

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	2
<i>MÉTODOS DE EVALUACIÓN GEOIDAL</i>	3
PROCEDIMIENTO ASTROGEODÉSICO.....	3
PROCEDIMIENTO DE MODELADO DEL CAMPO GRAVITACIONAL GLOBAL	6
MODELOS SÓLO SATELITALES	7
MODELOS COMBINADOS	8
DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS MODELOS DE GEOPOTENCIAL	8
PROCEDIMIENTO GEOMÉTRICO	10
ALTIMETRÍA SATELITAL.....	11
PROCEDIMIENTO GRAVIMÉTRICO	11
CÁLCULO GRAVIMÉTRICO DEL GEOIDE	13
TÉCNICA REMOVE - RESTITUIR	15
<i>INTERPOLACIÓN DE LOS DATOS DE GRAVEDAD</i>	17
CONTRIBUCIÓN DE ONDA LARGA (TÉRMINO N_1).....	21
EFECTO INDIRECTO (TÉRMINO N_2)	22
CONTRIBUCIÓN DE LAS ANOMALÍAS RESIDUALES (TÉRMINO N_3).....	24
VALIDACIÓN DEL GEOIDE	25
CONSIDERACIONES GENERALES	26
REFERENCIAS	28

INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista amplio, el problema de la determinación del *geoide* puede ser considerado en el contexto del modelado del campo de gravedad terrestre ya que todos los métodos involucran de una u otra manera su conocimiento.

El término *geoide*, introducido originalmente por Gauss en 1828, se define tradicionalmente como la superficie equipotencial (superficie de nivel) del campo de gravedad terrestre que coincide con el nivel medio del mar.

Sin embargo, existen fenómenos que hacen que esta definición no sea suficientemente precisa cuando se la conecta con sistemas de altura y GPS. Veremos brevemente cuales son estos aspectos que complican la definición del geoide como superficie de referencia.

- ***No existe ninguna superficie de nivel del campo de gravedad que coincida plenamente con el nivel medio del mar.*** Debido a razones oceanográficas, el nivel medio del mar se desvía de una superficie de nivel. Esta desviación es la topografía de la superficie media del mar (SST). Por lo tanto, para definir un geoide, debe especificarse un sitio para el cual se dará el nivel medio del mar. En sentido global, un proceso de mínimos cuadrados de la SST puede ser una alternativa. Lugares diferentes producirán geoides que pueden diferir en un par de metros uno del otro (Lisitzin, 1974; Ekman & Mäkinen, 1994).
- ***El nivel medio del mar no es estable.*** Debido a razones climáticas cambia gradualmente con el tiempo. Durante el siglo pasado ha tenido lugar un ascenso general del nivel medio del mar. Para definir un geoide entonces debe especificarse una época para la cual será válido el nivel medio del mar. Geoides calculados con diferencias de época de unos pocos años pueden diferir en algo más que 10 cm. (Ekman, 1993).
- En lo referente a sistemas altimétricos, existen básicamente dos caminos distintos de tratar al campo de gravedad al transformar números geopotenciales en alturas. Uno es el uso del campo de gravedad real para producir alturas ortométricas referidas al geoide; el otro es usar el campo de gravedad normal para producir alturas normales referidas al quasigeoide. ***Para definir un geoide entonces, debe especificarse si se adoptará un geoide clásico o un quasigeoide.*** La diferencia entre ellos es aproximadamente proporcional al cuadrado de la altura topográfica: casi nula al nivel del mar y de unos 10 cm para alturas de 1000 m, llegando a 1 m para zonas montañosas del orden de 3000 m de altitud (Heiskanen & Moritz, 1967; Torge, 1989).
- ***Una parte considerable de las mareas no varía periódicamente, pero forma una marea permanente.*** Esto es debido a que la Luna y el Sol se mueven en órbitas muy cercanas al Ecuador. Por esta razón la marea permanente es considerable a lo largo del ecuador y casi despreciable en las zonas polares.

Existen básicamente tres formas de tratar este problema con relación a sistemas altimétricos y gravimétricos, en función del tipo de tratamiento que se dé a este fenómeno podrá tenerse:

- El geoide medio que incluye el efecto directo de atracción y el efecto indirecto de deformación. Este coincidiría con un nivel del mar “no perturbado”, siendo por esto de especial interés para oceanografía.

- El geoide sin marea, en el cual se eliminaría el efecto total de la marea permanente. Este geoide coincidiría con la demanda teórica de la geodesia de no tener masas fuera de la superficie limitante.
- El geoide cero, en el cual se elimina el efecto directo de la marea pero se conserva la deformación permanente de la Tierra.

Para definir un geoide deberá especificarse entonces cual de estos tres tipos se adoptará. Las diferencias entre ellos son función de la latitud, pudiendo llegar al orden de 40 cm (Ekman, 1989; Rapp, 1983).

- ***El acomodamiento postglacial tiene desde luego un impacto directo en las alturas debido al ascenso de la corteza***, pero además el campo de gravedad, y en consecuencia el geoide, se ve afectado por la inyección de manto en corteza. Para definir un geoide entonces deberá especificarse una época para la cual es válido, si bien el máximo cambio registrado en alturas geoidales apenas alcanza los 10 cm por siglo (Ekman, 1993; Ekman & Mäkinen, 1995).

En conclusión, el geoide como superficie de referencia puede definirse de varias maneras. No es aconsejable elegir un tipo de geoide y usarlo para todos los propósitos. Las distintas definiciones de geoide son adecuadas para diferentes situaciones. Así, es esencial comprender en cada caso con qué concepto de geoide se está trabajando. Esto tiene especial importancia cuando se pretende combinar el geoide con alturas ortométricas, normales, niveladas y elipsóidicas y obtener precisiones centimétricas.

MÉTODOS DE EVALUACIÓN GEOIDAL

Diferentes métodos se han desarrollado a lo largo de la historia para posibilitar el cálculo de modelos de geoide. A continuación trataremos someramente cada uno de ellos, destacando sus ventajas e inconvenientes.

PROCEDIMIENTO ASTROGEODÉSICO

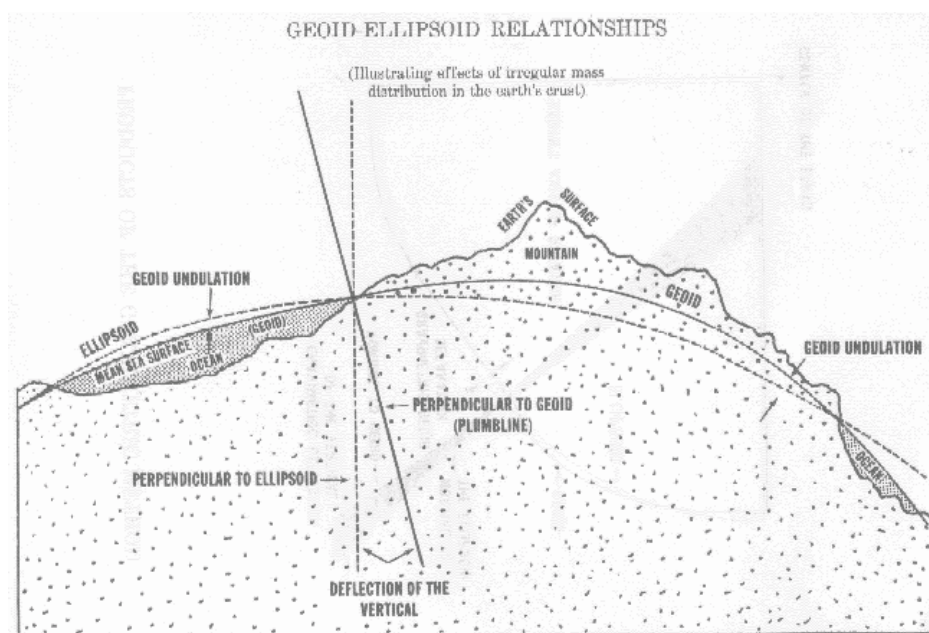


Figura 1: desvío de la vertical

El procedimiento consiste básicamente en medir el ángulo formado entre la vertical (dirección de la línea de la plomada) y la normal a la superficie de referencia en un punto. El ángulo así conformado es el llamado desvío de la vertical (Figura 1).

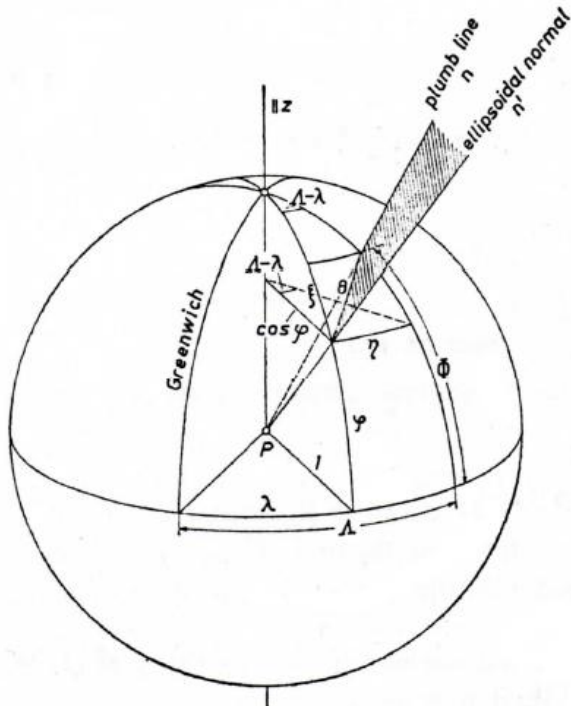


Figura 2

La dirección de la vertical en la superficie terrestre se determina a partir de las coordenadas astronómicas Φ y Λ .

La dirección de la normal en la superficie del elipsoide de referencia se determina a partir de las coordenadas geodésicas φ y λ .

Los desvíos de las verticales pueden así calcularse prácticamente a partir de la correspondiente comparación de las coordenadas geodésicas y astronómicas de un punto, de donde deriva el nombre de este método (astro-geodésico).

Rigurosamente, y siguiendo a Jekeli (1999) deberíamos distinguir tres tipos de desvíos de la vertical, según se considere el ángulo en cuestión

- Sobre la superficie de la tierra (θ^N) de acuerdo con la definición de Molodenski,
- Sobre el elipsoide de referencia (θ) de acuerdo con la definición de Helmert.
- Sobre el geoide (θ_0) de acuerdo con la definición de Pizetti.

Sin embargo nos referiremos aquí genéricamente al desvío de la vertical, y lo describiremos de diferentes maneras:

1. a través de su magnitud θ y su acimut α_0
2. a través de sus componentes meridiana (ξ) y en el primer vertical (η), como generalmente se expresa
3. a través de la componente ε a lo largo del acimut α .

Dichas componentes, en una aproximación lineal, están dadas por:

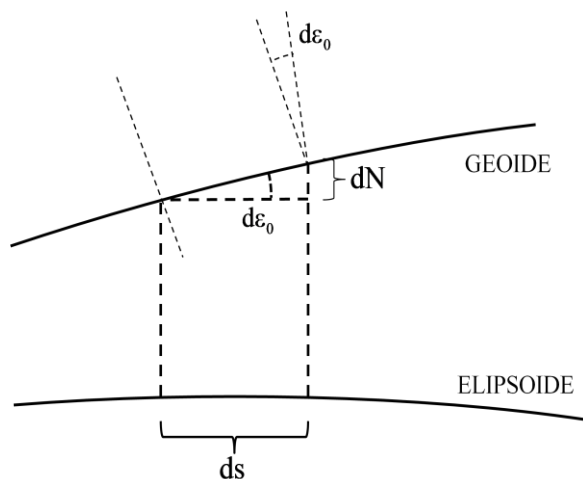
$$\begin{cases} \xi = \Phi - \varphi \\ \eta = \lambda - \Lambda \cos \Phi \end{cases} \quad (1)$$

La componente ε a lo largo del acimut α es:

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (2)$$

O reducida al geoide:

$$\varepsilon_0 = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (3)$$



La ondulación geoidal (N) a lo largo de una distancia s y los desvíos de la vertical (ϵ) se relacionan por la ecuación diferencial:

$$dN = -\epsilon_0 ds \quad (4)$$

Figura 3

Integrando entre P_1 y P_2 se obtendrá la diferencia de ondulación entre ambos puntos:

$$\Delta N_{1,2} = N_2 - N_1 = \int_{P_1}^{P_2} dN = \int_{P_1}^{P_2} -\epsilon_0 ds \quad (5)$$

Si se asume una variación lineal del desvío de la vertical entre P_1 y P_2 el problema puede resolverse por interpolación lineal:

$$\int_{P_1}^{P_2} -\epsilon_0 ds \cong -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \int_{P_1}^{P_2} ds = -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} s \quad (6)$$

El esquema de solución de este procedimiento es sencillo. Sin embargo, en términos más precisos, las relaciones son un poco más complicadas. Se debe considerar por ejemplo el no paralelismo de las superficies equipotenciales que produce un efecto adicional indeseado. Además, para la reducción al geode de los desvíos ϵ medidos sobre la superficie de la Tierra se necesita conocer el comportamiento de la vertical entre dicha superficie y el geode, lo que implica el conocimiento de la densidad a lo largo de ese tramo.

Otra característica de este procedimiento es que solamente determina diferencias de ondulaciones, por lo cual se estarán calculando variaciones locales o regionales de la ondulación geoidal. No obstante, conociendo un punto con su ondulación en el área se pueden calcular fácilmente los valores absolutos para todas las estaciones involucradas. Como gran ventaja del método puede destacarse el hecho que la integración solamente se extiende sobre el área de interés. La gran desventaja deviene de la necesidad de contar con determinaciones astronómicas que requieren mucho tiempo, lo que las torna muy costosas.

Los desvíos absolutos alcanzan valores de 1" a 10" en terreno plano y de 30" a 60" en áreas montañosas.

Considerando los márgenes de exactitud se debe señalar que los desvíos de la vertical normalmente tienen errores de medición en el orden de 0".5 a 1" y se aumenta el error de la variación de ondulación dN linealmente con la separación entre las estaciones de medición. Para obtener alta precisión se debe disminuir esa separación.

En áreas montañosas se necesita una estación cada 3 a 5 Km, en áreas planas se puede separar los puntos de medición entre 10 y 20 Km. La exactitud accesible así es algunos centímetros para áreas extendidas por algunas decenas de kilómetros.

PROCEDIMIENTO DE MODELADO DEL CAMPO GRAVITACIONAL GLOBAL

De la misma manera que la atracción gravitatoria de un cuerpo resulta de sumar todos los aportes de cada dm , el mismo razonamiento es válido para la función potencial:

puede definirse $dV = G \frac{dm}{q}$ como el **Potencial gravitacional inducido en el punto P por**

la masa elemental dm , de modo que el potencial total será:

$$V = G \int_{TIERRA} \frac{dm}{q} = G \int_{TIERRA} \frac{\rho dV}{q}$$

Siendo

G : constante de gravitación universal.

q : distancia entre las masas atrayente y atraída

dm : diferencial de masa.

ρ : densidad.

dv : diferencial de volumen.

Como la función de variación de la densidad terrestre no puede establecerse con precisión adecuada, el potencial gravitacional V no puede calcularse como la integral triple definida a partir de la ley de gravitación de Newton. Sin embargo, es posible encontrar un desarrollo en serie del potencial V como solución de la ecuación de Laplace (Kellogg, 1929; Sigl, 1985; Blakeley, 1996). Esta solución corresponde a una descomposición espectral del campo gravitacional.

Esta expresión puede desarrollarse en una serie infinita de funciones armónicas esféricas conocida como **Modelo de Geopotencial**.

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda P_{nm\theta} \right] \quad (7)$$

Las $P_{nm\theta}$ son las **Funciones Esféricas Armónicas Asociadas de Legendre de grado n y orden m** , θ y λ son la colatitud y la longitud del punto P .

Si truncáramos la serie reteniendo sólo el término de orden cero obtendríamos el potencial de una tierra esférica de radio r y homogénea (densidad constante o con variación lineal a lo largo de su radio):

$$V_0 = \frac{GM}{r}$$

Los términos de orden 1 y 2 producen desplazamientos que llevan a una forma elipsoidal, los de orden tres señalan la llamada “forma de pera” de la Tierra y así sucesivamente, a medida que se agregan más términos al desarrollo se obtienen más puntos de inflexión a partir de la forma esférica original (Figura 4)

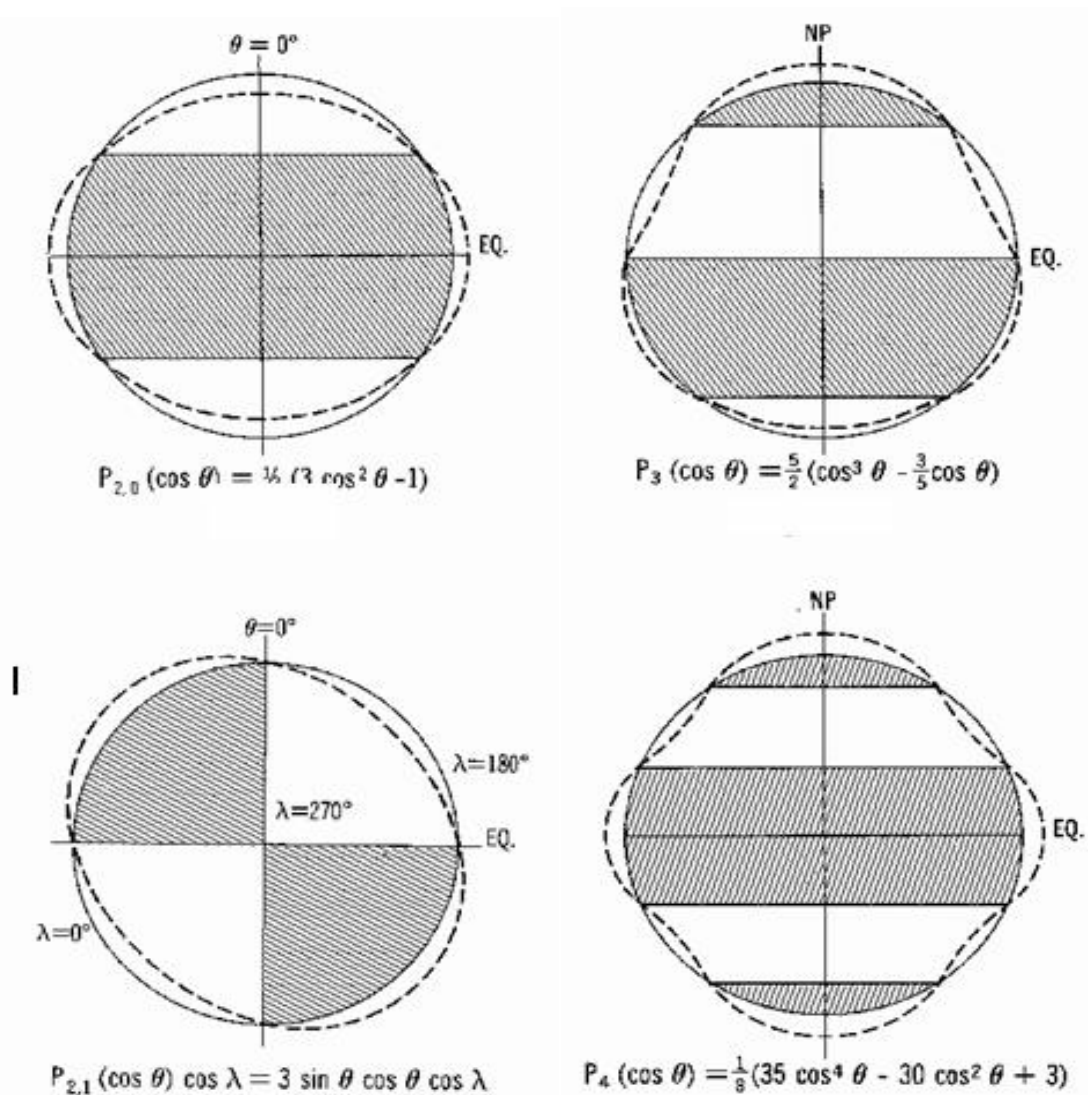


Figura 4: Interpretación física de los coeficientes armónicos del desarrollo en serie del potencial

MODELOS SÓLO SATELITALES

En un campo gravitacional ideal, no perturbado, la órbita satelital sería una elipse *kepleriana*. En el campo gravitacional real la órbita del satélite es perturbada y esa perturbación que sufre el satélite se utiliza para derivar información del campo que produjo la perturbación.

Es necesario contar con gran cantidad de satélites en diferentes órbitas, a diferentes alturas y con diferentes inclinaciones y monitorear sus órbitas durante mucho tiempo. De este modo pueden calcularse los llamados “elementos orbitales”: Semieje mayor, excentricidad, inclinación, ascensión recta

del nodo ascendente, ángulo del perigeo desde el nodo ascendente y anomalía media. Un procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados permitirá a partir de las observaciones el cálculo de los coeficientes del modelo.

Entre otros factores, la atenuación del campo gravitacional con la altura limita la resolución de los modelos sólo satelitales. Con los satélites disponibles hasta el momento ha sido posible obtener modelos de este tipo a través de desarrollos en serie del potencial hasta grado 70, por lo que se suele hablar de modelos de orden bajo.

La precisión relativa de los coeficientes de orden bajo derivados de este procedimiento se incrementa con el grado del coeficiente.

MODELOS COMBINADOS

En estos modelos, llamados de alto orden, se combina un modelo sólo satelital de bajo orden con datos de anomalías gravimétricas tomados en superficie y alturas geoidales.

Los modelos de geopotencial combinados se calculan luego por métodos de ajuste por mínimos cuadrados o por cuadratura.

Un ajuste por mínimos cuadrados podría utilizar, en principio, todos los datos disponibles para determinar los coeficientes del modelo de geopotencial (130.321 coeficientes para un modelo de grado y orden 360x360), como así también la matriz de covarianza. Sin embargo, las limitaciones de cómputo hacen que no se llegue a un ajuste riguroso de estas cantidades y, consecuentemente, no han sido desarrolladas aún soluciones óptimas que presupongan, por ejemplo, una cobertura global homogénea.

DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS MODELOS DE GEOPOTENCIAL

Antes de la era espacial no había sido posible obtener modelos de geopotencial. La única alternativa era el uso de anomalías de gravedad obtenidas sobre la superficie terrestre, las cuales eran insuficientes y no presentaban una distribución apropiada.

Los satélites artificiales pueden ser vistos como sensores del campo gravitacional terrestre. El análisis de las perturbaciones de sus órbitas revolucionó el conocimiento del tema. La primera contribución fue el análisis de las órbitas del *Sputnik 1*, *Explorer 1* y *Vanguard 1*, y la publicación del primer valor para el coeficiente de achatamiento dinámico C_{20} (Buchard, 1958). En esa época se admitió que C_{40} y los demás zonales de orden superior eran despreciables. Otros investigadores sostuvieron que esa hipótesis no era realista.

O'Keefe and *Batchelor* (1957) reconocieron que el achatamiento ecuatorial, definido por C_{22} y S_{22} podría ser estimado a través del análisis de los satélites. En 1961, usando la red *Mnitrak*, y en 1962, con el *sistema Doppler*, fueron redeterminados esos coeficientes y también se hicieron cálculos sobre los coeficientes C_{41} , C_{42} y C_{62} .

Un gran avance ocurre en 1966 con la publicación por el *Smithsonian Astrophysical Observatory* (SAO) de un modelo de geopotencial completo hasta grado y orden 8, con algunos coeficientes de orden superior (*Lundquist and Veis, 1966*) y tomando como fijos los coeficientes zonales publicados anteriormente por *Kozai* (1964).

El análisis de las órbitas de los satélites fue hecha a partir de observaciones ópticas llevadas a cabo por las cámaras balísticas Baker-Nunn. Pocos años más tarde la combinación de nuevas observaciones ópticas con las primeras y sofisticadas *medidas Laser* resultó en un nuevo modelo completo hasta grado y orden

16. En 1973, 1974 y 1977 *SAO* publicó otros modelos que recibieron la denominación *SE (Standard Earth)* seguida del año de publicación.

Paralelamente surgieron las soluciones independientes presentadas por el *Goddard Space Flight Center (GSFC)* (Smith et al., 1976) conocidas por la sigla *GEM (Goddard Earth Model)*. Los modelos *GEM*, del mismo modo que los modelos del *SAO*, utilizaron solamente observaciones de satélites artificiales.

El aumento del número de satélites junto con el aumento y la mejoría de las observaciones fueron contribuyendo sistemáticamente a la determinación de los coeficientes de orden más bajo ($m \leq 36$).

La altimetría por radar, iniciada con el satélite *GEOS-3*, exigía modelos de geopotencial más confiables para posicionar mejor el satélite. En esa fase surgieron dos modelos importantes, el *GEM9* y el *GEM10* (Lerch et al., 1977). *GEM9* fue el último modelo calculado hasta entonces solamente a partir de observaciones sobre satélites artificiales: englobó un total de 840.000 observaciones ópticas, laser y electrónicas, lo que permitió el cálculo completo de los coeficientes hasta grado y orden 20, con algunos coeficientes de orden superior. La innovación del modelo *GEM10* fue la combinación de observaciones de satélites con anomalías medias de gravedad en cuadrículas de 5°, lográndose un modelo completo hasta grado y orden 22 con algunos coeficientes de orden superior.

A partir de aquí, el esfuerzo del *GSFC* se concentró en tres nuevos modelos: *GEM10A*, *GEM10B* y *GEM10C*, completos hasta grado y orden 30, 36 y 180 respectivamente (Lerch et al., 1981). La característica más importante de estos tres modelos fue el uso creciente de mediciones de altimetría por radar del satélite *GEOS-3*, con espaciamiento cada vez menor. En términos de anomalías medias de gravedad, los dos primeros usaron los mismos 1654 valores que contribuyeron al cálculo del *GEM10*, mientras que el *GEM10C* incorporó 38.400 valores medios de anomalías de gravedad.

Otra importante iniciativa fue la de Francia y Alemania, con los modelos *GRIM*, desarrollados simultáneamente por el *Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale* de Toulouse y por el *Sonderforschungsbereich* de Munich. Ese esfuerzo comenzó con la publicación del primer modelo *GRIM1* en 1976 (Balmino et al., 1976). Este modelo, completo hasta grado y orden 22, se obtuvo a partir de observaciones ópticas y electrónicas de satélites artificiales. El modelo *GRIM2* combinó observaciones de satélites con anomalías medias de 1°x1°, obteniendo todos los coeficientes hasta grado y orden 30 (Balmino et al., 1978). El uso de datos de altimetría por radar en los océanos permitió el cálculo del modelo *GRIM3*, completo hasta grado y orden 36 (Reigber et al., 1983).

Se incluyeron posteriormente nuevas observaciones laser del *LAGEOS* y nuevos datos de anomalías de gravedad en los océanos derivadas de altimetría por radar, resultando nuevas versiones tales como *GRIM3-L1* y *GRIM3-C3*.

La Universidad de Ohio brindó también gran colaboración en el cálculo de modelos de geopotencial. La característica principal de los esfuerzos relacionados con este centro de investigación se debe al almacenado creciente de datos gravimétricos y, en consecuencia, a la estimación de anomalías medias de gravedad en cuadrículas de 1°x1° y 30'x30'. Esto originó la publicación de modelos de geopotencial completos hasta grado 180 (*OSU81*) o 360 (*OSU 86*, *OSU89* y *OSU91*). La innovación de estos modelos fue la inclusión progresiva de nuevos datos gravimétricos, tanto en los océanos como en los continentes para el cálculo de los coeficientes de grado más elevado, aunque los coeficientes de bajo grado fueron mantenidos fijos en el ajuste. Debido a la distribución no homogénea de datos que intervinieron en el cálculo, estos modelos son más o menos representativos en un área, dependiendo de la existencia o no de levantamientos gravimétricos en ella.

Luego de la aparición de los primeros modelos de grado y orden elevados, la atención nuevamente volvió sobre los coeficientes más bajo. En efecto, se concluyó que la precisión de los coeficientes de los modelos ya determinados podría ser mejorada. En el *GSFC* surgieron los modelos *GEM-L2*, *GEM-T1*, *GEM-T2* y *GEM-T3*, cuya principal característica fue la incorporación de observaciones cada vez más numerosas y más precisas de los satélites artificiales. En este contexto poseen particular importancia dos modelos del *GSFC* conocidos por la sigla *JGM (Joint Gravity Model)*.

La misión *TOPEX/POSEIDON (TP)* presuponía que para alcanzar sus objetivos el error radial de la órbita del satélite no debería superar los 10 cm. Esta condición no había sido alcanzada por los modelos anteriores y en este sentido se dirigieron entonces los esfuerzos. La estrategia fundamental del cálculo fue combinar de forma conveniente las observaciones sobre los satélites, los datos de altimetría por radar y las anomalías de gravedad en la superficie. Los modelos *JGM* son completos hasta grado y orden 70, lo que significa una resolución espacial de 300 Km. La malla de anomalías de gravedad fue completada en las cuadrículas vacías de la región continental a través de técnicas de predicción topo-isostáticas. Teniendo en cuenta que el modelo usó observaciones de los últimos 30 años, fue necesario considerar variaciones temporales experimentadas por la aceleración de la gravedad, mareas oceánicas, deformaciones en el movimiento de rotación, efectos relativísticos, etc. (Nerem et al., 1994).

Después de esta fase de atención a los coeficientes de grado y orden más bajos, dos hechos despertaron nuevamente el interés por el cálculo de modelos de grado y orden más elevados: la altimetría radar obtenida con la misión *TOPEX/POSEIDON* y el acceso a los datos de los países del bloque comunista. Estos hechos llevaron al *National Imagery Mapping Agency (NIMA)* y al *GSFC* de *NASA* a acordar un cálculo conjunto de un modelo de geopotencial, conocido con la sigla *EGM (Earth Geopotential Model)* (Lemoine et al., 1998).

De la evaluación realizada por Blitzkow (1998) para Sudamérica se concluye que el modelo *EGM-96* es mejor que los anteriores en términos de la comparación con anomalías gravimétricas.

PROCEDIMIENTO GEOMÉTRICO

Recordemos las definiciones de

- **Altura ortométrica H** de un punto la superficie topográfica, definida como la distancia medida desde dicho punto hasta la superficie del geode a lo largo de la dirección de la vertical.
- **Altura elipsoidal h** , definida como la distancia medida desde un punto en la superficie topográfica hasta el elipsoide de

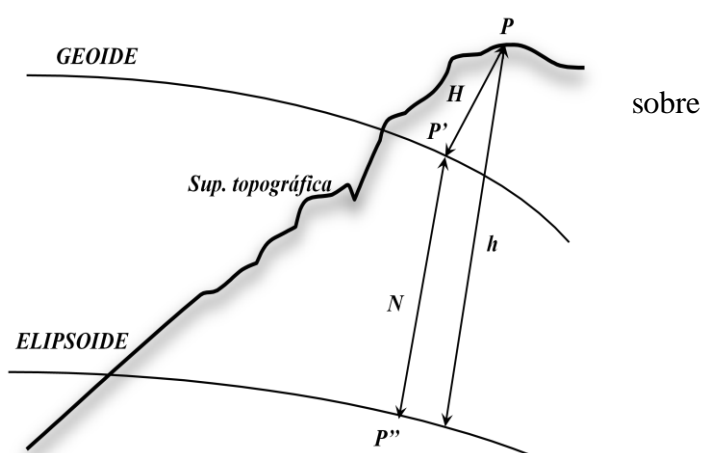


Figura 5: Altitudes H y h y ondulación N

referencia a lo largo de la dirección normal al elipsoide.

La distancia N entre P' y P'' medida sobre la normal es lo que se conoce como **ondulación del Geoide** o **altura geoidal**.

A partir de la Figura 5 se concluye que la ondulación del geoide puede obtenerse en forma muy aproximada mediante la diferencia entre las alturas elipsoidal y ortométrica de un mismo punto, es decir:

$$N \cong h_p - H_p \quad (8)$$

La **altura elipsoidal** (h) se obtiene con GPS y la **altura ortométrica** (H) por nivelación geodésica y observaciones de gravedad. Cualquier altura H que sea una aproximación de esa altura ortométrica también puede ser utilizada, pero debe tenerse presente que como la ondulación se calculará directamente a partir de una diferencia de alturas, una determinación imprecisa de H (nivelación barométrica o trigonométrica) redundará en imprecisiones en la ondulación calculada.

Las exactitudes están en el orden de unos pocos centímetros niveladas con precisión tanto para la obtención de h como de H .

ALTIMETRÍA SATELITAL

Se fundamenta en una técnica basada en el conocimiento de una órbita satelital con mucha precisión. En el satélite existe un radar altímetro que envía una señal en la dirección vertical a la superficie terrestre. Esa señal es reflejada por la superficie del mar y de regreso es recibida en el satélite. La medición de tiempo de propagación proporciona la altura del satélite a la superficie instantánea del mar.

PROCEDIMIENTO GRAVIMÉTRICO

Si N que hemos definido como ondulación del geoide, puede obtenerse relacionando el elipsoide de referencia y el geoide. Para relacionar ambas figuras de la Tierra, es necesario notar que podemos escribir el potencial W en la forma:

$$W_{x,y,z} = U_{x,y,z} + T_{x,y,z} \quad (9)$$

$$U_{x,y,z} = V_{x,y,z} + \Phi_{x,y,z} \quad (10)$$

donde T se denomina **potencial perturbador** o potencial anómalo y U es la **función potencial normal**

asociada a un elipsoide de revolución cuya ecuación es $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

Entonces, la pequeña separación que existe entre las superficies $W_{x,y,z} = W_0$ y $U_{x,y,z} = U_0$ (con $U_0 = W_0$), estará relacionada directamente con el término $T(x, y, z)$ mediante **la fórmula de Bruns** (Heiskanen y Moritz, 1985):

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad \text{donde } \gamma = \nabla U = \text{grad}U \text{ es la gravedad normal} \quad (11)$$

Este vector tendrá la dirección de la normal al elipsoide de referencia, siendo su diferencia con el vector gravedad denominada **anomalía de la gravedad** Δ_g

Esta última cantidad definida nos permite obtener el potencial perturbador y como consecuencia la ondulación del geode. Si llevamos a cabo un desarrollo en armónicos en esféricos de este potencial perturbador T (Heiskanen y Moritz, 1985), tendremos como resultado final la **Fórmula integral de Stokes**:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta_g S \psi \, d\sigma, \text{ donde}$$

$$S \psi = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + 1 - 5\cos \psi - 3\cos \psi \ln\left(\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)$$

- R es el radio medio terrestre (6371 km)
- G es el valor medio de la gravedad sobre la Tierra (979.8 gales)
- σ es el área de la esfera unidad, es decir que las integrales anteriores están extendidas sobre toda la esfera unidad, tal como se indica en la figura 5(a); en esta figura y en la figura 5(b), podemos ver que el papel que juega el ángulo ψ .

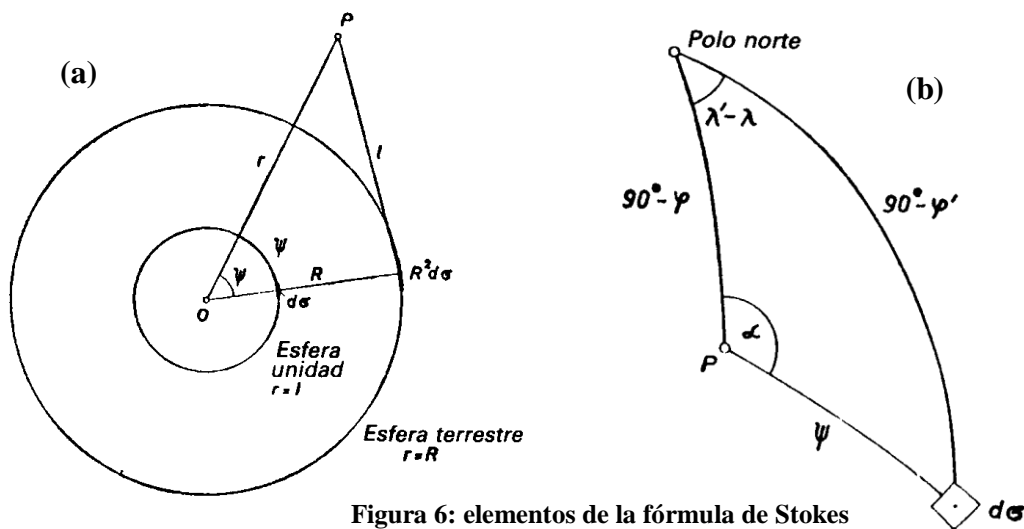


Figura 6: elementos de la fórmula de Stokes

La fórmula de Stokes publicada por él en 1849, es la expresión matemática más importante de la Geodesia Física, debido a que hace posible conocer la figura de la Tierra (es decir, la ondulación del geode) a partir de datos gravimétricos. Debemos notar también que la ecuación integral de Stokes es el vínculo fundamental entre el campo de gravedad terrestre y la figura de la Tierra, confirmando la afirmación realizada al principio de este capítulo, cuando se decía que para avanzar hacia una figura de la Tierra más precisa que un elipsoide de revolución, era necesario considerar el campo de gravedad que crea la masa de la Tierra.

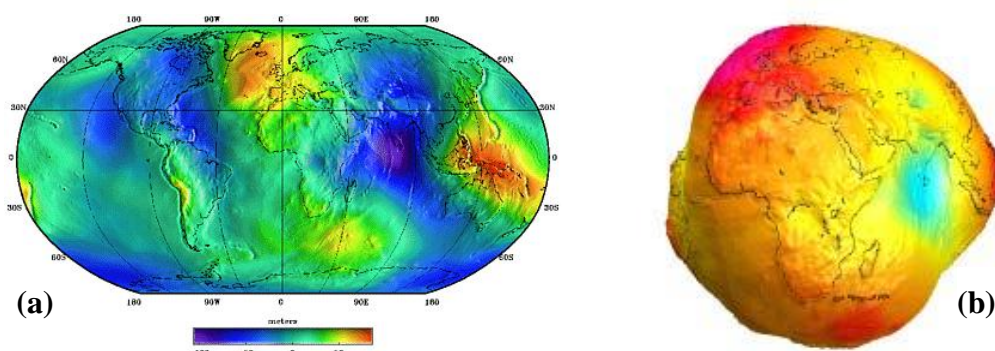


Figura7: (a) Mapa de la ondulación del geoides sobre un elipsoide de revolución. (b) Imagen del geoides en 3D mostrando los detalles de la forma del geoides, a una escala en la que se han exagerado los valores de la ondulación para ver mejor dichos detalles.

Vemo
s
ahora

totalmente claro el papel tan importante que juega el estudio y determinación del campo de gravedad terrestre, en la obtención precisa de la figura de la Tierra, ya que, si disponemos una colección de datos suficiente (consistente en anomalías de la gravedad determinadas por toda la Tierra, entre otros datos) podemos obtener la ondulación del geoides, tal como se indica en las figuras 6(a) y 6(b).

No obstante, hay que señalar algunas limitaciones en la aplicación de la *fórmula de Stokes*, debidas a las hipótesis realizadas para la obtención de la misma. Concretamente, debemos notar que:

1. La fórmula presentada para la ondulación del geoides ha sido obtenida considerando que el elipsoide de referencia (superficie $U_{x,y,z} = U_0$), tiene el mismo potencial que el geoides ($U_0 = W_0$). Además, esta superficie debe encerrar en su interior una masa que sea numéricamente igual a la de toda la Tierra.
2. El elipsoide de referencia debe tener su centro en el centro de la Tierra.
3. El potencial anómalo (o potencial perturbador) debe ser armónico fuera del geoides. Es decir que se está suponiendo que $T(x, y, z)$ puede ser desarrollado en armónicos esféricos. Esto significa que el efecto de las masas por encima del geoides, debe ser eliminado aplicando adecuadas reducciones a los valores de la gravedad determinados. De lo contrario, no será posible aplicar la expresión integral de Stokes.

En consecuencia, la determinación práctica del geoides, tal como se muestra en la figura 5(a), requerirá modificar la fórmula de Stokes para poder utilizar un elipsoide de referencia arbitrario. De tal forma que podamos emplear en el cálculo del geoides, una superficie de referencia $U_{x,y,z} = U_0$ para la que no se requiera que $U_0 = W_0$, condición que en la práctica puede ser muy difícil de conseguir, limitando mucho los posibles elipsoides a emplear. Por otra parte, el cálculo por este método gravimétrico de la ondulación del geoides, nos obligará a eliminar el efecto de las masas por encima del geoides, adoptando para ello diversas hipótesis que podemos encontrar desarrolladas con detalle en la bibliografía más básica de la Geodesia Física (Heiskanen y Moritz, 1985; Vaníček y Krakiwsky, 1986).

CÁLCULO GRAVIMÉTRICO DEL GEOIDE

Sabemos que GPS permiten calcular las alturas elipsoidales, pero es necesario obtener las alturas respecto al nivel del mar (alturas ortométricas), para muchos fines prácticos. Entonces, las alturas elipsoidales se deben convertir en alturas ortométricas restando la altura del geoide. Para ello, es necesario computar las alturas del geoide, al menos con la misma precisión que la altura elipsoidal, para la latitud y longitud del punto considerado. En este aspecto se centra una de las principales aplicaciones de la geodesia física, puesto que permite obtener la altura del geoide para cualquier punto de la Tierra. Estas alturas del geoide se refieren, generalmente, al Sistema Geodésico de Referencia de 1980 (GRS80).

Los modelos geopotenciales pueden servir para calcular la ondulación del geoide. No obstante, las alturas del geoide provenientes de un modelo geopotencial no son, en general, suficientemente precisas. Por ello, es necesario determinar una corrección a las mismas. Esta corrección se determina a partir de las anomalías de la gravedad medidas sobre el terreno, para computar así un modelo de geoide más preciso. Debido a que las anomalías observadas sobre el terreno, están dadas en un área limitada y no pueden por tanto utilizarse para resolver la longitud de onda larga del campo de gravedad terrestre, es necesario considerar un modelo geopotencial para la computación de tales longitudes de onda. Como veremos a continuación, la contribución de esta longitud de onda larga corresponde a una aproximación suave del geoide, para la región bajo estudio.

El cálculo gravimétrico de una altura del geoide muy precisa, para una región dada, tendrá una gran utilidad práctica directa e inmediata para toda la comunidad de usuarios de GPS (Kaula, 1987). Estos resultados permitirán incorporar modelos más realísticos a los algoritmos de cálculo de las alturas ortométricas, reportando una mejora en la precisión de las alturas mencionadas, lo que conllevará evidentes beneficios para la geo-referenciación, la fotogrametría o el control geométrico de obras. En suma, serán beneficiarios de tales resultados aquellos científicos y técnicos, interesados en una localización más precisa sobre el terreno. Puesto que, usando medidas de posición con el sistema GPS obtendrán a la vez una precisión suficiente en planimetría, junto con una altura ortométrica precisa, hallada a partir de un modelo de geoide (cuya ondulación sea precisa) y la altura elipsoidal dada por GPS, pudiendo realizar medidas precisas de alturas ortométricas sin nivelación (Schwarz *et al.*, 1987).

En relación con lo dicho en el párrafo anterior, algunas de las aplicaciones concretas en las que se puede usar directamente un modelo de geoide local son:

Fotogrametría. Tener un modelo de geoide, supone poder tomar puntos de apoyo sin necesidad de apoyarse en las redes geodésicas, que es lo que se hace actualmente para calibrar la altura elipsoidal (la obtenida con GPS), a altura ortométrica en la zona de trabajo (la que se necesita para la orientación absoluta del modelo estereoscópico). Para ello, suponemos que elipsoide y geoide son paralelos en esa zona, cosa que no es rigurosamente cierta. La limitación del trabajo de apoyo en campo en Fotogrametría, ya sólo estaría limitada por la capacidad de los equipos empleados y se elevaría el rendimiento de éstos, puesto que no habría que inmovilizar equipos GPS para las calibraciones. Además de lo mencionado anteriormente, si se dispusiese de un marco de referencia común entre los puntos sobre el terreno y el centro de proyección de las cámaras aéreas, se simplificaría todavía más el trabajo de apoyo de campo.

Topografía. Disponer de un modelo de geoide supondría poder realizar topografía de obras con

GPS, cosa que hasta ahora está limitada a control planimétrico. Con GPS el control geométrico se abarata pues el número de operarios mínimos necesarios se reduce a la mitad.

Caracterización agronómica y medioambiental. La posibilidad de determinar la altitud sobre el nivel del mar de forma rápida y eficaz, permitiría añadir la altitud como variable de estudio en los SIG (Sistemas de Información Geográfica), para su inclusión en los posteriores análisis con las demás variables geográficas.

Control hidrográfico, aforo de cuencas y temas hidráulicos en general. Estos temas se verían especialmente beneficiados, ya que, también se abarataría el coste de estas actuaciones al poder ser realizadas con GPS, que de no disponer de modelo de geoide no se podrían realizar. El agua circula en el sentido de los potenciales gravitatorios decrecientes y el sentido de los potenciales gravitatorios (altimetría obtenida por nivelación clásica) puede deducirse con el modelo de geoide y la altura elipsoidal.

Vista la importancia que tiene usar un modelo de geoide preciso, vamos a ver aquí cuál es el procedimiento operacional para obtenerlo. Para comenzar, hay que decir que las técnicas que vamos a describir a continuación, se han mostrado herramientas eficaces a la hora de indagar la ondulación del geoide, en distintas regiones de la Tierra (Kearsley, 1988; Forsberg and Kearsley, 1989; Torge *et al.*, 1989; Yun, 1994). Estas técnicas pretenden evitar el problema que conlleva la obtención de anomalías de la gravedad en un área limitada, puesto que con estos datos no podemos resolver las largas longitudes de onda del campo gravitatorio terrestre. Por ello, necesitamos considerar un modelo geopotencial con el que podemos obtener estas longitudes de onda larga. Así, en un paso previo de computación, obtendremos las anomalías aire-libre referidas al modelo geopotencial, computando la diferencia con las anomalías predichas por este modelo, estas diferencias serán usadas en un procedimiento de integración con la FFT (Schwarz *et al.*, 1990), para obtener finalmente la ondulación del geoide, la cual en un proceso de computación posterior será añadida a la ondulación del geoide predicha por el modelo geopotencial considerado. En suma, el proceso a seguir consta de las etapas que a continuación serán descritas (Corchete *et al.*, 2005).

TÉCNICA REMOVE - RESTITUIR

El problema fundamental a resolver es que las anomalías de gravedad no pueden conocerse en forma continua sobre toda la superficie limitante. Los modelos de geopotencial ofrecen una interesante posibilidad para resolver este problema, ya que proporcionan el conocimiento general del campo potencial terrestre sobre toda la superficie.

Para poder hacer uso de ellos es necesario introducir alguna modificación que permita cambiar los límites de la integral de Stokes y transformarla en una suma.

Existen varias propuestas al respecto (Blitzkow, 1996; Torge, 2001), pero no nos extenderemos en detalles sobre ellas y nos referiremos de aquí en más a la aplicación de la integral de Stokes modificada, independientemente del tipo de modificación introducido.

En la práctica la integral de Stokes se aplicará en una región limitada. Siendo así, las contribuciones de larga longitud de onda del campo de gravedad no estarían presentes en los resultados y deberán ser provistas por otra vía (un modelo de geopotencial). Además, la integral será discretizada y calculada como una suma usando datos discretos. Debido a la densidad de datos gravimétricos, que en promedio no es mejor que $5' \times 5'$, las cortas longitudes de onda tampoco estarán presentes. Estas se calcularán usando

alturas topográficas que usualmente están dadas en forma de una grilla de 1 km x 1 km (Modelo Digital de Terreno).

La aplicación de esta solución combinada se conoce con el nombre de técnica de remover – restituir (Remove-Restore technique) (Forsberg and Tscherning, 1981, Denker et al., 1986) e incluye los siguientes pasos:

1. Remover de las anomalías gravimétricas (Δ_g) la contribución de larga longitud de onda provista por el modelo de geopotencial ($\Delta_g GM$).
2. Remover de las anomalías gravimétricas (Δ_g) la contribución de corta longitud de onda provista por un Modelo Digital de Terreno ($\Delta_g H$).
3. Calcular la anomalía gravimétrica residual ($\Delta_{g,res}$) como:

$$\Delta_{g,res} = \Delta_g AL - \Delta_g GM - \Delta_g H \quad (12)$$

4. Aplicar la integral modificada de Stokes a las anomalías gravimétricas residuales calculadas obteniendo el geoide residual $N \Delta_g$
5. Restaurar en el geoide residual ($N \Delta_g$) calculado los efectos de larga longitud de onda provistos por el modelo de geopotencial ($N GM$) y de corta longitud de onda provistos por el modelo Digital de Terreno ($N H$) obteniendo finalmente la ondulación N como

$$N = N GM + N \Delta_g + N H \quad (13)$$

En la Figura 8 se esquematizan las contribuciones de distintas frecuencias.

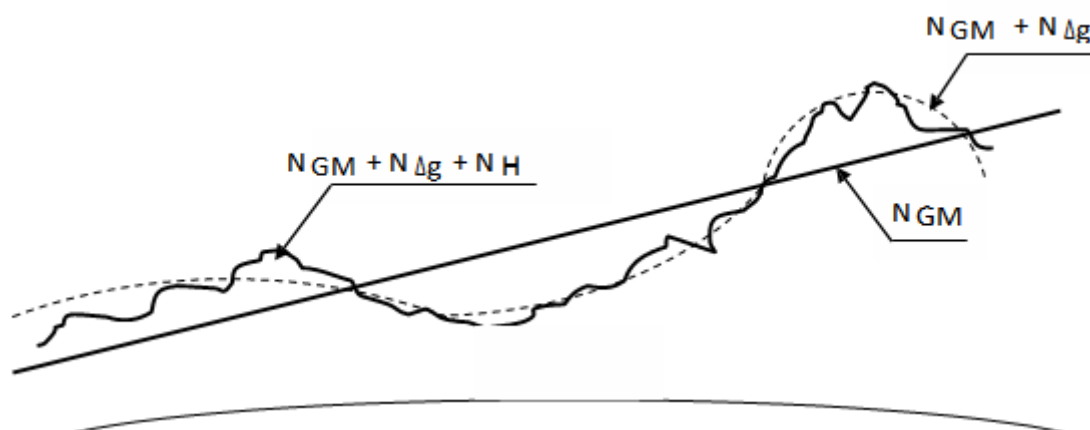


Figura 8: Contribuciones de distintas longitudes de onda en un perfil de geoide.

Para el cálculo de las diferentes contribuciones pueden usarse distintas estrategias descritas en Forsberg and Tscherning (1981), Forsberg and Tscherning (1997), Torge (2001) entre otros.

INTERPOLACIÓN DE LOS DATOS DE GRAVEDAD.

En primer lugar, hay que saber que si queremos aplicar técnicas basadas en la *Transformada de Fourier Rápida (FFT)*, es necesario pasar de la distribución irregular de puntos, dada por la localización geográfica de nuestras medidas de anomalías aire-libre de la gravedad, a una distribución regular de puntos en forma de una rejilla de puntos equidistantes. Como ejemplo, podemos ver en la figura 9(a) los datos de gravedad disponibles para calcular un modelo de geoide para el área ibérica. A la vista de esta figura notamos que estos puntos no están distribuidos de forma regular, hay zonas con muchos puntos y otras áreas que tienen muy pocos. Con esta distribución de valores no podemos aplicar las técnicas basadas en la FFT, pues estas técnicas requieren una distribución regular de puntos en forma de una rejilla de puntos equidistantes, como muestra la figura 9(b).

Por otra parte, antes del proceso de interpolación es necesario *reducir* los valores de estas anomalías de la gravedad, con el objeto de trabajar con una colección de puntos cuyos valores sean lo más parecidos entre ellos que sea posible, para facilitar el trabajo de la interpolación y obtener entonces tras este proceso la mejor rejilla de valores posible. Para ello, antes de la interpolación es muy conveniente eliminar los efectos de *corta longitud de onda* debidos a la topografía y la batimetría. Esta corrección se llama corrección RTM (Forsberg and Tscherning, 1997) y nos permite obtener un campo de anomalías aire-libre suavizado, muy adecuado para la interpolación a una rejilla regular. Esta corrección suele ser aplicada junto con una corrección de *onda larga*, obtenida restando las anomalías de la gravedad predichas por un modelo geopotencial, a los valores de las anomalías aire-libre observadas. En suma, la corrección total que debemos aplicar a los valores de anomalías aire-libre mostrados en la figura 9(a) está dada por:

$$\Delta g_{\text{red}}^{\text{pts}} = \Delta g_{\text{free}}^{\text{pts}} - 2\pi k \rho (h - h_{\text{ref}})^{\text{pts}} + c^{\text{pts}} - \Delta g_{\text{GM}}^{\text{pts}} \quad (14)$$

Donde

- el superíndice pts denota cada punto distribuido sobre el área de estudio de forma aleatoria,
- $\Delta g_{\text{free}}^{\text{pts}}$ es la anomalía aire-libre determinada en ese punto (figura 9(a)),
- k es la constante de gravitación de Newton,
- ρ es la densidad de la topografía (2.67 g/cm^3) para la corrección RTM en tierra o la densidad de la topografía menos la densidad del agua marina.
($2.67 - 1.03 = 1.64 \text{ g/cm}^3$ para la corrección RTM marina).
- h es la elevación de la superficie de referencia.
- c es la corrección del terreno computada para puntos terrestres y marinos.
- Δg_{GM} es la anomalía de la gravedad computada desde un modelo geopotencial (esta computación será luego).

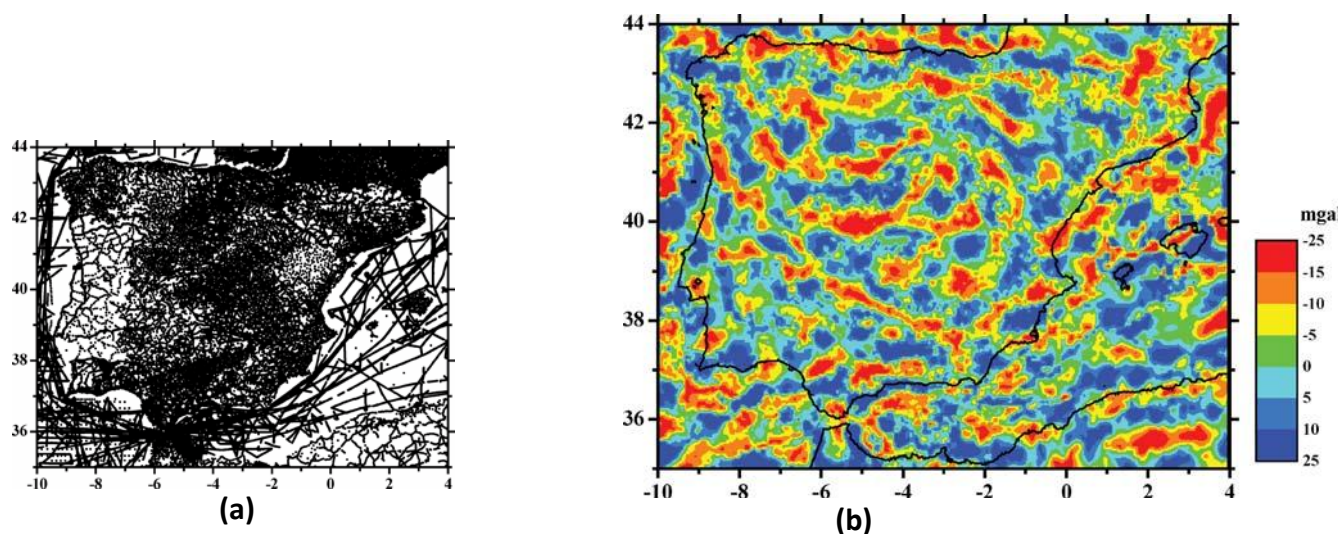


Figura 9: (a) Distribución geográfica de los valores de anomalías aire-libre de la gravedad, medidos para el área ibérica. (b) Mapa de las anomalías de la gravedad interpoladas tras ser reducidas mediante la fórmula (14).

En la fórmula (14), la superficie de referencia (cuya elevación h_{ref} es necesario calcular) se obtiene mediante la aplicación de un filtro pasa baja en 2D, con una longitud de onda de corte de 60 minutos de arco. Este filtro se aplica al campo de elevaciones proporcionado por el modelo digital del terreno completado con la batimetría del área de estudio (Corchete et al., 2005). En la figura 10(a) podemos ver dicho campo de elevaciones y en la figura 10(b) la superficie de referencia obtenida con el filtrado 2D. Respecto a la corrección del terreno c , es necesario calcularla en ambos dominios terrestre y marítimo, porque tenemos datos de gravedad tanto terrestres como marinos. Esta corrección se calcula por integración en cada punto representado en la figura 9(a), por medio del procedimiento clásico de integración descrito por Torge (1989). En esta integración se ha considerado la densidad de las masas topográficas 2.67 g/cm^3 y la densidad del agua marina 1.03 g/cm^3 , extendiéndose la computación hasta una distancia de 0.75 grados desde el punto considerado.

Cuando hemos obtenido las anomalías suavizadas mediante la aplicación de (14), podemos ya interpolarlas para obtener la distribución regular de anomalías mostrada en la figura 9(b). Esta interpolación puede realizarse con cualquier software comercial diseñado a tal efecto, pues la colección de valores a interpolar está tan suavizada que cualquier software de calidad podrá fácilmente realizar dicha interpolación.

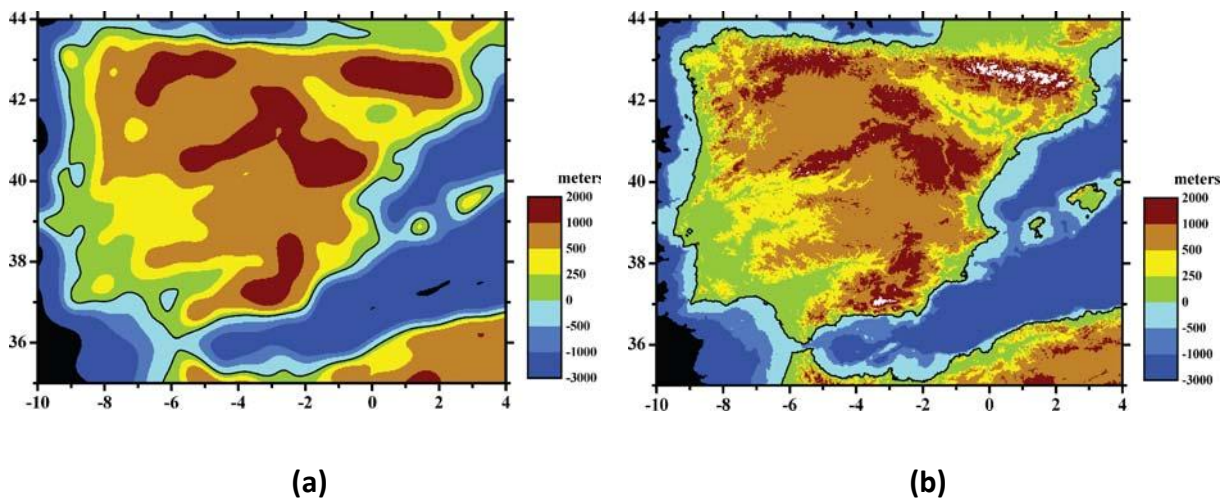


Figura 10: (a) Modelo de elevaciones del terreno proporcionado por el modelo digital del terreno SRTM, completado con la batimetría dada por ETOPO2. (b) Superficie de referencia obtenida mediante el filtrado 2D del campo de elevaciones.

Finalmente, debemos restaurar en estas anomalías interpoladas la información que hemos quitado antes para suavizarlas, es decir, debemos incorporar el efecto RTM que hemos quitado, pues de lo contrario nuestras anomalías habrían perdido gran parte de su información original. Para llevar a cabo esta restauración empleamos la fórmula:

$$\Delta g_{\text{free}}^{\text{grid}} = \Delta g_{\text{red}}^{\text{grid}} + 2\pi k\rho h - h_{\text{ref}}^{\text{grid}} - c^{\text{grid}} \quad (15)$$

Donde

- El superíndice grid denota cada punto de la grilla regular considerada
- $\Delta g_{\text{free}}^{\text{pts}}$ es la anomalía aire-libre de la gravedad representada en la figura 11.
- $\Delta g_{\text{red}}^{\text{grid}}$ es la anomalía de gravedad reducida por (14) e interpolada en una grilla regular (figura 9 (b)).

Hay que notar que $2\pi k\rho h - h_{\text{ref}}$ y c se calculan igual que antes, pero ahora sobre la grilla regular de puntos considerados.

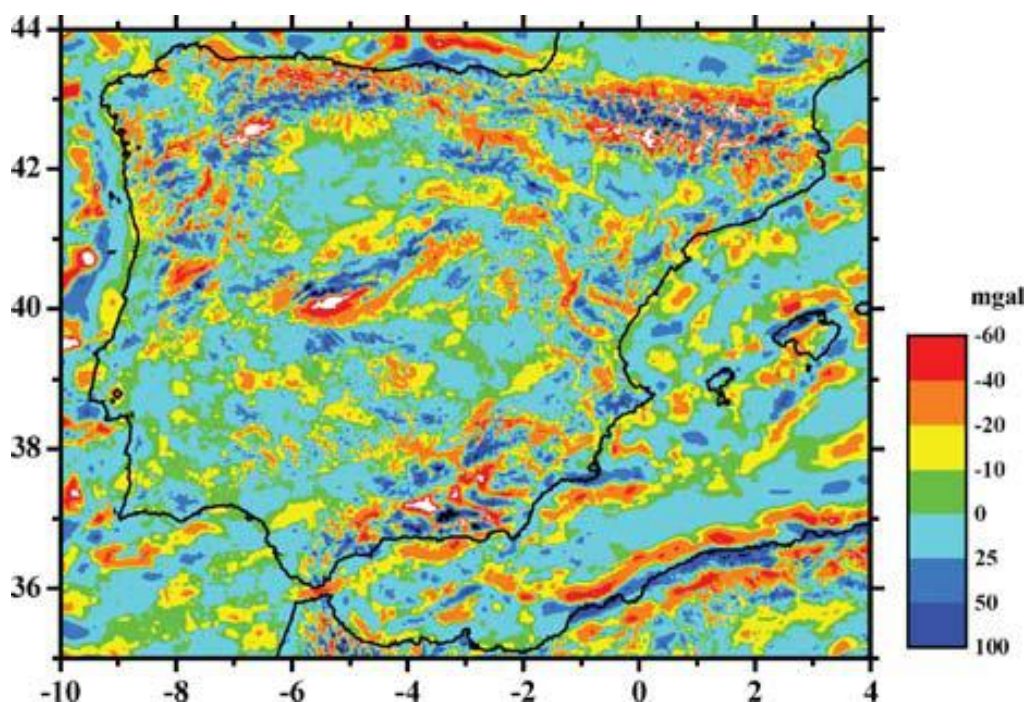


Figura 11: Anomalías de la gravedad obtenidas tras la aplicación de la fórmula (15).

La figura 12(a) muestra los valores del término $2\pi k\rho (h - h_{ref})$ y la figura 12(b) los valores de la corrección del terreno c .

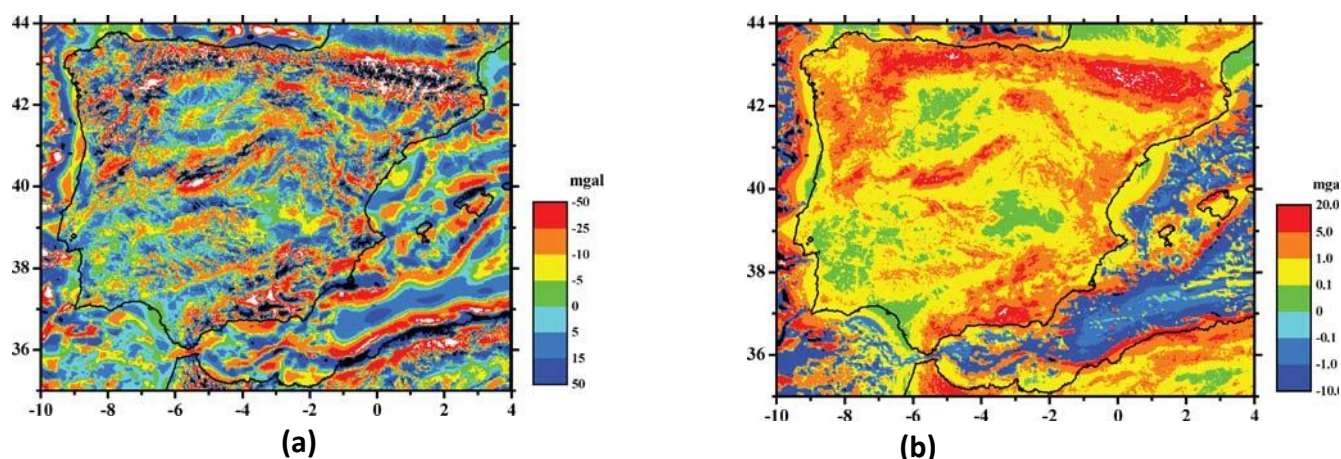
La corrección del terreno puede ser positiva o negativa cuando es computada en áreas marinas, dependiendo de la forma de la superficie del fondo marino (Torge, 1989). Esto no es posible en áreas continentales en las que la corrección del terreno es siempre positiva.

Computación del geoid. Cuando ya tenemos la rejilla de las anomalías de la gravedad, estamos en disposición de aplicar las técnicas basadas en la FFT, para calcular el geoid. Este cálculo se llevará a cabo sumando los tres términos siguientes

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \quad (16)$$

donde N_1 es término de onda larga obtenido a través de un modelo geopotencial, N_2 es la contribución del efecto indirecto originado por la reducción de Helmert y N_3 es el término de longitud de onda corta, obtenido de la integración de los datos de gravedad dados por (15), siguiendo el segundo método de condensación de Helmert. A continuación se indicará cómo son computados los tres términos de la fórmula (16).

Figura 12: (a) Término $2\pi k\rho (h - h_{ref})$ de la corrección RTM. (b) corrección del terreno de la fórmula (15)



CONTRIBUCIÓN DE ONDA LARGA (TÉRMINO N_1).

Esta contribución se obtiene mediante un modelo geopotencial, a través del desarrollo en serie de armónicos esféricos dado por (Heiskanen y Moritz, 1985):

$$N_1 = \frac{kM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm} \sin \varphi \left[\delta J_{nm} \cos m\lambda + \delta K_{nm} \sin m\lambda \right] + N_0 \quad (17)$$

Donde:

- $(\delta J_{nm}, \delta K_{nm})$ son los coeficientes geopotenciales totalmente normalizados del potencial anómalo de gravedad.
- a es el semieje mayor del elipsoide de referencia.
- kM es la constante gravitacional geocéntrica de la Tierra.
- P_{nm} son las funciones de Legendre completamente normalizadas.
- r, φ, λ son la posición geocéntrica de los puntos sobre la superficie del geoide.
- γ es la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia.
- n_{\max} es el grado máximo de el modelo geopotencial considerado.
- N_0 es el término de grado cero del desarrollo.

En la computación de la ecuación (17), es necesario obtener la posición geocéntrica r del punto considerado sobre el geoide, para ello, podemos seguir el procedimiento en dos pasos indicado por Kuroishi (1995). Según este procedimiento, calculamos en primer lugar el radio geocéntrico elipsoidal r_E asociado a las coordenadas (φ, λ) del punto considerado. En un segundo paso y por medio de la ecuación (17), poniendo $r = r_E$ obtenemos la anomalía en altura ξ_E , la cual puede ser usada como una primera aproximación de la ondulación del geoide en el punto considerado. Finalmente, obtendremos el valor de $N(\varphi, \lambda)$ en la posición geocéntrica del punto considerado r , empleando la fórmula (17) con el valor $r = r_E + \xi_E$.

Hay que notar que según este método de computación, r es considerado como la posición geocéntrica de un punto P sobre el geoide, en lugar de considerar la posición geocéntrica del punto P sobre la superficie de la Tierra. Por esta razón, siguiendo este método de computación en

dos pasos, lo que obtenemos son ondulaciones del geode en lugar de anomalías en altura. En la figura 13(a) podemos ver los resultados obtenidos mediante la aplicación de la fórmula (17), a los puntos de la rejilla regular ubicada en el área de estudio.

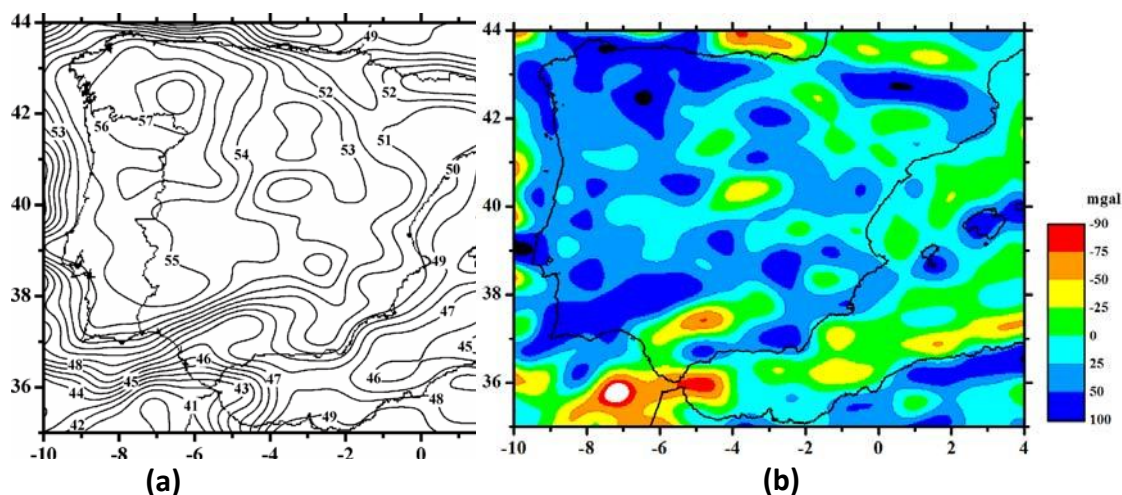


Figura 13: (a) Ondulación del geode obtenida a través de un modelo geopotencial para el área de estudio. Intervalo entre isóneas: 1m. (b) Anomalía de la gravedad obtenida a través de un modelo geopotencial para el área de estudio.

Las anomalías de la gravedad predichas por un modelo geopotencial, son necesarias para reducir las anomalías aire-libre observadas, tal como indica la ecuación (14). Estas anomalías de la gravedad, obtenidas a partir de un modelo geopotencial, pueden calcularse mediante el desarrollo en serie (Heiskanen y Moritz, 1985):

$$\Delta g_{GM} = \frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{n_{max}} n-1 \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm} \sin \varphi \left[\delta J_{nm} \cos m\lambda + \delta K_{nm} \sin m\lambda \right] + \Delta g_0 \quad (18)$$

Donde Δg_0 es el primer término del desarrollo.

En la computación de la fórmula (18), hemos usados el valor de la posición geocéntrica r obtenida previamente para la fórmula (17). La figura 13(b) muestra los resultados obtenidos mediante la aplicación de la fórmula (18), a los puntos de la rejilla regular ubicada en el área de estudio.

EFFECTO INDIRECTO (TÉRMINO N_2).

El efecto indirecto en el geode debido a la aplicación del segundo método de condensación de Helmert, se puede calcular en aproximación plana mediante los dos términos (Sideris, 1990)

$$N_2 = -\frac{\pi k \rho}{\gamma} h^2 \quad x_p, y_p - \frac{k \rho}{6\gamma} \iint_A \frac{h^3 \quad x, y - h^3 \quad x_p, y_p}{\left[x_p - x^2 + y_p - y^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dx dy \quad (19)$$

Donde:

- K es la constante gravitacional de Newton.
- ρ es la densidad de las masas topográficas (supuesta constante con valor 2.67 g/cm^3).
- x_p, y_p son las coordenadas del punto de computación, (x, y) son las coordenadas de los puntos de integración.
- γ es la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia.
- A es el área de estudio considerada.
- $h(x, y)$ es el modelo de elevaciones (figura 10(a)), considerando sólo elevaciones positivas, es decir, se consideran sólo las masas sobre el geoide.

La aproximación plana expresada por la ecuación (13.6) puede ser escrita fácilmente en forma de convolución mediante (Schwarz *et al.*, 1990):

$$N_2 = -\frac{\pi k \rho}{\gamma} h^2 - \frac{k \rho}{6\gamma} f * h^3 + \frac{k \rho}{6\gamma} g h^3 \quad (20)$$

donde

$$f \quad x, y = \frac{1}{x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}} \quad y \quad g = \iint_A f \quad x, y \quad dx dy$$

Así, mediante la aplicación de la formula de convolución (20), podemos calcular el efecto indirecto en el geoide, debido a la aplicación del segundo método de condensación de Helmert, obteniendo para el área de estudio considerada aquí el resultado ilustrado en la figura 14(a).

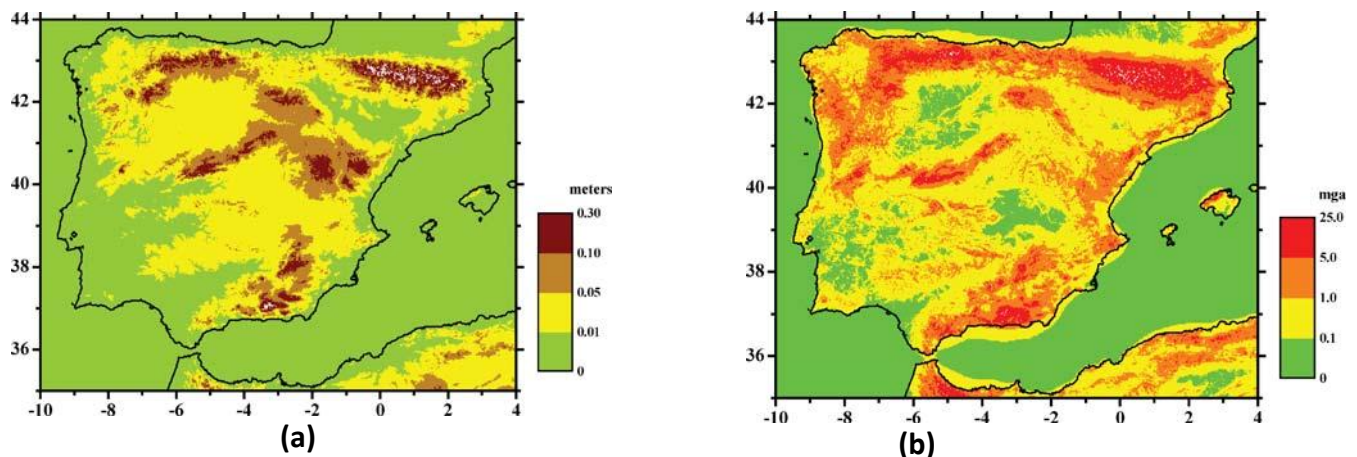


Figura 14: (a) Efecto indirecto en la ondulación del geoide producido en la eliminación de las masas exteriores al geoide, según el segundo método de condensación de Helmert. (b) Corrección del terreno asociada al segundo método de condensación de Helmert.

CONTRIBUCIÓN DE LAS ANOMALÍAS RESIDUALES (TÉRMINO N_3).

La contribución de las anomalías residuales representadas en la figura 11, se obtendrá por integración de las mismas mediante la expresión (Heiskanen y Moritz, 1985):

$$N_3 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \psi, \alpha S \psi d\sigma \quad (21)$$

Donde:

- γ es la gravedad normal sobre el elipsoide de referencia.
- R es el radio medio de la Tierra.
- $S(\psi)$ es la función de Stokes.
- σ es la superficie de integración (la esfera unidad).
- Δg son las anomalías de la gravedad obtenidas mediante la fórmula (15), reducidas según el segundo método de condensación de Helmert, es decir (Sideris, 1990)

$$\Delta g = \Delta g_{\text{free}} + c + \delta g \quad (22)$$

Donde Δg_{free} son las anomalías de la gravedad computadas por medio de (15) y representadas en la figura 11, c es la corrección del terreno calculada considerando sólo las masas por encima del geoide (figura 14(b)) y δg el efecto indirecto en la anomalía de la gravedad o efecto indirecto secundario. La figura 15(a) muestra los valores de las anomalías reducidas mediante (22). La corrección del terreno de la fórmula (22) se puede calcular mediante una aproximación lineal, que facilita su computación (Schwarz *et al.*, 1990; Sideris, 1990). El resultado obtenido al calcular c de esta forma es mostrado en la figura 14(b). El efecto indirecto en la anomalía de la gravedad o efecto indirecto secundario, se puede calcular mediante la fórmula (Heiskanen y Moritz, 1985; Kuroishi, 1995):

$$\delta g = 0.3086 N_2 \text{ (en mgal para } N_2 \text{ en metros)}$$

donde N_2 es el efecto indirecto en el geoide, calculado anteriormente mediante (20) y representado en la figura 14(a).

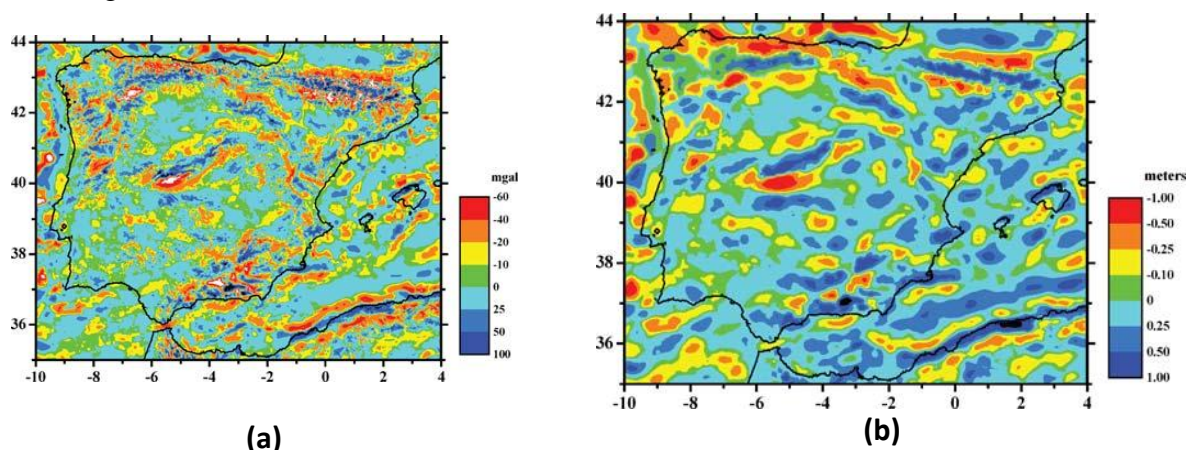


Figura 15: (a) Anomalías residuales obtenidas mediante la aplicación del segundo método de condensación de Helmert, fórmula (22), a las anomalías calculadas mediante la fórmula (15). (b) Ondulación del geoide obtenida integrando las anomalías residuales dadas por (22), mediante la fórmula (23).

Cuando los términos de la fórmula (22) están todos calculados, estamos en situación de realizar la integral (21). Para ello, podemos expresar esta integración en forma de convolución usando la FFT en 1D (Haagmans et al., 1993), obteniendo el término N_3 en la forma

$$N_3 = \frac{R \Delta\phi \Delta\lambda}{4\pi\gamma} F^{-1} \left(\sum_{\phi=\phi_1}^{\phi_n} F_1 \Delta g \cos F_1 S \right) \quad (23)$$

donde S es la función de Stokes, F_1 denota la transformada de Fourier discreta y periódica y F_1^{-1} es su inversa. Haagmans *et al.* (1993) han descrito la forma correcta de llevar a cabo la computación dada por (13.10), por ello, siguiendo estas indicaciones podemos obtener el valor de la ondulación residual del geoida mostrada en la figura 15(b).

VALIDACIÓN DEL GEOIDE.

Cuando sumamos los tres términos dados por la fórmula (13.3), obtenemos el modelo de geoida buscado, en este caso es el geoida del área ibérica mostrado en la figura 16(a). Para chequear la validez del modelo obtenido, debemos comparar las ondulaciones del geoida predichas por este modelo, con las ondulaciones del geoida obtenidas de forma independiente a este modelo. Estas medidas independientes deben haber sido calculadas con *gran precisión*, para poder establecer entonces que las diferencias, entre los valores predichos por el modelo y los valores observados o medidos, son debidas únicas y exclusivamente al error que tiene el modelo de geoida obtenido. Para ello, lógicamente necesitamos utilizar una colección de medidas de *gran precisión*, pues de lo contrario todo el proceso de validación sería dudoso. En el área ibérica disponemos de tal colección de medidas gracias a la red GPS-nivelación que está desplegada para toda Europa, tal como se explicó en el apartado 4. Esta red cuyo nombre es EVRS (European Vertical Reference System), constituye un marco de referencia fundamental para la medición de alturas con precisión centimétrica. Concretamente, en el área ibérica esta red posee los vértices de precisión mostrados en la figura 16(b).

Cuando comprobamos el modelo obtenido y representado en la figura 16(a), en los puntos de precisión mostrados en la figura 16(b), obtenemos un error de 27.8 cm (Corchete *et al.*, 2005). Este modelo no ha sido mejorado hasta 2008, fecha en la que han sido publicados los modelos del norte (Corchete, 2008) y sur de Iberia (Corchete *et al.*, 2008), cuyos errores son de 12.6 y 17.0 cm, respectivamente.

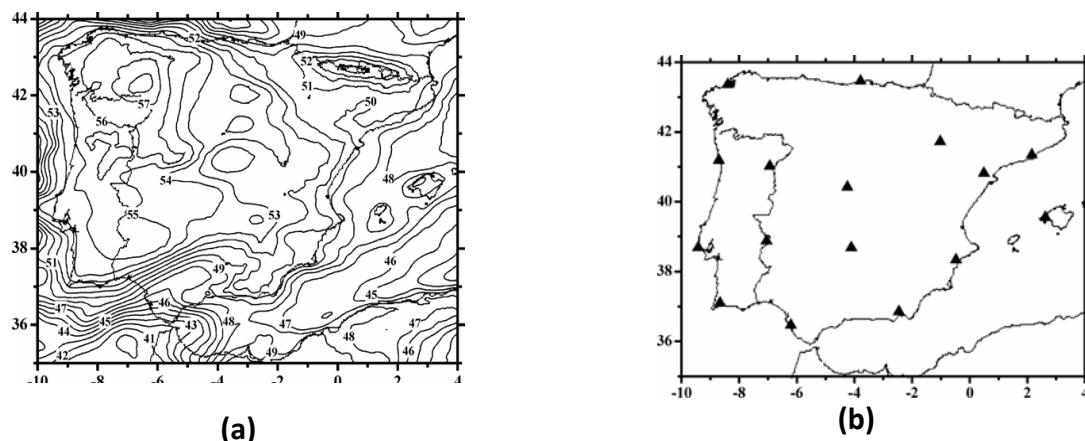


Figura 16: (a) Modelo de geoid obtenido para el área ibérica, mediante la suma de los tres términos dados por (16). (b) Red de puntos para los cuales es conocida la ondulación del geoid con gran precisión.

CONSIDERACIONES GENERALES

En la bibliografía general sobre este tema, basada en casos prácticos concretos, se ve que en general la tendencia es el cálculo de modelos geoidales utilizando procedimientos combinados.

La aplicación de la técnica remover-restituir está ampliamente difundida pero no siempre se tienen en cuenta algunos factores que inciden directamente en la precisión del resultado final.

Al combinar un modelo de geopotencial con datos gravimétricos tomados en la superficie terrestre (ya sea en forma directa o reducidos a partir de datos aerogravimétricos) y datos de altimetría satelital debe prestarse especial atención al marco de referencia en el que se desarrolle el trabajo.

En el cómputo de los coeficientes de los modelos de geopotencial interviene muy variada información (recorrido de órbitas satelitales, datos gravimétricos superficiales, datos altimétricos, etc.) integrada de un modo coherente en un único marco de referencia. El marco de referencia para los valores de N que se obtengan de la aplicación de algoritmos de cálculo sobre un modelo de geopotencial quedará en consecuencia establecido por el marco de referencia del modelo adoptado. En el EGM 96 el marco global está definido por la red de estaciones SLR. La comparación efectuada entre dicho marco e ITRF 94 indica que los orígenes coinciden dentro de un entorno de 1 cm y que existe un cambio de escala de aproximadamente $1,5 \pm 0,4$ ppb (Lemoine et al., 1998), lo que torna a la diferencia entre ambos marcos prácticamente indistinguible.

Además, la técnica remover-restituir utiliza anomalías gravimétricas calculadas a partir de datos de medición en superficie. Para mantener la coherencia, estas anomalías gravimétricas deben calcularse aplicando la fórmula para la gravedad teórica de 1984.

La definición del geoid se complica además por la permanente deformación que sufre la Tierra debida a la presencia del Sol y la Luna. La consideración de estos efectos de mareas permanentes condujo a la definición de tres tipos de geoides (Ekman, 1995, Rapp et al., 1991): el geoid sin marea, el geoid medio y el geoid cero. Análogamente se tendrán definiciones similares para el elipsoide que se asociará con el tipo correspondiente de

geoid. El EGM 96 mantiene como elipsoide de referencia (WGS 84 G873), sin marea, y por lo tanto las ondulaciones que se obtengan a partir de él se hallarán en este sistema.

Si bien las diferencias de ondulación entre los distintos tipos de geoides son del orden de 10 cm, es importante que h y N estén dados en el mismo sistema de mareas.

Otra observación importante a tener en cuenta es que la ondulación geoidal provista por un modelo de geopotencial puede ser escrita como:

$$N = \zeta_Z + \zeta^* + C \quad (21)$$

Donde ζ_Z es el llamado término de orden cero (estimado en forma global en -53cm) y cuyo uso es necesario para referir el valor de ondulación al elipsoide WGS 84. En algunas aplicaciones se establece $\zeta_Z=0$. Esto implica que los valores calculados se refieren a un elipsoide en el cual son idénticos la constante gravitacional geocéntrica del elipsoide y de la Tierra ($GM=GM_0$) y el potencial ($W_0=U_0$). Otra posibilidad es adoptar para ζ_Z la media de las diferencias entre los valores de N obtenidos a partir del modelo de geopotencial y los calculados con el procedimiento geométrico. ζ^* es el valor que se obtiene a partir de los coeficientes provistos por el EGM 96, siendo $\zeta_Z + \zeta^*$ la anomalía de altura.

C , que es función de la ubicación del punto, es la suma de tres términos correctivos que también pueden obtenerse a partir de los coeficientes del modelo y permiten transformar el valor de anomalía de altura en ondulación geoidal N . Los valores de C son muy pequeños y sólo resultan significativos cuando se trabaja en regiones elevadas.

Lo importante de destacar es que los programas de cálculo de uso corriente que permiten el cálculo de “ N ” a partir de un modelo de geopotencial arrojan como resultado sólo el valor de ζ^* .

Hasta el momento, los valores más precisos de ondulación geoidal (N) pueden obtenerse con el procedimiento geométrico mediante el cálculo de la diferencia entre las alturas elipsoidal y ortométrica de un mismo punto a través de la sencilla ecuación 5.9: $N = h - H$

Por supuesto, esta afirmación sólo es válida si las dos magnitudes que intervienen en el cálculo (h y H) fueron determinadas con suficiente precisión.

Además, es necesario tener presente que si los datos que intervienen en los cálculos son alturas normales, en lugar de alturas ortométricas, se obtendrán valores de ondulaciones quasigeoidales o anomalías de alturas [ζ].

Las magnitudes N y ζ en un punto pueden relacionarse a través de la anomalía de Bouguer en dicho punto y la gravedad normal sobre el elipsoide a través de la expresión:

$$\zeta - N \approx - (\Delta g_B / \gamma_0) H \quad (22)$$

Si las alturas H no tienen ningún tipo de corrección geopotencial, entonces la precisión de este método puede reducirse considerablemente y, lo que es aún peor, no puede estimarse la magnitud de esta imprecisión.

Para combinar los valores de N obtenidos a partir de un modelo de geopotencial (o algún procedimiento combinado que lo incluya) con los calculados a partir del procedimiento geométrico es necesario obtener las diferencias puntuales entre ambas ondulaciones.

Con esta información se construye una “matriz de diferencias”, del mismo tamaño y con la misma separación que la grilla de valores calculados para N a partir del EGM 96. Sumando ambas grillas se obtendrán los valores de “ N ajustados”, cuya interpolación proveerá un modelo de mayor precisión que aquéllos calculados por soluciones individuales.

Recordemos además que los modelos que utilizan el EGM96 serán compatibles con un marco de referencia basado en ITRF94.

REFERENCIAS

- Balmino, G., Reigber, C. and Moynot, B., 1976. A geopotential model determined from recent satellite observing campaigns (GRIM1). *Manuscripta Geodaetica*, 1(1): 41-69.
- Balmino, G., Reigber, C. and Moynot, B., 1978. Le modèle de potentiel gravitationnel terrestre GRIM2. Détermination, évaluation. *Annales de Géophysique*, 34 (2): 55-78.
- Blakeley, R. J., 1996. *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge Univ. Press.
- Blitzkow, D., 1996. O Problema de Valor de Contorno da Geodésia. Resultados Práticos para a América do Sul. Tesis de doctorado. Escola Politécnica. USP . 82 pp.
- Blitzkow, D., 1998. NASA (GSFC)/NIMA Model Evaluation. *International Geoidal Service. Bull. N°6*: 71-81.
- Buchard, E., 1958. Motion of the nodal line of the second Russian Earth satellite and flattening of the Earth. *Nature*, 182: 198-199.
- Denker, H., Lelgemann, D., Torge, W., Weber, G., Wenzel, H. G., 1986. Strategies and requirements for a new European geoid determination. *Proceed. Int. Symp. On the definition of the Geoid*, 1: 207-222. Inst. Geogr. Mil., Firenze.
- Ekman, M., 1989. Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. *Bulletin Géodésique*, 63: 281-296.
- Ekman, M., 1993. Postglacial rebound and sea level phenomena, with special reference to Fennoscandia and the Baltic Sea. In: Kakkuri (ed.): *Geodesy and Geophysics Publications of the Finnish Geodetic Institute*, 115: 7-70.
- Ekman, M., 1995. Deviation of mean sea level from the mean geoid in the transition area between the North Sea and the Baltic Sea. *Marine Geodesy*, 17: 161-168.
- Ekman, M., Mäkinen, J., 1994. Mean sea surface topography in a unified height system for the Baltic Sea area.
- Ekman, M., Mäkinen, J., 1995. Recent post-glacial rebound, gravity change and mantle flow in Fennoscandia.
- Forsberg, R., Tscherning, C. C., 1981. The use of height data in gravity field approximation. *JGR*, 86: 7843-7854.
- Forsberg, R., Tscherning, C. C., 1997. Topographic effects in gravity field modelling for BVP. In: F. Sansó and R. Rummel (1997): 241-272.
- Heiskanen, W., Moritz, H., 1967. *Physical geodesy*. W. H. Freeman & Co., 364 pp.
- Jekeli, C., 1999. An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models. *J. Geod.*, 73: 10-22.
- Hirvonen, R. A., 1960. New theory of the gravimetric geodesy. *Publ. Isostat. Inst., Int. Ass. Geod.*, 32. Helsinki.
- Kellogg, O. D., 1929. *Foundations of potential theory*. Springer, Berlin (reprint 1967).
- Kozai, Y., 1964. New determination of zonal harmonics coefficients of the Earth's gravitational potential. *Publ. Astron. Soc. Japan.*, 16: 263-284.
- Krarp, T., 1969. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Publ. Danish Geod. Inst.*, 44. Copenhagen.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H. and Olson, T. R., 1998. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. *Goddard Space Flight Center Rep.*

- Lerch, F. J., Klosko, S. M., Laubscher, R. E. and Wagner, C. A., 1977. Gravity model improvement using GEOS-3 (GEM9 and GEM10). Goddard Space Flight Center. Report X-921-77-246. Greenbelt.
- Lerch, F. J., Putney, B. H., Wagner, C. A. and Klosko, S. M., 1981. Goddard Earth Model for Oceanographic applications (GEM10B and GEM10C). *Marine Geodesy*, 5(2): 145-187.
- Lisitzin, E., 1974. Sea level changes. Elsevier Scientific Publishing Co., 286 pp.
- Lundquist, C. and Veis, G., 1966. Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth. Smithsonian Astrophysical Observatory. Special Report 200. Cambridge.
- Moritz, H., 1973. Least squares collocation. DGK, A75, München.
- Nerem, R. S., Lerch, F. J., Marshall, J. A., Pavlis, E. C., Putney, B. H., Tapley, B. D., Eanes, R. J., 1994. Gravity Model Development for TOPEX/POSEIDON: Joint Gravity Models 1 and 2. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12): 24421-24447.
- O'Keefe, J. A. and Batchelor, C. D., 1957. Perturbations of a close satellite by the equatorial ellipticity of the Earth. *Astrophysical Journal*, 62: 183-185.
- Rapp, R. H., 1983. Tidal gravity computations based on recommendations of the Standard Earth Tide Committee. *Bull. D'Inf. Marées Terrestres* 89: 5814-819.
- Rapp, R. H., Wang, Y. M., Pavlis, N., 1991. The Ohio State 1991 geopotential and surface topography harmonic coefficient models. OSU Rep. 410, Columbus, Ohio.
- Reigber, C., Balmino, G., Moynot, B. and Mueller, H., 1983. The GRIM3 Earth Gravity field model. *Manuscripta Geodaetica*, 8: 93-138.
- Sigl, R., 1985. Introduction to potential theory. Abacus Press, Cambridge.
- Smith, D. E., Lerch, F. J., Marsh, J. G., Wagner, C. A., Kolenkiewicz, R. and Khan, M. A., 1976. Contribution to the national geodetic satellite program by Goddard Space Flight Center. *J. Geophys. Res.*, 81(5): 1006-1026.
- Torge, W., 1989. Gravimetry. Walter de Gruyter & Co. 465 pp.
- Torge, W., 2001. Geodesy. Walter de Gruyter & Co. 415 pp.
- Fairhead, Blitzkow, Pacino, Cabanillas, Lauría, 2009 - Argentina Gravity Geoid study
- Blitzkow, Matos, Fairhead, Pacino, Lobianco, Campos - 2009 The progress of the geoid model for South America under GRACE and EGM2008
- Pacino, Lauría, La solución al problema Altimétrico – Buenos Aires, Rosario, Catamarca – 2002, 2004, 2007, 2009.
- Geodesia Geométrica y Geodésia Física – Prof. Dr. Victor Corchete – Universidad de Almería