



## Continuación TEMA 6 – LEVANTAMIENTOS TOPOGRAFICOS

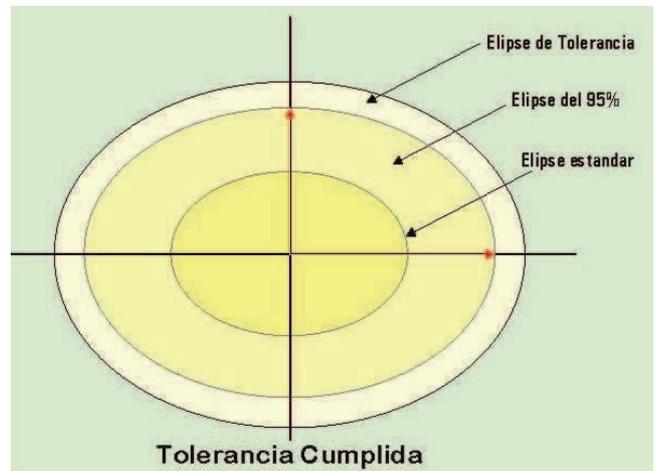
### 11. ELIPSE DE ERROR<sup>1</sup>

La **elipse estándar de error** es una figura cuyos parámetros representan aspectos de la **precisión** de la ubicación de un punto, **luego de un ajuste por mínimos cuadrados**.

Su semieje mayor “a” (en módulo y orientación) es el error estándar máximo. Su semieje menor es el mínimo.

Su **superficie** representa un determinado **porcentaje de probabilidad de ubicación del punto, cercano al 37%**.

Si se multiplican los semiejes por el factor 2, la superficie de la elipse resultante abarca el 95% de probabilidad, y pasa a llamarse **elipse del 95% de confiabilidad**.



#### Error estándar de 1, 2, 3 sigma.

El error estándar es un parámetro que mide la precisión. Se obtiene a partir de la varianza y de las covarianzas, y representa un determinado porcentaje de probabilidad de ocurrencia.

#### Error medio cuadrático = error estándar = $1 \sigma$

Cuando se mencionan precisiones de 2 sigma o 3 sigma, se trata de definir márgenes de probabilidad más generosos (en caso de observaciones directas, el porcentaje de probabilidad es del 95% y del 99% respectivamente).

**Nivel de Confianza del 95%**, medida de la **tolerancia** en la precisión de los ajustes.

Cuando el error estándar (2 sigma) que se obtuvo en observaciones directas es inferior a una tolerancia especificada, el ajuste cumple con el nivel de confianza del 95%.

Cuando los errores son tri dimensionales, la elipse de error se transforma en un **elipsoide estándar de error**. Y de igual modo **elipsoide de confianza**.

Cuando en error es unidimensional, como el caso de la nivelación diferencial, la elipse se transforma en un segmento vertical, y la llamamos **Intervalo estándar de error** y de igual modo **intervalo de confianza**.

### 12. PRECISIÓN DE LAS REDES DE APOYO

Cuando se planifica un levantamiento topográfico, se fijan pautas de tolerancia, dentro de cuya elipse deben encontrarse los puntos relevados. A partir de dichas tolerancias prefijadas debe deducirse la exactitud de la red de apoyo.

<sup>1</sup> Topometría y Microgeodesia. Ap. Clases año 2000. Ing.Agrim. Armando Del Bianco. Dpto. FCEFyN. UNC



Sin embargo en muchas ocasiones, las exactitudes requeridas no están claramente expresadas, en tal caso es conveniente y a veces hasta imprescindible adaptarse a normas o estándares ya establecidos para redes de control o sistemas de apoyo.

Cuando la red esté encerrada dentro del ámbito espacial establecido para la Microgeodesia podemos guiarnos por el **Manual MGEO** (*Manual de Normas y Especificaciones para Levantamientos Geodésicos de Alta Precisión en Areas Pequeñas*), cuando el espaciado ingresa al dominio de la Geodesia, podemos guiarnos por los **Estándares Geodésico**.

### 12.1. Manual MGEO

Lo que a continuación sigue, es una copia extractada del “**Manual de Normas y Especificaciones para Levantamientos Geodésicos de Alta Precisión en Areas Pequeñas**” publicada por el IPGH (Instituto Panamericano de Geografía e Historia), cuyo mayor referente en la comisión redactora fue el destacado geodesta, y microgeodesta Agrim. Exequiel Pallejá.

El manual define 4 (cuatro) órdenes de precisión: **A+**, **A**, **B** y **C** (cuyos ejemplos de aplicación son):

**A+**: Mediciones Industriales, Movimientos de la Corteza terrestre, Movimientos de Estructuras, Alineamientos de estructuras.

**A**: Mediciones Industriales, Movimientos de la Corteza terrestre, Movimientos de Estructuras, Alineamientos de estructuras, Control geodésico del primer orden y densificación de redes en zonas urbanas.

**B**: Redes de apoyo para Cartografía y Catastros en zona urbana, proyectos de Ingeniería Civil, Control para fines múltiples.

**C**: Redes de apoyo para levantamientos catastrales en zona urbana, Catastro rural, relevamientos de servicios.

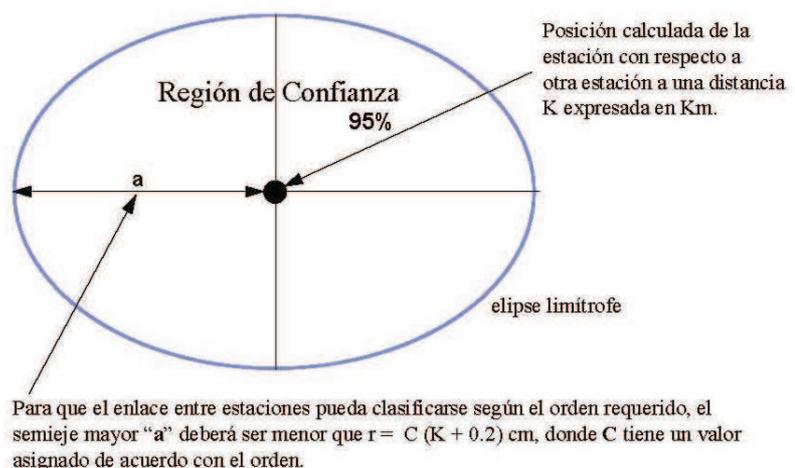
### 12.2. Precisión horizontal

El criterio se basa en una *región de confianza de 95%*. Esta es un área delimitada por una elipse en la que puede especificarse que se encuentra determinado el valor posicional con un 95% de probabilidad.

Es bidimensional porque las posiciones se definen mediante dos coordenadas. Se calcula con un ajuste mínimo cuadrático de la matriz inversa de las ecuaciones normales.

**r** es la **longitud del semieje mayor** de la elipse de 95% de confianza en cm.

Una estación MGEO se clasifica dependiendo de que el semieje mayor de la región de 95% de confianza (elipse), con respecto a las otras estaciones de la red, sea menor o igual a:



$$r = C ( K + 0.2 )$$



**K:** es la distancia a cualquier otra estación expresada en Km.

**C:** es el coeficiente asignado según el orden de precisión.

$$\mathbf{A+} \Rightarrow \mathbf{C} = 1$$

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} = 2$$

$$\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} = 5$$

$$\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = 12$$

Ejemplo:

Dos estaciones tienen 1 Km. de separación, la obra tiene asignado un orden = **A+**

¿ Cual sería el valor máximo de **r** aceptado ?

$$r = C ( K + 0.2 )$$

$$r = 1 ( 1 + 0.2 ) = \mathbf{1,2 \text{ cm}}$$

### 12.3. Precisión vertical.

El criterio se basa en el *intervalo de confianza de 95%* que en el caso de errores con distribución normal, es dos veces la desviación estándar. Este es el intervalo en el que puede especificarse que se encuentra una diferencia de elevación entre dos estaciones con un 95% de probabilidad.

Este criterio puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Delta H = C \cdot \sqrt{K}$$

**ΔH:** es la longitud del intervalo de confianza de 95% (en milímetros)

**K:** es la distancia entre dos estaciones (o PF monumentado) expresado en Km a lo largo del trayecto usado para la medición.

**C:** es el coeficiente asignado según el orden de precisión

los diversos ordenes de precisión para las diferencias en elevación especificadas para MGEO son:

$$\mathbf{A+} \Rightarrow \mathbf{C} = 1$$

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C} = 2$$

$$\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} = 4$$

$$\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = 8$$

Ejemplo

Necesitamos planificar el sistema de apoyo altimétrico, para un acueducto que tiene 93 Km. de longitud. Nos imponemos un error de cierre  $\omega = 5$  cm. Para tal fin, emplearemos una nivelación diferencial, fijando un intervalo de confianza de 95%. ¿Cual es el orden de precisión de la red altimétrica solicitada?

$$\Delta H = \pm \omega / 2 = \pm 2.5 \text{ cm (intervalo de confianza 95\%)}$$

$$\Delta H = C \cdot \sqrt{K} = \Delta H = C \cdot \sqrt{93}$$

$$\Rightarrow C = 25 / \sqrt{93} = 25 / 9.64 = 2.6 \text{ mm}$$

Por lo tanto, su clasificación corresponde al orden “ **B**”

## 13. DISEÑO DE REDES. MÉTODOS DE CONTROL HORIZONTAL.<sup>2</sup>

Punto 4.1 del Manual MGEO **Redes horizontales** ....4.1.1. Diseño

<sup>2</sup> Topometría y Microgeodesia. Ap. Clases año 2000. Ing. Agrim. Armando Del Bianco. Dpto. FCEFyN. UNC



La precisión total de una red de control horizontal no depende solamente de la precisión de las mediciones de campo (minimización de los efectos de los errores sistemáticos y accidentales), sino también de su configuración.

Para que una red sea fuerte y confiable, deberá ser razonablemente homogénea y tener muchas mediciones redundantes y figuras individuales de forma definida.

Las estaciones deberán encontrarse espaciadas lo más uniformemente posible, y todos los pares adyacentes de estaciones de la red deberán estar enlazados preferiblemente por mediciones directas. La razón de la longitud de la línea más larga a la de la línea más corta nunca debe ser mayor que cinco y normalmente es mucho menor.

No obstante, a menudo resulta imposible lograr todas estas condiciones deseables. Debido a dificultades que se presentan en la práctica, hay redes donde los puntos adyacentes no pueden enlazarse en una forma conveniente.

Pueden ocurrir variaciones muy grandes en las distancias entre estaciones y es posible que estas tengan que medirse con diversos instrumentos cuyas precisiones difieren significativamente.

El que diseña la red debe tener en cuenta todas estas divergencias respecto al modelo ideal.

A fin de diseñar una red de control horizontal, que permita obtener las precisiones especificadas, la persona responsable debe contar con buenas estimaciones a priori de la precisión de medición de cada uno de los instrumentos que van a usarse. Dichas estimaciones no solo deberán reflejar la coherencia de varias mediciones de la misma cantidad con el mismo instrumento, usando un intervalo corto de tiempo y bajo condiciones ideales, sino también los posibles efectos de errores aleatorios normales que pueden ocurrir en las operaciones regulares de campo en condiciones típicas de trabajo y con personal medianamente cuidadoso.

Además, las estimaciones deberán contemplar también ciertos errores sistemáticos que quizás no resulten evidentes en un levantamiento normal; por ejemplo, un error por corrimiento del cero no corregido en los instrumentos electrónicos de medición de distancias (EDM), errores meteorológicos sistemáticos producidos por técnicas de medición no perfeccionadas, etc.

La precisión de un levantamiento de control horizontal, sólo puede evaluarse debidamente a partir de los resultados de un ajuste por mínimos cuadrados riguroso de las mediciones. Sin embargo, como dicha evaluación solo puede llevarse a cabo después de terminado el trabajo de campo, se requiere un método más útil para quienes deseen diseñar redes y preparar pautas para las mediciones y que además necesiten suficiente garantía de que se obtendrá determinado orden de precisión al realizar el trabajo de campo “ (*acotación de errores*)

La mejor solución es simular (pre analizar) la red propuesta mediante un programa de computadora apropiado utilizando estimaciones a priori de las precisiones de medición. Los resultados de dicho estudio de simulación, modificados según la sabiduría adquirida con la experiencia práctica, suelen ser una indicación confiable de la precisión que posiblemente se obtenga en el campo.

Existen programas típicos apropiados para los estudios de simulación.



- Un breve resumen para comprender como funcionan estos programas de simulación de redes:

Para calcular las coordenadas de los vértices de una red, es suficiente con medir los elementos estrictamente necesarios, así por ejemplo, para resolver un triángulo es suficiente con medir un lado (base) y dos ángulos; si en cambio, efectuamos un mayor número de observaciones que las estrictamente necesarias, tendremos elementos supernumerarios que nos permitan una compensación por mínimos cuadrados.

$$l_0 + v = l_a + dl = l$$

donde:

$l_0$  valor de la magnitud observada

$v$  corrección de la observación

$l_a$  valor aproximado de cálculo

$dl$  corrección calculada

$l$  valor final ajustado

Si aceptamos el carácter diferencial de “ $dl$ ” la anterior expresión puede escribirse:

$$v = dl/\delta x dX + dl/\delta y dY + \dots + l_a - l_0$$

de esta forma se obtiene un sistema, donde habrá tantas ecuaciones como observaciones realizadas y tantas incógnitas como coordenadas.

Expresándolo en forma matricial resulta:

$$v = A X + L$$

donde:

$A$  es la matriz dependiente de la configuración del sistema

$X$  es la matriz de las incógnitas

$L$  es la matriz de los términos independientes

La matriz  $A$  depende únicamente de la configuración del sistema, de la forma de la figura y por ende de los enlaces establecidos entre los vértices. Si se cambia un vértice de lugar, o se agregan ataduras, cambian los resultados.

De tal modo, que dibujando sobre una carta la configuración de un sistema de apoyo, puede obtenerse previamente una correcta acotación de errores de una manera interactiva, rápida, eficaz y dinámica.

**13.1. MÉTODOS<sup>3</sup>:** Los métodos convencionales que generalmente se utilizan son triangulación, trilateración y poligonación.

Todos ellos tienen la desventaja de que, además de las estaciones de control requeridas actualmente por razones prácticas, es necesario proporcionar estaciones intermedias adicionales para que haya intervisibilidad, sin la cual no sería posible propagar la red.

13.1.1. La **triangulación**: tiene la ventaja que por lo general, el reconocimiento no resulta muy difícil y permite aplicar a las observaciones en el campo comprobaciones muy sencillas. En las redes de triangulación los usuarios obtienen con facilidad las direcciones (orientación y es posible que deseen extender sus poligonales desde las estaciones de control). Además resulta fácil establecer puntos de control” (o de orientación) “adicionales tales como torres de iglesias...” (pararrayos en torres, antenas y edificios)

“...por medio de intersecciones directas sin que sea necesario que el punto se encuentre ocupado por una señal, reflector u operador.

<sup>3</sup> Topometría y Microgeodesia. Ap. Clases año 2000. Ing.Agrim. Armando Del Bianco. Dpto. FCEFyN. UNC



Una de las desventajas de la triangulación es que la precisión se ve afectada por la refracción horizontal, la cual es muy difícil de medir y corregir. Se necesita buen tiempo y observaciones de gran precisión que probablemente deberán efectuarse de noche.

Salvo en el caso de redes sencillas, la triangulación requiere que una gran cantidad de estaciones sean ocupadas a la vez. Por consiguiente, muchas veces se necesita una brigada de campo numerosa.

Si se requieren torres para garantizar la intervisibilidad, estas deben ser sumamente resistentes y complicadas (torres internas y externas separadas para el instrumento y el observador).

13.1.2. Las redes de **trilateración**: se ven menos afectadas por la refracción ” (*lateral*) “que las de triangulación, especialmente si se utilizan instrumentos EDM electroópticos para medir las líneas. La intervisibilidad entre estaciones no es tan crítica” (*relativamente*) “Si se requieren torres para este fin, pueden ser razonablemente livianas y portátiles. Las mediciones de las líneas desde una torre normalmente no se ven afectadas por los movimientos causados por los elementos ” (giro de la torre por calentamiento diferencial, viento ) “ o el observador. Sin embargo, las redes de trilateración suelen requerir más líneas por estación, y esto hace que el reconocimiento sea más difícil, especialmente en áreas urbanas. Además, la trilateración por lo general requiere algunas mediciones angulares como refuerzo esencial. Las redes extensas requieren control acimutal frecuente. Es necesario medir las distancias con mayor precisión (en términos proporcionales) para obtener la misma precisión general en las estaciones. Las direcciones no pueden obtenerse fácilmente en el caso de usuarios que deseen iniciar las poligonales desde una estación de la red.

Tampoco pueden establecerse fácilmente las líneas acimutales para dichos usuarios cuando se extiende la red principal.

13.1.3. La **poligonación** es el método más sencillo para establecer control. El reconocimiento resulta relativamente sencillo porque hay menos observaciones desde y hacia cada estación. Las rutinas de observación son relativamente cortas y sencillas. Por este motivo, la brigada de campo puede ser mucho más pequeña que las requeridas para la triangulación y trilateración. Los usuarios pueden obtener fácilmente las direcciones (orientación).

No obstante, la fuerza geométrica de las poligonales es por lo general baja, especialmente en ángulo recto a la dirección principal del avance. Esto requiere un pre análisis y diseño más cuidadoso de la red.

Esta debilidad inherente a la poligonación puede minimizarse, trazando las poligonales en un patrón de red con muchos puntos nodales de intersección.

De lo contrario, se requieren acimuts de control con relativa frecuencia para mantener la precisión de la orientación.

Como en el caso de las triangulaciones, las observaciones de las poligonales pueden verse afectadas considerablemente por la refracción horizontal.



Con frecuencia se combinan dos métodos convencionales o más, para formar una red híbrida óptima a un menor costo. Esta combinación de métodos resulta mucho más fácil si se utilizan técnicas de simulación por computadora para diseñar las redes.

Luego pueden intentarse diversos planes alternos para evaluar rápidamente sus posibles efectos.

Los cambios pueden efectuarse rápidamente hasta obtener el diseño más práctico en poco tiempo.

Cualquiera que sea el método utilizado, todos los levantamientos deben incluir los siguientes pasos:

- a) compilación de la información
- b) diseño de la red - primer borrador-
  - Diseño preliminar - cartas, fotos, etc*
  - Elección del método e instrumental*
  - Acotación de errores*
- c) reconocimiento y diseño formal de la red
  - Elección del método e instrumental*
  - Acotación de errores*
- d) amojonamiento
- e) dibujo, descripciones, itinerario, fotografía y fotoidentificación de los hitos en algunos casos. *Monografías*
- f) observaciones y cálculo de campo
- g) cálculos y ajuste final.

**NOTA:** la publicación de este manual, año 1985, **el sistema GPS** era aún casi una utopía, sin embargo en ese momento el manual decía:

*“... Aunque el GPS se encuentra aún en sus inicios el sistema ya está compitiendo con los métodos convencionales de precisión horizontal para los levantamientos de extensión limitada a que se refiere este manual. Ya se ha logrado una precisión horizontal de 3 ppm a distancias de 2 Km y de 2 ppm. a distancias de 10 Km o más. Resulta inevitable que a medida que continúe desarrollándose el sistema, las precisiones sean cada vez mayores. También se han obtenido alturas precisas determinadas por medio del GPS. Son sin embargo, alturas elipsoidales.*

*Aunque resultan muy apropiadas para vigilar los movimientos de la tierra y de las estructuras – donde solo interesan los cambios de altura con respecto al tiempo - sólo si se conoce con precisión el Geoide local, podrán obtenerse buenas estimaciones de las alturas ortométricas a partir de las mediciones GPS. ....*

*.....seguro que el GPS se convertirá .....en el método más usado para determinar con mucha precisión las diferencias posicionales, no solo para los levantamientos más extensos, sino para MGEO también...”*

13.1.4. **NOTA:** Realmente visionarios fueron los del Comité Geodésico que redactaron este manual, hoy en día **GPS se ha convertido en el método más preciso, más rápido y más cómodo para las mediciones de control planimétrico, descartando**



**las triangulaciones y las trilateraciones por obsoletas, y quedando solamente en vigencia en la actualidad la poligonal.**

Podemos destacar tres formas de proceder:

a) El Sistema de apoyo se construye con una **poligonación como método principal**, y el GPS se emplea para Control.(Método de captura: Estático ó Fast-estático).

Ej. 1) Se observa con GPS ambos extremos de la poligonal y se compensa como poligonal doblemente atada aplicando mínimos cuadrados.

Ej. 2) Se colocan dos puntos GPS en cada extremo de la poligonal asegurando la intervisibilidad entre cada par y se compensa como poligonal doblemente atada y orientada aplicando mínimos cuadrados.

Ej. 3) Se mide con GPS en ambos extremos y en algunos vértices intermedios, donde puede suponerse que es más débil la poligonal.

b) La **red principal se mide con GPS** .( Método de captura: Estático ó Fast-estático) y se emplea la poligonación como auxiliar con el objeto de densificar la red. Esta manera de proceder, obliga a que exista visibilidad entre los puntos GPS, a fin de tener orientación en todos los vértices.

c) La **red se mide totalmente con GPS** .( Método de captura: Estático ó Fast-estático). y la densificación también se realiza con GPS .(Método de captura: Stop & Go) la poligonal es solo una figura geométrica. Esta manera de proceder, obliga a que exista horizonte GPS en todos los vértices. Aquellos que no puedan ser resueltos deberán ser densificados mediante Estación Total.

*NOTA: Diseño de Redes. Métodos de Control Vertical. Punto 4.2 del Manual MGEO Redes Verticales. ...4.2.1 Diseño. Lo veremos en nivelación (107)*

### 13.2. Acotación de errores de un levantamiento.

Toda magnitud medida u observada nunca es realmente exacta, contiene errores producto de varias causas, cuyo valor es desconocido.

En algunos casos, como por ejemplo en la red de apoyo, el profesional puede ejecutar cierres, o bien controlar su elipse estándar de error con un marco de precisión superior y de ese modo poder tener la certeza que su trabajo ha cerrado dentro de la tolerancia prefijada. Sin embargo, en otros casos como por ejemplo del centenario, o a veces millar de puntos relevados del terreno tendrá muy pocos o casi nulos controles, de modo tal que la única herramienta que dispone el Ing. Agrimensor para su seguridad, para su tranquilidad, sólo la encontrará en la acotación de errores.

Luego, la misión más importante consiste en mantener los resultados de sus mediciones, dentro de límites “**acotados**”. Estos **límites de precisión**, vienen impuestos por la **clase y finalidad del levantamiento**.

Para arribar al final del levantamiento con el resultado previsto, es necesario conocer todas las secuencias de mediciones que se producirán desde el inicio y las posibles combinaciones de métodos.

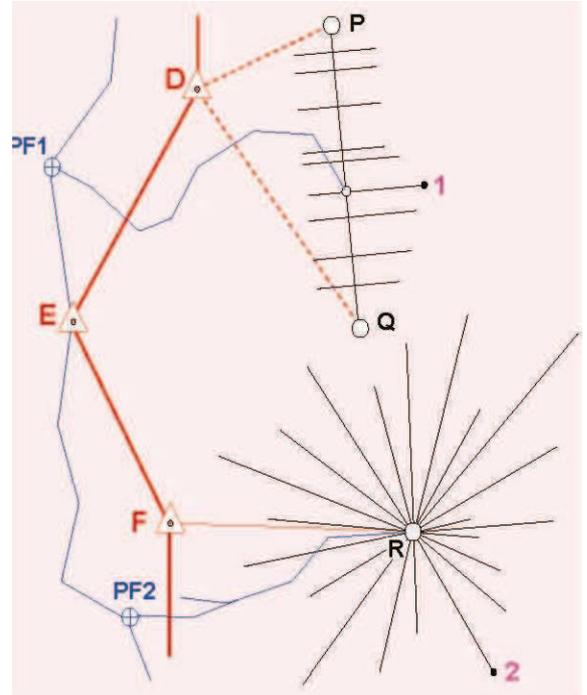


EJEMPLO: elijamos dos puntos, 1 y 2 integrantes de un muestreo de puntos relevados, los cuales deben cumplir con una tolerancia prefijada:

Planimétrica (dx, dy ó dR) y altimétrica (dz)

Supongamos que el punto 1 integra una nube de puntos relevados mediante perfiles transversales, mientras que el punto 2 queda posicionado a partir de un levantamiento taquimétrico. La exactitud con que finalmente quede determinada la posición de estos puntos dependerá:

- **En el punto 1** el error final en la posición planimétrica, será la suma de los errores lineales y angulares producidos al posicionar los puntos auxiliares “P y Q”, la alineación, el posicionamiento de las progresivas, el levantamiento de las perpendiculares, la medición del transversal al punto 1, y el error del vértice “D”, del sistema de apoyo. El error final altimétrico, dependerá de la ley de propagación de la nivelación diferencial sumado al error altimétrico del “PF1”, es decir el error del Sistema de Apoyo altimétrico.



- **En el punto 2**, suponiéndolo integrante de una nube de puntos la cual fue levantada empleando una taquimetría electrónica (radiación), la elipse de error planimétrica final vendrá expresado por la suma de los errores producidos en la determinación de la posición del punto auxiliar “R”, y los errores angulares y lineales del vector “R-2”, más el error de posición del vértice “F” integrante del Sistema de apoyo. En cuanto a la altimetría dependerá de los errores de una nivelación trigonométrica, sumados a los producidos al trasladar la cota desde el “PF2” hasta la estación “R”, más el error altimétrico del “PF2”.

El Ing. Agrimensor deberá conocer las causas de los errores, la ley de propagación de los mismos conforme sea la metodología y el efecto que puede producir la combinación de varios errores.

De tal forma, el error final  $e_f$  es el resultado de la suma de una serie de errores de medición que se acumulan a lo largo del proceso, (por tal motivo es válido el consejo de evitar siempre el empleo de metodologías de trabajo que produzcan acumulación de errores):

$$e_f = \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm \dots \pm e_n \pm e_s$$

$e_s$ : error del Sistema de Apoyo

Conociendo la teoría de errores de los instrumentales, la metodología de trabajo, la forma en que se propagan los errores, etc. y determinando las distancias máximas



desde las estaciones a los puntos a levantar (a través de una carta, foto o expeditivamente en el reconocimiento) se puede predecir los errores máximos probables.

Determinando cada uno de los errores ( $e_1; e_2; e_3.. e_n$ ) se puede determinar la suma de ellos

$$K = \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \dots \pm e_n$$

De esta forma la ecuación original quedará reducida a una ecuación con una sola incógnita, el error admisible en el Sistema de Apoyo.

$$e_f = \pm K \pm e_s$$

$$e_f^2 = K^2 + e_s^2$$

$$\text{luego : } e_s^2 = e_f^2 - K^2 \Rightarrow e_s = \sqrt{(e_f^2 - K^2)}$$

Continuando con el ejemplo antes expuesto, analicemos el caso del punto determinado por un levantamiento polar (radiación) y analicemos el siguiente ejemplo:

• Supongamos se utilice una estación total modelo Pentax PCS 315, cuya precisión:

- ✓ medición de la distancia, apuntando a prismas ubicados sobre una base nivelante:  $dl = \pm 3 \text{ mm}$
- ✓ ubicando los prismas sobre un bastón centrador con verticalizador:  $dl = \pm 2 \text{ cm}$ .
- ✓ precisión angular:  $d\alpha = \pm 7''$ , para la doble posición
- ✓ precisión angular  $d\alpha = \pm 10''$ , para una observación en una sola posición, sin considerar los errores instrumentales: colimación, inclinación, verticalidad, etc.
- ✓ Partiendo del supuesto que el error planimétrico admisible para cualquier punto levantado (**error final**)  $dR < \pm 10 \text{ cm}$  (círculo de error de radio  $R = 0.10 \text{ m}$ )
- ✓ Error altimétrico máximo admisible:  $dh = \pm 20 \text{ cm}$ .

Estimando la distancia  $FR = 150 \text{ m}$  y suponiendo que en R se coloca una estaca, lo cual permite colocar un prisma montado sobre una base nivelante de centración forzosa, asegurando un error en la medición de la distancia de medir el ángulo en las dos posiciones resulta:

$$\Delta X = L \cdot \cos \varphi \rightarrow \text{diferenciando} \rightarrow dx = L \cdot (-\sin \varphi) \cdot d\varphi + \cos \varphi \cdot dL$$

$$\Delta Y = L \cdot \sin \varphi \rightarrow \text{diferenciando} \rightarrow dy = L \cdot (\cos \varphi) \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot dL$$

$$\text{en nuestro ejemplo: } \pm dx \pm dy = dR = \pm 10 \text{ cm.}$$

$$dR = L \cdot (-\sin \varphi) \cdot d\varphi \pm \cos \varphi \cdot dL \pm L \cdot (\cos \varphi) \cdot d\varphi \pm \sin \varphi \cdot dL$$

La precisión en la medición angular que nos brinda el equipo es de  $7''$

Pero resulta que realizamos dos punterías: Uno cuando forzamos un valor angular para orientar el instrumento y otro cuando tomamos lectura sobre la señal de puntería en "R", es decir hemos realizado dos punterías y hemos tomado dos lecturas, por tal motivo la precisión del resultado se verá perjudicado en:  $d\varphi = \pm 7'' \cdot \sqrt{2}$

Por otra parte, si al ángulo lo medimos en dos posiciones, la precisión del resultado se verá mejorado en  $\sqrt{2}$ . Finalmente:  $d\varphi = \pm 7''$ , por otra parte, como en nuestro análisis no nos interesa el error de orientación, podemos adoptar alguno de los valores extremos, lo cual se cumpliría para:

$$\varphi = 0^\circ 00' \text{ ó para } \varphi = 90^\circ 00'. \text{ Luego haciendo } \varphi = 0^\circ 00', \text{ resulta:}$$

$$dm = \pm 1 \cdot dL \pm L \cdot d\varphi / \rho \rightarrow dm = \pm 3 \text{ mm} \pm 150 \text{ m} \cdot 7'' / 206265$$



$$dm = \pm 3mm \pm 5.1 mm$$

$$\mathbf{dm = \pm 8mm}$$

Y estacionándonos ahora en el punto “R” para determinar las coordenadas de un punto cualquiera, elegimos de todos ellos el punto que se encuentre más lejos de la estación: supongamos  $L = 200m$

En este caso los puntos relevados no estarán materializados, sobre ellos se medirá la distancia con un prisma ubicado sobre un bastón centrador y el rumbo mediante una sola puntería, resulta:

$$dm = \pm dL \pm L \cdot d\phi / \rho \rightarrow dm = \pm 2 cm \pm 200m \cdot 7'' \cdot \sqrt{2} / 206265$$

$$dm = \pm 20mm \pm 9.6mm$$

$$\mathbf{dm = \pm 29,9mm}$$

Ahora estamos en condiciones de encontrar el valor de “K”, (acumulación de los errores de medición)

$$K = \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \dots \dots \dots$$

$$K = \pm 8mm \pm 30mm$$

$$K = \pm 38 mm$$

Finalmente, si el error planimétrico esperado es de  $\pm 10 cm$  en cada punto, y si queremos estar dentro de una elipse de error del 95% de confianza, entonces debemos adoptar un  $\sigma = 2$ , con lo cual el error máximo admisible será de  $10 cm/2 = 5 cm$ . Entonces  $e_r = \pm 50 mm$ .

$$e_s = \pm \sqrt{(e_r^2 - K^2)} \rightarrow e_s = \pm \sqrt{(50^2 - 38^2)} \rightarrow \mathbf{e_s = \pm 33 mm}$$

Por lo tanto, al planificar el Sistema de Apoyo, habrá que tener en cuenta como condición necesaria y suficiente que cada uno de los vértices, que sea utilizado para la colocación de auxiliares, desde donde luego se realizará un levantamiento taquimétrico, deberá estar encerrado dentro de una elipse de error de 3,5 cm.

En cuanto a la **exactitud altimétrica**:

$e_s = \pm \sqrt{(e_r^2 - K^2)}$ , reemplazando  $e_s = \pm \sqrt{(10cm^2 - K^2)}$ , y donde K es la suma de dos errores :  $K = \pm e_1 \pm e_2$

- el error producido al efectuar el traslado de la nivelación diferencial desde el sistema de poyo altimétrico hasta el punto auxiliar “R”.
- el error altimétrico cometido al realizar la nivelación trigonométrica.

1.- Suponiendo se emplee un nivel de precisión  $dh = \pm 2.5 mm \cdot \sqrt{L Km}$  y suponiendo una distancia máxima de 500 m es decir 0.5 Km. resulta  $dh_1 = \pm 2.5 mm \cdot \sqrt{0.5}$

$$dh_1 = \pm 1.8 mm$$

2.- La nivelación trigonométrica se realiza con la estación total antes mencionada, luego para la mayor distancia que estimamos en 200m.

$$\Delta h = L \cdot \text{tg } \alpha + (1-k) \cdot L^2 / 2R + i - s$$

diferenciando

$$dh = \pm L \cdot d\alpha / \cos^2 \alpha \pm \text{tg } \alpha \cdot dL \pm (L^2 / 2R) \cdot dk \pm di \pm ds$$

reemplazando por valores (suponiendo una pendiente máxima del 30%) :  $\alpha = 16^\circ 41' 57''$  suponemos también un instrumento al cual se ha corregido el error de índice.

Expresando las distancias en cm.:



$$dh_2 = \pm 20000 \times 10'' / (0.917451 \times 206265) \pm 0.3 \times 2\text{cm} \pm 0.31\text{cm} \times 0.13 \pm 0.15 \pm 0.1 \pm 20000 \times 1'' / (0.917451 \times 206265) \text{ (error del compensador)}$$

$$dh_2 = \pm 1.05 \text{ cm} \pm 0.6 \text{ cm} \pm 0.04 \text{ cm} \pm 0.15 \text{ cm} \pm 0.1\text{cm} \pm 0.1\text{cm}$$

$$dh_2 = \pm 1.23 \text{ cm}$$

$$\text{Finalmente } dh = \pm dh_1 \pm dh_2$$

$$dh = \pm 2.2 \text{ cm.}$$

$$es = \pm \sqrt{(ef^2 - K^2)}$$

$$es = \pm \sqrt{(10^2 - 2.2^2)}$$

$$es = \pm \mathbf{9.7 \text{ cm}}$$

Lo cual es un valor muy generoso para el intervalo de confianza de un punto del sistema de apoyo altimétrico.

Este resultado obtenido, nos tienta a realizar la vinculación desde el Sistema de Apoyo altimétrico al punto "R", empleando nivelación trigonométrica, veamos:

$$dh_1 = \pm 50000 \times 10'' / (0.917451 \times 206265) \pm 0.3 \times 0.3\text{cm} \pm 1.96\text{cm} \times 0.13 \pm 0.15 \pm 0.1 \pm 50000 \times 1'' / (0.917451 \times 206265) \text{ (error del compensador)}$$

$$dh_1 = \pm 2.64\text{cm} \pm 0.09\text{cm} \pm 0.25\text{cm} \pm 0.15\text{cm} \pm 0.1\text{cm} \pm 0.26\text{cm}$$

$$dh_1 = \pm 2.67\text{cm}$$

$$\text{Nuevamente } dh = \pm dh_1 \pm dh_2 = \pm 2.67 \pm 1.23$$

$$dh = \pm 3 \text{ cm.}$$

$$es = \pm \sqrt{(ef^2 - K^2)}$$

$$es = \pm \sqrt{(10^2 - 3^2)}$$

$$es = \pm 9.5 \text{ cm}$$

Lo cual sigue siendo un valor muy generoso que inducirá a pensar también en realizar la nivelación del sistema altimétrico empleando nivelación trigonométrica simultánea y recíproca.

En las redes altimétricas, de aplicarse nivelación trigonométrica, ésta deberá ser siempre simultánea y recíproca.

Realizando la reciprocidad corregimos el error de esfericidad de la tierra y realizando la simultaneidad, el error de refracción.

Es precisamente éste último un valor desconocido, estimado normalmente en 0.13 o 0.20 para los cálculos, y estimado el error de su determinación con un valor igual al valor mismo, es decir  $dK = 0.13$ .

Para consulta sobre teoría de errores de observación y cálculo de compensación según el Método de los Cuadrados Mínimos, en Biblioteca Facultad de Ingeniería UNICEN.Olavarría:

- **"Lecciones de Geodesia"** Por **Aguilar, Félix**, (Bahía Blanca, Cooperadora de la U.N.S., 1972).121 págs. ; 21 cm. 2 ejemplares, Ubicación: Unidad Académica Olavarría. Solicitar por 526, Ag283, 1



- “**Teoría de errores y mediciones**”. Por **Cernuschi, Félix, y Greco, Francisco I.** Buenos Aires : Eudeba, 1968. xiv;322 págs. ; 22 cm. 1 ejemplar. Ubicación: Unidad Académica Olavarría. Buscar por 519,9 C411 en sala de acceso directo
- “**Tratado de Topografía 1; Teoría de errores e instrumentación**” . Por **Chueca Pazos, Manuel, Herráez Boquera, José y Berné Valero, Jose Luis.** Madrid : Paraninfo S.A., 1996 522 págs. ; 26 cm. 1 ejemplar. Ubicación: Unidad Académica Olavarría. Solicitar por 526,9 CH559, 1 en sala de acceso directo

#### 14. MEDICIÓN PARALÁCTICA DE DISTANCIA

**Nota** (\*): ver en Topografía I, Tema 9 “Medición Indirecta de Longitudes y Niveles. Estadímetros de segunda categoría. Estadía Invar” (descripción del instrumental, método de medición y errores).

La medición paraláctica si bien no permite conocer instantáneamente el valor de la distancia, tiene en cambio dos ventajas esenciales:

- 1) Cualquiera sea la distancia, el segmento de mira interceptado es constantemente de 2 m. El elemento variable es el ángulo paraláctico y, cuyo valor puede estimarse al programar la medición.
- 2) Gran estabilidad dimensional de la mira (o "estadía"), asegurada por un alambre de invar cuyo coeficiente de dilatación es del orden de 1:1.000.000. Posee además un dispositivo compensador -construido con material de mayor coeficiente de dilatación- que permite su utilización a temperaturas muy variables sin que la longitud entre sus



marcas extremas se altere en más de 0,02 mm. Si a ello agregamos el error de contraste de la estadía, del orden de  $\pm 0,02$  mm, concluimos en que la longitud consignada en el certificado correspondiente queda asegurada a cualquier temperatura dentro de un entorno de  $\pm 0,04$  mm. Ello supone un error relativo:

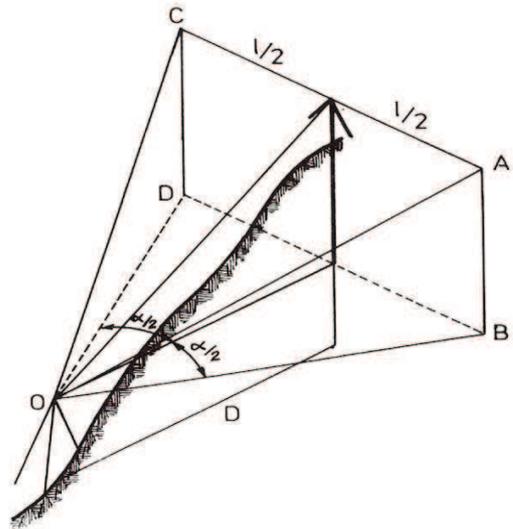
$$\epsilon_c = m_c / c = 0,04 \text{ mm} / 2\text{m} = 1 / 50.000$$

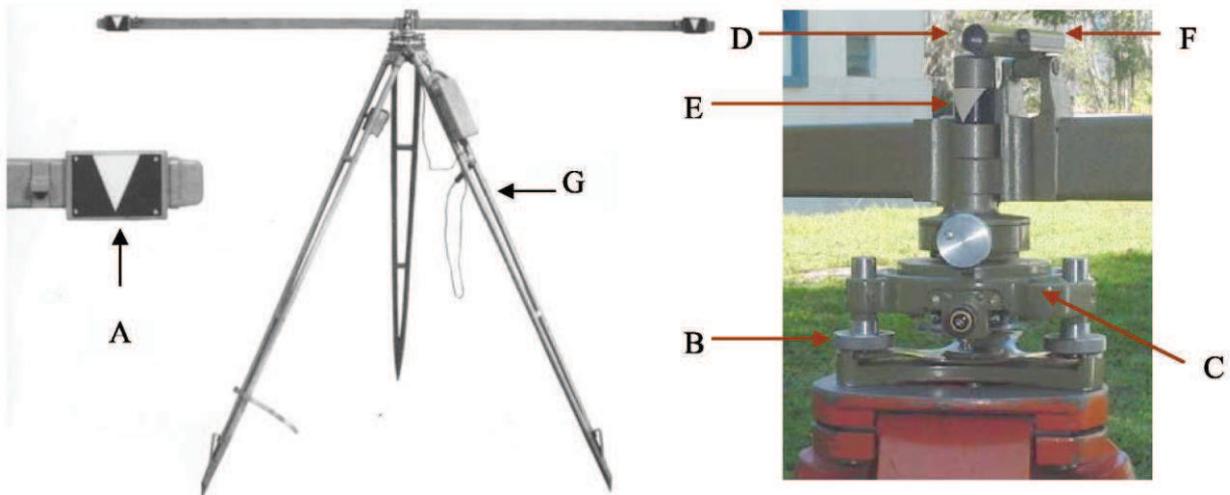
valor que constituye el límite teórico de precisión alcanzable con este método, siendo  $c$  la longitud de la estadía, generalmente de 2 m=.

Además, si se admite que en la medición paraláctica se logra una precisión angular  $m_\alpha$  de  $\pm 1''$ , surge de la expresión

$$m_d / D = m_\alpha / \alpha$$

-siendo  $m_d$ , el error medio de la distancia  $D$ -, que al disminuir la distancia del instrumento-mira se acrecienta proporcionalmente el valor del ángulo  $\alpha$ , y con él la precisión de la medición.





Efectuado el calaje del teodolito y orientada la estadía, se bisectan sucesivamente los dos extremos de la misma leyéndose los valores acimutales correspondientes a ambas direcciones, cuya diferencia da el valor del ángulo  $\alpha$ .

Esta fórmula da el valor de la distancia reducida al horizonte. Se aprecia fácilmente la comodidad y celeridad que ello implica en terreno accidentado como el de la figura. Y también se intuye el amplio campo de aplicación del método en terrenos llanos con obstáculos (sembrados, arbustos, etc) cuya altura no supere la del instrumento (aprox 1,5 m), en zonas urbanas con intenso tránsito, en cruces de ríos, etc.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2D}$$

$$D = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot l$$

$$D = \frac{1}{2} l \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

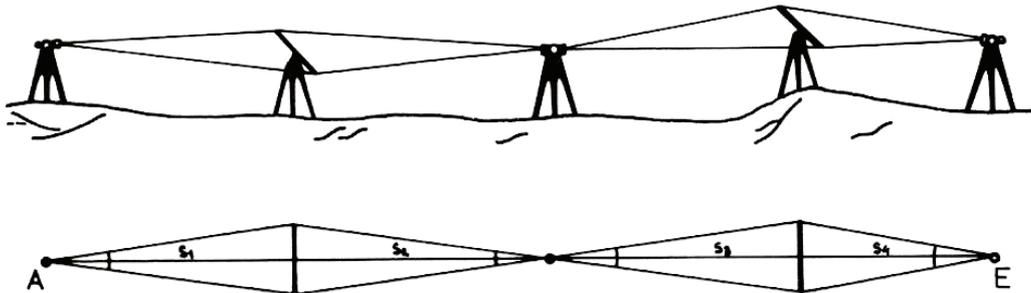
El error medio de una distancia D para este método es:

$$M_d = \pm D^2 / l \cdot m_\alpha$$

Este método posee una precisión de aproximadamente 1/5.000.

### 14.2. Medición paraláctica en serie

Sea L la longitud a medir paralácticamente; cuando para distintos valores de L la precisión requerida es superior a la allí consignada, se impone la división del segmento total L en n tramos parciales, o sea  $L = S_1 + S_2 + \dots + S_n$



Para obtener un error medio conveniente, es óptimo que  $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S$ , por lo que

$$L = n \cdot S$$

Habíamos demostrado (\*)

con

$$l = 2 \text{ metros}$$

$$d\alpha = 1''$$

$$e_{\text{abs}} = -D^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{206.265} \approx \left| \frac{D^2}{400.000} \right|$$

tomando valores absolutos.

Si se realiza la medición dividiendo la distancia  $D$  en dos partes, el error en c medición parcial sería:

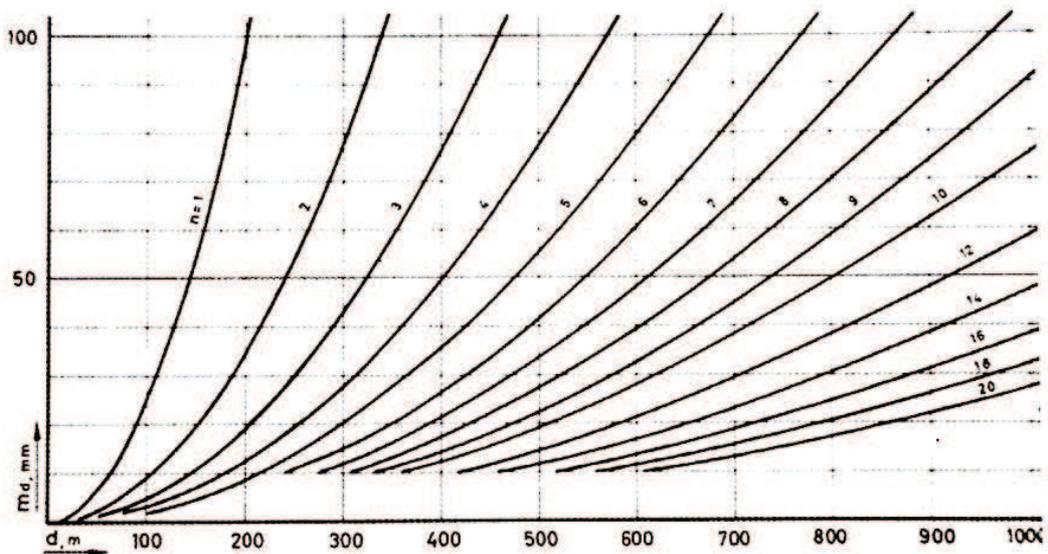
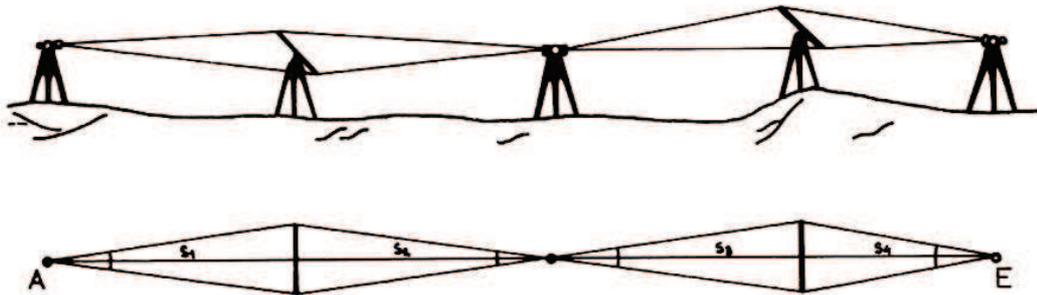
$$e_{\text{abs}} = m_d = \frac{D^2}{4 \times 400.000}$$

y el error absoluto en la medición total

$$\sqrt{2} \cdot m_d = \frac{D^2}{4 \times 400.000} \cdot \sqrt{2} = \frac{D^2}{2,8 \times 400.000}$$

más que duplicando la precisión.

En la figura representamos el método operatorio y el error obtenido con si vas subdivisiones.





La estadía de invar era muy utilizada en medición de bases topográficas, directamente con posterior ampliación trigonométrica.

Este método tiene la gran ventaja de su mayor celeridad en razón de que exige sólo dos o tres estaciones de teodolito en la generalidad de los casos, y es útil en los casos: medición a través de grandes avenidas con intenso tránsito, cruces de ríos anchos, bañados, obstáculos de altura superior a 1,5 m interpuestos en la línea, etc. Su precisión es equivalente a la alcanzada con una cinta de agrimensor (entre 1/2.000 y 1/5.000).

Consiste en una triangulación topográfica común, pero de configuración crítica dada la pequeñez de los sucesivos ángulos paraláticos  $\alpha_i$ .

Con la aparición de los distanciómetros electrónicos, la medida de distancia, según el principio de la estadía, prácticamente no se aplica.

