Cálculo y Compensación de Poligonales Topográficas.

Introducción.

La topografía tiene los siguientes objetivos:

- la ejecución de todas las mediciones que conducen a la determinación de la posición relativa de puntos terrestres;
- la ejecución de los cálculos a que dan lugar dichas mediciones;
- el aprovechamiento de las mediciones y de los resultados del cálculo para la confección de planos y mapas, satisfaciéndose así necesidades políticas, económicas, técnicas, militares, científicas y culturales.

Agrim. Roberto Müller - Compendio Gral. de Topografía - 1946.

Es sumamente conveniente que los levantamientos topográficos estén referidos a un sistema de referencia único oficial, esto posibilita entre otras cosas un registro único de los elementos del territorio que se han levantado.

El sistema de referencia adoptado debe extenderse a todo el territorio (región, provincia, país, planeta).

Nuestro país posee un sistema de referencia oficial denominado POSGAR 07 (Posiciones Geodésicas Argentinas 2007), y a lo largo y ancho del territorio nacional existen puntos geodésicos con coordenadas en dicho sistema. Estos puntos se materializan convenientemente de forma permanentes para que perduren en el tiempo, y su conjunto conforma un marco de referencia.

Un sistema de referencia es un conjunto de convenciones que establecen la posición de su origen de coordenadas, y la posición y orientación de una terna de ejes cartesianos. La materialización de un Sistema de Referencia se denomina Marco de Referencia. Este Sistema se materializa a partir de la construcción, la medición y el posterior cálculo de las coordenadas de una serie de puntos o pilares localizados sobre la superficie terrestre (www.ign.gob.ar).

Un marco de referencia permite:

- Determinación de la posición relativa de puntos terrestres.
- Obtener las coordenadas de esos puntos en un sistema de referencia único.

El Instituto Geográfico Nacional (IGN) a través de la Ley Nacional de la Carta y la Disposición Administrativa 520/96, es el responsable Nacional del establecimiento, mantenimiento, actualización y perfeccionamiento del Marco de Referencia Geodésico Nacional.

Sobre este marco de referencia desarrollan sus tareas las Provincias, Municipios, Catastros, organismos públicos, empresas privadas y usuarios particulares (www.ign.gob.ar).

Métodos Topográficos Planimétricos

Un punto ha de considerarse mejor determinado cuanto menor sea el número de operaciones topográficas escalonadas que se hayan efectuado para su determinación. De lo que se deduce que todo trabajo topográfico convendrá realizarlo por etapas, formando redes, apoyadas sucesivamente unas en otras.

Las operaciones de medición se planifican de lo general al detalle. Los métodos topográficos planimétricos se clasifican en:

Triangulación: Permite cubrir el conjunto del territorio con una red de puntos fijos de la misma precisión. Se basa casi exclusivamente en la medición precisa de ángulos. Este método tiene controles.

La densidad de puntos que permite la triangulación (aún las de 4to orden) no es suficiente para poder levantar los detalles cómodamente y con la visión necesaria, es por ese motivo que se aplica el método de Poligonación o Itinerario.

Poligonación o Itinerario: Posibilita la densificación del marco de referencia enlazando puntos de orden superior. Se basa en la medición de ángulos y distancias. En este método hay controles (excepto en poligonales abiertas).

Radiación: Levantamiento de los detalles. Se apoya en los vértices de la poligonal. El objetivo de este método es levantar con rapidez los puntos que caracterizan el terreno y sus elementos. Se miden ángulos y distancias, pero con menos precisión que en la Poligonación. No hay controles.

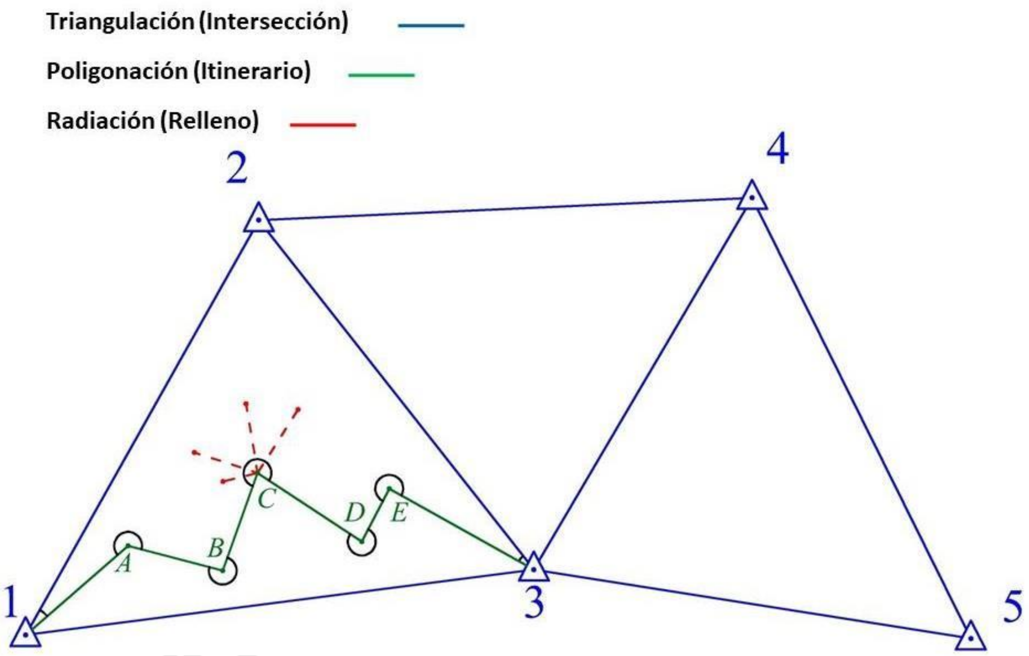

Figura 1: Métodos topográficos planimétricos.

Poligonales:

Definición formal: Se enlazan puntos de orden superior (conocidos) con una línea quebrada en la cual la posición de los vértices es definida por la medición del ángulo (α_i) en cada uno de esos puntos y de la distancia (d_i) entre los puntos consecutivos. Los mencionados puntos son los vértices de la poligonal.

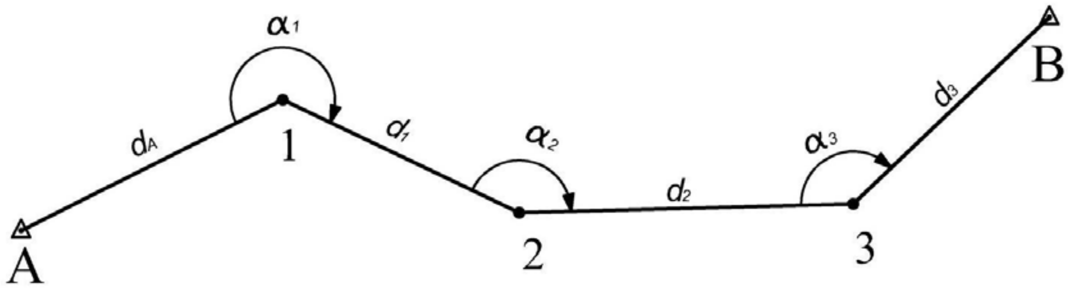

Figura 2: Poligonal. Medición de ángulos α_i y de distancias d_i.

Tiene por finalidad principal las poligonales, intercalar entre los puntos de orden superior (triangulación u otros) existentes tantos nuevos puntos fijos como fuesen necesarios para un racional levantamiento del terreno. Los vértices de esas poligonales sirven como apoyo al relevamiento de detalles.

Otro objetivo de las poligonales es el de facilitar la medición de una superficie del terreno, rodeándola por medio de un polígono cerrado, a cuyos puntos y lados se refiere el levantamiento de todos los detalles que interesan.

Los ángulos pueden medirse con la suficiente precisión y exactitud aplicando la regla de Bessel. Podrán utilizarse métodos más exactos y precisos (reiteración) si las características del trabajo así lo exigiesen.

El error de dirección suele ser el más importante de todos los errores angulares. Cuanto más corto el lado más grande debe ser el cuidado a emplear tanto en el centrado del teodolito (o estación total) como en la señalización del punto objeto. Se colimará la señal en la parte más próxima al suelo, es decir, los más abajo posible.

La precisión de la medición angular debe estar en concordancia con la precisión de la medición lineal. La longitud de cada lado debe medirse dos veces en sentido opuesto (ida y vuelta). Para la diferencia entre los resultados de ambas mediciones deben adoptarse tolerancias que estén de acuerdo con la dificultad del trabajo y con el tipo de instrumental.

Los enlaces a los puntos conocidos proporcionan los controles de medición indispensables.

Tipos de Poligonales

Existen diferentes tipos de poligonales:

El caso más común es el de un polígono o poligonal cerrada geométricamente, el vértice en el cual inician las mediciones es el mismo vértice en donde finalizan, tal como se ve en la figura 3:

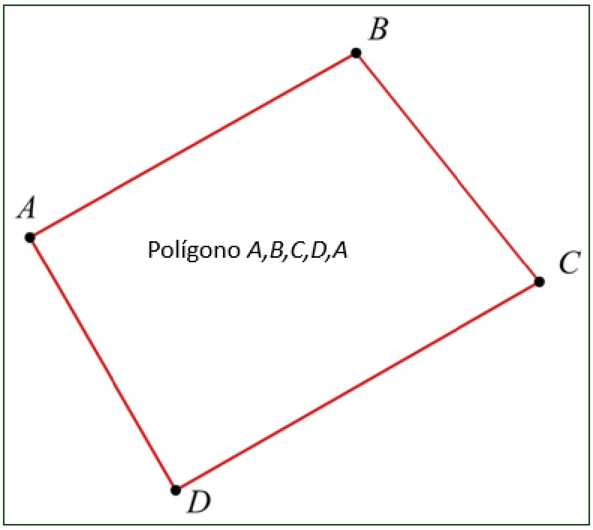

Figura 3: Poligonal geométricamente y matemáticamente cerrada.
Conocidas las coordenadas del vértice A y el acimut (AB)

El cálculo y compensación de estas poligonales se organiza y desarrolla utilizando una “planilla de coordenadas y superficies”.

Pero es posible que una poligonal inicie en un vértice y finalice en otro, este es el caso de las poligonales con geometría abiertas. Independientemente de su geometría **consideraremos**

cerrada o abierta a una poligonal dependiendo de los controles de cierre que puedan realizarse. Desde esta perspectiva, existen tres tipos de estas poligonales:

Poligonales Abiertas: Sin control de cierre angular ni lineal. Se parte de un punto y acimut conocido y se finaliza en un punto desconocido (figura 4). Se miden todos los ángulos α_i y todos los lados l_i. Partiendo del acimut conocido (T1T2) y de las coordenadas conocidas de T1, se calculan las coordenadas de todos los vértices restantes de la poligonal. No hay forma de controlar si las coordenadas XY calculadas para el vértice E_n son correctas.

Solamente se utilizan en trabajos expeditivos. La falta de controles hace que sea poco aplicable este método.

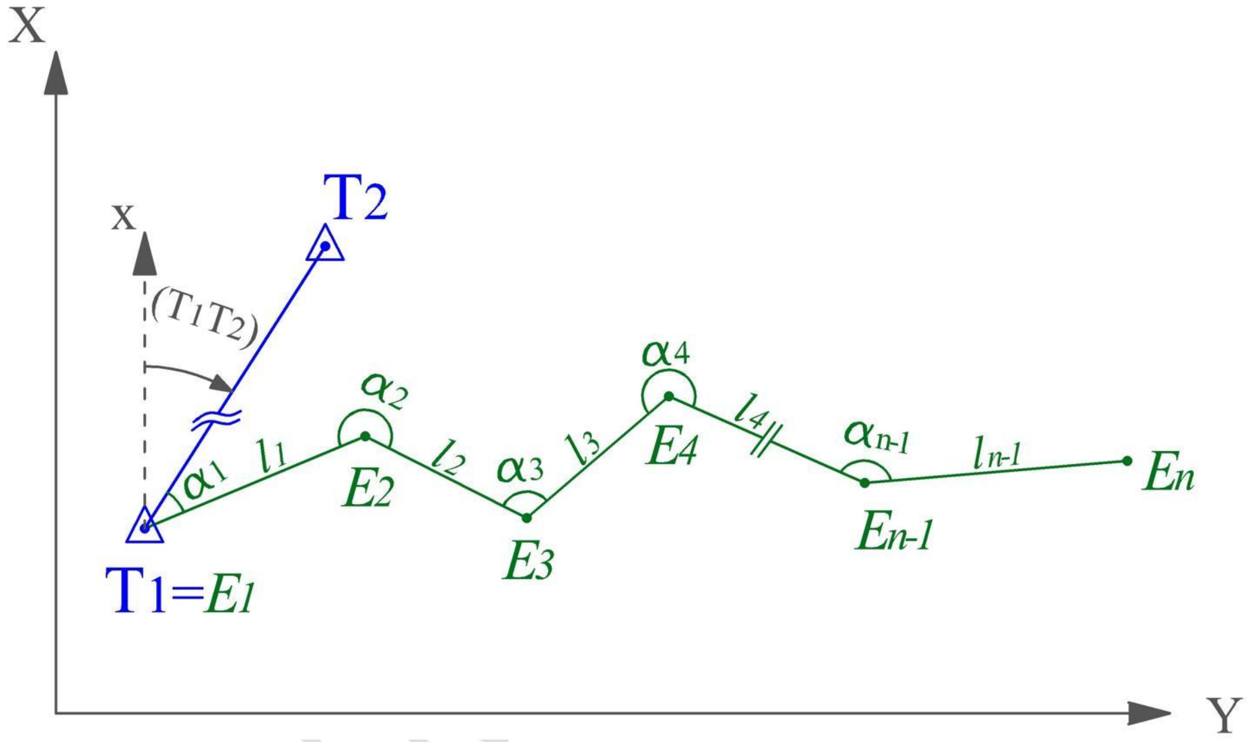

Figura 4: Poligonal abierta: sin control de cierre angular ni lineal. Conocidas las coordenadas de T_1 y T_2. Se necesita calcular las coordenadas de los puntos E_i. El último vértice *En* no se conoce.

Poligonales Semi-abiertas: Sin control de cierre angular, solamente posibilitan un control de cierre lineal (figura 5). Se parte de un punto conocido, con un acimut también conocido, además se conocen las coordenadas del punto final de la poligonal, lo que permite calcular el error de cierre lineal.

En la figura 5, los puntos T1, T2 y T3 pertenecen al mismo marco de referencia y sus coordenadas son conocidas. Se podrán calcular las coordenadas de los puntos E1, E2, ..., En a partir de la medición de una poligonal semi-abierta.

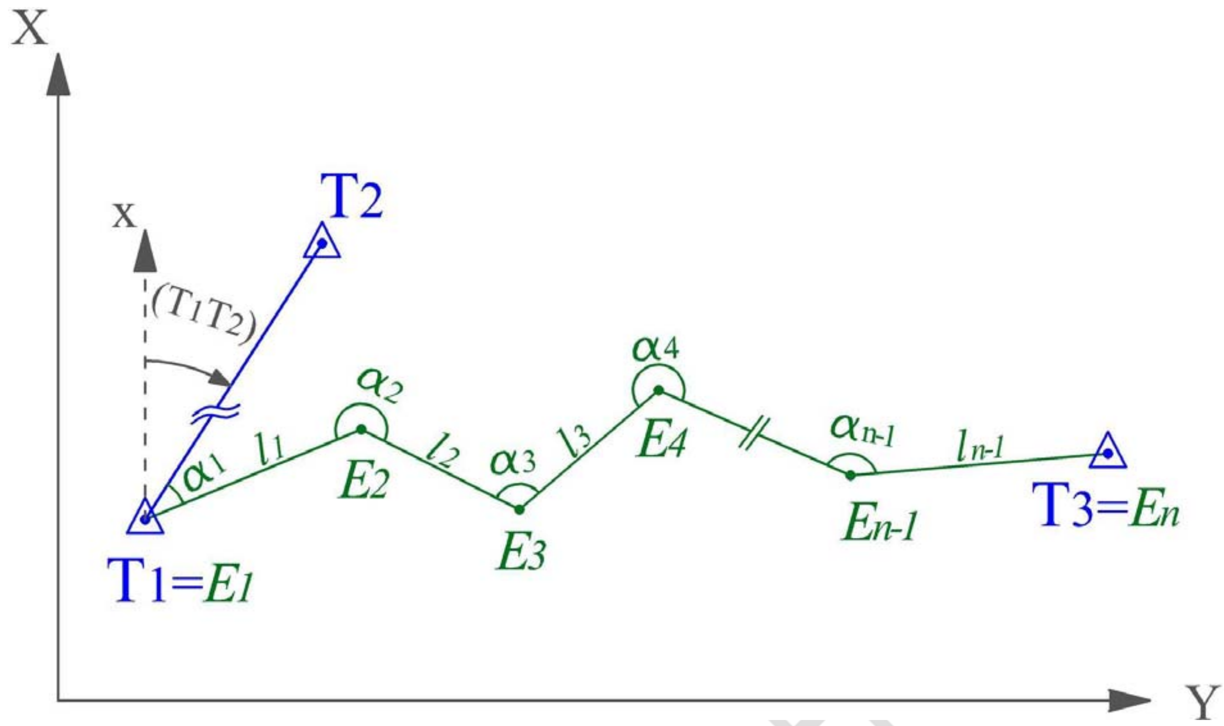

Figura 5: Poligonal Semi-abierta: Sin control angular, solamente control lineal. Son conocidas las coordenadas de los puntos T_1, T_2 y T_3. Se necesita calcular las coordenadas de los puntos E_i.

El punto E1 (primera estación) coincide con el punto T1, el punto En (última estación) coincide con el punto conocido T3. Estacionando sobre el punto conocido T1 y colimando al punto también conocido T2, se comienza con las mediciones. Realizando estaciones en cada vértice Ei de la poligonal se miden todos los ángulos α_i, aplicando el método de Bessel o uno superior. Los lados li de la poligonal son medidos en ida y vuelta (con cinta o distanciómetro electrónico). La última estación se realiza sobre el punto En-1 y el último punto en medirse es el punto En que coincide con el punto conocido T3.

A partir de las mediciones angulares efectuadas, y partiendo del acimut conocido (T1T2) se calculan los acimutes de todos los lados de la poligonal medida. Con los acimutes así obtenidos, y las distancias li medidas en campo, pueden calcularse las proyecciones ΔX y ΔY de cada lado.

Luego se realiza el control de cierre lineal.

Se calcula:

$$\Delta X_{T1T3} = X_{T3} - X_{T1}$$

$$\Delta Y_{T1T3} = Y_{T3} - Y_{T1}$$

Como se ha mencionado, las coordenadas XY de los puntos T1 y T3 son conocidas.

Debe verificarse luego que:

$$\Delta X_{T1T3} = \Delta X_{E1E2} + \Delta X_{E2E3} + \cdots + \Delta X_{En-1\,En}$$

$$\Delta Y_{T1T3} = \Delta Y_{E1E2} + \Delta Y_{E2E3} + \cdots + \Delta Y_{En-1\,En}$$

El error de cierre lineal (E_L) será:

$$E_x = \Delta X_{E1E2} + \Delta X_{E2E3} + \cdots + \Delta X_{En-1\,En} - \Delta X_{T1T3}$$

$$E_y = \Delta Y_{E1E2} + \Delta Y_{E2E3} + \cdots + \Delta Y_{En-1\,En} - \Delta Y_{T1T3}$$

$$E_L = \sqrt{Ex^2 + Ey^2}$$

Si el error de cierre lineal (E_L) es menor a la tolerancia adoptada, será posible compensar la poligonal. Caso contrario, las mediciones deberán repetirse.

La compensación se realiza de la misma forma que en un polígono cerrado trabajando con una planilla de coordenadas. Aplicando una regla de tres simple, se corrige cada ΔX y ΔY en función de la proporción que tenga el lado correspondiente sobre la longitud total de la poligonal.

Finalmente, con los ΔX y ΔY corregidos se calculan las coordenadas de todos los vértices, controlando que las coordenadas de En coincidan exactamente con las de T3.

Poligonales Cerradas: Controladas angular y linealmente. Se inician y finalizan las mediciones en puntos de coordenadas conocidas, teniendo además un acimut de arranque y otro de cierre. Esta poligonal es, desde una visión puramente geométrica, abierta ya que el vértice donde inician las mediciones no es el mismo que el vértice en donde concluyen; pero se la considera matemáticamente cerrada porque posibilita controles angulares y lineales.

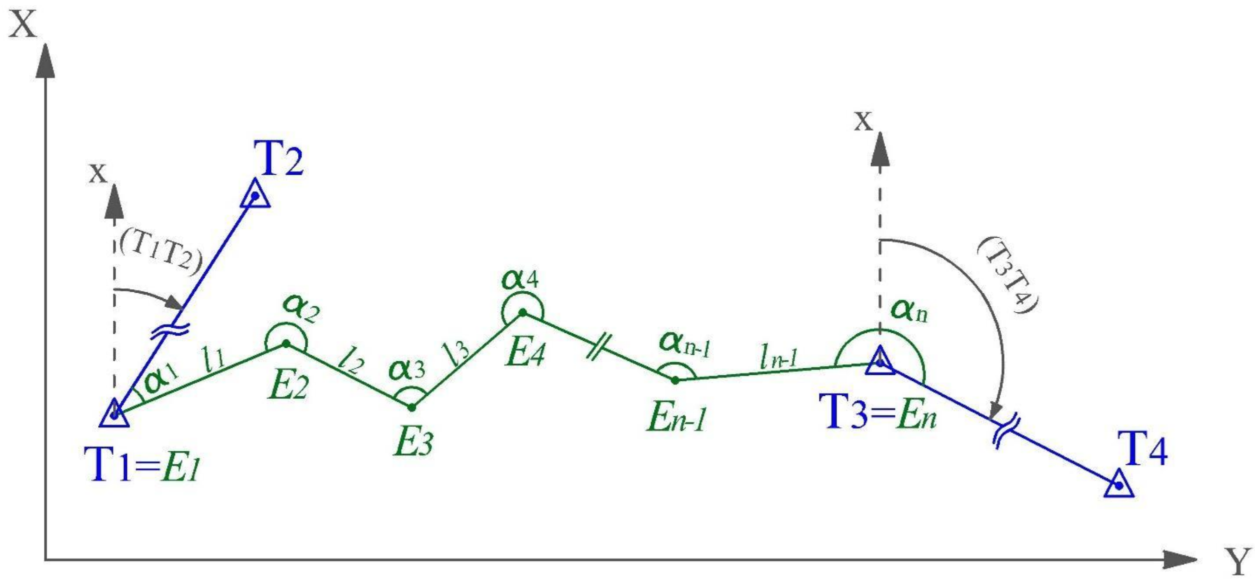

Figura 6: Poligonal cerrada (geometricamente abierta – matematicamente cerrada). Son conocidas las coordenadas de los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4, se necesita calcular las coordenadas de los puntos E_i.

Tal como se aprecia en la figura 6, los puntos T1, T2, T3 y T4 pertenecen al mismo marco de referencia y sus coordenadas XY son conocidas. Es necesario obtener las coordenadas de los puntos E1, E2, ..., En. El vértice E1 coincide con el punto conocido T1, y el vértice En coincide con el punto conocido T3. Los puntos T2 y T4 son para orientación y cierre, sobre estos no se realizan estaciones de instrumental.

Procedimiento general: Se inician las mediciones sobre un punto de coordenadas conocidas T1 (primera estación) y finaliza el trabajo de campo estacionando sobre el punto también conocido T3. Los acimutes (T1T2) y (T3T4) con conocidos, este hecho posibilita tener un cierre angular de la poligonal. Conocido el acimut (T1T2) y medidos todos los ángulos αi de la poligonal, es posible calcular los acimutes de todos los lados, incluido (T3T4). Entonces, la magnitud de (T3T4) es obtenida por cálculo, pero también es un valor conocido, ambos valores deberían coincidir. Pero debido a los usuales e inevitables errores de medición es normal que ambos valores no coincidan. No obstante, la diferencia angular hallada debe entrar en tolerancia. Verificado este control, la diferencia se repartirá en partes iguales entre los ángulos medidos, quedando de esa forma corregidos. Con estos ángulos corregidos se calculan nuevamente los acimutes y se controla que, en esta oportunidad, se llegue a un valor calculado del acimut (T3T4) exactamente igual al que se tiene como dato.

Con esos acimutes corregidos y las longitudes de los lados li es posible calcular las proyecciones ΔX y ΔY de todos los lados. Luego se procederá a determinar el error de cierre lineal tal como se realiza en las poligonales semi-abiertas.

Cálculo y compensación de una poligonal cerrada.

Los vértices **A**, **B**, **C** y **D** (figura 7) tienen coordenadas conocidas en un determinado marco de referencia, se necesita determinar las coordenadas de los puntos E_1 y E_2 en dicho marco, para apoyar luego un levantamiento topográfico sobre ellos.

A tal efecto se mide la poligonal AE_1E_2C, esta figura tiene la posibilidad de realizar controles de cierre angular y lineal, y en consecuencia efectuar las compensaciones correspondientes.

Se midieron:

- Los ángulos **α**, **β**, **γ**, **δ**
- Las longitudes de los lados AE_1, E_1E_2 y E_2C

Los ángulos se miden por el método de Bessel o Reiteración. Las distancias utilizadas son promedio de ida y vuelta.

1- <u>Cálculo de los acimutes mediante los ángulos medidos.</u>

Partiendo del acimut conocido (AB) y los ángulos medidos α=BAE1, β=AE1E2, γ=E1E2C y δ=E_2CD, se calculan los acimutes (AE_1), (E_1E_2), (E_2C) y (CD).

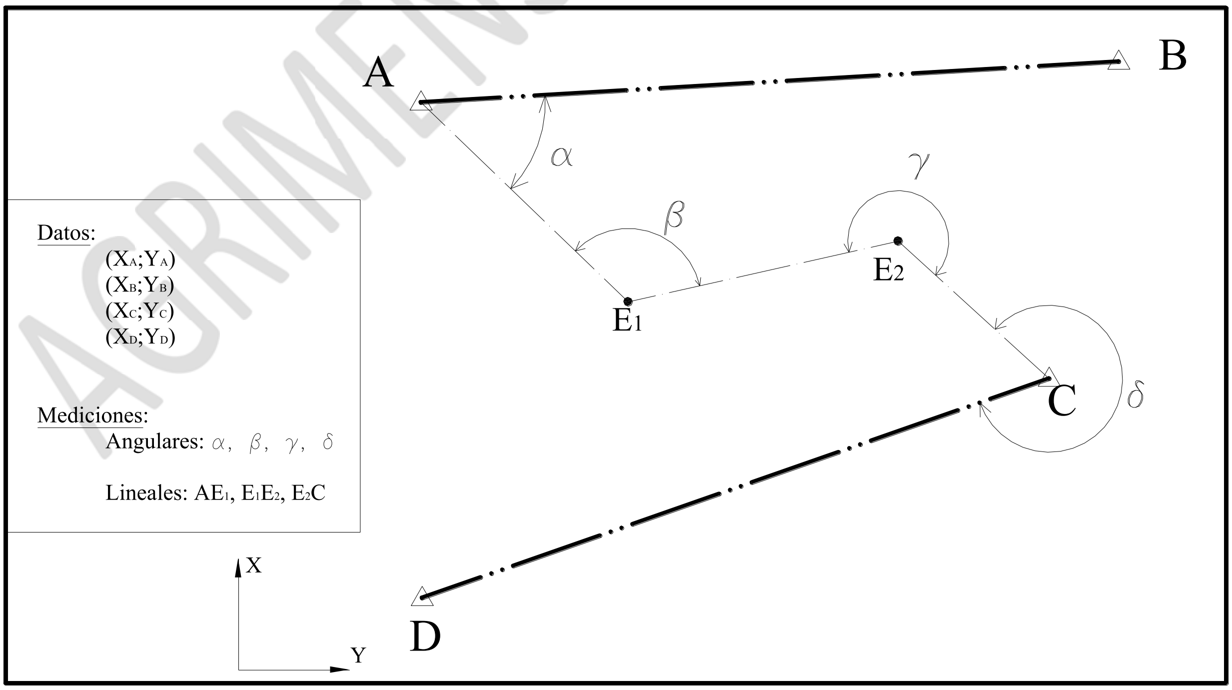

Figura 7

2- <u>Determinación del error de cierre angular (*e*).</u>

Se determina el error de cierre angular **e** (figura 8) mediante la diferencia entre el acimut (CD) calculado en el ítem 1 a partir de mediciones y el exacto obtenido a partir de las coordenadas conocidas de esos vértices.

$$e = (CD)_{Medido} - (CD)_{Exacto}$$

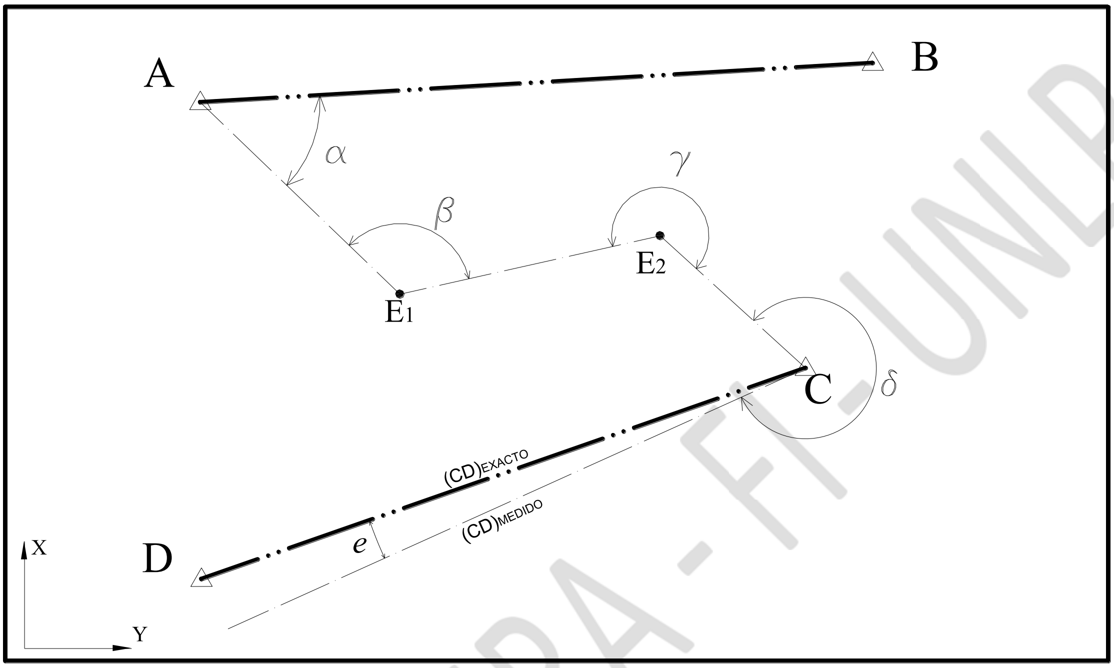

Figura 8

Este error debe estar acotado dentro del valor de la tolerancia que surge de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{T = \pm 3.a.\sqrt{n}}$$

Donde ***a*** es el valor de la apreciación del instrumento utilizado y ***n*** corresponde al número de ángulos medidos. Si el módulo del error es menor al del valor de la tolerancia se continúa con los cálculos, sino se efectuarán nuevamente las mediciones.

La corrección total ***c*** tiene la misma magnitud del error angular, pero signo contrario:

$$\boldsymbol{c=-e}$$

3- <u>Compensación angular.</u>

La corrección que se efectúa a cada ángulo medido surge de dividir la total por el número ***n***.

$$\boldsymbol{c_i = \frac{c}{n} = \frac{-e}{n}}$$

Las correcciones c_i deben ser números enteros.

Luego se recalculan los acimutes, esta vez utilizando los ángulos compensados. Debe verificarse que:

$$\boldsymbol{(CD)_{Medido} = (CD)_{Exacto}}$$

4- Cálculo de las Proyecciones de los lados y determinación del error de cierre lineal.

Con los **acimutes compensados** y las longitudes de los lados medidas se calculan las proyecciones Δ_x y Δ_y de los lados AE_1, E_1E_2 y E_2C. El error de cierre lineal surge de la diferencia entre la sumatoria de los anteriores calculados y los valores de ΔX_{AC} y ΔY_{AC} exactos obtenidos a partir de las coordenadas conocidas de estos vértices.

$$\Delta X_{AC} = X_C - X_A$$

$$\Delta Y_{AC} = Y_C - Y_A$$

Debería cumplirse:

$$\Delta X_{AC} = \Delta X_{AE1} + \Delta X_{E1E2} + \Delta X_{E2C}$$

$$\Delta Y_{AC} = \Delta Y_{AE1} + \Delta Y_{E1E2} + \Delta Y_{E2C}$$

Pero debido a la existencia de errores de medición no se cumple tal equidad. Esta diferencia corresponde al error de cierre lineal E_L:

$$Ex = (\Delta X_{AE1} + \Delta X_{E1E2} + \Delta X_{E2C}) - \Delta X_{AC}$$

$$Ey = (\Delta Y_{AE1} + \Delta Y_{E1E2} + \Delta Y_{E2C}) - \Delta Y_{AC}$$

El error de cierre lineal se calcula:

$$E_L = \sqrt{Ex^2 + Ey^2}$$

Este valor debe ser menor al de la tolerancia adoptada que surge de la expresión:

$$T = \pm 0{,}015\sqrt{0{,}3L + 0{,}0005L^2}$$

$L = AE_1 + E_1E_2 + E_2C$ [m]

La existencia de este error $\boldsymbol{E_L}$ implica que en lugar de llegar al vértice **C** al completar el itinerario, lleguemos a otro punto **C'** (figura 9) separado del primero una distancia ***Ex*** sobre el eje X y una distancia ***Ey*** sobre el eje Y.

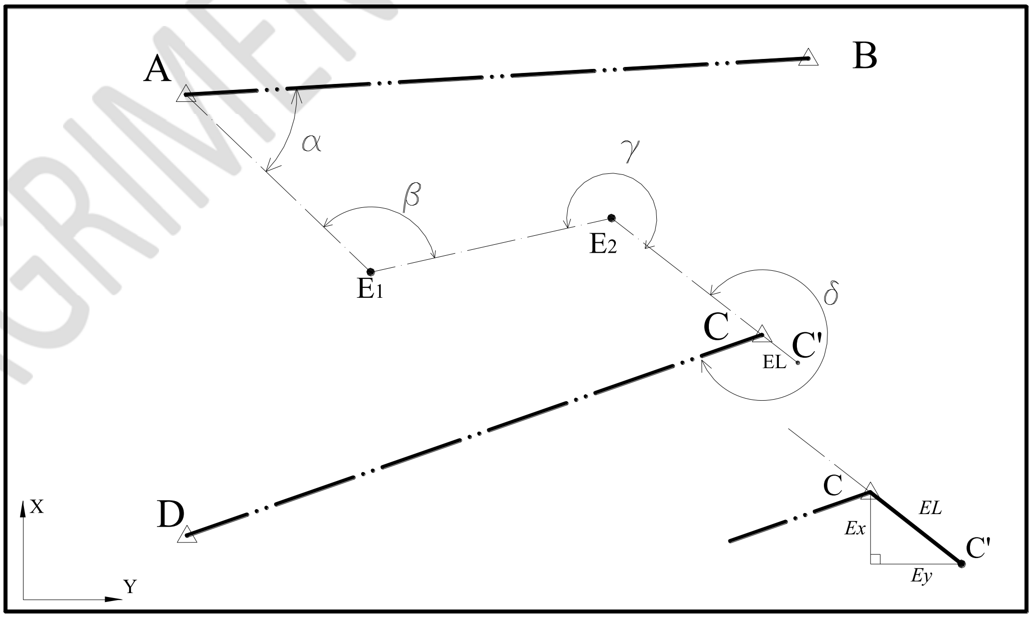

Figura 9

5- Compensación de las proyecciones Δx y Δy.

Si el error de cierre lineal es menor a la respectiva tolerancia, se procederá a compensar las proyecciones Δx y Δy. Donde ***Cx*** es la compensación total para aplicar sobre las proyecciones en el eje X, y ***Cy*** la compensación equivalente para el eje Y.

$$Cx = -Ex$$

$$Cy = -Ey$$

La corrección que se aplique a cada ***Δx*** y ***Δy*** será proporcional a la relación que exista entre la longitud de dicho lado y la longitud total **L** de la poligonal. Tales valores se calculan aplicando una regla de tres simple. Este método es el mismo que se utiliza en planillas de coordenadas.

Luego de corregir las proyecciones se debe verificar que sea exacta la igualdad:

$$\Delta X_{AC} = \Delta X_{AE1} + \Delta X_{E1E2} + \Delta X_{E2C}$$

$$\Delta Y_{AC} = \Delta Y_{AE1} + \Delta Y_{E1E2} + \Delta Y_{E2C}$$

6- Cálculo de las coordenadas de E_1 y E_2.

Con las **proyecciones compensadas** se procede al cálculo de las coordenadas de los puntos E_1, E_2 y C desde el vértice A. Las coordenadas calculadas para el vértice C deben coincidir exactamente con las exactas (conocidas previamente).

Se ha realizado entonces la compensación angular y lineal de la poligonal y como consecuencia de ello se calcularon las coordenadas de los vértices E_1 y E_2. Por lo tanto, los mencionados vértices pueden ser utilizados como apoyo para distintos tipos de relevamientos.

BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA.

- **R. Müller** - Compendio General de Topografía: Teodolitos y Poligonación. 1947.
- **W. Jordan** -Tratado general de Topografía – Primera Parte: Planimetría - 9 edición, 1978.
- **F. Domínguez García-Tejero** - Topografía General y Aplicada – 13 edición. 1998.
- **P. Wolf y Ch. Ghilani** – Topografía – 11 edición, 2008.
- **www.ign.gob.ar**

Consultas: jose.romano@ing.unlp.edu.ar

EJEMPLO: Cálculo y Compensación de una Poligonal topográfica.

Un grupo de Ing. Agrimensores está a cargo del relevamiento de la ruta provincial 46 para un proyecto de reforma de su traza. El levantamiento de puntos se realiza con receptores GNSS (Global Navigation Satellite System) conocidos comúnmente como GPS, esta metodología permite avanzar con gran rapidez, pero tiene el inconveniente de que no puede medirse en zonas muy cubierta, como por ejemplo en sectores con mucha densidad de árboles. En este ejemplo, los puntos medidos con receptores GNSS tendrán sus coordenadas referidas al marco de referencia oficial de nuestro país POSGAR 07, proyectadas en Gauss-Krüger faja V.

Debido al inconveniente antes mencionado, un sector de la ruta (figura 10) no pudo medirse por técnicas GNSS y se relevará mediante una radiación con estación total; por lo tanto, se deberá materializar y medir una poligonal de apoyo.

Se marcan y miden los puntos T_1, T_2, T_3, T_4 con GNSS para apoyar una poligonal con control de cierre angular y lineal (figura 10).

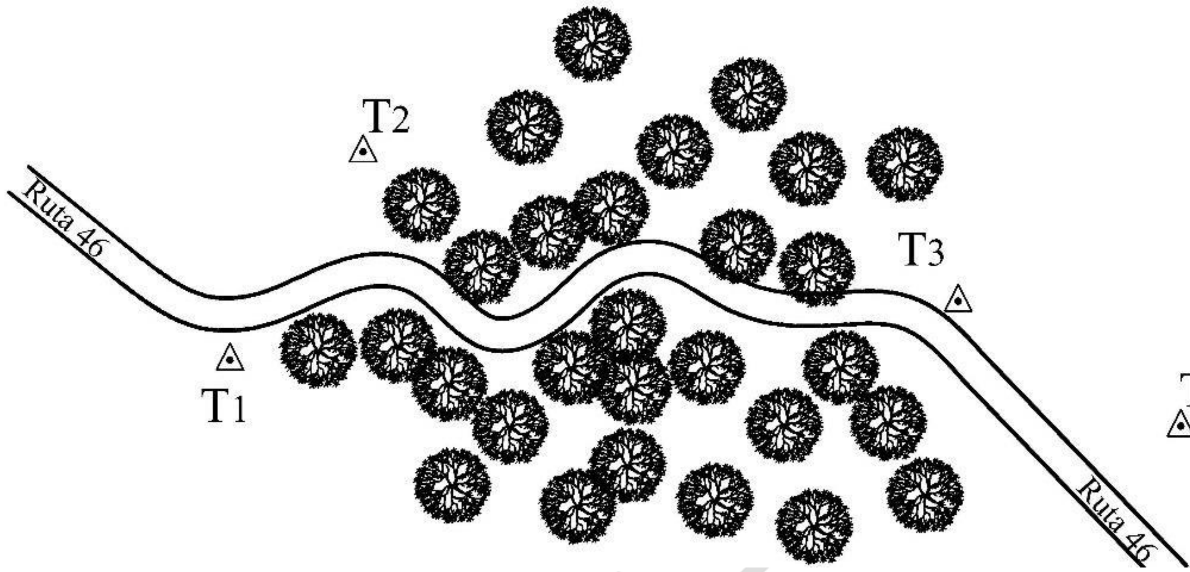

Figura 10: Sector de la ruta rodeado por árboles y puntos T1, T2, T3, T4 medidos con GNSS.

Se medirá una poligonal con el objetivo de asignar coordenadas a los puntos E_2, E_3, E_4, E_5. Para la medición de la poligonal se realizan seis estaciones (ver figura 11):

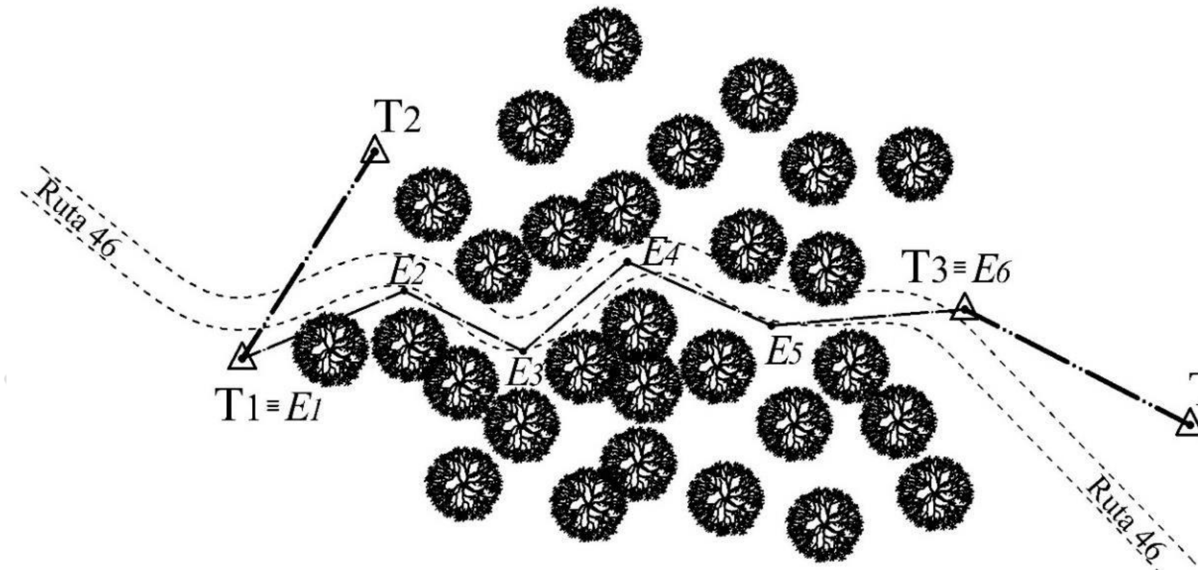

Figura 11: Disposición de los vértices E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 de la poligonal.

La poligonal tiene control de cierre angular y lineal (ver figura 12).

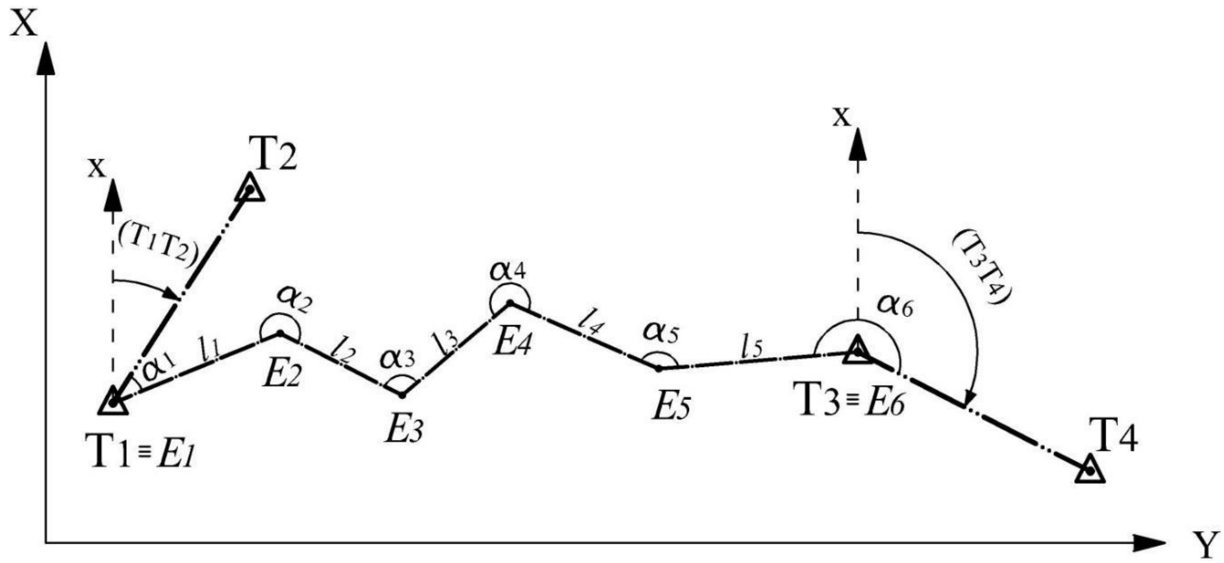

Figura 12: Poligonal de seis vértices con control angular y lineal.

Se realizaron seis estaciones en los puntos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 y E_6. El vértice E_1 coincide con T_1 y el vértice E_6 coincide con T_3, siendo los puntos T_i de coordenadas conocidas.

La estación total utilizada tiene una precisión angular de 5”. Se realizan mediciones angulares por el método de Bessel y las distancias se miden electrónicamente en ida y vuelta:

Ángulos medidos:

α_1= 34° 41’ 27” α_2= 229° 34’ 21” α_3= 112° 37’ 08”

α_4= 244° 23’ 18” α_5= 151° 18’ 43” α_6= 211° 57’ 20”

Distancias medidas:

l_1: 120,40 m l_2: 91,13 m l_3: 94,30 m

l_4: 107,78 m l_5: 132,89 m

<u>**Cálculo**</u>:

Las coordenadas de los puntos T_1, T_2, T_3, T_4 se midieron previamente con GNSS por lo tanto son datos conocidos:

T_1 (6106629,58 ; 5467657,50) T_2 (6106771,69 ; 5467748,45)

T_3 (6106663,51 ; 5468152,69) T_4 (6106584,24 ; 5468307,16)

Las coordenadas de los puntos T_i pertenecen a una proyección Gauss-Krüger faja 5.

1- <u>Cálculo de acimutes de los puntos conocidos</u>:

(T_1T_2)= 32° 37’ 09”

(T_3T_4)= 117° 09’ 57”

2- Cálculo de acimutes de la poligonal:

$(E_1E_2) = (T_1T_2) + \alpha_1 = 32° 37' 09'' + 34° 41' 27'' = 67° 18' 36''$

$(E_2E_3) = (E_1E_2) - 180° + \alpha_2 = 67° 18' 36'' - 180° + 229° 34' 21'' = 116° 52' 57''$

$(E_3E_4) = (E_2E_3) - 180° + \alpha_3 = 49° 30' 05''$

$(E_4E_5) = (E_3E_4) - 180° + \alpha_4 = 113° 53' 23''$

$(E_5E_6) = (E_4E_5) - 180° + \alpha_5 = 85° 12' 06''$

$(T_3T_4)_{medido} = (E_5E_6) - 180° + \alpha_6 = 117° 09' 26''$

3- Cálculo del error de cierre angular:

$e = (T_3T_4)_{medido} - (T_3T_4)_{exacto} = 117° 09' 26'' - 117° 09' 57'' = -0° 00' 31''$

$e = -0° 00' 31''$

4- Cálculo de la tolerancia angular:

$$T = \pm 3 . a . \sqrt{n}$$

a: apreciación.

Para una estación total puede tomarse el valor indicado por el fabricante como precisión en la medición de ángulos.

a=5”.

n: número de ángulos medidos.

n=6

$$T = \pm 3 . 5'' . \sqrt{6} = \pm 36''$$

El error de cierre angular (*e*) es menor al módulo de la tolerancia (T) por lo tanto se puede proceder con la compensación del error.

5- Compensación angular:

$$c_i = \frac{c}{n} = -\frac{e}{n} = -\frac{-31''}{6} = 5{,}2''$$

Se compensa en +6” uno cualquiera de los ángulos, los restantes en +5”.

Ángulos compensados:

$\alpha'_1 = 34° 41' 33''$ $\alpha'_2 = 229° 34' 26''$ $\alpha'_3 = 112° 37' 13''$

$\alpha'_4 = 244° 23' 23''$ $\alpha'_5 = 151° 18' 48''$ $\alpha'_6 = 211° 57' 25''$

6- Cálculo de acimutes compensados:

Se calculan nuevamente los acimutes, pero en esta ocasión con los ángulos que fueron antes compensados:

$(E_1E_2)= (T_1T_2) + \alpha'_1= 32° 37' 09" + 34° 41' 33" = 67° 18' 42"$

$(E_2E_3)= (E_1E_2) -180° + \alpha'_2= 67° 18' 42" -180° + 229° 34' 26" = 116° 53' 08"$

$(E_3E_4)= (E_2E_3) -180° + \alpha'_3=49° 30' 21"$

$(E_4E_5)= (E_3E_4) -180° + \alpha'_4=113° 53' 44"$

$(E_5E_6)= (E_4E_5) -180° + \alpha'_5=85° 12' 32"$

$(T_3T_4)_{medido}= (E_5E_6) -180° + \alpha'_6=117° 09' 57"$

Se verifica que el acimut $(T_3T_4)_{medido}=(T_3T_4)_{exacto}$

7- Cálculo de las proyecciones de los lados:

Solamente para el primer lado E1E2 se escriben las expresiones de cálculo, para los restantes lados se dan solamente los resultados.

$\Delta X_{E1E2} = l_1 \,.\cos(E_1E_2) = 120{,}40 \text{ m} \,.\; \cos 67° 18' 42" = 46{,}44$

$\Delta Y_{E1E2} = l_1 \,.\sin(E_1E_2) = 120{,}40 \text{ m} \,.\; \sin(67° 18' 42") = 111{,}08$

$\Delta X_{E2E3} = -41{,}21$

$\Delta Y_{E2E3} = 81{,}28$

$\Delta X_{E3E4} = 61{,}24$

$\Delta Y_{E3E4} = 71{,}71$

$\Delta X_{E4E5} = -43{,}66$

$\Delta Y_{E4E5} = 98{,}54$

$\Delta X_{E5E6} = 11{,}10$

$\Delta Y_{E5E6} = 132{,}43$

8- Cálculo del error de cierre lineal:

El primer y último punto de la poligonal son puntos conocidos:

$E_1=T_1$ $E_6=T_3$

$\Delta X_{E6E1\ (exacto)}=X_{T3} - X_{T1}$= 6106663,51 - 6106629,58= +33,93 m

$\Delta Y_{E6E1\ (exacto)}=Y_{T3} - Y_{T1}$= 5468152,69 - 5467657,50= +495,19 m

$\Delta X_{E6E1\ (medido)}= \Delta X_{E1E2}+ \Delta X_{E2E3}+ \Delta X_{E3E4}+ \Delta X_{E4E5}+ \Delta X_{E5E6}$=+33,91 m

$\Delta Y_{E6E1\ (medido)}= \Delta Y_{E1E2}+ \Delta Y_{E2E3}+ \Delta Y_{E3E4}+ \Delta Y_{E4E5}+ \Delta Y_{E5E6}$=+495,04 m

Ex=33,91 – 33,93= -0,02 m

Ey=495,04 – 495,19= -0,15 m

Luego el error de cierre lineal es:

$$E_L = \sqrt{Ex^2 + Ey^2} = \sqrt{(-0{,}02)^2 + (-0{,}15)^2} = 0{,}16\, m$$

9- Cálculo de la Tolerancia lineal:

$$T = \pm 0{,}015\sqrt{0{,}3L + 0{,}0005L^2}$$

$L=l_1+l_2+l_3+l_4+l_5$= 546,50 m

$$T = \pm 0{,}015\sqrt{0{,}3(546{,}50\ m) + 0{,}0005L(546{,}50\ m)^2} = \pm 0{,}26\ m$$

Como el error de cierre lineal es menor a la tolerancia pueden ser compensadas las proyecciones.

10- Compensación de los Δx y Δy:

Se aplica una regla de tres simple, utilizando la relación que existe entre la longitud de cada lado con la longitud total de la poligonal (546,50 m). Los redondeos se realizarán de forma conveniente para que las sumas de las correcciones parciales sean igual a la total.

$$c1_X = \frac{120{,}40\ .\ 0{,}02}{546{,}50} = 0{,}004\ m \cong 0{,}01m$$

$$c1_Y = \frac{120{,}40\ .\ 0{,}15}{546{,}50} = 0{,}033\ m \cong 0{,}03m$$

$$c2_X = \frac{91{,}13\ .\ 0{,}02}{546{,}50} = 0{,}003\ m \cong 0{,}00m$$

$$c2_Y = \frac{91{,}13\ .\ 0{,}15}{546{,}50} = 0{,}025\ m \cong 0{,}02m$$

$$c3_X = \frac{94{,}30\ .\ 0{,}02}{546{,}50} = 0{,}003\ m \cong 0{,}00m$$

$$c3_Y = \frac{94{,}30\ .\ 0{,}15}{546{,}50} = 0{,}026\ m \cong 0{,}03m$$

$$c4_X = \frac{107{,}78\ .\ 0{,}02}{546{,}50} = 0{,}004\ m \cong 0{,}00m$$

$$c4_Y = \frac{107{,}78\ .\ 0{,}15}{546{,}50} = 0{,}030\ m \cong 0{,}03m$$

$$c5_X = \frac{132{,}89\ .\ 0{,}02}{546{,}50} = 0{,}005\ m \cong 0{,}01m$$

$$c5_Y = \frac{132{,}89\ .\ 0{,}15}{546{,}50} = 0{,}036\ m \cong 0{,}04m$$

Luego se aplican las correcciones calculadas:

$$\Delta X'_{E1E2} = 46{,}44 + 0{,}01 = 46{,}45m$$

$$\Delta Y'_{E1E2} = 111{,}08 + 0{,}03 = 111{,}11m$$

$$\Delta X'_{E2E3} = -41{,}21 + 0{,}00 = -41.21\ m$$

$$\Delta Y'_{E2E3} = 81{,}28 + 0{,}02 = 81{,}30$$

$$\Delta X'_{E3E4} = 61{,}24 + 0{,}00 = 61{,}24\ m$$

$$\Delta Y'_{E3E4} = 71{,}71 + 0{,}03 = 71{,}74$$

$$\Delta X'_{E4E5} = -43{,}66 + 0{,}00 = -43{,}66\ m$$

$$\Delta Y'_{E4E5} = 98{,}54 + 0{,}03 = 98{,}57$$

$$\Delta X'_{E5E6} = 11{,}10 + 0{,}01 = 11{,}11$$

$$\Delta Y'_{E5E6} = 132{,}43 + 0{,}04 = 132{,}47$$

11- Control:

$\Delta X_{E6E1\ (medido)} = \Delta X'_{E1E2} + \Delta X'_{E2E3} + \Delta X'_{E3E4} + \Delta X'_{E4E5} + \Delta X'_{E5E6} = +33{,}93\ m = \Delta X_{E6E1\ (exacto)}$

$\Delta Y_{E6E1\ (medido)} = \Delta Y'_{E1E2} + \Delta Y'_{E2E3} + \Delta Y'_{E3E4} + \Delta Y'_{E4E5} + \Delta Y'_{E5E6} = +495{,}19\ m = \Delta Y_{E6E1\ (exacto)}$

12- Cálculo de las coordenadas:

$X_{E1} = X_{T1} = 6106629{,}58$

$Y_{E1} = Y_{T1} = 5467657{,}50$

$X_{E2} = X_{E1} + \Delta X'_{E1E2} = 6106629{,}58 + 46{,}45 = 6106676{,}03$

$Y_{E2} = Y_{E1} + \Delta Y'_{E1E2} = 5467657{,}50 + 111{,}11 = 5467768{,}61$

Del mismo modo se calculan las restantes coordenadas:

$X_{E3} = 6106634{,}82$

$Y_{E3} = 5467849{,}91$

$X_{E4} = 6106696{,}06$

$Y_{E4} = 5467921{,}65$

$X_{E5} = 6106652{,}40$

$Y_{E5} = 5468020{,}22$

Las coordenadas del vértice E6 deben coincidir exactamente con las del punto conocido T3:

$X_{E6} = 6106663{,}51 = X_{T3}$ (Control)

$Y_{E6} = 5468152{,}69 = Y_{T3}$ (Control)

13- Resultados:

Las coordenadas compensadas de los puntos interiores de la poligonal son:

E_2 (6106676,03 ; 5467768,61) **E_3 (6106634,82 ; 5467849,91)**

E_4 (6106696,06 ; 5467921,65) **E_5 (6106652,40 ; 5468020,22)**

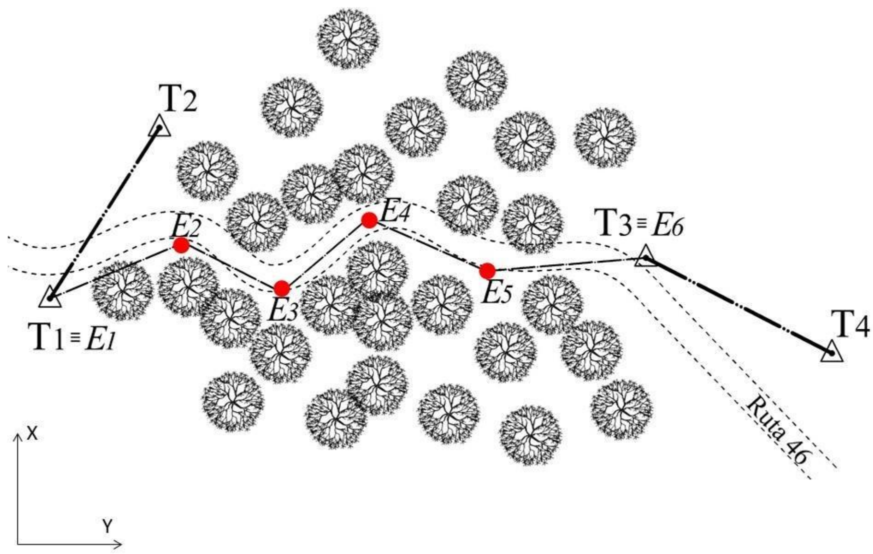

Figura 13: Poligonal medida y compensada. Sobre los puntos E2, E3, E4 y E5 será posible apoyar un levantamiento topográfico y obtener los resultados en el marco de referencia con el que se está haciendo todo el trabajo.