text{ m}} \simeq \frac{1}{13.500} \text{(Error relativo)}$$

Eliminación de observaciones.

En el ejemplo precedente puede observarse que el valor $x_7 = 314,47$ está presumiblemente afectado de error grosero. Sin embargo, tal apariencia no justifica su eliminación, sin prévio análisis de la probabilidad de los errores.

Probabilidad de los Errores

Federico Gauss, observando minuciosamente una serie de "n" observaciones de igual precisión ($n \simeq 1000$), estableció cuatro premisas, sobre los cuales elaboró su teoría de probabilidad de los errores.

Ellas son:

1ra) La media aritmética $\underline{X_m}$ es el valor más probable de la magnitud medida.

2da) La probabilidad de un error es función decreciente de la magnitud del mismo

$$P(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$$

o, dicho de otro modo: errores pequeños son más frecuentes que los grandes.

3ro) Errores positivos y negativos son igualmente probables

$$P(+\varepsilon) = P(-\varepsilon)$$

$$\text{ó} \quad \varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$$

4ta) La probabilidad de que un error está comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ vale 1 (símbolo de la certeza)

$$P_{-\infty}^{+\infty} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(\varepsilon)}\, d\varepsilon$$

Se demuestra que: $\boxed{\varphi_{(\varepsilon)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}}$ (17)(ver fig. 6)

Significación de "h ":

Se demuestra que:

$$\boxed{h \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707} \qquad (18)$$

La expresión (18) justifica llamar a "h " módulo de precisión " de una serie de observaciones

Error probable: Es aquel cuya probabilidad de no alcanzarlo es igual a la de sobrepasarlo, al efectuar una medición aislada.

Es decir:

$$\int_{-ep}^{+ep} \varphi_{(\varepsilon)} \quad d\varepsilon = \frac{1}{2}$$

Dicha probabilidad está representada por el 50% del área de la "campana "de Gauss (Fig. 7).

El error probable corresponde a aquella observación que, en una serie de 1000, ordenada según los valores absolutos de sus errores aparentes, ocupa el lugar N° 500 (aprox.) -

Se demuestra que $\boxed{h. \quad ep = 0,477}$ (19)

Por otra parte, surge de la gráfica de Fig. 6 (y de su cuadro de valores) que:

$$\boxed{h.\ \mathcal{E}_{\text{máx}} \simeq 2} \qquad (20)$$

Relacionando las expresiones (18), (19) y (20), obtenemos que

$$\boxed{3\ m \simeq 4\ e_p \simeq \mathcal{E}_{\text{máx}}} \qquad (21)$$

La importante expresión (21) permite decidir sobre la eliminación de una observación presumiblemente afectada de error grosero.

Su aplicación tiene un serio inconveniente en la práctica, donde en general el N° de observaciones no pasa de 10. El desplazamiento de X_m producido por <u>una</u> observación defectuosa acrecienta los residuos "V" y consecuentemente el valor de "m".

Así en el ejemplo dado:

$$\boxed{v_7 < 3\ m \simeq \mathcal{E}_{\text{máx}}}$$

$$18\ \text{cm} < 3 \cdot 6{,}9\ \text{cm} \simeq 20{,}7\ \text{cm}$$

Y por lo tanto <u>no debemos</u>, en base a la teoría expuesta, eliminar la observación x_7 = 325, 47 m.

Existen varios criterios para eliminar observaciones como la anterior; <u>ninguno de ellos inobjetable</u>

Nos limitaremos a mencionar dos, a saber:

1°) <u>Excluír provisoriamente</u> de la serie la observación presumiblemente afectada de error grosero y efectuar el cálculo con las restantes hasta obtener el valor de $\mathcal{E}_{\text{máx}} \simeq 3$ m, que luego se compara con la diferencia entre la observación excluída y el Promedio.

En el ejemplo, si se excluye x_7, el cálculo da

$$x_m = 325,27 \text{ m}$$

3/(1

$$m = \pm 2,8 \text{ cm}$$

$$3.m = \mathcal{E}_{máx} \simeq 3\,m = 8,4 \text{ cm}$$

$$x_7 - X_m = 20 \text{ cm} > 8,4 \text{ cm}$$

(......)

En consecuencia, eliminamos la observación x_7

2°) Criterio de Chauvenet: Es elástico, adecuado al N° de observaciones, sin excluír ninguna

consiste en eliminar aquella observación cuya probabilidad de aparecer en la serie sea inferior a $\frac{1}{2\,n}$

o sea

$$P_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}\, d\varepsilon \leqslant \frac{1}{2.n}.$$

En el ejemplo será $\frac{1}{2.n} = \frac{1}{20} = 5\%$

Se ha calculado y tabulado la integral de la expresión (17), que permite la aplicación inmediata del presente criterio.

Es importante aclarar que al decir escuetamente "Probabilidad de un error $\mathcal{E}_1$" sin indicar su intervalo queda sobreentendido que nos referimos al comprendido entre los valores $-\mathcal{E}_1$ y $+\mathcal{E}_1$ (Fig. 8).

30

Es decir:

$$P_{(\varepsilon_1)} = P_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} \varphi_\varepsilon \, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon$$

En todos los demás casos debe consignarse el intervalo $\Delta\varepsilon$.

$$P_{e_p} = \int_{-e_p}^{+e_p} \varphi_\varepsilon \quad d\varepsilon = 50\%$$

$$P_{2\ e_p} = 82\%$$

$$P_{3\ e_p} = 96\%$$

$$P_{4\ e_p} \simeq P_{\varepsilon\ \text{máx}} = 99,5\%$$

$$P_{(m)} = \int_{-m}^{+m} \varphi_\varepsilon \quad d\varepsilon = 68\%$$

$$P_{2m} = 95\%$$

$$P_{3m} = P_{\varepsilon\ \text{máx}} = 99,5\%$$

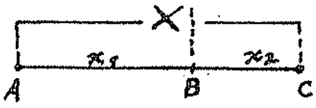


Fig 1

$$X = x_1 + x_2 \quad (7)$$

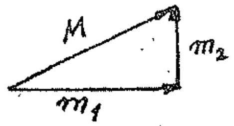


Fig 2

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad (8)$$

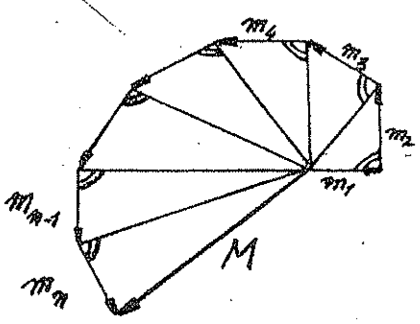


Fig 3

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} \quad (10)$$

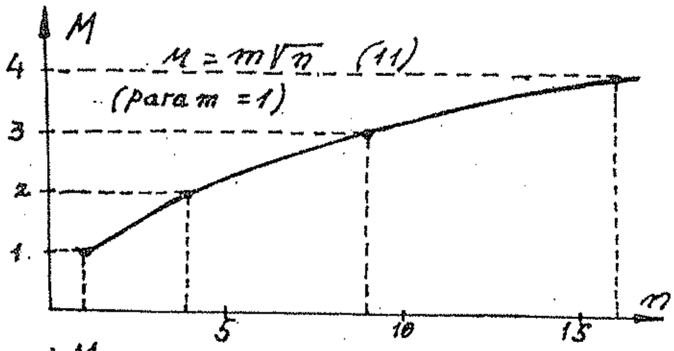


Fig. 4

n	$M = 1/\sqrt{n}$
1	1
2	0.71
3	0.58
4	0.50
5	0.45
6	0.41
7	
8	0.35
9	
10	0.32
20	0.22
50	0.14
100	0.10

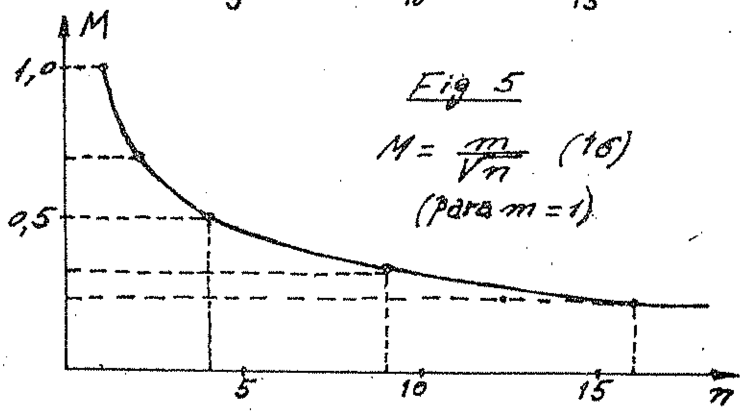


Fig 5

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (16)$$

(para $m = 1$)

Explicación: Cap. 14 - Tomo I - Jordan

3.4

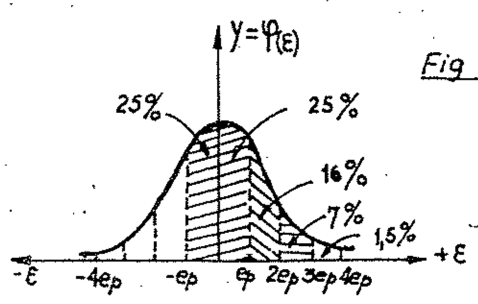


Fig 7

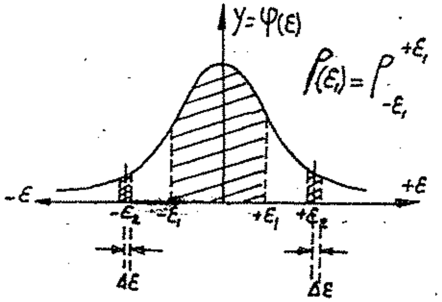
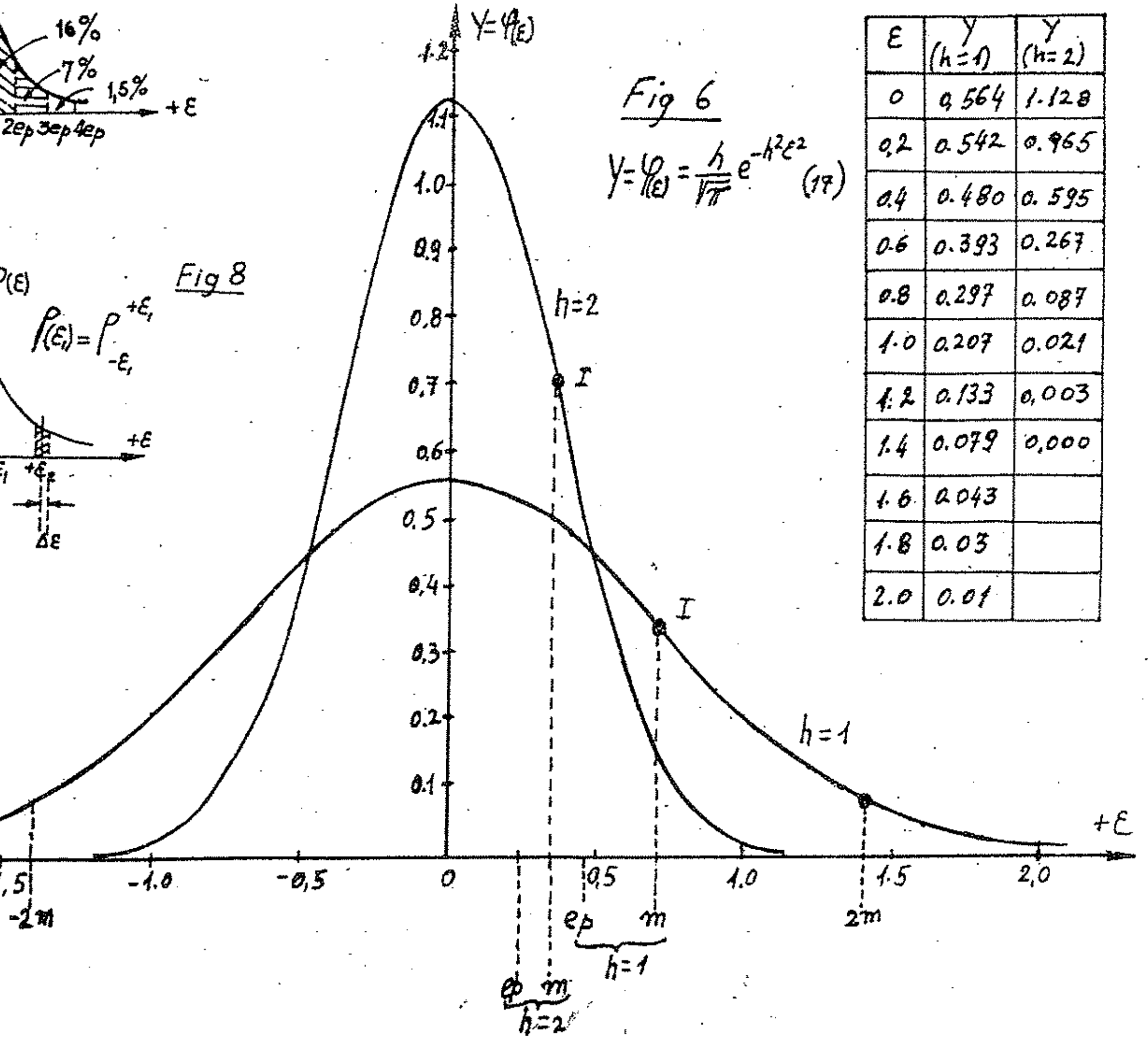


Fig 8

Fig 6

$$Y=\varphi_{(\varepsilon)}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2} \quad (17)$$



Cuadro de Valores

ε	Y (h=1)	Y (h=2)
0	0,564	1.128
0,2	0.542	0.965
0.4	0.480	0.595
0.6	0.393	0.267
0.8	0.297	0.087
1.0	0.207	0.021
1.2	0.133	0,003
1.4	0.079	0,000
1.6	0.043	
1.8	0.03	
2.0	0.01	