Unidad nº1

ESPACIOS VECTORIALES.

Unidad nº1: Espacios Vectoriales

- Sistema de abscisas en la recta. Vectores aplicados. Vectores libres. Espacios Vectoriales Reales. Propiedades Elementales.. Espacio Vectorial de Rn. Isomorfismos de espacios vectoriales

BIBLIOGRAFÍA

- **De Burgos, J. - "Algebra Lineal y Geometría cartesiana"-(2 da. Edición) –Mc Graw Hill- 2000**
- **Rojo, Armando O -"Algebra I","Algebra II"-Librería "El Ateneo" Editorial. Ed.1.980 (*)**
- **Lic. Albino de Sunkel, María Helena- "Geometría Analítica en forma vectorial y Matricial" – Ed. Nueva Librería S.R.L. 1989(*)**
- **Steinbruch – Winterle- "Algebra LineaL"- Edit.Mac Graw Hill Edición 1.993(*)**
- **Stanley I.Grossman – "Algebra Lineal con aplicaciones" Edit.Mc.Graw Hill- Ed.1993(*)**
- **Seymour Lipschutz – Algebra Lineal – Edit Mc. Graw Hill – Edición 1991(*)**
- **Pita Ruiz, Claudio.- "Álgebra Lineal "-Ed.Mc.Graw Hill-Ed 1993**
- **Juan De Burgos -"Algebra Lineal"**

Juan de Burgos, expresa:

- "…la Geometría que estudiaremos se sustenta en el álgebra, de la que hereda y utiliza conceptos y métodos y modos de hacer. Los vectores y las matrices son el alma del Algebra Lineal."
- La lógica, gobierna. El camino lo marca la didáctica.

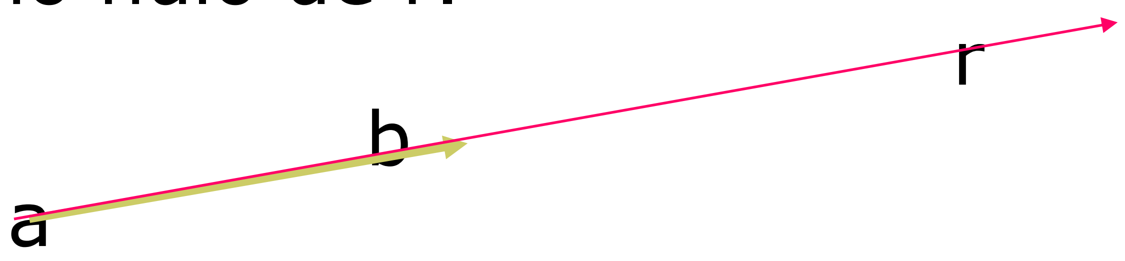
Sistema de Abscisas en la Recta.

ALGEBRA - GEOMETRIA

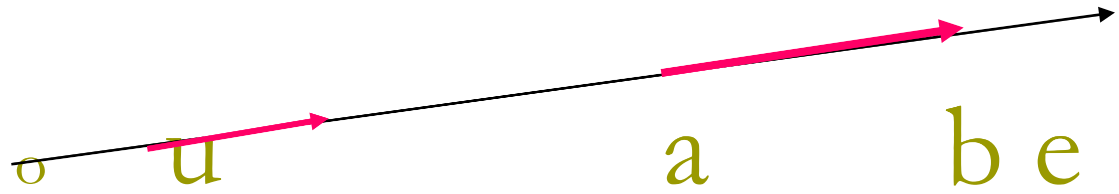
* *Par :* (a ; b) = (b ; a) Segmento ab

**Par ordenado* Segmento orientado

**Rectas orientadas*: es el sistema formado por una recta r y un segmento orientado ab no nulo de r.



* Eje:



sistema formado por los siguientes elementos:

1)una recta “r”

2)un segmento orientado en “r”, tal que con este segmento orientador “r” es una recta orientada.

3)un punto de “r” , llamado origen , designado con la letra “o”.

4)un segmento orientado “u”, no nulo llamado unidad, y que está igualmente orientado que el segmento orientador, es decir, u está positivamente orientado.

Abscisas

- Dado un eje “e” y un punto p del mismo, se llama ascisa de p al número real $x_p = op/u$
- **Observación:** Si p coincide con o, $x_p = 0$
- Si p no coincide con o:
- $x_p > 0$: el segmento orientado op tiene igual orientación a la del segmento unidad “u”,
- $x_p < 0$: el segmento orientado op tiene orientación opuesta a la del segmento unidad “u”.
  - Si x es la abscisa de p, x.u = op

* Semiejes

SEMIEJE POSITIVO: semirrecta de origen O que contiene al segmento unidad. Todos sus puntos tienen abscisas positivas, o, nula (en el caso de que el punto coincida con el origen).

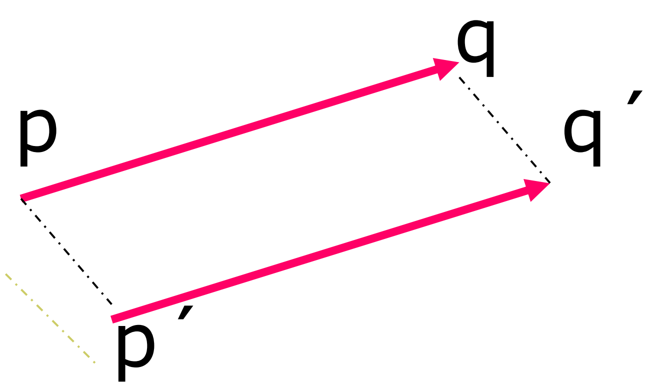
SEMIEJE NEGATIVO : semirrecta opuesta a la anterior. Todos sus puntos tienen abscisas negativas, o, nula (en el caso de que el punto coincida con el origen).

Vectores Aplicados.

- Sean o y p dos puntos cualesquiera de una recta, del plano o del espacio.
- El segmento orientado op es el vector aplicado en el punto o.
- Dado un punto fijo o de la recta, del plano o del espacio, llamaremos V_o, al conjunto de todos los vectores aplicados en el punto o, que serán vectores aplicados en O de la recta, del plano o del espacio respectivamente.

Vectores Equipolentes

- Dados dos segmentos orientados *pq* y *p´q´* diremos que son equipolentes, y escribiremos pq~*p´q´* si y solo si son lados opuestos de un paralelogramo cuyos otros lados son *pp´* y *qq´*.



Vectores Libres.

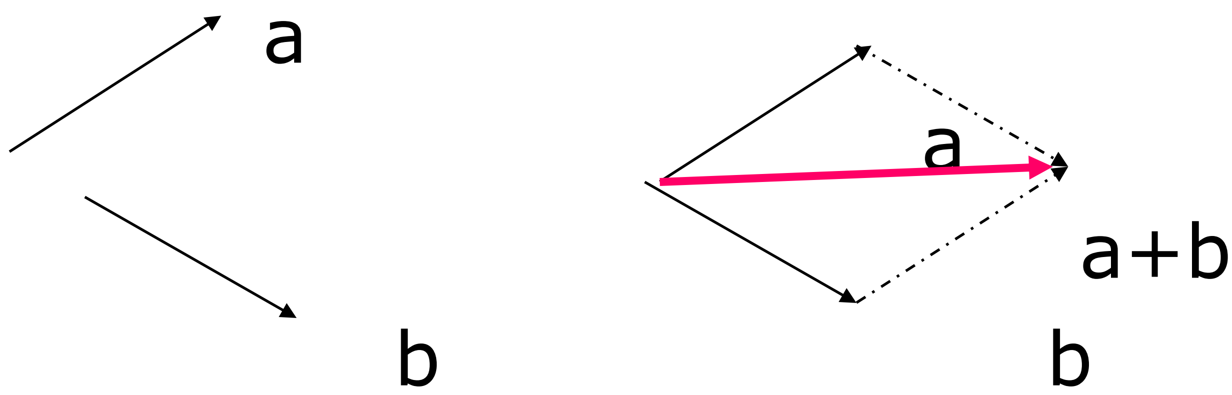
- Dado un segmento orientado cualquiera pq, llamaremos vector libre pq* al conjunto de todos los segmentos orientados equipolentes a pq:

$$pq^* = \{xy \;/\; xy \sim pq\}$$

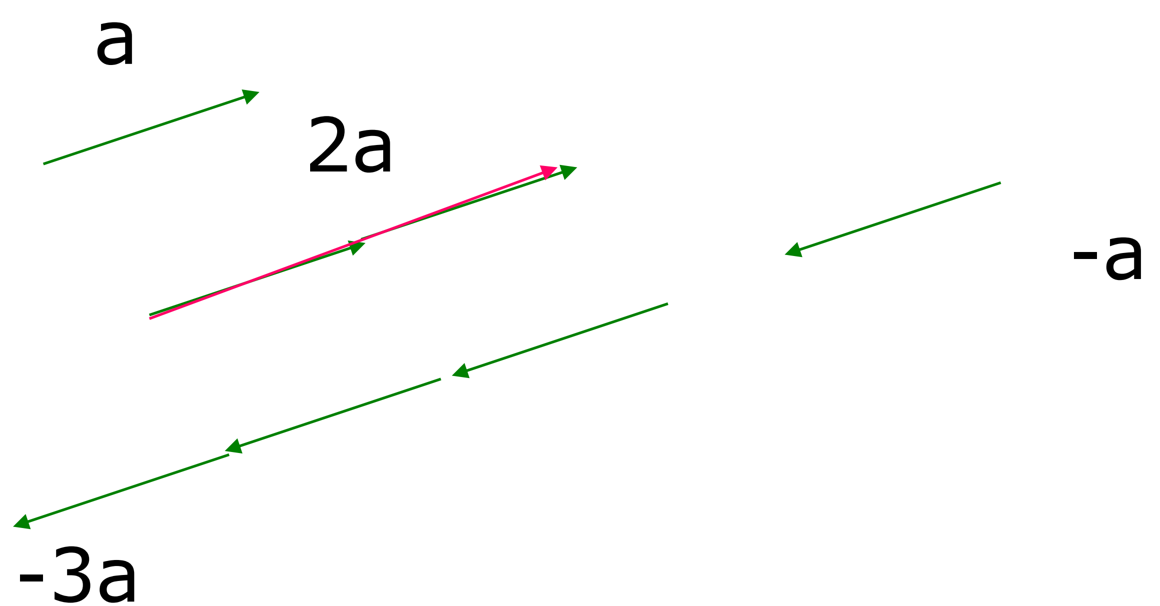
- El vector libre pq*, determinado por un segmento orientado pq, es el conjunto de todos los segmentos orientados paralelos a pq, del mismo sentido y de igual longitud, de cada punto del plano o del espacio.

Operaciones Fundamentales con Vectores Aplicados.

- Suma de vectores aplicados: Regla del Paralelogramo. a + b Ley de composición interna: V x V $\rightarrow$ V



Producto escalar-vector.



$\alpha\ \mathit{op} = \mathit{oq} \Leftrightarrow \text{absc}\,(\mathit{oq}) = \alpha\ \text{absc}(\mathit{op})$

- $\forall \alpha \in R,\ \forall\ a \in V: \alpha .\ a \in V$

α op=oq. Efecto Geométrico.

- **$\alpha < -1$:** *oq* es un vector de igual dirección que *op*, $|oq| > |op|$ y sentido contrario.
- **$\alpha = -1$:** oq es un vector de igual dirección que op, igual módulo y sentido contrario.
- **$-1 < \alpha < 0$:** oq es un vector de igual dirección que op, $|oq| < |op|$ y sentido contrario.
- **$\alpha = 0$:** oq es el vector nulo.
- **$0 < \alpha < 1$:** oq es un vector de igual dirección y sentido que op, $|oq| < |op|$.
- **$\alpha = 1$:** oq es coincidente con op.
- **$\alpha > 1$:** oq es un vector de igual dirección y sentido que op, $|oq| > |op|$.

Espacios Vectoriales Reales.

- Se dice que un conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo K, si y solo si en él están definidas dos operaciones:

$+: \forall x, y \in V, \exists! z \in V / z = x + y$

$*: \forall \alpha \in K, \forall x \in V, \exists! z \in V / z = \alpha x$

Axiomas: $\forall x, y, z \in V$

$+ : x \in V \wedge y \in V \Rightarrow (x + y) \in V$

$S_1: x + y = y + x$

$S_2: (x + y) + z = x + (y + z)$

$S_3: \exists\, \theta \in V, \forall x \in V : \theta + x = x + \theta = x$

$S_4: \forall x \in V, \exists\, x' \in V, : x + x' = x' + x = \theta$

$\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in V$:

. : $\alpha \in \mathbf{R} \wedge \mathbf{x} \in \mathbf{V} \Rightarrow (\alpha \,.\, \mathbf{x}) \in \mathbf{V}$

P_1: $\alpha\,.(\beta.\, x) = (\alpha.\beta).\, x$

P_2: $\exists 1 \in R, \forall\, x \in V : 1 \,.\, x = x$

P_3: :$(\alpha + \beta).\, x = \alpha \,.\, x + \beta \,.\, x$

P_4: $\alpha \,.\, (x + y) = \alpha \,.\, x + \alpha \,.\, y$

$\therefore$(V; +; K; *) estructura de ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO K

K = R: ESPACIO VECTORIAL REAL.

Propiedades Elementales.

- **Sea V espacio vectorial real V:**
- **P_1:$\forall$ x, y, z $\in$ V:**

  $$x + y = x + z \Rightarrow y = z$$

- **P_2:$\forall$ x $\in$ V, $\forall$ α $\in$ R : 0 . x = α . θ = θ**
- **P_3:Existe un único vector nulo.**
- **P_4:Todo vector x tiene un único vector opuesto x´.**

Espacio Vectorial de pares ordenados de números reales.

- $R^2 = R \times R = \{(x ; y) / x \in R, y \in R\}$
- El conjunto(R^2, +, R, .) tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo R:
- $+ : (a ; b) + (c ; d) = (a + c; b + d)$

  $\forall (a ; b) ; (c ; d) \in R^2$
- $. : \alpha (a ; b) = (\alpha a ; \alpha b)$

  $\forall \alpha \in R, \forall (a ; b) \in R^2$

Espacio Vectorial de las ternas ordenadas de Números Reales.

- $R^3 = RxRxR = \{(x;y;z)/x \in R,\ y \in R,\ z \in R\}$
- El conjunto(R^3, +, R, .) tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo R:
- $+ : (a; b; c) + (d; e; f) = (a+d; b+e; c+f)$

  $\forall (a ; b ; c) ; (d ; e ; f) \in R^3$
- $. : \alpha (a ; b ; c) = (\alpha a ; \alpha b ; \alpha c)$

  $\forall \alpha \in R\ \forall (a ; b ; c) \in R^3$

Espacio Vectorial de las n-uplas ordenadas de números Reales.

- $R^n = \underbrace{R x \ldots x R}_{\text{n veces}}$
- $R^n = \{(x_1;\ldots;x_n) / x_i \in R$ con $i = 1, 2, \ldots, n\}$
- El conjunto(R^n, +, R, .) tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo R:
- $+ : (a_1;\ldots;a_n) + (b_1;\ldots;b_n) = (a_1+b_1;\ldots;a_n+b_n)$
  $\forall (a_1;\ldots;a_n), (b_1;\ldots;b_n) \in R^n$
- $* : \alpha (a_1;\ldots;a_n) = (\alpha a_1;\ldots;\alpha a_n)$
  $\forall \alpha \in R \ \forall (a_1;\ldots;a_n) \in R^3$

Isomorfismo de Espacios Vectoriales

- Dos espacios vectoriales reales V y W son isomorfos si y solo si se puede definir una función φ con dominio en V y codomonio en W que sea biyectiva y que además cumpla las igualdades:

$$\forall x \in V \wedge \forall\, y \in V : \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\forall \lambda \in R \wedge \forall\, x \in V : \varphi(\lambda\, x) = \lambda\, \varphi\,(x)$$

Ejemplos

- Los espacio vectoriales Vo y R^3 son isomorfos.

  φ: Vo$\rightarrow R^3$ / $\varphi(OP)=(x_p ; y_p ; z_p)$

- Los espacio vectoriales Vo y V * son isomorfos. φ: Vo$\rightarrow$ V * / $\varphi(OP)=OP^*$

Vector Posición.

- Dados dos puntos distintos *a* y *b* de R^2 o de R^3
- $a\ (x_a; y_a);\ b\ (x_b; y_b)$
- Vector posición *ab* es el vector *op~ab*/
- $op=(x_b - x_a; y_b - y_a)$