Contenido

UNIDAD 5

ALTURAS

Las alturas de los puntos de la superficie terrestre se miden respecto de una superficie de referencia, que puede ser un plano, el geoide (nivel del mar) o un elipsoide de referencia.
La superficie se elige en función de la aplicación que se le quiera dar a las alturas medidas.

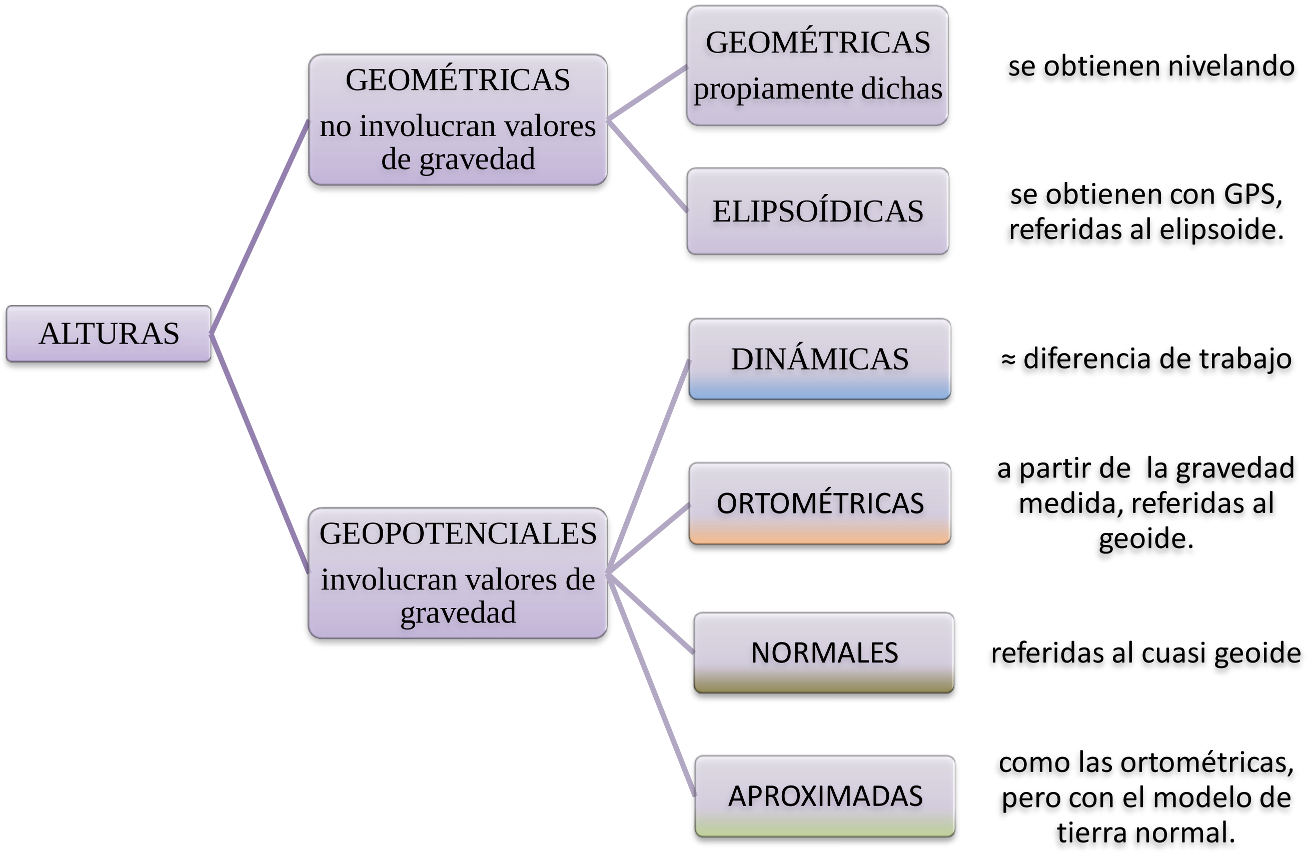
Aplicaciones

- → Determinar la figura de la tierra.
- → Calcular el trabajo realizado durante el movimiento en el campo gravitacional.
- → Proyectar y construir diferentes instalaciones
- → Realizar cálculos en los que hay que tener en cuenta la posición de puntos en el espacio.
- → Calcular las reducciones al elipsoide en la mediciones realizadas directamente sobre la superficie terrestre.

La forma de la tierra está íntimamente ligada al cálculo de las alturas: según el modelo geométrico que se adopte para modelarla se obtendrán alturas con distinto grado de precisión. Esto hace que la elección del modelo dependa de la aplicación que se le quiera dar.
En ***topografía*** por lo general se considera la tierra esférica y de masa uniforme e isótropa; en estas condiciones el campo gravitatorio produce superficies equipotenciales también esféricas y paralelas entre sí por lo que no es necesario tener en cuenta la gravedad en el momento de calcular alturas.
En ***ingeniería*** el modelo esférico no es suficiente: en este caso se utiliza el modelo de tierra normal (esferoidal), y en aplicaciones donde el requerimiento de precisión es mayor se utiliza el ***Geoide*** como superficie de referencia.
La ***geodesia***, que estudia la forma de la tierra y su composición, trabaja sobre la forma "real" de la tierra por lo que siempre está referida al ***Geoide***.

CLASIFICACIÓN DE LAS ALTURAS

Para clasificar los tipos de alturas se tienen en cuenta la manera en que se obtienen los valores, las superficies a las que están referidas, y cómo se considera la influencia de la gravedad



ALTURAS GEOPOTENCIALES

La alturas geopotenciales están íntimamente ligadas a los efectos del campo gravitatorio.
Supongamos que queremos calcular el desnivel entre dos puntos A y B en la superficie topográfica lo suficientemente alejados para requerir varios puntos de paso en el proceso de nivelación.
La suma de los desniveles medidos no resulta ser igual a la diferencia entre las alturas ortométricas de los puntos H_A y H_B (ver FIGURA 1). Esto se debe a que el incremento Δ_h no es igual al incremento correspondiente Δ_{H_B} porque las superficies equipotenciales no son paralelas.

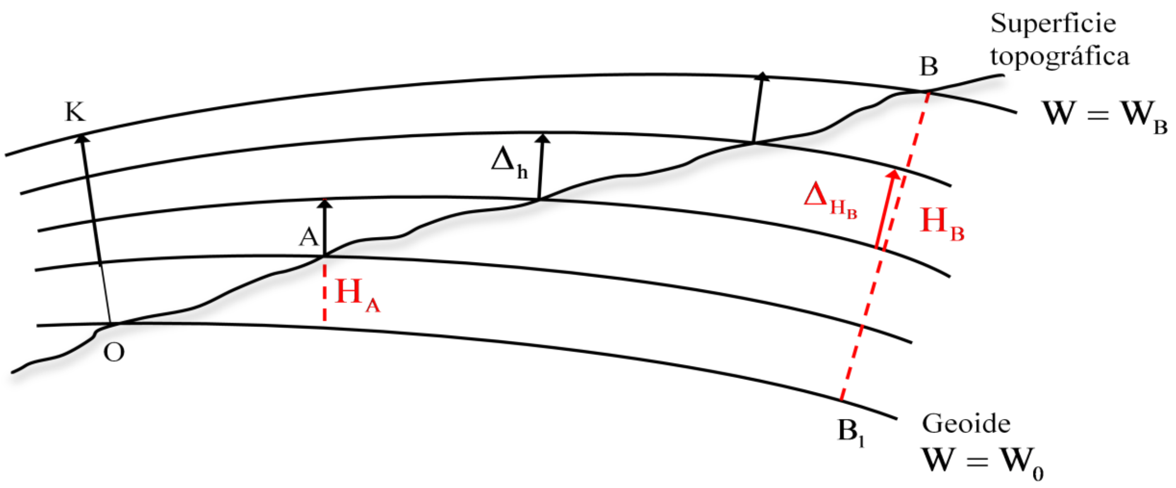


FIGURA 1

NÚMEROS GEOPOTENCIALES

Dos puntos están a la misma altura si el agua no corre desde uno hacia el otro, esto es si están en la misma superficie equipotencial. Esto nos lleva a considerar el trabajo necesario para moverse dentro del campo desde A hasta B para estimar el desnivel que existe entre ambos.

Recordemos que el potencial de un punto P es el trabajo necesario para desplazar una masa unitaria desde el infinito hasta el punto P. Entonces la diferencia de trabajo entre A y B es $\Delta L = W_A - W_B$.

Por otro lado la misma diferencia de trabajo se puede calcular como $\Delta L = \int_A^B g\,d\gamma$, donde la integral es independiente del camino de integración γ por tratarse de un campo conservativo.
Entonces, juntando las dos expresiones:

$$\Delta L = \int_A^B g\,d\gamma = W_A - W_B$$

Si suponemos que A es un punto sobre el geoide (de altura cero), entonces $W_A = W_0$ (el potencial del Geoide).
$C = \int_o^B g\,d\gamma = W_0 - W_B$ es el ***número geopotencial*** del punto B, y representa el trabajo necesario para mover una masa unitaria desde el geoide hasta la altura de B. El número C es independiente de la línea de nivelación que se use para relacionar el punto B con el nivel del mar, y por lo tanto puede ser considerado como una medida natural de la altura de B aunque no sea una longitud.
Los números geopotenciales se miden en ***unidades geopotenciales (g.p.u.)***, donde

1 g.p.u.=1 kgal metro =1000 gal metro

Como $g \cong 9.8\,\text{kgal}$, entonces $C \cong gH \cong 0.98H$. Es decir que el número geopotencial en g.p.u. es aproximadamente igual a la altura sobre el nivel del mar en metros.

ALTURAS DINÁMICAS

La altura dinámica de un punto del terreno B se define como:

$$H^{din} = \frac{C}{\gamma_0}$$

Donde C es el número geopotencial del punto B y γ_0 es el valor de la gravedad normal para una latitud arbitraria, usualmente 45º pero se puede tomar la latitud de un punto más cercano a la zona de trabajo.
Obviamente las alturas dinámicas difieren de los números equipotenciales sólo en una constante: la división de C por γ_0 solamente convierte un número geopotencial en una longitud.

A pesar de ser una longitud, la altura geopotencial no tiene sentido geométrico, por lo que la división por γ_0 solamente oscurece el verdadero sentido de la diferencia de potencial.

ALTURAS ORTOMÉTRICAS

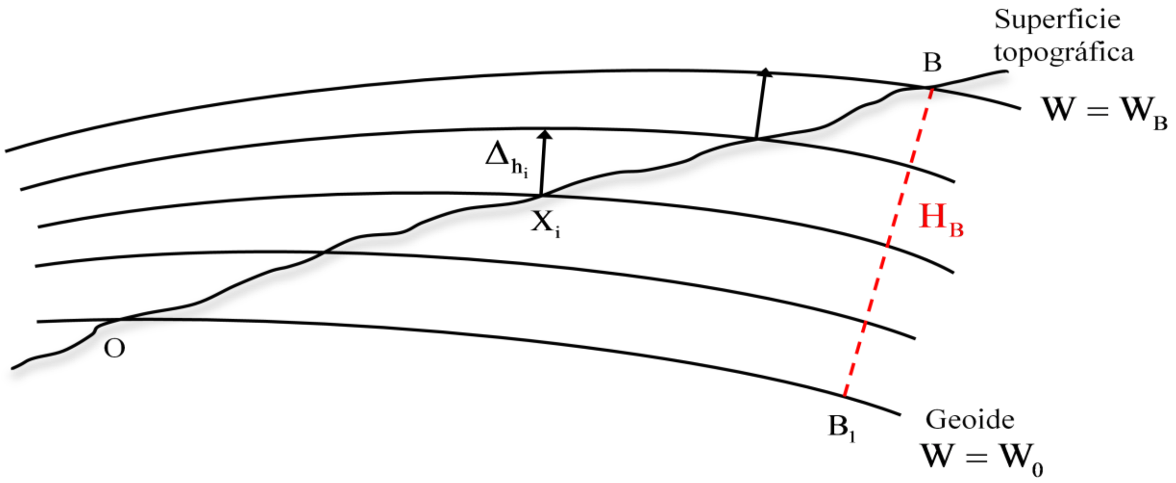


FIGURA 2

Llamemos B_1 a la intersección de la línea de plomada que pasa por B con el Geoide, y sea C el número geopotencial de B: esto es $C = W_0 - W_B$.

H_B es la altura ortométrica del punto B, definida como la distancia del punto B al geoide medida sobre la línea de plomada[1], ortogonal a las superficies equipotenciales.

Volvamos al número geopotencial $C = \int_o^B g\,d\gamma$. Si la integración se hace sobre el camino OB_1B, se tiene que

$C = \int_{B_1}^{B} g\,d\gamma$ ya que el trabajo del campo g es nulo al moverse sobre una superficie equipotencial.

Entonces $C = \int_{B_1}^{B} g\,d\gamma = H.\frac{1}{H}\int_{B_1}^{B} g\,dh = H.\bar{g}$ donde $\bar{g} = \frac{1}{H}\int_{B_1}^{B} g\,dh$ es el valor promedio de g sobre el segmento de la línea de plomada que une B con B_1.

Se deduce entonces que $H = \frac{C}{\bar{g}}$, lo que permite calcular H si se conoce el valor promedio $\bar{g}$ de la gravedad sobre la línea de plomada y el número geopotencial.

---

[1] Si las superficies equipotenciales no son paralelas, entonces la línea de plomada es una curva, no una recta.

Por otro lado si la integración para calcular el número geopotencial se hace sobre la línea de nivelación se tiene que $C = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta_{h_i}} g\,dh$. Como Δ_{h_i} es el desnivel medido en una nivelada, su longitud es suficientemente pequeña como para suponer que en ese segmento g es constante igual al valor medido en el punto X_i, y en consecuencia:

$\int_{\Delta_{h_i}} g\,dh \cong g_i \Delta h_i \Rightarrow C = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta_{h_i}} g\,dh = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta h_i$, donde los Δ_{h_i} son los desniveles medidos y los g_i son los valores medidos de gravedad en los puntos respectivos.

En consecuencia:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta h_i}{\bar{g}}$$, donde $\bar{g}$ es el valor promedio de g a lo largo de la línea de plomada B_1B

Como es físicamente imposible medir la gravedad a lo largo del segmento B_1B, el valor que se obtenga de H dependerá de las suposiciones que se hagan y de cómo se estime el valor de $\bar{g}$. Analizaremos dos opciones:
Por lo general se puede suponer que g varía linealmente desde el geoide hasta el punto P a lo largo de la línea de plomada.

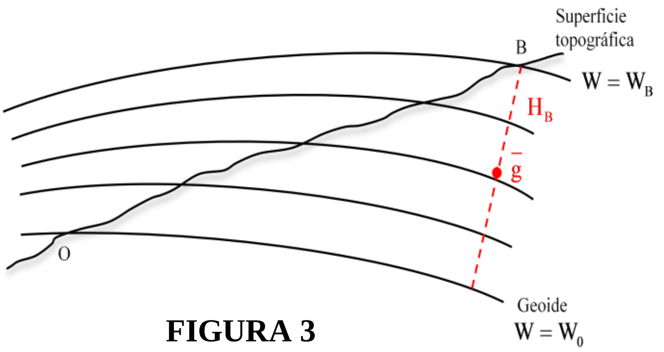


FIGURA 3

Con esta suposición $\bar{g} = \frac{1}{H} \int_{B_1}^{B} g\,dh$ es el valor de gravedad en el punto medio del segmento B_1B

Aplicando la reducción de Pray se obtiene:

$$\bar{g} = g_P + 0.0848\,(H_P - H_Q) = g_P + 0.0848\,(\frac{H_P}{2})$$

Con lo que la altura ortométrica del punto P se calcula como:

$$\boxed{H = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta h_i}{\bar{g}}, \text{ donde } \bar{g} = g_P + 0.0848\,(H_P - H_Q) = g_P + 0.0848\,(\frac{H_P}{2})}$$

CONCLUSIONES:

- Las alturas ortométricas no dependen del camino de la nivelación.
- Puntos ubicados en una misma superficie de nivel tendrán diferentes alturas ortométricas.
- Las alturas ortométricas no pueden calcularse exactamente ya que dependen de una forma compleja de la distribución de las densidades dentro de la tierra y que no es conocida.

- Se puede aproximar la altura ortométrica formulando alguna hipótesis de distribución de las masas terrestres.

ALTURAS NORMALES

Si en la expresión anterior reemplazamos en el denominador el valor medio de $\bar{g}$ por el promedio de los valores de la gravedad normal, obtenemos las denominadas ***"alturas normales"***:

$$H^{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta h_i}{\bar{\gamma}}, \text{ donde } \bar{\gamma} = \frac{1}{H^*}\int_0^{H^*} \gamma \ z \ dz$$

Las ***alturas geopotenciales normales*** se encuentran ampliamente difundidas en la actualidad y han ido reemplazando paulatinamente el uso de las alturas geopotenciales ortométricas. Los Sistemas de Referencia modernos han adoptado oficialmente este tipo de alturas para la definición de su Marco Vertical.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LAS ALTURAS NORMALES:

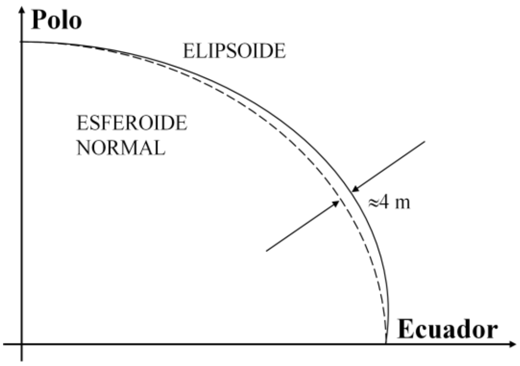


FIGURA 4

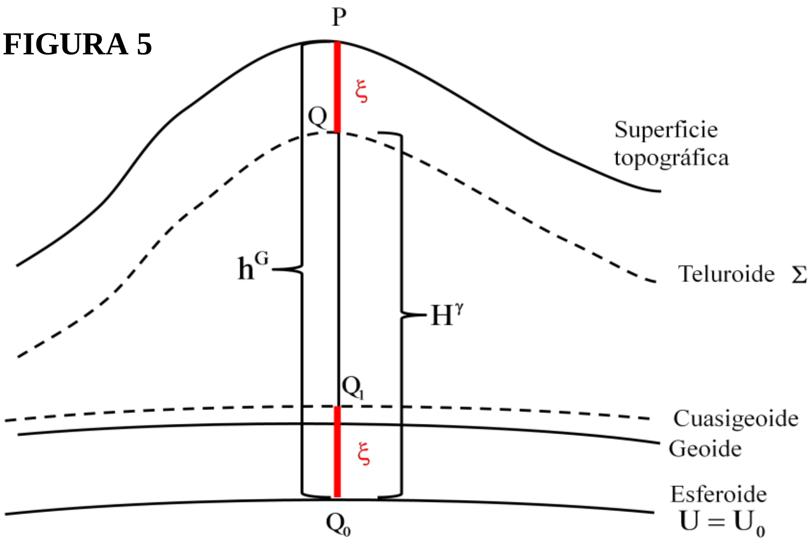
Comencemos por dar algunas definiciones:

Como ya se dijo, en el pasado reciente la Geodesia Geométrica recurrió a una diversidad de elipsoides para definir una superficie sobre la que realizar sus cálculos. En sentido estricto, la forma de la Tierra Normal es un ***esferoide***, levemente apartado del elipsoide ideal.

La ***"altura geodésica"*** de un punto P en la superficie topográfica es la distancia de P al ***esferoide*** medida sobre la línea de plomada (siempre según la gravedad normal γ), y la llamaremos h^G.

Observar que la diferencia entre la altura elipsóidica h y la geodésica h^G puede llegar hasta los 4m.

FIGURA 5



Consideremos un punto P en la superficie topográfica. Este punto tiene un potencial W_P y un esferopotencial U_P; en general $W_P \neq U_P$

Sea Q un punto en la línea de plomada de P tal que $U_Q = W_P$; esto es: el valor del esferopotencial de Q coincide con el valor del potencial en P.

Si repetimos el procedimiento para cada punto del terreno, los puntos Q así obtenidos describirán una superficie denominada ***Teluroide*** ***(Σ).***

Si trasladamos ε a Q_0, su extremo superior NO coincidirá necesariamente con el geoide $W = W_0$ dado que la separación entre superficie equipotenciales no es constante; pero definirá un punto Q_1 muy cercano a esta.
La unión de cada uno de esos puntos resultantes determinará una nueva superficie equipotencial, muy cercana al Geoide que llamaremos ***"Cuasigeoide".***
En estas condiciones podemos plantear:

$$W_0 - W_P = \int_0^P g.dh \quad \text{y} \quad U_0 - U_Q = \int_{Q_0}^{Q} \gamma.dh$$

$$U_Q = W_P \text{ y } U_0 = W_0 \Rightarrow W_0 - W_P = U_0 - U_Q \Rightarrow \int_0^P g.dh = \int_{Q_0}^{Q} \gamma.dh \cong \bar{\gamma}.H^{\gamma}$$

Entonces:

$$\boxed{H^{\gamma} = \frac{W_0 - W_P}{\bar{\gamma}} = \frac{\int_0^P g.dh}{\bar{\gamma}} \quad \text{donde } \bar{\gamma} = \gamma_0 - 0,3086.\frac{1}{2}.H^{\gamma} \cong= \gamma_0 - 0,3086.\frac{1}{2}.H_{medida}}$$

Es decir que la altura normal H^{γ} de P no es más que la altura geodésica de Q.

Por otro lado la separación geoide – cuasigeoide vendrá dada por :

$$\varepsilon = H - \overline{Q_1P} \text{ donde H es la altura ortométrica de P}$$

Como $\overline{Q_1P} = \overline{Q_0Q} = H^{\gamma}$, entonces $\varepsilon = H - H^{\gamma} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{g}} H^{\gamma} - H^{\gamma} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{g}}{\bar{g}} H^{\gamma}$

CONCLUSIONES:

- La altura normal no depende del camino de la nivelación.
- En la superficie de los océanos el geoide y el cuasigeoide coinciden.
- El cuasigeoide expresa en forma muy aproximada la figura del geoide
- Las Alturas geopotenciales normales no requieren recurrir a ningún modelo físico de relacionado con la estructura interna de la Tierra.

ALTURAS APROXIMADAS

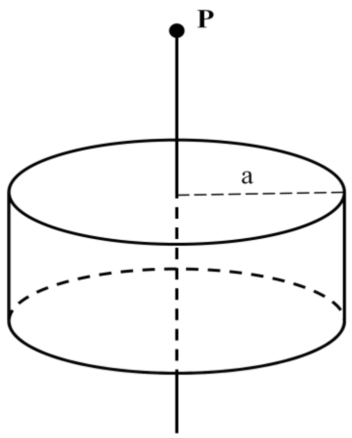
Supongamos el modelo de tierra normal (tierra uniforme, isotrópica, de forma esferoidal rotando a velocidad constante), esto es: $W = U$ y $g = \gamma$.
Si con esa suposición calculamos las "alturas ortométricas" obtenemos las ***"alturas aproximadas"***, que denotamos por H^*.

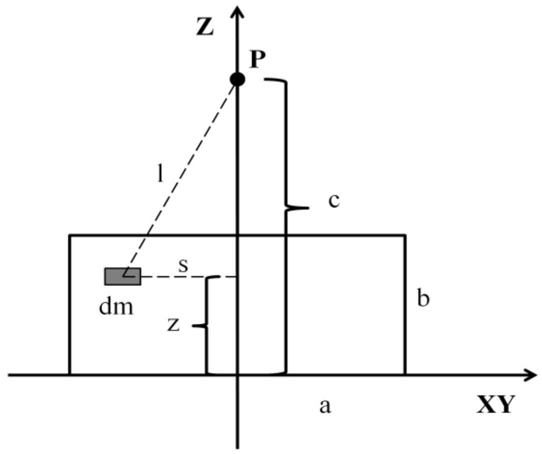
$$\boxed{H^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta h_i}{\bar{\gamma}}, \text{ donde } \bar{\gamma} = \frac{1}{H^*} \int_0^{H^*} \gamma \ z \ dz}$$

Como el esferopotencial es una función analítica, estas ecuaciones pueden ser resueltas de manera analítica sin necesidad de medir gravedad en el campo.

NOTA 1: POTENCIAL GRAVITATORIO GENERADO POR UN CILINDRO

Calculemos el potencial U y la atracción vertical A que un cilindro circular homogéneo Σ de radio a y altura b ejerce sobre un punto P situado en el eje del cilindro a una altura c fuera del cilindro (c>b)





El potencial que induce dm sobre el punto P es $dU = \frac{G\,dm}{l} = \frac{G\,\rho\,dv}{l}$, donde ρ es la densidad del cilindro.

El potencial en el punto P está dado por la fórmula general:

$$U = U(P) = G\iiint_{\Sigma}\frac{dm}{l} = G\iiint_{\Sigma}\frac{\rho\,dv}{l} \qquad \text{(la integral se extiende sobre el volumen del cilindro)}$$

Introduciendo coordenadas cilíndricas tenemos que las coordenadas de dm son:

$$\begin{cases} x = s.\cos(\alpha) \\ y = s.\mathrm{sen}(\alpha) \\ z \end{cases}$$

Entonces $l = \sqrt{s^2 + (c-z)^2}$; reemplazando en la fórmula del potencial

$$U = G\iiint_{\Sigma}\frac{\rho\,dv}{l} = G\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b}\frac{s\,ds\,dz\,d\alpha}{\sqrt{s^2+(c-z)^2}} = G\rho 2\pi\int_0^{a}\int_0^{b}\frac{s\,ds\,dz}{\sqrt{s^2+(c-z)^2}}$$

La integral respecto de s da

$$\int_0^a \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2+(c-z)^2}} = \left.\sqrt{s^2+(c-z)^2}\right|_0^a = \sqrt{a^2+(c-z)^2} - c + z$$

Y por lo tanto

$$U = G\rho 2\pi \int_0^a \int_0^b \frac{s\,ds\,dz}{\sqrt{s^2 + (c-z)^2}} = G\rho 2\pi \int_0^b \left(\sqrt{a^2 + (c-z)^2} - c + z \right) dz$$

Se puede comprobar derivando que

$$\int \left(\sqrt{a^2 + (c-z)^2} - c + z \right) dz = \frac{1}{2}(c-z)^2 - \frac{1}{2}(c-z)\sqrt{a^2 + (c-z)^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln\left(c - z + \sqrt{a^2 + (c-z)^2} \right)$$

De lo que resulta que

$$U = G\rho\pi \left((c-b)^2 - (c-b)\sqrt{a^2 + (c-b)^2} - a^2 \ln\left(c - b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} \right) - c^2 + c\sqrt{a^2 + c^2} + a^2 \ln\left(c + \sqrt{a^2 + c^2} \right) \right) =$$

$$= G\rho\pi \left((c-b)^2 - c^2 - (c-b)\sqrt{a^2 + (c-b)^2} + c\sqrt{a^2 + c^2} - a^2 \ln\left(c - b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} \right) + a^2 \ln\left(c + \sqrt{a^2 + c^2} \right) \right)$$

La atracción vertical ejercida sobre el punto P se obtiene derivando el potencial respecto de c

$$A = -\frac{\partial U}{\partial c}$$

Derivando obtenemos

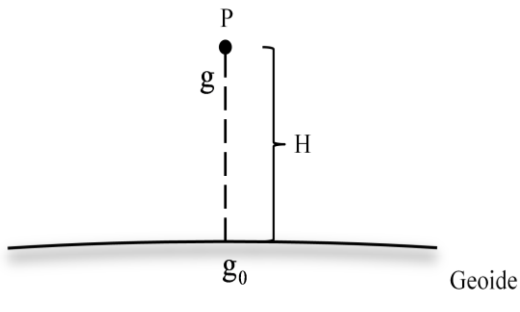
$$A = 2\pi G\rho \left(b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right)$$

OBSERVACIÓN

Si consideramos una placa infinita de espesor igual a b, podemos suponer que se trata de un cilindro circular de radio infinito. Entonces si la placa tiene densidad constante igual a ρ podemos calcular la atracción que ejerce sobre un punto P ubicado por encima de la placa a una altura c (c>b) como

$$A = \lim_{a \to +\infty} G\rho\pi \left(b + \sqrt{a^2 + (c-b)^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right) = G\rho 2\pi b$$

NOTA 2: REDUCCIÓN DE AIRE LIBRE (Free air)



Sea g el valor de gravedad observado en el punto P, y sea g_0 que debería observarse en la proyección de P sobre el geoide.
El valor de g_0 se puede calcular mediante la serie de Taylor:

$$g_0 = g + \frac{\partial g}{\partial h}.H + \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}.H^2 + \ldots$$

donde H es la altura del punto P por sobre el geoide .
Truncando todos los términos salvo el lineal tenemos que:

$$\boxed{g_0 = g - \frac{\partial g}{\partial h}.H}$$

Si consideramos el modelo de tierra esférico, $g = \frac{GM}{h^2}$, donde h es la distancia del punto al centro de la tierra, lo que puede asimilarse como su altura; G es la constante de gravitación universal y M es la masa de la tierra.

Entonces $\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \frac{GM}{h^2}}{\partial h} = -2\frac{GM}{h^3}$

CÁLCULO APROXIMADO DEL GRADIENTE

$M = 5.9736 \times 10^{24}$ kg y $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$

- Si calculamos el valor del gradiente en el Ecuador h=a=6378137m

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -\frac{2GM}{h^3} = -2\frac{6.674 \times 10^{-11} \quad 5.9736 \times 10^{24}}{6378137^{\;3}} \times 10^5 \frac{mgal}{m} = -0.3073\frac{mgal}{m}$$

- Si calculamos el valor del gradiente en los Polos h=b=6356752m

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -\frac{2GM}{h^3} = -2\frac{6.674 \times 10^{-11} \quad 5.9736 \times 10^{24}}{6356752^{\;3}} \times 10^5 \frac{mgal}{m} = -0.3104\frac{mgal}{m}$$

Se adopta para el gradiente un valor promedio $\frac{\partial g}{\partial h} = 0.3086\frac{mgal}{m}$, con el cual la fórmula de la reducción de ***Aire Libre*** queda:

$$\boxed{g_0 = g + 0.3086\,H}$$

Al calcular la reducción de Aire Libre se está suponiendo que no hay masas interpuestas entre el geoide y el punto P.

NOTA 3: REDUCCIÓN DE BOUGUER

Supongamos que el área que rodea al punto P en completamente plana y horizontal, y supongamos además que la densidad de la masa comprendida entre el geoide y la superficie topográfica tiene un valor constante ρ. Esa porción de corteza terrestre es lo que se denomina ***placa de Bouguer***.

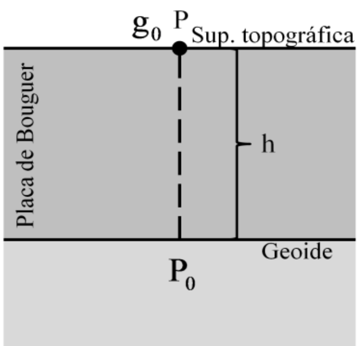


FIGURA 6

La atracción A que ejerce la placa de Bouguer sobre el punto P es

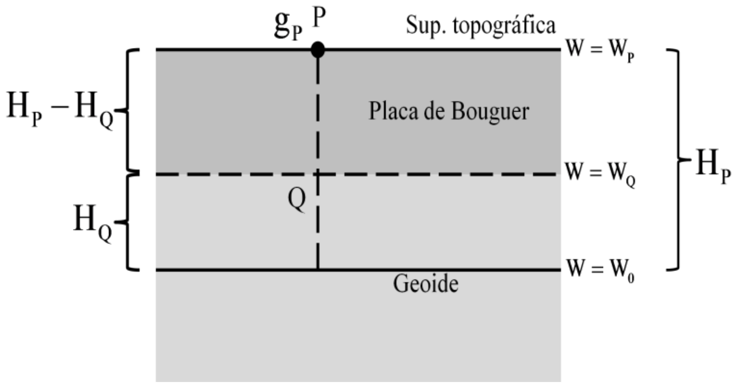
$$A_B = G\rho 2\pi h \quad \text{(ver Nota 1)}$$

Si tomamos $\rho = 2.67\, {}^{g}/_{cm^3}$ como valor promedio de la densidad en la placa de Bouguer se obtiene $A_B = 0.1119\,h$ mgal

Entonces, si g_0 es la gravedad observada en P expresada en miligales, el valor que se observaría en el punto P si no estuviera la placa de Bouguer es:

$$g_B = g_0 + 0{,}1119\,h \text{ mgal}$$

NOTA 4: REDUCCIÓN DE POINCARÉ Y PRAY (conocida como reducción de Pray)



Se quiere calcular el valor de gravedad en el punto Q ubicado entre P y el geoide, a una altura H_Q conociendo únicamente el valor de gravedad g_P observado en P.

FIGURA 7

El método consiste en aplicar los siguientes tres pasos de manare consecutiva:

1) Remover todas las masas ubicadas sobre la superficie $W = W_Q$ (que contiene al punto Q) ; esto es restar valor de atracción que ésta ejerce sobre P al valor de g_P.
2) Como después del paso 1) la estación P pasó a estar en ***"aire libre"*** , se aplica la reducción de aire libre (ver NOTA 2) moviendo la estación medida de P a Q.
3) Restaurar la placa de Bouguer que se removió en el paso 1); esto es agregarle su atracción al valor obtenido en el paso 2).

Gravedad medida en P	g_P
1) Quitar placa de Bouguer	$-0.1119\,(H_P - H_Q)$
2) Reducción de aire libre de P a Q	$+0.3086\,(H_P - H_Q)$
3) Reposición de la placa de Bouguer	$-0.1119\,(H_P - H_Q)$
Gravedad en el punto Q	$g_Q = g_P + 0.0848\,(H_P - H_Q)$