TEMA 5

TRABAJO Y ENERGÍA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Que el alumno logre:

- Calcular el trabajo realizado por fuerzas constantes.
- Aplicar el concepto de potencia.
- Diferenciar fuerzas conservativas y no conservativas.
- Reconocer las formas de energía mecánica y su relación con las fuerzas actuantes.
- Aplicar correctamente el principio de conservación de la energía a distintas situaciones concretas
- Aplicar los principios de conservación a las situaciones de choque de cuerpos.
- Diferenciar choque elástico de otro que no lo sea.
- Calcular el coeficiente de restitución entre dos cuerpos.

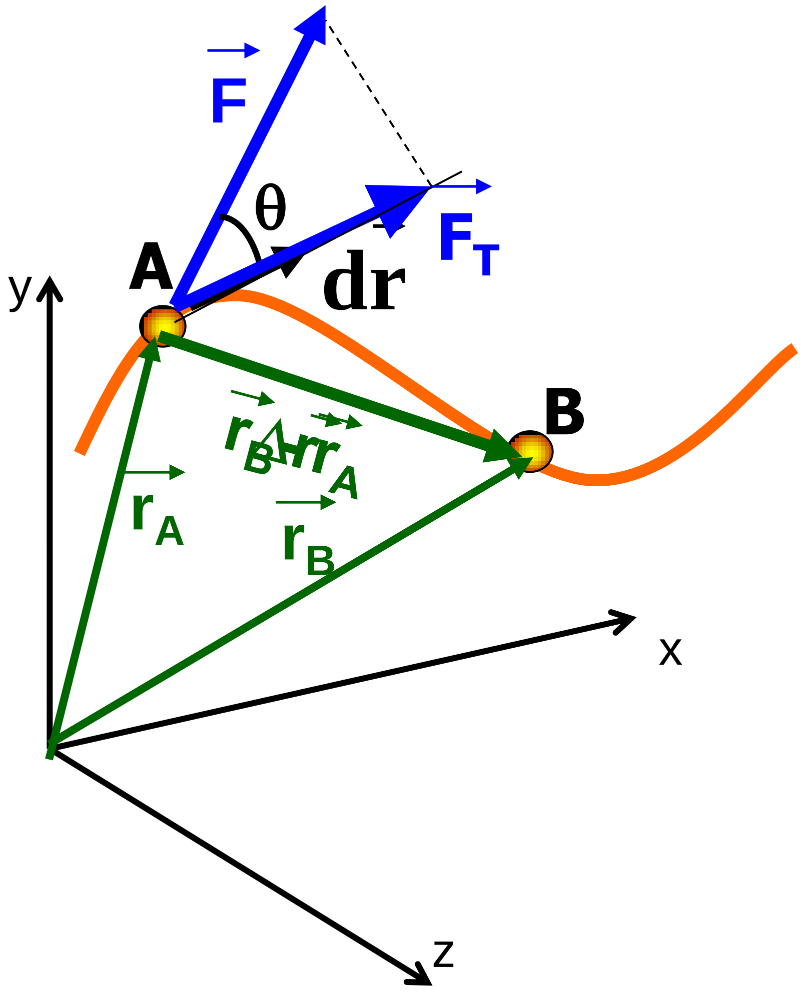
TRABAJO MECANICO

$$\boxed{dT = \vec{F} \times d\vec{r}}$$

$$\left| d\vec{r} \right| = dr$$

$$dT = F.dr.\cos\theta$$

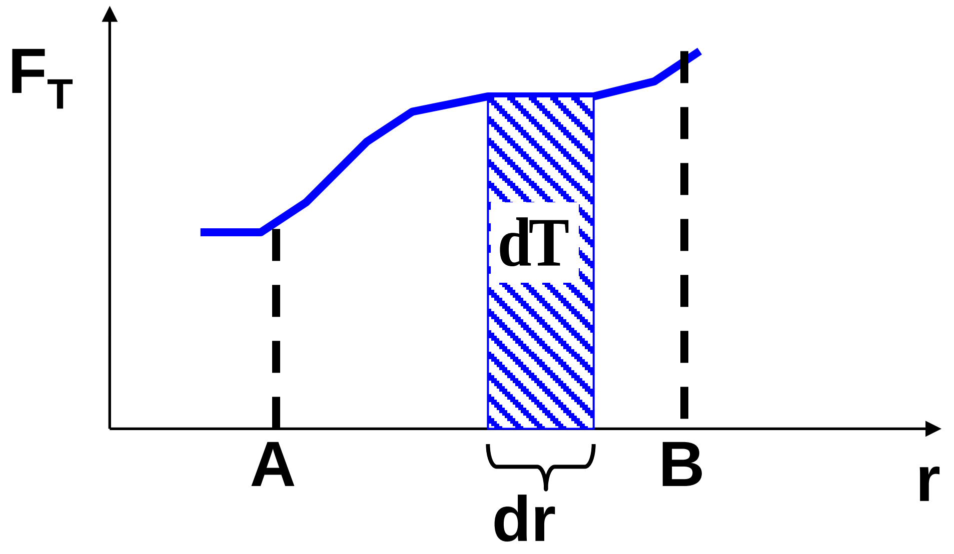
$$dT = F_T.dr$$



TRABAJO

$$dT = F_T . dr$$

$$T_{A\rightarrow B} = \int_A^B dT = F_T . \int_A^B dr = F_T . (r_B - r_A)$$



En función de las componentes

Recordando

$$\begin{cases} \breve{i}\times\breve{i}=\breve{j}\times\breve{j}=\breve{k}\times\breve{k}=1 \\ \breve{i}\times\breve{j}=\breve{j}\times\breve{k}=\breve{k}\times\breve{i}=\ldots=0 \end{cases}$$

$$\vec{F}=F_x.\breve{i}+F_y.\breve{j}+F_z.\breve{k}$$

$$d\vec{r}=dx.\breve{i}+dy.\breve{j}+dz.\breve{k}$$

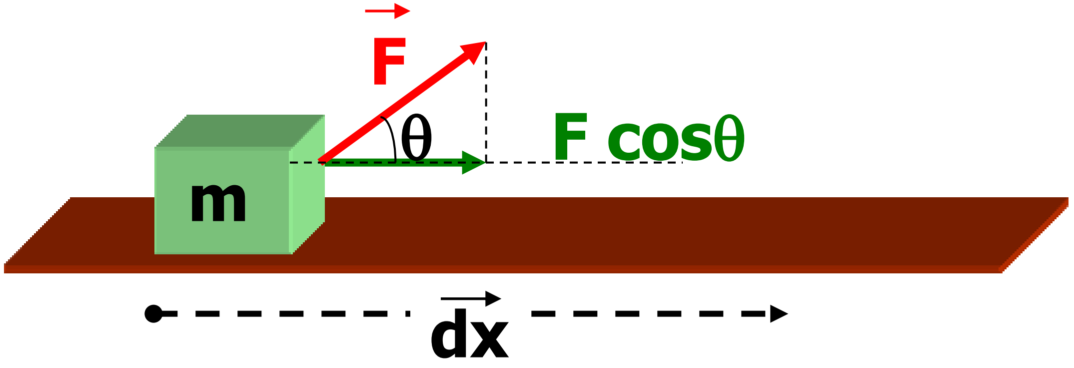
$F_x.dx+0+0$

$0+F_y.dy+0$

$0+0+F_z.dz$

$$\boxed{dT=F_x.dx+F_y.dy+F_z.dz}$$

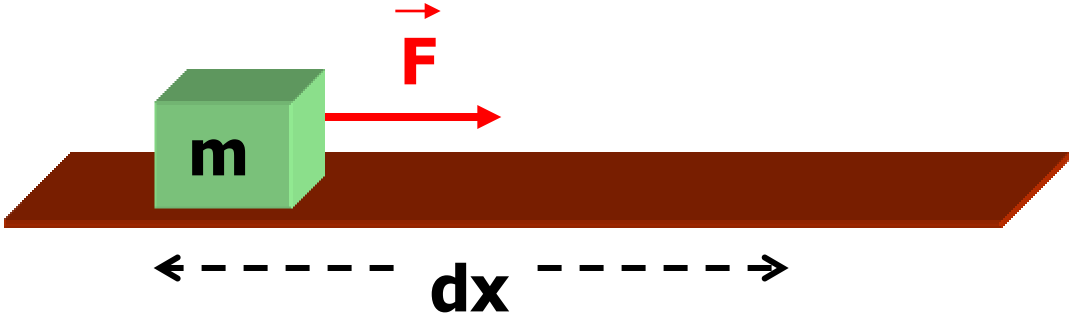
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE



F cosθ = Cte

$$dT = \vec{F} \times \vec{dx} = F.dx.\cos\theta$$

$\vec{F} = Cte$



$$dT = \vec{F} \times \vec{dx} = F.dx.\cos\theta$$

$\theta = 0$ » $\cos\theta = 1$

$$dT = \vec{F} \times \vec{dx} = F.dx$$

TRABAJO

- **Es una magnitud escalar.**
- **Depende de:**
  - **La componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento**
  - **Del desplazamiento operado.**

- **Dimensión:**

$$[T]=\left[M.L.T^{-2}\right].[L]=\left[M.L^{2}.T^{-2}\right]$$

Unidades:

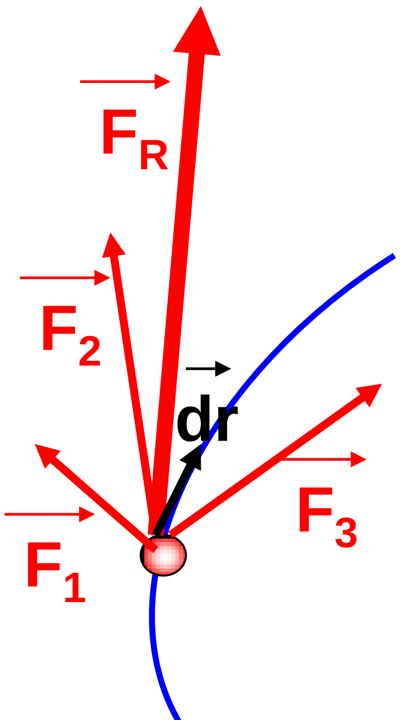
SIMELA: → N.m = Joule (J)

Sistema c.g.s: → din.cm=ergio (erg)

Sistema Técnico → Kgr.m= Kgrm

$$1\ J = 1.10^7 erg \cong 0{,}102\ Kgrm$$

Trabajo de varias fuerzas concurrentes



$$dT = dT_1 + dT_2 + dT_3 + \ldots + dT_i$$

$$dT = \overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{dr} + \overrightarrow{F_2} \times \overrightarrow{dr} + \overrightarrow{F_3} \times \overrightarrow{dr} + \ldots$$

$$dT = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots\right) \times \overrightarrow{dr} = \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\right) \times \overrightarrow{dr}$$

$$\boxed{dT = \overrightarrow{F_R} \times \overrightarrow{dr}}$$

El trabajo de la resultante de varias fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes del sistema.

POTENCIA

$$\boxed{P = \frac{dT}{dt}}$$

Representa la rapidez en que se efectúa el trabajo

$$P = \frac{\vec{F} \times \vec{dr}}{dt} = \vec{F} \times \vec{v}$$

- **Dimensión:**

$$[P]=\left[M.L^2.T^{-2}\right].\left[T^{-1}\right]=\left[M.L^2.T^{-3}\right]$$

- **Unidades:**

SIMELA: → $\frac{J}{s} = Watt$

Sistema c.g.s: → erg/s

Sistema Técnico → Kgrm/s

Otras Unidades:

Múltiplos del SIMELA:

$MW = 10^6 W$

$KW = 10^3 W$

Sistema Inglés:

HP= 745,7 W

1 CV = 0,9863 HP

TRABAJO Y ENERGÍA

Por la Segunda ley de Newton $\vec{F} = m.\vec{a}$

$$F = m.\frac{dv}{dt}$$

x

$$\frac{dx = dx}{}$$

$$F.dx = m.dx.\frac{dv}{dt}$$

$$dT = F.dx = m.v.dv = d\left(\frac{1}{2}.m.v^2\right)$$

E_c

$\boxed{dT = dE_c}$

$$dT = m.v.dv$$

$$T = \int_{v_1}^{v_2} m.v.dv = \frac{1}{2}.m.v_2^2 - \frac{1}{2}.m.v_1^2$$

$$T = E_{c_2} - E_{c_1} = \Delta E_c$$

El trabajo realizado sobre una partícula es la medida del cambio producido en su energía cinética.

Energía cinética

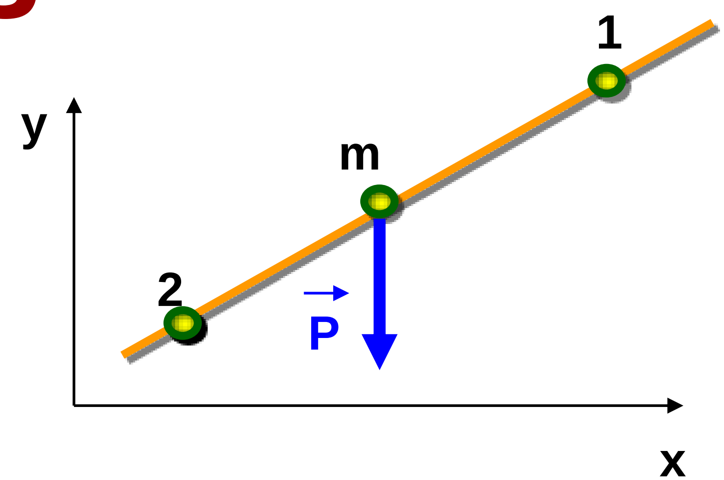
- Es propia de los cuerpos en movimiento.
- Depende de la velocidad del móvil.
- Es una magnitud escalar.
- Tiene la misma dimensión y unidades que el Trabajo.
- Representa la capacidad de producir trabajo que tiene un cuerpo en movimiento.

Energía potencial gravitatoria

$$dT = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

$$dT = F_x.dx + F_y.dy$$

$$T_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 F_x.dx + \int_1^2 F_y.dy$$



$$T = \int_1^2 P.\cos\theta.dr = -\int_1^2 m.g.dy = -(m.g.y_2 - m.g.y_1)$$

$$T = -(\underbrace{m.g.y_2}_{E_{P_2}} - \underbrace{m.g.y_1}_{E_{P_1}})$$

$$\boxed{T = -\left(E_{P_2} - E_{P_1}\right) = -\Delta E_P}$$

Energía Potencial

$$E_P = m.g.y$$

- Es una energía que depende de la posición.
- Es función de las coordenadas
- Depende del sistema de referencia
- No es absoluta, es relativa.
- Tiene las misma dimensión y unidades que el trabajo.
- Representa la capacidad de realizar trabajo que posee un cuerpo cuando varía de nivel.

FUERZAS CONSERVATIVAS

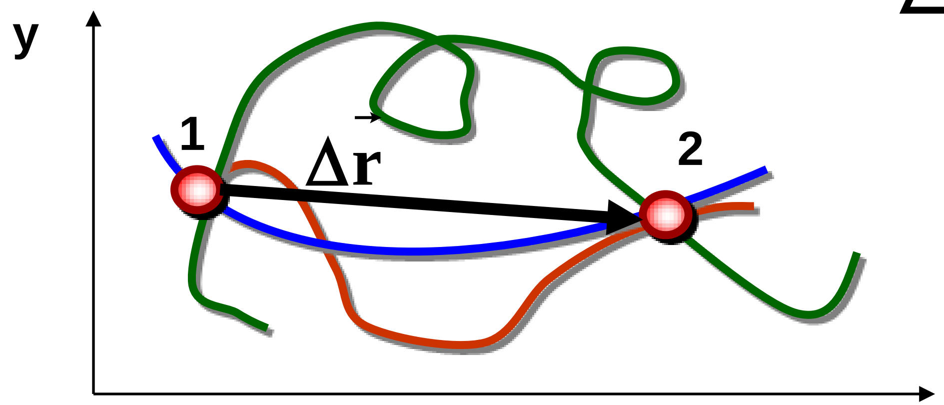
$$T = -\Delta E_{P(x,y,z)}$$

$$dT = -dE_{P(x,y,z)}$$

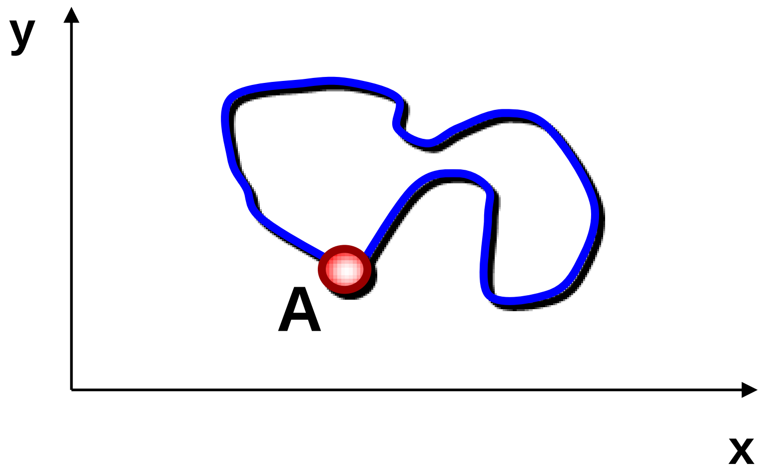
Las fuerzas que cumplen con esto se denominan FUERZAS CONSERVATIVAS.

Consecuencias

$$\Delta T = \vec{F} \times \Delta \vec{r}$$



Una fuerza es conservativa si su dependencia de las coordenadas x, y, z de la partícula es tal, que el trabajo realizado por dicha fuerza para llevar la partícula desde un punto A a un punto B es independiente de la trayectoria seguida.



$$T = \int_A^A \vec{F} \times \overrightarrow{dr} = \oint \vec{F} \times \overrightarrow{dr} = 0$$

Cuando la trayectoria es cerrada el trabajo es nulo

Una fuerza conservativa, cuando el trabajo realizado por ella puede ser expresado como la diferencia entre los valores de una cantidad $E_P\,(x,y,z)$ evaluada en los puntos inicial y final de su trayectoria.

$$T_{AB} = \int_A^B \vec{F} \times d\vec{r} = E_{P(x,y,z)_A} - E_{P(x,y,z)_B} = -\Delta E_{P(x,y,z)}$$

$$T_{AB} = E_{P(x,y,z)_A} - E_{P(x,y,z)_B} = -\Delta E_{P(x,y,z)}$$

Trabajo nulo

$dT = F \,.\, dr \,.\, \cos\theta$

$$dT = \vec{F} \times \vec{dr} = 0$$

$F = 0$

Caso trivial

$dr = 0$

Caso en que la trayectoria es cerrada. Desplazamiento nulo

$\theta = \pi/2$

Caso en que la fuerza es normal al desplazamiento

Principio de conservación de la energía

$$\left.\begin{array}{l} T = \Delta E_c \\ T = -\Delta E_P \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\Delta E_P = \Delta E_C$$

$$-\left(E_{P_2} - E_{P_1}\right) = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$$-E_{P_2} + E_{P_1} = E_{C_2} - E_{C_1}$$

$$E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2} = Cte.$$

Si las fuerzas que actúan

$$E_M = E_C + E_P = Cte.$$

La Energía Mecánica permanece constante cuando el sistema es conservativo

$$\left(\Delta E_{Mecánica}\right)_{Sist.} = 0$$

SISTEMAS NO CONSERVATIVOS

Para las fuerzas conservativas:

$$\boxed{\begin{gathered} T = \Delta E_C \\ T = -\Delta E_P \end{gathered}}$$

Para las fuerzas NO conservativas:

$$\boxed{T = \Delta E_C}$$

$$T_{Total} = T_{F_C} + T_{F_{NC}}$$

$$\Delta E_C = -\Delta E_P + T_{F_{NC}}$$

$$\boxed{\Delta E_C + \Delta E_P = T_{F_{NC}}}$$

$$\boxed{\Delta E_{Mecánica} = T_{F_{NC}}}$$

Resumiendo:

- **Para sistemas conservativos:**

$$T_{total}=\Delta E_C=-\Delta E_P$$

$$(E_C+E_P)_{sist.}=Cte$$

$$\boxed{\left(\Delta E_{Mec.}\right)_{Sist.}=0}$$

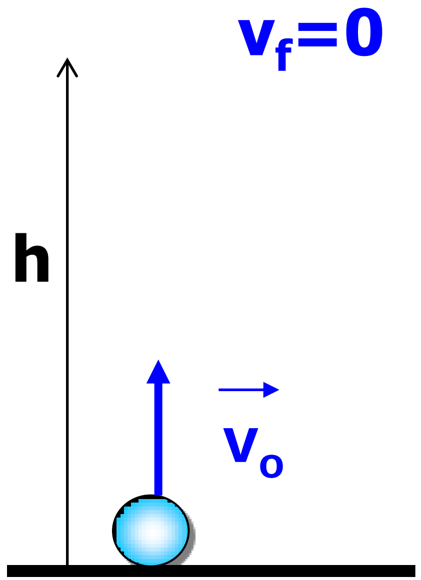
- **Para sistemas NO Conservativos:**

$$T_{total}=\Delta E_C$$

$$\boxed{\left(\Delta E_{Mec.}\right)_{Sist.}=T_{F_{NC}}}$$

Análisis de sistemas conservativos

Tiro Vertical



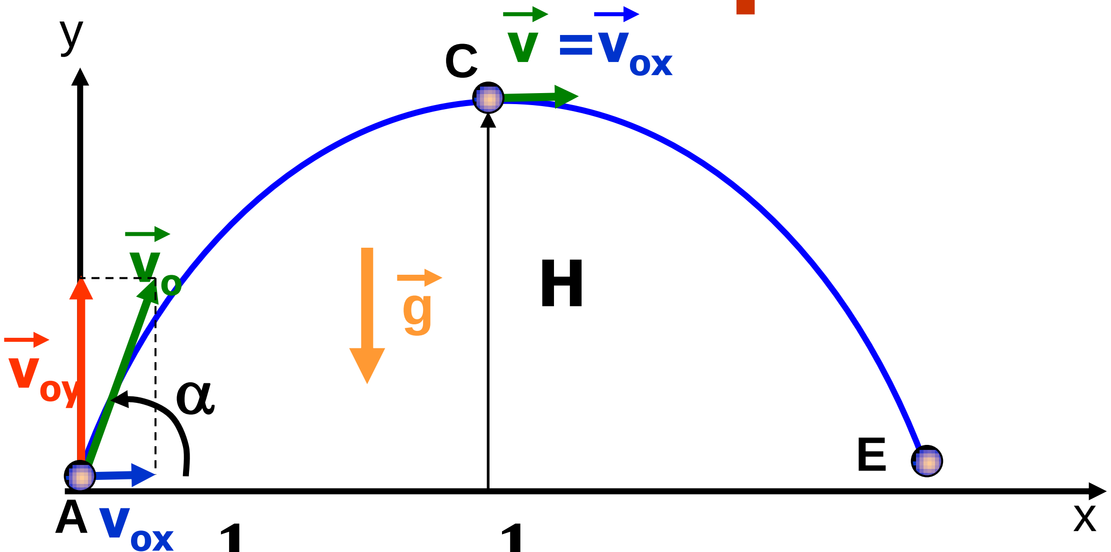
$$v^2 = v_o^2 - 2gh$$

$$\times \quad \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}m.v_o^2 - \frac{1}{\cancel{2}}m.\cancel{2}.g.h$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m.v^2 + m.g.h = \frac{1}{2}m.v_o^2}$$

Movimiento parabólico



$$v_x^2 = v_{o_x}^2$$

$$v_y^2 = v_{o_y}^2 - 2.g.H$$

x m/2

$$\frac{1}{2}m.v_x^2 = \frac{1}{2}m.v_{o_x}^2$$

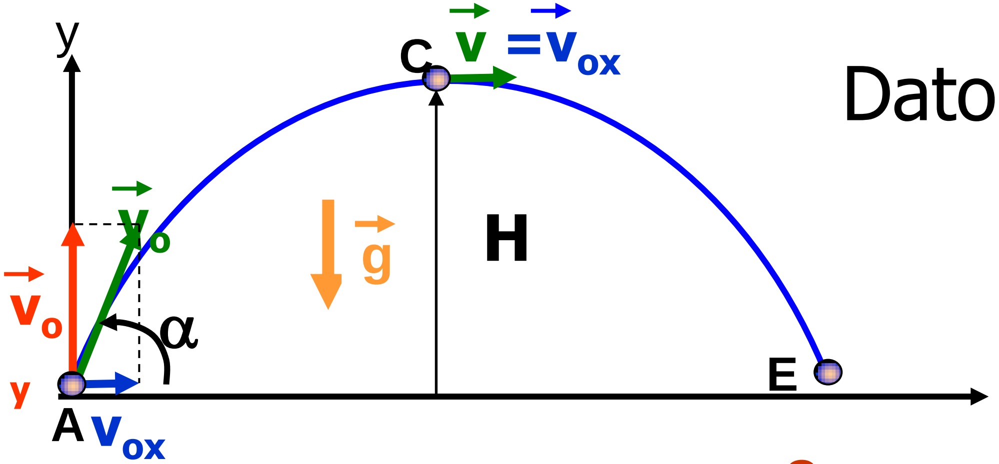
+

$$\frac{1}{2}m.v_y^2 = \frac{1}{2}m.v_{o_y}^2 - \frac{1}{\cancel{2}}m.\cancel{2}.g.H$$

$$\frac{1}{2}m.\left(\underbrace{v_x^2 + v_y^2}_{v^2}\right) + m.g.H = \frac{1}{2}m.\left(\underbrace{v_{o_x}^2 + v_{o_y}^2}_{v_o^2}\right)$$

$$\boxed{E_c + E_p = E_{co} + \cancel{E_{po}}}$$

Calcular la altura máxima de un tiro oblicuo conociendo la velocidad inicial y el ángulo de tiro



Datos: $\vec{v}_0$, α Incógnita: H

$$E_{M_A} = E_{M_C}$$

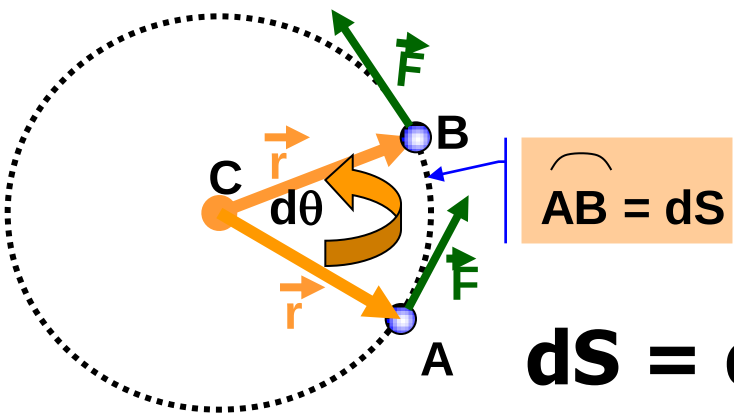
$$E_{c_A} + E_{P_A} = E_{c_C} + E_{P_C}$$

$$\tfrac{1}{2}\cancel{m}.v_{o_{yA}}^2 + \cancelto{0}{m.g.h_A} = \cancelto{0}{\tfrac{1}{2}m.v_{y_C}^2} + \cancel{m}.g.h_C$$

$$\tfrac{1}{2}v_{y_A}^2 = g.h_C \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v_o^2.\text{sen}^2\alpha = g.H$$

$$\boxed{H = \frac{v_o^2.\text{sen}^2\alpha}{2.g}}$$

TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR



$$dS = d\theta . r$$

$$dT = \vec{F} \times d\vec{r}$$

$$dT = F.ds.\underbrace{\cos\theta}_{1}$$

$$dT = F.r.d\theta$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{M.d\theta}{dt}$$

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}.d\theta$$

$$\boxed{T = M.(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\boxed{P = M.\omega}$$

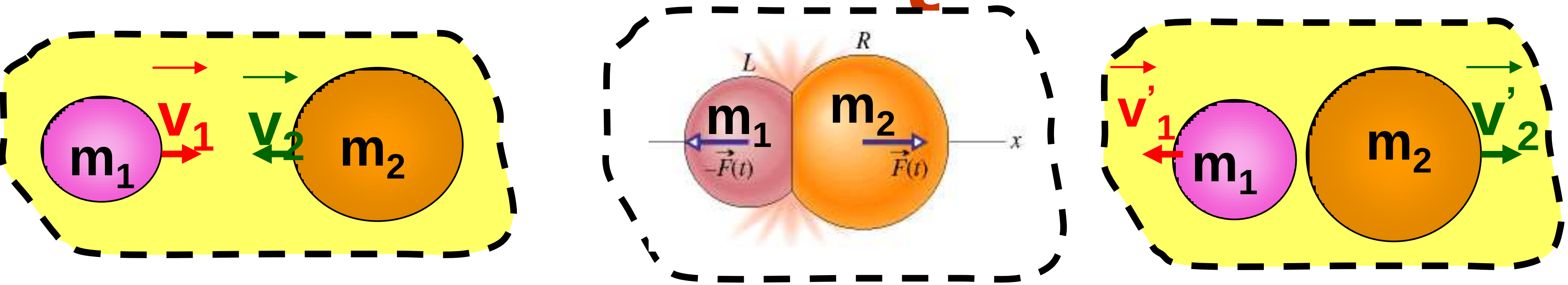
COLISIONES

Colisiones o choques

Inelásticas

Elásticas

COLISIONES O CHOQUES



Antes **Durante** **Después**

Es un sistema aislado, se conserva la cantidad de movimiento

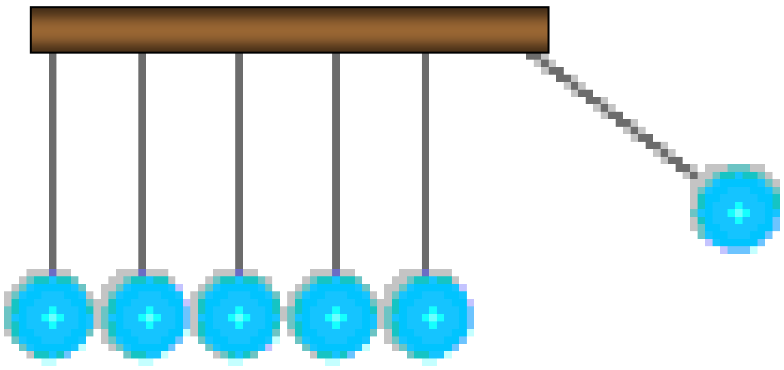
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Por el Ppio de conservación de la energía: $E_c + E_p = E'_c + E'_p$

$$E'_c - E_c = E_p - E'_p = Q \begin{cases} = 0 & \textbf{Elástico} \\ < 0 & \textbf{Endoérgico} \\ > 0 & \textbf{Exoérgico} \end{cases}$$

Choque elástico

Q = 0



En el sistema se cumple:

- El Principio de Conservación de la Energía mecánica
- El Principio de Conservación de la Energía cinética
- El Principio de Conservación de la Cantidad de movimiento

Por conservación de la Energía cinética

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}m_1v_1^2+\cancel{\tfrac{1}{2}}m_2v_2^2=\cancel{\tfrac{1}{2}}m_1v_1^{'2}+\cancel{\tfrac{1}{2}}m_2v_2^{'2}$$

$$m_1(v_1^2-v_1^{'2})=-m_2(v_2^2-v_2^{'2})$$

$$m_1(v_1+v_1^{'})(v_1-v_1^{'})=-m_2(v_2+v_2^{'})(v_2-v_2^{'}) \quad \textbf{(1)}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2$$

$$m_1(v_1-v'_1)=-m_2(v_2-v'_2) \qquad \textbf{(2)}$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2), resulta:

$$\cancel{m_1}(v_1+v_1')\cancel{(v_1-v_1')}=-\cancel{m_2}(v_2+v_2')\cancel{(v_2-v_2')}$$

$$\cancel{m_1}\cancel{(v_1-v'_1)}=-\cancel{m_2}\cancel{(v_2-v'_2)}$$

$$v_1+v_1'=v_2+v_2' \quad \textbf{(3)} \quad \Longrightarrow \quad v_2'=v_1+v_1'-v_2$$

Reemplazando en **(2)**

$$m_1(v_1-v'_1)=-m_2(v_2-v'_2)$$

$$m_1(v_1-v'_1)=-m_2\left[v_2-\left(v_1+v'_1-v_2\right)\right]$$

$$\boxed{v'_2=\left(\frac{2.m_1}{m_1+m_2}\right).v_1+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right).v_2}$$

$$\boxed{v'_1=\left(\frac{m_1-m_2}{2m_1}\right).v_1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right).v_2}$$

CASOS PARTICULARES

$$v'_2=\cancelto{0}{\left(\frac{\cancel{2.m_1}}{\cancel{m_1+m_2}}\right)}.v_1+\cancelto{0}{\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)}.v_2$$

$$v'_1=\cancelto{0}{\left(\frac{m_1-m_2}{2m_1}\right)}.v_1+\left(\frac{\cancel{m_2}}{\cancel{m_1}}\right).v_2$$

- Si las masas son iguales: $m_1=m_2$

$$\boxed{v'_2=v_1} \qquad \boxed{v'_1=v_2}$$

Intercambian velocidades

- Si $m_1=m_2$ y una de ellas está en reposo

$$v_1=0$$

$$\boxed{v'_2=0} \qquad \boxed{v'_1=v_2}$$

Intercambian velocidades

Coeficiente de restitución

Retomando la (3)

$$\left(v_1 + v_1^{'}\right) = \left(v \ldots\right.$$

$$\left(v_2 - v_1\right) = -\left(\ldots\right.$$

Es el cociente de las velocidades relativas después de la colisión y las velocidades relativas antes del choque, cambiado de signo

$$\boxed{e = -\frac{\left(v_2^{'} - v_1^{'}\right)}{\left(v_2 - v_1\right)}}$$

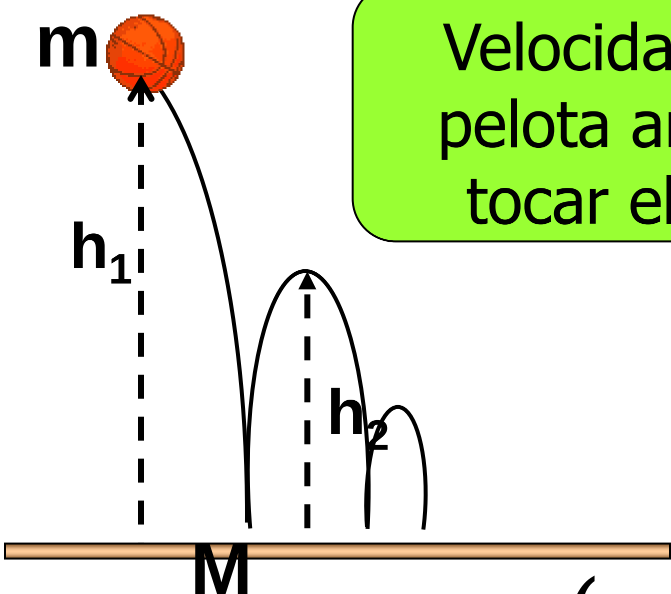
Coeficiente de restitución

Choque perfectamente plástico

$$0 \le e \le 1$$

Choque perfectamente elástico

Caso de una pelota que cae sobre la Tierra.



Velocidad de la pelota antes de tocar el suelo

Velocidad de la pelota después de tocar el suelo

$v'_2 = 0$ $\qquad$ $v_2 = 0$

$$v_1 = \sqrt{2.g.h_1} \qquad v'_1 = -\sqrt{2.g.h_2}$$

$$e = -\frac{\left(\cancel{v'_2} - v'_1\right)}{\left(\cancel{v_2} - v_1\right)} = \cancel{-}\frac{\cancel{-}\left(\cancel{-}\sqrt{\cancel{2.g}.h_2}\right)}{\left(\cancel{-}\sqrt{\cancel{2.g}.h_1}\right)}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}$$

CHOQUE INELÁSTICO O PLÁSTICO

$e = 0$ $Q \neq 0$

En el sistema se cumple:

- **El Principio de Conservación de la Cantidad de movimiento**

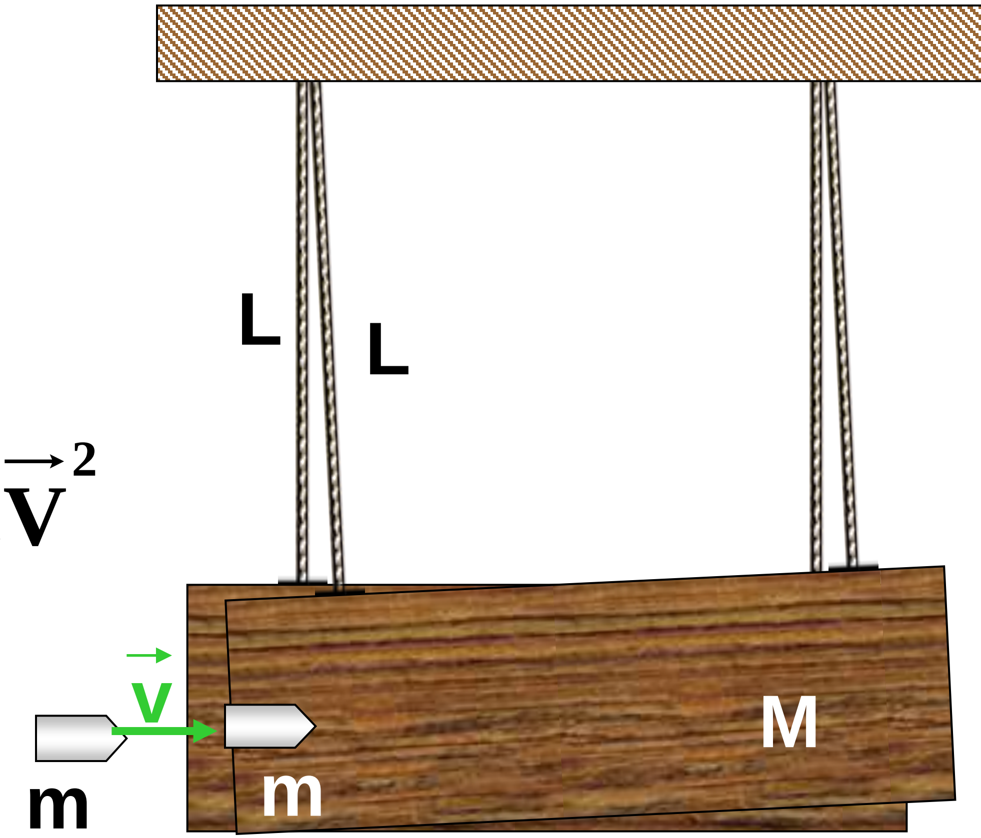
Péndulo balístico

$$\left(\vec{p}_s\right) = \left(\vec{p}_s\right)'$$

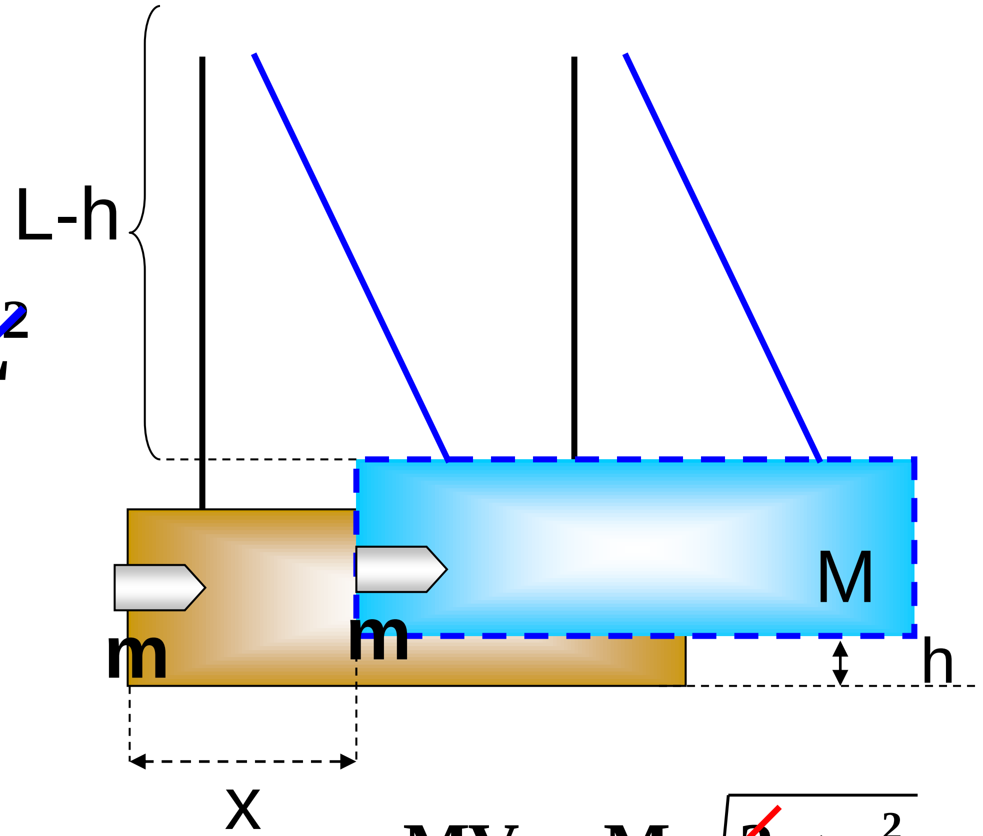
$$m_1 . \vec{v}_1 = (m+M).\vec{V}$$

$$\cancel{(m+M)}.g.h = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}.\vec{V}^2$$

$$V = \sqrt{2.g.h}$$



$$(L-h)^2 + x^2 = L^2$$



$$\cancel{L^2} + h^2 - 2.h.L + x^2 = \cancel{L^2}$$

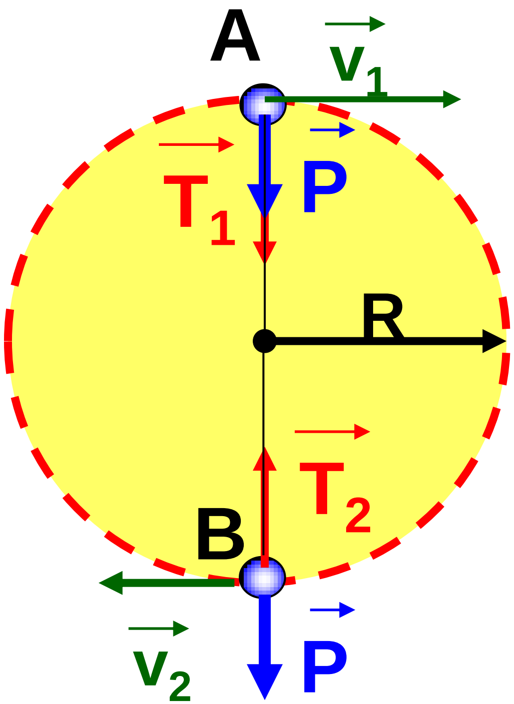
$$h = \frac{\cancelto{0}{h^2} + x^2}{2L} \cong \frac{x^2}{2.L}$$

$$m_1.v_1 = (\cancelto{0}{m} + M).V$$

$$m_1.v_1 = M.V \longrightarrow v_1 = \frac{MV}{m} = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{\cancel{2}.g.x^2}{\cancel{2}.L}}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{M.x}{m}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Movimiento en una circunferencia vertical



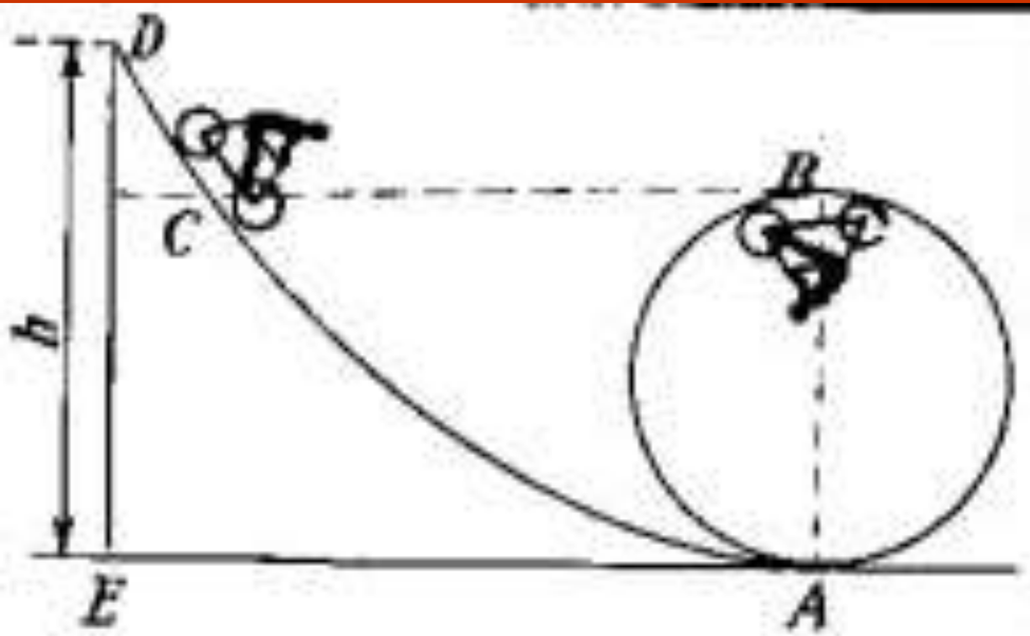
En A: $T_1 + mg = \dfrac{m.v_1^2}{R} \Rightarrow T_1 = \dfrac{m.v_1^2}{R} - m.g$

$$T_1 = 0 = \frac{\cancel{m}.v_c^2}{R} - \cancel{m}.g \Rightarrow \boxed{v_1 = v_c = \sqrt{g.R}}$$

$$\Delta E_p = \Delta Ec \Rightarrow 2mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$2mgR = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - g.R\right) \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{5.g.R}}$$

En B: $T_2 = \dfrac{mv_2^2}{R} + mg = \dfrac{m.5.g.\cancel{R}}{\cancel{R}} + m.g = 5m.g + m.g = 6mg$



En D $E_D = Ep_D = m\ g\ h_D$

En C $E_c = Ec_c + Ep_c$

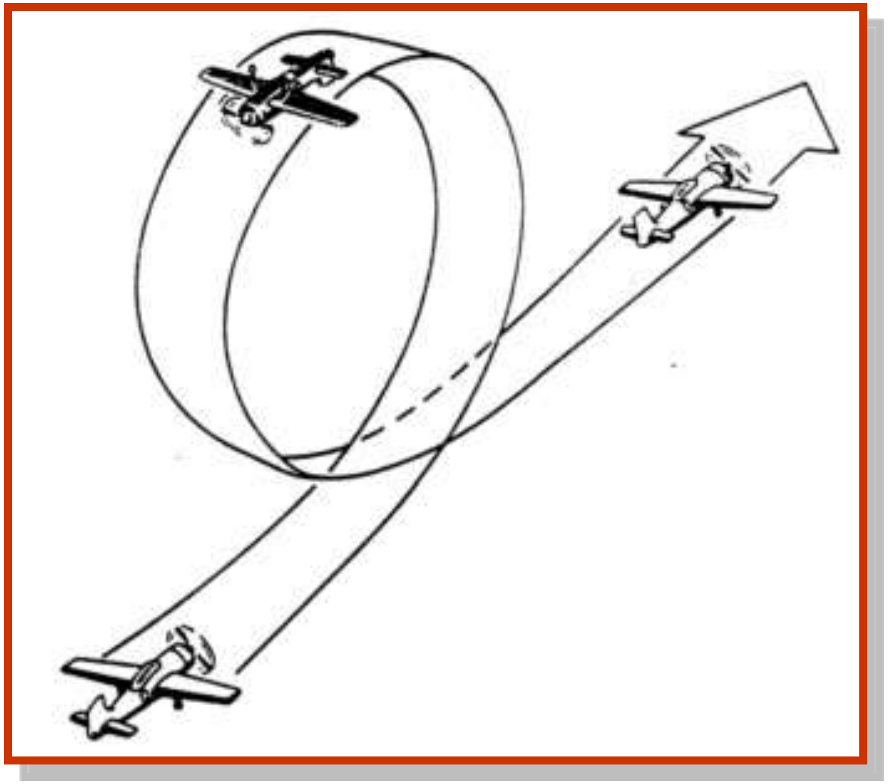
$E_C = \frac{1}{2}\ m\ v^2 + m\ g\ h_c$

En A $E = E_C = \frac{1}{2} m.v_A^2$

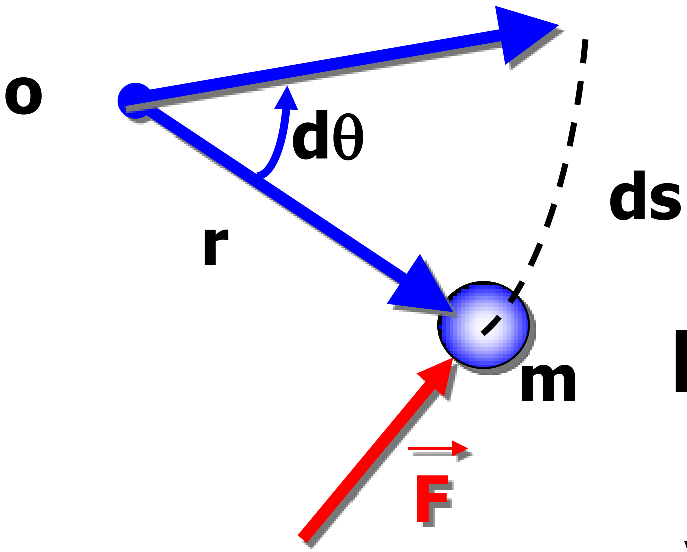
$E_D = E_A \Rightarrow m.g.h_D = \frac{1}{2}.m.v_A^2 \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2.g.h_D}}$

$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v_A^2 = \frac{1}{2}.m.v_B^2 + m.g.2R$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g(h_D - 2R)}}$$



Trabajo y Energía de rotación



$$ds = r\,d\theta$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}.m.v^2 = \tfrac{1}{2}.(mr^2)\omega^2$$

$$v = \omega\,.\,r$$

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}.\,I.\,\omega^2}$$

$dT = F.ds = F.r.d\theta$

M

$dT = M.d\theta$

$dT = dE_c$

$E_c = ½ . I . \omega^2$

$dE_c = \cancel{2}.½\cancel{2}.(mr^2).\omega.d\omega$

$M.d\theta = (mr^2).\omega.d\omega$

$$M = (mr^2).\omega.\frac{d\omega}{d\theta} = I.\alpha$$

$$\boxed{M = I.\alpha}$$

Momento de inercia

$$\boxed{I = m.r^2}$$

Donde:

m : la masa

r : distancia al eje de rotación

- **Depende de la posición del eje de rotación.**
- **Depende de la distribución de la masa**
- **Es mínimo cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa.**
- **Es la masa rotacional.**

DIMENSION:

$$[I]=[M].[L^2]=[ML^2]$$

UNIDADES:

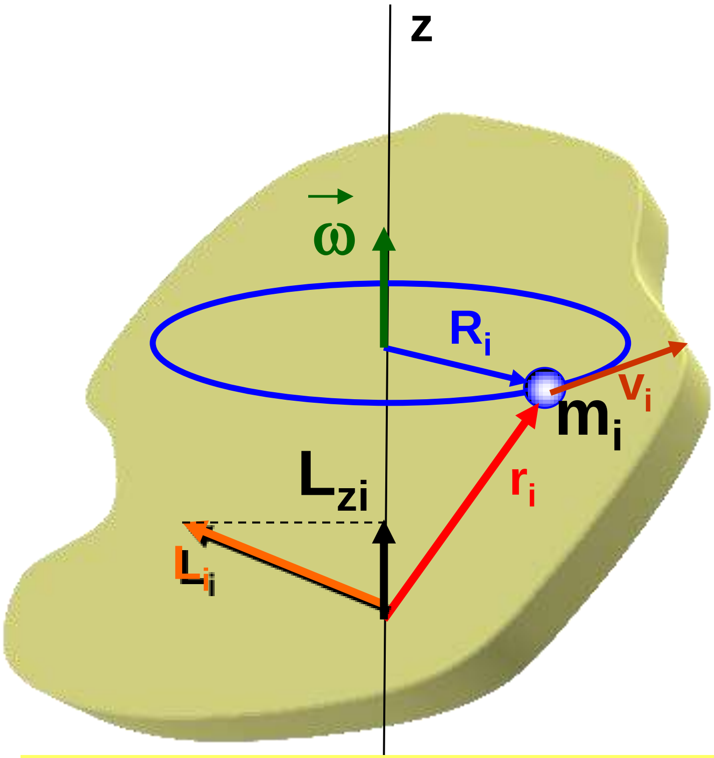
SIMELA: → $kg.m^2$

Sistema c.g.s.: → $g.cm^2$

Sistema Técnico: → $U.T.M.m^2$

Cuerpo rígido

Un sólido rígido es un caso especial de sistemas constituidos por muchas partículas, en los que la distancia relativa entre dos partículas cualesquiera del sistema permanece constante bajo cualquier causa.

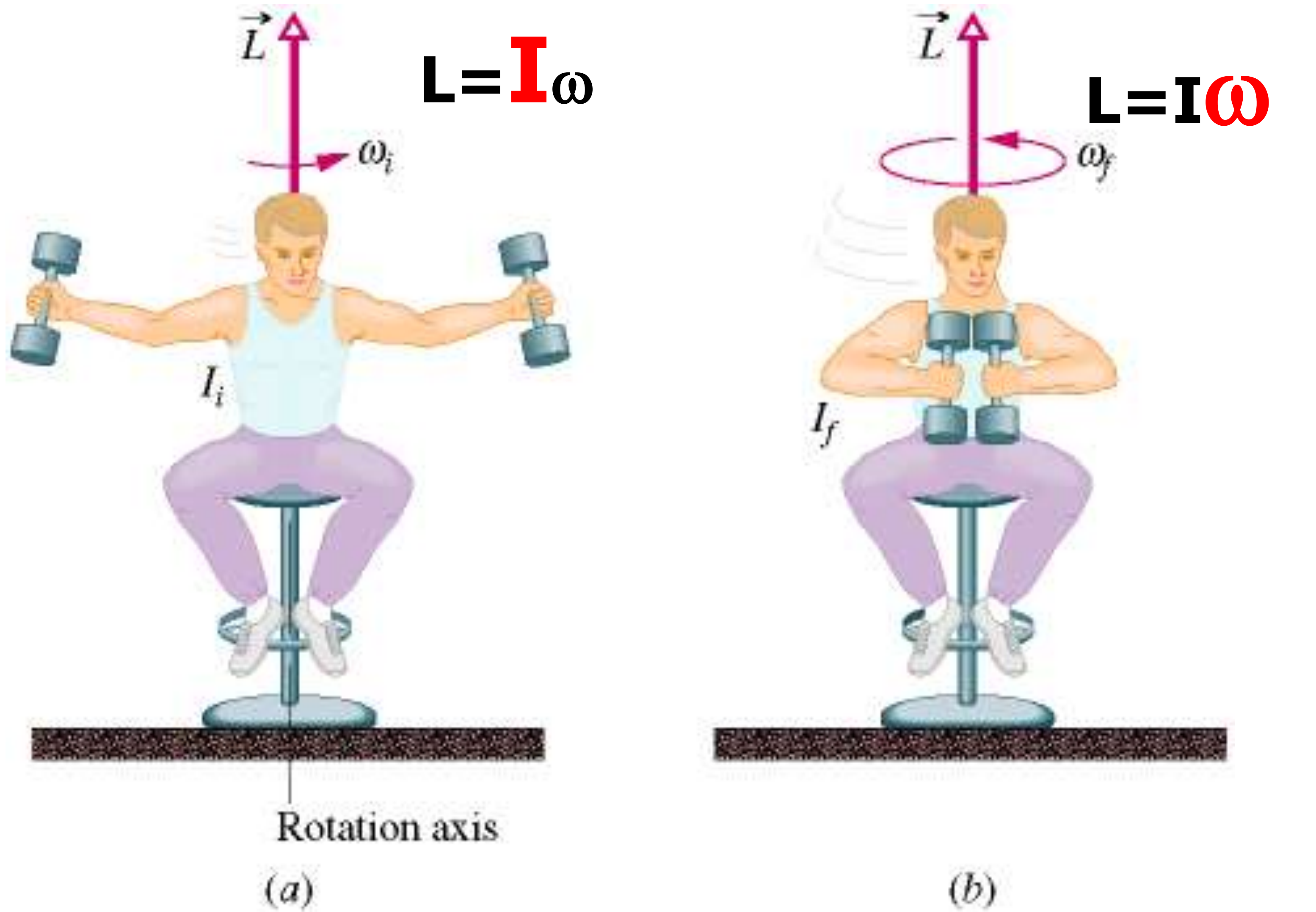


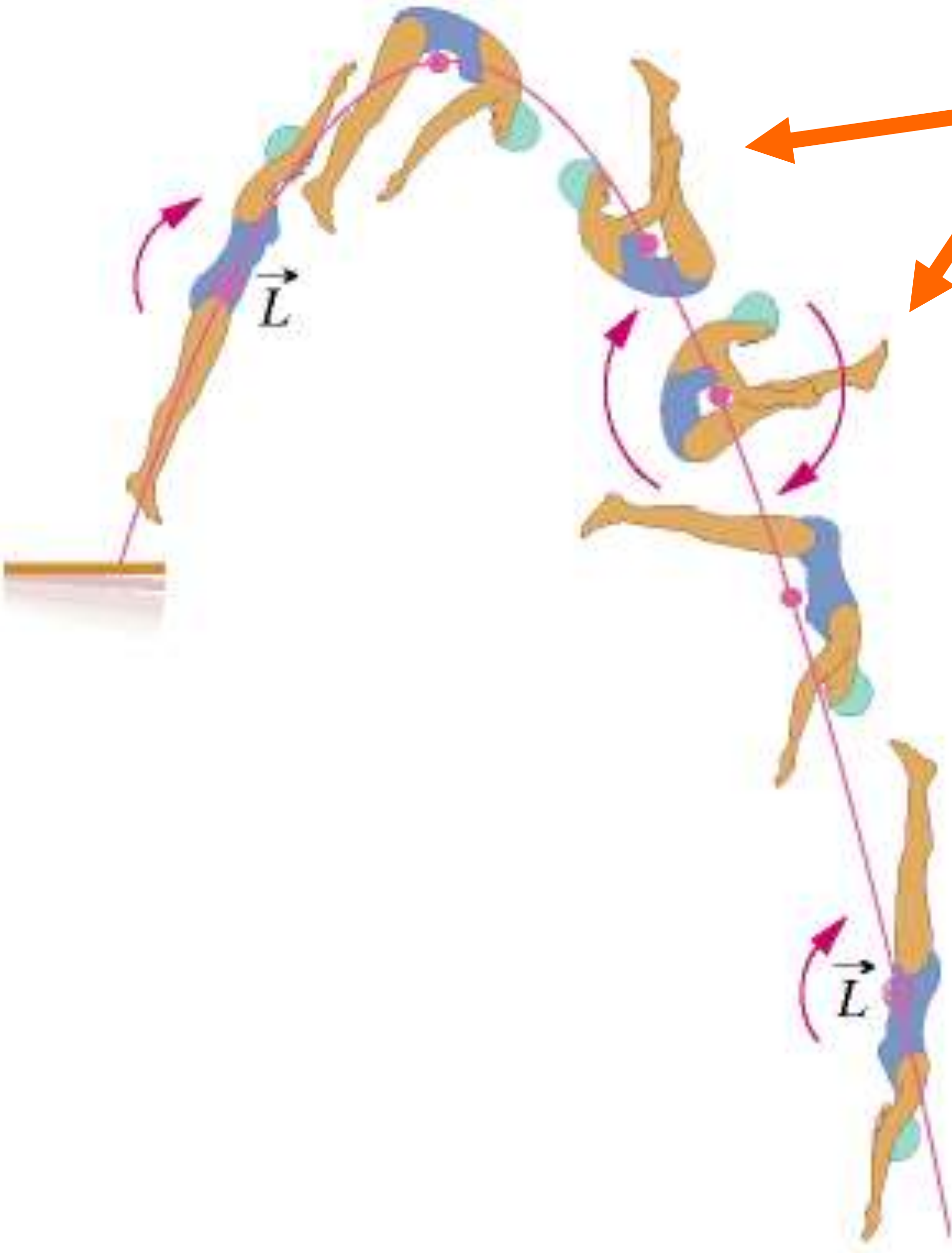
$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum\left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i\right) = \sum \vec{M}_{i\,ext}$$

$$L_z = \sum L_{iz} = \left(\sum m_i R_i^2\right).\omega$$

- En general, L no tiene la dirección del eje de rotación.
- Cuando coinciden, el eje de rotación es un eje principal de inercia.
- En ese caso $\vec{L} = I.\vec{\omega}$ $\quad I = \int r^2 .dm$


$\vec{L}$
L=Iω
ω_i
I_i
Rotation axis
(a)
$\vec{L}$
L=Iω
ω_f
I_f
(b)



Menor I

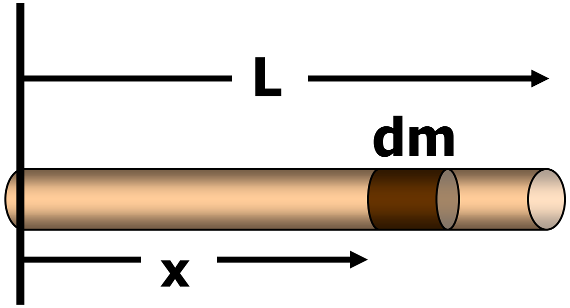
Mayor ω

Mayor I

Menor ω

Cálculo de momentos de inercia de cuerpos sencillos

Varilla delgada respecto aun eje ⊥ a la misma en uno de sus extremos



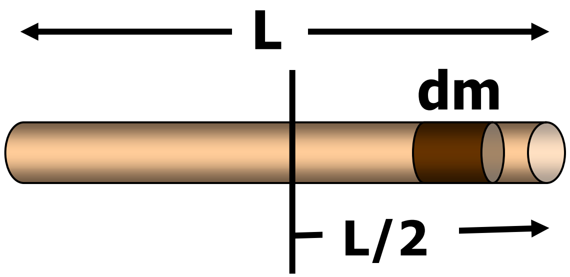
$$dm = \delta.dV = \delta.A.dx$$

$$I = \int r^2.dm = \int_0^L x^2.\delta.A.dx = \frac{1}{3}.\delta.A.L^3$$

$$\delta.A.L = M$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}.M.L^2}$$

Varilla delgada respecto aun eje ⊥ a la misma que pasa por el CM

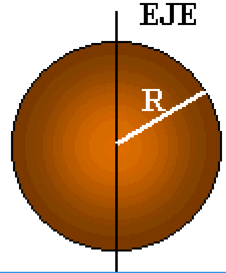
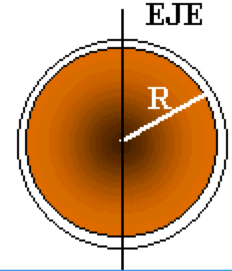


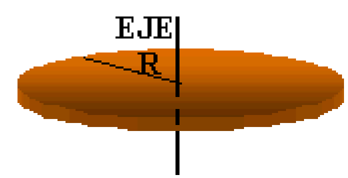
$$dm = \delta.dV = \delta.A.dx$$

$$I = \int r^2.dm = 2.\int_0^{L/2} x^2.\delta.A.dx = \frac{2}{3}.\delta.A.\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$\delta.A.L = M$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12}.M.L^2}$$

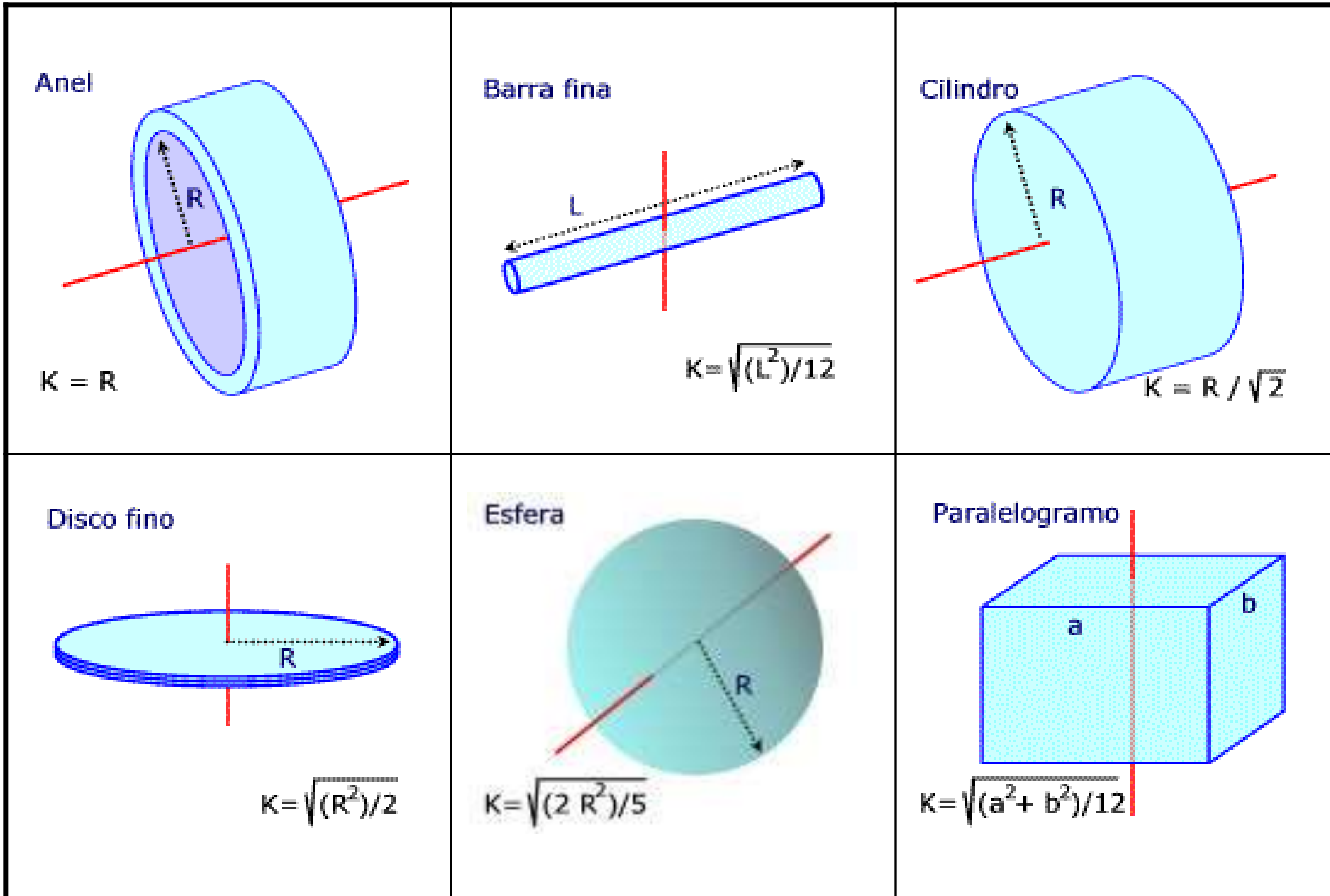
ESFERA	
Maciza respecto a un diámetro	**Corteza respecto a diámetro**
	
$I = \frac{2}{5} MR^2$	$I = \frac{2}{3} MR^2$

DISCO	
Respecto a un diámetro	**Respecto a eje perpendicular en su centro**
	
$I = \frac{1}{4} MR^2$	$I = \frac{1}{2} MR^2$

Radio de giro

- **Es la distancia al eje de rotación en la cual se puede concentrar toda la masa del cuerpo sin variar su momento de inercia**

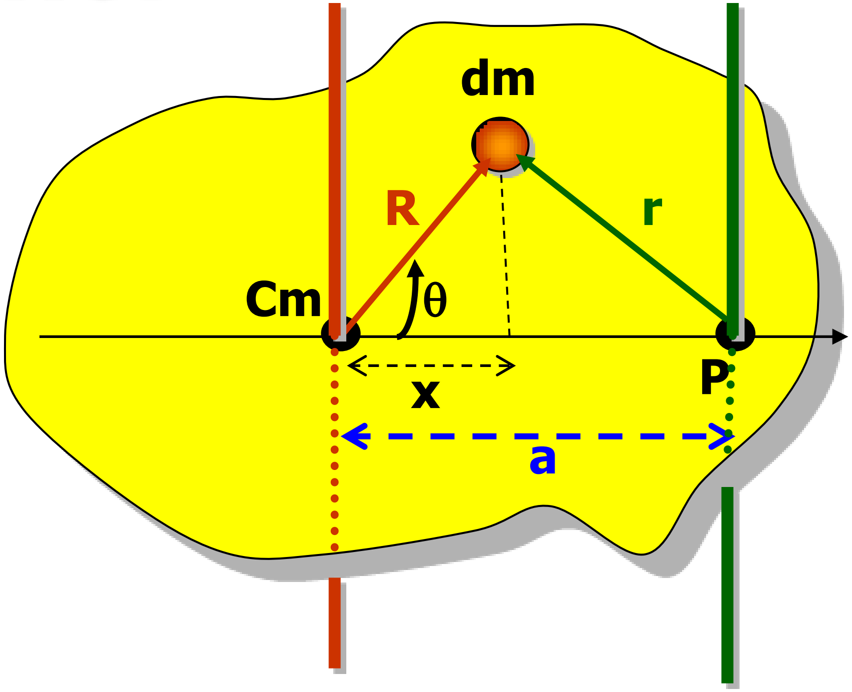
$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$


Anel
R
$K = R$
Barra fina
L
$K=\sqrt{(L^2)/12}$
Cilindro
R
$K = R / \sqrt{2}$
Disco fino
R
$K=\sqrt{(R^2)/2}$
Esfera
R
$K=\sqrt{(2\ R^2)/5}$
Paralelogramo
a
b
$K=\sqrt{(a^2+ b^2)/12}$

Teorema de Steiner

$$I_o = \int dm.R^2$$

$$I_p = \int dm.r^2$$



$$r^2 = R^2 + a^2 - 2.a.\underbrace{R.\cos\theta}_{x}$$

$$I_p = \underbrace{\int R^2.dm}_{I_o} + \int a^2 dm - \underbrace{\int 2.a.x.dm}_{0}$$

$$\boxed{I_p = I_0 + M.a^2}$$

Dinámica del cuerpo rígido

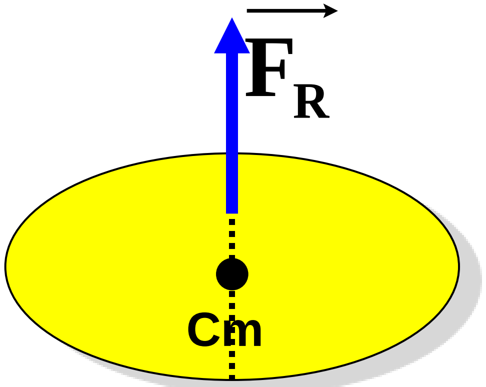
Las condiciones de equilibrio dinámico para un cuerpo rígido son:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_{Cm}$$ **Traslación**

$$\sum \vec{M}_{ext} = I.\vec{\alpha}$$ **Rotación**

Primer caso

La dirección de la F_R pasa por el Cm del cuerpo



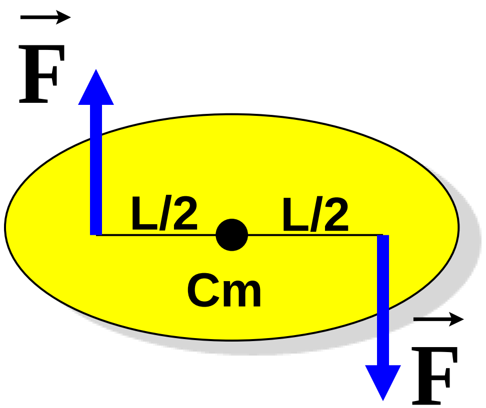
$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_{Cm}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = 0$$

Traslación pura

Segundo caso

La sumatoria de las F_{ext} es una cupla



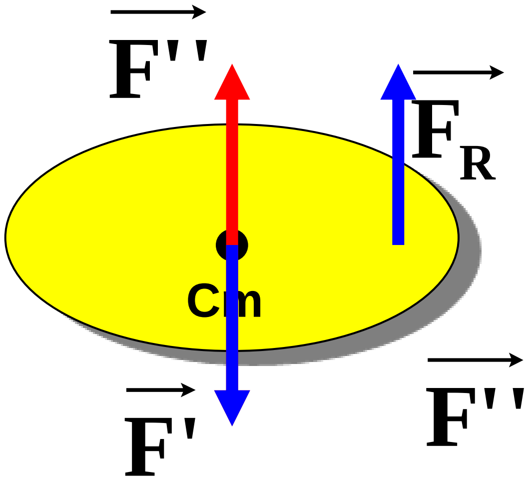
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = F.\frac{L}{2} + F.\frac{L}{2} = I\alpha$$

Rotación pura

Tercer caso

La dirección de la resultante de las F_{ext} no pasa por el Cm.



$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F'}$ **Forman una cupla**

2º Caso: Rotación pura

$\overrightarrow{F''}$ **Es una fuerza que pasa por el Cm**

1º Caso: Traslación pura

El movimiento resultante es un movimiento combinado de rotación y translación

$$E_c = ½.m.r^2 + ½.I.\omega^2$$