Unidad nº2.

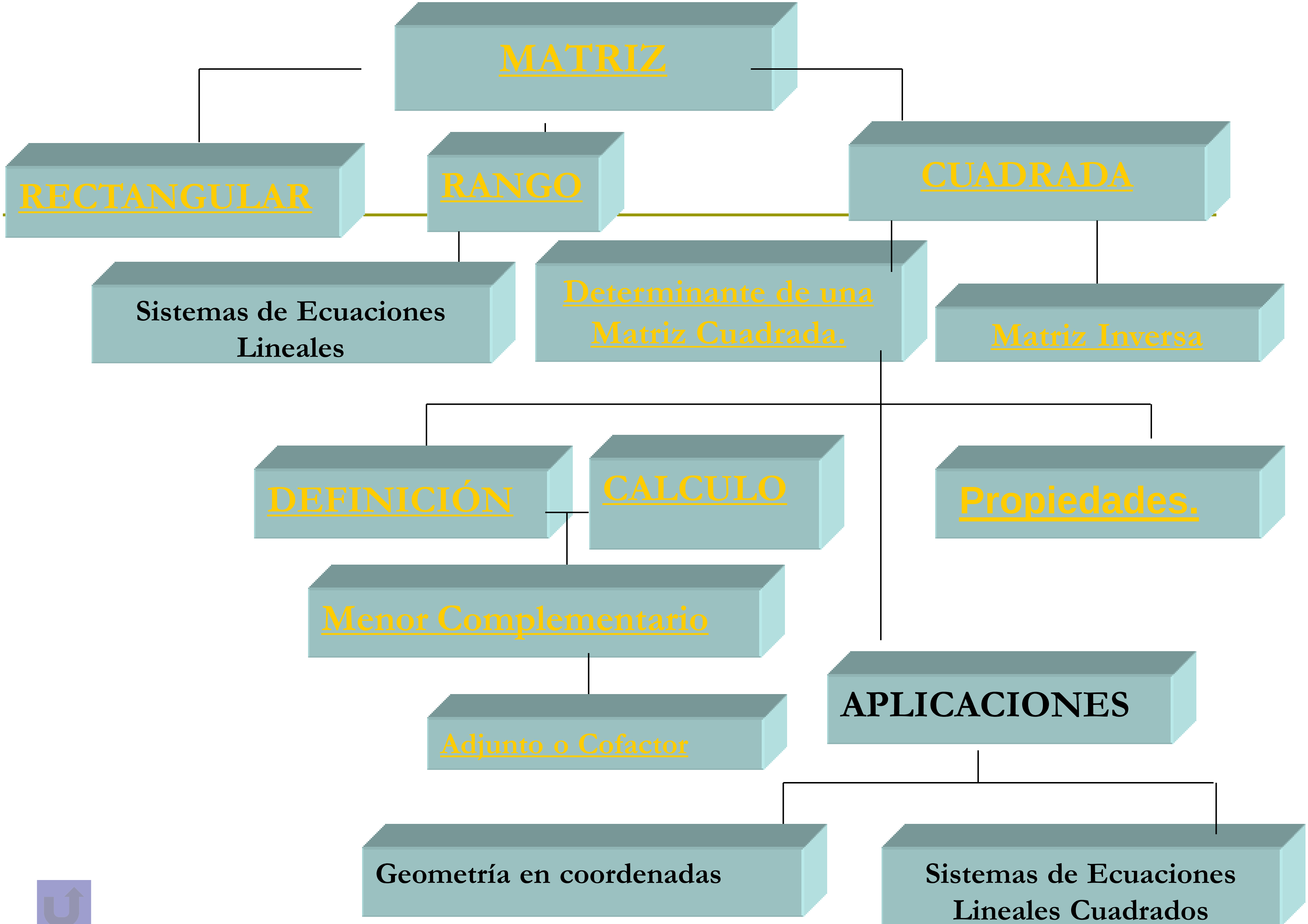
MATRICES
Y
DETERMINANTES.

Contenidos

Matriz. Espacio Vectorial de matrices de orden (m x n). Operaciones. Anillo de matrices cuadradas. Matrices Especiales. Operaciones elementales de filas o columnas. Equivalencia de matrices. Rango de una matriz. Propiedades Matriz Inversa o no singular. Inversión de matrices. Determinante de una matriz cuadrada. Propiedades. Adjunta de una matriz cuadrada. Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico de una matriz. Cálculo de los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada.

Bibliografía

1. De Burgos, J. - "*Algebra Lineal y Geometría cartesiana*"- (2 da. Edición) –Mc Graw Hill- 2000
2. Rojo, Armando O -"*Algebra I*","*Algebra II*"-Librería "El Ateneo" Editorial. Ed.1.980
3. Lic. Albino de Sunkel, M. H.- "*Geometría Analítica en forma vectorial y Matricial*" – Ed. Nueva Librería S.R.L. 1989
4. Steinbruch – Winterle- "*Algebra Lineal*"- Edit.Mac Graw Hill Edición 1.993
5. Stanley I.Grossman – "*Algebra Lineal con aplicaciones*" Edit.Mc.Graw Hill- Ed.1993
6. Seymour Lipschutz – "*Algebra Lineal*" – Edit Mc. Graw Hill – Edición 1991
7. Pita Ruiz, Claudio.- "*Álgebra Lineal* "-Ed.Mc.Graw Hill-Ed 1993


MATRIZ
RECTANGULAR
RANGO
CUADRADA
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Determinante de una Matriz Cuadrada.
Matriz Inversa
DEFINICIÓN
CALCULO
Propiedades.
Menor Complementario
Adjunto o Cofactor
APLICACIONES
Geometría en coordenadas
Sistemas de Ecuaciones Lineales Cuadrados

Matriz como conjunto de vectores de R^n.

Se llama matriz de clase m x n con coeficientes en en un cuerpo K a todo conjunto de m vectores de K^n dispuestos en m filas.

Una matriz de clase m x n es un cuadro de m filas (vectores de K^n) y n columnas (vectores de K^m).(K=R o K=C)

m filas n columnas

Columna j

Fila i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_{ij} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notación abreviada.

- $A = [\ a_{i\,j}\ ]_{m \times n}$ $i \in N$; $j \in N$; $m \in N$ y $n \in N$

con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. $a_{i\,j}$: elemento genérico

- El subíndice (i) indica la fila a la que pertenece el elemento $a_{i\,j}$.

- El subíndice (j) indica la columna a la que pertenece el elemento $a_{i\,j}$.

Construcción de Matrices. Ejemplo

$$a)A = \left[a_{ij} \right]_{3\,x\,3} / a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & si\ i \neq j \\ 0 & si\ i = j \end{cases}$$

$$b)B = \left[b_{ij} \right]_{4x2} / b_{ij} = \begin{cases} i + j & si & i \leq j \\ i - j & si & i > j \end{cases}$$

Notación abreviada.

- Matriz A por filas:

$$A = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

- Matriz A por columnas:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Matriz Fila. Matriz Columna.

- Matriz Fila: matriz de una sola fila.

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots a_{1j} \quad \cdots a_{1n}]_{1xn}$$

- Matriz Columna: matriz de una sola columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{mx1}$$

Igualdad de matrices.

- Dos matrices de la misma clase son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en cada matriz son iguales entre sí.
- $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \; \forall i=1, 2, \dots, m \quad \forall j=1, 2, \dots, n$

Ejemplo: Determine los números reales a, b, x e y, sabiendo que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 2a+b \\ 2x-y & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Operaciones.

- $\forall A = [a_{ij}] \in K^{m \times n}, \forall B = [b_{ij}] \in K^{m \times n}$.

SUMA DE MATRICES.

$$A+B=[a_{ij}]_{m \times n}+[b_{ij}]_{m \times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}, \forall\, i, \forall j\ .$$

- **Propiedades**:

Ley de Composición Interna.

Conmutativa.

Asociativa .

Existencia de Elemento Neutro.

Existencia de Elemento Opuesto.O

Producto escalar – matriz.

.: $\alpha \cdot A = \alpha\,[a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha\, a_{ij}]_{m \times n} = D$,

$D \in K^{m \times n}$. $\forall\, \alpha \in K$, $\forall\, A \in K^{m \times n}$

Propiedades:

- Ley de Composición externa.
- Pseudoasociativa .
- 1 elemento neutro.
- Distributiva con respecto a la suma de escalares.
- Distributiva con respecto a la suma de matrices.

(K^{mxn}, +, K, .): ESPACIO VECTORIAL

K=R o K=C

Suma de Matrices. Ejemplo:

- Sean las matrices $A=[a_{ij}]_{2 \times 2}$ y $B=[b_{ij}]_{2 \times 2}$ con $a_{ij} = 2i - j^2$, y, $b_{ij} = a_{ij}+1$

- Hallar A + B

Producto escalar-matriz.Ejemplo.

- Sean las matrices $A=[a_{ij}]_{2 \times 2}$ y $B=[b_{ij}]_{2x\,2}$

con $a_{ij} = 2\,i - j^2$, y, $b_{ij} = a_{ij}+1$

- Hallar 2.A

- ½ B

Operaciones. Resta de Matrices.

$$\forall \ A = [a_{ij}] \in K^{m \times n},$$
$$\forall \ B = [b_{ij}] \in K^{m \times n}:$$

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Ejemplo:

Sean las matrices $A=[a_{ij}]_{2 \times 2}$ y $B=[b_{ij}]_{2 \times 2}$ con $a_{ij} = 2i - j^2$, y, $b_{ij} = a_{ij}+1$

- Hallar $2A-\frac{1}{2}B$

Producto de Matrices.

Matrices conformables.

$A = [a_{ij}] \in K^{m \times p}$ y $B = [b_{ij}] \in K^{q \times n}$ son ***matrices conformables*** **para el producto $\Leftrightarrow p = q$**

- **$A = [a_{ik}] \in K^{m \times p}$, $\forall B = [b_{kj}] \in K^{p \times n}$**
- **$A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m \times n}$ / $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ con**

$i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$

Producto de Matrices. Ejemplo.

- Sean las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 6\end{bmatrix}\ ;\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

- Hallar: A.B;
- B.A;
- A.C;
- C.A.

Propiedades del Producto de Matrices.

- El producto de matrices es **asociativo.**

  $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- El producto de matrices es **distributivo a izquierda** con respecto a la **suma**

  $$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

- El producto de matrices es **distributivo a derecha** con respecto a la **suma**.

  $$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

- CUIDADO: A veces

  $$A \cdot (B+C) \neq (B + C) \cdot A$$

- El Producto de matrices **no cumple** la **Ley De Cierre**.
- El producto de matrices **no es conmutativo**
- En K^{mxn} **no existe elemento neutro** para el producto.
- En k^{mxn} el producto de matrices **no verifica la existencia de elemento inverso**

Anillo de Matrices Cuadradas.

- (K^{nxn}, +) es un *grupo abeliano*, por serlo K^{mxn} ; $\forall$ m , n $\in$ N
- (K^{nxn}, .) verifica las siguientes propiedades:
  - Ley de cierre.
  - Asociativa.
  - Existencia de elemento neutro.

$$I_n = [\delta_{ij}]_{nxn} \,/\, \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

  - Distributiva con respecto a la suma a derecha e izquierda.

$\therefore$ (K^{nxn}, +, *) es un *anillo con unidad*

Anillo con unidad y con divisores de cero.

$$\exists A, B \in K^{nxn} / A.B = 0 \wedge A \neq 0_{nxn} \wedge B \neq 0_{nxn}$$

✍Determine la matriz $B \in R^{2x2} \neq N$, tal que A.B =N siendo N la matriz nula y $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Matrices Especiales.

- **Matriz cuadrada.**

$A \in K^{m \times n}$ es **cuadrada** $\Leftrightarrow m = n$

- **Matriz rectangular.**

$A \in K^{m \times n}$ es **rectangular** $\Leftrightarrow m \neq n$

- ✍ Elabore un ejemplo.

Matrices Especiales.

- **Matriz Fila:** matriz de clase (1 x n), de una fila por n columna.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n})$$

- **Matriz Columna:** matriz de clase (mx1), de m fila por 1 columna.

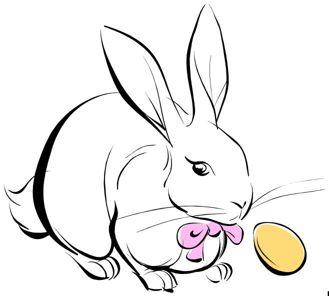
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- ✍ Elabore un ejemplo.

Matriz Traspuesta .

- $A=[a_{ij}] \in K^{m \times n}$ se llama *traspuesta* de A a la matriz $A^T=[a_{ji}] \in K^{n \times m}$
- A^T es la matriz cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A.
- Si A es de clase (m x n), A^T es de clase (n x m).
- ✍ Elabore un ejemplo.

Matriz Traspuesta: Propiedades.



- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$
- El producto de toda matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.
- La suma de toda matriz cuadrada con su traspuesta es simétrica
- La diferencia de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es antisimétrica
- Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica

  - ✍ Verifique cada una de las propiedades.

Matriz Simétrica

- Una matriz cuadrada es simétrica si y sólo si es igual a su traspuesta.
- $A \in K^{n \times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i \ \forall j$

- ✍ Elabore un ejemplo.

Matriz Antisimétrica.

- Una matriz cuadrada es *antisimétrica* si y sólo si es igual a la opuesta de su traspuesta con los coeficientes $a_{ii}=0$.

- ✍ Elabore un ejemplo.

Matriz Escalonada.

Una matriz es escalonada si:

- Las filas no nulas, preceden a las filas nulas, si las hay.
- En cada una de las filas no nulas, el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que en la fila anterior.
- ✍ Elabore un ejemplo de una matriz que sea escalonada y de otra que no lo sea.

Matrices Cuadradas Particulares.

- $A \in K^{nxn}$ es matriz **diagonal** $\Leftrightarrow i \neq j \Rightarrow a_{ij}=0$.

✍ Elabore un ejemplo.

- $A \in K^{nxn}$ es matriz **escalar**

$$\Leftrightarrow$$

$$A \text{ es diagonal } \wedge a_{ii}=a_{11}$$

- ✍ Elabore un ejemplo.

Matriz Triangular.

- A es matriz **triangular superior** si y sólo si $a_{ij}=0$ con $i>j$
- ✍ Elabore un ejemplo.

- A es matriz **triangular inferior** si y sólo si $a_{ij}=0$ con $i<j$
- ✍ Elabore un ejemplo.

Operaciones Elementales de Filas o Columnas.

- Dada una matriz $A \in K^{m \times n}$, se llaman operaciones elementales de filas o columnas a las siguientes:
- *Permutación de dos filas*

$$e: F_i \leftrightarrow F_j$$

- *Reemplazo de todos los elementos de una fila por su producto por un escalar distinto de cero*

$$e: k\, F_i \rightarrow F_i$$

- *Reemplazo de una fila por su suma con otra*

$$e: F_i + F_j \rightarrow F_i$$

Ejemplo 1

a)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & -3 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\ldots + \ldots \to \ldots \\ \ldots + \ldots \to \ldots}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 4 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\ldots + \ldots \to \ldots \\ \ldots + \ldots \to \ldots}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\ldots \leftrightarrow \ldots \\ \ldots + \ldots \to \ldots}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ldots+\ldots\to\ldots]{\ldots+\ldots\to\ldots} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ldots+\ldots\to\ldots]{\ldots+\ldots\to\ldots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & -9 & \vdots & -18 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\ldots)\ldots\to\ldots]{\ldots\leftrightarrow\ldots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ldots+\ldots\to\ldots]{\ldots+\ldots\to\ldots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

$$A' = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{(\ldots)\ldots\to\ldots} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow[\ldots+\ldots\to\ldots]{\ldots+\ldots\to\ldots} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(\ldots)\ldots\to\ldots} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[\ldots+\ldots\to\ldots]{\ldots+\ldots\to\ldots} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Equivalencia de Matrices.

- Una matriz B_{mxn} es equivalente por filas a otra matriz A_{mxn}, si B se obtiene aplicando a la matriz A un número finito de operaciones elementales por filas.

- $\mathbf{A \sim_f B \Leftrightarrow \exists\ e_1, e_2, \ldots, e_k\ /\ e_k(\ldots e_3(e_2(e_1(A)))\ldots)=B}$

Matrices Elementales.

- Una matriz de clase (nxn) se llama elemental si y sólo si se obtiene por aplicación de una sola operación elemental a la matriz $I_{(n.}$

✍Elabore un ejemplo.

Propiedades

- Si A es una matriz de clase (mxn), toda operación elemental e sobre A, puede ser efectuada premultiplicando A por la matriz elemental E de clase (mxm), que resulta de aplicar la operación elemental e a la matriz $I_{(m}$

  $$e(I_{(m})=E \Rightarrow E.A=e(A)$$

  E es la matriz correspondiente a la operación elemental e.

- Si A y B son dos matrices de clase mxn, tales que A ~B, entonces existe una matriz S, de clase mxm, tal que B=S.A

Ejemplo.

- Escalonar la matriz y verificar las propiedades de Matrices Elementales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Rango de una Matriz.

Sea $A \in K^{mxn}$.

- Rango fila de A: $[r_f(A)]=r$, es el máximo número de filas linealmente independientes de A.
- Rango columna de A: $[r_c(A)]=r$, es el máximo número de columnas linealmente independientes de A.
- $r_f(A) = r_c(A)=r(A)=r$

Propiedades.

- $\forall n, m \in N : r_f\, O_{(n \times m)} = 0.$
- $\forall n \in N : r_f\, (I_n) = n.$
- Dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango fila.
- Una matriz cuadrada de clase n x n es inversible si y solo si, su rango fila es igual a n.
- El rango fila de una matriz en forma escalonada es igual al número de filas no nulas de esa matriz.

Rango de una matriz. Ejemplo.

- ✍ Ejemplo: Calcular el rango de la siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa o no singular.

- La matriz $A \in K^{nxn}$ es **inversible** si y solo si $\exists$ $B \in K^{nxn}$/ $A \cdot B = B.A = I_{(n}$

- Notación: $B=A^{-1}$

Matriz Inversa.Propiedades.

- La inversa de una matriz inversible es única.
- $(A.B)^{-1}=B^{-1}.\ A^{-1}.$
- Si A es inversible y $A.B=A.C \Rightarrow B=C$
- Si A^{-1}es la inversa de A,$(A^{-1})^{-1}=A$
- $I_{(n}$ es inversible. $I^{-1}_{(n}=I_{(n}$
- A_{nxn} es inversible $\Leftrightarrow r(A)=n$
- A_{nxn} es inversible $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

Inversión de Matrices.

Teorema de Gauss Jordan:

Si A es una matriz cuadrada tal que por una secuencia finita de operaciones elementales de fila se transforma en la identidad, entonces:

1) $A \sim_f I \Leftrightarrow e_k(\ldots e_3(e_2(e_1(A)))\ldots)=I$

A es inversible.

2) $I \sim_f A^{-1} \Leftrightarrow e_k(\ldots e_3(e_2(e_1(I)))\ldots)= A^{-1}$

A	I
...	...
I	A^{-1}

Cálculo de la Matriz Inversa.Ejemplo.

- Calcule A^{-1} aplicando el método de Gauss Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinante de una Matriz Cuadrada.

$\forall A \in K^{nxn}$ y cualquiera sean i y j pertenecientes a N

- *Determinante de orden n* es toda función que asigna a cada matriz cuadrada un escalar sobre el cuerpo K que se denomina *determinante* de la matriz .

$$D: K^{nxn} \to K / \det(A) \text{ verifica:}$$

Axioma 1:

- Si una columna de la matriz A se descompone en dos sumandos, entonces el det(A) es igual a la suma de los determinantes de las dos matrices que resultan de sustituir en A, aquella columna por cada uno de los sumandos.

- $D(c_1 c_2 \ldots c_j\ c_{j+1} \ldots c_n) = D(c_1\ c_2 \ldots c_j \ldots c_n) + D(c_1\ c_2 \ldots c_{j+1} \ldots c_n)$

  $\forall J = 1,\ 2,\ \ldots n.$

Axioma 2:

- Si a una fila (o columna) de A se la multiplica por un escalar, entonces el det (A) queda multiplicado por el escalar.

$$D(c_1 \ldots \alpha c_j \ldots c_n) = \alpha \, D(c_1 \ldots c_j \ldots c_n)$$

$$\forall J = 1, 2, \ldots n.$$

Axioma 3:

- Si dos columnas consecutivas de una matriz son idénticas, entonces su determinante es nulo.

- $c_j = c_{j+1} \Rightarrow D(c_1 \ldots c_j \;\; c_{j+1} \ldots c_n) = 0$

$\forall$ J=1, 2, …n.

Axiomas 4:

- El determinante de la matriz identidad es igual a 1.

$$D(I_{(n)})=1$$

Menor Complementario del Elemento a_{Ij} de la matriz A.

- Dada una matriz $A=[a_{ij}]_{n \times n}$, con $1\leq i \leq n$ y $1\leq j \leq n$, llamamos *menor complementario del elemento a_{ij} de A*, al determinante de la matriz de clase$(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.
    - **$M_{ij} = \det(A(i|j))$**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adjunto o Cofactor del Elemento a_{IJ}

- Se llama *Adjunto o Cofactor del Elemento a_{IJ}* de una matriz de clase (n x n), a su menor complementario o a su opuesto según que i + j sea par o impar respectivamente.

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & si \quad i+j \quad es \quad par \\ -M_{ij} & si \quad i+j \quad es \quad impar \end{cases}$$

- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Ejemplo A_{ij}

- Escribe la matriz $D \in R^{3x3}$, si

$D = [d_{ij}] /$

$$d_{ij} = \begin{cases} i^j & si \quad i = j \\ j^i & si \quad i \neq j \end{cases}$$

- Calcule D_{13}; D_{21}.

Desarrollo del determinante por la i-ésima fila.

- Dada una matriz $A=[a_{ij}] \in K^{nxn}$ con $1\leq i \leq n$ y $1\leq j \leq n$, llamamos determinante de A :

$$\det : K^{nxn} \to K \,/\, \det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{si} \quad n=1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij} & \text{si} \quad n>1 \end{cases}$$

Cálculo de determinantes. Ejemplos.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Propiedades.

- P_1:El determinante de toda matriz triangular superior (inferior o diagonal) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{jj} & a_{j(j+1)} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{(j+1)(j+1)} & \cdots & a_{(j+1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

P2:Si una columna de una matriz es el vector nulo, entonces su determinante es nulo.

P3:Si a una matriz se la multiplica por un escalar no nulo $\propto$ se obtiene otra matriz cuyo determinante es $\propto^n$ veces el determinante de la matriz primitiva.

- P_4:Si se permutan dos columnas de una matriz, se obtiene una matriz cuyo determinante es igual al opuesto del determinante de la matriz primitiva.

- P_5:El determinante de toda matriz que tenga dos columnas idénticas es nulo.

- $\mathbf{P_6}$**:**El determinante de una matriz no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de otras.

- $\mathbf{P_7}$**:**Si C_1, C_2, ..., C_n son linealmente dependientes en K^n, entonces es

$$D(C_1\ C_2\ \ldots\ C_n)=0$$

- **Determinante de la traspuesta de una matriz:** El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.
  - $\det(A) = \det(A^T)$
- **Determinante del producto de matrices:** El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes.
  - $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- **Determinante de matrices inversas:** Los determinantes de dos matrices inversas son escalares recíprocos.
  - $\det(A) = 1/\det(A^{-1})$

Cálculo de determinantes aplicando propiedades. Ejemplos.

Sea $S = [s_{ij}]_{3x3}$ / $s_{ij} = \begin{cases} o & si & i<j \\ i+j & si & i=j \\ i-j & si & i>j \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 25; \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D; \quad \text{Calcule} \quad \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & j & g \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -j \end{vmatrix}$$

Adjunta de una matriz cuadrada.

- Adjunta de una matriz cuadrada es la traspuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por si cofactor.

$$\text{Adj } A = [\ A_{ij}]^T$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|\ A\ |}$$

Cálculo de la Matriz Inversa, utilizando determinantes.Ejemplo

- Calcule la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada.

- El escalar λ es un valor propio de la matriz $A \in K^{nxn}$ si y sólo si existe un vector no nulo $X \in K^{nx1}$.
- Un vector no nulo que satisfaga la relación $A.X = \lambda.X$ se llama vector propio de A asociado al valor propio λ.

Propiedad.

- Si $A \in K^{nxn}$ entonces $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si $A - \lambda I$ es singular(no es inversible).
- $\lambda \in K$ es un valor propio de $A \in K^{nxn}$

  si y sólo si $D(A - \lambda I) = 0$

Ejercicio.comp,etar y corregir

- Halle los valores y vectores propios si existen de las siguientes matrices de R^{2x2}:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Respuesta: Construcción de Matrices.

- a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Respuesta ejemplo Igualdad de Matrices

$$\begin{bmatrix} x + y & 2 \cdot a + b \\ 2 \cdot x - y & a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a - b = 7 \end{cases}$$

$$[x = 1 \wedge y = 2]$$

$$[a = 2 \wedge b = -5]$$

Respuesta Suma de Matrices.

$$a := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + b = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta producto escalar-matriz

$$2 \cdot a = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Respuesta Resta de Matrices.

$$2 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Respuesta Ejemplo Producto de Matrices.

- A.B=

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 12 & 21 \\ -1 & 10 & 4 & 12 \\ 4 & 0 & 16 & 24 \end{bmatrix}$$

- B.A=No es

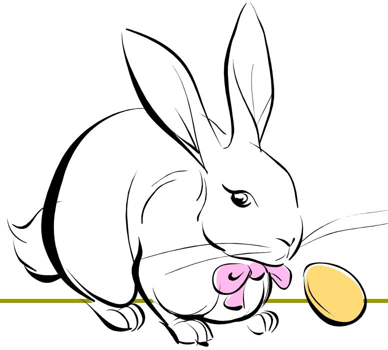
- A.C=

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 10 \\ 8 & 13 & 0 \\ 0 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

- C.A=

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$$

Demuestre que (R^{2x2}, +, .) es un anillo con unidad y con divisores de cero.



- Pruebe las propiedades de Matrices Traspuestas en R^{3x3}

- Demuestre por lo menos dos.

Respuesta Matriz Escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ROW\_REDUCE}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta rango de una matriz.

- r(A)=2 r(B)=3 r(C)=2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\text{ROW\_REDUCE} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ROW\_REDUCE} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta cálculo matriz inversa mediante Gauss Jordan.

$$a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$a \cdot a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b \cdot b^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta a cálculo de determinantes

$$\text{DET}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -42$$

$$\text{DET}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 12$$

Demostración: Propiedades de la función determinante.

- Demuestre las propiedades de la función determinante.

Pistas para la demostración.

- Primera parte:

Pistas para la demostración: segunda parte.

Respuesta a Cálculo de determinantes aplicando propiedades.

```
s := [ 2  0  0 ]
     [ 1  4  0 ]
     [ 2  1  6 ]

DET(s) = 48
```

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & j & g \end{vmatrix} = (-1)^2 D = D$$

$$\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -j \end{vmatrix} = (-1)^3.(-1).D = D$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2^3.25 = 200$$

Respuesta a Cálculo de la Matriz Inversa, utilizando determinantes. Ejemplo

$$a := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$DET(a) = 9$$

$$ADJOINT(a) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{9} \cdot ADJOINT(a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DET(b) = -2$$

$$ADJOINT(b) = \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot ADJOINT(b) = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$