

Universidad Nacional de Rosario. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Escuela de Agrimensura

TRABAJO FINAL DE INGENIERIA EN AGRIMENSURA

REDES GEODÉSICAS LIBRES

Alumno: Meier, Walter Tomás

Directora: Dra. Pacino, María Cristina (UNR)

Director externo: Dr. Vacaflor, José Luis (UNT)

Asesora Técnica: Dra. Leoni, Valeria (UNR y
CONICET)

-AÑO 2010-

RESUMEN

Este trabajo se desarrolla sobre una red geodésica libre, es decir, sobre una red en la que se asume que algunos parámetros que definen el sistema de referencia son desconocidos. En particular, se analiza el método de restricciones internas. En este sentido se utilizará la teoría de las inversas generalizadas, principalmente la inversa generalizada de Moore-Penrose (Seudoinvertida).

Se estudiará y analizará el comportamiento de los errores, en particular las elipses y elipsoides de errores absolutos y relativos. Como así también diferentes test estadísticos para el control de la varianza de la unidad de peso y errores en las observaciones y parámetros.

Por último se muestra la aplicación de lo estudiado a un problema real: la medición con GPS de una red de 5 puntos ubicada en la localidad de Centeno, ciudad de la provincia de Santa Fe.

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN | 4 |
| CAPÍTULO 1 - CONCEPTOS GENERALES | |
| • Principales parámetros estadísticos..... | 7 |
| • Curva de Gauss | 8 |
| • Fórmula de propagación de errores..... | 8 |
| • Demostración de que la sumatoria de residuos es cero..... | 10 |
| • Error del promedio o la media | 10 |
| • Demostración del desvío estándar para una muestra..... | 10 |
| • Propiedad de la media..... | 11 |
| • Observaciones de distinta precisión..... | 12 |
| • Cálculo de la media ponderada | 13 |
| • Propiedad de la media ponderados..... | 14 |
| • Expresión analítica del error medio de la unidad de peso | 15 |
| • Compensación de medidas indirectas | 16 |
| • Medidas correlacionadas..... | 20 |
| • Obtención de la matriz varianza covarianza para el método de medidas indirectas con una única solución por mínimos cuadrados | 23 |
| CAPÍTULO 2 – REDES LIBRES Y EL PROBLEMA DEL DATUM | |
| • Caso mas general de medidas indirectas | 25 |
| • Causa del defecto del datum | 29 |
| • Determinación de la matriz de restricciones | 32 |
| CAPÍTULO 3 – SOLUCIÓN AL “ZOD” CON MATRIZ SEUDOINVERSA | |
| • Autovalores y Autovectores..... | 38 |
| • Diagonalización y Ortogonalización de matrices simétricas..... | 39 |
| • Descomposición en valores singulares (SVD)..... | 41 |
| • Matriz seudoinvertida | 42 |
| • Mínimos cuadrados y norma mínima | 43 |
| • Solución con matriz seudoinvertida bajo equivalencia ortogonal..... | 44 |
| CAPÍTULO 4 – SOLUCIÓN AL “ZOD” CON MATRIZ DE RESTRICCIONES | |
| • Condición más general de mínimos cuadrados..... | 46 |
| • Método de los ajustes coordinados..... | 47 |
| • Método de medidas indirectas con una serie de ecuaciones de restricción | 50 |
| • Solución por restricciones internas..... | 54 |

| | |
|---|------------|
| • Justificación de la matriz pseudoinversa a través de la matriz S-transformación de Baarda | 56 |
| CAPÍTULO 5 – ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS ERRORES | |
| • Matriz varianza covarianza de las incógnitas | 61 |
| • Curvas, elipses y elipsoides estándar de incertidumbre absolutos | 65 |
| • Elipses estándar de incertidumbre relativas..... | 70 |
| • Determinación analítica de la varianza de la unidad de peso a posteriori..... | 71 |
| • Comparación entre la varianza de la unidad de peso a priori y a posteriori... | 76 |
| • Fiabilidad de redes..... | 78 |
| • Redundancia de las observaciones | 80 |
| • Control de errores groseros; Test de Baarda | 85 |
| • Fiabilidad interna..... | 90 |
| • Fiabilidad externa | 91 |
| CAPÍTULO 6 – RESOLUCIÓN DE UNA RED REAL..... | 94 |
| CAPÍTULO 7 – CONCLUSIONES..... | 97 |
| ANEXO A – PLANTEO FORMAL DEL PROBLEMA | |
| • Modelo de Gauss-Markov de rango completo..... | 98 |
| • Determinación de ξ por métodos geométricos algebraicos. Compensación por mínimos cuadrados..... | 99 |
| • El modelo paramétrico. Solución LESS (Least Square Solution). | 100 |
| • Modelo singular (con defecto de datum) de Gauss-Markov | 101 |
| ANEXO B – TEOREMAS DEL ÁLGEBRA LINEAL | |
| • Teorema 1 | 105 |
| • Teorema 2 | 105 |
| • Teorema 3 | 106 |
| • Teorema 4 | 107 |
| • Teorema 5 | 107 |
| • Teorema 6 | 108 |
| • Teorema 7 | 109 |
| • Teorema 8 | 109 |
| • Teorema 9 | 110 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 112 |

INTRODUCCIÓN

La medida es una característica cuantitativa que se les puede otorgar a los objetos, y esta nos da información sobre como pueden ser en ese aspecto. Estas características existen por si solas, pero las personas con la medición nos brindan información de como pueden ser estas. Como sabemos, no existe la medición verdadera, es por eso, que toda medición debe ir acompañada de la precisión con la que fue tomada, es decir, se debe conocer además la característica cualitativa con la que fue medida.

Estas dos características (medida y precisión) pueden ir variando en el tiempo, ya que, las técnicas con las que fueron medidas al igual que los instrumentos de medición que se utilizaron van cambiando con el correr del tiempo y el avance de la tecnología.

Para poder determinar estas dos características, recurrimos al cálculo de compensación que consiste fundamentalmente según Grafared (E; et.al; 1993) "*en adaptar modelos matemáticos a datos empíricos*". Esto se logra con la sobreabundancia o redundancia de información y se lo define según Henn-85 "*como las observaciones sobrantes, es decir, los grados de libertad de cada incógnita*".

Normalmente en geodesia y topografía se trabaja con sistemas de referencia que pueden ser locales o globales, los cuales están materializados a través de sus respectivos marcos de referencias que tienen una determinada precisión. Estos pueden ser muy variados en cuanto a su configuración, materialización, precisión, etc.

En el caso de las redes topográficas o geodésicas, que es lo que se va a tratar en este trabajo, la precisión de estas juega un papel fundamental en el desarrollo de las mismas. Para lo cual hay que tener en cuenta una serie de características que definen como va a ser esta y cual va a ser la metodología de trabajo.

Una red geodésica está constituida por una serie de puntos convenientemente elegidos, sobre los cuales se procede a la realización de observaciones de distinto tipo. Con esto, el diseño de la red consiste en la determinación de los vértices, las mediciones relacionadas a estos y la elección del instrumental y el método a emplear.

Con las dos primeras consideraciones se establece la matriz de diseño A del modelo. Con la tercera, se determina la precisión y con ello la matriz de pesos P con la cual obtenemos la matriz de varianza covarianza a priori.

Linealizando la relación observables-parámetros, se trabaja con un sistema sobreabundante indeterminado $A.X=U$ donde:

A es la matriz de diseño, X es el vector de las incógnitas o parámetros a determinar y U el vector de los observables.

De esta manera, aplicando una compensación por mínimos cuadrados, podemos obtener la precisión del trabajo (a priori) sin haberlo realizado, ya que la matriz normal será conocida y con ello los parámetros que definen la calidad de la misma.

Según consideremos la matriz varianza covarianza fija o no, tendremos los diferentes problemas de diseño. Estos dependerán de que los parámetros sean fijos o libres. De esta forma:

1- Hablaremos de diseño de orden cero (ZOD) al que fija A y P y deja libre X y la matriz varianza covarianza que determinarán el sistema de referencia.

2- Hablaremos de diseño de primer orden (FOD) o problema de configuración, al que fija la matriz de pesos y la de varianza covarianza dejando libre la de configuración A. Es decir deja libre y desea determinar la situación de los vértices para garantizar una precisión como la de la matriz varianza covarianza.

3- Se llamará diseño de segundo orden (SOD) al que fija las matrices A y la matriz varianza covarianza y deja libre la de pesos P. Así, trata de establecer los métodos de observación necesarios y la instrumentación adecuada para obtener una precisión determinada.

4- Se hablará de diseño de tercer orden (TOD) al que fija la matriz varianza covarianza y deja parcialmente libres A y P. Pretende mejorar la información de que se dispone a partir de otros datos como pueden ser un mayor número de observaciones, etc.

Estas posibilidades de diseño son importantes debido a que permiten un estudio previo de las redes sin necesidad de ir al campo a establecerlas. Son **métodos** llamados **de simulación**. Su esquema puede resumirse en:

- 1- Elección de los vértices de la red.
- 2- Estudio de las observaciones que pueden realizarse. Posibles puntos donde el estudio de la elección de los vértices, visibilidad entre ellos y posibles mediciones serán conceptos de vital importancia. Debe destacarse también los pesos dados a cada punto, normalmente asignados por el geodesta y que pueden otorgarse basándose por ejemplo en la situación del punto, condiciones para observarlo, etc.
- 3- Estudio de los instrumentos disponibles y métodos de observación para poder fijar una estimación a priori de la precisión.
- 4- Compensación y estudio de los resultados. En este cuarto punto es necesaria la implementación de algoritmos y métodos de cálculo adecuados.
- 5- Cálculo de las influencias de las observaciones realizadas.
- 6- Búsqueda de la solución óptima en los sentidos necesarios como costo, precisión, fiabilidad, etc. lo cual puede realizarse con la elección de otro instrumental, distintos métodos de observación o eliminación o anexo de observaciones.

En este trabajo en particular, se analizará el problema de diseño de orden cero o redes libres (ZOD), desde diferentes puntos de vista, planteando distintas soluciones, para poder entender mejor la causa del problema y también poder ofrecer distintas posibilidades de cálculo de acuerdo a los medios que se tengan. Es decir, se resolverá el

problema del datum obteniendo el sistema de referencia más óptimo cuyo marco de referencia vendrá dado por los vértices de la red.

El problema de esto radica en que no se conocen todos los parámetros que definen el sistema de referencia. Por lo tanto la solución a este problema nos creará uno nuevo.

Para estos casos siempre se cuenta con coordenadas aproximadas de los vértices, y las incógnitas son las correcciones que se le deben hacer a estos. Estas nuevas coordenadas que vamos a obtener a partir de las correcciones que hagamos, nos definirán un nuevo sistema de referencia. Este tendrá parámetros coincidentes con el sistema que se tiene, siempre y cuando antes de la compensación se establezcan algunos parámetros que definen el datum (factor de escala, orientación o traslación).

La solución óptima a este problema, se obtendrá planteando una solución de mínimos cuadrados, norma mínima y mínimo sesgo (Blaha, 1971).

También se hará hincapié en la demostración y cálculo de elementos sustanciales en el desarrollo de redes como son la varianza de la unidad de peso, la aplicación de distintos tipos de test estadísticos y las elipses y elipsoides de error, ya que estos juegan un rol fundamental en este tipo de proyectos.

CAPITULO 1. CONCEPTOS GENERALES.-

PRINCIPALES PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Antes de empezar a definir las distintas variables, vale aclarar que se utilizará la simbología $[] = \sum$ para que no lleve a confusión.

Se define al promedio o media de un conjunto de datos $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ al valor:

$$\bar{X} = \frac{[x_i]}{n}$$

x_i : Medición de una magnitud.

n : Cantidad de mediciones.

La varianza y el desvío estándar están definidos como:

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[e_i^2]}{n} \quad e_i = x_i - X$$

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[e_i^2]}{n}} \quad X: \text{Valor verdadero.}$$

Los conceptos que acabamos de definir para la varianza y el desvío estándar corresponden al caso de una población. Para las labores topográficas o geodésicas siempre se va a tener una cantidad finita de mediciones y por lo tanto se habla de una muestra. Dichas expresiones quedarán indicadas de la siguiente manera:

$$\sigma^2 = \frac{[v_i^2]}{n-1} \quad v_i = x_i - \bar{X}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{[v_i^2]}{n-1}}$$

Este es el caso particular en que todas las mediciones son de similar precisión y solo tengamos una variable.

La diferencia en las fórmulas para una población y una muestra está en que en el caso de tener una muestra no contamos con el valor verdadero, lo más cercano a este es el promedio, pero este tiene un error que debe ser tenido en cuenta.

CURVA DE GAUSS¹

Como sabemos, cada vez que realizamos una medición cometemos errores. Estos pueden ser de tres tipos, sistemáticos, accidentales o aleatorios y por equivocación. Tanto los errores sistemáticos como las equivocaciones pueden ser corregidos o eliminados, quedando únicamente los errores aleatorios.

Estos errores aleatorios obedecen a una ley de distribución de probabilidad. Esta ley es conocida como la "distribución normal de Gauss" basada en cuatro postulados o axiomas:

- El promedio es el valor más probable de la magnitud medida.

$$\bar{X} = \frac{[x_i]}{n} \quad P(\bar{X}) = \text{máx}$$

- Son igualmente probable los errores positivos que los negativos.

$$P(\varepsilon_i) = P(-\varepsilon_i)$$

- La probabilidad de cometer un error (dentro de un pequeño intervalo que debe fijarse) es función decreciente de la magnitud del mismo.

$$P(\varepsilon) = \vartheta_\varepsilon \cdot d\varepsilon; \quad (\vartheta_\varepsilon \text{ es decreciente con } |\varepsilon|)$$

- Siempre el error está comprendido entre $+\infty$ y $-\infty$.

$$P_{\varepsilon=-\infty}^{\varepsilon=+\infty} = 1$$

A partir de estos axiomas se desprende la distribución de probabilidades de los errores aleatorios, cuya gráfica en una variable tiene la forma de una campana:

$$\vartheta_\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-h^2\varepsilon^2}; \quad h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

FÓRMULA DE PROPAGACIÓN DE ERRORES²

Sea una magnitud A, función de n variables a las que se las puede medir y obtener el error de medición, independientes unas de otras. Entonces tenemos lo siguiente:

$$A = f(X_1; X_2; \dots; X_n)$$

Si suponemos que la expresión anterior está libre de errores (caso ideal que sabemos que nunca se va a dar en la realidad) y la reescribimos pero ahora con variables que por estar calculadas a través de mediciones están sujetas a errores, nos queda lo siguiente:

$$a = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

¹ Mingo, O. y Ortiz, E. (1996). *Cálculo de Compensación de mediciones topográficas*. Pág (I.6-I.7)

² Mangiaterra, A. (2006). *Cálculo de Compensaciones*. Pág. (I.11-I-12)

Como dijimos anteriormente, estas nuevas variables involucran error, por lo tanto podemos escribirlas en función de aquellas que no lo tienen:

$$x_i = X_i + e_i \quad \text{Donde } e_i \text{ representa el error de la medición } i$$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$A = f(X_1 + e_1; X_2 + e_2; \dots; X_n + e_n)$$

Ahora apliquemos el desarrollo de Taylor hasta el primer orden (suponemos que la función cumple con todas las condiciones para que este se pueda hacer):

$$a = f(X_1; X_2; \dots; X_n) + e_{x_1} \frac{\partial f}{\partial X_1} + e_{x_2} \frac{\partial f}{\partial X_2} + \dots + e_{x_n} \frac{\partial f}{\partial X_n}$$

El término de segundo orden en el desarrollo de Taylor lo despreciamos ya que podemos suponer que los errores al cuadrado son muy pequeños como para tenerlos en cuenta.

$$a = A + e_{x_1} \frac{\partial f}{\partial X_1} + e_{x_2} \frac{\partial f}{\partial X_2} + \dots + e_{x_n} \frac{\partial f}{\partial X_n}$$

$$a - A = e_a = e_{x_1} \frac{\partial f}{\partial X_1} + e_{x_2} \frac{\partial f}{\partial X_2} + \dots + e_{x_n} \frac{\partial f}{\partial X_n}$$

$$e_a^2 = e_{x_1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 + e_{x_2}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 + \dots + e_{x_n}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2 + 2e_{x_1}e_{x_2} \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} + \dots + 2e_{x_1}e_{x_n} \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_n} + \dots$$

$$[e_a^2] = [e_{x_1}^2] \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 + [e_{x_2}^2] \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 + \dots + [e_{x_n}^2] \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2$$

En la última expresión consideramos que el resto de los términos es igual a cero, ya que suponemos que la cantidad de mediciones tiende a infinito y todas las variables son independientes, por lo tanto cuando tenemos en una sumatoria errores que se comportan en forma aleatoria y por ende la cantidad de errores negativos y positivos "es la misma" (son igualmente probables los errores positivos que los negativos) la suma de estos es cero.

$$\frac{[e_a^2]}{n} = \frac{[e_{x_1}^2]}{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{[e_{x_2}^2]}{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 + \dots + \frac{[e_{x_n}^2]}{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_{x_1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 + \sigma_{x_2}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2$$

Esta última es la expresión general de la propagación de errores en el que las variables son independientes.

DEMOSTRACIÓN DE QUE LA SUMATORIA DE RESIDUOS ES CERO¹

$$\begin{aligned}v_i &= x_i - \bar{X} \\[v_i] &= [x_i - \bar{X}] \\[v_i] &= [x_i] - n\bar{X} \\[v_i] &= [x_i] - n \frac{[x_i]}{n} = 0\end{aligned}$$

ERROR DEL PROMEDIO O LA MEDIA²

Sea una magnitud A sujeta a n mediciones con similar precisión. El promedio de esta viene dado de la siguiente manera:

$$a_m = \frac{[a_i]}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Y aplicando la propagación de errores

$$\sigma_{a_m}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{a_1}^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{a_n}^2$$

Y como todas las mediciones son de similar precisión, los errores van a ser todos iguales.

$$\sigma_{a_m}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n \sigma_a^2$$

$$\sigma_{a_m} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}}$$

DEMOSTRACIÓN DEL VALOR DEL DESVÍO ESTÁNDAR PARA UNA MUESTRA³

Partimos de la expresión del valor verdadero.

$$\begin{aligned}e_i &= x_i - X \\[e_i^2] &= [(x_i - X)^2] = [(x_i - \bar{X} + \bar{X} - X)^2] \\[e_i^2] &= [(x_i - \bar{X})^2 + 2(x_i - \bar{X})(\bar{X} - X) + (\bar{X} - X)^2]\end{aligned}$$

$$[e_i^2] = [(x_i - \bar{X})^2] + 2[x_i - \bar{X}][\bar{X} - X] + [(\bar{X} - X)^2]$$

¹ Mangiaterra, A. (2006). Cálculo de Compensaciones. Pág. (I.7)

² Mangiaterra, A. (2006). Cálculo de Compensaciones. Pág. (I.13)

³ Mangiaterra, A. (2006). Cálculo de Compensaciones. Pág. (I.9-I-10)

En primer lugar $\bar{X} - X = cte.$

En segundo lugar $x_i - \bar{X} = v_i$ y habíamos demostrado que la sumatoria de residuos es igual a cero. Por lo tanto la ecuación nos queda:

$$[e_i^2] = [(x_i - \bar{X})^2] + n(\bar{X} - X)^2$$

La diferencia entre el promedio y el valor verdadero es el error que tiene el promedio, mientras que la diferencia entre el valor de una observación y el promedio es el residuo.

$$[e_i^2] \cong [v_i^2] + n\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$[e_i^2] \cong [v_i^2] + \sigma_x^2$$

Además sabemos que $e_i^2 = \sigma_x^2$ por lo tanto $[e_i^2] = n\sigma_x^2$

$$n\sigma_x^2 = [v_i^2] + \sigma_x^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{[v_i^2]}{n-1}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{[v_i^2]}{n-1}}$$

PROPIEDAD DE LA MEDIA

Si aceptamos que el valor que queremos hallar es el de máxima probabilidad (el cual sabemos que es la media) se puede demostrar que este se da cuando la sumatoria de los residuos es mínima. También hay otras formas de demostrar esto, nosotros lo haremos mediante un método que no es del todo riguroso pero que de forma muy sencilla deja en claro lo que aquí se plantea.

$[v_i^2] = \text{mín}$ (Dentro de los infinitos valores de X que se pueden utilizar como valor "verdadero").

$$[v_i^2] = [(x_i - X)^2]$$

$$[v_i^2] = [x_i^2 - 2x_iX + X^2]$$

$$[v_i^2] = [x_i^2] - 2[x_i]X + nX^2$$

Planteamos la derivada respecto de X . Como en $[v_i^2]$ se da el mínimo, allí la derivada debe ser cero.

$$\frac{\partial [v_i^2]}{\partial X} = -2[x_i] + 2nX = 0$$

$$X = \frac{[x_i]}{n} = \bar{X}$$

Planteando la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 [v_i^2]}{\partial^2 X} = 2n > 0$$

Por lo tanto, en $[v_i^2]$ se alcanza el mínimo.

Con esto podemos decir que aceptamos como condición la de mínimos cuadrados ya que nos da como resultado la media que es valor más probable.

OBSERVACIONES DE DISTINTA PRECISIÓN

El peso es una medida de confianza que se tiene de una observación con respecto a otra. Es decir, lo importante es saber cuánto mejor o más confiable es una observación que otra.

La utilidad de esto radica en que muchas veces tenemos mediciones de una misma magnitud pero con distinta precisión, y si queremos utilizar las dos mediciones para el cálculo, tenemos que hacer cierto trabajo algebraico.

Supongamos que se han practicado las mediciones de $M_1; M_2; \dots; M_n$, todas estas con distinta precisión.

Evidentemente y de acuerdo con lo anterior podemos asimilar cada medición M_i que sea igual a la media aritmética de una cierta cantidad de mediciones m_{ij} , con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq p_i$, donde p_i representará la cantidad de mediciones.

Entonces tenemos lo siguiente:

$$M_1 = \frac{1}{p_1} (m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1p_1})$$
$$M_2 = \frac{1}{p_2} (m_{21} + m_{22} + \dots + m_{2p_2})$$

.....

$$M_n = \frac{1}{p_n} (m_{n1} + m_{n2} + \dots + m_{np_n})$$

Consideramos que las m_i son todas de igual precisión y error ε . Entonces el error de la M_i por propagación de errores valdrá:

$$e_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}} \quad e_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_1}$$

$$e_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}} \quad e_2^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_2}$$

$$e_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_n}} \quad e_n^2 = \frac{\varepsilon^2}{p_n}$$

$$\varepsilon^2 = e_1^2 p_1 = e_2^2 p_2 = \dots = e_n^2 p_n$$

Con todo esto estamos en condiciones de establecer la relación entre los pesos:

$$p_1 e_1^2 = p_2 e_2^2 = \dots = p_i e_i^2$$

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \dots = p_i \sigma_i^2$$

Si consideramos que alguna medición tiene peso 1, entonces:

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \dots = p_i \sigma_i^2 = \sigma_0^2$$

$$\sigma_0^2 = p_i \sigma_i^2$$

donde σ_0^2 es un escalar que representa la varianza de la unidad de peso, es decir, la varianza que tiene una medida con peso uno. Entonces σ_0 es el error de una medida con peso uno. Este parámetro es de suma importancia ya que será muy útil cuando se tengan mediciones cada una de ellas con distintos errores y halla que vincularlas dándoles diferentes pesos.

Al final de este capítulo demostraremos la expresión analítica del error medio de la unidad de peso.

CÁLCULO DE LA MEDIA PONDERADA

Pudimos ver anteriormente que algunas mediciones pueden resultar más precisas que otras. Esto se interpreta como que hay mediciones que son más importantes que otras. En estos casos si tenemos que calcular el valor más probable, a través de la media aritmética, estaríamos tratando a todas las mediciones con igual importancia, ya que todas hacen el mismo aporte al valor que se desea calcular. Por lo tanto vamos a definir una nueva magnitud que tenga en cuenta esta característica.

Se define a la media ponderada como el valor de máxima probabilidad. Para esto usaremos las fórmulas que se utilizaron para calcular los pesos:

$$M_1 = \frac{1}{p_1} (m_{1_1} + m_{1_2} + \dots + m_{1_{p_1}})$$

$$M_2 = \frac{1}{p_2} (m_{2_1} + m_{2_2} + \dots + m_{2_{p_2}})$$

.....

$$M_n = \frac{1}{p_n} (m_{n_1} + m_{n_2} + \dots + m_{n_{p_n}})$$

La media va a venir dada de la siguiente manera:

$$M_m = \frac{(m_{1_1} + \dots + m_{1_{p_1}}) + (m_{2_1} + \dots + m_{2_{p_2}}) + \dots + (m_{n_1} + \dots + m_{n_{p_n}})}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

$$M_m = \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \dots + p_n M_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

En forma general la media ponderada se expresa de la siguiente manera:

$$M_m = \frac{[p_i M_i]}{[p_i]}$$

PROPIEDAD DE LA MEDIA PONDERADA¹

A continuación veremos que $[pv^2] = \text{mín}$ es una propiedad de la media ponderada:

$[v_i^2] = \text{mín}$ (Dentro de los infinitos valores de X que se pueden utilizar como valor "verdadero").

$$[v_i^2] = [(x_i - X)^2]$$

$$[v_i^2] = [x_i^2 - 2x_i X + X^2]$$

$$[p_i v_i^2] = [p_i x_i^2 - 2p_i x_i X + p_i X^2]$$

$$[p_i v_i^2] = [p_i x_i^2] - 2[p_i x_i]X + [p_i]X^2$$

$$\frac{\partial [p_i v_i^2]}{\partial X} = -2[p_i x_i] + 2X[p_i] = 0$$

$$X = \frac{[p_i x_i]}{[p_i]} = \bar{X}$$

Definición de la media ponderada.

Por último hacemos la segunda derivada para ver si es un mínimo:

$$\frac{\partial^2 [p_i v_i^2]}{\partial^2 X} = 2[p_i] > 0 \quad \text{Condición de mínimo.}$$

¹ Mangiaterra, A. (2006). Cálculo de Compensaciones. Pág. (III.4-III.5)

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL ERROR MEDIO DE LA UNIDAD DE PESO¹

Consideremos el valor más probable que como sabemos es el promedio.

$$\bar{X} = \frac{[x_i]}{n}$$

Si las x_i tienen igual precisión, entonces cada una tendrá peso uno y la media tendrá peso n ya que como sabemos la media ponderada viene dada de la siguiente manera:

$$\bar{X} = \frac{[p_i M_i]}{[p_i]}$$

Sabiendo que:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= x_i - \bar{X} \\ e_i &= x_i - X \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_i = v_i + (\bar{X} - X)$$

Elevando al cuadrado y multiplicando por sus respectivos pesos:

$$\begin{aligned} p_1 e_1^2 &= p_1 v_1^2 + 2p_1 v_1 (\bar{X} - X) + p_1 (\bar{X} - X)^2 \\ p_2 e_2^2 &= p_2 v_2^2 + 2p_2 v_2 (\bar{X} - X) + p_2 (\bar{X} - X)^2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n e_n^2 &= p_n v_n^2 + 2p_n v_n (\bar{X} - X) + p_n (\bar{X} - X)^2 \end{aligned}$$

Sumando todas estas ecuaciones:

$$[p_i e_i^2] = [p_i v_i^2] + 2.[p_i v_i](\bar{X} - X) + [p_i](\bar{X} - X)^2$$

El segundo término del segundo miembro vale cero ya que $[p_i v_i] = 0$. Esto se puede demostrar en forma muy sencilla, teniendo en cuenta que $\bar{X}_1; \bar{X}_2; \dots; \bar{X}_n$ son la media ponderada de cada una de las incógnitas, de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} p_1 v_1 &= p_1 x_1 - p_1 \bar{X}_1 \\ p_2 v_2 &= p_2 x_2 - p_2 \bar{X}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n v_n &= p_n x_n - p_n \bar{X}_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow [p_i v_i] = [p_i x_i] - [p_i] \bar{X} = [p_i x_i] - [p_i] \frac{[p_i x_i]}{[p_i]} = 0$$

¹ Mingo, O. y Ortiz, E. (1996). *Cálculo de Compensación de mediciones topográficas*. Pág (I.35-I.36)

Respecto del tercer término, ya dijimos que es el error verdadero del promedio y es desconocido, pero se puede adoptar como error más probable a: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_{x_i} / \sqrt{n}$. Donde σ_{x_i} es el error de una medición cualquiera.

Es decir:

$$(\bar{X} - X)^2 \cong \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_{x_i}^2}{n} = \frac{\sigma_{x_i}^2}{[p_i]}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_{x_i}^2}{[p_i]} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}}^2 \cdot [p_i] = \sigma_{x_i}^2 = \sigma_0^2$$

Por último nos queda analizar el primer miembro: $[p_i e_i^2]$

Dado que los errores e_i son desconocidos, adoptaremos para sus respectivos errores cuadráticos los valores promedios de los mismos, que no son otra cosa que las varianzas.

Recordemos que $\sigma^2 = \frac{[e_i^2]}{n}$ y que para nuestro caso será: $\sigma_x^2 = \frac{[e_i^2]}{n}$

$$[p_i e_i^2] = p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2 + \dots + p_n e_n^2 \cong p_1 \sigma_1^2 + p_2 \sigma_2^2 + \dots + p_n \sigma_n^2 = [p_i \sigma_i^2]$$

Y sabiendo que:

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \dots = p_n \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

$$[p_i \sigma_i^2] = n \cdot \sigma_0^2$$

Volviendo a la expresión anterior:

$$[p_i e_i^2] \cong [p_i \sigma_i^2] = n \cdot \sigma_0^2 = [p_i v_i^2] + 0 + \sigma_0^2$$

Entonces la varianza y el error medio de la unidad de peso son:

$$\sigma_0^2 = \frac{[p_i v_i^2]}{n-1} \quad \text{Y} \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{n-1}}$$

COMPENSACIÓN DE MEDIDAS INDIRECTAS

El desarrollo de este capítulo se basó en el apunte de *Mangiaterra, A. (2006). Cálculo de Compensaciones. Pág. (III.22-III.24)*. Conjuntamente con *Manuel Chueca Pazos; José Herráez Boquera y José Luis Berné Valero. (1996). Teoría de errores e instrumentación. Madrid: Paraninfo. Pág. (98-100)*.

Los problemas de compensación se suelen dividir en dos grupos, uno es el caso de medidas indirectas o método paramétrico y es el que vamos a desarrollar nosotros. El otro es el de ecuaciones de condición.

En el caso de medidas indirectas, los valores de las incógnitas buscadas están relacionados por ecuaciones lineales o linealizables a los valores medidos de la siguiente manera:

$$f_i(X; Y; Z; \dots) = u_i$$

donde X; Y; Z... son las incógnitas, u_i las observaciones. Y cada una de estas ecuaciones tendrá un peso p_i .

De ahora en adelante utilizaremos la siguiente notación para hacer referencia a estas ecuaciones con sus respectivos pesos:

$$f_i(X; Y; Z; \dots) = u_i \dots \dots \dots p_i$$

“Por lo general se tienen más ecuaciones que incógnitas, y este es el caso que vamos a desarrollar en este capítulo.”

Supongamos n cantidad de ecuaciones con I cantidad de incógnitas, con $n > I$.

En el caso más general del método de medidas indirectas tendríamos ecuaciones de la siguiente manera:

$$f_i(X; Y; Z; \dots; u_i'; u_i''; u_i'''; \dots) = 0 \dots \dots \dots p_i \quad i=1; 2; \dots \quad n > I$$

- La función f_i puede ser no lineal.
- Cada función puede contener varias de esas magnitudes que pueden ser medibles.
- Obtenida la medición u_i , se trata de encontrar los valores de las incógnitas.

Como las funciones pueden ser no lineales, se reemplaza a las variables X; Y; Z... por un valor conocido más una corrección. Esta corrección va a ser la nueva incógnita.

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \Delta X_v \\ Y &= Y_0 + \Delta Y_v \\ Z &= Z_0 + \Delta Z_v \end{aligned}$$

Las relaciones $f_i = 0$ se desarrollarán en series de Taylor conservando solo los términos lineales.

$$f_i(X; Y; \dots; u_i'; u_i''; \dots) = f_i(X_0; Y_0; \dots; u_i'; u_i''; \dots) + \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)_0 \Delta X_v + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)_0 \Delta Y_v + \dots = 0;$$

De esta manera, todas las ecuaciones quedan linealizadas. Los valores de las derivadas se obtendrán evaluándolas en puntos aproximados.

Por lo tanto las ecuaciones nos quedarán de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial X}\right)_0 \Delta X_v + \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y_v + \left(\frac{\partial f_1}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z_v + \dots - f_1(o) = 0 \dots \dots p_1$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial X}\right)_0 \Delta X_v + \left(\frac{\partial f_2}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y_v + \left(\frac{\partial f_2}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z_v + \dots - f_2(o) = 0 \dots \dots p_2$$

.....

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial X}\right)_0 \Delta X_v + \left(\frac{\partial f_n}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y_v + \left(\frac{\partial f_n}{\partial Z}\right)_0 \Delta Z_v + \dots - f_n(o) = 0 \dots \dots p_n$$

Podemos observar que tenemos un sistema con más ecuaciones que incógnitas, y a causa de los errores que se producen en las mediciones, el sistema resulta inconsistente (pero esta particularidad es la que hace que se pueda efectuar la compensación). Es decir, no existe un juego de valores para las incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones, o lo que es lo mismo, el vector de términos independientes no pertenece al espacio generado por las columnas de la matriz de los coeficientes que acompañan a las incógnitas. Esto se debe a los errores que se producen en las mediciones que son de carácter aleatorio.

Podemos expresar matricialmente el sistema de arriba:

$$A.X - U = 0 \quad \text{Sistema inconsistente a causa de los errores.}$$

A: Matriz de las derivadas o matriz jacobiana (es una matriz de diseño).

X: Vector de las incógnitas. $(\Delta X_v; \Delta Y_v; \Delta Z_v)$

U: Vector de los términos independientes. $(f_1(o); f_2(o); \dots; f_n(o))$

El sistema $A.X - U = 0$ va a tener además asociada una matriz de pesos. Que con la notación antes establecida, quedará $A.X - U = 0 \dots \dots P$

Debemos establecer algún criterio para poder hallar una solución al sistema inconsistente. Si aceptamos que el sistema $A.X - U = 0 \dots \dots P$ tenga residuos, entonces tendremos un nuevo sistema que vendrá dado de la siguiente manera:

$$A.X - U = V \dots \dots P$$

Siendo:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

Para lo cual ahora mi nuevo sistema es compatible con infinitas soluciones, ya que voy a tener infinitos vectores V que satisfagan la ecuación matricial.

La matriz de los pesos en este caso es una matriz diagonal ya que se considera que las observaciones son todas independientes unas de otras. Esto no siempre es así y puede ser que la matriz de pesos sea una matriz simétrica debido a la correlación que existe ente las observaciones como en el caso de los vectores G.P.S. en donde se tienen los errores en cada una de las componentes espaciales y la correlación que exista entre estas.

Con respecto a como resolver este sistema, necesitamos una única solución y que además sea la mejor, dijimos que esta sería aquella que tenga la mayor probabilidad de salir, que no es otra cosa que la media ponderada, por lo tanto en base a esto estableceremos como criterio el de mínimos cuadrados: $[pv^2] = \text{mín}$ o lo que es lo mismo en forma matricial: $V^T . P . V = \text{mín}$

$$\phi = V^T . P . V = \text{mín}$$

Derivando a esta e igualándola a cero obtendremos lo siguiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \phi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2 \cdot V^T \cdot P = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = A$$

Reemplazando los valores que se obtuvieron en las tres expresiones de derivadas anteriores obtenemos lo siguiente:

$$2 \cdot V^T \cdot P \cdot A = 0 \Rightarrow V^T \cdot P \cdot A = 0 \Rightarrow A^T \cdot P \cdot V = 0$$

Recordar que la matriz P es diagonal o lo sumo simétrica y por lo tanto su transpuesta es ella misma. El siguiente paso va a ser reemplazar V por la ecuación matricial que teníamos antes: $A \cdot X - U = V$

$$A^T \cdot P \cdot (A \cdot X - U) = 0 \Rightarrow A^T \cdot P \cdot A \cdot X = A^T \cdot P \cdot U$$

Y llamando $M = A^T.P.A$ o $M = A^T.A$ para el caso en el que las observaciones sean de similar precisión la matriz de los pesos, es igual a la matriz identidad.

$$M.X = A^T.P.U$$

“Esta es la expresión más general del método de medidas indirectas o método paramétrico. Pudiendo resultar el sistema compatible indeterminado o compatible determinado dependiendo de que si la matriz M resulta singular o no.”

Si todas las columnas de A son L.I. (linealmente independiente) entonces las filas de A^T también son L.I. y el producto de estas, es una matriz cuyas columnas son L.I. (la matriz de los pesos siempre es una matriz con todas sus columnas y filas L.I.).

Por lo tanto si en nuestro caso A tiene todas las columnas L.I., M también va a tener todas sus columnas L.I., por lo tanto va a resultar de rango completo. Además es una matriz simétrica por resultar de la multiplicación de una matriz con su transpuesta (y puede estar multiplicada por otra matriz que es también simétrica que es la de los pesos), con lo cual va a ser cuadrada. Con estas dos propiedades (ser cuadrada y ser de rango completo) M va a tener inversa y la ecuación general del método de medidas indirectas va a tener una única solución por mínimos cuadrados que vendrá dada de la siguiente manera:

$$X = M^{-1}.A^T.P.U$$

MEDIDAS CORRELACIONADAS

La correlación es la relación entre dos o más variables aleatorias dentro de una distribución de dos o más variables aleatorias. Esta indica la fuerza y la dirección de una relación entre las variables.

Hasta ahora solo habíamos definido a la varianza y el desvío estándar como parámetros cuantitativos de la calidad de las mediciones, pero nada se dijo de si existe alguna relación entre las incógnitas calculadas. En topografía y geodesia este tipo de relación es por lo general lineal.

Debemos definir un parámetro estadístico que represente la relación que hay entre las incógnitas (también podría ser que las observaciones estén correlacionadas como habíamos dicho en el caso de los vectores G.P.S.). A este parámetro se lo denomina covarianza:

$$\sigma_{XY} = \frac{[v_X.v_Y]}{n}$$

Como podemos ver σ_{XY} tiene en cuenta los signos de los residuos, y en el caso en que existiera la misma cantidad de signos positivos y negativos, es decir, que los valores hallados no tuvieran ninguna tendencia a ubicarse más en una zona de los residuos que en otra, la covarianza sería cero.

El grado de dicha correlación se evalúa con el siguiente parámetro que además tiene la particularidad de que su valor varía entre 1 y -1

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}$$

Para entender mejor, pensemos en el cálculo de un punto con coordenadas, a través de algún método topográfico o geodésico (intersección directa, Photenot, etc.). Si se realizan n mediciones para calcular dicho punto, obtendremos diferentes resultados. Todos estos resultados juntos, formarán una nube de puntos. Esta tendrá una orientación que se puede medir. Esta orientación se debe a que las mediciones no son totalmente independientes. El promedio de todos estos puntos es el valor más probable, y la curva que une los puntos de igual probabilidad, vamos a demostrar mas adelante, que es una elipse.

Supongamos que se tiene el caso particular en el que las incógnitas son función de las mediciones. Este es un caso particular del método de medidas indirectas y se lo conoce como método de medidas directas:

$$A = f(X; Y; Z)$$

Haciendo la propagación de errores:

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \sigma_z^2 + \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{[e_x e_y]}{n} + \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{[e_x e_z]}{n} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{[e_y e_z]}{n}$$

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \sigma_z^2 + \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Y} \sigma_{xy} + \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Z} \sigma_{xz} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial f}{\partial Z} \sigma_{yz}$$

Esto se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\sigma_A^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} \\ \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_A^2 = D \cdot \Sigma \cdot D^T$$

Siendo Σ la matriz varianza covarianza que en este caso es la de las observaciones.

"Esta matriz es de suma importancia en todo el cálculo de compensación, ya que del análisis de esta obtendremos los errores con los que obtuvimos nuestras incógnitas o con los que podríamos obtener nuestras incógnitas, y además nos dará una medida de la correlación que hay entre las variables y así poder trazar las distintas curvas de error. También en base a esta se realizan todos los test estadísticos para poder determinar si hay alguna medición que tenga que ser descartada por tener mucho error. Esta matriz de criterio puede ser obtenida tanto a priori como a posteriori y en base a esta se harán las comparaciones necesarias para saber si se trabajo en base a las hipótesis empleadas. En el caso de las redes topográficas o geodésicas esta matriz será muy útil para poder comparar los distintos proyectos y así obtener la red óptima."

En un caso más general si se tuvieran n ecuaciones con I incógnitas del tipo:

$U_i = f_i(X_1; X_2; \dots; X_I)$. Aplicando la propagación de errores para este caso, nuestra

matriz D resulta la matriz Jacobiana:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_I} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto en forma matricial nos queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\Sigma_{UU} = D \cdot \Sigma_{XX} \cdot D^T}$$

Expresión general para la propagación de la matriz varianza covarianza.

Si recordamos que en el método de medidas indirectas habíamos definido a la matriz A como la matriz de derivadas, entonces la expresión anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\boxed{\Sigma_{UU} = A \cdot \Sigma_{XX} \cdot A^T}$$

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA PARA EL MÉTODO DE MEDIDAS INDIRECTAS CON UNA ÚNICA SOLUCIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS¹

Obtendremos la matriz varianza covarianza de las incógnitas para el método de medidas indirectas utilizando la fórmula general de propagación de la matriz varianza covarianza. Partimos de la ecuación de medidas indirectas para el caso en que la matriz M ($A^T.P.A$) sea invertible, es decir, el método tenga una única solución por mínimos cuadrados.

$$X = M^{-1}.A^T.P.U = (A^T.P.A)^{-1}.A^T.P.U$$

Y según la fórmula de propagación de la matriz varianza covarianza:

$$\Sigma_{XX} = \left((A^T.P.A)^{-1}.A^T.P \right) \Sigma_{UU} \left((A^T.P.A)^{-1}.A^T.P \right)^T$$

La matriz varianza covarianza de las observaciones Σ_{UU} va a ser una matriz diagonal o simétrica en el caso de que las observaciones estén correlacionadas.

$$\Sigma_{UU} = \begin{bmatrix} \sigma_{U_1}^2 & \sigma_{U_1U_2} & \dots & \sigma_{U_1U_n} \\ \dots & \sigma_{U_2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{U_n}^2 \end{bmatrix}$$

Además sabemos que: $\sigma_U^2 = \frac{\sigma_0^2}{P_U}$ por lo tanto:

$$\Sigma_{UU} = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} P_{U_1}^{-1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & P_{U_2}^{-1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & P_{U_n}^{-1} \end{bmatrix} = \sigma_0^2.P^{-1}$$

Vamos a definir una nueva matriz a la que llamaremos matriz cofactor (que en este caso va a ser la matriz cofactor de las observables) como: $Q_{UU} = P^{-1}$

Por lo tanto: $\Sigma_{UU} = \sigma_0^2.Q_{UU}$

Continuando con lo anterior, tenemos lo siguiente:

¹ Mingo, O. y Ortiz, E. (1996). *Cálculo de Compensación de mediciones topográficas*. Pág (VI.19-IV.24)

$$\begin{aligned}
\Sigma_{XX} &= \left((A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \right) \Sigma_{UU} \cdot \left((A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \right)^T \\
\Sigma_{XX} &= \left((A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \right) \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \cdot \left((A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \right)^T \\
\Sigma_{XX} &= (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P)^T \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1T} \\
\Sigma_{XX} &= (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \sigma_0^2 \cdot P \cdot A \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \\
\Sigma_{XX} &= (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot \sigma_0^2 \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \\
\Sigma_{XX} &= (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot \sigma_0^2 \\
\Sigma_{XX} &= \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = \sigma_0^2 \cdot M^{-1} = \sigma_0^2 \cdot Q_{XX} = \sigma_0^2 \cdot P_X^{-1}
\end{aligned}$$

Q_{XX} es la matriz cofactor de las incógnitas y la diagonal de esta va a ser la inversa de los pesos de las incógnitas, siendo la matriz P_X (matriz de los pesos de las incógnitas y que no debe ser confundida con la matriz de pesos de las observaciones P) una matriz simétrica ya que las incógnitas presentan cierta correlación y debe ser tenido en cuenta si después se utilizaran estos valores como datos de partida.

Faltaría aclarar el valor del error medio de la unidad de peso cuando se tienen más de una incógnita para el caso particular cuando se tiene una única solución por mínimos cuadrados. No haremos la demostración de esto ya que más adelante se hará la demostración general del mismo.

$$\sigma_0^2 = \frac{[p \cdot v^2]}{n - I} \quad \text{Siendo} \quad [p \cdot v^2] = V^T \cdot P \cdot V$$

De alguna manera $n-I$ nos está indicando los grados de libertad o la sobreabundancia del sistema de ecuaciones u observaciones.

CAPITULO 2. REDES LIBRES Y EL PROBLEMA DEL DATUM.-

CASO MÁS GENERAL DE MEDIDAS INDIRECTAS¹

Hasta ahora hemos desarrollado el caso en el que teníamos una única solución por mínimos cuadrados, es decir, la matriz de coeficientes A es de rango completo (que todas sus columnas son L.I.). Pero puede pasar, como en el caso de las redes libres ("problema de diseño de orden cero") que la matriz A resulte deficiente de rango (sus columnas son L.D. siendo la dimensión del espacio nulo de la matriz A mayor que cero). Por lo tanto la matriz $M=A^T.P.A$ también es de rango incompleto y el sistema $M.X= A^T.P.U$ resulta compatible indeterminado, dándonos infinitas soluciones por mínimos cuadrados.

Supongamos, al igual que antes, que tenemos un sistema de n ecuaciones con I incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1I}x_I = u_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2I}x_I = u_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nI}x_I = u_n$$

O expresado matricialmente de la siguiente manera: $A_{n \times I} X_{I \times 1} = U_{n \times 1}$

Donde por lo general n es mayor que I, ya que para que el sistema resulte sobreabundante, n debe ser mayor al rango de la matriz A ($n > R(A)$).

Hasta el momento quedó demostrado que un sistema de n ecuaciones con I incógnitas en el cual el sistema es sobreabundante, la solución por mínimos cuadrados es $M.X=A^T.P.U$ siendo $M=A^T.P.A$.

Para que la solución por mínimos cuadrados sea única deben cumplirse cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

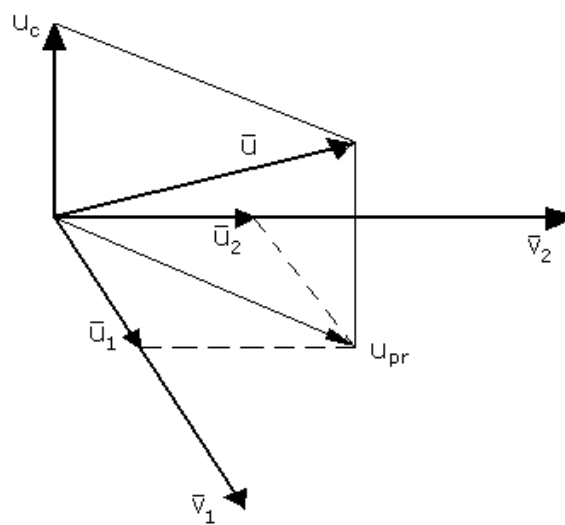
- Las columnas de A son L.I.
- La matriz A es de rango completo, $R(A)=I$.
- El espacio nulo de A, que se denota $\nu(A)$, contiene solo al vector 0, es decir, la dimensión del espacio nulo es $\dim \nu(A) = 0$.
- La matriz M es no singular, $\det M \neq 0$

¹ **Marquez, R. (2008). Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (5-15).**

Si alguna de estas condiciones no se cumple el sistema de ecuaciones normales $M.X=A^T.P.A$ tendrá infinitas soluciones por mínimos cuadrados, de entre las cuales se deberá seleccionar solo una, denominada la solución óptima.

Las matrices A y M tienen el mismo espacio nulo y por lo tanto el mismo rango¹. Además la matriz normal M es simétrica, se cumple que $M^T=M$ y los espacios filas y columnas son iguales ($E_{FM}=E_{CM}$). El espacio fila de M y el espacio nulo de M son complementos ortogonales².

Cualquier vector se puede escribir como la suma de sus dos componentes ortogonales. Pensemos en la siguiente figura:



$$\bar{u} = u_c + u_{pr}$$

Si consideramos que \bar{v}_1 y \bar{v}_2 pertenecen al subespacio V , generados por los vectores que pertenecen al espacio nulo de A o M , entonces \bar{u}_{pr} es la proyección ortogonal de \bar{u} sobre V y $u_c \in V^\perp$.

Pero el vector \bar{u}_{pr} tiene una propiedad de lo más interesante, es el punto en V más cercano a \bar{u} , "la mejor aproximación de los vectores de V hacia \bar{u} ."³ A este teorema se lo conoce como "Teorema de la mejor aproximación". Esto va a resultar de suma importancia para la interpretación de algunos resultados que se muestran a continuación.

Con todo esto estamos en condiciones de escribir lo siguiente:

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 1

² Ver en el Anexo B. Teorema 2

³ Ver en el Anexo B. Teorema 3

"Dos espacios son complementos ortogonales cuando cada uno de ellos contiene a todos los vectores perpendiculares a todos los vectores del otro. Si ambos espacios son subespacios de otro de mayor dimensión, cualquier vector de este último puede descomponerse en forma única en dos componentes ortogonales perteneciente cada una de ellas a uno de los subespacios complementos ortogonales."

Puesto que la matriz M , de tamaño $n \times I$, es deficiente de rango y además $EFM \perp v(M)$ entonces, el espacio vectorial de $\mathfrak{R}^I = EFM + v(M)$ y según el teorema de la dimensión, $I = R(M) + \dim v(M)$

Como dijimos que la matriz M es deficiente de rango, existen infinitas soluciones por mínimos cuadrados que pueden escribirse de la siguiente manera:

$$X = F + X_{MU}$$

F es una solución particular y X_{MU} representa a todos los vectores del espacio nulo de M (que van a ser igual a los de A por tener el mismo espacio nulo). Además X deberá satisfacer el sistema de ecuaciones normales de Gauss: $M.X = A^T.P.U$ y reemplazando:

$$M.X = A^T.P.U \Rightarrow M.(F + X_{MU}) = A^T.P.U \Rightarrow M.F + M.X_{MU} = A^T.P.U \Rightarrow M.F = A^T.P.U$$

Ya que $M.X_{MU} = 0$ porque $X_{MU} \in v(M)$.

La solución buscada tendrá una parte fija F y otra arbitraria X_{MU} que origina la indeterminación del sistema normal de Gauss cuya significación geométrica queda definida (ya que podemos encontrar infinitas soluciones del tipo $X = F + X_{MU}$). Por lo tanto queda encontrar la expresión de esta solución.

Quedó demostrado que cualquier vector perteneciente a un espacio, que en nuestro caso es \mathfrak{R}^I , puede descomponerse en la suma de dos subespacios ortogonales, y como M es una matriz simétrica, se puede descomponer en el EFM y el $v(M)$, por lo tanto a la solución particular F la podemos escribir como la suma de dos subespacios ortogonales de M :

$F = X_F + X_{MU}$, donde $X_F \in EFM$ y $X_{MU} \in v(M)$. Reemplazando en el sistema normal:

$$M.(X_F + X_{MU}) = A^T.P.U \Rightarrow M.X_F + M.X_{MU} = A^T.P.U \Rightarrow$$

$$M.X_F = A^T.P.U$$

Además X_F tiene una propiedad de lo más interesante, según el teorema de la mejor aproximación, X_F es una solución de mínimos cuadrados que tiene mínima longitud o mínima norma.

Por lo tanto conviene elegir como solución al sistema normal de Gauss, aquella que pertenezca al EFM y la otra que pertenezca a $\nu(M)$ y que además esta última sea igual a cero. Ya que de esta manera F va a ser mínima ($F=X_F+X_{MU}$ es mínima si X_{MU} es igual a cero). Quedándonos $F^T F = X_F^T X_F = \text{mín}$ (por teorema de la mejor aproximación).

Esta va a ser la solución óptima, el por qué de esto lo veremos a continuación de manera intuitiva cuando expliquemos como compensar una red libre, y de manera rigurosa con la matriz S-transformación de Baarda. Pero podemos decir que lo que se busca es que $V^T P V = \text{mín}$. y que $X^T X = \text{mín}$.

Todavía queda pendiente encontrar a X_F . Sabemos que M tiene como dimensión del espacio nulo a d y que $d=I-R(M)$, con I igual al número de incógnitas del sistema normal de Gauss. Además M tiene d vectores pertenecientes a su espacio nulo que los podemos llamar: $N_1; N_2; \dots; N_d$.

F puede expresarse como la suma del vector X_F perteneciente al EFM y la suma de todos los vectores que generan el espacio nulo de M , $\nu(M)$:

$$F = X_F + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \dots + \alpha_d N_d$$

$$X_F = F - \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2 - \dots - \alpha_d N_d$$

donde α_i son escalares a determinar.

Si multiplicamos escalarmente por N_i con $i=1; 2; \dots; d$ a la ecuación anterior, obtenemos d ecuaciones del siguiente tipo:

$$N_1^T X_F = N_1^T F - \alpha_1 N_1^T N_1 - \alpha_2 N_1^T N_2 - \dots - \alpha_d N_1^T N_d$$

$$N_2^T X_F = N_2^T F - \alpha_1 N_2^T N_1 - \alpha_2 N_2^T N_2 - \dots - \alpha_d N_2^T N_d$$

.....

$$N_d^T X_F = N_d^T F - \alpha_1 N_d^T N_1 - \alpha_2 N_d^T N_2 - \dots - \alpha_d N_d^T N_d$$

Como N_i es perpendicular a X_F ($N_i \in \nu(M)$ y $X_F \in EFM$) el sistema de ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$N_1^T F = \alpha_1 N_1^T N_1 + \alpha_2 N_1^T N_2 + \dots + \alpha_d N_1^T N_d$$

$$N_2^T F = \alpha_1 N_2^T N_1 + \alpha_2 N_2^T N_2 + \dots + \alpha_d N_2^T N_d$$

.....

$$N_d^T F = \alpha_1 N_d^T N_1 + \alpha_2 N_d^T N_2 + \dots + \alpha_d N_d^T N_d$$

Este es un sistema de d ecuaciones con d incógnitas α_i con $i=1; 2; \dots; d$. Que va a tener una única solución ya que N_i con $i=1; 2; \dots; d$ son todos vectores independientes entre si. Y que al reemplazarlos en la ecuación:

$X_F = F - \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2 - \dots - \alpha_d N_d$, nos da la solución buscada que cumple con la condición de:

$V^T.P.V = \text{mín.}$ (mínimos cuadrados).

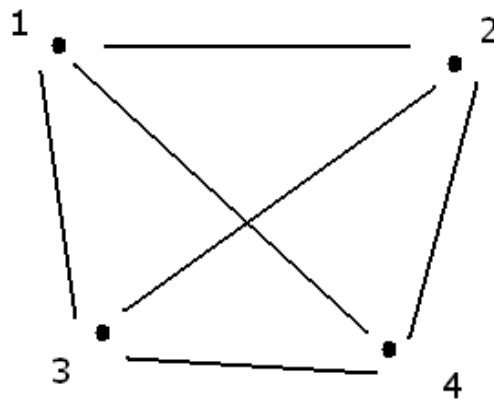
$X^T.X = \text{mín.}$ (mínima norma).

F es una solución particular del sistema de ecuaciones normales de Gauss, cualquier solución del sistema se corresponderá con ciertos escalares α_i .

CAUSA DEL DEFECTO DEL DATUM

Haremos una interpretación geométrica intuitiva de porque la solución por mínimos cuadrados y mínima norma es la solución óptima que estamos buscando.

Pensemos en una red de 4 puntos con coordenadas planimétricas $X; Y$ en el cual se miden todos sus lados y sus dos diagonales. Además no contamos con ningún punto fijo ni orientación de alguno de sus lados, solo tenemos coordenadas aproximadas de los vértices necesarios para resolver el problema.



Las mediciones que se realizaron son las distancias entre los puntos:

$D_{12}; D_{14}; D_{13}; D_{34}; D_{32}; D_{24}$.

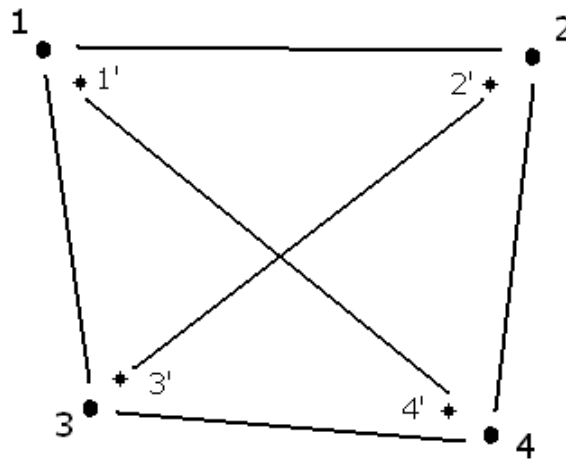
Las incógnitas serán las correcciones que le tengo que hacer a las coordenadas X e Y aproximadas de cada uno de los puntos:

$\Delta x_1; \Delta y_1; \Delta x_2; \Delta y_2; \Delta x_3; \Delta y_3; \Delta x_4; \Delta y_4$

Como podemos ver tenemos un sistema de 6 ecuaciones con 8 incógnitas. Si bien a priori uno estaría tentado a pensar que el sistema no es sobreabundante, mirando la figura nos podemos dar cuenta que no van a existir 4 puntos que satisfagan todas las distancias medidas, es más, si solo tuviéramos 5 mediciones nos quedarían dos triángulos con sus

tres lados medidos y de esta manera existiría una solución que satisfaga todas mis mediciones ya que no habría sobreabundancia de datos, por lo tanto podemos decir que tenemos una distancia medida de mas, que es nuestra sobreabundancia. $R(A) = 5 < 6$
 Más adelante demostraremos esto con mayor rigurosidad.

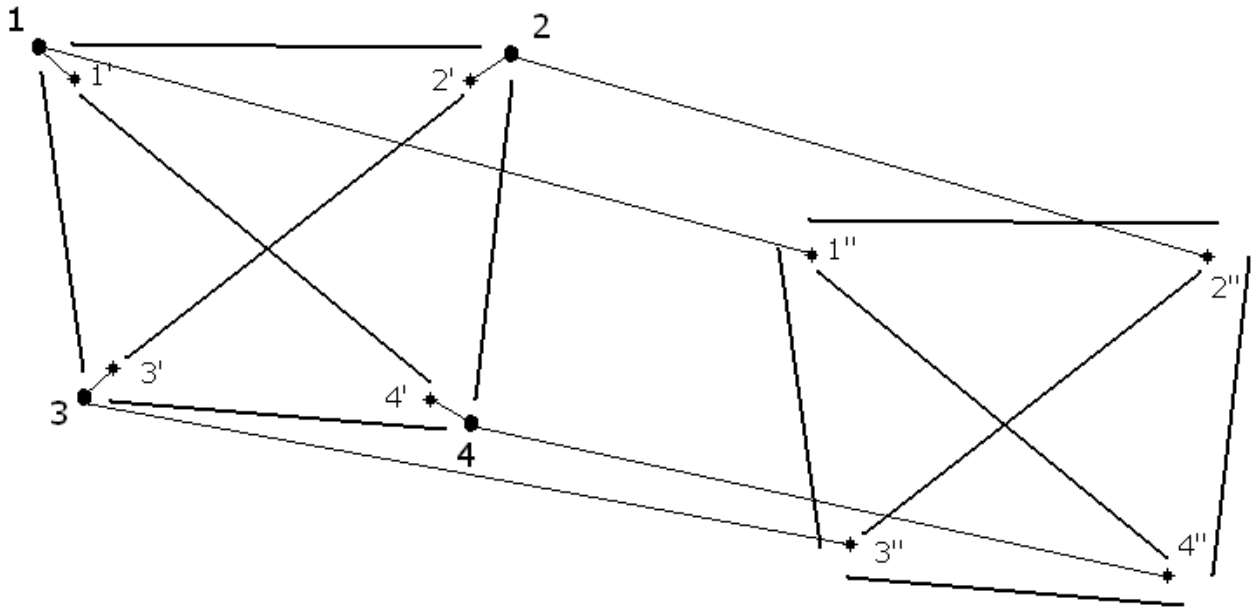
Mirando la siguiente figura, supongamos que obtuvimos la solución por mínimos cuadrados del problema anterior quedando de la siguiente manera:



Vamos a ver a que corresponde cada cosa. El vector residuos V va a ser igual a la resta entre las distancias medidas y las distancias entre los puntos compensados indicados con el apóstrofe y el vector incógnita X va a ser igual a la diferencia entre los puntos de coordenadas aproximadas y los puntos compensados, es decir, las correcciones que tengo que hacerle a mis coordenadas aproximadas.

$$V = \begin{bmatrix} D_{12} - D_{1'2'} \\ D_{14} - D_{1'4'} \\ D_{13} - D_{1'3'} \\ D_{34} - D_{3'4'} \\ D_{32} - D_{3'2'} \\ D_{24} - D_{2'4'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121'2' \\ 141'4' \\ 131'3' \\ 343'4' \\ 323'2' \\ 242'4' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 - \Delta x_{1'} \\ \Delta x_2 - \Delta x_{2'} \\ \Delta x_3 - \Delta x_{3'} \\ \Delta x_4 - \Delta x_{4'} \\ \Delta x_5 - \Delta x_{5'} \\ \Delta x_6 - \Delta x_{6'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{11'} \\ \Delta x_{22'} \\ \Delta x_{33'} \\ \Delta x_{44'} \\ \Delta x_{55'} \\ \Delta x_{66'} \end{bmatrix}$$

Ahora bien. Como dijimos anteriormente, este sistema de ecuaciones no tiene puntos fijos ni orientación, solo está determinado el factor de escala por las propias mediciones realizadas. Si yo elijo cualquier otra solución $1''$; $2''$; $3''$ y $4''$ de tal manera que la distancia entre estos puntos compensados sea igual a la distancia entre los otros puntos $1'$ $2'$ $3'$ y $4'$, también va a ser solución por mínimos cuadrados ya que el vector residuos no cambiará, lo que variará va ser el vector incógnita. Pudiéndose interpretar de la siguiente manera:



Quedando el vector incógnita como la diferencia entre los puntos de coordenadas aproximadas y los puntos con coordenadas compensadas con doble apóstrofe:

$$X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 - \Delta x_{1''} \\ \Delta x_2 - \Delta x_{2''} \\ \Delta x_3 - \Delta x_{3''} \\ \Delta x_4 - \Delta x_{4''} \\ \Delta x_5 - \Delta x_{5''} \\ \Delta x_6 - \Delta x_{6''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{11''} \\ \Delta x_{22''} \\ \Delta x_{33''} \\ \Delta x_{44''} \\ \Delta x_{55''} \\ \Delta x_{66''} \end{bmatrix}$$

Como podemos ver, los puntos 1''; 2''; 3'' y 4'' también son solución por mínimos cuadrados, ya que satisfacen la condición $V^T.P.V = \text{mín}$, con la diferencia que es otro el vector incógnita. Es por eso de que entre las infinitas soluciones por mínimos cuadrados elegimos aquella en el que el vector incógnita sea mínimo.

El problema de tener infinitas soluciones se debe a un defecto del datum, ya que uno no conoce todos los atributos del sistema de referencia (posición, orientación y el factor de escala) o restricciones del mismo. Es decir, los grados de libertad del sistema son desconocidos ya sea en su totalidad o alguno de ellos.

En el caso de una red planimétrica, con dos puntos fijos, esta queda atada a un número suficiente de restricciones y la solución por mínimos cuadrados es única ya que se conocen todos los grados de libertad o restricciones del sistema de referencia. Parámetros de traslación determinados con un solo punto fijo, parámetro de orientación que viene dado por el ángulo de cálculo que forma el vector que une los dos puntos fijos

con el eje X del sistema y el factor de escala que es igual a la distancia entre los dos puntos fijos. En este caso el datum o el sistema de referencia son conocidos.

Por lo tanto en una red planimétrica el máximo grado de libertad o restricciones es 4 que se puede ir reduciendo a medida que contemos con datos del sistema.

En el caso de una red medida con G.P.S. los puntos tendrán tres coordenadas (X; Y; Z) y lo que se medirán serán vectores espaciales cuyas componentes serán (ΔX ; ΔY ; ΔZ). Un vector en el espacio está definido por 6 parámetros o grados de libertad (tres de traslación, dos de orientación y un factor de escala).

Al igual que el caso anterior con dos puntos fijos de coordenadas X; Y; Z conocidas y algún otro dato como una diferencia de altura o alguna coordenada de otro vértice, el datum queda determinado y podemos calcular todos los parámetros que definen al sistema de referencia. Siendo los parámetros de traslación calculables con un solo punto fijo, el factor de escala igual a la distancia entre los puntos fijos y el rumbo y la

orientación definidos de la siguiente manera $\psi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ y $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right)$

Si la red esta medida con G.P.S. tres restricciones están determinadas (rumbo, orientación y factor de escala), lo cual con un solo punto fijo el sistema de referencia queda determinado, se conoce el datum y la solución por mínimos cuadrados es única. Es por eso que en las mensuras cuando se pide la georreferenciación es necesaria un punto fijo de coordenadas conocidas.

En el caso de las redes libres medidas con G.P.S. el problema es que no se conoce el origen del datum.

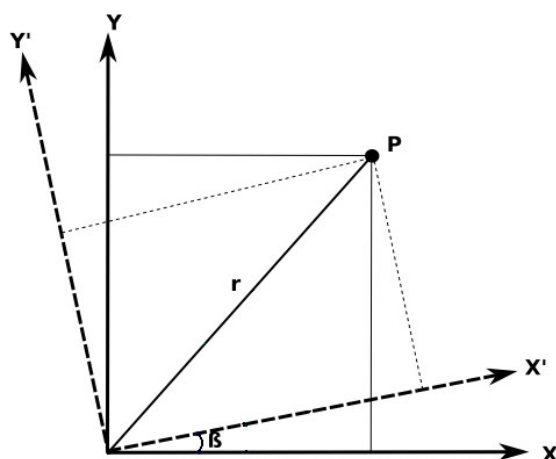
DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ DE RESTRICCIONES¹

Como mencionamos anteriormente, el defecto del datum se debe a la falta de conocimiento del sistema de referencia o lo que es lo mismo la falta de algunos o el total de los parámetros que definen al mismo. Para poder conocer estos es necesario plantear como esta determinado un sistema de referencia en base a las coordenadas de puntos que se tienen, ya sea bidimensional, tridimensional o si se tienen algunos parámetros conocidos del mismo como orientación, traslación, etc.

Para hacer más sencillo el razonamiento plantearemos como se obtienen los diferentes grados de libertad y así la matriz de restricciones en un sistema cartesiano bidimensional.

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(228-235).**

Arranquemos planteando la ecuación de rotación del sistema de ejes coordenados en sentido antihorario o **sinistrorsum**.



$$X' = X \cdot \cos\beta + Y \cdot \sin\beta$$

$$Y' = -X \cdot \sin\beta + Y \cdot \cos\beta$$

En nuestros casos en donde si bien el datum no es conocido, se puede conocer un sistema de referencia aproximado por las coordenadas de los vértices aproximados necesarios para la compensación, por lo tanto podemos considerar una corrección diferencial de un sistema a otro en cuanto al ángulo de giro del sistema $d\beta$. Con lo cual en el sistema de ecuaciones anterior, el coseno de un ángulo chico es igual a 1 y el seno de un ángulo chico es igual al ángulo, entonces nos quedará:

$$X' = X + Y \cdot d\beta$$

$$Y' = -X \cdot d\beta + Y$$

Si tenemos en cuenta que existe una traslación diferencial en X e Y de la forma da y db , entonces el sistema será:

$$X' = X + Y \cdot d\beta + da$$

$$Y' = -X \cdot d\beta + Y + db$$

Por último se debe tener en cuenta un cambio de escala de que representará en forma general y de manera muy aproximada (debido a considerar que se conoce el datum en forma aproximada por los puntos con coordenadas que se tienen de la red) la transformación bidimensional de un sistema de ejes cartesianos, siendo esta:

$$X' = (X + Y \cdot d\beta + da) \cdot (1 + de)$$

$$Y' = (-X \cdot d\beta + Y + db) \cdot (1 + de)$$

Y teniendo en cuenta que el producto entre dos diferenciales va a ser muy chico, se despreciarán los términos que contengan a estos.

$$X' = X + Y.d\beta + da + X.de$$

$$Y' = -X.d\beta + Y + db + Y.de$$

Y las correcciones diferenciales a las coordenadas valdrán:

$$dx = X' - X = Y.d\beta + da + X.de$$

$$dy = Y' - Y = -X.d\beta + db + Y.de$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y & X \\ 0 & 1 & -X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} da \\ db \\ d\beta \\ de \end{bmatrix}$$

Para el caso de una red en donde se tengan n puntos de coordenadas aproximadas, y haciendo una **rotación dextrorsum** (en sentido contrario a la anterior), el sistema nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ \dots \\ \dots \\ dx_n \\ dy_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_1 & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & -Y_n & X_n \\ 0 & 1 & X_n & Y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} da \\ db \\ d\beta \\ de \end{bmatrix}$$

Y siendo las correcciones de las coordenadas igual a x y dt los distintos parámetros del sistema de referencia, nos queda en forma matricial lo siguiente:

$$x = E^T . dt$$

E es la matriz de restricciones, la forma de esta puede ir variando de acuerdo a los distintos parámetros del sistema que se conozcan.

Si no se conoce ninguna restricción o grado de libertad del sistema, entonces dicha matriz será como la que escribimos anteriormente (por ejemplo una triangulación pura).

Si lo que se conoce es el factor de escala (se midieron las distancias), entonces la matriz de restricciones será de la siguiente manera:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -Y_1 & X_1 & -Y_2 & X_2 & \dots & \dots & -Y_{n-1} & X_{n-1} & -Y_n & X_n \end{bmatrix}$$

Si se conoce la orientación de alguno de sus lados, entonces dicha matriz es:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & \dots & X_{n-1} & Y_{n-1} & X_n & Y_n \end{bmatrix}$$

Para el caso en el que se tenga un punto fijo, es decir, se conocen los parámetros de traslación (es muy raro que solo se conozca uno de los dos parámetros de traslación, en ese caso el razonamiento es similar), la matriz queda:

$$E = \begin{bmatrix} -Y_1 & X_1 & -Y_2 & X_2 & \dots & \dots & -Y_{n-1} & X_{n-1} & -Y_n & X_n \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & \dots & X_{n-1} & Y_{n-1} & X_n & Y_n \end{bmatrix}$$

Cuando se conozcan varios grados de libertad, la matriz de restricciones se obtendrá como una combinación de alguna de estas posibilidades.

En el caso tridimensional, la ecuación matricial que nos vincula un sistema de ejes cartesianos con otro en el espacio viene dado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = (1 + de) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \end{bmatrix}$$

La matriz rotación, es la matriz de Euler cuyas componentes son obtenidas a partir de los ángulos de Euler que no son otra cosa que los giros que se producen en cada uno de los ejes $X \rightarrow \Omega$; $Y \rightarrow \Phi$ y $Z \rightarrow K$.

El factor de escala viene dado por de y los parámetros de traslación no son más que $da; db; dc$. Para poder hacer la transformación entre un sistema y otro es necesario tener dos puntos con coordenadas planialtimétricas en ambos sistemas y contar con algún otro dato más que defina mi sistema, ya que son 7 las incógnitas a conocer y voy a necesitar 7 parámetros (6 que se obtienen con las coordenadas de los puntos conocidos y otro que podría ser la altitud de un punto en ambos sistemas).

La matriz de rotación o matriz de Euler viene dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \text{Cos}\Phi \cdot \text{Cos}K \\ a_{21} &= \text{Cos}\Omega \cdot \text{Sen}K + \text{Sen}\Omega \cdot \text{Sen}\Phi \cdot \text{Cos}K \\ a_{31} &= \text{Sen}\Omega \cdot \text{Sen}K - \text{Cos}\Omega \cdot \text{Sen}\Phi \cdot \text{Cos}K \\ a_{12} &= -\text{Cos}\Phi \cdot \text{Sen}K \\ a_{22} &= \text{Cos}\Omega \cdot \text{Cos}K - \text{Sen}\Omega \cdot \text{Sen}\Phi \cdot \text{Sen}K \\ a_{32} &= \text{Sen}\Omega \cdot \text{Cos}K + \text{Cos}\Omega \cdot \text{Sen}\Phi \cdot \text{Sen}K \\ a_{13} &= \text{Sen}\Phi \\ a_{23} &= -\text{Sen}\Omega \cdot \text{Cos}\Phi \\ a_{33} &= \text{Cos}\Omega \cdot \text{Cos}\Phi \end{aligned}$$

Y suponiendo al igual que antes que todos los parámetros a determinar son lo suficiente pequeños, entonces el coseno de estos valdrá 1 y el seno será igual al ángulo, siendo el producto entre dos parámetros pequeños (ya sea ángulos o factor de escala) igual a cero, por lo tanto, la matriz de rotación R será igual a:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -dK & d\Phi \\ dK & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

Y con esto obtenemos la nueva ecuación matricial que vincula dos sistemas de coordenadas tridimensionales.

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = (1 + de) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -dK & d\Phi \\ dK & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \end{bmatrix}$$

Haciendo la distribución correspondiente obtendremos las ecuaciones para cada una de las coordenadas

$$\left. \begin{array}{l} X' = X - Y.dK + Z.d\Phi + X.de + da \\ Y' = X.dK + Y - Z.d\Omega + Y.de + db \\ Z' = -X.d\Phi + Y.d\Omega + Z + Z.de + dc \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = X' - X = -Y.dK + Z.d\Phi + X.de + da \\ dy = Y' - Y = X.dK - Z.d\Omega + Y.de + db \\ dz = Z' - Z = -X.d\Phi + Y.d\Omega + Z.de + dc \end{array}$$

Que lo podemos expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y & X \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X & Y \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ de \end{bmatrix}$$

Para el caso en que se tengan n puntos, el sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y & X \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X & Y \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 & Z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_n & 0_n & 0_n & 0_n & Z_n & -Y_n & X_n \\ 0_n & 1_n & 0_n & -Z_n & 0_n & X_n & Y_n \\ 0_n & 0_n & 1_n & Y_n & -X_n & 0_n & Z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ de \end{bmatrix}$$

Y siendo las correcciones a las coordenadas x y los parámetros que determinan el sistema de referencia dt nos queda el sistema anterior de la siguiente manera:

$x = E^T \cdot dt$ Siendo E la matriz de restricciones. Esta se puede esparcir en función de la cantidad de puntos que tenga la red, es decir, para una red de 7 puntos, se tendrán 21 correcciones, cada uno a las componentes X ; Y ; Z . con lo cual la matriz E resulta de 7×21 . Si se conoce alguno de los parámetros del sistema, se realizará la eliminación de estos en la matriz E , de la misma manera que se hizo para el caso bidimensional.

El caso más común en el que se trabaje en tres dimensiones, es cuando se hacen mediciones de vectores GPS, para este tipo de trabajos, lo único que no está determinado son los parámetros de traslación, ya que con los vectores GPS puedo determinar el factor de escala y los distintos parámetros de rotación como se explico anteriormente, con lo cual la matriz de restricciones E para este caso en particular en el que se tienen n puntos, viene dada de la siguiente manera:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1_n & 0_n & 0_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0_n & 1_n & 0_n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0_n & 0_n & 1_n \end{bmatrix}$$

CAPITULO 3. SOLUCIÓN AL “ZOD” CON MATRIZ SEUDOINVERSA.-

Este capítulo se basó en el apunte de *Marquez, R. (2008). Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (15-33).*

Como vimos anteriormente, encontramos una solución entre las infinitas soluciones por mínimos cuadrados, que es aquella que tiene mínima norma.

En este capítulo demostraremos que dicha solución puede hallarse con la matriz pseudoinversa, utilizando para llegar a esta, los autovalores y autovectores de las matrices en cuestión (A y M).

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Un vector \bar{v} distinto de cero es un autovector de A si para cierto escalar λ se cumple que $A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$.

El escalar λ (que puede ser cero) se llama autovalor de A correspondiente o asociado al autovector \bar{v} .

Este escalar es el resultado de la determinación de las raíces de un polinomio que se lo llama ecuación característica. Por lo tanto van a existir tantos autovalores como el grado del polinomio a resolver.

Para poder obtener a estos, se debe resolver lo siguiente¹:

- *Un escalar λ es un autovalor de A si y solo si:*

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (\text{Ecuación característica})$$

- *Un vector \bar{v} es un autovector de A correspondiente a un autovalor λ si y solo si \bar{v} es una solución no trivial del sistema:*

$$(A - \lambda I) \cdot \bar{v} = 0.$$

Ahora veremos algunas propiedades relacionadas con los autovalores y autovectores que tiene la matriz M ($M = A^T \cdot P \cdot A$) por ser simétrica.

1. Los autovectores de M son mutuamente ortogonales.
2. Los autovalores de M son mayores o iguales a cero.

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 4.

3. El número de autovalores iguales a cero es igual a la dimensión del espacio nulo de M .

Demostraremos estas tres propiedades ya que serán utilizadas posteriormente:

1. Sea M una matriz simétrica de orden $I \times I$ (con I igual al número de incógnitas que tiene el sistema normal de Gauss) y $\lambda_i; \lambda_j$ con $i \neq j$, dos autovalores correspondientes a los autovectores $\bar{v}_i; \bar{v}_j$, entonces:

$$M \cdot \bar{v}_i = \lambda_i \cdot \bar{v}_i \Rightarrow \bar{v}_i^T \cdot M^T = \lambda_i \cdot \bar{v}_i^T \Rightarrow \bar{v}_i^T \cdot M^T \cdot \bar{v}_j = \lambda_i \cdot \bar{v}_i^T \cdot \bar{v}_j$$

Como M es simétrica y \bar{v}_j es un autovector correspondiente a λ_j entonces:

$$\bar{v}_i^T \cdot M \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_i^T \cdot \bar{v}_j \Rightarrow \bar{v}_i^T \cdot \lambda_j \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_i^T \cdot \bar{v}_j \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i) \cdot \bar{v}_i^T \cdot \bar{v}_j = 0$$

Y como habíamos dicho que $\lambda_i \neq \lambda_j$ entonces $\bar{v}_i^T \cdot \bar{v}_j = 0 \Rightarrow \bar{v}_i \perp \bar{v}_j$

Los vectores son ortogonales.

2. Si M es una matriz de $I \times I$ simétrica, podemos escribirla como el producto de $A^T \cdot A$, donde A es de $n \times I$. Sea λ_j un autovalor de M y \bar{v}_j un autovector, entonces:

$$M \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_j \Rightarrow A^T \cdot A \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_j \Rightarrow \bar{v}_j^T \cdot A^T \cdot A \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_j^T \cdot \bar{v}_j \Rightarrow$$

$$(A \cdot \bar{v}_j)^T \cdot A \cdot \bar{v}_j = \lambda_j \cdot \bar{v}_j^T \cdot \bar{v}_j \Rightarrow \|A \cdot \bar{v}_j\|^2 = \lambda_j \cdot \|\bar{v}_j\|^2 \Rightarrow \lambda_j - \left(\frac{\|A \cdot \bar{v}_j\|}{\|\bar{v}_j\|} \right)^2 \geq 0$$

3. Toda matriz M $I \times I$ simétrica puede escribirse como $M = A^T \cdot A$ donde A es una matriz $n \times I$. Un autovalor de M es nulo si solo si $A \cdot \bar{v}_j = 0$

$$M \cdot \bar{v}_j = A^T \cdot A \cdot \bar{v}_j = A^T \cdot (A \cdot \bar{v}_j) = \lambda_j \cdot \bar{v}_j$$

Si $M \cdot \bar{v}_j = 0 \Rightarrow \lambda_j \cdot \bar{v}_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$ puesto que $\bar{v}_j \neq 0$.

Si $\lambda_j = 0 \Rightarrow \lambda_j \cdot \bar{v}_j = 0 \Rightarrow A \cdot \bar{v}_j = 0$ puesto que $A \neq 0$.

DIAGONALIZACIÓN Y ORTOGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS

Se define a la diagonalización de una matriz de la siguiente manera. Si una matriz A $n \times n$ es semejante a una matriz diagonal D , es decir existe una matriz invertible P , tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, se llama diagonalizable. También se dice que A se puede diagonalizar.

A continuación veremos cuando una matriz es diagonalizable y como llegar a esta:

Sea una matriz A $n \times n$ ¹:

- A es diagonalizable si tiene n autovectores linealmente independientes.
- A es diagonalizable con $P^{-1}.A.P = D$ entonces las columnas de P son autovectores de A y los elementos de D son los autovalores de A correspondientes.

Es importante saber que una matriz diagonalizable no necesita tener todos los autovalores distintos, basta con que para cada autovalor la multiplicidad algebraica y geométrica sea igual.

Se dice que A es ortogonalmente diagonalizable si se puede diagonalizar por una matriz Q invertible y una matriz diagonal D , de manera que Q sea ortogonal. Así $Q^{-1}.A.Q = D$ o lo que es lo mismo $Q^T.A.Q = D$, es decir $Q^{-1} = Q^T$.

En general se dice que dos matrices A y B son ortogonalmente semejantes si hay una matriz Q ortogonal tal que $Q^{-1}.A.Q = B$ o $Q^T.A.Q = B$.

Así, una matriz ortogonalmente diagonalizable es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.

Un teorema muy importante, que para este trabajo resulta sustancial, es que una matriz ortogonalmente diagonalizable, es simétrica¹. Como es el caso de la matriz M . Lo importante de esto, es que el inverso es cierto. Cualquier matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable.

Si la matriz Q está compuesta por los autovectores de una matriz simétrica, esta va a ser ortogonal (propiedad que habíamos demostrado anteriormente). Pero es importante aclarar que en el caso de que la matriz simétrica resulte singular, va a tener una cantidad de autovalores nulos igual a la dimensión de su espacio nulo. Si nosotros queremos invertir a la matriz M , sabemos que no lo vamos a poder hacer porque es singular. Ahora si la reemplazamos por su descomposición en forma ortogonal, estas si se van a poder invertir, (y es lo que se hará mas adelante para poder obtener la solución óptima). Para poder hacerlo, vamos a tener que eliminar los autovalores nulos como así también los autovectores correspondientes. Estos $n-d$ autovectores van a ser

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 5

una base ortonormal del espacio fila de M cuya dimensión va a ser igual al rango de la matriz M .

Cuando apliquemos esto al sistema de ecuaciones normales ($M.X = A^T P.U$) se obtendrá, la solución por mínimos cuadrados que pertenecerá al espacio fila de la matriz normal M , por tanto su norma es mínima como habíamos demostrado anteriormente por pertenecer al espacio fila de la matriz. La solución a esto será:

$$X = Q.\Lambda^{-1}Q^T.A^T.P.U$$

Mas adelante demostraremos esta misma expresión de manera rigurosa.

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD)

El objetivo de este método es factorizar cualquier matriz A $m \times n$ tal que $A = W.\Sigma.V^T$ donde W es $m \times m$, V es $n \times n$ y ambas son ortogonales. Σ es una matriz $m \times n$ que contiene un bloque diagonal superior izquierdo con elementos positivos de magnitud decreciente y los elementos restantes son cero.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & & | & 0 \\ & & | & \\ - & - & - & - \\ 0 & & | & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \sigma_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_r \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Consideremos la matriz simétrica $A^T.A$ $n \times n$, como vimos anteriormente es ortogonalmente diagonalizable y tiene autovalores $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ y $\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n$ son los autovectores correspondientes que forman una base ortonormal.

$$V = [\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n]$$

Habíamos demostrado que una matriz simétrica tiene todos sus autovalores mayores o iguales a cero. Las raíces cuadradas de estos serán los elementos de la matriz D .

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}; \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}; \dots = \sigma_r = \sqrt{\lambda_r} \geq 0$$

Además, también habíamos demostrado que $\|A.\bar{v}_j\|^2 = \lambda_j.\|\bar{v}_j\|^2$ si los vectores $\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n$ son ortonormales, entonces se puede probar que su módulo es igual a uno.

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 6

Por lo tanto $\lambda_i = \|A \cdot \bar{v}_i\|^2$, y llegamos a que: $\lambda_i = \|A \cdot \bar{v}_i\|^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i = \|A \cdot \bar{v}_i\|$. Los σ_i son llamados valores singulares de A , y son los elementos diagonales de D en Σ .

Por último definiremos a la matriz W de la siguiente manera. En primer lugar escribiremos el vector $\bar{w}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \cdot \bar{v}_i$ con $i=1; 2; \dots; r$

Como los vectores de W son ortonormales, entonces:

$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (A \cdot \bar{v}_i) \cdot (A \cdot \bar{v}_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (A^T \cdot A \cdot \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_j = \frac{\lambda_i \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j}{\sigma_i \sigma_j}$$

Y como los vectores de V también son ortonormales, entonces:

$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = \begin{cases} = 0 \Rightarrow i \neq j \\ = 1 \Rightarrow i = j \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = \frac{\lambda_i}{\sigma^2} = 1 \end{cases}$$

Entonces la matriz W queda definida como $W = [\bar{w}_1; \bar{w}_2; \dots; \bar{w}_m]$, resultando los \bar{w}_i ortonormales.

Con todos estos elementos estamos en condiciones de decir que la descomposición en valores singulares de una matriz cualquiera A , viene dada de la siguiente manera¹:

$$A = W \cdot \Sigma \cdot V^T$$

MATRIZ SEUDOINVERSA

Si A es cualquier matriz $m \times n$, puede aplicarse la descomposición en valores singulares o SDV de A para definir una matriz A^+ $n \times m$ tal que $A^+ = A^{-1}$ para el caso especial en que sea invertible (A sea cuadrada y no singular).

Sea $A = W \cdot \Sigma \cdot V^T$ una SVD de una matriz A $m \times n$. La pseudoinversa o inversa de Moore-Penrose de A es la matriz A^+ $n \times m$ definida por:

$A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot W^T$ en donde la matriz Σ^+ $n \times m$ viene dada de la siguiente manera:

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 7

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & & | & 0 \\ & & | & \\ - & - & - & - \\ 0 & & | & 0 \end{bmatrix}$$

D es la diagonal $r \times r$ cuyos elementos diagonales son los valores singulares positivos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ de A .

Se puede demostrar que A^+ es la única matriz B que satisface las siguientes condiciones de Moore-Penrose:

- $A.B.A = A$
- $B.A.B = B$
- $(A.B)^t = A.B$
- $(B.A)^t = B.A$

MÍNIMOS CUADRADOS Y NORMA MÍNIMA

Vamos a volver a desarrollar brevemente el método de mínimos cuadrados, pero ahora de otra manera, ya que así será más fácil relacionarlo con el resultado que estamos buscando.

Tenemos un sistema inconsistente del tipo:

$$A.X = U \rightarrow A.X - U = V ; \text{ siendo } V \text{ el vector error.}$$

El principio de mínimos cuadrados establece que la norma del vector error debe ser mínima, entonces:

$$\|V\| = \text{mín} \Rightarrow \|A.X - U\| = \|V\| = \text{mín} .$$

El problema radica en encontrar a X tal que la norma del vector error sea mínima.

De acuerdo con el teorema de la mejor aproximación, $\|A.X - U\|$ va a ser mínima solo si $A.X$ es la proyección ortogonal U_{pr} de U sobre $Col(A)$ (espacio generado por las columnas de A), entonces:

$$\|V\| = \text{mín} \Rightarrow A.X = U_{pr} \Rightarrow U - A.X = U_c$$

Como siempre va a existir U_{pr} , entonces siempre va a existir al menos una solución por mínimos cuadrados.

Si tenemos en cuenta los pesos, se puede demostrar que la expresión de mínimos cuadrados nos queda como habíamos mencionado anteriormente: $A^T . P . A . \tilde{X} = A^T . P . U$ ¹

Pero $A^T . P . A = M$ puede tener infinitas soluciones por mínimos cuadrados.

Si A es $m \times n$ y su rango es $r < n$, su nulidad es mayor o igual a uno, en este caso cualquier vector de la forma $\tilde{X} + Z$ con Z distinto de cero y que pertenezca al espacio nulo de A es solución de mínimos cuadrados porque:

$$U - A . (\tilde{X} + Z) = U - A . \tilde{X} - A . Z = U - A . \tilde{X} \text{ ya que } A . Z = 0 \rightarrow Z \in v(A).$$

Si planteamos el principio de mínimos cuadrados y agregamos como condición que el vector \tilde{X} tenga norma mínima o longitud mínima, entonces la solución es mínima y se puede demostrar que la matriz pseudoinversa cumple estos dos requisitos².

Para poder obtener la pseudoinversa de cualquier matriz, debemos hacer una descomposición en valores singulares y luego aplicar la definición de matriz pseudoinversa.

Para el caso en el que tenemos el sistema $A . X = U$, la solución de mínimos cuadrados y norma mínima será:

$$X = A^+ . U \quad \text{Con} \quad A^+ = V . \Sigma^+ . W^T$$

Notar que de esta manera, con la descomposición en valores singulares SDV y la matriz pseudoinversa, encontramos la solución buscada. Incluso para el sistema de ecuaciones normales $M . X = A^T . P . U$ ya que vamos a tener a:

$$X = M^+ . A^T . P . U$$

SOLUCIÓN CON MATRIZ SEUDOINVERSA BAJO EQUIVALENCIA ORTOGONAL

Por último veremos que para el caso del sistema de ecuaciones normales de Gauss, la matriz simétrica M puede ser factorizada bajo equivalencia ortogonal y obtenerse la solución de mínimos cuadrados y norma mínima con la pseudoinversa.

Tenemos el sistema $A . X = U$ que resulta inconsistente, por lo cual usamos la pseudoinversa y la descomponemos en SDV para obtener la solución óptima:

¹ Ver en el Anexo B. Teorema 8

² Ver en el Anexo B. Teorema 9

$$X = A^+ . U = V \Sigma^+ . W^T . U$$

Pero en el caso del sistema normal de Gauss la matriz en cuestión resulta simétrica y como sabemos, las columnas de V son los autovectores de $A^T . A$ que no es otra cosa que la matriz M de dicho sistema. Por lo tanto los autovectores de la matriz M son las columnas de la matriz Q que son iguales a v . Además la matriz Σ tiene las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz M , por lo tanto $\Sigma^2 = \Sigma^T . \Sigma = \Lambda$.

Por último las columnas de la matriz W vienen dadas por la ecuación:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\sigma_i} A . \bar{v}_i \text{ entonces:}$$

$$X = V . \Sigma^+ . W^T . U$$

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\sigma_i} A . \bar{v}_i \Rightarrow \bar{w}_i^T = \frac{1}{\sigma_i} . \bar{v}_i^T . A^T \Rightarrow W^T = \Sigma^{+T} . V^T . A^T$$

$$X = Q . \Sigma^+ . W^T . U = Q . \Sigma^{+T} . \Sigma^+ . V^T . A^T . U = Q . \Lambda^{-1} . Q^T . A^T . U = Q . \Lambda^{-1} . Q^T . A^T . U$$

$$\boxed{X = M^+ . A^T . U = Q . \Lambda^{-1} . Q^T . A^T . U}$$

De esta manera queda demostrado que a M puedo factorizarlo bajo equivalencia ortogonal y así obtener la pseudoinversa para buscar la solución óptima. Por lo tanto si P es simétrica M también lo es, $M = A^T . P . A$, por lo cual valen las afirmaciones anteriores quedando en forma más general para $M = A^T . P . A$ la ecuación igual a:

$$\boxed{X = M^+ . A^T . P . U = Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P . U}$$

Como podemos ver llegamos al mismo resultado que habíamos planteado anteriormente, y de esta manera demostramos por otro camino la solución mostrada.

Por último vamos a demostrar que la matriz M^+ cumple con las condiciones de la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose.

- $M . M^+ . M = (Q . \Lambda . Q^T) . (Q . \Lambda^+ . Q^T) . (Q . \Lambda . Q^T) = Q . \Lambda . \Lambda^+ . \Lambda . Q^T = Q . \Lambda . Q^T = M$
- $M^+ . M . M^+ = (Q . \Lambda^+ . Q^T) . (Q . \Lambda . Q^T) . (Q . \Lambda^+ . Q^T) = Q . \Lambda^+ . \Lambda . \Lambda^+ . Q^T = Q . \Lambda^+ . Q^T = M^+$
- $(M . M^+)^T = (Q . \Lambda . Q^T . Q . \Lambda^+ . Q^T)^T = (Q . \Lambda . \Lambda^+ . Q^T)^T = Q . Q^T = M . M^+$
- $(M^+ . M)^T = (Q . \Lambda^+ . Q^T . Q . \Lambda . Q^T)^T = (Q . \Lambda^+ . \Lambda . Q^T)^T = (Q . Q^T)^T = M^+ . M$

CAPITULO 4. SOLUCIÓN AL “ZOD” CON MATRIZ DE RESTRICCIONES.-

Quedando en claro la causa de la indeterminación del datum (que se transmite en un defecto de rango de la matriz normal M), buscamos la solución óptima a partir de los mínimos cuadrados y mínima norma con la matriz pseudoinversa. Vamos a resolver este mismo planteo pero por otro camino. El problema de la solución con la matriz pseudoinversa a partir de los Autovalores y Autovectores en este tipo de proyectos, es el polinomio a resolver (llamado ecuación característica) que presenta un grado lo bastante alto, lo cual dificulta notablemente la obtención de los mismos.

Sabemos que la deficiencia de rango de la matriz A y por ende la matriz M esta dado por la indeterminación de algunos o la totalidad de los parámetros que definen al datum. Y que la dimensión del espacio nulo de A y M será igual a la cantidad de parámetros que faltan para definir mi sistema de referencia. Bastará enunciar que la matriz pseudoinversa puede ser calculada por otro camino, utilizando la matriz de restricciones.

CONDICIÓN MÁS GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS¹

Hasta ahora solo habíamos tratado el método de medidas indirectas, y habíamos dicho que existía otro problema de compensación que se lo conoce como ecuaciones de condición y establece que las incógnitas deben cumplir una serie de funciones, por ejemplo, que la suma de los ángulos internos de un triángulo sumen 180°.

No es de interés para nosotros desarrollar este método, pero si va a ser necesario para más adelante plantear cual sería la solución general de mínimos cuadrados si tenemos una serie de ecuaciones de condición con incógnitas que están relacionadas con las observaciones de manera indirecta.

Por lo tanto en su forma más general, el sistema de ecuaciones vendrá dado a partir de una serie de funciones lineales o linealizables de la siguiente manera:

$$F_i(X;C)=0 \quad \text{Donde } i=1; 2;\dots; u$$

X: Vector de variables o parámetros ajustados ($X=X_a+x$) C: Vector de observables compensados ($C=U+V$).

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(15-18).**

Para el caso particular del método de medidas indirectas tenemos como vimos reiteradamente: $F_i(X) - C_i = 0$ y para el método de ecuaciones de condición $F_i(C) = 0$.

Vamos a linealizar las funciones F_i por Taylor siendo x y V las correcciones correspondientes.

$$F_i(X; C) = F_i(X_a + x; U + V) = \frac{\partial F_i}{\partial X_{(x_a; U)}} \cdot x + \frac{\partial F_i}{\partial U_{(x_a; U)}} \cdot V + F_i(X_a; U) = 0$$

Matricialmente el sistema me queda de la siguiente manera:

$$A \cdot x + B \cdot V - U = 0$$

La función que minimiza este sistema de ecuaciones, según Lagrange será:

$$\phi = V^T \cdot P \cdot V - 2\lambda^T (A \cdot x + B \cdot V - U) = \text{mín}$$

Siendo λ los multiplicadores de Lagrange.

Haciendo las derivadas respecto de cada una de las tres variables e igualándolas a cero tendremos lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial V} \right) = V^T \cdot P - \lambda^T \cdot B = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\lambda^T \cdot A = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) = A \cdot x + B \cdot V - U = 0$$

Luego haciendo una serie de operaciones algebraicas se puede obtener el vector incógnita x , que viene dado de la siguiente manera:

$$x = \left(A^T \cdot (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot A \right)^{-1} \cdot A^T \cdot (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot U$$

MÉTODO DE LOS AJUSTES COORDINADOS¹

El desarrollo de este método permite abordar el problema de diseño de primer orden (FOD) o el problema de la configuración. Nosotros solo haremos el planteo necesario para nuestros fines, ya que en este trabajo solo trataremos el problema de diseño de orden cero (ZOD), en el cual parte de la teoría se apoya en algunos conceptos que se plantean aquí.

El método de los ajustes coordinados o progresivos se desarrolla planteando el siguiente sistema matemático:

$$F_i(X_s; C_t) = 0$$

$$F_j(X_s; C_r) = 0$$

Formado por dos grupos de ecuaciones con distintas observables y las mismas variables o parámetros, donde tenemos:

$$i = 1; 2; \dots; u_1$$

$$j = 1; 2; \dots; u_2$$

$$t = 1; 2; \dots; m_1$$

$$r = 1; 2; \dots; m_2$$

$$s = 1; 2; \dots; n$$

Por lo tanto tendremos $u_1 + u_2$ ecuaciones con $m_1 + m_2$ observaciones y n variables.

Siendo la matriz de los pesos de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_2^{-1} \end{bmatrix} = Q^{-1}$$

Linealizando las funciones por Taylor como lo habíamos planteado anteriormente y aceptando residuos, nos quedan dos ecuaciones matriciales de la siguiente manera:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot V_1 - U_1 = 0$$

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot V_2 - U_2 = 0$$

Y la función que minimiza los residuos en ambas ecuaciones, vendrá dada como una suma del método que planteamos anteriormente de la condición general de mínimos de Lagrange:

$$\phi = V_1^T \cdot P_1 \cdot V_1 + V_2^T \cdot P_2 \cdot V_2 - 2\lambda_1^T (A_1 \cdot x + B_1 \cdot V_1 - U_1) - 2\lambda_2^T (A_2 \cdot x + B_2 \cdot V_2 - U_2) = \text{mín}$$

Esta es una función de 5 vectores variables, en el cual vamos a derivar por cada uno de ellos e igualar a cero ya que es un mínimo:

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(93-97).**

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial V_1} \right) = V_1^T \cdot P_1 - \lambda_1^T \cdot B_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial V_2} \right) = V_2^T \cdot P_2 - \lambda_2^T \cdot B_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\lambda_1^T \cdot A_1 - \lambda_2^T \cdot A_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} \right) = -(B_1 \cdot V_1 + A_1 \cdot x - U_1)^T = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} \right) = -(B_2 \cdot V_2 + A_2 \cdot x - U_2)^T = 0$$

Y transponiendo las ecuaciones anteriores:

$$a) P_1 \cdot V_1 - B_1^T \cdot \lambda_1 = 0$$

$$b) P_2 \cdot V_2 - B_2^T \cdot \lambda_2 = 0$$

$$c) -A_1^T \cdot \lambda_1 - A_2^T \cdot \lambda_2 = 0$$

$$d) B_1 \cdot V_1 + A_1 \cdot x - U_1 = 0$$

$$e) B_2 \cdot V_2 + A_2 \cdot x - U_2 = 0$$

Con a y b se obtendrá:

$$V_1 = P_1^{-1} \cdot B_1^T \cdot \lambda_1$$

$$V_2 = P_2^{-1} \cdot B_2^T \cdot \lambda_2$$

Y sustituyendo V_1 en d:

$$B_1 \cdot P_1^{-1} \cdot B_1^T \cdot \lambda_1 + A_1 \cdot x - U_1 = 0$$

$$N_1 \cdot \lambda_1 + A_1 \cdot x - U_1 = 0$$

$$\lambda_1 = -N_1^{-1} \cdot A_1 \cdot x + N_1^{-1} \cdot U_1$$

Sustituyendo λ_1 en c:

$$A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 \cdot x - A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 - A_2^T \cdot \lambda_2 = 0$$

Análogamente se puede obtener:

$$\lambda_2 = -N_2^{-1} \cdot A_2 \cdot x + N_2^{-1} \cdot U_2$$

Que sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 \cdot x - A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 - A_2^T \cdot (-N_2^{-1} \cdot A_2 \cdot x + N_2^{-1} \cdot U_2) = 0$$

$$(A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 + A_2^T \cdot N_2^{-1} \cdot A_2) x = A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 + A_2^T \cdot N_2^{-1} \cdot U_2$$

$$x = (A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 + A_2^T \cdot N_2^{-1} \cdot A_2)^{-1} \cdot (A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 + A_2^T \cdot N_2^{-1} \cdot U_2)$$

También el sistema de ecuaciones normales se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Donde se obtiene el sistema de ecuaciones normales por eliminación de λ_2 .

MÉTODO DE MEDIDAS INDIRECTAS CON UNA SERIE ECUACIONES DE RESTRICCIÓN¹

Para el caso particular del método de medidas indirectas, teníamos la función $F_i(X) - C_i = 0$ que si aplicamos Taylor obtenemos la ecuación matricial de esta $A_1 \cdot x - V_1 - U_1 = 0$, pero como A_1 y M_1 presentan un defecto de rango igual a d , vamos a tener infinitas soluciones por mínimos cuadrados.

Si planteamos una serie de restricciones de obligado cumplimiento (ecuaciones de condición) al sistema $A_1 \cdot x - V_1 - U_1 = 0$ de la forma $F_j(X) = 0$ que matricialmente se lo puede expresar como $A_2 \cdot x = 0$ donde la unión del espacio vectorial de A_1 y A_2 forma el espacio vectorial de la solución $\mathfrak{R}(A_1) \cup \mathfrak{R}(A_2) = \mathfrak{R}^n$. Por lo tanto $\mathfrak{R}(A_1)$ y $\mathfrak{R}(A_2)$ son subespacios complementarios.

El número de restricciones tendrá que ser mayor o igual a la dimensión del espacio nulo de la matriz normal. Nosotros solo plantearemos el caso en que el número de restricciones es igual a la dimensión del espacio nulo (d) de la matriz normal, único caso de interés para nosotros.

Por lo tanto A_2 es una matriz cualquiera de rango completo e independiente de A_1 , representativo de un cierto grupo de restricciones que *define y realiza al sistema de referencia*, es decir, elimina el defecto del datum, y a este se lo conoce como "restricciones mínimas de datum", y viene dado de la siguiente manera:

$$F_i(X) - C_i = 0$$

$$F_j(X) = 0$$

Donde el primer juego de ecuaciones nos queda como ya vimos igual a $A_1 \cdot x - V_1 - U_1 = 0$

El segundo juego de ecuaciones, son un grupo de restricciones o ecuaciones de condición que deben cumplirse siempre, por lo tanto su matriz de pesos tiende a infinito y su vector de residuos va a ser igual a cero. Quedando el sistema a resolver de la siguiente manera:

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(209-215).**

$$A_1 \cdot x - V_1 - U_1 = 0$$

$$A_2 \cdot x = 0$$

Habíamos visto anteriormente, para el método de los ajustes coordinados en su caso más general, que el sistema de ecuaciones normales se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \cdot N_1^{-1} \cdot U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{Siendo } N = B \cdot P^{-1} \cdot B^T$$

Para nuestro caso, la matriz $B = -I$ y como el peso $P_2 \rightarrow \infty \Rightarrow P_2^{-1} = 0$, el sistema de ecuaciones normales extendido nos queda:

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de la izquierda es invertible por condición A_2 de ser de rango completo e independiente de A_1 con lo cual su determinante es distinto de cero.

Busquemos una solución de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{A_2} & H^T \\ H & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Nota: Lo que hacemos acá no es otra cosa que un artificio matemático para poder encontrar la inversa de la matriz de la izquierda y así poder obtener x en el sistema de ecuaciones normales extendido.

Por lo tanto tendremos:

$$1) A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot H = I$$

$$2) A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot H^T + A_2^T \cdot F = 0$$

$$3) A_2 \cdot Q_{A_2} = 0$$

$$4) A_2 \cdot H^T = I$$

Si tenemos en cuenta que la matriz M_1 y la matriz A_1 son deficientes de rango, van a aparecer d Autovalores nulos que me determinan d Autovectores correspondientes. Estos Autovectores corresponden al espacio nulo de dichas matrices, y el resto de los $n-d$ Autovectores son una base del espacio fila de M_1 y A_1 y por ser M_1 simétrica, entonces los Autovectores que generan el espacio fila de M_1 son perpendiculares con los que generan el espacio nulo de esta y por lo tanto: $M_1 \cdot G^T = 0$ y $A_1 \cdot G^T = 0$ siendo G la matriz de los Autovectores correspondiente a los Autovalores nulos.

Pero esta matriz G no tiene porque ser la única que cumpla estos dos requisitos, puede existir cualquier otra matriz E que cumpla con $M_1 \cdot E^T = 0$ y $A_1 \cdot E^T = 0$. Y como consecuencia de esto podemos decir que A_1 y E son subespacios ortogonales de \mathfrak{R}^n :

$$\mathfrak{R}(A_1) \perp \mathfrak{R}(E) = \mathfrak{R}^n$$

Siendo E la matriz de restricciones, esta esparce el espacio nulo de M_1 y A_1 y es independiente de estas ya que representa los defectos del datum.

Con este enunciado podemos ver la relación existente entre la solución que obtuvimos con la matriz pseudoinversa bajo equivalencia ortogonal y la que queremos desarrollar en este capítulo.

Siguiendo con lo expuesto anteriormente y partiendo de las propiedades de la matriz E podemos plantear lo siguiente:

Multipliquemos a 1) por E

$$EA_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + EA_2^T \cdot H = E \Rightarrow EA_2^T \cdot H = E \quad \text{Porque } A_1 \cdot E^T = 0 \Rightarrow E \cdot A_1^T = 0 \text{ y por lo tanto}$$

$$H = (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$$

Luego podemos sustituir en 2) de la siguiente manera

$$A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot ((E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E)^T + A_2^T \cdot F = 0 \Rightarrow$$

5) $A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} + A_2^T \cdot F = 0 \Rightarrow A_2^T \cdot F = 0$ Y como A_2 es de rango completo no tendrá Autovalores nulos, por lo tanto:

$$F = 0$$

Nos queda por calcular la matriz Q_{A_2} , y recordando a 1) teníamos que:

$$A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot H = I \Rightarrow$$

$$**7)** A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E = I$$

Resultando la matriz **no simétrica** que luego se utilizará:

$$**8)** T_{A_2} = A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} = I - A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$$

Podemos escribir a T_{A_2} teniendo en cuenta 3)

$$T_{A_2} = A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} = A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot A_2 \cdot Q_{A_2} \quad \text{Ya que } A_2 \cdot Q_{A_2} = 0$$

Y teniendo en cuenta a 5) y 6)

$$A_1^T \cdot P \cdot A_1 \cdot E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E = 0$$

Y la siguiente igualdad

$$A_2^T \cdot A_2 \cdot E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E = A_2 \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$$

Con lo que finalmente se tendrá

$$A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot A_2 \cdot Q_{A_2} + A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E + A_2^T \cdot A_2 \cdot E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E = \\ = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} + A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E = I \quad \text{Según 7).}$$

Y teniendo en cuenta a 8)

$$(A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + A_2^T \cdot A_2) \cdot (Q_{A_2} + E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E) = I$$

Lo que implica que para que se satisfaga la ecuación, $(A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + A_2^T \cdot A_2)$ tiene que ser invertible, por lo tanto

$$Q_{A_2} = (A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + A_2^T \cdot A_2)^{-1} - E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$$

Recordando que

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{A_2} & H^T \\ H & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{A_2} & H^T \\ H & F \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{A_2} & E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \\ (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Con} \quad \begin{matrix} Q_{A_2} = (A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + A_2^T \cdot A_2)^{-1} \\ - E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E \end{matrix}$$

Y de acuerdo al sistema de ecuaciones normales extendido

$$\begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{A_2} & E^T \cdot (A_2 \cdot E^T)^{-1} \\ (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1}$$

Siendo Q_{A_2} una matriz cofactor simétrica. Fijarse que esta ecuación tiene la misma forma que la deducida anteriormente $X = M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot U$. Es claro que el sistema tendrá infinitas soluciones ya que se pueden ir variando las matrices A_2 y E .

Teniendo en cuenta la matriz $T_{A_2} = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} = I - A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$ y si multiplicamos a ambos lados por $A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1$, entonces

$$T_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 - A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \\ M_1 \cdot Q_{A_2} \cdot M_1 = M_1$$

Que si lo traducimos nos queda de la siguiente manera

$$\boxed{M_1 \cdot M_1^- \cdot M_1 = M_1}$$

Como vemos la matriz Q_{A_2} nos resuelve el problema de encontrar la inversa generalizada de M_1 y variando las matrices A_2 y E obtenemos las infinitas soluciones por mínimos cuadrados.

La matriz cofactor de x vendrá dada de la siguiente manera

$$Q_x = Q_{A_2} A_1^T \cdot P_1 \cdot Q_U \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} = Q_{A_2} A_1^T \cdot P_1 \cdot P_1^{-1} \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} = Q_{A_2} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2}$$

Además sabemos que $T_{A_2} = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} \Rightarrow Q_x = Q_{A_2} \cdot T_{A_2}$ y recordando 8) multiplicando por Q_{A_2} obtenemos lo siguiente $Q_{A_2} \cdot T_{A_2} = Q_{A_2} - Q_{A_2} A_2^T \cdot (E \cdot A_2^T)^{-1} \cdot E$

Y como en 3) $A_2 \cdot Q_{A_2} = 0 \Rightarrow Q_{A_2} \cdot A_2^T = 0$ por lo tanto $Q_{A_2} \cdot T_{A_2} = Q_{A_2}$ y como teníamos que

$$Q_x = Q_{A_2} \cdot T_{A_2} \Rightarrow Q_x = Q_{A_2}.$$

Reemplazando en la ecuación de cofactor de x , nos queda

$$Q_x = Q_{A_2} = Q_{A_2} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} \text{ Lo que se traduce en}$$

$$\boxed{M_1^- \cdot M_1 \cdot M_1^- = M_1^-}$$

SOLUCIÓN POR RESTRICCIONES INTERNAS¹

La matriz de restricciones E de tamaño $d \times n$ es de rango completo e independiente de A_1 , por lo tanto cumple las condiciones exigidas por A_2 . Podemos reemplazar a A_2 por E , y la solución por mínimos cuadrados con una serie de restricciones nos queda de la siguiente manera

$$A_1 \cdot x - V_1 - U_1 = 0$$

$$E \cdot x = 0$$

La solución a este sistema particular se lo conoce como "solución por restricciones internas". Y esta es la que a nosotros nos va a interesar, ya que con esta se obtiene mínima traza en la matriz varianza covarianza.

Por lo tanto nuestra incógnita x_E va a ser igual a:

$$x_E = Q_E \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \quad \text{Con} \quad Q_E = (A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + E^T \cdot E)^{-1} - E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E$$

Podemos observar que Q_E esta constituida por todas matrices simétricas, y por lo tanto esta resultas de dicha manera.

Anteriormente habíamos definido a la matriz T_{A_2} , que para nuestro caso particular, va a ser $T_E = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_E = I - E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E$. Esta es una matriz muy importante en el análisis de redes libres y se la conoce con el nombre de "*S-transformación de Baarda*". Y tiene como propiedad ser simétrica, idempotente y verifica que $E \cdot T_E = E - E \cdot E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E = E - E = 0$.

Se demostró que la matriz inversa generalizada $Q_{A_2} = M^-$ cumple que $M_1 \cdot M_1^- \cdot M_1 = M_1$ y $M_1^- \cdot M_1 \cdot M_1^- = M_1^-$ por lo tanto Q_E también va a cumplir que $Q_E = M^-$

Pero además sabemos que:

$T_E = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_E = M \cdot M^-$ Y es simétrica por propiedad enunciada anteriormente por lo tanto

$T_E^T = Q_E^T \cdot (A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1)^T = M^{-T} \cdot M^T$ Y también es simétrica e igual a la anterior. Por lo tanto

$$M \cdot M^- = M^{-T} \cdot M^T = (M \cdot M^-)^T$$

$$M^- \cdot M = M^T \cdot M^{-T} = (M^- \cdot M)^T$$

Y

$$M \cdot M^- \cdot M = M$$

$$M^- \cdot M \cdot M^- = M^-$$

Estas 4 condiciones definen según se demostró anteriormente a una matriz inversa generalizada única de M que se conoce con el nombre de matriz pseudoinversa. Utilizando a la matriz de restricciones E nos queda que $Q_E = M^+$.

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(219-220).**

Esta es la solución óptima que habíamos enunciado anteriormente (hace que la sumatoria de los residuos sea mínimo y que la norma del vector incógnita sea mínima). Por lo tanto la solución será:

$$X = M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot U \quad \text{Con } M^+ = (A^T \cdot P \cdot A + E^T \cdot E)^{-1} - E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E$$

Es importante aclarar que expresiones permanecen constantes y cuales no con las diferentes matrices inversas generalizadas.

Será invariante el vector de las observaciones, el factor de varianza covarianza de la unidad de peso, la matriz varianza covarianza de los residuos y los valores estimados de funciones de los parámetros y sus varianzas. Si variarán de acuerdo a la matriz que defina el datum las coordenadas de los vértices y sus matrices cofactor y varianza covarianza.

JUSTIFICACIÓN DE LA SEUDOINVERSA A TRAVÉS DE LA MATRIZ S-TRANSFORMACIÓN DE BAARDA¹

Habíamos demostrado anteriormente, que una solución por restricciones mínimas del datum al sistema de ecuaciones normales extendido venía dado de la siguiente manera

$x = Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1$, entonces para otra solución particular cualquiera x_i tendremos:

$x_i = Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1$ En donde

$$Q_{A_i} = (A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 + A_i^T \cdot A_i)^{-1} - E^T \cdot (A_i \cdot E^T)^{-1} \cdot (E \cdot A_i^T)^{-1} \cdot E$$

$$T_{A_i} = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_i} = I - A_i^T \cdot (E \cdot A_i^T)^{-1} \cdot E$$

$$Q_{x_i} = Q_{A_i} = M_i^-$$

Con lo cual en relación a lo anterior resultará:

$$M_1 \cdot M_i^- \cdot M_1 = M_1$$

$$M_i^- \cdot M_1 \cdot M_i^- = M_i^-$$

Podemos obtener ahora la relación entre dos soluciones por mínimos cuadrados a través de la matriz T_{A_i} de la siguiente manera:

¹ Chueca Pazos; M.; Herráez Boquera; J. y Berné Valero; J.L. (1996). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág(220-223).**

$$\begin{aligned}
T_{A_2}^T \cdot x_i &= T_{A_2}^T \cdot Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\
T_{A_2}^T \cdot x_i &= Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\
T_{A_2}^T \cdot x_i &= Q_{A_2} \cdot \left(I - A_i^T \cdot (E \cdot A_i^T)^{-1} \cdot E \right) A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \\
T_{A_2}^T \cdot x_i &= Q_{A_2} \cdot \left(A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 - A_i^T \cdot (E \cdot A_i^T)^{-1} \cdot E \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 \right)
\end{aligned}$$

Y como $E \cdot A_1^T = 0$, nos queda

$$\begin{aligned}
T_{A_2}^T \cdot x_i &= Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot U_1 = x_2 \\
x_2 &= T_{A_2}^T \cdot x_i
\end{aligned}$$

Otra expresión de interés es la siguiente:

$$\begin{aligned}
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_i} \\
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} \cdot M_1 \cdot Q_{A_i} \\
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot M_1 \cdot Q_{A_i} \\
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_i} \\
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot T_{A_i}
\end{aligned}$$

Y como anteriormente habíamos demostrado que $T_{A_2} = A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_2} \Rightarrow Q_{A_2} = Q_{A_2} \cdot T_{A_2}$.

Entonces podemos plantear para cualquier matriz:

$$\begin{aligned}
T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i} &= Q_{A_i} \cdot A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 \cdot Q_{A_i} = Q_{A_i} \\
Q_{A_i} &= T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i}
\end{aligned}$$

Las dos ecuaciones $x_2 = T_{A_2}^T \cdot x_i$ y $Q_{A_i} = T_{A_i}^T \cdot Q_{A_2} T_{A_i}$ representan la relación general entre dos soluciones cualquiera del ajuste por mínimos cuadrados que se trate.

Para el caso en que la solución sea por restricciones internas, la relación entre una solución cualquiera y la dicha anteriormente será:

$$x_E = T_E^T \cdot x_i \quad \text{Y} \quad Q_E = T_E^T \cdot Q_{A_i} T_E$$

Siendo la matriz T_E S-transformación de Baarda.

Y reemplazando por la relación ya conocida de T_E^T que además es simétrica, nos queda

$$\begin{aligned}
x_E &= \left(I - E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E \right) x_i \\
x_E &= x_i - E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E \cdot x_i \\
x_i &= x_E + E^T \cdot (E \cdot E^T)^{-1} \cdot E \cdot x_i
\end{aligned}$$

Pero x_i está en el espacio \mathfrak{R}^n y $E^T.(E.E^T)^{-1}.E.x_i$ está en el espacio nulo de A_1 y M_1 por ser E la matriz que representa dicha indeterminación, recordar que $A_1.E^T = 0$ y $M_1.E^T = 0$ además habíamos planteado para encontrar la solución que $E.x = 0$.

Por lo tanto x_E estará en el espacio fila de la matriz normal M_1 y por lo tanto será perpendicular a $E^T.(E.E^T)^{-1}.E.x_i$ por estar en el espacio nulo de M_1 que es una matriz simétrica.

Y la composición cuadrática de x_i será igual a:

$$\|x_i\|^2 = \|x_E\|^2 + \|E^T.(E.E^T)^{-1}.E.x_i\|^2$$

Esta expresión es análoga a la que habíamos obtenido en el capítulo "Capítulo 5. Caso mas general de medidas indirectas". En el cual para obtener la solución que tenga mínima norma, conviene que el término que pertenece al espacio nulo sea igual a cero, quedándome como solución óptima x_E que es el valor que se obtiene con la pseudoinversa M^+ .

De esta manera quedan relacionadas las distintas soluciones que fuimos dando al problema de resolver la compensación de una red libre.

Ya habíamos enunciado las propiedades que tiene la matriz S-transformación de Baarda de simetría, idempotente y que $T_E.E^T = 0$ por lo tanto filas y columnas de estas matrices son ortogonales. Y como consecuencia de ser idempotente la traza de la matriz S-transformación de Baarda será igual al rango de la misma que es igual a la cantidad de columnas independientes de dicha matriz, es decir, $Tr[T_E] = R(T_E) = n$ y por lo tanto $Tr[T_E] = \sum \mu_i = n$ con μ_i $i=1; 2; \dots; n$ Autovalores. Y por ser de rango completo y definido positiva, todos sus Autovalores serán mayores que cero y necesariamente habrá a lo menos uno mayor que 1, y a lo menos uno menor que 1 (la otra posibilidad es que todos sean iguales a la unidad), entonces podemos escribir: $0 < \mu_{\text{mínimo}} < 1$ y $\mu_{\text{máximo}} > 1$.

Vamos ahora a definir el "Cociente de Rayleigh" donde se normaliza dividiendo entre la norma del vector, y se denota de la siguiente manera:

$$r(A) = \frac{x^T . A . x}{x^T . x}$$

Si x es un autovector de A , entonces $x^T \cdot A \cdot x = x^T \mu \cdot x$ y podemos reemplazar de la siguiente manera:

$$r(A) = \frac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x} = \frac{x^T \cdot \mu \cdot x}{x^T \cdot x} = \frac{\mu \cdot x^T \cdot x}{x^T \cdot x} = \mu$$

Con lo cual obtendremos la siguiente desigualdad:

$$\mu_{\text{mínimo}} \leq r(A) \leq \mu_{\text{máximo}}$$

Escribiremos la norma de la matriz T_E de la siguiente manera:

$$\|T_E\| = \frac{\|T_E \cdot x\|}{\|x\|}$$

Elevando al cuadrado y trabajando algebraicamente

$$\|T_E\| = \frac{\|T_E \cdot x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|T_E\|^2 = \frac{\|T_E \cdot x\|^2}{\|x\|^2} \Rightarrow \|T_E\|^2 = \frac{\|x^T \cdot T_E^T \cdot T_E \cdot x\|}{\|x^T \cdot x\|}$$

Y por ser la matriz T_E idempotente, nos queda el Cociente de Rayleigh de dicha matriz

$$\|T_E\|^2 = \frac{\|x^T \cdot T_E^T \cdot T_E \cdot x\|}{\|x^T \cdot x\|} = \frac{\|x^T \cdot T_E \cdot x\|}{\|x^T \cdot x\|} = r(T_E)$$

Por lo tanto la mínima norma de la matriz T_E será

$$\|T_E\|^2 = r(T_E) \Rightarrow \|T_E\|^2 = \mu_{\text{mínimo}} < 1$$

$$\|T_E\| = \mu_{\text{mínimo}}^{1/2} < 1$$

O lo que es lo mismo

$$\text{mín} \frac{\|T_E \cdot x_i\|}{\|x_i\|} < 1$$

Para un x_i cualquiera, autovector y solución, y teniendo en cuenta que T_E es simétrica y que $x_E = T_E^T \cdot x_i$ la condición de mínima norma corresponderá a:

$$\text{mín} \frac{\|T_E \cdot x_i\|}{\|x_i\|} < 1 \Rightarrow \text{mín} \|T_E \cdot x_i\| < \|x_i\|$$

$$\|x_E\| < \|x_i\|$$

Con esto queda definida la solución x_E como la de mínima norma entre todas las soluciones posibles, que es lo que debería ser.

Si tenemos en cuenta que $Q_E = T_E \cdot Q_{x_i} \cdot T_E$ que define a Q_E como constante e independiente de la x_i de partida. Se puede demostrar a partir de las expresiones anteriores que:

$$\boxed{Tr[Q_E] < Tr[Q_{x_i}]}$$

Con esta última relación se justifica de manera incondicional el uso de la matriz pseudoinversa, ya que cuando se utiliza esta (que es la matriz cofactor de las incógnitas, $Q_E = M^+$) su traza es menor, por ende, la traza de la matriz varianza covarianza también ($\Sigma_x = \sigma_0^2 \cdot Q_E = \sigma_0^2 \cdot M^+$). Con lo que se obtiene la mayor precisión de las incógnitas en comparación con las correspondientes coordenadas que se pueden obtener a partir de la definición de cualquier datum prefijado en la red que se obtiene con las distintas matrices inversas generalizadas M^- .

CAPITULO 5. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS ERRORES.-

Una vez hechas todas las mediciones y haber realizado la compensación para la obtención de las incógnitas, y en el caso de las redes libres las coordenadas compensadas, es necesario preguntarse si las mediciones efectuadas como las hipótesis aceptadas son realmente correctas o congruentes con los resultados obtenidos.

Como vimos todo el ajuste se basa sobre principios estadísticos como son la media, la varianza, etc. y estos a través de distintas leyes de probabilidad, que para nuestro caso, en el que se realizan mediciones, la ley de probabilidad es la distribución normal de Gauss. Por lo tanto será preciso establecer criterios sobre:

- 1- Análisis de la matriz varianza covarianza.
- 2- Los valores a priori y a posteriori de la varianza de la unidad de peso.
- 3- Las figuras, recintos y geometría general de errores en la red y en cada punto de ella y su valoración e interpretación rigurosa.
- 4- Los pesos a priori asignados a los observables y su adecuación a la realidad de la observación efectuada.
- 5- La detección, valoración y eliminación de posibles errores groseros de observación.

Es por esto que abordaremos una teoría que analiza los resultados y las observaciones realizadas, desde el punto de vista estadístico y geométrico basándose en la aleatoriedad de las observaciones que tienen un comportamiento que responde a dicha distribución.

MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LAS INCÓGNITAS

Vamos a hallar la expresión de la matriz varianza covarianza para el caso más general de medidas indirectas, aunque podemos ir adelantando que el resultado va a ser el mismo y de alguna manera más general, reemplazando a la inversa de la matriz M por la pseudoinversa.

Para la demostración nos valdremos de la ley general de propagación de la matriz varianza covarianza.

Partimos de la expresión general del vector de incógnitas:

$X = M^+ . A^T . P . L = Q . \Lambda^+ Q^T . A^T . P . L$ Aplicando la propagación de varianza covarianza:¹

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P . \Sigma_L . (Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P)^T \\ \Sigma_X &= Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P . \sigma_0^2 . P^{-1} . (Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P)^T \\ \Sigma_X &= Q . \Lambda^+ . Q^T . A^T . P . \sigma_0^2 . P^{-1} . P . A . Q . \Lambda^+ . Q^T \\ \Sigma_X &= Q . \Lambda^+ . Q^T . \sigma_0^2 . A^T . P . P^{-1} . P . A . Q . \Lambda^+ . Q^T \\ \Sigma_X &= Q . \Lambda^+ . Q^T . \sigma_0^2 . A^T . P . A . Q . \Lambda^+ . Q^T \\ \Sigma_X &= \sigma_0^2 . M^+ . M . M^+ \end{aligned}$$

$$\boxed{\Sigma_X = \sigma_0^2 . M^+}$$

En una red de coordenadas planimétricas (X; Y). los puntos tendrán un error en X y otro en Y; también correlación. Es decir, la matriz varianza covarianza me va a dar el error que se produce en ese punto en la dirección del eje X y del eje Y, pero también va a existir una correlación que me va a estar diciendo que estos errores no son independientes unos de otros. Con lo cual a cada punto de la red le va a corresponder un error en dirección al eje X y otro en dirección al eje Y y sus respectivas correlaciones.

Para entender mejor veamos como está constituida la matriz varianza covarianza de las incógnitas para una red planimétrica (X; Y) de n puntos, recordando que esta es simétrica.

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{X_1Y_2} & \dots & \dots & \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{X_1Y_n} \\ \dots & \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1X_2} & \sigma_{Y_1Y_2} & \dots & \dots & \sigma_{Y_1X_n} & \sigma_{Y_1Y_n} \\ \dots & \dots & \sigma_{X_2}^2 & \sigma_{X_2Y_2} & \dots & \dots & \sigma_{X_2X_n} & \sigma_{X_2Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & \dots & \sigma_{Y_2X_n} & \sigma_{Y_2Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{X_n}^2 & \sigma_{Y_nY_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{Y_n}^2 \end{bmatrix}$$

Para cada punto en particular de la red, solo vamos a tener en cuenta a la matriz varianza covarianza en forma de bloque, que en una red planimétrica, estos serán de 2x2. El resto de los elementos se tendrán en cuenta cuando hablemos de las elipses relativas.

¹ Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (36).**

Para el caso que la red sea de tres coordenadas (X; Y; Z;) como es el caso de las redes GPS, los bloques a tener en cuenta serán de 3x3 y las correlaciones serán entre las coordenadas de la forma XY; XZ e YZ.

Como dijimos, los errores de los puntos que se pueden determinar con dicha matriz en forma directa son los que se producen en dirección de los ejes X e Y (o en cuyo caso X; Y; y Z), pero también dijimos que estos no son independientes unos de otros ya que existe correlación entre los mismos.

Si existe error en dos direcciones cualquiera, como en este caso X e Y, pueden existir errores en cualquier otra dirección, y el tamaño de estos puede ir variando en relación a la dirección que tomemos. Con este pensamiento podemos decir que lo que nos interesa es saber en que dirección está el máximo error que se produce en dicho punto, es decir, lo importante es saber cual es el máximo error que se tiene de ese punto para luego poder determinar si está dentro de la tolerancia.

Para poder determinar esto nos basaremos en la matriz varianza covarianza, en donde el máximo error se obtendrá cuando no exista correlación, es decir, transformar a la matriz varianza covarianza que es simétrica en una matriz de varianza que es diagonal.

Lo mismo sucede si queremos obtener el mínimo error de ese punto, con lo cual la nueva matriz de varianzas que es diagonal, va a tener al máximo y mínimo error de cada punto de la red.

En el caso de las redes de tres coordenadas se obtendrán los valores máximos y mínimos en cada uno de los planos (XY; XZ; e YZ) con lo cual obtendremos tres errores que son el máximo, medio y mínimo.

Esto quedará bien claro cuando se hable de las curvas de error, en particular de las elipses y elipsoides de error, siendo los errores máximos y mínimos los ejes de los mismos.

Como dijimos, tenemos que encontrar una matriz diagonal que sea semejante a una matriz simétrica, para lo cual se debe buscar algún algoritmo matemático que nos resuelva este inconveniente. Anteriormente habíamos hablado de diagonalización de una matriz, con lo cual podemos decir que el procedimiento será similar.

Como vimos una matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable y así una matriz ortogonalmente diagonalizable es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.

La matriz varianza covarianza es simétrica y por lo tanto se puede descomponer bajo equivalencia ortogonal a través de sus Autovectores y Autovalores $\sum_x = Q \cdot \Delta \cdot Q^T$.

Pensemos en la matriz varianza covarianza de a bloques de 2x2 (o 3x3) que la llamaremos A, vamos a tener ecuaciones del tipo $q(x; y) = q(\bar{x}) = a.x^2 + b.y^2 + c.x.y$ que lo puedo expresar en forma matricial como $q(\bar{x}) = \bar{x}^T . A . \bar{x}$ donde por ser simétrica la matriz A, me va a producir el termino mixto $c.x.y$ que lo identifico como la covarianza. Entonces lo que yo quiero obtener es una ecuación sin este término mixto. Voy a tener que hacer un cambio de variable que me lo elimine, quedándome $q(x'; y') = q(\bar{y}) = a'.x'^2 + b'.y'^2$. Y así mi nueva matriz bloque va a pasar a ser diagonal (desaparece la covarianza).

Planteemos un cambio de variable ortogonal de la forma

$\bar{x} = Q . \bar{y}$ Siendo Q una matriz ortonormal.

$$q(\bar{x}) = \bar{x}^T . A . \bar{x}$$

$$q(\bar{x}) = (Q . \bar{y})^T . A . (Q . \bar{y})$$

$$q(\bar{x}) = \bar{y}^T . Q^T . A . Q . \bar{y}$$

Y como a toda matriz simétrica, como el caso de A se la puede descomponer bajo equivalencia ortogonal, entonces $A = Q . \Delta . Q^T \Rightarrow \Delta = Q^T . A . Q$, por lo tanto nos queda

$$q(\bar{x}) = \bar{y}^T . \Delta . \bar{y}$$

La matriz Δ va a tener las varianzas de los puntos en sus correspondientes direcciones. Esta matriz por ser diagonal (ya que son los Autovalores de A) no me genera términos mixtos, y la variable \bar{y} viene a representar mis nuevos ejes o direcciones de los errores máximos y mínimos de los puntos, que no son otra cosa que la raíz cuadrada de dichos Autovalores.

Para conocer la dirección en que se producen estos errores, tenemos que saber que vectores transforman a los vectores (1; 0) y (0; 1) (que vienen a representar las direcciones de los ejes X e Y) en X' e Y'. Como dijimos anteriormente hacíamos una rotación con la matriz ortogonal Q, por lo tanto estos se obtienen de la siguiente manera:

$$Q . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \quad \text{Y} \quad Q . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = b \quad \text{y la dirección vendrá dada por } \alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Para el caso de 3 variables el razonamiento es similar, quedándome una matriz de 3x3, con lo cual voy a tener 3 Autovalores cuya raíz cuadrada me representarán los 3 errores (máximo, mínimo y medio), obteniendo 3 Autovectores que definen a la matriz Q con lo cual mis vectores a transformar serán (1; 0; 0) (0; 1; 0) y (0; 0; 1).

En conclusión, para calcular los errores máximos y mínimos de los puntos de la red, tenemos que calcular los Autovalores del bloque de la matriz varianza covarianza correspondiente, y luego aplicarle la raíz cuadrada para obtener el desvío estándar. Las direcciones de estos se obtendrán con los Autovectores correspondientes mediante el método descrito anteriormente.

Llamamos bloques de la matriz varianza covarianza para el caso de una red bidimensional a lo siguiente:

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} & \sigma_{X_1X_2} & \sigma_{X_1Y_2} & \cdot & \cdot & \sigma_{X_1X_n} & \sigma_{X_1Y_n} \\ \dots & \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1X_2} & \sigma_{Y_1Y_2} & \cdot & \cdot & \sigma_{Y_1X_n} & \sigma_{Y_1Y_n} \\ \dots & \dots & \sigma_{X_2}^2 & \sigma_{X_2Y_2} & \cdot & \cdot & \sigma_{X_2X_n} & \sigma_{X_2Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{Y_2}^2 & \cdot & \cdot & \sigma_{Y_2X_n} & \sigma_{Y_2Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \sigma_{X_n}^2 & \sigma_{Y_nY_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \sigma_{Y_n}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1Y_1} \\ \dots & \sigma_{Y_1}^2 \end{matrix} \right) & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \left(\begin{matrix} \sigma_{X_n}^2 & \sigma_{Y_nX_n} \\ \dots & \sigma_{Y_n}^2 \end{matrix} \right) \end{bmatrix}$$

CURVAS, ELIPSES Y ELIPSOIDES ESTÁNDAR DE INCERTIDUMBRE ABSOLUTOS¹

Ya hablamos de los errores que aparecen en la matriz varianza covarianza y de cómo obtener el máximo y mínimo error que tiene un punto con coordenadas y en que dirección están estos. También mencionamos que para una dirección dada, vamos a tener un error correspondiente, y que este error va a ir variando de acuerdo a la dirección que tenga en base a los ejes coordenados. Por lo tanto queda establecer que curva es la que se forma al ir variando la dirección y obteniendo distintos errores.

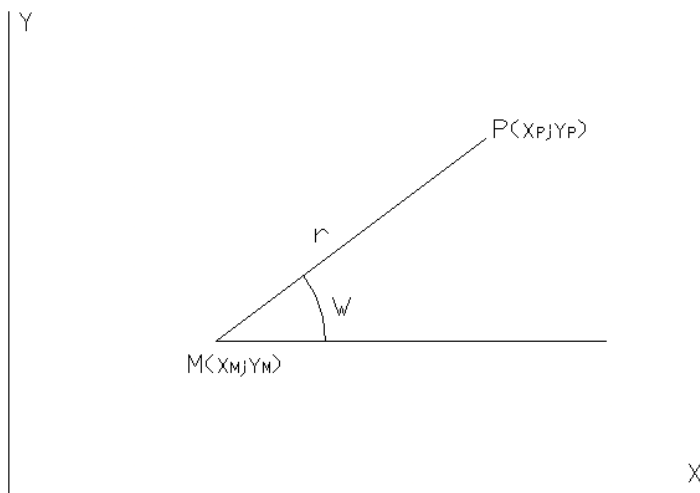
Esta curva une los puntos de igual probabilidad de error, o lo que es lo mismo los puntos que tienen igual probabilidad de salir. En el caso de tres dimensiones, es una superficie de igual probabilidad de error, y se la conoce como superficie de error. Esta curva encierra una superficie de incertidumbre en la determinación del punto, es decir, que el punto calculado tiene una determinada probabilidad de pertenecer a esta superficie que encierra esta curva.

Para el caso de tres dimensiones, lo que se tiene es un volumen o espacio de incertidumbre encerrado por una superficie de error, donde el punto va a pertenecer a este espacio con una determinada probabilidad.

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996). **Métodos Topográficos. Madrid: Paraninfo. Pág (415-420)**

Nos quedaría demostrar que curva o superficie es la que une los puntos de igual probabilidad de error. Para ello pensemos en un punto que fue determinado mediante algún método topográfico, y al cual se le conocen sus coordenadas planimétricas y su matriz varianza covarianza, es decir, sus errores en X; Y y su covarianza.

Sea el punto $M(X_M; Y_M)$ determinado a través de un ajuste riguroso en el que se calcularon las varianzas y covarianzas del mismo σ_X^2 ; σ_Y^2 y σ_{XY} , y se quiere calcular un punto P que se encuentra a una distancia r de M , por lo tanto tenemos:



Siendo P un punto variable que va a estar a una distancia r de M . Lo que queremos hallar es cual va a ser el error de r para las distintas direcciones que tome en función de los errores que se produjeron en la determinación de M y así encontrar todos los puntos P (que determinarán la curva de error) que tengan el mismo error σ_r . Por lo tanto partimos de la expresión del valor de r .

$$r = \left((X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2 \right)^{1/2}$$

Donde si aplicamos la propagación de errores obtenemos lo siguiente

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial X_M} \right)^2 \cdot \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial Y_M} \right)^2 \cdot \sigma_Y^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial X_M} \right) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial Y_M} \right) \cdot \sigma_{XY}$$

Con lo cual resolviendo las derivadas

$$\sigma_r^2 = \frac{(X_P - X_M)^2}{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2} \sigma_X^2 + \frac{(Y_P - Y_M)^2}{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2} \sigma_Y^2 + \frac{2 \cdot (X_P - X_M)(Y_P - Y_M)}{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2} \sigma_{XY}$$

Y si tenemos en cuenta el ángulo de cálculo W , podemos expresarlo en coordenadas polares siendo los cocientes iguales a:

$$\text{Sen}W = \frac{Y_P - Y_M}{\sqrt{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2}} \Rightarrow \text{Sen}^2W = \frac{(Y_P - Y_M)^2}{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2}$$

$$\text{Cos}W = \frac{X_P - X_M}{\sqrt{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2}} \Rightarrow \text{Cos}^2W = \frac{(X_P - X_M)^2}{(X_P - X_M)^2 + (Y_P - Y_M)^2}$$

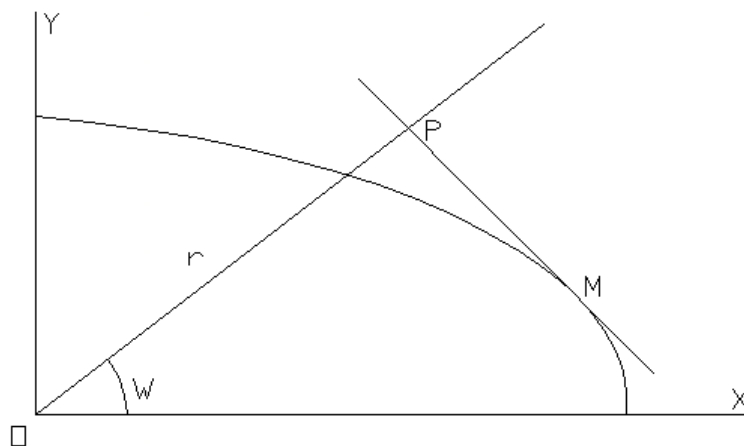
Con lo cual la expresión de propagación de errores para r en coordenadas polares viene dado de la siguiente manera:

$$\sigma_r^2 = \sigma_x^2 \cdot \text{Cos}^2W + \sigma_y^2 \cdot \text{Sen}^2W + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \text{Sen}W \cdot \text{Cos}W$$

Esta es la ecuación en coordenadas polares de la curva que une los puntos de igual probabilidad, o los puntos que tienen igual probabilidad de error.

Queda por determinar que tipo de curva es esta. Podemos adelantar que esta es la ecuación de una curva podaría o curva pedal de una elipse con respecto a su centro, lo cual vamos a demostrar.

Primero definamos a la podaría de la curva C con respecto al punto O al lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de O sobre las tangentes de la curva C .



Sea la ecuación de la elipse (E) de la figura en su forma canónica:

$$(E) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

Y la recta (s) en forma Hessiana y que suponemos tangente a (E) en $M(X_M; Y_M)$

$$(s) = x \cdot \text{Cos}W + y \cdot \text{Sen}W - r = 0$$

(s) por ser tangente a (E) se podrá escribir en función de los parámetros de la elipse de la forma:

$$(s) = b^2 x.X_M + a^2 y.Y_M - a^2 b^2 = 0$$

E igualando las dos últimas ecuaciones de la recta (s):

$$(s) = b^2 x.X_M + a^2 y.Y_M - a^2 b^2 = x.CosW + y.SenW - r \Rightarrow$$

$$\frac{X_M}{a^2} = \frac{CosW}{r} \quad \text{Y} \quad \frac{Y_M}{b^2} = \frac{SenW}{r}$$

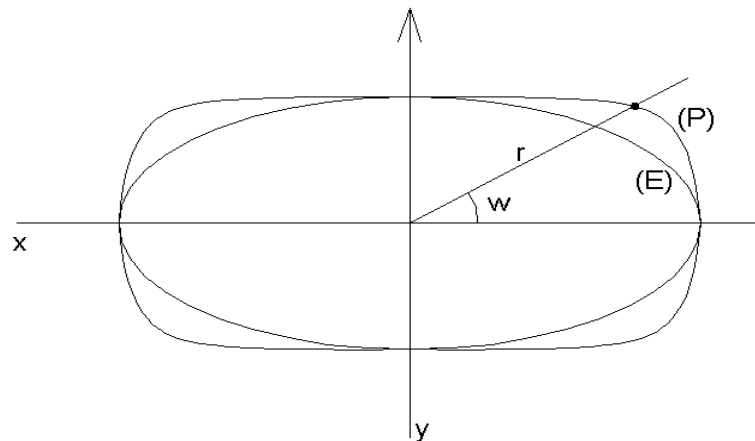
Y como $M(X_M; Y_M)$ es un punto que pertenece a la elipse, puedo sustituir a estos en la ecuación canónica de la misma obteniendo el punto P, con lo cual para todos los puntos P, voy a obtener la curva (P):

$$(P) = \frac{a^2.Cos^2W}{r^2} + \frac{b^2.Sen^2W}{r^2} - 1 = 0$$

O bien

$$(P) = r^2 = a^2.Cos^2W + b^2.Sen^2W$$

Cuya representación gráfica en forma aproximada es la siguiente:



Como podemos ver, esta ecuación está en coordenadas polares y representa la curva definida por los pies de las normales trazadas desde el centro O a las tangentes a la elipse (E), denominada podaría o curva pedal de la elipse. Esta curva coincide con la elipse en sus ejes principales, siendo además estos, los valores máximos y mínimos del radio vector de la curva (P). Por lo tanto los valores máximos y mínimo de la elipse y la curva podaría de esta, son los mismos.

Si aplicamos un giro de argumento ϕ a los ejes coordenados daría lugar a dos curvas cónicas rotadas (E) y (P) que en su caso más general dicha curva vendría dada de la siguiente manera:

$$(P) = r^2 = a^2 \cdot \text{Cos}^2(W + \phi) + b^2 \cdot \text{Sen}^2(W + \phi)$$

Si desarrollando resulta:

$$(P) = r^2 = a^2 \cdot \text{Cos}^2(W + \phi) + b^2 \cdot \text{Sen}^2(W + \phi) \Rightarrow$$

$$r^2 = (a^2 \text{Cos}^2 \phi + b^2 \text{Sen}^2 \phi) \text{Cos}^2 W + (a^2 \text{Sen}^2 \phi + b^2 \text{Cos}^2 \phi) \text{Sen}^2 W - 2 \text{Sen} \phi \text{Cos} \phi (a^2 - b^2) \text{Sen} W \text{Cos} W$$

Que expresada en forma simplificada:

$$(P) = r^2 = A \cdot \text{Cos}^2 W + B \text{Sen}^2 W - 2 \cdot C \cdot \text{Sen} W \text{Cos} W$$

Como podemos observar, esta ecuación tiene la misma forma que la curva que obtuvimos para los puntos que tienen igual probabilidad de error.

En el caso que se tenga una red con puntos de tres coordenadas, el razonamiento es similar, se podrán determinar distintas curvas podarías en cada uno de los tres planos de los ejes coordenados, obteniendo una superficie que me represente los puntos de igual probabilidad que va a estar asociado a un elipsoide, comúnmente llamado elipsoide de error o de incertidumbre, que encierra un espacio que va a tener una probabilidad de contener al punto exacto con una determinada fiabilidad.

Se puede demostrar que la ecuación de la elipse asociada a la curva podaría es de la siguiente manera, siendo esta muy parecida a la anterior:

$$(E) = \sigma_x^2 \cdot \text{Cos}^2 W + \sigma_y^2 \cdot \text{Sen}^2 W - 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot x \cdot y - (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

Para calcular los errores máximos y mínimos o semiejes de la elipse o elipsoide y las direcciones de estos, debemos aplicar la teoría antes expuesta, es decir, se deben calcular los Autovalores y Autovectores y hacer los mismos cálculos para determinar dichos errores (ya sean máximo y mínimos o también medios y sus respectivas direcciones). Fijarse que cuando se demostró como eliminar la covarianza de la matriz simétrica, se utilizó una ecuación del tipo $q(x; y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot x \cdot y$ que no es más que una ecuación de una cónica rotada sobre su centro, como pueden ser una elipse o una curva podaría.

En conclusión, podemos decir que la curva que une puntos de igual probabilidad de error es una podaría o curva pedal de la elipse con respecto a su centro (que para el caso de las redes, el centro es el punto fijo con coordenadas). Además esta curva es muy similar a su elipse asociada y los valores máximos y mínimos

de esta coinciden con los valores máximos y mínimos de la podaría, con lo cual podemos utilizar como curva de igual probabilidad a dicha elipse (o en el caso de tres coordenadas podemos usar un elipsoide con su error máximo, medio y mínimo). Estas curvas, llamadas de incertidumbre, encierran el dominio de las soluciones probables de localización de la posición exacta del punto, con una fiabilidad determinada que se obtiene mediante test estadísticos, que se desarrollarán más adelante. Por último, estas curvas se pueden deducir con la expresión de la matriz de varianza covarianza calculando sus Autovalores y Autovectores respectivos para luego poder determinarla como se demostró anteriormente.

ELIPSES ESTÁNDAR DE INCERTIDUMBRES RELATIVAS¹

Las elipses o elipsoides de incertidumbre absoluta (son absolutos por estar centrados en el punto de coordenadas) facilitan una descripción en conjunto de las figuras de errores de la red. Sin embargo su dependencia del datum es en ocasiones un obstáculo que puede llegar a enmascarar resultados. Entonces vamos a definir una nueva figura de error que es independiente de los puntos de apoya que se tengan. A estas nuevas figuras se las llaman *elipses estándar de incertidumbre relativa*.

Supuesto el eje i - j cualquiera, perteneciente a una red planimétrica, entonces:

$$D_x = x_j - x_i$$

$$D_y = y_j - y_i$$

Y puesto que se conocen todos los elementos de la matriz varianza covarianza como resultado del ajuste que se haya hecho, escribiremos:

$$\sigma^2 D_x = \sigma_{xj}^2 + \sigma_{xi}^2 - 2\sigma_{xjxi}$$

$$\sigma^2 D_y = \sigma_{yj}^2 + \sigma_{yi}^2 - 2\sigma_{yjyi}$$

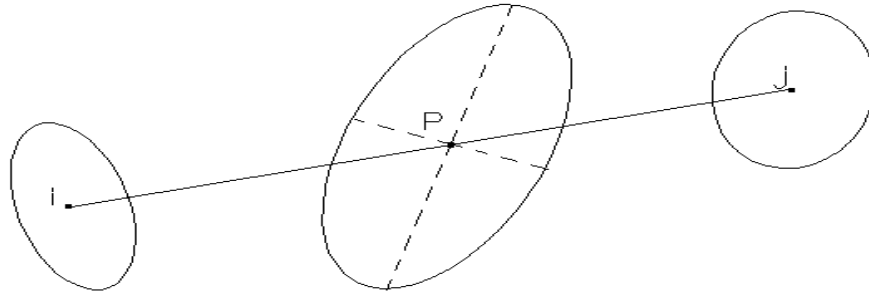
$$\sigma \cdot D_x \cdot D_y = \sigma_{xjyi} - \sigma_{xijy} - \sigma_{xjyi} + \sigma_{xjyj}$$

Se puede demostrar al igual que antes, que los tres valores anteriores definen una curva de igual probabilidad, que no es otra que la podaría, con lo cual por comodidad utilizaremos la elipse asociada a esta. Para el caso de tres dimensiones existirá un elipsoide estándar de incertidumbre relativo.

La curva de la elipse asociada vendrá dada de la misma manera que la que escribimos anteriormente, y será igual a:

$$D_x^2 \cdot \sigma_{D_y}^2 - 2 \cdot D_x \cdot D_y \cdot \sigma_{D_x D_y} + D_y^2 \cdot \sigma_{D_x}^2 - (\sigma_{D_x}^2 \cdot \sigma_{D_y}^2 - \sigma_{D_x D_y})$$

Su interpretación será de la siguiente manera:



Siendo D_y paralelo al eje y y D_x paralelo al eje x .

Y su curva podría, con la notación antes practicada, será de la forma:

$$\sigma_r^2 = \sigma_{D_x}^2 \cdot \text{Cos}^2 W + \sigma_{D_y}^2 \cdot \text{Sen}^2 W + 2 \cdot \sigma_{D_x D_y} \cdot \text{Sen} W \cdot \text{Cos} W$$

Esta elipse de error relativa depende exclusivamente de las diferencias de coordenadas entre vértices, por lo tanto es independiente del datum. Su tratamiento como recinto de error por lo que respecta a ejes, direcciones de estos, matrices de varianza y covarianza y sus Autovalores y Autovectores, etc. es el mismo que se expuso para el caso de las elipses absolutas. Tiene, sin embargo, la ventaja de ofrecer resultado invariantes respecto del datum o puntos de apoyo, lo cual resulta muy útil en diseño y simulación de redes.

DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LA VARIANZA DE LA UNIDAD DE PESO A POSTERIORI²

Hasta ahora solo hicimos la demostración de la varianza de la unidad de peso para el caso de una variable y enunciamos la fórmula para el caso en que teníamos varias incógnitas y la matriz A era de rango completo. Ahora haremos la demostración de ese resultado y lo extenderemos para el caso en que la matriz A resulta de rango incompleto.

Comencemos planteando la expresión de los mínimos cuadrados $V^T \cdot P \cdot V = \text{mín}$ además sabemos que $A \cdot X - U = V \Rightarrow$

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996). *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (291-295)*

² Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996). *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág. (25-30).*

$$\begin{aligned}
(A.X - U)^T . P . (A.X - U) &= ((A.X)^T - (U)^T) . P . (A.X - U) = (X^T . A^T - U^T) . P . (A.X - U) = \\
&= (X^T . A^T P - U^T P) (A.X - U) = X^T . A^T P . A.X - X^T . A^T P . U - U^T P . A.X + U^T P . U = \\
&= X^T . M . X - X^T . M . X - (M . X)^T . X + U^T P . U = -X^T . M^T . X + U^T P . U = -X^T . M . X + U^T P . U = \\
&= -(M^{-1} . A^T . P . U)^T . M . (M^{-1} . A^T . P . U) + U^T P . U = -U^T . P . A . M^{-1} . A^T . P . U + U^T . P . U = \\
&= -U^T . P . (A . M^{-1} . A^T . P - I) U = U^T . P . (I - A . M^{-1} . A^T . P) U = U^T . P . H U \Rightarrow \\
V^T . P . V &= U^T . P . (I - A . M^{-1} . A^T . P) U = U^T . P . H U
\end{aligned}$$

H tiene una propiedad de lo más interesante y es que resulta idempotente, es decir que si la elevamos al cuadrado resulta igual a si misma, o sea $H^2=H$.

$$\begin{aligned}
H^2 &= (I - A . M^{-1} . A^T . P) (I - A . M^{-1} . A^T . P) = I - 2 . A . M^{-1} . A^T . P + A . M^{-1} . A^T . P . A . M^{-1} . A^T . P = \\
&= I - 2 . A . M^{-1} . A^T . P + A . M^{-1} . M . M^{-1} . A^T . P = I - 2 . A . M^{-1} . A^T . P + A . M^{-1} . A^T . P = \\
&= I - A . M^{-1} . A^T . P = H
\end{aligned}$$

Además sabemos que $A.X - U - V = 0$ y el valor esperado de V es cero, $E(V)=0$.

$$\begin{aligned}
A.X - V = U &\Rightarrow E(A.X - V) = E(U) \Rightarrow \\
E(A.X) - E(V) &= E(U) \Rightarrow E(A.X) = E(U)
\end{aligned}$$

En una situación ideal se espera que cuando uno mide no cometa errores (o hacemos infinitas mediciones para obtener el valor verdadero, $E(V)=0$), por lo tanto U debería ser igual a A.X ($A.X - U = V = 0$). Como sabemos, esto no sucede y se expresa en forma matemática como:

$$E(A.X) = E(U) \Rightarrow A.X = E(U)$$

Se puede demostrar que la matriz varianza covarianza se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Sigma_X &= E(X . X^T - E(X) . E(X^T)) \\
\Sigma_U &= E(U . U^T - E(U) . E(U^T))
\end{aligned}$$

Como sabemos U (vector de los términos independientes que esta compuesto por las mediciones) no se modifica durante el ajuste, y tampoco lo hace su matriz de los pesos P como la matriz cofactor $Q_U=P^{-1}$ (ya sea priori o a posteriori).

Pero la matriz varianza covarianza a priori es distinta que a posteriori, ya que la varianza de la unidad de peso a priori es distinta que a posteriori.

$$E(U . U^T - E(U) . E(U^T)) = \Sigma_U = \sigma_0^2 . P^{-1}$$

Teniendo en cuenta la expresión $A.X = E(U)$ y reemplazando, nos queda:

$$E(U.U^T - E(U).E(U^T)) = E(U.U^T - AX.(A.X)^T) = E(U.U^T) - A.X.(A.X)^T = P^{-1}.\sigma_0^2 \Rightarrow$$

$$E(U.U^T) = A.X.(A.X)^T + P^{-1}.\sigma_0^2$$

$V^T.P.V$ es una variable aleatoria (por ser función de V que es una variable aleatoria), además es una expresión matricial de tamaño 1x1, por lo tanto el valor esperado puede ser expresado por su traza, siendo la traza de una matriz la suma de los elementos de su diagonal.

$E(V^T.P.V) = E(Tr(V^T.P.V))$ Y recordando la expresión que habíamos obtenido al principio:

$V^T.P.V = U^T.P.(I - A.M^{-1}.A^T.P)U$, entonces:

$$E(Tr(V^T.P.V)) = E(Tr(U^T.P.(I - A.M^{-1}.A^T.P)U)) = E(Tr(U^T.(P - P.A.M^{-1}.A^T.P)U))$$

Se puede demostrar que para este caso $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ y que $E(P) = P$; $E(A) = A$ y $E(M) = M$ ya que no son función de algo variable o aleatorio.

$$\begin{aligned} E(Tr(V^T.P.V)) &= E(Tr(U^T.(P - P.A.M^{-1}.A^T.P)U)) = E(Tr((P - P.A.M^{-1}.A^T.P)U.U^T)) = \\ &= Tr((P - P.A.M^{-1}.A^T.P)E(U.U^T)) = Tr((P - P.A.M^{-1}.A^T.P)(A.X.X^T.A^T + P^{-1}.\sigma_0^2)) = \\ &= Tr(PA.X.X^T.A^T - P.A.M^{-1}.A^T.PA.X.X^T.A^T + P.P^{-1}.\sigma_0^2 - P.A.M^{-1}.A^T.P.P^{-1}.\sigma_0^2) = \\ &= Tr(PA.X.X^T.A^T - P.A.M^{-1}.M.X.X^T.A^T + I_{n \times n}.\sigma_0^2 - P.A.M^{-1}.A^T.\sigma_0^2) = \\ &= Tr(PA.X.X^T.A^T - P.A.X.X^T.A^T + I_{n \times n}.\sigma_0^2 - P.A.M^{-1}.A^T.\sigma_0^2) = \\ &= Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2 - P.A.M^{-1}.A^T.\sigma_0^2) = Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(P.A.M^{-1}.A^T.\sigma_0^2) = \\ &= Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(A^T.P.A.M^{-1}.\sigma_0^2) = Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(M.M^{-1}.\sigma_0^2) = Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(I_{i \times i}.\sigma_0^2) \end{aligned}$$

Y en nuestro caso las matrices son las matrices identidades $I_{n \times n}$ e $I_{i \times i}$, entonces:

$$E(V^T.P.V) = Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(I_{i \times i}.\sigma_0^2) = n.\sigma_0^2 - I.\sigma_0^2 \Rightarrow E(V^T.P.V) = \sigma_0^2(n - I)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{E(V^T.P.V)}{(n - I)}$$

Este resultado es para el caso en el que se tenga una población, en los trabajos topográficos o geodésicos esto resulta imposible, y lo que se tiene es una muestra, quedando la ecuación, como habíamos visto anteriormente, de la siguiente manera:

$$\boxed{\sigma_0^2 = \frac{V^T.P.V}{(n - I)} \quad \text{Y} \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T.P.V}{(n - I)}}$$

Esta expresión se puede obtener con mayor generalidad, ya que en el caso en el que la matriz A resulta de rango incompleto dicha expresión no es correcta.

Tengamos en cuenta las matrices D y G que se definen a continuación:

$$D = I - H = A.M^{-1}.A^T.P \quad \text{Y} \quad G = P.A.M^{-1}.A^T = P.D$$

Estas dos matrices son idempotente, en efecto:

$$D^2 = A.M^{-1}.A^T.P.A.M^{-1}.A^T.P = A.M^{-1}.M.M^{-1}.A^T.P = A.M^{-1}.A^T.P = D$$

$$G^2 = P.A.M^{-1}.A^T.P.A.M^{-1}.A^T = P.A.M^{-1}.M.M^{-1}.A^T = P.A.M^{-1}.A^T = G$$

Como así también lo es I-G:

$$(I - G).(I - G) = I - 2.G.I + G^2 = I - 2.G + G = I - G$$

Es necesario enunciar algunas propiedades para poder continuar con nuestra demostración:

- La suma de los Autovalores de una matriz cuadrada Z es igual a su traza.
- Su producto es igual al determinante de la matriz.
- Si λ_i es un autovalor de Z de orden i, se cumple que λ_i^2 es un autovalor de Z^2 de orden i, por lo tanto si Z es idempotente, los Autovalores de Z^2 serán igual a los Autovalores de Z, entonces:

$$\lambda_i^2 = \lambda_i \Rightarrow \lambda_i^2 - \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i(\lambda_i - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_i \begin{cases} = 1 \\ = 0 \end{cases}$$

Entonces para una matriz Z cuadrada de tamaño nxn y además idempotente va a tener:

$$\lambda_{ii} = 1 \rightarrow i = 1; 2; \dots; r$$

$$\lambda_{ii} = 0 \rightarrow i = r + 1; \dots; n$$

Por lo tanto si una matriz idempotente tiene Autovalores 1 o 0, que la suma de los Autovalores es igual a su traza (por ser cuadrada) y que la cantidad de Autovalores no nulos es igual al rango de la matriz, entonces:

$$Tr(Z) = \sum_1^n \lambda_i = r = R(Z)$$

Recordemos que habíamos llegado a que:

$$E(V^T.P.V) = Tr(I_{n \times n}.\sigma_0^2) - Tr(P.A.M^{-1}.A^T.\sigma_0^2) = Tr(I_{n \times n} - P.A.M^{-1}.A^T).\sigma_0^2 = Tr(I_{n \times n} - G).\sigma_0^2$$

Y por ser I-G idempotente, entonces $Tr(I - G) = R(I - G)$. Y reemplazando:

$$E(V^T.P.V) = Tr(I_{n \times n} - G).\sigma_0^2 = R(I_{n \times n} - G).\sigma_0^2 = (R(I_{n \times n}) - R(G)).\sigma_0^2 \Rightarrow$$

$$E(V^T . P.V) = (n - R(G)) . \sigma_0^2$$

El rango de I es fácil darse cuenta que es n, pero el rango de G va a ser igual al mínimo rango de una de sus matrices componentes, ya que se puede demostrar que el rango de un producto de matrices es igual o menor que el mínimo rango de las matrices componentes.

Entonces nos queda por encontrar el rango de G.

$G = P.A.M^{-1}.A^T \Rightarrow R(G) = R(P.A.M^{-1}.A^T)$ De acá tenemos que ver el rango de cada una de las matrices que determinan la matriz G.

$$R(P) = n$$

$$R(A) \leq I$$

$$R(A^T) \leq I$$

$$R(M) = R(A^T . P.A) \leq I \text{ Por ser } n \text{ mayor que } I.$$

Por lo tanto nos queda lo siguiente:

$R(G) = R(P.A.M^{-1}.A^T)$ Por lo tanto va a ser igual al mínimo rango de (P; A; A^T; M) y como todas tienen el mismo rango R(A) salvo P que tiene rango mayor, entonces por definición:

$$R(G) \leq R(A) \quad \mathbf{(1)}$$

Pero además: $A^T . G = A^T . P.A.M^{-1}.A^T = M.M^{-1}.A^T = A^T \Rightarrow$

$$R(A^T . G) \leq R(A^T) = R(A) \Rightarrow R(A^T . G) \leq R(A)$$

Pero como habíamos definido anteriormente, el rango de un producto de matrices es igual o menor al rango de una de las matrices componentes, entonces:

$$R(A^T . G) \leq R(A^T) \Rightarrow R(G) \geq R(A^T) = R(A) \Rightarrow R(G) \geq R(A) \quad \mathbf{(2)}$$

Teniendo en cuenta los resultados **(1)** y **(2)**, la única solución posible es que $R(G) = R(A)$. Y de la ecuación que definía a la varianza de la unidad de peso, nos queda lo siguiente:

$$E(V^T . P.V) = (n - R(G)) \Rightarrow E(V^T . P.V) = (n - R(A)) . \sigma_0^2$$

Por lo tanto el valor de la varianza y desvío estándar de la unidad de peso a posteriori respectivamente es el siguiente:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T . P.V}{(n - R(A))} \quad \text{Y} \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T . P.V}{(n - R(A))}}$$

Donde $n - R(A)$ indica o señala la sobreabundancia o grados de libertad del sistema de ecuaciones como lo habíamos dicho anteriormente.

COMPARACIÓN ENTRE LA VARIANZA DE LA UNIDAD DE PESO A PRIORI Y A POSTERIORI¹

En primer lugar utilizaremos la prueba de *Chi-cuadrado* que mide la discrepancia entre una distribución observada y otra teórica indicando en qué medida las diferencias existentes entre ambas, de haberlas, se deben al azar en el contraste de hipótesis.

El vector de los residuos de la red ajustada es $V = A.X - U$, cuyas componentes son v_i ; $i=1;2;\dots;n$. la variables estocástica que representa a los residuos es s , con varianza estimada:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T . P . V}{s}$$

Donde s representa los grados de libertad del sistema que es igual a $s = n - R(A)$. $\hat{\sigma}_0^2$ es la varianza de la unidad de pesos a posteriori, y llamaremos σ_0^2 a la varianza poblacional o varianza a priori de la unidad de peso, suponiendo una población de observaciones infinitamente grande. A esta por lo general se le da un valor arbitrario que es 1 y cuya ecuación viene dada por la que determinamos anteriormente:

$$\sigma_0^2 = \frac{E(V^T . P . V)}{s}$$

Definamos el siguiente estadístico muestral que me compara ambos parámetros:

$$\chi^2 = s \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = s \cdot \frac{V^T . P . V}{s \cdot \sigma_0^2} = \frac{V^T . P . V}{\sigma_0^2}$$

Que distribuye Chi-cuadrado con s grados de libertad si V distribuye normal con media cero y varianza σ_0^2 .

Se adoptará como hipótesis nula H_0 la compatibilidad estadística (que no es igualdad matemática) entre los estimadores a priori y a posteriori de la varianza de la unidad de peso.

$$\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

Y la hipótesis alternativa H_1 .

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996).). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (264-265).**
 Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (55-57).**

$$\sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Como ya se demostró anteriormente, la esperanza del estadístico muestral, es igual al parámetro poblacional a estimar:

$$E\left(\hat{\sigma}_0^2\right) = \sigma_0^2$$

Debemos establecer un entorno que nos permita establecer hasta que diferencias, entre estos dos parámetros, pueden considerarse aceptables. Para ello seleccionamos un nivel de significación α y el nivel de confianza es $1 - \alpha$. La H_0 establece que la varianza a priori de peso 1 o varianza poblacional, es estadísticamente igual a la varianza a posteriori de peso 1 o varianza muestral. Esto significa que ambas varianzas no difieren significativamente al nivel de significación o riesgo α . Si se acepta H_0 o no se rechaza al nivel α , entonces el ajuste se dice correcto. Se acepta la hipótesis nula al nivel de confianza $1 - \alpha$ si:

$$\chi_{s; \frac{\alpha}{2}}^2 < \chi^2 < \chi_{s; 1 - \frac{\alpha}{2}}^2$$

Y teniendo en cuenta como se define a Chi-cuadrado, podemos escribir:

$$\chi_{s; \frac{\alpha}{2}}^2 < s \cdot \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{s; 1 - \frac{\alpha}{2}}^2$$

$$\frac{1}{\chi_{s; \frac{\alpha}{2}}^2} > \frac{1}{s} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} > \frac{1}{\chi_{s; 1 - \frac{\alpha}{2}}^2}$$

$$\frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s; \frac{\alpha}{2}}^2} > \sigma_0^2 > \frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s; 1 - \frac{\alpha}{2}}^2}$$

$$\frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s; 1 - \frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma_0^2 < \frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s; \frac{\alpha}{2}}^2}$$

Esta última define un intervalo de confianza para la varianza poblacional σ_0^2 al nivel de significación α . Esto significa que σ_0^2 se encuentra entre los límites indicados a un nivel de confianza $1 - \alpha$ y se tiene una probabilidad α de equivocarse al hacer tal afirmación. Si la H_0 se cumple, entonces la diferencia entre ambas varianzas es significativa al nivel α y se deberá rechazar la hipótesis nula. La no aceptación de H_0 significa que el ajuste por mínimos cuadrados de la red no es correcto.

Si adoptamos un nivel de significación $\alpha=0.05$, el nivel de confianza es 0.95 y el intervalo de confianza será:

$$\frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s;0.975}^2} < \sigma_0^2 < \frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s;0.025}^2}$$

En los ajustes por mínimos cuadrados, se establece que la varianza a priori de peso 1 es igual a 1 como lo mencionamos anteriormente, entonces:

$$\frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s;0.975}^2} < 1 < \frac{s \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{s;0.025}^2}$$

Cuando se cumple esta desigualdad, estamos aceptando al 95% de confianza que los residuos v_i ; $i=1;2;\dots;n$ distribuyen con la ley de probabilidad normal de Gauss con media cero y varianza σ_0^2 .

Nota: Superada la prueba de Chi-cuadrado, se tendrá la seguridad de que las observaciones están libres de errores no tolerables, el modelo matemático está debidamente linealizado y los errores han sido correctamente modelados.

FIABILIDAD DE REDES¹

De acuerdo a lo visto, podemos decir que son pruebas de buena calidad de una red los siguientes indicadores:

- La configuración apropiada de sus figuras geométricas constituyentes, cifrada en sus valores de consistencia general y específicos.
- La pequeñez de los residuos y varianzas de las observables, cifradas en valores relativos con respecto a las características del levantamiento que se trate.
- La compatibilidad estadística entre los estimadores de varianza de la unidad de peso a través del test estadístico que se trate (Chi- cuadrado).
- La buena configuración de las figuras de error, tanto general como individualizado en cada vértice, analizada y cifrada por medio de elipses, elipsoides e hiperelipsoides de error, absolutos y relativos.

Sabemos que en las redes libres, la solución óptima de mínimos cuadrados, mínima norma y mínimo sesgo (mínima suma de varianzas) viene dada por la pseudoinversa de la matriz normal, que además es única. Esta es invariante respecto de los puntos de

¹ Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (19-20) y (57-60).**

coordenadas aproximadas que se tomen en los vértices como así también de los sistemas de coordenadas que se utilicen.

Por lo tanto si se quieren comparar redes diferentes, es decir, redes en las que se tengan distintos vértices, la forma de obtener cual es la mejor red en base a sus errores, es a través de la pseudoinversa, con la cual se calcula la matriz varianza covarianza de las incógnitas Σ_x :

$$Tr(\Sigma_x) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{Xi}^2 + \sigma_{Yi}^2 + \sigma_{Zi}^2) = \sigma_0^2 \cdot Tr(M^+)$$

Donde n es el número de vértices de la red y σ_{Xi} ; σ_{Yi} y σ_{Zi} los errores estándares de las coordenadas.

Una medida adecuada para comparar distintas redes, es la varianza singular media σ_{sm}^2 (Bjerhammar, 1973) que es una expresión invariante de todas las coordenadas, y lo que hace es dividir por el número de vértices de la red, y así poder comparar redes de distinta cantidad de estaciones.

$$\sigma_{sm}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma_{Xi}^2 + \sigma_{Yi}^2 + \sigma_{Zi}^2) = \frac{1}{n} \cdot \sigma_0^2 \cdot Tr(M^+)$$

Otra medida invariante respecto del sistema de referencia son las elipses y elipsoides de error, que se pueden obtener a través de la matriz varianza covarianza como se vio anteriormente. Con estos uno puede hacer la suma de sus áreas o volúmenes como así también las excentricidades de las mismas que denotan la forma que tienen estas, en donde siempre se trata de buscar las elipses que sean lo menos excéntricas posibles (tengan más bien una forma circular o esférica) ya que hace que sus semiejes sean más parecidos.

Por ejemplo en el caso en que la suma de sus semiejes sea la misma, puede pasar que una de estas tenga un semieje muy grande y otro muy chico (muchísima excentricidad) con lo cual ese semieje largo podría estar fuera de la tolerancia.

Por último se puede comparar distintas redes a través de un hiperelipsoide en el cual el número de dimensiones es igual a la cantidad de incógnitas que tenga la red. Este se obtiene a partir de la rotación de la matriz varianza covarianza la cual debe ser diagonalizada (con un proceso similar al que se hizo para obtener las elipses o elipsoides de cada punto) para obtener todos los semiejes del mismo. El procedimiento es el siguiente:

Consideremos a la matriz simétrica A (al igual que la matriz varianza covarianza) como una transformación lineal de un espacio dimensional X a otro espacio dimensional Y. Así,

$y = A.X$ está en Y para cualquier x en X . Al representar la transformación lineal mediante una matriz simétrica A , la transformación $A.x = y$, puede expresarse como:

$$A.x = y \Rightarrow Q.\Delta.Q^T .x = y \Rightarrow \Delta.Q^T .x = Q^T .y$$

Y haciendo un cambio ortogonal en las coordenadas X e Y , y teniendo en cuenta que la matriz Q es ortonormal, podemos plantear:

$$Q^T .x = x' \quad Y \quad Q^T .y = y'$$

Entonces la ecuación anterior nos queda

$$\Delta.x' = y'$$

En los sistemas ortogonales nuevos, la transformación anterior tiene una representación muy sencilla. En términos de componentes, se tiene:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 .x_1' \\ y_2' &= \lambda_2 .x_2' \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= \lambda_n .x_n' \end{aligned}$$

Despejando x , elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{y_1'^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_2'^2}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{y_n'^2}{\lambda_n^2} = \sum_{i=1}^n x_i'^2 = x'^T .x' = \|x'\|^2$$

Si consideramos que $\|x'\|^2 = 1$, entonces la ecuación anterior nos queda:

$$\frac{y_1'^2}{\lambda_1^2} + \frac{y_2'^2}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{y_n'^2}{\lambda_n^2} = 1$$

Que es la ecuación de un hiperelipsoide n-dimensional.

REDUNDANCIA DE LAS OBSERVACIONES¹

La teoría aquí delineada sigue a **Baarda** y **Kok** y esta relacionada con la estadística del ajuste.

Todo lo que se vio hasta acá permite establecer la calidad de una red, sin embargo puede no ser suficiente, ya que un error grosero introducido en una observación, influye en todos los residuos de la red y desequilibra su calidad.

¹ **Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996).). Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (296-300).
Marquez, R. (2008). Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (60-65).**

Vamos a analizar el aporte que hace cada observación a la determinación de las incógnitas como a los residuos.

Partimos de la expresión de la matriz varianza covarianza de las observaciones U_b (es el vector propiamente medido y no debe ser confundido con U que es la diferencia entre U_b y el vector de coordenadas aproximadas U^o) y las incógnitas X .

$$\begin{aligned}\Sigma_{U_b} &= \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{U_b} \\ \Sigma_X &= \hat{\sigma}_0^2 \cdot M^+ = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_X\end{aligned}$$

Donde Q_{U_b} y Q_X son las matrices cofactor de las observaciones y de las incógnitas respectivamente.

Podemos buscar la matriz cofactor de los residuos partiendo de:

$$\begin{aligned}V &= A.X - U \\ V &= A.M^+ . A^T . P.U - U \\ V &= (A.M^+ . A^T . P - I)U \\ V &= (A.M^+ . A^T - P^{-1})P.U\end{aligned}$$

Aplicando la ley de propagación de varianza covarianza:

$$\begin{aligned}\Sigma_V &= (A.M^+ . A^T - P^{-1})P . \Sigma_U . ((A.M^+ . A^T - P^{-1})P)^T \\ \Sigma_V &= (A.M^+ . A^T - P^{-1})P . \sigma_0^2 . P^{-1} . ((A.M^+ . A^T - P^{-1})P)^T \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . A^T - P^{-1})P . (A.M^+ . A^T - P^{-1})^T \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . A^T - P^{-1})P . (A.M^+ . A^T - P^{-1}) \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . A^T - P^{-1})(P.A.M^+ . A^T - I) \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . A^T P.A.M^+ . A^T - P^{-1}P.A.M^+ . A^T - A.M^+ . A^T + P^{-1}) \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . M.M^+ . A^T - A.M^+ . A^T - A.M^+ . A^T + P^{-1}) \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (A.M^+ . A^T - A.M^+ . A^T - A.M^+ . A^T + P^{-1}) \\ \Sigma_V &= \sigma_0^2 . (-A.M^+ . A^T + P^{-1})\end{aligned}$$

Y la expresión de la matriz cofactor de los residuos es:

$$Q_V = P^{-1} - A.M^+ . A^T$$

El vector de las observaciones ajustadas es:

$$\begin{aligned}
U_A &= U_b + V = U_b + A.X - U \\
U_A &= U_b + V = U_b + A.M^+.A^T.P.U - U \\
U_A &= U_b + V = U_b + A.M^+.A^T.P.U - (U_b - U^o) \\
U_A &= U_b + V = A.M^+.A^T.P.U - U^o
\end{aligned}$$

Para calcular la matriz varianza covarianza de U_A recordemos que el vector U^o no tiene error ya que fue calculado con las coordenadas aproximadas de los vértices.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{U_A} &= (A.M^+.A^T.P)\Sigma_U.(A.M^+.A^T.P)^T \\
\Sigma_{U_A} &= A.M^+.A^T.P\sigma_0^2 P^{-1}.P.A.M^+.A^T \\
\Sigma_{U_A} &= \sigma_0^2.A.M^+.A^T.P.A.M^+.A^T \\
\Sigma_{U_A} &= \sigma_0^2.A.M^+.M.M^+.A^T \\
\Sigma_{U_A} &= \sigma_0^2.A.M^+.A^T
\end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz cofactor es:

$$Q_{U_A} = A.M^+.A^T$$

En resumen nos quedan las matrices varianzas covarianzas siguientes:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{U_b} &= \hat{\sigma}_0^2.Q_{U_b} = \hat{\sigma}_0^2.P^{-1} \\
\Sigma_X &= \hat{\sigma}_0^2.Q_X = \hat{\sigma}_0^2.M^+ \\
\Sigma_V &= \hat{\sigma}_0^2.Q_V = \hat{\sigma}_0^2.(P^{-1} - A.M^+.A^T) \\
\Sigma_{U_A} &= \hat{\sigma}_0^2.Q_{U_A} = \hat{\sigma}_0^2.A.M^+.A^T
\end{aligned}$$

Si tomamos la ecuación de la matriz cofactor de los residuos $Q_V = P^{-1} - A.M^+.A^T$ podemos obtener lo siguiente:

$$Q_V P = I - A.M^+.A^T.P$$

Y recordando en la demostración del valor de σ_0^2 habíamos utilizado una matriz que la llamamos G , que es igual a $G = P.A.M^{-1}.A^T$. Esta es idempotente, por lo tanto $Tr(G) = R(G) \Rightarrow Tr(P.A.M^{-1}.A^T) = Tr(.A.M^{-1}.A^T.P) \Rightarrow Tr(G) = R(G)$

Además habíamos demostrado que $R(G) = R(A)$ y como

$$Q_V P = I - A.M^+.A^T.P \Rightarrow Tr(Q_V P) = Tr(I - A.M^+.A^T.P) = Tr(I_{n \times n}) - Tr(A.M^+.A^T.P) = Tr(I_{n \times n}) - Tr(G)$$

Por lo tanto:

$$\text{Tr}(Q_V P) = n - R(A) = s$$

Si denotamos como r_i a los elementos de la diagonal principal de $Q_V P$, entonces:

$$\text{Tr}(Q_V P) = \sum_{i=1}^n r_i = n - R(A) = s$$

Donde s es la redundancia de la red y r_i es el número de redundancia de la i -ésima observación. El número r_i representa la contribución de la i -ésima observación a la redundancia s de la red.

Partiendo de la ecuación $\text{Tr}(Q_V P) = \sum_{i=1}^n r_i = n - R(A) = s$ podemos escribir a $r_i = q_i \cdot p_i$ donde estos son los elementos diagonales de orden i de las matrices Q_V y P .

Con las ecuaciones $Q_V = P^{-1} - A.M^+.A^T$ y $Q_{UA} = A.M^+.A^T$ podemos plantear lo siguiente:

$$P^{-1} = Q_V - A.M^+.A^T = Q_V + Q_{UA}$$

Los elementos de la diagonal de cualquier matriz cofactor, como estas últimas, son siempre positivos, además si tenemos en cuenta que los elementos diagonales de P^{-1} son mayores que los de Q_V ya que $P^{-1} = Q_V + Q_{UA}$, entonces podemos escribir lo siguiente:

$$0 < q_i < p_i^{-1} \Rightarrow 0 < q_i \cdot p_i < p_i^{-1} \cdot p_i = 1 \Rightarrow$$

$$0 < r_i < 1$$

La redundancia de una observable cualquiera de orden i es siempre positiva y menor que la unidad, siendo la suma de todas ellas, la redundancia general de la red.

Teníamos que $P^{-1} = Q_V + Q_{UA}$, por lo tanto podemos escribir $Q_{UA} = P^{-1} - Q_V$. Si los números de redundancia son cercanos a la unidad, la matriz cofactor de las observaciones ajustadas va a tener valores muy pequeños, en general:

$$r_i \approx 1 \Rightarrow q_i \cdot p_i \approx 1 \Rightarrow q_i \approx \frac{1}{p_i}$$

Y si consideramos los elementos q_{Ai} que son la diagonal principal de Q_{UA} , entonces:

$$q_{Ai} = p_i^{-1} - q_i \approx 0$$

Con lo cual los errores de las observaciones ajustadas van a tender a cero

$$\hat{\sigma}_{Ai}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \cdot q_{Ai} \approx 0. \text{ Y del mismo modo podemos plantear que } \hat{\sigma}_0^2 \cdot p_i^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot q_i.$$

Si el resto de las observables tienen características análogas, se deduce que se cumplen las hipótesis previas, el ajuste da lugar a varianzas pequeñas en las observables ajustadas, y por lo tanto el resultado es satisfactorio. Las observables ajustadas son claramente más precisas que las iniciales, y se destaca la ventaja de trabajar con redundancias cercanas a la unidad, que deben buscarse y preferirse.

Al contrario, si los números de redundancias son cercanos a cero:

$$r_i \approx 0 \Rightarrow q_i \cdot p_i \approx 0 \Rightarrow q_i \approx 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_0^2 \cdot q_i \approx 0$$

Con lo cual la varianza de las observaciones ajustadas va a ser iguales a las varianzas de las observaciones iniciales $\hat{\sigma}_0^2 \cdot q_{Ai} \approx \hat{\sigma}_0^2 \cdot p_i^{-1}$

Si las expresiones anteriores se extienden y cumplen a lo largo de la red, las varianzas de los residuos resultarán muy pequeñas $\hat{\sigma}_0^2 \cdot q_i \approx 0$ y, sobre todo, las varianzas de las observables ajustadas no variarán sensiblemente con respecto a las iniciales $\hat{\sigma}_0^2 \cdot q_{Ai} \approx \hat{\sigma}_0^2 \cdot p_i^{-1}$. Se habrá logrado muy escasa ventaja en precisión al practicar el ajuste y, en consecuencia, deberán evitarse las observables de redundancia cercanas a cero.

Partiendo de la expresión demostrada anteriormente $\sum_{Ub} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{Ub}$ siendo el peso de la observable de orden i el elemento del mismo orden p_i de la diagonal principal de la matriz P , que valdrá:

$$p_i = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_i^2} \text{ Cociente de las varianzas a priori de unidad de peso y del observable de orden i.}$$

$$\text{Pero siendo } \sum_v = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_v = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (P^{-1} - A \cdot M^+ \cdot A^T)$$

Escribiendo la desviación estándar a posteriori del residuo v_i :

$$\hat{\sigma}_{vi} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_i}$$

Y teniendo en cuenta que $r_i = q_i \cdot p_i$ y que $p_i = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_i^2} \Rightarrow p_i^{-1} = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2}$ nos queda:

$$\hat{\sigma}_{Vi} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{r_i}{p_i}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{r_i \cdot \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}} \Rightarrow \hat{\sigma}_{Vi} = \hat{\sigma}_0 \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \sqrt{r_i}$$

Si $\hat{\sigma}_0$ es estadísticamente igual a σ_0 (aceptación de H0 en la prueba de Chi-cuadrado) y $r_i \approx 1$, se tiene que:

$$\hat{\sigma}_{Vi} \approx \sigma_i$$

Condición de óptimo.

Con lo que se confirma de nuevo a las redundancias r_i , particulares de las observables como un buen índice de calidad del ajuste, que será tanto mejor cuanto más se aproximen dichos valores a la unidad.

En primera aproximación, puede expresarse a la redundancia media del ajuste por la expresión:

$$r_M = \frac{s}{n} = \frac{n - R(A)}{n}$$

CONTROL DE ERRORES GROSEROS; TEST DE BAARDA¹

El control de errores groseros en un ajuste requiere de la formulación de las siguientes hipótesis:

- H0: Las observaciones no contienen errores groseros.
- H1: Las observaciones contienen un error grosero.

Hasta ahora hemos trabajado con la hipótesis nula y contrastándola con pruebas o test adecuados. Enunciamos ahora la hipótesis alternativa en observables.

H1 establece que:

- Se ha deslizado un error grosero en el ajuste.
- Está localizado en la observable de orden i .
- Su magnitud es ∇_i .

En el vector de observaciones U_b , la i -ésima observable es errónea, $u_{bi} + \nabla_i$:

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996).). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (300-306).**
 Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (65-69).**

Como sabemos, para el caso de medidas indirectas, el modelo matemático linealizado viene de la siguiente manera:

$A.X - U = V$ Siendo $U = U_b - U^o$ con U_b igual a las observaciones medidas y U^o a las calculadas con las coordenadas aproximadas. Por lo tanto si se introduce un error de la forma anteriormente dicha, tendremos:

$$u_{bi} + \nabla_i - u_i^o = U_i + \nabla_i \text{ Siendo } U_i + \nabla_i \text{ la } i\text{-ésima componente de } U.$$

Si partimos de las ecuaciones $V = (A.M^+.A^T - P^{-1})P.U$ y $Q_V = P^{-1} - A.M^+.A^T$ podemos escribir:

$$V = -Q_V.P.U$$

Y teniendo en cuenta que el signo del error no influye, escribiremos a la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$V = -Q_V.P. \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_i + \nabla_i \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} = -Q_V.P. \left[\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_i \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \nabla_i \right]$$

Haciendo que $e_i = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$ entonces tenemos:

$$V = -Q_V.P.(U - e_i \nabla_i) = -Q_V.P.U + Q_V.P.e_i \nabla_i$$

Bajo la hipótesis alternativa H1, el vector residuos se expresa por:

$$V_{H1} = Q_V.P.e_i \nabla_i - Q_V.P.U \text{ Lo que podemos expresar como:}$$

$$V_{H1} = Q_V.P.e_i \nabla_i + V$$

Sabemos que la esperanza matemática del vector residuos es cero, pero bajo la hipótesis H1, la esperanza matemática va a ser:

$$E(V_{H1}) = Q_V.P.e_i \nabla_i$$

Y como $Q_V.P.e_i \nabla_i$ permanece constante, la matriz varianza covarianza, bajo la H1, es:

$$\Sigma_{VH1} = \sigma_0^2 Q_V$$

Entonces V_{H1} es una variable estocástica (o aleatoria) conjunta que distribuye normal con media $Q_V \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_i$ y varianza $\sigma_0^2 Q_V$, es decir:

$$V_{H1} : N(Q_V \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_i ; \sigma_0^2 \cdot Q_V)$$

Y cada residuo en particular v_i es una variable estocástica que distribuyen en forma normal con media $q_i \cdot p_i \cdot \nabla_i$ y varianza $\sigma_0^2 \cdot q_i$, es decir:

$$v_{i,H1} : N(q_i \cdot p_i \cdot \nabla_i ; \sigma_0^2 \cdot q_i)$$

A partir de esta última expresión se obtiene el llamado ω -test de Baarda, de extendida utilización en exploración de posibles errores groseros cometido en un ajuste de redes. Para ello basta con transformar la variable aleatoria de dicha expresión en estándar, obteniéndose así una distribución normal con un parámetro de no centralidad o traslación. En efecto, siendo la desviación estándar de la expresión nombrada $\sigma_{vi} = \sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}$.

Obteniendo de inmediato la distribución estandarizada.

$$\omega_{i,H1} = \frac{v_{i,H1}}{\sigma_{vi}} \Rightarrow \omega_{i,H1} = \frac{v_{i,H1}}{\sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}}$$

Y distribuye como

$$\omega_{i,H1} : \left(\frac{q_i \cdot p_i \cdot \nabla_i}{\sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}} ; 1 \right)$$

Multiplicando y dividiendo a la esperanza de $\omega_{i,H1}$ por $\sqrt{q_i}$:

$$E(\omega_{i,H1}) = \frac{q_i \cdot p_i \cdot \nabla_i}{\sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}} \Rightarrow E(\omega_{i,H1}) = \frac{q_i \cdot p_i \cdot \nabla_i}{\sigma_0 \cdot \sqrt{q_i}} \cdot \frac{\sqrt{q_i}}{\sqrt{q_i}} \Rightarrow E(\omega_{i,H1}) = \frac{\sqrt{q_i} \cdot p_i \cdot \nabla_i}{\sigma_0}$$

Nos queda lo siguiente:

$$\omega_{i,H1} : \left(\frac{\sqrt{q_i} \cdot p_i \cdot \nabla_i}{\sigma_0} ; 1 \right)$$

Bajo la hipótesis nula H_0 , en donde no hay existencia de errores, tenemos:

$$H_0 : \omega_0 = \frac{v_{i,H0}}{\sigma_i} \Rightarrow \omega_0 : N(0;1)$$

El parámetro de no centralidad, traslación o desplazamiento, es decir, la media de una distribución normal de Gauss no central, se denota por δ_i , y es:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i \cdot p_i \cdot \sqrt{q_i}}{\sigma_0}$$

Puesto que $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ entonces $\sigma_0 = \sigma_i \sqrt{p_i}$ y reemplazando esta última en la media de una distribución no central, obtenemos:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i \cdot p_i \cdot \sqrt{q_i}}{\sigma_i \cdot \sqrt{p_i}}$$

Y si multiplicamos y dividimos al segundo miembro por $\sqrt{p_i}$.

$$\delta_i = \frac{\nabla_i \cdot p_i \cdot \sqrt{q_i}}{\sigma_i \cdot \sqrt{p_i}} \cdot \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_i}} \Rightarrow \delta_i = \frac{\nabla_i \cdot \sqrt{p_i \cdot q_i}}{\sigma_i}$$

Y como $r_i = p_i \cdot q_i$ entonces:

$$\delta_i = \frac{\nabla_i \cdot \sqrt{r_i}}{\sigma_i}$$

Por lo tanto el error grosero va a ser igual a:

$$\nabla_i = \frac{\delta_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}}$$

Esta expresión muestra una vez más la conveniencia de lograr redundancias elevadas, cercanas a la unidad si es posible, a efectos de minimizar ∇_i para el parámetro de traslación δ_i de la observable i de que se trate.

Es claro que no será conocido en verdadera dimensión ningún ∇_i y δ_i . Es preciso, por tanto, aplicar el método estadístico usual de test de contraste de errores de primer y segundo orden.

Será preciso establecer un nivel de significación α de rechazo de la hipótesis nula. Generalmente se establece un valor de α muy pequeño para asegurar un mínimo de rechazo de observables aceptables o errores de primer orden.

La probabilidad de cometer un error de primer orden bajo la hipótesis nula se puede expresar de la forma:

$$P\left(|\omega_0| \geq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \int_{-t_{\alpha/2}}^{t_{\alpha/2}} N(0;1).dt = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

Obteniéndose $t_{\alpha/2}$ de las tablas de la distribución normal.

El tratamiento del error de segundo orden requiere establecer la potencia del test β o probabilidad de aceptación de la hipótesis alternativa H1, siendo cierta.

La probabilidad de cometer un error de segundo orden será, por tanto, igual a $1 - \beta$. Su expresión es:

$$P\left(|\omega_1| \geq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{t_{\alpha/2}} N(\delta_0;1).dt = 1 - \beta$$

La interpretación completa para el test de Baarda con parámetros $\alpha = 0.0001$ y $\beta = 0.90$ es:

- Un residuo estandarizado que cumpla: $\omega_{0i} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \geq 3.29$ supone el rechazo de la hipótesis nula con un nivel de significación $\alpha = 0.0001$. Es decir hay solo 1 por 1000 de probabilidad que se rechace la observación y sea correcta. Con fiabilidad 0.999 contendrá un error grosero.
- Con el criterio anterior, cualquier error grosero que cumpla:

$$\nabla_{0i} = \frac{\delta_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \geq 4.57 \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{r_i}}$$

Será rechazada con una fiabilidad de $\beta = 0.90$. Podrán deslizarse, por tanto, un 10% de errores iguales o superiores al indicado y será preciso admitir como norma general los inferiores al valor establecido a la expresión anterior.

Siendo conocidos los valores de σ_i y r_i de cada observable puede, pues, analizarse el ajuste suprimiendo sucesivamente y en orden descendente aquellos que excedan el valor establecido por ω_{0i} , realizando un nuevo ajuste después de cada supresión hasta la aceptación en bloque de todas las observaciones remanentes.

Especialmente importante es contrastar la adecuación de los pesos y los errores a priori imputados a las observables. Si la precisión supuesta a priori resulta ser muy inferior a la realmente lograda, el número de observables rechazadas será elevado y la descripción de la precisión de la red irreal.

La elección del parámetro de significación α y la potencia del test β tampoco es arbitraria, mereciendo la pena frecuentemente realizar más de una prueba. Puede

empezarse con los valores antes pormenorizados ($\alpha=0.0001$ y $\beta=0.90$) y, si el resultado, por cualquier razón, no es satisfactorio, ensayar alguna pareja de valores distintas, cuyo cálculo es bien sencillo. La siguiente tabla ofrece pares α y β junto al parámetro de traslación asociado (Chueca Pazos, 1996):

| α | β | δ_0 |
|----------|---------|------------|
| 0,05 | 0,8 | 2,8 |
| 0,025 | 0,8 | 3,1 |
| 0,001 | 0,8 | 4,12 |
| 0,05 | 0,9 | 3,24 |
| 0,025 | 0,9 | 3,52 |
| 0,001 | 0,9 | 4,57 |

FIABILIDAD INTERNA¹

Según se vio, se entiende por fiabilidad interna de la red, su capacidad de detección y control de posibles errores groseros en las observables. Es claro que la importante

expresión $\nabla_{0i} = \frac{\delta_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \geq 4.57 \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{r_i}}$ es utilizable en cuanto el modelo matemático y

estadístico sea conocido. A través de ella es posible cifrar la sensibilidad de la red ante los errores groseros y, por tanto, tomar decisiones lógicas sobre su proyecto y observación, modificando en cuanto sea necesario y siempre dentro de las posibilidades del terreno su configuración inicial hasta su optimización. En consecuencia, el estudio de la fiabilidad interna de la red y adelantamos que también de la externa, son útiles, no solamente para conocer la calidad del ajuste realizado, sino para proyectarlo previamente.

Así tanto en simulación y proyecto como simulación de redes, el primer parámetro de control de fiabilidad interna, presente en todas las expresiones deducidas, es el número de redundancia r_i de cada observable.

Se dice que una observable está:

- Perfectamente controlada si $r_i = 1$
- Bien controlada si $0.4 \geq r_i \leq 1$
- Débilmente controlada si $0.1 \geq r_i \leq 0.4$
- Mal controlada si $0 \geq r_i \leq 0.1$
- No está controlada si $r_i = 0$

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996).). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (306-307).**
 Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (70).**

Es útil el estudio de homogeneidad de una red comparando las redundancias en distintas zonas con la redundancia media $r_M = \frac{s}{n} = \frac{n - R(A)}{n}$. Las zonas de redundancia promedio insatisfactorias sugieren su densificación mediante un incremento de observaciones. Se utiliza a este efecto el parámetro:

$$\mu_{INi} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}$$

Obtenido directamente de la expresión del error grosero independientemente de σ_i , su variación relativa en cuanto menor sea, califica más favorablemente la homogeneidad de la red. Se prefiere valores absolutos pequeños que significan altas redundancias. La fiabilidad interna de una red queda, por tanto, definida por los siguientes elementos:

- Los números de redundancia, tanto en cada observación como la redundancia media.
- Los parámetros μ_{INi} de homogeneidad de la red.
- Los valores ∇_{0i} deducido anteriormente, mínimo error detectable por el test con potencia β y el nivel de significación α , o índices de sensibilidad de la red.

FIABILIDAD EXTERNA¹

Una aceptable fiabilidad interna puede no ser suficiente para garantizar la calidad del ajuste. El debido rigor en el trabajo requiere completar su estudio con el de la descripción de la fiabilidad externa. Su objetivo, según hemos definido previamente, es establecer la influencia de los errores deslizados en las observables sobre los valores ajustados de parámetros o variables. Con ello se pretende, esencialmente, que no se deteriore la calidad exigible en la precisión de estos últimos por el impacto causado por los errores despreciados o no detectados en los primeros. A este efecto se estudiará la variación inducida en los valores de parámetros o variables causadas por los errores groseros individualizados como ∇_{0i} y se estará en condiciones de establecer el valor máximo aceptable para estos.

Los parámetros estimados en presencia de un error grosero son, para el modelo de las ecuaciones de observación:

$$X = M^+ . A^T . P . (U - e . \nabla)$$

¹ Chueca Pazos, M.; Herráez Boquera, J. y Berné Valero, J. L. (1996).). **Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia. Madrid: Paraninfo. Pág (308-310).**
 Marquez, R. (2008). **Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS. Pág. (70-72).**

El efecto de un error grosero en la i -ésima observación es:

$$\nabla X = -M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_i$$

Las variaciones ∇X se denominan **fiabilidad local externa**. El error grosero ∇_i afecta a todos los parámetros. El impacto (influencia) del error mínimo detectable en los parámetros a través del ω -test con potencia β y un nivel de significación α , ocasionado por un error grosero ∇_i localizado en la i -ésima observación, es:

$$\nabla X_{0i} = -M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i}$$

Puesto que hay n observaciones, pueden computarse n vectores ∇X_{0i} , mostrando el impacto de cada error mínimo detectable ∇_{0i} sobre los parámetros.

Baarda sugirió la siguiente expresión alternativa:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla \cdot X_{0i}^T \cdot M \cdot \nabla \cdot X_{0i}}{\sigma_0^2}$$

Si reemplazamos en esta por la ecuación del error grosero en la i -ésima observación:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{(M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i})^T \cdot M \cdot (M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i})}{\sigma_0^2}$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla_{0i} \cdot e_i^T \cdot P \cdot A \cdot M^+ \cdot M \cdot M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i}}{\sigma_0^2}$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla_{0i} \cdot e_i^T \cdot P \cdot A \cdot M^+ \cdot A^T \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i}}{\sigma_0^2}$$

Y como $A \cdot M^+ \cdot A^T = I - Q_V \cdot P$, entonces:

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla_{0i} \cdot e_i^T \cdot P \cdot (I - Q_V \cdot P) \cdot P \cdot e_i \cdot \nabla_{0i}$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla_{0i}^2 \cdot (e_i^T \cdot P \cdot e_i - e_i^T \cdot P \cdot Q_V \cdot P \cdot e_i)$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \nabla_{0i}^2 \cdot (p_i - p_i^2 \cdot q_i)$$

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot p_i \cdot \nabla_{0i}^2 \cdot (1 - r_i)$$

Y teniendo en cuenta la expresión $\nabla_{0i} = \frac{\delta_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}}$, entonces:

$$\lambda_{0i}^2 = \delta_0^2 \cdot \sigma_i^2 p_i (1 - r_i) \cdot \frac{1}{r_i \cdot \sigma_0^2}$$

De la definición de peso $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, sustituimos:

$$\lambda_{0i}^2 = \delta_0^2 \cdot \sigma_i^2 \cdot \sigma_0^2 (1 - r_i) \cdot \frac{1}{r_i \cdot \sigma_0^2 \cdot \sigma_i^2} = \delta_0^2 \cdot (1 - r_i) \cdot \frac{1}{r_i}$$

Llamamos μ_{EXi} a la cantidad λ_{0i} , entonces:

$$\mu_{EXi} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - r_i}{r_i}}$$

Es el parámetro de homogeneidad externa, con una interpretación similar a μ_{INi} .

La fiabilidad externa de la red quedará definida por los siguientes elementos:

- **Los vectores ∇_{0i} .**
- **Los parámetros μ_{EXi} de homogeneidad de la red.**

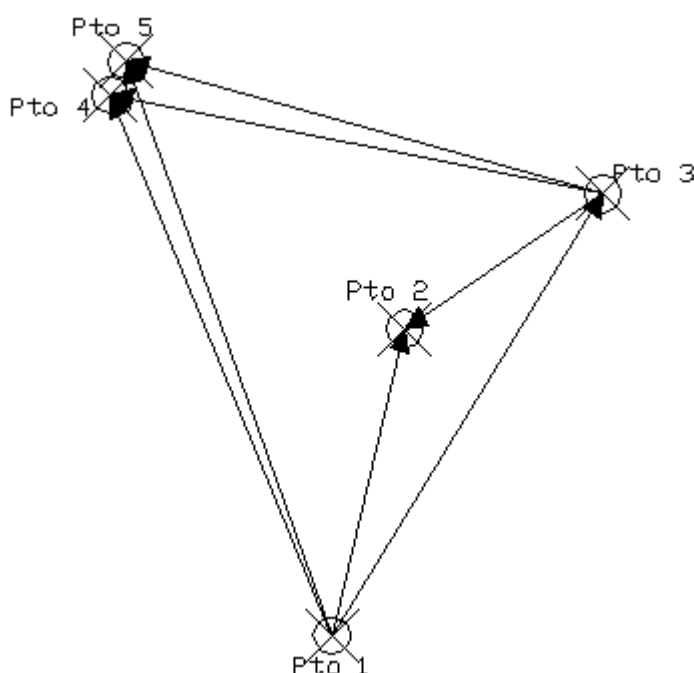
Con análoga interpretación a la antes efectuada.

CAPITULO 6. RESOLUCIÓN DE UNA RED REAL.-

Se realizó la medición con GPS de una red de 5 puntos ubicada en la localidad de Centeno provincia de Santa Fe. En la cual se midieron 7 vectores en dos sesiones con el método Stop and Go con períodos de tiempo de 15 minutos por punto.

Esta no cuenta con ningún punto fijo, por lo tanto se la considerara como una red libre en donde el número de defectos de datum es 3, y los grados de libertad o sobreabundancia del sistema de ecuaciones son 9.

La red de puntos y los vectores medidos están distribuidos de la siguiente manera:



Las coordenadas aproximadas rectangulares aproximadas: WGS '84

| Puntos | Coordenadas Aproximadas | | |
|--------|-------------------------|--------------|--------------|
| | X | Y | Z |
| 1 | 2582568,865 | -4738102,826 | -3388974,973 |
| 2 | 2582965,469 | -4738520,896 | -3388092,296 |
| 3 | 2583722,23 | -4738394,502 | -3387688,544 |
| 4 | 2582462,344 | -4739299,132 | -3387391,658 |
| 5 | 2582499,369 | -4739329,18 | -3387319,117 |

Debido a que las distancias medidas son vectores cortos, se considero a la matriz de los pesos igual a la identidad, y por lo tanto no va a ser tenida en cuenta en los cálculos.

Los vectores calculados a partir de los puntos de coordenadas aproximadas son:

| Vectores | Vectores teóricos | | |
|----------|-------------------|------------|------------|
| | ΔX | ΔY | ΔZ |
| 1--2 | 396,604 | -418,070 | 882,677 |
| 1--3 | 1153,365 | -291,677 | 1286,429 |
| 1--4 | -106,521 | -1196,306 | 1583,315 |
| 1--5 | -69,496 | -1226,355 | 1655,856 |
| 3--2 | -756,761 | -126,394 | -403,752 |
| 3--4 | -1259,886 | -904,630 | 296,886 |
| 3--5 | -1222,861 | -934,678 | 369,427 |

Y los vectores medidos:

| Vectores | Vectores medidos | | |
|----------|------------------|------------|------------|
| | ΔX | ΔY | ΔZ |
| 1--2 | 395,893 | -416,025 | 883,585 |
| 1--3 | 1152,977 | -290,802 | 1286,938 |
| 1--4 | -107,202 | -1194,322 | 1584,167 |
| 1--5 | -69,897 | -1225,382 | 1656,364 |
| 3--2 | -757,042 | -125,289 | -403,413 |
| 3--4 | -1260,121 | -903,588 | 297,236 |
| 3--5 | -1222,775 | -934,693 | 369,424 |

La matriz de los pesos para una varianza de la unidad de peso igual a 1 es una matriz en donde su diagonal esta compuesta por valores igual a 700 y el resto todos 0. Esto se debe a que no se consideró correlación entre las observaciones y que los vectores medidos son cortos.

La matriz de restricciones para una red de 5 puntos medida con GPS:

| MATRIZ E (de Restricciones) | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Y aplicando la teoría expuesta en este trabajo obtengo las coordenadas compensadas de la red, que van a ser:

| Puntos | Coordenadas Compensadas | | |
|--------|-------------------------|--------------|--------------|
| | X | Y | Z |
| 1 | 2582569,301 | -4738104,001 | -3388975,528 |
| 2 | 2582965,195 | -4738520,034 | -3388091,968 |
| 3 | 2583722,238 | -4738394,754 | -3387688,579 |
| 4 | 2582462,108 | -4739298,332 | -3387391,352 |
| 5 | 2582499,433 | -4739329,415 | -3387319,160 |

El valor de σ_0^2 a posteriori es 0.7624 y supera la prueba de Chi cuadrado al 98% de confianza.

Los elipsoides de error van a tener los ejes orientados en la dirección de los ejes cartesianos (X; Y; Z) ya que se consideró que los vectores observados no presentaban correlación. El valor de los semiejes de los mismos es:

| Puntos | σ_x (m) | σ_y (m) | σ_z (m) |
|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 0,013 | 0,013 | 0,013 |
| 2 | 0,020 | 0,020 | 0,020 |
| 3 | 0,013 | 0,013 | 0,013 |
| 4 | 0,020 | 0,020 | 0,020 |
| 5 | 0,020 | 0,020 | 0,020 |

Por último en base a los valores de redundancia calculados que varían entre 0.4 y 0.6, podemos decir que todos los puntos están bien controlados.

CAPITULO 7. CONCLUSIONES.-

- Lo desarrollado en este trabajo es una pequeña parte de lo que el *diseño de redes* abarca. Sin embargo, considero que lo estudiado será de mucha utilidad para enfrentar diferentes problemas y trabajos futuros, desde el punto de vista analizado.
- Respecto a la compensación de una red libre utilizando la matriz seudoinversa, puede concluirse que el centro de masa de la red compensada no presenta traslación ni rotación respecto de la red de coordenadas aproximadas. Esta es una interpretación geométrica de los resultados de dicha compensación. No vamos a demostrar como se llega a esto, lo que podemos decir es que el nuevo datum que se obtiene una vez aplicado el algoritmo de compensación surge del datum que tenemos de partida, por lo cual es lógico pensar que la red en todo su conjunto no se modifique, sino que lo hagan sus vértices.
- Respecto del trabajo de campo que se muestra en el Capítulo 6, podemos decir que la medición de la red ubicada en la localidad de Centeno resultó ser una buena prueba que puso en práctica los conceptos teóricos más importantes que se estudiaron en este trabajo. Los valores obtenidos resultaron muy satisfactorios, con precisiones del orden de 2cm.
- Por último, considero que el profesional de la *Ingeniería en Agrimensura* no es ajeno a este tipo de situaciones problemáticas, por lo tanto debe conocer los diferentes problemas de diseño de redes.

ANEXO A.-

En este anexo se enuncia de manera mas fomal algunos resultados y pruebas utilizados para el estudio realizado en este trabajo. La nomenclatura que se muestra es la adoptada globalmente.

MODELO DE GAUSS-MARKOV DE RANGO COMPLETO

(Vacaflor 2009)

Sea la variable estocástica y definida de la siguiente manera:

$$y : (A\xi; \Sigma) \quad E\{y\} = A\xi \quad D\{y\} = \Sigma = \sigma_0^2 P^{-1}$$

$y_{n \times 1}$: Es una vector aleatorio, denominado vector de las observaciones.

$\xi_{m \times 1}$: Vector de los parámetros.

$A_{n \times m}$: Matriz de coeficientes ó matriz de diseño.

$P_{n \times n}$: Matriz de pesos (es una matriz definida positiva, es decir todos los autovalores de M son positivos).

σ_0^2 : Componente de la varianza; factor de la varianza ó varianza de la unidad de peso.

n : Número de observaciones.

m : Número de parámetros.

$E\{ \}$: Operador esperanza matemática.

$D\{ \}$: Operador dispersión.

El modelo de Gauss-Markov para el caso de rango completo queda definido de la siguiente manera:

$$y : (A\xi; \Sigma) \quad ; \quad E\{y\} = A\xi \quad ; \quad r(A) = m = r \quad ; \quad D\{y\} = \Sigma = \sigma_0^2 P^{-1}$$

Formulación alternativa del modelo de Gauss-Markov. GMM

$$e := y - E\{y\} \Rightarrow y - e = A\xi \quad ; \quad e : (0; \sigma_0^2 P^{-1}) \quad ; \quad E\{e\} = 0 \quad ; \quad D\{e\} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

e : Vector error ó vector de ruido.

Prueba:

- $e := y - A\xi \Rightarrow E\{e\} = E\{y - A\xi\} = E\{y\} - E\{A\xi\} \Rightarrow E\{e\} = 0$
 $E\{e\} = E\{y\} - A\xi = E\{y\} - E\{y\} = 0$
 $E\{e\} = 0$
- $D\{e\} = E\{(e - E\{e\})(e - E\{e\})^T\} = E\{ee^T\}$
 $D\{y\} = E\{(y - E\{y\})(y - E\{y\})^T\} = E\{(A\xi + e - A\xi)(A\xi + e - A\xi)^T\} = E\{ee^T\}$
 $D\{e\} = E\{ee^T\} = D\{y\}$

Ley general de propagación de errores:

Sea $Z = Ly + \gamma$; la ley general de propagación de errores nos dice que: $D\{Z\} = LD\{y\}L^T$
; γ_{rx1} : Vector fijo y arbitrario , L_{rxn} : Matriz fija y arbitraria.

DETERMINACION DE ξ POR MÉTODOS GEOMÉTRICOS ALGEBRAICOS. COMPENSACION POR MINIMOS CUADRADOS

$$\|y - A\xi\|_p^2 = (y - A\xi)^T P(y - A\xi) = e^T P e = \|e\|_p^2 = \min_{\xi}$$

Podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &:= (y - A\xi)^T P(y - A\xi) = (y^T - \xi^T A^T) P(y - A\xi) \\ &= (y^T - \xi^T A^T) (Py - PA\xi) = y^T Py - y^T PA\xi - \xi^T A^T Py + \xi^T A^T PA\xi = \min_{\xi} \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que el producto $y^T PA\xi$ da como resultado un número, entonces

$y^T PA\xi = (y^T PA\xi)^T = \xi^T A^T Py$, y podemos seguir trabajando la ecuación, quedándonos de la siguiente manera:

$$\phi(\xi) := y^T Py - 2\xi^T A^T Py + \xi^T A^T PA\xi = \min_{\xi}$$

Esta última ecuación es un problema variacional. Debe cumplir las siguientes condiciones necesarias y suficientes (condiciones de Euler-Lagrange).

- $\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_{\xi=\hat{\xi}}} = A^T PA\hat{\xi} - A^T Py = -A^T P\tilde{e} = 0$
 $A^T PA\hat{\xi} - A^T Py = 0$: Ecuaciones normales
 $-A^T P\tilde{e} = 0$: Relación de ortogonalidad

(Condición necesaria de Euler-Lagrange)

$$\bullet \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \xi^T} \Big|_{\xi=\hat{\xi}} = A^T P A \text{ es positiva definida}$$

(Condición suficiente)

EL MODELO PARAMETRICO. SOLUCION LESS (LEAST SQUARE SOLUTION).

La solución al sistema por el método de mínimos cuadrados (LESS), viene dado de la siguiente manera:

$$\hat{\xi} = (A^T P A)^{-1} A^T P y$$

Ya que $r(A) = m = r(N) \Rightarrow \hat{\xi} = N^{-1} c$ es única.

$N := A^T P A$: Matriz normal

$c := A^T P y$

$$\begin{aligned} D\{\hat{\xi}\} &= (A^T P A)^{-1} A^T P D\{y\} \left[(A^T P A)^{-1} A^T P y \right]^T = \\ &= (A^T P A)^{-1} A^T P \sigma_0^2 P^{-1} P A (A^T P A)^{-1} \\ &= \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} \end{aligned}$$

$$D\{\hat{\xi}\} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

$$\tilde{e} = y - A \hat{\xi} = \left[I_n - A (A^T P A)^{-1} A^T P \right] y$$

\tilde{e} : Vector residual ó predicción del vector error.

$$\begin{aligned} D\{\tilde{e}\} &= \left[I_n - A (A^T P A)^{-1} A^T P \right] D\{y\} \left[I_n - A (A^T P A)^{-1} A^T P \right]^T \\ &= \left[I_n - A (A^T P A)^{-1} A^T P \right] \sigma_0^2 \sigma P^{-1} \left[I_n - P A (A^T P A)^{-1} A^T \right] \\ &= \sigma_0^2 \left[P^{-1} - A N^{-1} A^T \right] \left[I_n - P A N^{-1} A^T \right] \\ &= \sigma_0^2 \left[P^{-1} - A N^{-1} A^T - A N^{-1} A^T + A N^{-1} A^T P A N^{-1} A^T \right] \\ &= \sigma_0^2 \left[P^{-1} - A N^{-1} A^T - A N^{-1} A^T + A N^{-1} N N^{-1} A^T \right] \\ &= \sigma_0^2 \left[P^{-1} - A N^{-1} A^T \right] \\ &= \sigma_0^2 P^{-1} - \sigma_0^2 A N^{-1} A^T = D\{y\} - D\{A \hat{\xi}\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$D\{\tilde{e}\} = D\{y\} - D\{A \hat{\xi}\} = \sigma_0^2 P^{-1} - \sigma_0^2 A N^{-1} A^T$$

Ya que $D\{y\} = D\{\tilde{e}\} + D\{A\hat{\xi}\} = D\{\tilde{e} + A\hat{\xi}\} \Rightarrow$ que \tilde{e} y $A\hat{\xi}$ no están correlacionadas.
 $C(\tilde{e}; A\hat{\xi}) + C(A\hat{\xi}; \tilde{e}) = 0$

$E\{y\} = A\hat{\xi}$ siendo este el vector de las observaciones compensadas.

Calidad de la aproximación o el ajuste:

$$\begin{aligned} \|y - A\hat{\xi}\|_p^2 &= \tilde{e}^T P \tilde{e} = (y - A\hat{\xi})^T P \tilde{e} = (y^T - \hat{\xi}^T A^T) P \tilde{e} = y^T P \tilde{e} - \hat{\xi}^T A^T P \tilde{e} = y^T P \tilde{e} = \\ &= y^T P [I_n - A(A^T P A)^{-1} A^T P] y = y^T [P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P] y \Rightarrow \\ \|y - A\hat{\xi}\|_p^2 &= y^T [P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P] y \end{aligned}$$

MODELO SINGULAR (CON DEFECTO DE DATUM) DE GAUSS-MARKOV

$$y - e = A\xi; \quad r(A) =: q \ll m < n; \quad d =: m - q, \quad e: (0; \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\})$$

$y_{n \times 1}$: Es una variable aleatoria, por lo tanto tiene una distribución. A esta se la llama vector de las observaciones.

$\xi_{m \times 1}$: Vector de los parámetros.

$A_{n \times m}$: Matriz de coeficientes ó matriz de diseño.

$P_{n \times n}$: Matriz de pesos, y es una matriz positiva definida.

σ_0^2 : Componente de la varianza; factor de la varianza ó varianza de la unidad de peso.

$$\sigma_0^2 > 0$$

n : Número de observaciones.

m : Número de parámetros.

d : Número de defectos del datum.

$E\{ \}$: Operador esperanza matemática.

$D\{ \}$: Dispersión.

$d = m - q$ es el número de defectos del datum, por lo tanto es igual al número de parámetros adicionales que son necesarios definir y realizar el sistema de referencia.

Basados en el principio de mínimos cuadrados ponderados:

$$e^T P e = \|e\|_P^2 = \|y - A\xi\|_P^2 = (y - A\xi)^T P (y - A\xi) = \min_{\xi}$$

A partir de estas dos ecuaciones se puede llegar a un sistema de ecuaciones normales singular:

$$N\xi = c; \quad r(N) = q - m; \quad |N| = 0$$

Con

$$N := A^T P A = \text{Matriz normal}$$

$$c := A^T P y$$

Se obtendrá una única solución si se introducen "l" restricciones adicionales de la forma:

$$K\xi = x_0; \quad o(K) = l \times m; \quad r(K) = l \geq m - q$$

Y si se cumple la condición de que:

$$R(K^T) \cup R(A^T) = \mathfrak{R}^m$$

Siendo:

$$R(K^T) = (K^T \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{R}^l); \quad R(K^T) \subset \mathfrak{R}^m; \quad \dim R(K^T) = r(K) = l$$

$$R(A^T) = (A^T \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{R}^q); \quad R(A^T) \subset \mathfrak{R}^m; \quad \dim R(A^T) = r(A) = q$$

Por lo tanto introduciendo $K\xi = x_0$ bajo el cumplimiento de que $R(K^T) \cup R(A^T) = \mathfrak{R}^m$ se elimina el defecto de datum.

Y el modelo singular de Gauss-Markov queda definido como:

$$y - e = A\xi; \quad r(A) = q \leq m < n; \quad d = m - q, \quad e: (0; \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\})$$

$$K\xi = x_0; \quad o(K) = l \times m; \quad r(K) = l \geq m - q; \quad R(K^T) \cup R(A^T) = \mathfrak{R}^m$$

La solución de mínimos cuadrados ponderados ξ (W-LESS: Weighted Least Square Solution) se basa en la función objetivo:

$$\phi(\xi; \lambda) = (y - A\xi)^T P (y - A\xi) + 2\lambda^T (K\xi - x_0) = \min_{\xi, \lambda}$$

Siendo el vector λ de $(l \times 1)$ los multiplicadores de Lagrange.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = N\xi + K^T \hat{\lambda} - c = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = K\xi - x_0 = 0$$

De las ecuaciones normales extendidas equivalentes:

$$\begin{aligned}(K^T QK)\hat{\xi} &= K^T Qx \\ (N + K^T QK)\hat{\xi} + K^T \hat{\lambda} &= c + K^T Qx\end{aligned}$$

Se obtienen las coordenadas compensadas:

$$\hat{\xi} = N_K^{-1}c + N_K^{-1}K^T (KN_K^{-1}K^T)^{-1}(x_0 - KN_K^{-1}c)$$

Con $N_K := (N + K^T QK)$ regular y Q_{m-q} cualquier matriz positiva definida

Si consideramos que el $r(K) = l = d := m - q$, entonces la ecuación $K\hat{\xi} = x_0$ se denomina restricciones mínimas de datum y la solución por mínimos cuadrados ponderados se encuentra a partir del modelo:

$$y - e = A\xi; \quad r(A) =: q \ll m < n; \quad d =: m - q, \quad e: (0; \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\})$$

$$K\hat{\xi} = x_0; \quad o(K) = dxm; \quad r(K) = d$$

$$R(A^T) \oplus R(K^T) = \mathfrak{R}^m$$

$R(A^T)$ y $R(K^T)$ son subespacios complementarios en \mathfrak{R}^m .

Para encontrar una óptima elección de K que minimice la $tr\{D\{\hat{\xi}\}\}$ o parte de ella, se define una matriz E mediante la relación de ortogonalidad:

$$AE^T = 0; \quad o(E) = dxm; \quad r(E) = d$$

En consecuencia:

$$R(A^T) \oplus R(E^T) = \mathfrak{R}^m$$

Entonces la solución óptima por mínimos cuadrados de una red geodésica libre (Schaffrin, B; 1985) se encuentra a partir de un modelo que incluya restricciones óptimas mínimas de datum de la forma $E\hat{\xi} = x_0$, $K = E$, es decir:

$$y - e = A\xi; \quad r(A) =: q \ll m < n; \quad d =: m - q, \quad e: (0; \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\})$$

$$E\hat{\xi} = x_0$$

$$AE^T = 0; \quad o(E) = dxm; \quad r(E) = d$$

Y por lo tanto la solución óptima (Schaffrin, B. 1985):

$$\hat{\xi} = (N + E^T Q E)^{-1} c + E^T (E E^T)^{-1} x_0$$

$$D\{\hat{\xi}\} = \sigma_0^2 (N + E^T Q E)^{-1} - \sigma_0^2 E^T (E E^T Q E E^T)^{-1} E = \sigma_0^2 N^+$$

La pseudoinversa de N es $N^+ = (N + E^T Q E)^{-1} - E^T (E E^T Q E E^T)^{-1} E$

La $tr\{D\{\hat{\xi}\}\} = \text{mín}$; $x_{0_{dx1}}$ es un vector arbitrario; Q_{m-q} es una matriz positiva-definida.

Si hacemos que $x_{0_{dx1}} = 0$ obtendremos una clase de solución óptima particular llamada Solución por mínimos cuadrados ponderados con norma mínima (MINOLESS: Minimum Norm Least Square Solution).

ANEXO B.-

En este anexo se enuncian y demuestran los teoremas del álgebra lineal necesarios para entender el trabajo. La bibliografía utilizada fue "Nakos, G. y Jovner, D. *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Internacional Thompson Editores."

Teorema 1

Sean $A \text{ } n \times I$ y $M \text{ } I \times I$, matrices tales que $v(A) = v(M)$ y sea d la dimensión de éste. Entonces $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(M) = I - d$.

Demostración:

Suponiendo $M = A^T \cdot A$. Para mayor claridad, no vamos a tener en cuenta a los pesos en esta demostración.

A y M tienen el mismo espacio nulo.

Si $\bar{v} \in v(A) \Rightarrow A \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow A^T \cdot A \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} \in v(A^T \cdot A) \Rightarrow \bar{v} \in v(M)$.

Si

$\bar{v} \in v(M) \Rightarrow M \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow A^T \cdot A \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow A^T \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow A^T \bar{v} \cdot A \bar{v} = 0 \Rightarrow$

$$\|A \cdot \bar{v}\|^2 = 0 \Rightarrow A \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} \in v(A)$$

De esta manera queda demostrado que $v(A^T \cdot A) = v(A)$. Nulidad $(A) =$ Nulidad $(A^T \cdot A)$ y por teorema de la dimensión $\text{Rango}(A) +$ Nulidad $(A) = I = \text{Rango}(A^T \cdot A) +$ Nulidad $(A^T \cdot A)$.

Por lo tanto: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^T \cdot A)$.

Si el $\text{Rango}(A) = I$ entonces la solución por mínimos cuadrados es única.

Teorema 2

Antes debemos mencionar una relación que la vamos a utilizar varias veces, y es la siguiente: $(A \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (A^T \cdot \bar{v})$.

Sea A cualquier matriz $n \times I$, entonces $(\text{Col}(A))^\perp = v(A^T)$.

Al pasar de las columnas a los renglones $(\text{Ren}(A))^\perp = v(A)$

Demostración:

Sea $A = [\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_l]$ entonces \bar{u} está en $(Col(A))^\perp \Leftrightarrow \bar{u}$ es ortogonal a todo vector de columnas de A que generan $Col(A)$:

$$\bar{u} \in (Col(A))^\perp \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v}_1 = 0; \dots; \bar{u} \cdot \bar{v}_l = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_1^T \bar{u} = 0; \dots; \bar{v}_l^T \bar{u} = 0$$

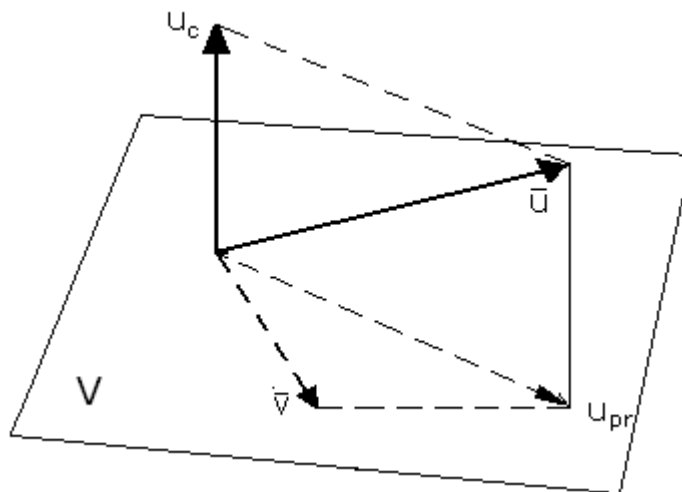
$$\Leftrightarrow A^T \bar{u} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} \in \nu(A^T)$$

$$(Col(A))^\perp = \nu(A^T).$$

$$Si M = A = M^T \Rightarrow (Col(M))^\perp = \nu(M^T) \Rightarrow \text{Re}n(M) \perp \nu(M)$$

Teorema 3

Vamos a enunciar y demostrar el siguiente teorema llamado teorema de la mejor aproximación o por algunos autores, teorema fundamental del álgebra. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



$$\bar{u} = u_c + u_{pr}$$

$$\|u_c\| = \|\bar{u} - u_{pr}\| < \|\bar{u} - \bar{v}\|$$

para cualquier vector \bar{v} de un subespacio V distinto de \bar{u}_{pr} .

Demostración:

Los vectores $\bar{u}_{pr} - \bar{v}$ y $\bar{u} - \bar{u}_{pr}$ son ortogonales porque el primero está en V y el segundo en V^\perp . Por tanto de acuerdo al teorema de Pitágoras:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_{pr}\|^2 + \|\bar{u}_{pr} - \bar{v}\|^2 = \|(\bar{u} - \bar{u}_{pr}) + (\bar{u}_{pr} - \bar{v})\|^2 \quad \text{Por ser ortogonales,}$$

vamos a hacer el binomio del cuadrado para darnos cuenta mejor:

$$\|(\bar{u} - \bar{u}_{pr}) + (\bar{u}_{pr} - \bar{v})\|^2 = \|\bar{u} - \bar{u}_{pr}\|^2 + \|\bar{u}_{pr} - \bar{v}\|^2 + 2(\bar{u} - \bar{u}_{pr})(\bar{u}_{pr} - \bar{v})$$

Y el tercer término del segundo miembro desaparece ya que son ortogonales uno con otro. Siguiendo con lo anterior, teníamos:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_{pr}\|^2 + \|\bar{u}_{pr} - \bar{v}\|^2 = \|(\bar{u} - \bar{u}_{pr}) + (\bar{u}_{pr} - \bar{v})\|^2 = \|\bar{u} - \bar{v}\|^2$$

$$\|\bar{u} - \bar{u}_{pr}\| < \|\bar{u} - \bar{v}\| \text{ Porque } \|\bar{u}_{pr} - \bar{v}\| \neq 0.$$

Teorema 4

Sea A una matriz cuadrada:

- Un escalar λ es un autovalor de A si y solo si:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (\text{Ecuación característica})$$

- Un vector \bar{v} es un autovector de A correspondiente a un autovalor λ si y solo si \bar{v} es una solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda I).\bar{v} = 0.$$

Demostración:

$$A.\bar{v} = \lambda.\bar{v} \Rightarrow A.\bar{v} = \lambda.I.\bar{v} \Rightarrow A.\bar{v} - \lambda.I.\bar{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda.I)\bar{v} = 0$$

\bar{v} es un autovector de A si y solo si es solución no trivial del sistema homogéneo $(A - \lambda I).\bar{v} = 0$.

El sistema tendrá soluciones no triviales, el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Por lo tanto λ es un autovalor de A si y solo si el $\det(A - \lambda I) = 0$.

Teorema 5

Sea una matriz A $n \times n$:

- A es diagonalizable si tiene n autovectores linealmente independientes.
- Si A es diagonalizable con $P^{-1}.A.P = D$, entonces las columnas de P son autovectores de A y los elementos de D son los autovalores de A correspondientes.

Demostración:

Sea P una matriz cuyas columnas son $\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n$ y D una matriz cuyos elementos diagonales son $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$, los respectivos autovalores, entonces:

$$A.P = A[\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n] = [A.\bar{v}_1; A.\bar{v}_2; \dots; A.\bar{v}_n]$$

$$P.D = [\bar{v}_1; \bar{v}_2; \dots; \bar{v}_n] \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = [\lambda_1.\bar{v}_1; \lambda_2.\bar{v}_2; \dots; \lambda_n.\bar{v}_n]$$

Podemos observar que tanto $A.P$ como $P.D$ son iguales siempre que \bar{v}_i y λ_i sean autovectores y autovalores de A . $A.\bar{v}_i = \lambda_i.\bar{v}_i$.

Si A tiene n autovectores linealmente independiente, entonces P resulta invertible ya que es cuadrada con todas sus columnas linealmente independiente.

$$A.P = P.D \Rightarrow P^{-1}.A.P = D$$

Teorema 6

Una matriz ortogonalmente diagonalizable es simétrica.

Demostración:

Si A es ortogonalmente diagonalizable, entonces $Q^{-1}.A.Q = D$ para una matriz ortogonal Q . Luego:

$$A = Q.D.Q^{-1} = Q.D.Q^T \text{ Que implica que:}$$

$$A^T = (Q.D.Q^{-1})^T = [Q^T]^T . D^T . Q^T = Q.D.Q^T = A$$

Siendo las columnas de Q los autovectores de A , y la diagonal de D los autovalores de A .

Lo importante de este teorema es que el recíproco también es cierto. Cualquier matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable y se lo conoce a este como el "Teorema Espectral", no lo demostraremos.

Teorema 7

Teorema: Cuando A es cualquier matriz $m \times n$ y $\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_r$ son todos sus valores singulares distintos de cero, existen matrices ortogonales U $m \times m$ y V $n \times n$ y una matriz Σ $m \times n$ tal que:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

Demostración:

Sabemos que U y V son ortogonales, entonces podemos escribir la ecuación $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ como $A \cdot V = U \cdot \Sigma$ y esto es lo que vamos a demostrar.

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \cdot \bar{v}_i \Rightarrow \bar{u}_i \cdot \sigma_i = A \cdot \bar{v}_i \text{ Para } i=1; 2; \dots; r.$$

Debe extenderse el conjunto $[\bar{u}_1; \bar{u}_2; \dots; \bar{u}_r]$ hasta una base ortonormal $[\bar{u}_1; \bar{u}_2; \dots; \bar{u}_m]$ de R^m . Esto se puede lograr con distintos métodos algebraicos que no vale la pena enunciar ya que solo nos interesa la cuestión teórica.

Anteriormente habíamos dicho que $\sigma_i = \|A \cdot \bar{v}_i\|$ y que $\sigma_i = 0$ para $i=r+1; r+2; \dots; n$ entonces $A \cdot \bar{v}_i = 0$ para $i=r+1; r+2; \dots; n$

$$A \cdot V = [A \cdot \bar{v}_1; A \cdot \bar{v}_2; \dots; A \cdot \bar{v}_n] = [A \cdot \bar{v}_1; A \cdot \bar{v}_2; \dots; A \cdot \bar{v}_r; 0; \dots; 0] \Rightarrow$$

$$A \cdot V = [\sigma_1 \bar{u}_1; \sigma_2 \bar{u}_2; \dots; \sigma_r \bar{u}_r; 0 \bar{u}_{r+1}; \dots; 0 \bar{u}_m] \Rightarrow$$

$$A \cdot V = [\bar{u}_1; \bar{u}_2; \dots; \bar{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & | & 0 \\ & \dots & & & | \\ 0 & & \sigma_r & | & \\ - & - & - & | & - \\ 0 & & & | & 0 \end{bmatrix} = U \cdot \Sigma$$

r es la cantidad de valores singulares distintos de cero, y es igual al rango de la matriz A .

Teorema 8

Teorema: Para cualquier matriz A $m \times n$ y cualquier vector U $m \times 1$ hay una solución \tilde{X} de mínimos cuadrados de $A \cdot X = U$. Además si U_{pr} es la proyección ortogonal de U sobre $Col(A)$, entonces $A \cdot \tilde{X} = U_{pr}$.

Demostración:

Como $U_c = U - A.\tilde{X}$ es ortogonal a $Col(A)$, entonces $A.X$ y

$U - A.\tilde{X}$ deben ser perpendiculares para todo vector X $n \times 1$.

$$\begin{aligned}(U - A.\tilde{X}).A.X = 0 &\Leftrightarrow A^T(U - A.\tilde{X}).X = 0 \Leftrightarrow A^T(U - A.\tilde{X}) = 0 \Leftrightarrow \\ A^T U - A^T A.\tilde{X} = 0 &\Leftrightarrow A^T A.\tilde{X} = A^T U\end{aligned}$$

Teorema 9

Teorema: El problema de mínimos cuadrados $A.X = U$ tiene solución única \tilde{X} por mínimos cuadrados y mínima norma expresada por: $\tilde{X} = A^+ . U$

Demostración:

Sea X un vector n y sea $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n) = V^T . X$. La matriz W^T es ortonormal porque W lo es. Por tanto $\|W^T . Z\| = \|Z\|$ para cualquier vector Z $m \times 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\|U - A.X\| = \|U - W.\Sigma.V^T . X\| &\Rightarrow \|W^T\| \|U - A.X\| = \|W^T\| \|U - W.\Sigma.V^T . X\| \\ \text{Con } \|W^T . W\| = 1 &\end{aligned}$$

$$\|W^T\| \|U - W.\Sigma.V^T . X\| = \|W^T U - \Sigma.V^T . X\| = S_1 + S_2$$

En donde:

$$S_1 = (\bar{w}_1^T . U - \sigma_1 . y_1)^2 + \dots + (\bar{w}_r^T . U - \sigma_r . y_r)^2$$

$$S_2 = (\bar{w}_{r+1}^T . U)^2 + \dots + (\bar{w}_m^T . U)^2$$

Porque el resto de los $\sigma_{r+1} = 0$.

La suma S_2 es fija ya que no interviene la variable X , entonces $\|U - A.X\| = \text{mín}$ si la suma S_1 es mínima. Por lo tanto cada término de la suma S_1 tiene que valer cero para que sea mínimo:

$$\bar{w}_i^T . U = \sigma_i . y_i \quad i=1; 2; \dots; r$$

$$\bar{w}_i^T . U = \sigma_i . \bar{v}_i^T . X \Rightarrow X = \left(V . \frac{\bar{w}_1^T . U}{\sigma_1}; \dots; V . \frac{\bar{w}_r^T . U}{\sigma_r}; r+1; \dots; n \right)$$

Cualquier vector X de esta forma sería solución por mínimos cuadrados, pero si buscamos aquella en la que X tenga mínima norma, entonces hay que igualar los $r+1; \dots; n$ términos a cero

$$\tilde{X} = \left(V \cdot \frac{w_1^{-T} U}{\sigma_1}; \dots; V \cdot \frac{w_r^{-T} U}{\sigma_r}; 0; \dots; 0 \right)$$

$$\tilde{X} = V \cdot \Sigma^+ \cdot W^T \cdot U$$

$$\boxed{\tilde{X} = A^+ \cdot U}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chueca Pazos, M. et. al. (1996). *Métodos Topográficos*. Tratado de Topografía 2. Madrid: Paraninfo. 746 pág.
- Chueca Pazos, M. et. al. (1996). *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia*. Tratado de Topografía 3. Madrid: Paraninfo. 448 pág.
- Chueca Pazos, M. et. al. (1996). *Teoría de errores e instrumentación*. Tratado de Topografía 1. Madrid: Paraninfo. 522 pág.
- Mangiaterra, A. (2006). *Cálculo de Compensaciones*. 74 pág
- Marquez, R. (2008). *Sistemas Lineales Inconsistentes y Ajuste de Redes GPS*. 130 pág.
- Romero, P. y Sevilla, M. J. (1990). *Análisis estadístico de observaciones geodésicas antes de la compensación*. Instituto de Astronomía y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.). 53 pág.
- Mingo, O. y Ortiz Basualdo, E. (1996). *Cálculo de Compensación de mediciones topográficas*. 269 pág.
- Nakos, G. y Jovner, D. *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Internacional Thompson Editores. 664 pág.
- Vacaflor, J.L; et. al. (1996): *Defectos del Datum en el análisis de estructuras geodésicas*. Publicado en las memorias del IV Congreso Internacional de Ciencias de la Tierra. Instituto Geográfico Militar. Santiago. Chile
- Vacaflor, J.L y Lopez Ferneti, N.G (1995): *Ajuste de una red geodésica libre*. Publicado en Contribuciones Científicas CAC-Centro Argentino de Cartografía-I Congreso Argentino de Geociencias y Geotécnicas y IX Congreso Nacional de Cartografía. Buenos Aires, pag.24-41