ANALISIS MATEMATICO I

TEORICO PRACTICO

FACULTAD DE TECNOLOGIA Y CIENCIAS APLICADAS

PROF. CARLOS ALBERTO PALACIO

T.E. (03833) 425189

PERSONAL 15680822

E-MAIL: cap@ctcom.com.ar

ICQ N° 47689060

MSN: cap_724@hotmail.com

AÑO 2004

BOLILLA Nº 1

CONJUNTOS NUMERICOS

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es le número. El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo.

El primer conjunto numérico conocido es el de los **NÚMEROS NATURALES** que se representa simbólicamente con la letra **N**. En este conjunto de definen todas las operaciones con sus respectivas propiedades, algunas de ellas con ciertas restricciones como el caso de la resta, que no se puede resolver en caso de que el minuendo sea menor que el sustraendo, por ejemplo:

$$6 - 11 \notin N$$

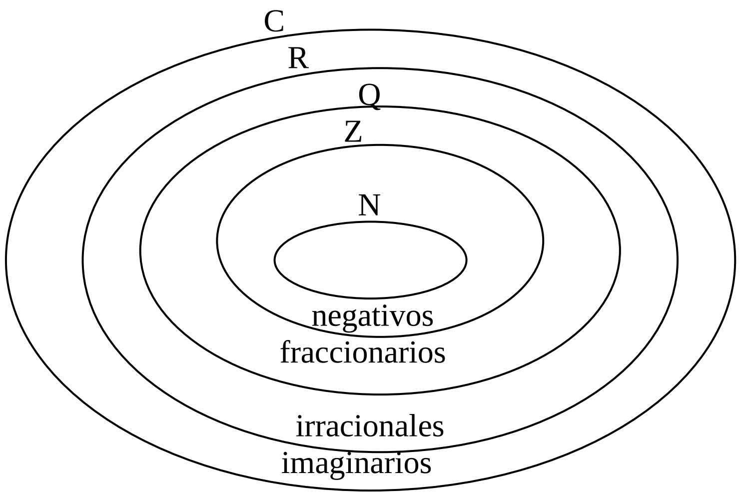
Ante la imposibilidad de resolver esta operación se crea el conjunto de **números negativos**, que unido al conjunto de los números naturales forman el conjunto de **NÚMEROS ENTEROS** que se representan con la letra **Z**.

En el se definen todas las operaciones y sus respectivas propiedades, pero en el caso de la división se impone la restricción de que el dividendo sea múltiplo del divisor, si esto no se cumple, dicha operación no se puede realizar en este conjunto, por ejemplo:

$$5 : 8 \notin Z$$

Para poder resolver este tipo de operaciones se crea el conjunto de **números fraccionarios**, que unido al conjunto de números enteros forman el conjunto de **NÚMEROS RACIONALES**. Este conjunto se representa con la letra **Q**.

En este conjunto, una vez definidas todas las operaciones con sus respectivas propiedades, se observa que no es posible resolver operaciones tales como $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. cuyos resultados no pueden indicarse como fracción. Ante esta imposibilidad se crea el conjunto de **números irracionales**, que, junto a los números racionales forman el conjunto de **NÚMEROS REALES**. Este conjunto se representa con la letra **R**. En él se pueden resolver todas las operaciones salvo las raíces de índice par y radicando negativo, tales como $\sqrt{-4}$, por lo tanto se crean los **números imaginarios**, que unido al conjunto de números reales forman el mayor conjunto numérico conocido que es el de los **NÚMEROS COMPLEJOS**, que se representan con la letra **C**.



OPERACIONES CON NUMEROS REALES

SUMA Y PRODUCTO:

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera, existe uno y sólo un número real denotado por "**a+b**", llamado su suma y existe uno y sólo un número real denotado por "**ab**" llamado su producto.

LEYES CONMUTATIVAS:

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera,

$$\mathbf{a + b = b + a} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a\,b = b\,a}$$

LEYES ASOCIATIVAS:

Si **a**, **b** y **c** son números reales cualesquiera,

$$\mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a\,(b\,c) = (a\,b)\,c}$$

LEY DISTRIBUTIVA:

Si **a**, **b** y **c** son números reales cualesquiera,

$$\mathbf{a\;(b + c) = a\;b + \;a\,c}$$

EXISTENCIA DE ELEMENTO IDENTICO:

Existen dos números reales diferentes 0 y 1 tales que para todo número real **a**,

$$\mathbf{a + 0 = a} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a\,1 = a}$$

EXISTENCIA DE NEGATIVOS:

Todo número real **a** tiene un negativo, denotado por – **a**, tal que,

$$\mathbf{a + (-\,a) = 0}$$

EXISTENCIA DE RECIPROCO:

Todo número real $\mathbf{a \neq 0}$ tiene recíproco, denotado por **1/a**, tal que,

$$\mathbf{a\;(1 / a) = 1}$$

DEFINICION DE SUSTRACCION:

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera, la diferencia entre ellas denotada por **a – b** está definida por:

$$\mathbf{a - b = a + (-\,b)}$$

DEFINICION DE DIVISION:

Si **a** es cualquier número real y **b** es cualquier número real excepto el cero, el cociente de **a** y **b** está definido por:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Para poder comparar dos números reales entre sí, se establecen las siguientes consideraciones:
En el conjunto de los números reales existe un subconjunto llamado de los números positivos tales que,

a) Si **a** es cualquier número real, exactamente una de estas tres afirmaciones se cumple: **a = 0**, **a** es positivo, **- a** es positivo.
b) La suma de dos números positivos es un número positivo
c) El producto de dos números positivos es un número positivo
d) El número real **a** es negativo si y sólo si – **a** es positivo

DESIGUALDADES. DEFINICIONES:

Los símbolos $<$ (es menor que), $>$ (es mayor que), $\leq$ (es menor o igual a) y $\geq$ (es mayor o igual a) se definen como sigue:
a) $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo
b) $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo
c) $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$
d) $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$

Las expresiones <, >, ≤ y ≥ se llaman desigualdades, las dos primeras reciben el nombre de desigualdades estrictas y las otras dos desigualdades no estrictas.

Se cumple además que para cualquier número real **a** positivo,

$$-a < a$$

PROPIEDADES:

1º) Si a < b y b < c, entonces a < c
2º) Si a < b, entonces a + c < b + c, si c es cualquier número real
3º) Si a < b y c < d, entonces a + c < b + d
4º) Si a < b y c es cualquier número real positivo, entonces ac < bc
5º) Si a < b y c es cualquier número real negativo, entonces ac > bc
6º) Si 0 < a < b y 0 < c < d, entonces ac < bd

La propiedad 4º) expresa que si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número positivo, la dirección de la desigualdad permanece invariable; y la propiedad 5º) establece que si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Estas dos propiedades también son válidas para la división.

Las propiedades análogas para la relación de mayor son:

1º) Si a > b y b > c, entonces a > c
2º) Si a > b, entonces a + c > b + c, si c es cualquier número real
3º) Si a > b y c > d, entonces a + c > b + d
4º) Si a > b y c es cualquier número real positivo, entonces ac > bc
5º) Si a > b y c es cualquier número real negativo, entonces ac < bc

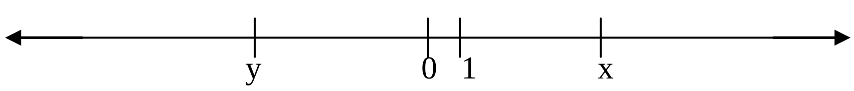
6º) Si a > b > 0 y c > d > 0, entonces ac > bd

LA RECTA REAL:

El conjunto R de todos los número reales se puede representar geométricamente por puntos en una recta horizontal, llamada eje o recta real.

Se escoge un punto en el eje para representar al número 0. Este punto se llama origen. Se selecciona una unidad de distancia. Entonces cada número real positivo x queda representado por el punto a una distancia de x unidades a la derecha del origen y cada número real negativo y se representa por el punto a una distancia – y unidades a la izquierda del origen.

Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en el eje, es decir, a cada número real le corresponde un único punto en el eje y a cada punto en el eje se le asocia un solo número real.

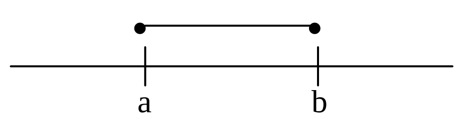


INTERVALOS

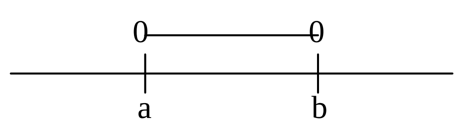
Se llama intervalo a todo conjunto de números reales comprendidos entre dos números reales dados llamados extremos.

Los extremos de un intervalo pueden o no pertenecer al conjunto, según sea el caso se presentan los intervalos cerrados, abiertos, semiabiertos o semicerrados y los intervalos infinitos.

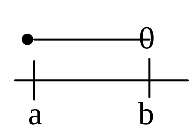
Intervalos cerrado: [a,b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}



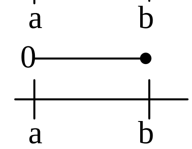
Intervalo abierto: (a,b) = {x ∈ R / a < x < b}



Intervalo semiabierto a derecha (o semicerrado a izquierda): [a,b) = {x ∈ R / a ≤ x < b}



Intervalo semiabierto a izquierda (o semicerrada a derecha): (a,b] = {x ∈ R / a < x ≤ b}

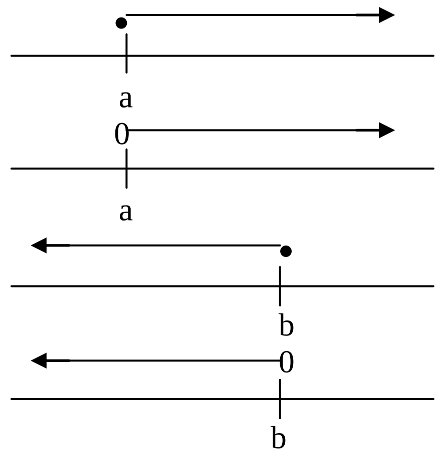


Intervalos infinitos: $[a, +\infty) = \{x \in R \,/\; x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in R \,/\; x > a\}$

$(-\infty, b\,] = \{x \in R \,/\; x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in R \,/\; x < b\}$



$(-\infty, +\infty) = R$

ENTORNO:

Se llama entorno de un punto x_0 a todo intervalo abierto (a,b) que contenga a dicho punto, es decir, el intervalo (a,b) cuyos extremos satisfacen la condición $a < x_0 < b$.

Con frecuencia se elige un intervalo (a,b) de modo que el punto x_0 se halle en su punto medio. En este caso, el punto x_0 recibe el nombre de centro del entorno y la magnitud $(b - a)/2$ se denomina radio del entorno.

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

Definición:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De acuerdo a esta definición se observa que el valor absoluto de un número real es un número real no negativo, es decir, positivo o cero.

Ejemplos:

Si $x = +5 \Rightarrow |x| = |+5| = 5$

Si $x = 0 \Rightarrow |x| = |0| = 0$

Si $x = -5 \Rightarrow |x| = |-5| = -(-5) = 5$

Propiedades:

1º) $\boxed{|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ó } x = -a}$

a) $|x| = 3 \Leftrightarrow \underline{x = 3}$ ó $\underline{x = -3}$

b) $|2x + 3| = 6 \Leftrightarrow 2x + 3 = 6$ ó $2x + 3 = -6$

$\Leftrightarrow 2x = 6 - 3$ ó $2x = -6 - 3$

$\Leftrightarrow 2x = 3$ ó $2x = -9$

$\Leftrightarrow \underline{x = 3/2}$ ó $\underline{x = -9/2}$

2º) $\boxed{|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a}$

a) $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$
$\Leftrightarrow \underline{x \in [-4, 4]}$

b) $|2x - 3| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 2x - 3 \leq 6$
$\Leftrightarrow -6 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 6 + 3$
$\Leftrightarrow -3 \leq 2x \leq 9$
$\Leftrightarrow -3/2 \leq 2x / 2 \leq 9/2$
$\Leftrightarrow -3/2 \leq x \leq 9/2$
$\Leftrightarrow \underline{x \in [-3/2, 9/2]}$

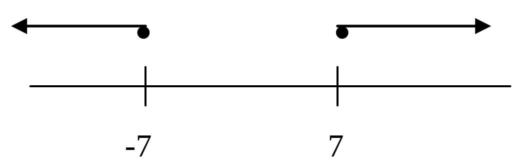
3º) $\boxed{|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$

a) $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-2, 2)}$

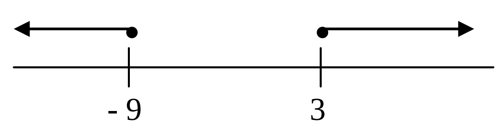
b) $|3x + 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 3x + 5 < 3$
$\Leftrightarrow -3 - 5 < 3x + 5 - 5 < 3 - 5$
$\Leftrightarrow -8 < 3x < -2$
$\Leftrightarrow -8/3 < 3x / 3 < -2/3$
$\Leftrightarrow -8/3 < x < -2/3$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-8/3, -2/3)}$

4º) $\boxed{|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ó } x \leq -a}$

a) $|x| \geq 7 \Leftrightarrow x \geq 7 \text{ ó } x \leq -7$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, -7] \cup [7, +\infty)}$



b) $|x + 3| \geq 6 \Leftrightarrow x + 3 \geq 6 \text{ ó } x + 3 \leq -6$
$\Leftrightarrow x \geq 6 - 3 \text{ ó } x \leq -6 - 3$
$\Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ó } x \leq -9$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, -9] \cup [3, +\infty)}$



5º) $\boxed{|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ó } x < -a}$

a) $|x| > 4 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ó } x < -4$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)}$

b) $|4x - 3| > 2 \Leftrightarrow 4x - 3 > 2 \text{ ó } 4x - 3 < -2$
$\Leftrightarrow 4x > 2 + 3 \text{ ó } 4x < -2 + 3$
$\Leftrightarrow 4x > 5 \text{ ó } 4x < 1$
$\Leftrightarrow x > 5/4 \text{ ó } x < 1/4$
$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, 1/4) \cup (5/4, +\infty)}$

6º) $\boxed{|x \cdot y| = |x| \cdot |y|}$

7º) $\boxed{|x/y| = |x| / |y|}$

8º) $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$ **Desigualdad triangular**

9º) $\boxed{|x - y| \leq |x| + |y|}$

10º) $\boxed{|x - y| \geq |x| - |y|}$

INECUACIONES

Son desigualdades que se verifican para determinados valores asignados a sus letras, las reglas para resolver una inecuación son similares a las de ecuaciones, salvo algunas reglas en particular que poseen.

1º) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4} < \frac{4}{7}x + 1$

$\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}x < \frac{5}{4} + 1$

$\frac{14x - 12x}{21} < \frac{5 + 4}{4}$

$\frac{2}{21}x < \frac{9}{4}$

$x < \frac{9}{4}\,\frac{21}{2}$

$x < \frac{189}{8}$

$\boxed{x \in (-\infty, 189/8)}$

2º) $\frac{1}{3}x - \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}x + 2$

$\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}x \leq \frac{3}{2} + 2$

$\frac{2x - 15x}{6} \leq \frac{3 + 4}{2}$

$-\frac{13}{6}x \leq \frac{7}{2}$

Si el coeficiente de x es negativo se multiplica ambos miembros de la desigualdad por – 1 y se cambia el sentido de la misma

$\frac{13}{6}x \geq -\frac{7}{2}$

$x \geq -\frac{7}{2}\,\frac{6}{13}$

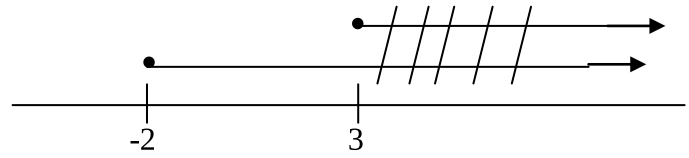
$x \geq -\frac{21}{13}$

$\boxed{x \in [-(21)/(13), +\infty)}$

3º) $(x + 2)(x - 3) \geq 0$

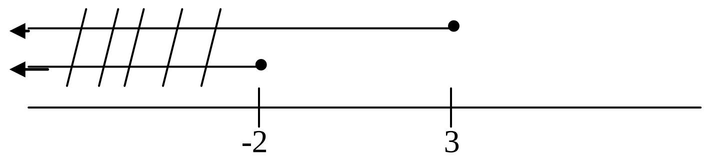
Cuando se trata de un producto, se bebe analizar el signo de la expresión y se aplica la regla de los signos.
Si el producto es positivo, los factores deben tener el mismo signo, es decir, los dos positivos o los dos negativos.
Si el producto es negativo, los factores deben ser de distinto signo, es decir uno positivo y el otro negativo

y $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$ $\boxed{x \in [3, +\infty)}$



o

y $\begin{cases} x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \\ x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases}$ $\boxed{x \in (-\infty, -2]}$

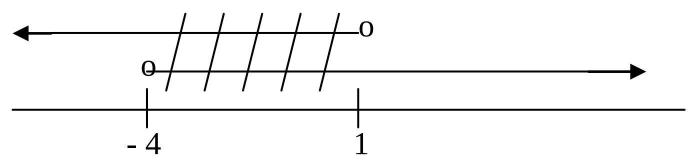


Como la solución de una ecuación es un intervalo y éste es un conjunto sobre la recta y como siempre que en conjuntos se habla de conjunción (y) se debe hacer la intersección de dichos intervalos; y cuando se habla de disyunción (o) se debe hacer la unión de esos intervalos

Luego, la solución general es: $\boxed{x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)}$

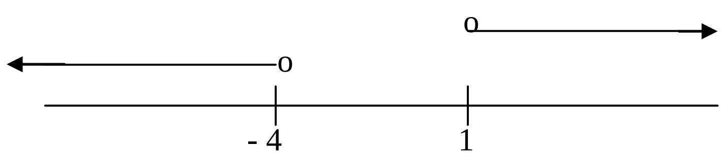
4º) $(x - 1)(x + 4) < 0$

y $\begin{cases} x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \\ x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \end{cases}$ $\boxed{x \in (-4, 1)}$



o

y $\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 4 < 0 \Rightarrow x < -4 \end{cases}$ $\boxed{x \in \varnothing}$



Luego la solución general es: $\boxed{x \in (-4, 1)}$

5º) $-2x^2 - 3x + 2 < 0$

Cuando la expresión no está factoreada, se la debe factorear, para ello se debe tener en cuenta que una expresión de la forma $a x^2 + bx + c = a (x - x_1)(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación que resulta de igualar a cero la expresión dada. Se debe tener en cuenta también que el coeficiente "a" debe ser positivo, si fuera negativo se multiplica ambos miembros por – 1 y se cambia el sentido de la desigualdad

Multiplicando ambos miembros por – 1 se tiene:

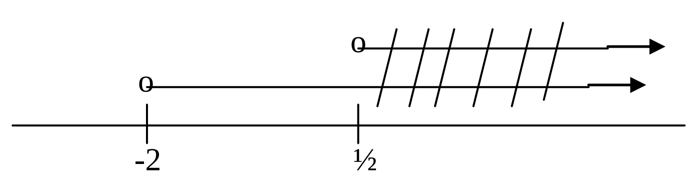
$2x^2 + 3x - 2 > 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Luego la expresión factoreada es:

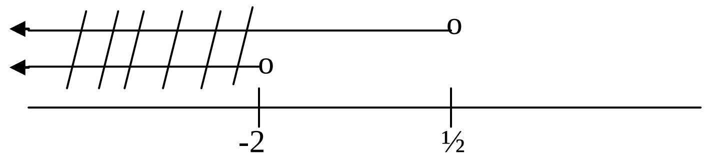
$2(x - \frac{1}{2})(x + 2) > 0$

y $\begin{cases} x - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$ $\boxed{x \in (\frac{1}{2}, +\infty)}$



o

$$y\begin{cases} x - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \\ x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases} \quad \boxed{x \in (-\infty, -2)}$$



Luego, la solución general es: $\boxed{x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)}$

6º) Calcular los valores de x tal que la expresión dada tome valores reales:

$\sqrt{4 - x^2} \in R$

$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4$

$\Rightarrow x^2 \leq 4$

Cuando en una desigualdad se pasa de un miembro a otro un exponente PAR se debe tomar el valor absoluto de la base de la potencia

$\Rightarrow |x| \leq \sqrt{4}$

$\Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \boxed{x \in [-2, 2]}$

BOLILLA Nº 2

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

DEFINICION:

Una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x,y), en el cual no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer elemento.

El conjunto de todos los **valores** posibles de **x** se denomina **dominio de la función** y el conjunto de todos los **valores** posibles de **y** se llama **codominio**, **rango** o **imagen de la función**.

De acuerdo a esta definición se deduce que a todo valor de x le debe corresponder un único valor de y.

Los números **x** e **y** se llaman **variables**. Puesto que para la función se asignan valores a x, y cada valor de y depende del valor de x, la **variable x** se denomina **variable independiente** y la **variable y** es la **variable dependiente**.

Para simbolizar una función se utiliza la notación: y = f(x).

CLASIFICACION DE FUNCIONES

Teniendo en cuenta las **operaciones** que relacionan a la **variable independiente**, las funciones se clasifican en algebraicas y trascendentes.

Función

Algebraica (+ , -, x, / , pot. rad.)

- **Racionales** (+, -, x, /, pot.)
  - **Enteras** (+, -, x, pot.)
    - **Funciones Polinómicas**
      - Casos particulares:
        - Función lineal: y = m x + b (recta)
        - Función cuadrática: y = a x^2 + bx + c (parábola)
  - **Fraccionarias** (+, -, x, pot.) **/**
- **Irracionales** (+, -, x, /, pot.) **rad**.

Trascendentes

- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Logarítmicas
- Exponenciales
- Hiperbólicas
- Hiperbólicas inversas

REGLAS PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE UNA FUNCION

1º) Si la función es **polinómica**, el **dominio** es el conjunto de **número reales**, salvo que el mismo esté especificado en la definición de la función.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ $\boxed{D = R}$

b) $$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x < 5 \end{cases}$$ $\boxed{D = [-3, 5)}$

2º) Si la función es **fraccionaria** el **dominio** es el conjunto de **todos los números reales menos** el conjunto de **valores que anulan el denominador**.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x - 4}$ $\boxed{D = R - \{2\}}$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$ $\boxed{D = R - \{-3, 3\}}$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

3º) Si la función es **irracional cuadrática** el **dominio** es el conjunto de **todos los números reales para los cuales el radicando es mayor o igual que cero**.

a) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ $\boxed{D = [2, +\infty)}$

$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, +\infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{4} \Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$ ó $x \leq -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x + 3}}$ $D = (-3, +\infty)$

(Se debe tomar sólo la relación mayor que cero pues el denominador no puede ser cero)

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x \in (-3, +\infty)$

GRAFICA DE UNA FUNCION

Para graficar una función lo **primero** que se hace es **determinar el dominio de la misma**, se confecciona luego una tabla de valores asignando a la variable x valores dentro del dominio y obteniendo los valores de y correspondientes.

Los puntos obtenidos en esta tabla se representan en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, y uniendo los mismos se tiene la gráfica de la función.
Una vez confeccionada la gráfica se determina el codominio de la función a partir de los valores que toma la variable dependiente y.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas las dos funciones f y g:

a) Su suma, denotada por (f + g), es la función definida por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b) Su diferencia, denotada por (f – g), es la función definida por:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

c) Su producto, denotado por (fg), es la función definida por:

$$(fg)(x) = f(x)\ g(x)$$

d) Su cociente, denotado por (f/g), es la función definida por:

$$(f/g)(x)\ f(x)/g(x)$$

d) La función compuesta, denotada pot (f o g), es la función definida por:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

BOLILLA Nº 3

LIMITE DE UNA FUNCION

DEFINICION:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ /\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } |x - a| < \delta$$

Propiedades:

TEOREMA 1:

Si m y b son constantes cualesquiera:

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Demostración:

Por definición de límite. Para cualquier $\varepsilon > 0$ debemos demostrar que existe una $\delta > 0$ tal que:

$|(mx + b) – (ma + b)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x – a| < \delta$

Caso 1: $m \neq 0$

Queremos encontrar una $\delta > 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$ tal que:

$|(mx + b) – (ma + b)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

$|mx + b – ma - b| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

$|mx – ma| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

$|m (x - a)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

$|m|\,|x - a| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Como $m \neq 0$, resulta:

$|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{|m|}$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Esta afirmación será válida si $\delta = \varepsilon / |m|$.

Caso 2: $m = 0$

Si $m = 0$ entonces $|(mx + b) – (ma + b)| = |(0x + b) – (0a + b)| = |0x + b – 0a - b| = 0$ para todo valor de x.
Por lo tanto tomamos δ como cualquier número positivo y la afirmación se cumple.

TEOREMA 2: El límite de una constante es igual a dicha constante.

Si c es una constante entonces para cualquier número a se tiene:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Demostración:

Esto es una consecuencia inmediata del teorema 1 tomando m = 0 y b = c.

TEOREMA 3: El límite de la variable independiente es igual al valor al que tiende.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Demostración:

Es una consecuencia del teorema 1 tomando m = 1 y b = 0.

TEOREMA 4: El límite de la suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de los límites de dichas funciones.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) \pm g(x) \,] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) \pm g(x) \,] = L \pm M$$

Demostración:

Demostramos este teorema utilizando el signo +.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces por definición de límite se tiene que para $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, existe una $\delta_1 > 0$ tal que:

$|f(x) - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

y si $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces por definición de límite se tiene que para $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, existe una $\delta_2 > 0$ tal que:

$|g(x) - M| < \frac{1}{2}\varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$

Queremos demostrar que:

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) + g(x) \,] = L + M$$

Por definición de límite se debe demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que:

$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Es decir:

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |f(x) + g(x) - L - M| \\ &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta \end{aligned}$$

TEOREMA 5: El límite de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de los límites de dichas funciones.

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [\, f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) \,] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

TEOREMA 6: El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de dichas funciones.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = L \,.\, M$$

TEOREMA 7: El límite del producto de varias funciones es igual al producto de los límites de dichas funciones.

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\ldots\,.\, f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \,.\, \lim_{x \to a} f_2(x) \,.\ldots\,.\, \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\ldots\,.\, f_n(x)] = L_1 \,.\, L_2 \,.\ldots\,.\, L_n$$

TEOREMA 8: El límite de la potencia enésima de una función es igual a la potencia enésima del limite de la misma.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número positivo, entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

TEOREMA 9: El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de dichas funciones.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ y $M \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \Big/ \lim_{x \to a} g(x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) / g(x)] = L / M$$

TEOREMA 10: El límite de la raíz enésima de una función es igual a la raíz enésima del limite de la misma.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número positivo, entonces:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

FORMAS INDETERMINADAS

Se presentan en total siete formas que no tienen solución matemática llamadas formas indeterminadas, éstas son:

$$\frac{0}{0} \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; \; 0 \,.\, \infty \; ; \; \infty - \infty \; ; 0^0 \; , \; \infty^0 \; ; \; 1^\infty$$

Antes de comenzar a analizar estas formas indeterminadas, escribimos algunos cocientes que se presentan frecuentemente:

$$\boxed{\frac{0}{n^o} = 0} \qquad \boxed{\frac{n^o}{0} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n^o > 0 \\ -\infty \text{ si } n^o < 0 \end{cases}}$$

FORMA 0 / 0

1º) Cuando se aplica el primer caso de factoreo:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 5x}{4x^3 - 5x^2 + 2x} = \dfrac{2.0^3 - 3\,.0^2 + 5\,.0}{4.0^3 - 5\,0^2 + 2\,.0} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 5x}{4x^3 - 5x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(2x^2 - 3x + 5)}{x\,(4x^2 - 5x + 2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{4x^2 - 5x + 2} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4 - 4x^2 + 5x^3}{5x^4 - 3x} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4 - 4x^2 + 5x^3}{5x^4 - 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2\,(3x^2 - 4 + 5x)}{x\,(5x^3 - 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(3x^2 - 4 + 5x)}{5x^3 - 3} = \dfrac{0}{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x - 3x^2}{2x^2 - 3x^3} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x - 3x^2}{2x^2 - 3x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(5 - 3x)}{x^2\,(2 - 3x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 - 3x}{x\,(2 - 3x)} = \dfrac{5}{0} = +\infty$

2º) Cuando se aplica el quinto caso de factoreo:

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6} = \dfrac{6^2 - 36}{6 - 6} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{(x + 6)(x - 6)}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} (x + 6) = 12$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{-6} = -\dfrac{1}{6}$

3º) Cuando el límite contiene raíces cuadradas:

El artificio para levantar esta indeterminación es multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada de la que contiene raíz.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \dfrac{\sqrt{2 + 1} - \sqrt{3}}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{3})}{(x - 2)\,(\sqrt{x + 1} + \sqrt{3})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x + 1})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x - 2)\,(\sqrt{x + 1} + \sqrt{3})} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{x+4}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{5}-\sqrt{x+4})(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x+1})^2-(\sqrt{3})^2(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{x+4})^2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x-2)(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})}{(1-x)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})}{-(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{x+4})}{-(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \frac{2\,2\sqrt{5}}{-2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

4º) Cuando se aplica Regla de Ruffini:

El artificio para levantar esta indeterminación es dividir numerador y denominador en x menos el valor al que tiende.

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} = \frac{3^2-2\,.\,3-3}{2\,.\,3^2-5\,.\,3-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3):(x-3)}{(2x^2-5x-3):(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -3 \\ 3 & & 6 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

b) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-3x-2):(x+1)}{(x^3+x^2-x-1):(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x-2):(x+1)}{(x^2-1):(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

5º) Cuando se aplica el sexto caso de factoreo:

Sexto caso de factoreo: suma o diferencia de potencias de igual grado

$a^n + b^n$
- **Si n es PAR** (no se puede factorear)
- **Si n es IMPAR** $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 - \ldots\ldots\, b^{n-1})$

$a^n - b^n$
- **Si n es PAR** (conviene aplicar el quinto caso)
- **Si n es IMPAR** $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1})$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{2+2} - \sqrt[3]{4}}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Cálculo auxiliar:

$$(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt[3]{x+2})^3 - (\sqrt[3]{4})^3}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{16}}.$$

LIMITES UNILATERALES

1º) Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo abierto (a,c). Entonces el límite de f cuando x se aproxima a **a** por la derecha es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, no importando que tan pequeño sea existe una $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta$$

nótese que en la expresión anterior no hay barras de valor absoluto en x – a ya que x – a > 0 por que x > a.

2º) Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo abierto (d,a). Entonces el límite de f cuando x se aproxima a **a** por la izquierda es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, no importando que tan pequeño sea existe una $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } -\delta < x - a < 0$$

nótese que en la expresión anterior no hay barras de valor absoluto en x – a ya que x – a < 0 por que x < a.

TEOREMA:

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

Es decir:

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

En caso de que los límites laterales no sean iguales se dice que la función dada no tiene límite.

Ejemplo: Calcular el límite de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 3 \\ 2x - 2 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - 2) = 2 \,.\, 3 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x + 1) = 3 + 1 = 4$$

Como $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$ entonces $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

FORMA ∞ / ∞

LIMITES AL INFINITO

1º) Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo $(a,+\infty)$. El límite de f(x) cuando x crece sin límite es L y se denota por:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, no importando que tan pequeño sea existe un número $N > 0$ tal que:

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$

2º) Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo $(-\infty,a)$. El límite de f(x) cuando x decrece sin límite es L y se denota por:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, no importando que tan pequeño sea existe un número $N < 0$ tal que:

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$

TEOREMA:

Si n es cualquier entero positivo, entonces:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demostración:

Para la parte a) debemos probar que se cumple la definición de límite para $f(x) = 1 / x^n$ y $L = 0$, es decir, debemos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que:

$|(1 / x^n) - 0| < \varepsilon$ siempre que $x > N$

$|(1 / x^n)| < \varepsilon$ siempre que $x > N$

$|1 / x|^n < \varepsilon$ siempre que $x > N$

$|x|^n > 1 / \varepsilon$ siempre que $x > N$

$|x| > (1 / \varepsilon)^{1/n}$ siempre que $x > N$

Por lo tanto para que se cumpla este límite, debemos tomar $N = (1/\varepsilon)^{1/n}$. Así podemos decir que:

$\left|(1/x^n) - 0\right| < \varepsilon$ siempre que $x > N$, si $N = (1/\varepsilon)^{1/n}$, con lo cual se demuestra el teorema.

LIMITES INFINITOS

1º) Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto posiblemente el mismo número a. A medida que x se aproxima a a, f(x) crece sin límites, lo cual se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si para cualquier número N > 0, existe una δ > 0 tal que:

$f(x) > N$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

2º) Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto posiblemente el mismo número a. A medida que x se aproxima a a, f(x) decrece sin límites, lo cual se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si para cualquier número N < 0, existe una δ > 0 tal que:

$f(x) < N$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Ejemplos:

El artificio que se utiliza es dividir numerador y denominador en la mayor potencia de x

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 5x}{3x^2 + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{7}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7}{x^2}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{5x - 3}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0-0}{2+0} = \frac{0}{2} = 0$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3}{7x - 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{7x}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{5-0}{0+0} = \frac{5}{0} = \infty$$

FORMA 1^∞

EL NUMERO e

El número "e" (e = 2,718281...) que es la base de logaritmo natural se define de dos formas:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad e = \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{(7x)/4} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3x)/5}\right)^{(3x)/5}\right]^{(7/4)(5/3)} = e^{35/12}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x}\right)^{(3x)/7} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(5x)/2}\right)^{-(5x)/2}\right]^{(3/7)(-2/5)} = e^{-6/35}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{2(1/3)} = e^{2/3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{-4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right) = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-2x)/3}\right)^{-(2x)/3}\right]^{-4(3/2)} = e^{-6}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x+1}{2x}}{\frac{2x-1}{2x}}\right)^{3x}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x}}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}\right)^{2} =$

$= \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{3(1/2)}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{3(-1/2)}}\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)^{2} = \frac{e3/2}{e-3/2}\cdot 1^{2} = e^{3/2-(-3/2)} = e^{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{3x}{2}\right)^{5/(4x)} = \left[\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{-3x}{2}\right)\right]^{1/(-3x)/2}\right]\ 5/4(-3/2) = e^{-15/8}$

FORMA 0 / 0

LIMITES TRIGONOMETRICOS

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,x}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}\,x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{tg}\,x}=1}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\,\text{sen}\,5x}{7x} = \frac{3}{7}\,5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,5x}{5x} = \frac{15}{7}\cdot 1 = \frac{15}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}^2\,3x}{5x^2} = \frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,3x}{x}\,\frac{\text{sen}\,3x}{x}\right) = \frac{2\cdot 3\cdot 3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{3x} = \frac{18}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\,\text{tg}^2\,2x}{7x} = \frac{3}{7}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg}\,2x}{x}\,\text{tg}\,2x\right) = \frac{3}{7}\cdot 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}\,2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\text{tg}\,2x = \frac{6}{7}\cdot 1\cdot 0 = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\,\text{sen}^2\,2x}{3x^3} = \frac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,2x}{x}\,\frac{\text{sen}\,2x}{x}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{3}\cdot 2\cdot 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} =$

$= \frac{20}{3}\cdot\infty = \infty$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2 \text{ sen } 5x - 3 \text{ tg } 3x}{7x} = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2 \text{ sen } 5x}{7x} - \dfrac{3 \text{ tg } 3x}{7x} \right) = \lim_{x \to 0} \dfrac{2 \text{ sen } 5x}{7x} - \lim_{x \to 0} \dfrac{3 \text{ tg } 3x}{7x} =$

$= \dfrac{2}{7} \cdot 5 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{5x} - \dfrac{3}{7} \cdot 3 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{3x} = \dfrac{10}{7} - \dfrac{9}{7} = \dfrac{1}{7}$

f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5 \text{ sen } 2x}{4 \text{ tg } 3x} = \dfrac{5}{4} \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\text{sen } 2x}{x}}{\dfrac{\text{tg } 3x}{x}} = \dfrac{5}{4} \dfrac{2 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}}{3 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{3x}} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x}{x} \dfrac{\text{sen } x}{x} \dfrac{1}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } (a + x) - \text{sen } (a - x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{2 \text{ sen} \left[\dfrac{(a + x) - (a - x)}{2} \right] \cos \left[\dfrac{(a + x) + (a - x)}{2} \right]}{x} =$

$= 2 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x \cos a}{x} = 2 \cos a \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 2 \cos a$

i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } (a + x) - \text{tg } (a - x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\text{sen } (a + x)}{\cos (a + x)} - \dfrac{\text{sen } (a - x)}{\cos (a - x)}}{x} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\text{sen}(a + x) \cos (a - x) - \text{sen } (a - x) \cos (a + x)}{\cos (a + x) \cos (a - x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(a + x) \cos (a - x) - \text{sen } (a - x) \cos (a + x)}{x \cos (a + x) \cos (a - x)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } [(a + x) - (a - x)]}{x \cos (a + x) \cos (a - x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x \cos (a + x) \cos (a - x)} = \lim_{x \to 0} \left[\dfrac{\text{sen } 2x}{x} \dfrac{1}{\cos (a + x) \cos (a - x)} \right] =$

$= 2 \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x} \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos (a + x) \cos (a - x)} = 2 \dfrac{1}{\cos^2 a} = 2 \sec^2 a$

j) $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{x^2 + \pi^2/4 - \pi x} = \lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\text{sen}^2 (\pi/2 - x)}{(\pi/2 - x)^2} = \lim_{(\pi/2 - x) \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 (\pi/2 - x)}{(\pi/2 - x)^2} = \lim_{z \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 z}{z^2} =$

$= \lim_{z \to 0} \dfrac{\text{sen } z}{z} \lim_{z \to 0} \dfrac{\text{sen } z}{z} = 1$

Artificio

Si $x \to \pi/2 \Rightarrow (\pi/2 - x) \to 0$
$\Rightarrow z \to 0$
donde $z = \pi/2 - x$

ASINTOTAS

a) Se dice que la recta x = a es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función y = f(x) si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

$\lim_{x \to a+} f(x) = + \infty$ $\lim_{x \to a+} f(x) = - \infty$

$\lim_{x \to a-} f(x) = + \infty$ $\lim_{x \to a-} f(x) = - \infty$

b) Se dice que la recta y = b es una **asíntota horizontal** de la gráfica de la función y = f(x) si por lo menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Ejemplo: Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Para determinar las asíntotas verticales se busca el valor donde la función no está definida, en este caso la función dada no está definida en x = 3, entonces para ver si es una asíntota se calcula el límite:

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2 . 3 + 1}{3 - 3} = \frac{7}{0} = +\infty$$ por lo tanto x = 3 es una asíntota vertical

Para determinar las asíntotas horizontales calculamos el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x/x + 1/x}{x/x - 3/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + 1/x}{1 - 3/x} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Por lo tanto y = 2 es la asíntota horizontal.

BOLILLA Nº 4

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Una función y = f(x) es continua en un punto de abscisa x = a si se verifican las siguientes condiciones:

a) La función está definida en x = **a**, es decir, **f(a) existe**

b) La función tiene límite cuando x tiende a **a**, es decir $\lim_{x \to a} f(x)$ **existe**

c) Los dos valores anteriores son iguales, es decir, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, la función es **discontinua** en x = a.
Una **discontinuidad** puede ser **removible** (evitable) o **esencial**.

Es **removible** cuando la función tiene límite, en este caso dicha función se puede hacer continua, para ello se asigna a f(a) el valor del límite.

Es **esencial** cuando la función no tiene límite, en este caso dicha función no se puede hacer continua.

1º) $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ en $x = 1$

a) $f(1) = 2 \cdot 1^2 – 3 \cdot 1 + 3 = 2 – 3 + 3 = 2$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x^2 – 3x + 3) = 2 \cdot 1^2 – 3 \cdot 1 + 3 = 2 – 3 + 3 = 2$

c) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$

$2 = 2$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función dada es continua en x = 1.

2º) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ si } x \neq 2 \\ 3x – 1 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

a) $f(2) = 3 \cdot 2 – 1 = 6 – 1 = 5$

b) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x + 1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

c) $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$

$5 = 5$

Luego la función dada es continua en x = 2

3º) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 3 \\ 2x – 2 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

a) $f(3) = 2 \cdot 3 – 2 = 6 – 2 = 4$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

Siempre que la función está definida para valores menores, menores o iguales, mayores, mayores o iguales se deben tomar los límites laterales, es decir:

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 2) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x + 1) = 3 + 1 = 4$

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$ entonces $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

Si los límites laterales son distintos se dice que la función dada no tiene límite

c) $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$4 = 4$

Luego la función dada es continua en $x = 3$.

4º) $f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ si } x \neq 1 \\ 2x + 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

a) $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 3) = 1 + 3 = 4$

c) $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$3 \neq 4$

Luego $f(x)$ es discontinua en $x = 1$. Como el límite existe entonces la discontinuidad es removible y la función redefinida por:

$f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ si } x \neq 1 \\ 4 \quad \text{si } x = 1 \end{cases}$

es continua en $x = 1$.

5º) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$

a) $f(2) = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ no existe

Luego la función dada es discontinua en $x = 2$. Para determinar el tipo de discontinuidad buscamos el límite de la función:

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Como el límite existe, la discontinuidad es removible y la función redefinida por:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

es continua en $x = 2$.

6º) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \leq 2 \\ 2x + 3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

a) $f(2) = 2 + 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ = no existe

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 3) = 2 . 2 + 3 = 7$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe

Luego la función dada es discontinua esencial en x = 2.

7º) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ en x = -1

a) $f(- 1) = \dfrac{1}{- 1 + 1} = \dfrac{1}{0} = \infty$ no existe

Luego la función es discontinua en x = - 1. Para determinar el tipo de discontinuidad, calculamos el límite de la función:

b) $\lim\limits_{x \to - 1} f(x) = \lim\limits_{x \to - 1} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{0} = \infty$ no existe

Luego, como no existe el límite, la función es discontinua esencial en x = - 1.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO:

Se dice que una función y = f(x) es continua en un intervalo, si es continua en cada punto perteneciente a ese intervalo

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS

Si f y g son dos funciones continuas en el puntos de abscisa x = a, entonces:

a) f + g es continua en x = a
b) f - g es continua en x = a
c) f . g es continua en x = a
d) f / g es continua en x = a, suponiendo que $g(a) \neq 0$

Demostración:

Demostramos la parte a)

Como f y g son dos funciones continuas en x = a, entonces por definición de continuidad se cumple que:

$f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Por propiedades de límite se cumple que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$= f(a) + g(a)$$

Por lo tanto se cumple la definición de continuidad para la función f + g.

CONTINUIDAD DE LA FUNCION COMPUESTA

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b,

$\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$

O equivalentemente,

$\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = f[\lim\limits_{x \to a} g(x)]$

CONTINUIDAD A IZQUIERDA Y A DERECHA

1º) Una función y = f(x) es continua a la derecha de un punto de abscisa x = a si se verifican las siguientes condiciones:

a) La función está definida en x = **a**, es decir, **f(a) existe**

b) La función tiene límite cuando x tiende a **a** por la derecha, es decir **$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe**

c) Los dos valores anteriores son iguales, es decir, **$f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$**

2º) Una función y = f(x) es continua a la izquierda de un punto de abscisa x = a si se verifican las siguientes condiciones:

a) La función está definida en x = **a**, es decir, **f(a) existe**

b) La función tiene límite cuando x tiende a **a** por la izquierda, es decir **$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe**

c) Los dos valores anteriores son iguales, es decir, **$f(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$**

Se dice entonces que una función es continua en un punto de abscisa x = a, si es continua por derecha y es continua por izquierda de ese punto.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si la función y = f(x) es continua en el intervalo cerrado [a,b], y si f(a) ≠ f(b), entonces para cualquier número k entre f(a) y f(b) existe un número c entre a y b tal que f(c) = k.

Ejemplo:

Dada la función f definida por $f(x) = 4+3x-x^2$, $2 \le x \le 5$ verificar el teorema del valor intermedio si k= 1.

$f(2) = 4 + 3.\ 2 - 2^2 = 6$

$f(5) = 4 + 3.\ 5 - 5^2 = -6$

Se cumple entonces que f(2) ≠ f(5)

Para encontrar el valor de c, hacemos f(c) = k, es decir:

$4 + 3.\ c - c^2 = 1$

$c^2 - 3c - 3 = 0$

Las raíces de esta ecuación son:

$c_1 = (3 + \sqrt{21})/2$ y $c_2 = (3 - \sqrt{21})/2$

Se rechaza el valor de c_2 porque está fuera del intervalo [2,5].

El valor de c_1 está dentro del intervalo dado, por lo tanto es el valor de c buscado.

BOLILLA Nº 5

DERIVADA DE UNA FUNCION

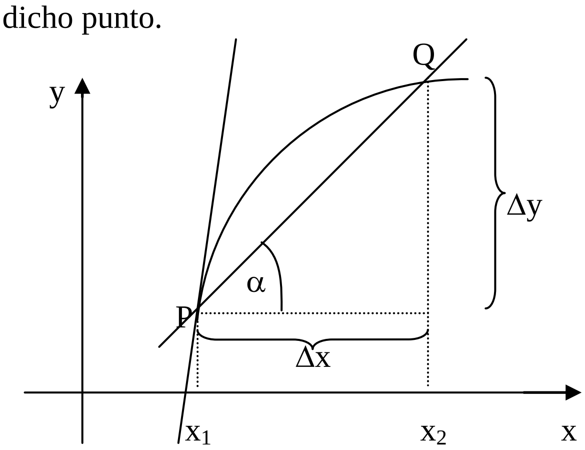
Dada la función y = f(x) su derivada, simbolizada por y' se define como:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Donde Δx es el incremento de la variable independiente y Δy es el incremento de la función.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

La derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.



Sea la función f, continua en x_1. Deseamos definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $P(x_1,f(x_1))$.

Sea $Q(x_2,f(x_2))$ otro punto sobre la gráfica de f. Trazamos la recta que une los puntos P y Q. Dicha recta se denomina secante a la gráfica de f.

Denotamos la diferencia de las abscisas de P y Q por Δx, tal que:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δx es el incremento de la variable independiente. Puede ser positivo, negativo cero.
Donde:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

Denotamos la diferencia de ordenadas de P y Q por Δy, tal que:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O sea:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Por lo tanto la pendiente de la recta secante PQ está definida entonces por:

$$m_{PQ} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si consideramos ahora que el punto P permanece fijo y el punto Q se mueve a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la recta secante gira sobre el punto P, en este caso $\Delta x \to 0$. Si esta recta tiene una posición límite, esta posición deseamos que sea la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P. Así la pendiente de la recta tangente es el límite cuando $\Delta x \to 0$ de la pendiente de la recta secante a la curva, es decir:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$$

O sea:

$$m(x1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x1 + \Delta x) - f(x1)}{\Delta x}$$

Es decir, la derivada de la función f en el punto P es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la punción trazada por dicho punto.

DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

TEOREMA: Si una función f es diferenciable en x_1, entonces f es continua en x_1.

DEMOSTRACION:

Para probar que f es continua en x_1, debemos mostrar que se cumplen las tres condiciones de continuidad, es decir, debemos demostrar que: a) $f(x_1)$ existe; b) $\lim_{x \to x_1} f(x)$ existe; c) $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

Como por hipótesis f es diferenciable en x_1, se tiene:

$$f\,'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

De acuerdo a esta relación se deduce que para que este límite exista, deben existir todos los términos considerados en él, por lo tanto $f(x_1)$ existe, es decir, se cumple la primera condición de continuidad.

Consideramos ahora el límite: $\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \frac{f(x) - f(x1)}{x - x_1} \right]$$

$$= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$= 0 \,.\, f\,'(x_1)$$

$$= 0$$

Luego:

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$$

Es decir:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) - \lim_{x \to x_1} f(x_1) = 0$$

$$\lim_{x \to x_1} f(x) - f(x_1) = 0$$

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

De esta expresión se observa que se cumplen las otras dos condiciones de continuidad.

Por la tanto la función f es continua en x_1.

El teorema inverso no se cumple, es decir, la continuidad no implica la diferenciabilidad de una función.

TEOREMAS PARA LA DERIVACION DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

TEOREMA: la derivada de una constante es igual a cero.

Si c es una constante y si f(x) = c entonces f ´(x) = 0

DEMOSTRACION:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$\boxed{f`(x) = 0}$$

TEOREMA: La derivada de la función identidad es igual a la unidad

Es decir, si f(x) = x entonces f ´(x) = 1

DEMOSTRACION:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 1$$

$$\boxed{f`(x) = 1}$$

TEOREMA: La derivada de la suma defunciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

Si f y g son dos funciones y h es la función dada por: h(x) = f(x) + g(x), entonces h ´(x) = f ´(x) + g ´(x)

DEMOSTRACION:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{h´(x) = f´(x) + g´(x)}$$

TEOREMA: La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función si derivar por la derivada de la segunda.

Si f y g son dos funciones, y h es la función definida por: h(x) = f(x) . g(x), entonces se verifica que
h ´(x) = f ´(x) g(x) + f(x) . g ´(x)

DEMOSTRACION:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \,.\, g(x + \Delta x) - f(x) \,.g(x)}{\Delta x}$$

Restamos y sumamos a al numerador de esta expresión f(x + Δx) . g(x), con lo cual se tiene:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \,.\, g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \,.\, g(x) + f(x + \Delta x) \,.\, g(x) - f(x) \,.g(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) \,.\, g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \,.\, g(x)] + [f(x + \Delta x) \,.\, g(x) - f(x) \,.g(x)]}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \,.\, [g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)\, [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \,.\, \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \,.\, \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x)\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

h ´(x) = f(x) g ´(x) + g(x) f ´(x)

Es decir:

$$\boxed{h´(x) = f´(x)\, g(x) + f(x)\, g´(x)}$$

TEOREMA: La derivada de una potencia es igual al exponente por la base elevada a una potencia disminuida en uno y por la derivada de la base.

Si f es una función, n es un número real y h es la función definida por $h(x) = [f(x)]^n$, entonces si f ´(x) existe, se verifica que:

$$h´(x) = n\, [f(x)]^{n-1}\, f´(x)$$

DEMOSTRACION:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x)]^n - [f(x)]^n}{\Delta x}$$

Aplicando el sexto caso de factoreo, se tiene:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]\ \{[f(x+\Delta x)]^{n-1} + [f(x+\Delta x)]^{n-2} f(x) + \ldots + [f(x)]^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \{[f(x+\Delta x)]^{n-1} + [f(x+\Delta x)]^{n-2} f(x) + \ldots + [f(x)]^{n-1}\}$$

$$h´(x) = f´(x)\ \{[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^{n-2} f(x) + \ldots + [f(x)]^{n-1}\}$$

$$h´(x) = f´(x)\ \{\underbrace{[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^{n-1} + \ldots + [f(x)]^{n-1}}_{\text{n factores}}\}$$

$$h´(x) = f´(x)\ n\ [f(x)]^{n-1}$$

$$\boxed{h´(x) = n\ [f(x)]^{n-1} f´(x)}$$

TEOREMA: (Caso particular del teorema anterior)

Si n es un número entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces $f´(x) = n\ x^{n-1}$

DEMOSTRACION:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x}$$

Aplicando el sexto caso de factoreo, se tiene:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)\ \{[(x+\Delta x)]^{n-1} + [(x+\Delta x)]^{n-2} x + \ldots + (x)^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\ \{[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} x + \ldots + (x)^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$f´(x) = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2} x + \ldots + x^{n-1}}_{\text{n factores}}$$

$$\boxed{f´(x) = n\ x^{n-1}}$$

TEOREMA: La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Si f es una función, c es una constante y h es la función definida por $h(x) = cf(x)$, entonces $h´(x) = c\ f´(x)$

DEMOSTRACION:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\ f(x+\Delta x) - c\ f(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\,[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$h`(x) = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{h´(x) = c\ f´(x)}$$

TEOREMA: La derivada del cociente de funciones es una fracción cuyo numerador es la derivada del numerador de la fracción dada por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador; y cuyo denominador es el denominador de la fracción dada elevado al cuadrado.

Si f y g son dos funciones y h es la función definida por h(x) = f(x) / g(x), entonces:

$$h´(x) = \frac{f´(x)\,g(x) - f(x)\,g´(x)}{[g(x)]^2}$$

DEMOSTRACION:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\,g(x)}}{\Delta x}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

Restamos y sumamos a al numerador de esta expresión f(x) . g(x), con lo cual se tiene:

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) . g(x) - f(x) . g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x) + f(x) .g(x)}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) . g(x) - f(x) . g(x)] - [f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x) .g(x)]}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x\ g(x)\,g(x+\Delta x)} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\ \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)\,g(x+\Delta x)}\ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\ \frac{1}{g(x+\Delta x)} \right] - \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x)}{g(x)\,g(x+\Delta x)}\ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)\,g(x+\Delta x)}\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h´(x) = f´(x)\ \frac{1}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)\,g(x)}\ g´(x)$$

$$h´(x) = \frac{f´(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g´(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

TEOREMA: La derivada de una función de otra función es igual a la derivada de la primera por la derivada de la segunda función.

Sean f y g dos funciones y sea h la función definida por: $h(x) = f[g(x)]$, entonces $h'(x) = f'[g(x)]\,g'(x)$

DEMOSTRACION:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{\Delta x}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $g(x + \Delta x) - g(x)$ se tiene:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{\Delta x} \, \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{g(x + \Delta x) - g(x)} \, \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{g(x + \Delta x) - g(x)} \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{h'(x) = f'[g(x)]\,g'(x)}$$

TEOREMA: La derivada de la función inversa es igual a la recíproca de la derivada de la función directa.

Si $y = f(x)$, su inversa es $x = g(y)$.

Entonces

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad .$$

DEMOSTRACION:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos relaciones se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \, \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

$$1 = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \, \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

Tomando límite en ambos miembros cuando $\Delta x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} 1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \, \frac{dx}{dy}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}} \quad .$$

TEOREMAS PARA LA DERIVACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES

TEOREMA: La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividido por la función si derivar.

Si y = ln u, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'}{u}$

DEMOSTRACION:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\ln(u + \Delta u) - \ln u}{\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{\Delta u} \ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{\Delta u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)\right]$$

Multiplicando numerador por u, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{u} \frac{u}{\Delta u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)\right]$$

Aplicando propiedad de logaritmo, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{u} \lim_{\Delta u \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \ln\left[\lim_{\Delta u \to 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right]$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \ln\left[\lim_{\Delta u \to 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{1/(\Delta u/u)}\right]$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \ln e$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

Como u es función de x, por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}}$$

Como caso particular: si y = ln x, entonces y ´= 1/x

FORMULA DE CAMBIO DE BASE DE UN LOGARITMO:

El logaritmo natural de un número se obtiene dividiendo el logaritmo decimal de dicho número en el logaritmo decimal del número e, es decir:

$$\boxed{\ln N = \frac{\log N}{\log e}}$$

O lo que es lo mismo:

$$\boxed{\log N = \ln N \cdot \log e}$$

TEOREMA: La derivada del logaritmo decimal de una función es igual a la derivada de la función dividida en dicha función sin derivar y por el logaritmo decimal del número e.

Si $y = \log u$, entonces $y' = \frac{u'}{u} \log e$

DEMOSTRACION:

Si $y = \log u$, entonces, por fórmula de cambio de base de un logaritmo se tiene:

$$y = \ln u \ \log e$$

Derivando ambos miembros con respecto a x, resulta:

$$y' = (\ln u \cdot \log e)'$$

$$y' = (\ln u)' \cdot \log e$$

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u} \cdot \log e}$$

DERIVADA DE FUNCIONES IMPLICITAS:

Cuando se da una relación entre x e y por medio de una ecuación no resuelta para y, entonces y se llama función implícita de x.
Para derivar una función implícita, se deriva la ecuación término a término, considerando y como función de x, y despejando de la ecuación resultante y ´.

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS:

DERIVADA DEL SENO DE UNA FUNCION: La derivada del seno de una función es igual al coseno de dicha función por la derivada de la misma.

Si $y = \operatorname{sen} u$, entonces $y' = \cos u \cdot u'$

DEMOSTRACION:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u + \Delta u) - \operatorname{sen} u}{\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{\Delta u} [\operatorname{sen}(u + \Delta u) - \operatorname{sen} u] \right]$$

Aplicando la fórmula trigonométrica sen p – sen q = 2 sen [(p – q)/2] cos [(p + q)/2], donde p = u + Δu y q = u, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{\Delta u} \ 2 \operatorname{sen} \left(\frac{u + \Delta u - u}{2} \right) \cos \left(\frac{u + \Delta u + u}{2} \right) \right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{1}{\Delta u} \ 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta u}{2} \right) \cos \left(\frac{2u + \Delta u}{2} \right) \right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[2 \ \frac{\operatorname{sen}(\Delta u/2)}{\Delta u} \ \cos [(2u + \Delta u)/2] \right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(\Delta u/2)}{\Delta u/2} \ \cos [(2u + \Delta u)/2] \right]$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta u/2)}{\Delta u/2} \lim_{\Delta u \to 0} \cos[(2u + \Delta u)/2]$$

$$\frac{dy}{du} = 1 \,.\, \cos u$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u$$

Por regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cos u \,.\, u\,'}$$

Como caso particular se tiene que si y = sen x, entonces y ´= cos x

DERIVADA DEL COSENO DE UNA FUNCION: La derivada del coseno de una función es igual a menos el seno de dicha función por la derivada de esa función.

Si y = cos u, entonces y ´= - sen u . u ´

DEMOSTRACION:

Si y = cos u, entonces por fórmulas trigonométricas de ángulos complementarios, resulta:

$y = \operatorname{sen}(\pi/2 - u)$

Derivando ambos miembros, se tiene:

$y\,' = \cos(\pi/2 - u) \,.\, (\pi/2 - u)'$

$y\,' = \cos(\pi/2 - u) \,.\, (-u')$

$\boxed{y\,' = -\operatorname{sen} u \,.\, u'}$

Como caso particular, si y = cos x, entonces y ´= - sen x

DERIVADA DE LA TANGENTE DE UNA FUNCION: La derivada de la tangente de una función es igual a la secante cuadrado de la función por la derivada de dicha función.

Si y = tg u, entonces y ´= $\sec^2$ u . u ´

DEMOSTRACION:

Si y = tg u, entonces:

$$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

Aplicando la fórmula de derivada de un cociente, se tiene:

$$y\,' = \frac{(\operatorname{sen} u)' \cos u - \operatorname{sen} u\,(\cos u)'}{\cos^2 u}$$

$$y\,' = \frac{\cos u \,.\, u' \cos u - \operatorname{sen} u\,(-\operatorname{sen} u \,.\, u')}{\cos^2 u}$$

$$y\,' = \frac{\cos^2 u \,.\, u' + \operatorname{sen}^2 u\; u'}{\cos^2 u}$$

$$y\,' = \frac{u'(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}{\cos^2 u}$$

$y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$

$\boxed{y' = \sec^2 u \, . \, u'}$

Como caso particular, si y = tg x, entonces $y' = \sec^2 x$

DERIVADA DE COTANGENTE DE UNA FUNCION: La derivada de la cotangente de una función es igual a menos la cosecante cuadrado de la función por la derivada de dicha función.

Si y = cotg u, entonces $y' = - \text{cosec}^2 u \, . \, u'$

DEMOSTRACION:

Si y = cotg u, entonces:

$y = \frac{\cos u}{\text{sen } u}$

Aplicando la fórmula de derivada de un cociente, se tiene:

$y' = \frac{(\cos u)' \text{ sen } u - \cos u \, (\text{sen } u)'}{\text{sen}^2 u}$

$y' = \frac{- \text{sen } u \, . \, u' \text{ sen } u - \cos u \, \cos u \, . \, u'}{\text{sen}^2 u}$

$y' = \frac{- \text{sen}^2 u \, . \, u' - \cos^2 u \, . \, u'}{\text{sen}^2 u}$

$y' = \frac{- u'(\text{sen}^2 u + \cos^2 u)}{\text{sen}^2 u}$

$y' = - \frac{1}{\text{sen}^2 u} u'$

$\boxed{y' = - \text{cosec}^2 u \, . \, u'}$

Como caso particular, si y = cotg x, entonces $y' = - \text{cosec}^2 x$

DERIVADA DE SECANTE: La derivada de la secante de una función es igual a la secante de la función por la tangente de la función y por la derivada de dicha función.

Si y = sec u, entonces $y' = \sec u \; \text{tg } u \; u'$

DEMOSTRACION:

Si y = sec u, entonces:

$y = \frac{1}{\cos u}$.

Aplicando la fórmula de derivada de un cociente, se tiene:

$y' = \frac{(1)' \cos u - 1 \, (\cos u)'}{\cos^2 u}$

$y' = \frac{0 \, . \, \cos u - 1 \, (- \text{sen } u \, . \, u')}{\cos^2 u}$

$y' = \frac{\text{sen } u \, . \, u'}{\cos^2 u}$

$y' = \frac{1}{\cos u} \; \frac{\text{sen } u}{\cos u} \; . \; u'$

$\boxed{y\,' = \sec u \;.\; \operatorname{tg} u \;.\; u'}$

Como caso particular, si y = sec x, entonces y ´= sec x tg x

DERIVADA DE COSECANTE: La derivada de la cosecante de una función es igual a menos la cosecante de la función por la cotangente de la función y por la derivada de dicha función.

Si y = cosec u, entonces y ´= - cosec u cotg u u´

DEMOSTRACION:

Si y = cosec u, entonces:

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

Aplicando la fórmula de derivada de un cociente, se tiene:

$$y\,' = \frac{(1)'\operatorname{sen} u - 1\,(\operatorname{sen} u)'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$y\,' = \frac{0 \,.\, \operatorname{sen} u - 1\;\cos u \,.\, u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$y\,' = \frac{-\;\cos u \,.\, u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$y\,' = -\,\frac{1}{\operatorname{sen} u}\;\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\;.\;u'$$

$\boxed{y\,' = -\operatorname{cosec} u \;.\; \operatorname{cotg} u \;.\; u'}$

Como caso particular, si y = cosec x, entonces y ´= - cosec x cotg x

DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS:

DERIVADA DE ARCO SENO:

Si y = arcsen u, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

DEMOSTRACION:

Si y = arcsen u $\Rightarrow$ u = sen y $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dy} = \cos y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y}$$

Como $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \; \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'}$$

Como caso particular, si y = arcsen x, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

DERIVADA DE ARCO COSENO:

Si y = arccos u, entonces $\frac{dy}{dx} = - \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$.

DEMOSTRACION:

Si y = arccos u $\Rightarrow$ u = cos y $\Rightarrow$ $\frac{du}{dy} = - \text{sen } y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} \quad .$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{- \text{sen } y} \quad .$$

Como sen y = $\sqrt{1 - \cos^2 y}$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \quad .$$

$$\frac{dy}{du} = - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \quad .$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \; \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'}$$

Como caso particular, si y = arccos x, entonces $\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

DERIVADA DE ARCO TANGENTE:

Si y = arctg u, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{1 + u^2}$.

DEMOSTRACION:

Si y = arctg u $\Rightarrow$ u = tg y $\Rightarrow$ $\frac{du}{dy} = \sec^2 y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Como $\sec^2 y = 1 + tg^2 y$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1 + tg^2 y}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1 + u^2}$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} . u'}$$

Como caso particular, si y = arctg x, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$

DERIVADA DE ARCO COTANGENTE:

Si y = arccotg u, entonces $\frac{dy}{dx} = - \frac{u'}{1 + u^2}$

DEMOSTRACION:

Si y = arccotg u $\Rightarrow$ u = cotg y $\Rightarrow$ $\frac{du}{dy} = - \text{cosec}^2 y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{- \text{cosec}^2 y}$$

Como $\text{cosec}^2 y = 1 + \text{cotg}^2 y$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = - \frac{1}{1 + \text{cotg}^2 y}$$

$$\frac{dy}{du} = - \frac{1}{1 + u^2}$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{1 + u^2} . u'}$$

Como caso particular, si y = arccotg x, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.

DERIVADA DE ARCO SECANTE:

Si y = arcsec u, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

DEMOSTRACION:

Si y = arcsec u $\Rightarrow$ u = sec y $\Rightarrow$ $\frac{du}{dy} = \sec y \cdot \operatorname{tg} y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec y \cdot \operatorname{tg} y}$$

Como $\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'}$$

Como caso particular, si y = arcsec x, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

DERIVADA DE ARCO COSECANTE:

Si y = arccosec u, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

DEMOSTRACION:

Si y = arccosec u $\Rightarrow$ u = cosec y $\Rightarrow$ $\frac{du}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cdot \operatorname{cotg} y$

Teniendo en cuenta la fórmula de derivada de la función inversa, resulta:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{-\operatorname{cosec} y \cdot \operatorname{cotg} y}$$

Como $\cot g\ y = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}$, se tiene:

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y\ \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}}$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u\ \sqrt{u^2 - 1}}$$

Por regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u\ \sqrt{u^2 - 1}}\ .\ u'}$$

Como caso particular, si y = arccosec x, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\ \sqrt{x^2 - 1}}$

DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES:

1º) Si $y = a^u$, entonces $\frac{dy}{dx} = a^u\ u'\ \ln a$

DEMOSTRACION:

Si $y = a^u$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros se tiene:

$\ln y = \ln a^u$

$\ln y = u \ln a$

Derivando ambos miembros, resulta:

$(\ln y)' = (u \ln a)'$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = u' \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ u'\ \ln a$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a^u\ u'\ \ln a}$$

Como caso particular si $y = a^x$, entonces $\frac{dy}{dx} = a^x\ \ln a$

2º) Si $y = e^u$, entonces $\frac{dy}{dx} = e^u\ u'$

DEMOSTRACION:

Si $y = e^u$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros se tiene:

$\ln y = \ln e^u$

$\ln y = u \ln e$

$\ln y = u$

Derivando ambos miembros, resulta:

$(\ln y)' = (u)'$

$\dfrac{\frac{dy}{dx}}{y} = u'$

$\dfrac{dy}{dx} = y\,u'$

$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = e^u\,u'}$

Como caso particular si $y = e^x$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

DERIVADA DE FUNCIONES HIPERBOLICAS:

DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS:

$\operatorname{senh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$

$\cosh u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$

$\operatorname{tgh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

$\operatorname{cotgh} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$

$\operatorname{sech} u = \dfrac{2}{e^u + e^{-u}}$

$\operatorname{cosech} u = \dfrac{2}{e^u - e^{-u}}$

DERIVADA DE SENO HIPERBOLICO:

Si $y = \operatorname{senh} u$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \cosh u \,.\, u'$

DEMOSTRACION:

Si $y = \operatorname{senh} u$, entonces:

$y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(e^u)' - (e^{-u})'}{2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^u \,.\, u' - (-\,e^{-u} \,.\, u')}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{u} \,.\, u' + e^{-u} \,.\, u'}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{u} + e^{-u})}{2} \,.\, u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cosh u \,.\, u'}$$

DERIVADA DE COSENO HIPERBOLICO:

Si $y = \cosh u$, entonces $\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} u \,.\, u'$

DEMOSTRACION:

Si $y = \cosh u$, entonces:

$$y = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{u})' + (e^{-u})'}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{u} \,.\, u' + (- e^{-u} \,.\, u')}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{u} \,.\, u' - e^{-u} \,.\, u'}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{u} - e^{-u})}{2} \,.\, u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} u \,.\, u'}$$

DERIVADA DE TANGENTE HIPERBOLICA:

Si $y = \operatorname{tgh} u$, entonces $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \,.\, u'$

DEMOSTRACION:

Si $y = \operatorname{tgh} u$, entonces:

$$y = \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{senh} u)' \cosh u - \operatorname{senh} u \,(\cosh u)'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh u \,.\, u' \cosh u - \operatorname{senh} u \operatorname{senh} u \,.\, u'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh^2 u \,.\, u' - \operatorname{senh}^2 u \,.\, u'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u) \,.\, u'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 u} \,.\, u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \cdot u'}$$

DERIVADA DE COTANGENTE HIPERBOLICA:

Si y = cotgh u, entonces $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'$

DEMOSTRACION:

Si y = cotgh u, entonces:

$$y = \frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cosh u)' \operatorname{senh} u - \cosh u (\operatorname{senh} u)'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{senh} u \cdot u' \operatorname{senh} u - \cosh u \cosh u \cdot u'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{senh}^2 u \cdot u' - \cosh^2 u \cdot u'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u) \cdot u'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 u} \cdot u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot u'}$$

DERIVADA DE SECANTE HIPERBOLICA:

Si y = sech u, entonces $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'$

DEMOSTRACION:

Si y = sech u, entonces:

$$y = \frac{1}{\cosh u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)' \cosh u - 1 (\cosh u)'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot \cosh u - 1 \operatorname{senh} u \cdot u'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{senh} u \cdot u'}{\cosh^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cosh u} \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u} \cdot u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot u'}$$

DERIVADA DE COSECANTE HIPERBOLICA:

Si y = cosech u, entonces $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot u'$

DEMOSTRACION:

Si y = cosech u, entonces:

$$y = \frac{1}{\operatorname{senh} u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)' \operatorname{senh} u - 1 (\operatorname{senh} u)'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot \operatorname{senh} u - 1 \cosh u \cdot u'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cosh u \cdot u'}{\operatorname{senh}^2 u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{senh} u} \frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u} \cdot u'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot u'}$$

EJEMPLOS:

1º) Determinar la derivada de la función $y = 2x^2 - 5x + 3$ aplicando la definición.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 3 - (2x^2 - 5x + 3)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 5x - 5\,\Delta x + 3 - 2x^2 + 5x - 3}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 - 5x - 5\,\Delta x + 3 - 2x^2 + 5x - 3}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 - 5\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (4x + 2\,\Delta x - 5)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\,\Delta x - 5)$$

$$y' = 4x - 5$$

2º) Determinar la derivada da la función $y = \sqrt{3x + 2}$ aplicando la definición.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} - \sqrt{3x + 2}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} - \sqrt{3x + 2})(\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2})}{\Delta x (\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2})}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2})^2 - (\sqrt{3x + 2})^2}{\Delta x (\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2})}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\,\Delta x + 2 - 3x - 2}{\Delta x\,(\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2})}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\,\Delta x}{\Delta x\,(\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2})}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{\sqrt{3x + 3\,\Delta x + 2} + \sqrt{3x + 2}}$$

$$y' = \frac{3}{\sqrt{3x + 2} + \sqrt{3x + 2}}$$

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$$

3º) Calcular la derivada de las siguientes funciones aplicando las fórmulas de derivación:

a) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$y' = (3x^4)' - (5x^3)' + (2x^2)' - (3x)' + (1)'$

$y' = 3\,(x^4)' - 5\,(x^3)' + 2\,(x^2)' - 3\,(x)' + 0$

$y' = 3.\,4\,x^3 - 5\,.\,3\,x^2 + 2\,.\,2\,x - 3$

$y' = 12\,x^3 - 15\,x^2 + 4x - 3$

En la práctica, cuando la función es polinómica se deriva directamente de la siguiente forma:

$y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$y' = 12\,x^3 - 15\,x^2 + 4x - 3$

b) $y = \dfrac{5x^4}{a + b}$

Cuando el numerador es una función y el denominador es una constante se deriva el numarador y el denominador queda igual.

$y' = \dfrac{20\,x^3}{a + b}$

c) $y = \dfrac{5}{x^3}$

Cuando el numerador es una constante y el denominador es una función, antes de derivar se transforma la expresión dada llevando la función al numerador.

$y = 5\,x^{-3}$

$y' = -15\,x^{-4}$

$y' = \dfrac{-15}{x^4}$

d) $y = (2x + 1)(3x - 4)$

$y' = (2x + 1)'\,(3x - 4) + (2x + 1)\,(3x - 4)'$

$y' = 2\,(3x - 4) + (2x + 1)\,3$

$y' = 6x - 8 + 6x + 3$

$y' = 12\,x - 5$

e) $y = \dfrac{3x + 1}{2 - 5x}$

$$y' = \frac{(3x + 1)'\,(2 - 5x) - (3x + 1)\,(2 - 5x)'}{(2 - 5x)^2}$$

Los denominadores no se desarrollan.

$$y' = \frac{3\,(2 - 5x) - (3x + 1)\,(-5)}{(2 - 5x)^2}$$

$$y' = \frac{6 - 15x + 15x + 5}{(2 - 5x)^2}$$

$y' = \dfrac{11}{(2-5x)^2}$.

f) $y = (3x-2)^3$

$y' = 3\,(3x-2)^2\,(3x-2)'$

$y' = 3\,(3x-2)^2\,3$

$y' = 9\,(3x-2)^2$

g) $y = \sqrt[3]{(2x^2-5)^2}$

$y = (2x^2-5)^{2/3}$

$y' = (2/3)\,(2x^2-5)^{-1/3}\,(2x^2-5)'$

$y' = (2/3)\,(2x^2-5)^{-1/3}\,4x$

$y' = (8/3)\,x\,(2x^2-5)^{-1/3}$

h) $y = \ln(2x+1)$

$y' = \dfrac{(2x+1)'}{2x+1}$

$y' = \dfrac{2}{2x+1}$.

i) $y = \ln(2x+1)^2$

$y' = \dfrac{[(2x+1)^2]'}{(2x+1)^2}$

$y' = \dfrac{2\,(2x+1)\,(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$y' = \dfrac{4}{2x+1}$.

j) $y = \ln^2(2x+1)$

$y = [\ln(2x+1)]^2$

$y' = 2\ln(2x+1)\,[\ln(2x+1)]'$

$y' = 2\ln(2x+1)\,\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}$

$y' = 2\ln(2x+1)\,\dfrac{2}{2x+1}$.

$y' = \dfrac{4}{2x+1}\ln(2x+1)$

k) $y = \operatorname{sen} 3x$

$y' = (3x)'\cos 3x$

$y' = 3\cos 3x$

l) $y = \operatorname{sen}^2(5x+1)$

$y = [\operatorname{sen}(5x+1)]^2$

$y' = 2\operatorname{sen}(5x+1)\,[\operatorname{sen}(5x+1)]'$

$y' = 2\operatorname{sen}(5x+1)\,(5x+1)'\cos(5x+1)$

$y' = 2\ \text{sen}\ (5x + 1)\ 5 \cos (5x + 1)$

$y' = 10\ \text{sen}\ (5x + 1) \cos (5x + 1)$

m) $y = e^{3x + 4}$

$y' = e^{3x + 4}\ (3x + 4)'$

$y' = 3\ e^{3x + 4}$

n) $y = 3^{5x - 2}$

$y' = 3^{5x - 2}\ (5x - 2)' \ln 3$

$y' = 5 \,.\, 3^{5x - 2}\ \ln 3$

4º) Calcular la derivada de la siguiente función aplicando la regla de la cadena.

$y = \sqrt{\ln \cos^2 [\ln (x - 3/x)]}$

$y = \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{1/2}$

$y' = ½\ \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}'$

$$y' = ½\ \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \frac{\{\cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}'}{\cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]}$$

$$y' = ½\ \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \frac{2\ \cancel{\cos [\ln (x - 3x^{-1})]}\ \{\cos [\ln (x - 3x^{-1})]\}'}{\cancel{\cos^2} [\ln (x - 3x^{-1})]}$$

$$y' = \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \frac{- [\ln (x - 3x^{-1})]'\ \ \{\text{sen}\ [\ln (x - 3x^{-1})]\}}{\cos [\ln (x - 3x^{-1})]}$$

$$y' = - \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \text{tg}\ [\ln (x - 3x^{-1})]\}\ \frac{(x - 3x^{-1})'}{x - 3x^{-1}}$$

$$y' = - \{\ln \cos^2 [\ln (x - 3x^{-1})]\}^{-½}\ \text{tg}\ [\ln (x - 3x^{-1})]\}\ \frac{1 + 3x^{-2}}{x - 3x^{-1}}$$

5º) Calcular la derivada de la función por el método de derivación logarítmica

Para aplicar el método de derivación logarítmica se siguen los siguientes pasos:

a) Aplicar logaritmo natural en ambos miembros

b) Aplicar todas las propiedades posibles de logaritmo:

$\ln (a \,.\, b) = \ln a + \ln b \qquad \ln (a : b) = \ln - \ln b$

$\ln a^n = n \ln a \qquad \ln \sqrt[n]{a} = (\ln a) / n$

c) Derivar ambos miembros

$$y = \frac{(2x + 1)^2\ (x - 2)}{3x + 4}$$

$$\ln y = \ln \left[\frac{(2x + 1)^2\ (x - 2)}{3x + 4} \right]$$

$\ln y = \ln [(2x + 1)^2\ (x - 2)] - \ln (3x + 4)$

$\ln y = \ln (2x + 1)^2 + \ln (x - 2) - \ln (3x + 4)$

$\ln y = 2 \ln (2x + 1) + \ln (x - 2) - \ln (3x + 4)$

$(\ln y)' = [2 \ln (2x + 1) + \ln (x - 2) - \ln (3x + 4)]'$

$(\ln y)' = [2 \ln (2x + 1)]' + [\ln (x - 2)]' - [\ln (3x + 4)]'$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2\,(2x + 1)'}{2x + 1} + \frac{(x - 2)'}{x - 2} - \frac{(3x + 4)'}{3x + 4}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{2x + 1} + \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{3x + 4}$$

$$y' = \left(\frac{4}{2x + 1} + \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{3x + 4} \right) y$$

$$y' = \frac{4(x - 2)\,(3x + 4) + (2x + 1)(3x + 4) - 3\,(2x + 1)(x - 2)}{(2x + 1)\,(x - 2)\,(3x + 4)} \; \frac{(2x + 1)^2\,(x - 2)}{3x + 4}$$

$$y' = \frac{4\,(3x^2 - 2x - 8) + 6x^2 + 11x + 4 - 3(2x^2 - 3x - 2)\,(2x + 1)}{(3x + 4)^2}$$

$$y' = \frac{12x^2 - 8x - 32 + 6x^2 + 11x + 4 - 6x^2 + 9x + 6)\,(2x + 1)}{(3x + 4)^2}$$

$$y' = \frac{(12x^2 + 12x - 22)(2x + 1)}{(3x + 4)^2}$$

$$y' = \frac{24x^3 + 12x^2 + 24x^2 + 12x - 44x - 22}{(3x + 4)^2}$$

$$y' = \frac{24x^3 + 36x^2 - 32x - 22}{(3x + 4)^2}$$

6º) Hallar la derivada de las siguientes funciones implícitas

a) $2x^2 - 3y^3 - 5x\,y^2 = 2x - 3y$

$(2x^2)' - (3y^3)' - (5x\,y^2)' = (2x)' - (3y)'$

$4x - 9\,y^2\,y' - (5\,y^2 + 5x\,2\,y\,y') = 2 - 3\,y'$

$4x - 9\,y^2\,y' - 5\,y^2 - 10\,x\;\,y\,y' = 2 - 3\,y'$

$3y' - 9\,y^2\,y' - 10\,x\,y\,y' = 2 - 4x + 5\,y^2$

$y'\,(3 - 9\,y^2 - 10\,x\,y) = 2 - 4x + 5\,y^2$

$$y' = \frac{2 - 4x + 5\,y^2}{3 - 9\,y^2 - 10\,x\,y}$$

b) $e^{x + y} - 2x + 3y = 2x^2 + \text{sen}\,(x\,.\,y)$

$(e^{x + y})' - (2x)' + (3y)' = (2x^2)' + [\text{sen}\,(x\,.\,y)]'$

$e^{x + y}\;(x + y)' - 2 + 3y' = 4x + (x\,.\,y)'\cos\,(x\,.\,y)$

$e^{x + y}\;(1 + y') - 2 + 3y' = 4x + (y + x\,y')\cos\,(x\,.\,y)$

$e^{x + y} + y'\,e^{x + y} - 2 + 3y' = 4x + y\cos\,(x\,.\,y) + x\,y'\cos\,(x\,.\,y)$

$y'\,e^{x + y} + 3y' - x\,y'\cos\,(x\,.\,y) = 4x + y\cos\,(x\,.\,y) - e^{x + y} + 2$

$y'\,[e^{x + y} + 3 - x\cos\,(x\,.\,y)] = 4x + y\cos\,(x\,.\,y) - e^{x + y} + 2$

$$y' = \frac{4x + y\cos\,(x\,.\,y) - e^{x + y} + 2}{e^{x + y} + 3 - x\cos\,(x\,.\,y)}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR O DERIVADAS SUCESIVAS

La derivada de una función es también otra función, por lo tanto se puede derivar nuevamente, asi esos resultados se pueden seguir derivando obteniendo las llamadas derivadas sucesivas o derivadas de orden superior de la función dada.
Así, dada la función:

$y = f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} y' = f\,'(x) \text{ Primera derivada} \\ y'' = f\,''(x) \text{ Segunda derivada} \\ y''' = f\,'''(x) \text{ Tercera derivada} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} = f^{(n)}(x) \text{ Enésima derivada} \end{array}\right\} \text{ Derivadas sucesivas o derivadas de orden superior}$$

1º) $y = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$
$y' = 9x^2 - 10x + 2$
$y'' = 18x - 10$
$y''' = 18$
$y^{IV} = 0$

2º) $y = \text{sen } 3x$
$y' = 3 \cos 3x$
$y'' = -9 \text{ sen } 3x$
$y''' = -27 \cos 3x$

BOLILLA Nº 6

APLICACIONES DE LA DERIVADA

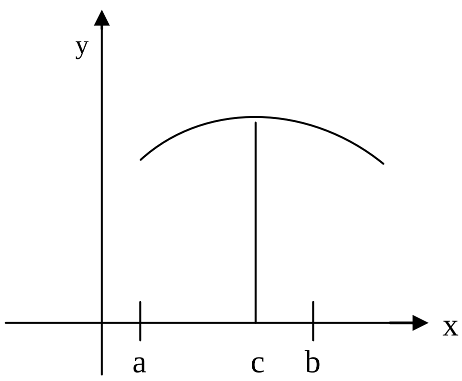
MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

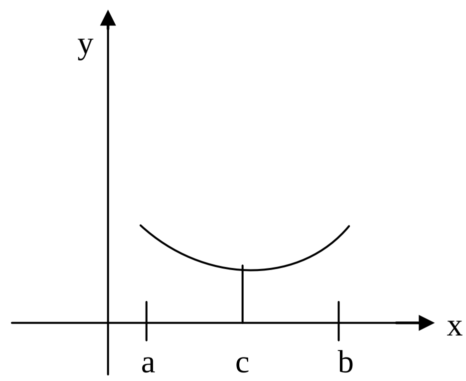
DEFINICION 1: Se dice que una función tiene un máximo relativo en un punto de abscisa x = c perteneciente a un intervalo [a, b] si se verifica que:

$$f(c) > f(x) \ \forall \ x \in [a,b]$$

DEFINICION 2: Se dice que una función tiene un mínimo relativo en un punto de abscisa x = c perteneciente a un intervalo [a,b] si se verifica que:

$$f(c) < f(x) \ \forall \ x \in [a,b]$$





Si la función f tiene un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo en c, entonces se dice que f tiene un extremo relativo en c.

TEOREMA: Si f(x) existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a,b) y si f tiene un extremo relativo en c, donde a < c < b, si f ´(c) existe, f ´ (c) = 0.

DEMOSTRACION:

(Para el caso en que f tiene un valor mínimo relativos)

Si f ´(c) existe, por definición de derivada tenemos:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ya que f tiene un valor mínimo relativo en c, por definición de mínimo relativo se cumple que si x está suficientemente cerca de c,

$$f(x) \geq f(c)$$

Por lo tanto:

$$f(x) - f(c) \geq 0$$

Si x se aproxima a c por la derecha, x – c > 0, entonces:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad (1)$$

Análogamente, si x se aproxima a c por la izquierda, x – c < 0, entonces:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad (2)$$

Como f ´(x) existe, los límites unilaterales deben ser iguales y ambos iguales a f ´(c). Por lo tanto de la relación (1) f ´(c) ≥ 0 y de la relación (2) f ´(c) ≤ 0. Luego f ´(c) = 0 que es lo que se quería demostrar.

DEFINICION 3: Si c es un número en el dominio de la función f y si f ´(c) = 0 o f ´(c) no existe, entonces c se llama valor crítico de f.

DEFINICION 4: La función f se dice que tiene un valor máximo absoluto en un intervalo, si existe algún número c en el intervalo tal que f(c) ≥ f(x) para toda x en el intervalo. En tal caso f(c) es el valor máximo absoluto de f en el intervalo.

DEFINICION 4: La función f se dice que tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo, si existe algún número c en el intervalo tal que f(c) ≤ f(x) para toda x en el intervalo. En tal caso f(c) es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo.

TEOREMA DE ROLLE: Sea f una función tal que:
a – Es continua en el intervalo cerrado [a,b]
b – Es diferenciable en el intervalo abierto (a,b)
c – f(a) = f(b) = 0

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que f ´(c) = 0.

DEMOSTRACION: (Se consideran dos casos)

CASO 1:

f(x) = 0 para todo x perteneciente a [a,b]

Si f(x) 0 =, entonces f ´(x) = 0 para todo x en (a,b), consecuentemente cualquier número entre a y b se puede tomar como c.

CASO 2:

f(x) es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a ,b).

Ya que f es continua en el intervalo [a,b], f tiene un valor máximo absoluto en [a,b] y un valor mínimo absoluto en [a,b]. Como f(a) = f(b) = 0 por hipótesis y para este caso f(x) es diferente de cero para alguna x en (a,b), concluimos que f tendrá un valor máximo absoluto positivo en algún c_1 en (a,b) o un valor mínimo absoluto negativo en algún c_2 en (a,b) o ambos. De este modo para $c = c_1$ o $c = c_2$ según sea el caso tenemos un extremo absoluto en un punto interior del intervalo [a,b], por lo tanto el extremo absoluto f(c) es también un extremo relativo y como f ´(c) existe por hipótesis, resulta f ´(c) = 0 que es lo que se quería probar.

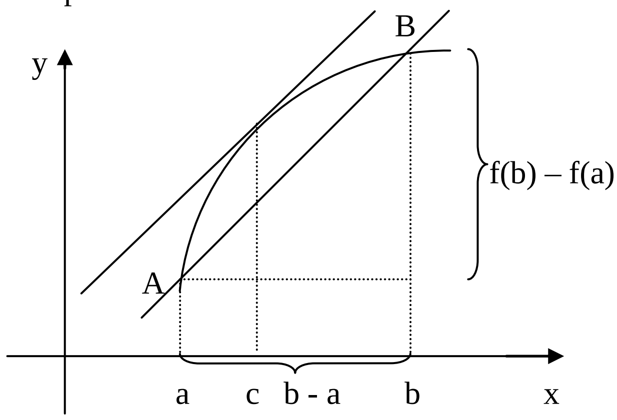
TEOREMA DEL VALOR MEDIO:

Sea f una función continua tal que:
1º) Es continua en el intervalo cerrado [a,b]
2º) Es diferenciable en el intervalo abierto (a,b)
Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DEMOSTRACIÓN:

La derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.



Si Trazamos la gráfica de f, entonces [f(b) – f(a)]/(b – a) es la pendiente del segmento de recta que une los puntos A y B.
El teorema del valor medio establece que existe algún punto sobre la curva entre A y B donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B, es decir, existe algún número c en (a,b) tal que:

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si el eje x estuviera a lo largo del segmento de recta AB, entonces el teorema del valor medio sería una generalización del teorema del Rolle, el cual se usa para esta demostración.

Para demostrar este teorema consideramos la función auxiliar:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Demostraremos que esta función F satisface las condiciones del teorema del Rolle

La función F es continua en el intervalo cerrado [a,b] ya que está definida como suma algebraica de funciones continuas, por lo tanto se cumple la primera condición del teorema del Rolle.
La función F es diferenciable en el intervalo abierto (a,b) pues está definida como suma algebraica de funciones diferenciable, es decir que también se cumple la segunda condición del teorema del Rolle.
Para ver que F cumple la tercera condición del teorema, calculamos F(a) y F(b):

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}\cancel{(b - a)} - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

Luego F(a) = F(b) = 0.
Por lo tanto al cumplirse las tres condiciones del teorema del Rolle podemos decir que existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que $F\,'(c) = 0$.

Calculamos primero $F\,'(x)$:

$$F\,'(x) = f\,'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo tanto

$$F\,'(c) = f\,'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

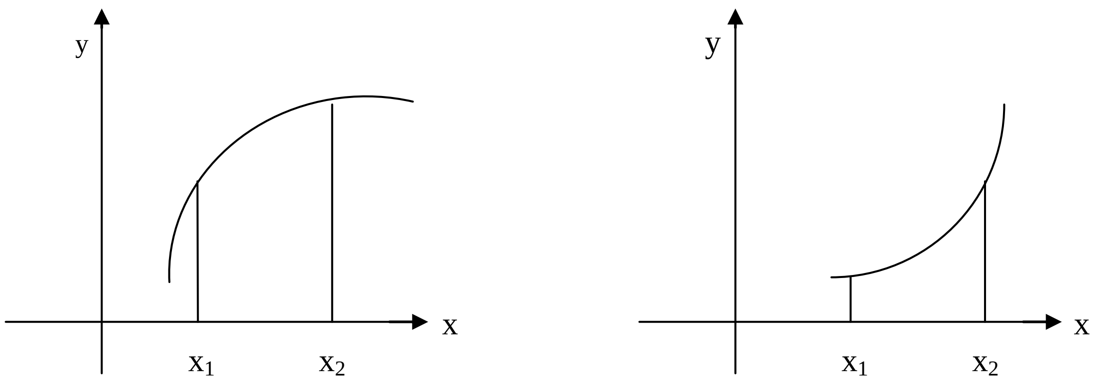
O sea:

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

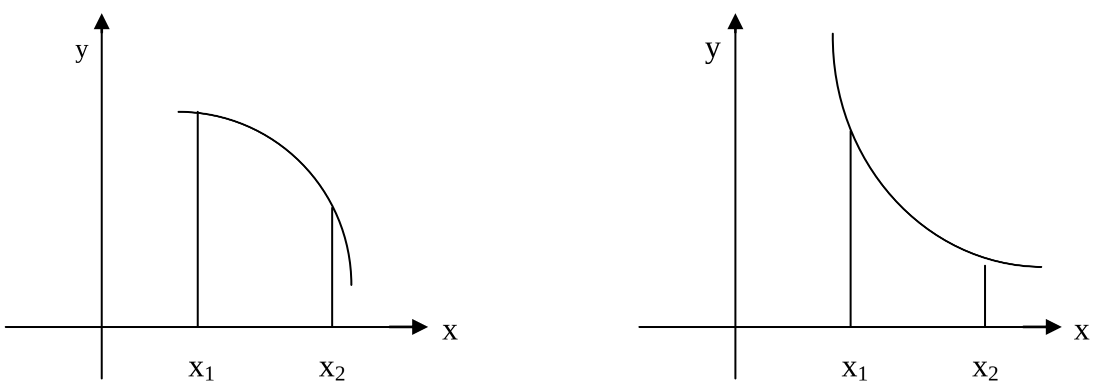
que es lo que se quería demostrar.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

DEFINICION 1: Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo si para cada par de valores x_1 y x_2 con $x_1 < x_2$ pertenecientes a dicho intervalo, se verifica que: $f(x_1) < f(x_2)$



DEFINICION 2: Se dice que una función $y = f(x)$ es decreciente en un intervalo si para cada par de valores x_1 y x_2 con $x_1 < x_2$ pertenecientes a dicho intervalo, se verifica que: $f(x_1) > f(x_2)$



TEOREMA:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y diferenciable en el intervalo abierto (a,b):

1º) Si $f\,'(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces f es creciente en [a,b].

2º) Si $f\,'(x) < 0$ para toda x en (a,b), entonces f es decreciente en [a,b].

DEMOSTRACION:

Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en [a,b] tales que $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1,x_2]$ y diferenciable en (x_1,x_2). Por el teorema del valor medio resulta que existe un número c en (x_1,x_2) tal que:

$$f\,'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

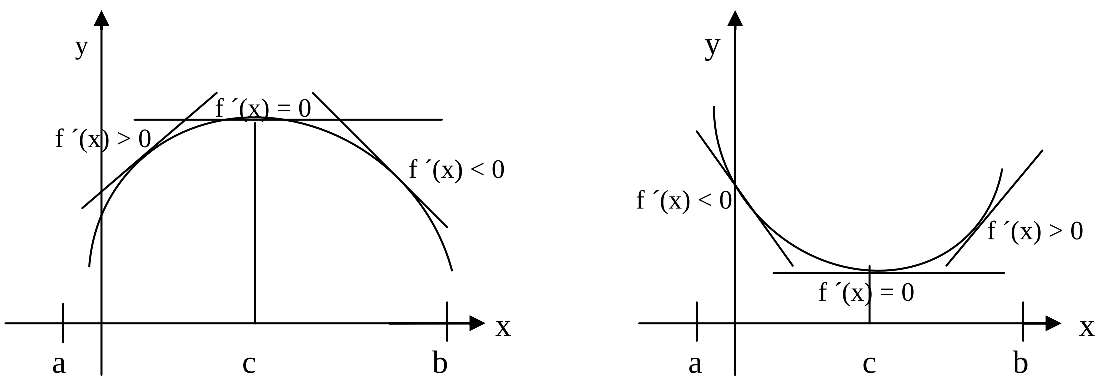
Como $x_1 < x^2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$. También $f\,'(c) > 0$ por hipótesis. Por lo tanto $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir: $f(x_2) > f(x_1)$, o sea $f(x_1) < f(x_2)$ entonces la función es creciente en [a,b] ya que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera de [a,b].

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) que contiene al número c, y supongamos que f ´ existe en todos los puntos de (a,b), excepto posiblemente en c:

1º) Si f ´(x) > 0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como punto extremos derecho, y si f ´(x) < 0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene u n valor máximo relativo en c.

2º) Si f ´(x) < 0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como punto extremos derecho, y si f ´(x) > 0 para todos los valores de x en algún intervalo abierto que tiene a c como su punto extremo izquierdo, entonces f tiene u n valor mínimo relativo en c.



DEMOSTRACION: (demostración de 1º)

Sea (a,c) el intervalo que tiene a c como su punto extremo derecho, para el cual f ´(x) > 0 para toda x en el intervalo. Resulta por el teorema anterior (1) que f es creciente en (a,c). Sea (c,b) el intervalo que tiene a c como punto extremo izquierdo, para el cual f ´(x) < 0 para toda x dentro del intervalo. Por el teorema anterior (2) f es decreciente en (c,b) .
Como f es creciente en (a,c) resulta que si x_1 está en ese intervalo y es distinto de c, $f(x_1) < f(c)$. Análogamente, como f es decreciente en (c,b) resulta que si x_2 está en dicho intervalo y x_2 es distinto de c, entonces $f(c) > f(x_2)$. Por lo tanto, por definición de máximo relativo se verifica que f tiene un máximo relativo en x = c.

El criterio de la primera derivada para extremos relativos establece esencialmente que si f es continua en c y f ´(x) cambia de signo de positivo a negativo cuando x crece hacia el número c, entonces f tiene un valor máximo relativo en c y si f ´(x) cambia su signo de negativo a positivo cuando x crece hacia c, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

En resumen, para determinar los extremos relativos de una función y = f(x) (máximos y mínimos relativos) se sigue los siguientes pasos:

a) Se calcula la primera derivada de la función

b) Se iguala a cero la primera derivada y se resuelve la ecuación que resulta, las raíces de esta ecuación se denominan valores críticos y representan las abscisas de los posibles máximos y/o mínimos relativos de la función.

c) Si x = c es un valor crítico, entonces:

Si $\left.\begin{array}{l} f'(c-\delta) < 0 \\ f'(c) = 0 \\ f'(c+\delta) > 0 \end{array}\right\}$ la función tiene un mínimo relativo

Si $\left.\begin{array}{l} f'(c-\delta) > 0 \\ f'(c) = 0 \\ f'(c+\delta) < 0 \end{array}\right\}$ la función tiene un máximo relativo

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

Sea c un valor crítico de una función f en la cual f ´(c) = 0 y f existe para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c. Entonces, si f ´´(c) existe y:

1º) si f ´´(c) < 0, f tiene un valor máximo relativo en c.

2º) si f ´´(c) > 0, f tiene un valor mínimo relativo en c.

Para determinar los extremos relativos de una función (máximos y mínimos relativos) y = f(x) se sigue los siguientes pasos:

a) Se calcula la primera derivada de la función

b) Se iguala a cero la primera derivada y se resuelve la ecuación que resulta, las raíces de esta ecuación se denominan valores críticos y representan las abscisas de los posibles máximos y/o mínimos relativos de la función.

c) Se calcula la segunda derivada de la función.

d) Si x = c es un valor crítico, entonces:

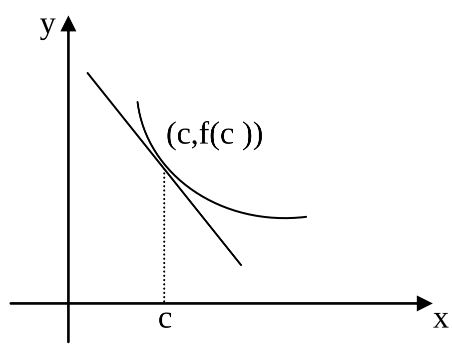
Si f ‘‘(c) > 0 la función tiene un mínimo relativo en x = c.

Si f ‘‘(c) < 0 la función tiene un máximo relativo en x = c.

ESTUDIO DE LA CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA CURVA

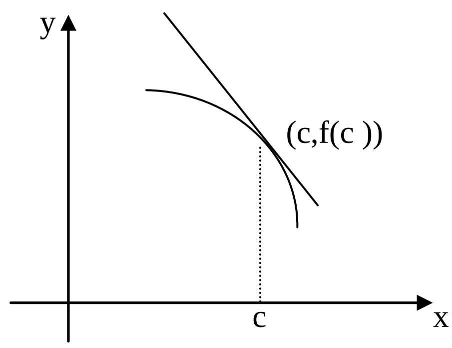
DEFINICION 1:

La gráfica de una función f se dice que es cóncava hacia arriba en el punto (c,f(c)) si existe f ´(c) y si existe un intervalo abierto I que contenga a c tal que para todos los valores de x ≠ c en I, el punto (x,f(x)) sobre la gráfica esté arriba de la recta tangente a la gráfica en el punto (c,f(c)).



DEFINICION 2:

La gráfica de una función f se dice que es cóncava hacia abajo en el punto (c,f(c)) si existe f ´(c) y si existe un intervalo abierto I que contenga a c tal que para todos los valores de x ≠ c en I, el punto (x,f(x)) sobre la gráfica esté bajo de la recta tangente a la gráfica en el punto (c,f(c)).



TEOREMA: Sea f una función diferenciable en algún intervalo abierto que contenga a c. Entonces:

1º) Si f ´´(c) > 0, la gráfica de f es cóncava hacia arriba (cóncava) en (c,f(c)).

2º) Si f ´´(c) < 0, la gráfica de f es cóncava hacia abajo (convexa) en (c,f(c)).

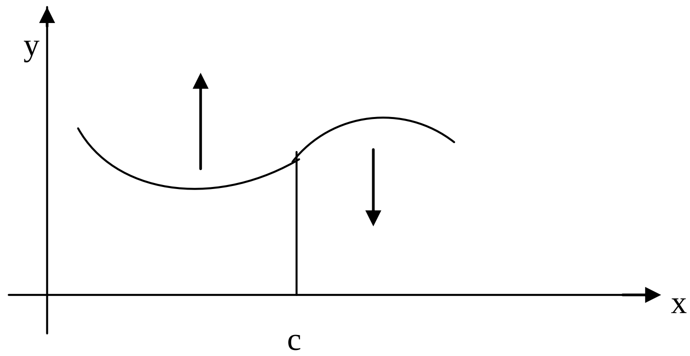
PUNTOS DE INFLEXION

El punto (c,f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de la función f, si la gráfica tiene ahí una recta tangente y si existe un intervalo abierto I que contenga a c, tal que si x está en I, entonces

1º) f ´´(x) < 0 si x < c y f ´´(x) > 0 si x > c o

2º) f ´´(x) > 0 si x < c y f ´´(x) < 0 si x > c.

Es decir, un punto de inflexión es un puntos sobre la gráfica de una función en la cual el sentido de la concavidad cambia, entonces la gráfica intercepta a la tangente en ese punto.



TEOREMA: Si la función f es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c y si (c,f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces si f ´´(c) existe, f ´´(c) = 0.

ESTUDIO COMPLETO DE UNA FUNCIÓN

Para realizar el estudio completo de una función, es decir, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, la concavidad de la curva y los puntos de inflexión se siguen los siguientes pasos:

a) Se calcula la primera derivada de la función

b) Se iguala a cero la primera derivada y se resuelve la ecuación que resulta, las raíces de esta ecuación se denominan valores críticos y representan las abscisas de los posibles máximos y/o mínimos relativos de la función.

c) Se calcula la segunda derivada de la función.

d) Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación que resulta, las raíces de la misma son las abscisas de los posibles puntos de inflexión.

e) Si $x = c_1$ es un valor crítico para máximos y mínimos, entonces:

Si f ‘‘(c_1) > 0 la función tiene un mínimo relativo en x = c.

Si f ‘‘(c_1) < 0 la función tiene un máximo relativo en x = c.

f) Si $x = c_2$ es un valor que anula la segunda derivada, entonces habrá punto de inflexión si el signo de esta segunda derivada cambia para valores antes y después de c_2.

Dada la función $y = x^3 – 6x^2 + 9x$ realizar el estudio completo de la misma.

$y = x^3 – 6x^2 + 9x$ FUNCION

$y’ = 3x^2 – 12x + 9$ PRIMERA DERIVADA

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$.

$\Rightarrow x = 4 \pm 2 = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Valores críticos, representan las abscisas de los posible máximos y mínimos de la función.

$y'' = 6x - 12$ SEGUNDA DERIVADA

$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$

Valor crítico, representa la abscisa del posible punto de inflexión.

Una vez calculados todos los valores críticos se ordenan los mismos y se confecciona una tabla donde se tienen en cuenta los distintos intervalos donde se realizará el estudio de la función, de la primera y segunda derivada de la misma.

INTERVALOS	f(x)	f '(x)	f ''(x)	CONCLUSIONES
x < 1		+	-	Crece - Cóncava hacia abajo
x = 1	4	0	-	Cóncava hacia abajo - Máx (1,4)
(1,2)		-	-	Decrece - Cóncava hacia abajo
x = 2	2	-	0	Decrece - P.I. (2,2)
(2,3)		-	+	Decrece - Cóncava hacia arriba
x = 3	0	0	+	Cóncava hacia arriba - Mín (3,0)
x > 3		+	+	Crece - Cóncava hacia arriba

BOLILLA Nº 7

LA DIFERENCIAL Y LA ANTIDIFERENCIAL

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Dada la función y = f(x), su diferencial se define como el producto de la derivada de la función por el incremento de la variable independiente.
Es decir:

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x}$$

Si tomamos el caso particular:

$$y = x \Rightarrow dx = 1 . \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

Por lo tanto se puede redefinir el diferencial de una función como el producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente, es decir:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

1º) $y = 2x^3 – 5x^2 + 3x + 6$
$dy = (6x2 – 10x + 3)\,dx$

2º) $y = tg\,(3x + 2)$
$dy = (3x + 2)'\,sec^2\,(3x + 2)\,dx$
$dy = 3\,sec^2\,(3x + 2)\,dx$

3º) $x^2 + y^2 = 2x – 3y$

$(x^2)' + (y^2)' = (2x)' – (3y)'$

$2x + 2y\,y' = 2 – 3\,y'$

$2y\,y' + 3\,y' = 2 – 2x$

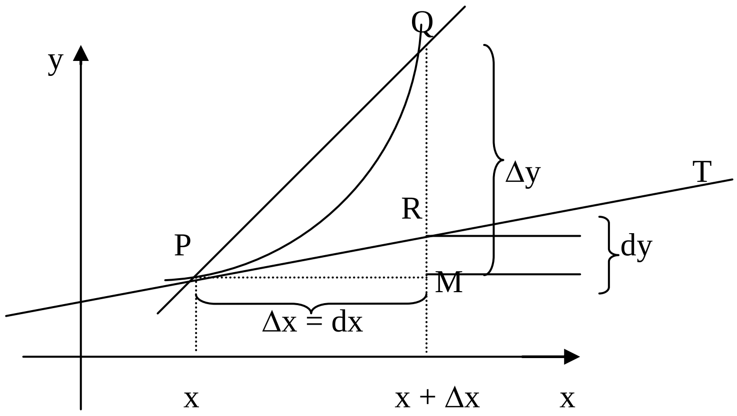
$y'\,(2y + 3) = 2 – 2x$

$$y' = \frac{2 – 2x}{2y + 3}$$

$$dy = \frac{2 – 2x}{2y + 3}\,dx$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL

Sea y = f(x) la ecuación de la curva representada en la figura. Sea P(x,y) un punto perteneciente a la curva y Q(x + Δx, y +Δy) otro punto de la misma, distinto de P.
Sea PT la recta tangente e la curva en el punto P.
En la gráfica dada se tiene:
Δx = dx = PM,
Δy = MQ.



La pendiente de la recta tangente es:

$$m_t = \frac{dy}{dx}$$

y también:

$$m_t = \frac{MR}{PM}$$

Por lo tanto, de estas dos expresiones se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{MR}{PM}$$

Como PM = dx, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{MR}{dx}$$

Entonces:

$$\boxed{dy = MR}$$

Es decir, el segmento representativo del diferencial de una función es el segmento MR.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Dada una función $y = f(x)$, se han estudiado los métodos que me permiten determinar la derivada de esta función, $y' = f'(x)$ y su diferencial $dy = f'(x)\, dx$. Esto constituye los que se conoce como el **cálculo diferencial**.

La operación inversa, es decir, dada la derivada $y' = f'(x)$ o el diferencial $dy = f'(x)\, dx$, determinar la función. Este problema, que ahora nos ocupa, se denomina **cálculo integral**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{pues} \quad [F(x) + c]' = f(x) \quad \text{o bien} \quad d\,[F(x) + c] = f(x)\,dx}$$

signo de integración

integrando

integral indefinida
o primitiva

constante de
integración

Ejemplo:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + 2 \qquad \text{pues} \qquad (x^3/3 + 2)' = x^2$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5 \qquad \text{pues} \qquad (x^3/3 - 5)' = x^2$$

$$= \frac{x^3}{3} + c \qquad \text{pues} \qquad (x^3/3 + c)' = x^2$$

PROPIEDADES

1º) La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\boxed{\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx}$$

2º) La integral de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones:

$$\boxed{\int [f(x) + g(x) - h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx}$$

INTEGRALES INMEDIATAS

1º) $\int du = u + c$

2º) $\int u^n \, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

3º) $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c$

4º) $\int \text{sen } u \, du = - \cos u + c$

5º) $\int \cos u \, du = \text{sen } u + c$

6º) $\int e^u \, du = e^u + c$

7º) $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$

8º) $\int \sec^2 u \, du = \text{tag } u + c$

9º) $\int \text{cosec}^2 u \, du = - \text{cotg } u + c$

10º) $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{ arctg } \frac{u}{a} + c$

11º) $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u - a}{u + a} \right) + c$

12º) $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + u}{a - u} \right) + c$

13º) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen } \frac{u}{a} + c$

14º) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$

15º) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln (u + \sqrt{u^2 - a^2}) + c$

EJEMPLOS

1º) $\int (3 + 7x - 5x^2 + 2x^3) \, dx = \int 3 \, dx + \int 7x \, dx - \int 5x^2 \, dx + \int 2x^3 \, dx$

$= 3 \int dx + 7 \int x \, dx - 5 \int x^2 \, dx + 2 \int x^3 \, dx$

$= 3x + 7 \dfrac{x^2}{2} - 5 \dfrac{x^3}{3} + 2 \dfrac{x^4}{4} + c$

$= 3x + \dfrac{7}{2} x^2 - \dfrac{5}{3} x^3 + \dfrac{1}{2} x^4 + c$

2º) $\int (3x - 5x^2 + 2 \sqrt{x}) \, dx = \int 3x \, dx - \int 5x^2 \, dx + \int 2 \, x^{½} \, dx$

$= 3 \int x \, dx - 5 \int x^2 \, dx + 2 \int x^{½} \, dx$

$= 3 \dfrac{x^2}{2} - 5 \dfrac{x^3}{3} + 2 \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + c$

$= \dfrac{3}{2} x^2 - \dfrac{5}{3} x^3 + \dfrac{4}{3} x^{3/2} + c$

BOLILLA Nº 8

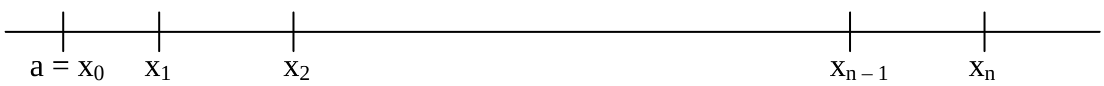
LA INTEGRAL DEFINIDA

SUMA DE RIEMANN

Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a,b]. Dividimos este intervalo en "n" subintervalos escogiendo cualesquiera "n – 1" puntos intermedios entre a y b.
Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ los puntos intermedios, tales que:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ no son necesariamente equidistantes. Sea $\Delta_1 x$ la longitud del primer subintervalo tal que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$. Sea $\Delta_2 x$ la longitud del segundo subintervalo tal que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ y así sucesivamente, tal que la longitud del i-ésimo subintervalo sea $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$.
Un conjunto de todos esos subintervalos del intervalo [a,b] se llama una partición de [a,b]. Sea Δ tal partición.



La partición Δ contiene n subintervalos. Uno de éstos es el más largo, sin embargo, puede haber más de uno de esos subintervalos. La longitud del subintervalo más largo se llama norma de la partición y se denota por $||\Delta||$.
Escogemos un punto en cada subintervalo de la partición Δ. Sea ε_1 el punto escogido en $[x_0,x_1]$ tal que $x_0 \le \varepsilon_1 \le x_1$. Sea ε_2 el punto escogido en $[x_1,x_2]$ tal que $x_1 \le \varepsilon_2 \le x_2$ y así sucesivamente sea ε_i el punto escogido en $[x_{i-1},x_i]$ tal que $x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$.
Formamos la suma:

$$f(\varepsilon_1)\,\Delta_1 x + f(\varepsilon_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(\varepsilon_n)\,\Delta_n x = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x$$

Esta suma se llama suma de Riemann.

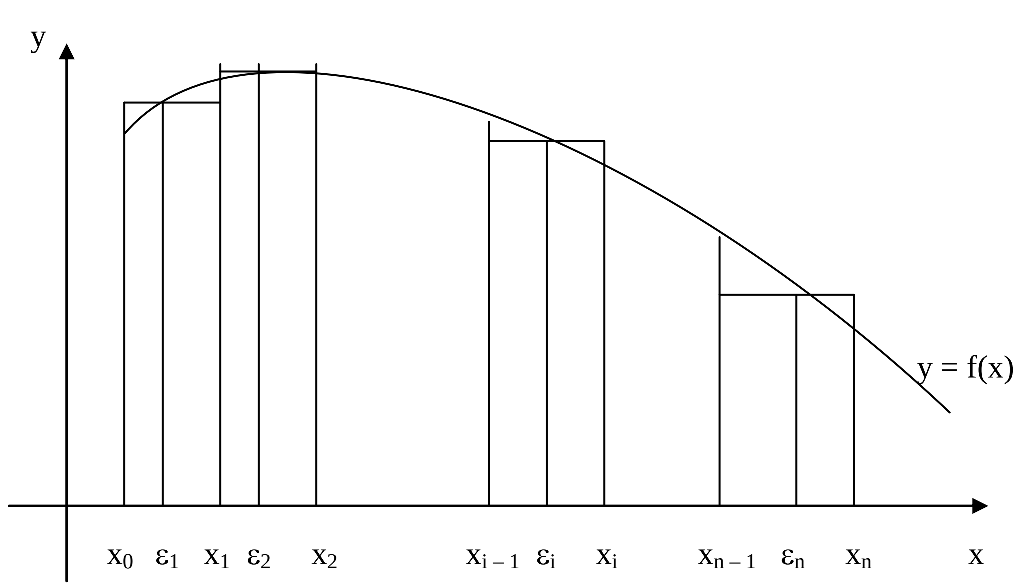
DEFINICION: Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a,b]. Entonces la integral definida de f entre los valores a y b, simbolizada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se define como el límite de la suma de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x$$

si este límite existe.



PROPIEDADES

TEOREMA 1: Si la función f es integrable en el intervalo cerrado [a,b] y si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

TEOREMA 2: Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado [a,b], entonces f + g es integrable en [a,b] y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

TEOREMA 3: Si la función f es integrable en los intervalos cerrados [a,b], [a,c] y [c,b], entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \text{ siendo } a < c < b$$

TEOREMA 4: Si k es una constante y si f es una función tal que f(x) = k $\forall x \in [a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx = k \int_a^b dx = k\,(b - a)$$

TEOREMA 5: Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado [a,b] y si $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in$ [a,b], entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

TEOREMA 6: Si la función f es integrable en el intervalo cerrado [a,b], entonces:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

TEOREMA 7: Si la función f es integrables en el intervalo cerrado [a,b], entonces:

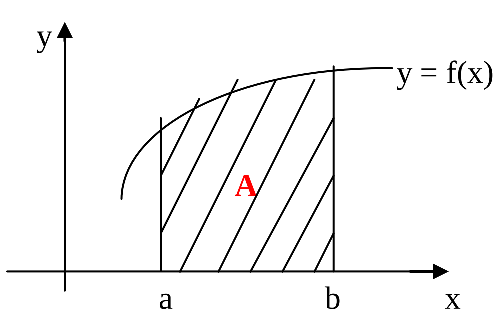
$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx, \text{ siendo } a < b$$

TEOREMA 6: Supongamos que la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b]. Si m y M son, respectivamente, los valores mínimo y máximo absoluto de la función en [a,b], de tal forma que se cumpla $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b - a)$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida de una función y = f(x) en un intervalos [a,b] se interpreta geométricamente como el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje x y las rectas x = a y x = b.



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces existe un número k en [a,b] tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(k)\,(b-a)$$

DEMOSTRACION:

Como f es continua en [a,b], entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en [a,b]. Sea m el valor mínimo absoluto que ocurre en $x = x_m$. Así, $f(x_m) = m$, $a \le x_m \le b$ (1)

Sea M el valor máximo absoluto que ocurre en $x = x_M$. Así, $f(x_M) = M$, $a \le x_M \le b$ (2)

Entonces tenemos:

$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

Por el teorema 7, tenemos:

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

Dividiendo por (b – a) y sabiendo que b – a es positivo pues b > a, se tiene:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

De las ecuaciones (1) y (2) $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$ y así tenemos:

$$f(x_m) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(x_M) \qquad (3)$$

De las desigualdades (3) y el teorema del valor intermedio, existe un número k en el intervalo cerrado que contiene a x_m y x_M tal que:

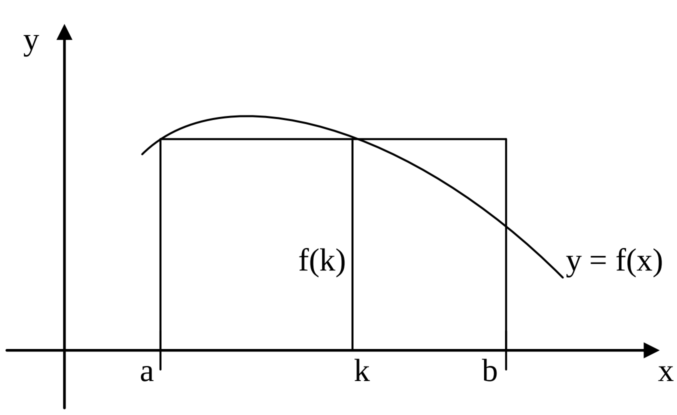
$$f(k) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(k)\,(b-a)$$

que es lo que se quería probar.

Para interpretar geométricamente este teorema consideramos $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b]$.
El teorema del valor medio establece que existe un número k en [a,b] tal que el área de la región limitada por la gráfica de la función y = f(x), el eje x y las rectas x = a y x = b es igual al área del rectángulo que tiene por base la amplitud del intervalo y por altura f(k).



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y sea F una función tal que F´(x) = f(x) para toda x en [a,b] . Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

DEMOSTRACION:

Si f es continua en todos los números de [a,b], sabemos que la integral definida:

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

con límite superior variable x, define una función F cuya derivada en [a,b] es f. Como por hipótesis F´(x) = f(x), es decir:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$, donde k es una constante cualquiera.

Haciendo en esta expresión x = b y x = a, se tiene:

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + k \qquad (1)$$

y

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + k \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro las relaciones (1) y (2), resulta:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

Como la segunda integral es igual a cero, tenemos:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

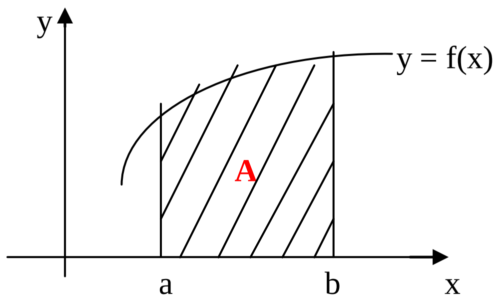
que es lo que se quería probar.

BOLILLA Nº 9

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

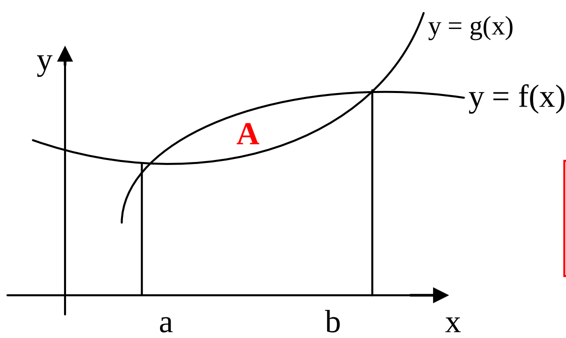
AREA DE UNA REGION PLANA

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y si f(x) ≥ 0 para toda x en [a,b], la medida del área de la región acotada por la gráfica de la función y = f(x), el eje x y las rectas x = a y x = b es igual a la integral definida en [a,b] de la función f(x), es decir:

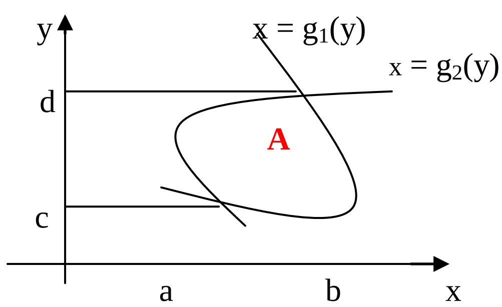


$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Consideramos ahora dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado [a,b] y tales que f(x) ≥ g(x) para toda x en [a,b]. El área de la región acotada por las dos curvas y = f(x) y y = g(x) y las dos rectas x = a y x = b es igual a la integral definida:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

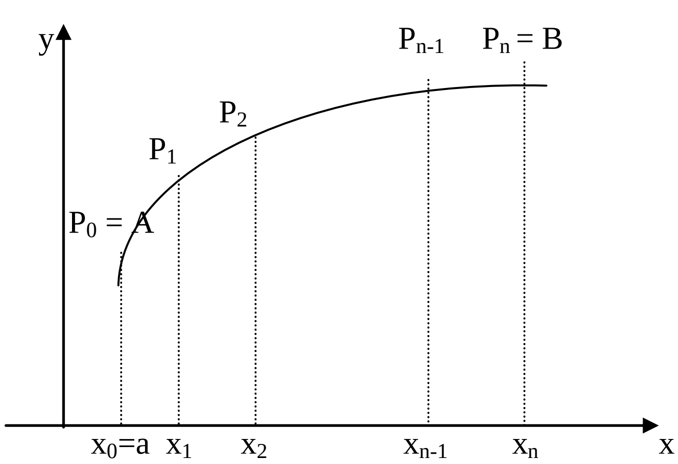


$$A = \int_c^d [g_1(y) - g_2(y)]\,dx$$

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA

Consideramos una función continua y = f(x) definida en un intervalo cerrado [a,b] y sea la curva AB su representación gráfica.

Para determinar la longitud de arco de la curva AB se procede en forma análoga al mecanismo utilizado para dar la definición de integral definida.



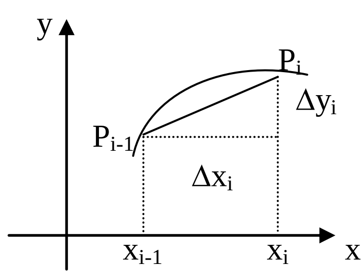
Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales o distintas y señalamos sobre la curva los puntos $P_0=A$, P_1, P_2, ... , $P_n = B$, correspondientes a las abscisas $x_0 = a$, x_1, x_2, ... , $x_n = b$, respectivamente.
Los puntos P_i determinan una poligonal $P_0P_1P_2...P_n$ cuya longitud se puede calcular por tratarse de una suma finita de segmentos rectilíneos, dicha longitud está dada por:

$$\text{Long. Poligonal} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

Calculando el límite de esta suma cuando el número de sumandos tiende a infinito (y cada uno de ellos tiende a cero) y si este límite existe y es finito, es la longitud L del arco AB.

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} \qquad (1)$$

Demostraremos ahora que existirá este límite si la función f(x) además de ser continua tiene derivada continua en [a,b]. En tal caso se dice que la curva es rectificable.



De la figura resulta, en base al teorema de Pitágoras:

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial es:

$$\Delta y_i = f\,'(\varepsilon_i)\,\Delta x_i$$

Por lo tanto:

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + [f\,'(\varepsilon_i)]^2\,\Delta x_i^2}$$

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\Delta x_i^2\,\{1 + [f\,'(\varepsilon_i)]^2\}}$$

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + [f\,'(\varepsilon_i)]^2}\;\Delta x_i$$

Teniendo en cuenta la relación (1), resulta:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f\,'(\varepsilon_i)]^2}\;\Delta x_i$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\;dx$$

si la función f ´(x) es continua, esta integral existe y permite calcular la longitud de arco de la curva AB.

VOLUMEN DE UN SOLIDO

DEFINICION 1: Sea la función f continua en el intervalo cerrado [a,b] y supongamos que $f(x) \geq 0$ para toda x en [a,b]. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica de la función y = f(x), el eje x y las rectas x = a y x = b, y si V es el volumen del sólido en unidades cúbicas, entonces:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

DEFINICION 2: Sean las funciones f y g continuas en el intervalo cerrado [a,b] y supongamos que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en [a,b]. Entonces si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor del eje x, la región limitada por las curvas y = f(x) y y = g(x) y las rectas x = a y x = b, se tiene:

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

LA FUNCION LOGARITMO NATURAL MEDIANTE INTEGRALES DEFINIDAS

La función logaritmo natural está definida por:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt \qquad \text{con } x > 0$$

BOLILLA Nº 10

TECNICAS DE INTEGRACION

METODO DE INTEGRACION POR SUSTITUCION

El método consiste en realizar un cambio de variable de manera de transformar una integral que no es inmediata en una inmediata.

1º) $\int (2x+3)^3\,dx = \int u^3 \dfrac{du}{2}$

$u = 2x + 3$
$du = 2\,dx$
$dx = \dfrac{du}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{u^4}{4} + c$

$= \dfrac{(2x+3)^4}{8} + c$

2º) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx = \int e^u \cos x \dfrac{du}{\cos x}$

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x\,dx$
$dx = du / \cos x$

$= \int e^u\,du$

$= e^u + c$

$= e^{\operatorname{sen} x} + c$

3º) $\int (3x^2-2)^3\,dx = \cancel{\int u^3\,du / 6x}$

En este ejemplo no es posible aplicar el método de sustitución pues la nueva integral debe quedar expresada en términos de la variable “u” solamente.

$u = 3x^2 - 2$
$du = 6x\,dx$
$dx = du / 6x$

4º) $\int \dfrac{6x-2}{3x^2-2x+5}\,dx = \int \dfrac{6x-2}{u}\,\dfrac{du}{6x-2}$.

$u = 3x^2 - 2x + 5$
$du = (6x-2)\,dx$
$dx = du / (6x-2)$

$= \int \dfrac{du}{u}$

$= \ln u + c$

$= \ln(3x^2 - 2x + 5) + c$

5º) $\int \dfrac{dx}{5+4x^2} = \int \dfrac{dx}{(\sqrt{5})^2 + (2x)^2} =$

$u = 2x$
$du = 2\,dx$
$dx = du / 2$

$= \int \dfrac{du/2}{(\sqrt{5})^2 + u^2} =$

$= \dfrac{1}{2} \int \dfrac{du}{(\sqrt{5})^2 + u^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u}{\sqrt{5}} + c$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{\sqrt{5}} + c$

METODO DE INTEGRACION POR PARTES

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

DEMOSTRACION:

Por fórmula de diferencial de un producto, se tiene:

$$d(u \,.\, v) = du \,.\, v + u\, dv$$

Integrando ambos miembros, resulta:

$$\int d(u \,.\, v) = \int v\, du + \int u\, dv$$

Por propiedad de integrales:

$$u \,.\, v = \int v\, du + \int u\, dv$$

Despejando la segunda de las integrales del segundo miembro se tiene:

$$u \,.\, v - \int v\, du = \int u\, dv$$

Es decir:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

que es lo que se quería probar.

Ejemplos:

1º) $\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$

$u = x$ $du = dx$ $dv = e^x\, dx$ $v = \int e^x\, dx$ $v = e^x$	$= x\, e^x - e^x + c$

2º) $\int x^2\, e^{2x}\, dx = x^2\, \dfrac{e^{2x}}{2} - \displaystyle\int \dfrac{e^{2x}}{2}\, 2x\, dx$

$u = x^2$ $du = 2x\, dx$ $dv = e^{2x}\, dx$ $v = \int e^{2x}\, dx$ $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$	$u = x$ $du = dx$ $dv = e^{2x}\, dx$ $v = \int e^{2x}\, dx$ $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$	$= \dfrac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} - \displaystyle\int x\, e^{2x}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} - \left[x\, \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} - \frac{1}{2}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} - \frac{1}{2}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, \frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2\, e^{2x} - \frac{1}{2}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{4}\, e^{2x} + c$$

3º) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x\, (- \cos x) - \int - \cos x\, e^x\, dx$

$u = e^x$ $du = e^x\, dx$ $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$ $v = - \cos x$	$u = e^x$ $du = e^x\, dx$ $dv = \cos x\, dx$ $v = \int \cos x\, dx$ $v = \operatorname{sen} x$	$= - e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$ $= - e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx$ $= - e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \longrightarrow$

Esta integral es la que se quiere resolver. **Cuando esto sucede se dice que la integral es cíclica**

Luego:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + c$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} x + c$$

METODO DE INTEGRACION POR COMPLETAMIENTO DE CUADRADOS

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{2\,[\,(x - 5/4)^2 + 23/16]} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x - 5/4)^2 + 23/16} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{23}/4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{23}/4}\ \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}/4} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{23}/2}\ \operatorname{arctg} \frac{4u}{\sqrt{23}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{23}/2}\ \operatorname{arctg} \frac{4(x - 5/4)}{\sqrt{23}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{23}/2}\ \operatorname{arctg} \frac{4x - 5}{\sqrt{23}} + c$$

C.A.

$$2x^2 - 5x + 6 = 2(x^2 - 5/2\,x + 3)$$
$$= 2\,(x^2 - 5/2\,x + 25/16 - 25/16 + 3)$$
$$= 2\,[(x^2 - 5/2\,x + 25/16) + 23/16]$$
$$= 2\,[\,(x - 5/4)^2 + 23/16]$$

$u = x - 5/4$

$du = dx$

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

Al integrar una expresión de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

lo primero que debemos tener en cuenta es el grado del numerador con respecto al grado del denominador.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador se realiza la división de polinomios, es decir:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \qquad \text{donde grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

Por definición de división se verifica:

$$P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x) \qquad \text{donde grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

Dividiendo ambos miembros en Q(x), se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{Q(x)}\,C(x)}{\cancel{Q(x)}} + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{donde grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{donde grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

Integrando ambos miembros, resulta:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int C(x)\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{(2)} \qquad \text{donde grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

La integral (1) se resuelve aplicando el método de descomposición.
Para resolver una integral de la forma (2) se aplica el método de descomposición en fracciones simple, se presentan cuatro casos, en todos ellos lo **primero** que se debe hacer es **factorear el denominador**.

PRIMER CASO: **El denominador contiene factores lineales y ninguno se repite**.

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)}\,dx =$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$2x+1 = A(x-3)+B(x+2)$$

Si $x = -2 \Rightarrow 2(-2)+1 = A(-2-3) \Rightarrow -3 = -5A \Rightarrow A = 3/5$

Si $x = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 1 = B(3+2) \Rightarrow 7 = 5B \Rightarrow B = 7/5$

Luego:

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3/5}{x+2} + \frac{7/5}{x-3}$$

Integrando ambos miembros se tiene:

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \frac{3/5}{x+2}\,dx + \int \frac{7/5}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{3}{5}\ln(x+2) + \frac{7}{5}\ln(x-3) + c$$

C.A.

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+2)$$

$u = x+2 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x-3)$$

$u = x-3 \Rightarrow du = dx$

SEGUNDO CASO: **El denominador contiene factores lineales y alguno se repite.**

$$\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)^2}\,dx =$$

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+2) + C(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)^2}$$

$$3x - 2 = A(x+1)^2 + B(x+2) + C(x+1)(x+2)$$

Si $x = -2 \Rightarrow 3(-2) - 2 = A(-2+1)^2 \Rightarrow -8 = A \Rightarrow A = -8$

Si $x = -1 \Rightarrow 3(-1) - 2 = B(-1+2) \Rightarrow -5 = B \Rightarrow B = -5$

Si $x = 0 \Rightarrow 3 \, . \, 0 - 2 = -8(0+1)^2 + (-5)(0+2) + C(0+1)(0+2)$
$\Rightarrow -2 = -8 - 10 + 2C \Rightarrow 2C = 8 + 10 - 2 \Rightarrow 2C = 16 \Rightarrow C = 8$

Luego:

$$\frac{3x - 2}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{-8}{x+2} + \frac{-5}{(x+1)^2} + \frac{8}{x+1}$$

Integrando ambos miembros se tiene:

$$\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{-8}{x+2}\,dx + \int \frac{-5}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{8}{x+1}\,dx$$

$$= -8\int \frac{dx}{x+2} - 5\int \frac{dx}{(x+1)^2} + 8\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -8\ln(x+2) - 5\,\frac{-1}{x+1} + 8\ln(x+1) + c$$

$$= -8\ln(x+2) + \frac{5}{x+1} + 8\ln(x+1) + c$$

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+2)$$
$u = x + 2 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}$$
$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+1)$$
$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

TERCER CASO: El denominador contiene factores cuadráticos y ninguno se repite

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$2x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)$$

Si $x = -2 \Rightarrow 2(-2) + 1 = A[(-2)^2 + 1] \Rightarrow -3 = 5A \Rightarrow A = -3/5$

Si $x = 0 \Rightarrow 2\ 0 + 1 = -3/5\,(0^2 + 1) + (B \, . \, 0 + C)(0+2) \Rightarrow 1 = -3/5 + 2C \Rightarrow 1 + 3/5 = 2C \Rightarrow 8/5 = 2C \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 4/5$

Si $x = 1 \Rightarrow 2\ 1 + 1 = -3/5\,(1^2 + 1) + (B.1 + 4/5)(1+2) \Rightarrow 3 = -6/5 + 3B + 12/5 \Rightarrow 3 + 6/5 - 12/5 = 3B \Rightarrow$
$\Rightarrow 9/5 = 3B \Rightarrow B = 3/5$

Luego:

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-3/5}{x+2} + \frac{3/5x + 4/5}{x^2+1}$$

Integrando ambos miembros, se tiene

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \int \frac{-3/5}{x+2}\,dx + \int \frac{3/5x+4/5}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{5}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{3}{5}\ln(x+2) + \frac{3}{5}\,\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{4}{5}\operatorname{arctg} x + c$$

$$= -\frac{3}{5}\ln(x+2) + \frac{3}{10}\ln(x^2+1) + \frac{4}{5}\operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+2)$$

$u = x + 2 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{x\ du/(2x)}{u} = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$= \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = du / (2x)$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$$

CUARTO CASO: **El denominador contiene factores cuadráticos y alguno se repite**

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Se sigue el mismo mecanismo aplicado en el caso 3 para determinar los valores de las constantes A, B, C, D y E. Luego se procede en forma análoga al caso anterior.

INTEGRACION POR SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

El método más corto de integrar expresiones que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ es efectuar un cambio de variables como sigue:

a) Cuando ocurre $\sqrt{a^2 - u^2}$, hacer la sustitución u = a sen z

b) Cuando ocurre $\sqrt{u^2 + a^2}$, hacer la sustitución u = a tg z

c) Cuando ocurre $\sqrt{u^2 - a^2}$, hacer la sustitución u = a sec z

En cada caso el sigo radical desaparece.

En efecto:

a) $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - (a\,\mathrm{sen}\,z)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2 z} = \sqrt{a^2\,(1 - \mathrm{sen}^2 z)} = a\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 z} = a\cos z$

b) $\sqrt{u^2 + a^2} = \sqrt{(a\,\mathrm{tg}\,z)^2 + a^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2 z + a^2} = \sqrt{a^2\,(\mathrm{tg}^2 z + 1)} = a\sqrt{\mathrm{tg}^2 z + 1} = a\sec z$

c) $\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec z)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 z - a^2} = \sqrt{a^2\,(\sec^2 z - 1)} = a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\,\mathrm{tg}\,z$

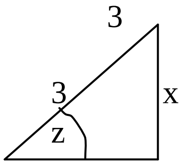
Ejemplo:

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{9 - (3\,\mathrm{sen}\,z)^2}\ 3\cos z}{(3\,\mathrm{sen}\,z)^2}\,dz = \int \frac{\sqrt{9 - 9\,\mathrm{sen}^2 z}\ 3\cos z}{9\,\mathrm{sen}^2 z}\,dz =$$

$x = 3 \operatorname{sen} z$

$dx = 3 \cos z \, dz$

$\operatorname{sen} z = \dfrac{x}{3}$



$\sqrt{9 - x^2}$

$\operatorname{cotg} z = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$

$z = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{3}$

$$= \int \frac{\sqrt{9(1 - \operatorname{sen}^2 z)}\; 3 \cos z \, dz}{9 \operatorname{sen}^2 z} = \int \frac{3\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z}\; 3 \cos z \, dz}{9 \operatorname{sen}^2 z}$$

$$= \int \frac{9 \cos z \;\cos z \, dz}{9 \operatorname{sen}^2 z} = \int \frac{9 \cos^2 z}{9 \operatorname{sen}^2 z} \, dz = \int \operatorname{cotg}^2 z \, dz =$$

$$= \int (\operatorname{cosec}^2 z - 1) \, dz = \int \operatorname{cosec}^2 z \, dz - \int dz = -\operatorname{cotg} z - z + c$$

$$= -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + c$$

INTEGRALES DE PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

CAS0 1: Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \; du$

En el caso en que m o n sea un número entero positivo impar, no importa lo que sea el otro, esa integración puede practicarse por medio de transformaciones sencillas y aplicando la fórmula:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Por ejemplo, si m es impar, escribimos:

$$\operatorname{sen}^m u = \operatorname{sen}^{m-1} u \; \operatorname{sen} u$$

Entonces, puesto qiue m – 1 es par, el primer término del segundo miembro será una potencia de $\operatorname{sen}^2 u$ y podremos expresarlo en potencias de cos2 u sustituyendo $\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$
Entonces esta integral toma la forma:

$$\int (\text{suma de términos que contienen } \cos u) \operatorname{sen} u \, du$$

Esta integral se resuelve aplicando el método de sustitución, donde v = cos u.

Análogamente se procede cuando n es impar.

CASO 2: Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n u \, du$ o $\int \operatorname{cotg}^n u \, du$

Cuando n es un número entero positivo, estas integrales se integran fácilmente usando un mecanismo similar al caso anterior:

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^{n-2} u (\sec^2 u - 1)$$

o

$$\operatorname{cotg}^n u = \operatorname{cotg}^{n-2} u \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cotg}^{n-2} u (\operatorname{cosec}^2 u - 1)$$

CASO 3: Integrales de la forma $\int \sec^n u \, du$ o $\int \operatorname{cosec}^n u \, du$

Las integrales de esta forma se resuelven fácilmente cuando n es un número entero positivo par, el primer paso es escribir:

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\sec^2 u)^{(n-2)/2} \sec^2 u = (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u$$

o

$$\operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u = (\operatorname{cosec}^2 u)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 u = (\operatorname{cotg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 u$$

CASO 4: Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u \, du$ o $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u \, du$

Cuando n es un número positivo par, procedemos como en el caso anterior.

CASO 5: Cálculo de integrales de la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u \, du$ por medio de ángulos múltiplos

Cuando m o n son números impares enteros y positivos el método más corto es el del caso 1.Cuando m y n son ambos números pares enteros y positivos la expresión diferencial dada puede transformarse por sustituciones trigonométricas en una expresión que contiene los senos y cosenos de ángulos múltiplos. Con este fin empleamos las siguientes fórmulas:

$$\text{sen}\, u \cos u = \tfrac{1}{2} \text{sen}\, 2u$$

$$\text{sen}^2 u = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2u$$

$$\cos^2 u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2u$$

CASO 6: Integrales de la forma:

$$\int \text{sen}\, mx \, \cos nx \, dx \qquad m \neq n$$

$$\int \text{sen}\, mx \, \text{sen}\, nx \, dx \qquad m \neq n$$

$$\int \cos mx \, \cos nx \, dx \qquad m \neq n$$

Por fórmulas trigonométricas:

$$\text{sen}\, mx \, \cos nx = \tfrac{1}{2} \text{sen}\,(m+n)x + \tfrac{1}{2} \text{sen}\,(m-n)\, x$$

Por lo tanto:

$$\int \text{sen}\, mx \, \cos nx \, dx = \tfrac{1}{2} \int \text{sen}\,(m+n)\, x \, dx + \tfrac{1}{2} \int \text{sen}\,(m-n)\, x \, dx$$

$$= \frac{-\cos (m+n)\, x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)\, x}{2(m-n)} + c$$

Análogamente:

$$\int \text{sen}\, mx \, \text{sen}\, nx \, dx = \frac{-\text{sen}\,(m+n)\, x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}\,(m-n)\, x}{2(m-n)} + c$$

$$\int \cos mx \, \cos nx \, dx = \frac{\text{sen}\,(m+n)\, x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}\,(m-n)\, x}{2(m-n)} + c$$

BOLILLA Nº 11

FORMAS INDETERMINADAS. INTEGRALES IMPROPIAS Y FORMULA DE TAYLOR

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

Si f y g son dos funciones tales que:

a) f y g son continuas en el intervalo cerrado [a,b]
b) f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a,b)
c) Para toda x en el intervalo abierto (a,b), $g´(x) \neq 0$.

Entonces existe un número z en el intervalo abierto (a,b) tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f´(z)}{g´(z)}$$

DEMOSTRACION:

Primero demostramos que $g(b) \neq g(a)$

La demostración la hacemos por el absurdo, es decir suponemos que g(b) = g(a).
Como g cumple las dos condiciones de la hipótesis del teorema del valor medio, existe algún número c en (a,b) tal que:

$$g´(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Como hemos supuesto que g(b) = g(a), entonces g(b) – g(a) = 0, por lo tanto g ´(c) = que contradice la condición tres de la hipótesis ya que $g´(x) \neq 0$ en (a,b), al tener una contradicción de la hipótesis se deduce que la suposición no puede ser cierta, entonces $g(b) \neq g(a)$ y consecuentemente $g(b) - g(a) \neq 0$.

Ahora consideramos la función h definida por:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

Vamos a demostrar que h cumple las condiciones de la hipótesis del teorema del Rolle: las dos primeras condiciones se cumplen pues f(x) y g(x) son funciones continuas y diferenciables, por lo tanto al ser h(x) restas de funciones continuas y diferenciables es también una función continua y diferenciable.

Calculamos ahora h(a) y h(b):

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(a) - g(a)] = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Por lo tanto se cumplen las tres condiciones de la hipótesis del teorema del Rolle, por lo tanto existe un número z en (a,b) tal que $h´(z) = 0$.

Como h ´(x) es:

$$h´(x) = f´(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g´(x)$$

Reemplazando en esta derivada x por z, se tiene:

$$h´(z) = f´(z) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g´(z) = 0$$

Es decir:

$$f´(z) = \frac{f(b) - f(a)}{} g´(z)$$

g(b) – g(a)

O sea:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

que es lo que se quería demostrar.

El teorema del valor medio es un caso particular del teorema de Cauchy en el caso en que g(x) = x.

FORMAS INDETERMINADAS

Cuando una función , para ciertos valores de la variable independiente toma una de estas formas:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty \qquad \infty - \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

se dice que es una forma indeterminada.

REGLA DE L'HOSPITAL

Sean f y g dos funciones diferenciables en un intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número a en I. Supongamos que para toda $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$. Entonces, si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \ \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = 0, \text{ y si } \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

Concluimos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

DEMOSTRACION:

Como en la hipótesis no se supone que f y g están definidas en a, consideramos dos nuevas funciones F y G, para las cuales:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad (1)$$

Sea b el extremo derecho del intervalo abierto I que se indica en la hipótesis. Como ambas funciones f y g son diferenciables en I excepto posiblemente en a, concluimos que ambas funciones F y G son diferenciables en el intervalo (a,x], donde a < x < b. Por lo tanto F y G son continuas en el intervalo (a,x]. Las funciones F y G son también continuas a la derecha de a ya que:

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = F(a) \text{ y}$$

$$\lim_{x \to a^+} G(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 = G(a)$$

Por lo tanto F y G son continuas en el intervalo cerrado [a,x]. Así, F y G cumplen las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo cerrado [a,x].

Por lo tanto:

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)} \qquad (2)$$

Donde z es algún número tal que a < z < x.

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{f(x)}{} = \frac{f'(x)}{}$$

g(x) g ´(x)

Como a < z < x, concluimos que cuando $x \to a^+$, $z \to a^+$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f´(x)}{g´(x)} = \lim_{z \to a^+} \frac{f´(z)}{g´(z)}$$

Por hipótesis el límite en el lado derecho es L. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f´(x)}{g´(x)}$$

Lo cual prueba el caso 1.
La demostración del caso dos ($x \to a^-$) es análogo al anterior.
La demostración del caso 3 ($x \to a$) se basa en los resultados de los casos anteriores.

Por lo tanto queda demostrado el teorema.

La regla de L´Hospital se aplica a las formas indeterminadas 0/0 e ∞/∞.

Es decir:

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se debe tener en cuenta que se deriva numerador y denominador por separado, no se debe derivar como cociente (salvo que alguna de esas funciones sea un cociente).
Una vez derivado numerador y denominador se debe analizar si la expresión obtenida sigue siendo una indeterminación, en este caso antes de derivar nuevamente hay que analizar para ver si es posible llevarla a una expresión más simple y recién derivar nuevamente.

FORMA 0 / 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sec x \sec x \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \sec^2 x \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{\cos x} = 2 . 1 = 2$$

FORMA ∞ / ∞

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0$$

FORMA 0 . ∞

Si $\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = 0 . \infty$
Para levantar esta indeterminación se aplica una de las siguientes transformaciones:

$f(x) . g(x) = \dfrac{f(x)}{\;1\;}$ o bien $f(x) . g(x) = \dfrac{g(x)}{\;1\;}$.
.

g(x) f(x)

Para determinar cuál de estas dos transformaciones aplicar se debe tener en cuanta aquella en la que sea posible transformar la expresión 1 / g(x) o 1 / f(x) para evitar derivar la misma como cociente, si no es posible esta transformación se debe derivar como tal.

$$\lim_{x \to 1} (1 - x)\, \mathrm{tg}(\pi x / 2) = 0 \, . \, \infty$$

$$\lim_{x \to 1} (1 - x)\, \mathrm{tg}(\pi x / 2) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}(\pi x / 2)}} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\mathrm{cotg}(\pi x / 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-(\pi/2)\,\mathrm{cosec}^2(\pi x / 2)} =$$

$$= \frac{-1}{-\pi / 2} = \frac{2}{\pi}$$

FORMA ∞ - ∞

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$$

Para levantar esta indeterminación se aplican transformaciones algebraicas para llevarla a la forma 0/0 ó ∞/∞ y poder aplicar la regla de L'Hospital.

a) $\lim_{x \to \pi/2} (\mathrm{tg}\, x - \sec x) = \infty - \infty$

$$\lim_{x \to \pi/2} (\mathrm{tg}\, x - \sec x) = \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\mathrm{sen}\, x - 1}{\cos x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{-\mathrm{sen}\, x} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) $\lim_{x \to \infty} (e^x - x^2) = \infty - \infty$

$$\lim_{x \to \infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \to \infty} \left(e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) \right) = \lim_{x \to \infty} e^x \, . \, \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x \to \infty} e^x \left(\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} e^x \left(1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \right) = \lim_{x \to \infty} e^x \left(1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} \right) = \lim_{x \to \infty} e^x \,(1 - 0) = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

FORMAS 1^∞, 0^0, ∞^0

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Para levantar esta indeterminación se calcula el logaritmo natural del límite dado, se aplica propiedad de límite y de logaritmo. Con esto se llega a la forma 0 . ∞ a la cual se le efectúa la transformación correspondiente para poder aplicar la Regla de L'Hospital. Por último, el limite dado se obtiene aplicando la definición de logaritmo.

$$\ln \left[\lim_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\ln [f(x)]^{g(x)} \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} g(x) \ln [f(x)]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln [f(x)]}{1/g(x)} \quad \text{ó} \quad = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{1/\ln[f(x)]}$$

$$= k$$

Luego:

$$\ln \left[\lim_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} \right] = k \Rightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + \mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{cotg} x} = 1^\infty$$

$$\ln \left[\lim (1 + \mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{cotg} x} \right] = \lim \left[\ln (1 + \mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{cotg} x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} [\cot g\, x \ \ln(1 + \operatorname{sen} x)]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{1/\cot g\, x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}{\sec^2 x}$$

$$= 1$$

Luego:

$$\ln\left[\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot g x}\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot g x} = e^1 = e$$

FORMULAS DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Dada la función y = f(x), un valor x = a y un número n que representa el orden de una derivada, entonces:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)}$$

Donde $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$ que representa el residuo o resto

Si se toma el caso particular x = a = 0, se tiene:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + R_n(x)}$$

Donde $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}$ que representa el residuo o resto

La primera expresión de denomina Fórmula de Taylor y la segunda es la Fórmula de Mac Laurin.

1º) Aplicar la fórmula de Taylor para obtener el polinomio de grado 3 con residuo de la función y = ln x en el valor x = 1.

$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = 1/x = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 2$

$f^{iv}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(c) = -6c^{-4}$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{}(x-1) + \frac{f''(1)}{}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{}(x-1)^3 + \frac{f^{iv}(c)}{}(x-1)^4$$

1! 2! 3! 4!

$$\ln x = 0 + 1\,(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2\,(x-1)^3}{6} + \frac{-6c^{-4}}{24}(x-1)^4$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}c^{-4}(x-1)^4$$

2º) Desarrollar la función f(x) = sen x por la fórmula de Mac Laurin para n = 3

$f(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow f(0) = \text{sen } 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\text{sen } x \quad \Rightarrow f''(0) = -\text{sen } 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{iv}(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow f^{iv}(c) = \text{sen } c$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(c)}{4!}x^4$$

$$\text{sen } x = 0 + 1\,x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 + \frac{\text{sen } c}{24}x^4$$

$$\text{sen } x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}\text{sen } c\, x^4$$

INTEGRALES IMPROPIAS

Se dice que una integral definida es impropia si uno o los dos límites de integración son infinitos.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx$

Si estos límites existen se dice que la integral impropia es convergente, si no existen o son infinitos se dice que la integral es divergente.

$$\int_{0}^{\infty} x\,3^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\,3^{-x}\,dx =$$

$u = x$
$du = dx$

$dv = 3^{-x}\,dx$
$v = \int 3^{-x}\,dx$
$v = -\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x\,3^{-x}}{\ln 3}\Bigg|_0^b - \int_0^b \frac{-3^{-x}}{\ln 3}\,dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x\,3^{-x}}{\ln 3}\Bigg|_0^b + \frac{1}{\ln 3}\int_0^b 3^{-x}\,dx \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x\,3^{-x}}{\ln 3}\Bigg|_0^b + \frac{1}{\ln 3}\,\frac{-3^{-x}}{\ln 3}\Bigg|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x\,3^{-x}}{\ln 3}\Bigg|_0^b - \frac{1}{(\ln 3)^2}\,3^{-x}\Bigg|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\left(\frac{b\,3^{-b}}{\ln 3} - \frac{0\,3^{-0}}{\ln 3} \right) - \frac{1}{(\ln 3)^2}\left(3^{-b} - 3^{-0}\right) \right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[- \frac{b\, 3^{-b}}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\, 3^{-b} + \frac{1}{(\ln 3)^2} \right]$$

$$= - \lim_{b \to \infty} \frac{b}{3^{b} \ln 3} - \lim_{b \to \infty} \frac{1}{3^{b} (\ln 3)^2} + \lim_{b \to \infty} \frac{1}{(\ln 3)^2} \;.$$

$$= - \lim_{b \to \infty} \frac{1}{3^{b} (\ln 3)^2} - 0 + \frac{1}{(\ln 3)^2} \;.$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{(\ln 3)^2} \;.$$

$$= \frac{1}{(\ln 3)^2} \;.$$

BOLILLA Nº 12

SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS REALES

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Los números en el rango de la sucesión se llaman elementos de la misma. Si el n – ésimo elemento está dado por f(n), entonces la sucesión es el conjunto de parejas ordenadas de la forma (n,f(n)), donde n es un entero positivo.

Como el dominio de toda sucesión es el mismo, podemos usar la notación $\{f(n)\}$ para denotar una sucesión. También podemos usar la notación $\{a_n\}$ donde $a_n = f(n)$.

DEFINICION:

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que tiene límite L si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo entero $n > N$ y escribimos:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

DEFINICION:

Si una sucesión $\{a_n\}$tiene límite se dice que es convergente y decimos que a_n converge a ese límite. Si la sucesión no es convergente se dice que es divergente.

TEOREMA:

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces:

a) La sucesión constante $\{c\}$ tiene a c como su límite

b) $\lim_{n \to \infty} c\, a_n = c \lim_{n \to \infty} a_n$

c) $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$

d) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$

e) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} bn}$.

SUCESIONES MONOTONAS Y ACOTADAS

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es:

a) Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n

b) Decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n

Si una sucesión es creciente o si es decreciente se llama monótona.

Si $a_n < a_{n+1}$ tenemos una sucesión estrictamente creciente, si $a_n > a_{n+1}$ tenemos una sucesión estrictamente decreciente.

DEFINICIÓN:

El número C se llama una cota inferior de la sucesión $\{a_n\}$ si $c \leq a_n$ para todo entero positivo n, y el número D se llama una cota superior de la sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \leq D$ para todo entero positivo n.

DEFINICION:

Si A es una cota inferior de una sucesión $\{a_n\}$ y si A tiene la propiedad de que para cada cota inferior C de $\{a_n\}$ $C \leq A$, entonces A se llama la máxima cota inferior de la sucesión. Análogamente, si B es una cota superior de una sucesión $\{a_n\}$ y si B tiene la propiedad de que para cada cota superior D de $\{a_n\}$ $B \leq D$, entonces B se llama la mínima cota superior de la sucesión.

DEFINICION:

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada sí y sólo sí tiene una cota superior y una cota inferior

SERIES INFINITAS DE TERMINOS POSITIVOS

Se llama serie a la suma de los infinitos términos de una sucesión. Una serie tiene la forma general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots\ldots$$

donde se define: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ y se denomina la n-ésima suma parcial de los términos de la serie.

DEFINICION:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie infinita dada, y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales que define esta serie.
Entonces si existe $\lim_{n \to \infty} Sn$ y es igual a S, decimos que la serie dada es convergente y que S es la suma de la serie infinita dada.

Si ese límite no existe, se dice que la serie es divergente, y en este caso la serie no tiene suma.

Si una serie infinita tiene una suma S, decimos que la serie converge a S.

CRITERIO DE LA CONDICION NECESARIA:

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Si esa serie es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

Si $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie es divergente

SERIES PARTICULARES:

SERIE GEOMETRICA

La serie geométrica tiene la forma general:

$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1}$

- si $|q| < 1$ la serie converge, su n-ésima suma parcial es $Sn = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$ y $S = \dfrac{a}{1-q}$.
- si $|q| \geq 1$ diverge (no tiene suma)

Ejemplos: determinar si las siguientes series geométricas son convergentes o divergentes

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

El valor de la razón q se obtiene como cociente entre un término y el término anterior, es decir:

$q = \frac{1/2}{1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} < 1$ por lo tanto la serie es convergente y la expresión general de esta serie es:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) $3 + 5 + \frac{25}{3} + \frac{125}{9} + \ldots$

$q = \frac{5}{3} > 1$ entonces la serie dada es divergente

SERIE p:

La serie p tiene la forma general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

si $p > 1$ la serie converge

si $p \leq 1$ la serie diverge

Ejemplo: determinar si las siguientes serie p son convergentes o divergentes

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

La serie dada toma la forma general:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ .$$

donde $p = 2 > 1$ por lo tanto la serie dada es convergente.

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \ldots$

Esta serie toma la forma general:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

donde $p = 1/2 < 1$, entonces la serie es divergente

SERIE ARMONICA:

La serie armónica tiene la forma general

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ que es siempre divergente

TEOREMA:

Sea c cualquier constante no nula.

a) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente y su suma es S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ también es convergente y su suma es $c \cdot S$

b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ también es divergente.

TEOREMA:

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ son series infinitas convergentes cuyas sumas son S y R respectivamente,

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + vn)$ es convergente y su suma es S + R

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - vn)$ es convergente y su suma es S - R

TEOREMA:

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + vn)$ es divergente.

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL CARÁCTER DE UNA SERIE

CRITERIO DE D´ALAMBERT:

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Si $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$
- si L < 1 la serie converge
- si L > 1 la serie diverge
- si L = 1 el criterio falla

Ejemplo:

Determinar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\,3^n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{(n+2)\,3^{n+1}}}{\frac{2}{(n+1)\,3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)\,3^n}{(n+2)\;3^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)\,3^n}{(n+2)\;3^n\,3} = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \frac{1}{3} < 1$$ entonces la serie dada es convergente

CRITERIO DE CAUCHY:

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$
- si L < 1 la serie converge
- si L > 1 la serie diverge
- si L = 1 el criterio falla

Ejemplo:

Determinar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{½} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}\right)^{½} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\right)^{½} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1,\text{ entonces la serie es convergente}$$

CRITERIO DE COMPARACION POR PASO AL LIMITE:

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ para determinar si es convergente o divergente la comparamos con una serie conocida (geométrica, p o armónica) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$ las dos series convergen o las dos divergen

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge

c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge

Ejemplo:

Determinar el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}.$$

La serie dada se puede escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n}.$$

La comparamos con la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie p, donde p = 2, por lo tanto es convergente

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{2} = 3$$

Por la parte a) del criterio de comparación, como el límite es un número positivo, las dos series convergen o las dos divergen, como:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces la serie dada también es convergente.

CRITERIO DE LA INTEGRAL DE CAUCHY:

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ para saber si es convergente o divergente tomamos la función $f(x) = u_x$ y calculamos:

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ →
- si la integral es convergente, entonces la serie dada es convergente
- si la integral es divergente, entonces la serie dada es divergente

SERIES ALTERNADAS:

Si $u_n > 0$ para todo entero positivo n, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n$ se denominan series alternadas.

CRITERIO PARA SERIES ALTERNADAS

Si los números $u_1, u_2, u_3, .., u_n, ..$ son alternadamente positivos y negativos, si $|u_{n+1}| < |u_n|$ y si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ es convergente.

DEFINICION:

Se dice que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente.

DEFINICION:

Una serie que es convergente pero no absolutamente convergente se dice que es condicionalmente convergente.

BOLILLA Nº 13

SERIES DE POTENCIAS

Una serie de potencias en x – a es una serie de la forma:

$$c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + ... + c_n (x - a)^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - a)^n \qquad (1)$$

Si x es un número particular, la serie de potencias se convierte en una serie infinita de términos constantes. Un caso particular se obtiene cuando a = 0 y la serie de potencias se convierte en una serie de potencias de x, la cual es:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \qquad (2)$$

Una serie de potencias en x puede converger para todos los valores de x, o para ningún valor con excepción de x = 0, o puede converger para algunos valores de x distintos de cero y ser divergente para otros valores.

Vamos a examinar la serie (2) sólo para el caso de ser los coeficientes tales que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = L$$

siendo L un número determinado. Aplicando el criterio de D´Alambert a la serie, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1} x}{c_n} = x \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = x L$$

Tenemos dos casos:

a) Si L = 0, la serie (2) será convergente para todos los valores de x, puesto que el límite es cero y por lo tanto menos que 1.
b) Si L no es cero, la serie será convergente cuando x L es numéricamente menor que 1, es decir:

$$-1 < x L < 1$$

$$-\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}.$$

Haciendo R = 1/L, se tiene:

$$-R < x < R$$

El número R se denomina radio de convergencia y el intervalo (-R, R) es el intervalo de convergencia.

Para la serie de potencias (1) el intervalo de convergencia es uno de los siguientes (a – R, a + R), [a – R, a + R], (a – R, a + R] o [a – R, a + R].

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES DE POTENCIAS

TEOREMA:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias que tiene radio de convergencia R > 0, entonces la serie dada por

$\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$ también tiene a R como radio de convergencia.

TEOREMA:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias que tiene radio de convergencia R > 0, entonces la serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2}$ también tiene a R como radio de convergencia.

TEOREMA:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es R > 0, entonces si f es la función

definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, f es integrable en todo subintervalo cerrado de (-R,R) y calculamos la integral de f integrando la serie de potencias dadas término a término, esto es , si x está en (-R,R), entonces:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

Además R es el radio de convergencia de la serie resultante.

SERIES DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Si f es la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \qquad (1)$$

cuyo radio de convergencia es R > 0 , f tiene derivadas de todos los órdenes en (-R,R). Decimos que una función tal es infinitamente diferenciable en (-R,R). Diferenciaciones sucesivas de la función (1) dan:

$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots \qquad (2)$

$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \dots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \dots \qquad (3)$

$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4 x + \dots + n(n-1)(n-2) c_n x^{n-3} + \dots \qquad (4)$

$f^{IV}(x) = 24c_4 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3) c_n x^{n-4} + \dots \qquad (5)$

etc. Haciendo x = 0 en todas estas relaciones, tenemos:

De (1)
$f(0) = c_0$

De (2)
$f'(0) = c_1$

De (3)
$f''(0) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = f''(0)/2 \Rightarrow c_2 = f''(0)/2!$

De (4)
$f'''(0) = 6c_3 \Rightarrow c_3 = f'''(0)/6 \Rightarrow c_3 = f'''(0)/3!$

De (5)
$f^{IV}(0) = 24c_4 \Rightarrow c_4 = f^{IV}(0)/24 \Rightarrow c_4 = f^{IV}(0)/4!$

En general tenemos: $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ Para todo entero positivo n. (6)

La fórmula (6) también se cumple para n = 0 si tomamos como $f^{(0)}(0) = f(0)$ y $0! = 1$

Así, de (1) y (6) podemos escribir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + ... \qquad (7)$$

En un sentido más general, consideramos la función f como una serie de potencias de (x – a), esto es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + ... + c_n (x-a)^n + ... \qquad (8)$$

si el radio de convergencia de esta serie es R, entonces f es infinitamente diferenciable en (a – R, a + R). Diferenciamos sucesivamente la función (8):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + 4c_4 (x-a)^3 + ... + n c_n (x-a)^{n-1} + ... \qquad (9)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 (x-a) + 12c_4 (x-a)^2 + ... + n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} + ... \qquad (10)$$

$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4 (x-a) + ... + n(n-1)(n-2) c_n (x-a)^{n-3} + ... \qquad (11)$$

$$f^{IV}(x) = 24c_4 + ... + n(n-1)(n-2)(n-3) c_n (x-a)^{n-4} + ... \qquad (12)$$

etc. Haciendo x = a en todas estas relaciones, tenemos:

De (8)
$f(a) = c_0$

De (9)
$f'(a) = c_1$

De (10)
$f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = f''(a)/2 \Rightarrow c_2 = f''(a)/2!$

De (11)
$f'''(a) = 6c_3 \Rightarrow c_3 = f'''(a)/6 \Rightarrow c_3 = f'''(a)/3!$

De (12)
$f^{IV}(a) = 24c_4 \Rightarrow c_4 = f^{IV}(a)/24 \Rightarrow c_4 = f^{IV}(a)/4!$

En general tenemos: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ para todo entero positivo n. (13)

La fórmula (13) también se cumple para n = 0 si tomamos como $f^{(0)}(a) = f(a)$ y 0! = 1

Así, de (8) y (13) podemos escribir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + ... \quad (14)$$

La serie dada en (8) se llama fórmula de Mac Laurin y la dada en (14) se llama fórmula de Taylor.
La fórmula (8) se puede considerar como un caso particular de la fórmula (14) cuan a = 0.