

6. ERRORES DEL TEODOLITO (y Estaciones Totales)

6.1. CONSIDERACIONES GENERALES¹

Los errores que afectan las lecturas angulares realizadas con un teodolito, tienen múltiples orígenes como consecuencia de los motivos o factores de donde provengan. El primero de estos factores, es el instrumental, cuya evaluación individual de sus variados y numerosos defectos, la magnitud que alcanzan y sus respectivas influencias son de preocupar y lo detallaremos. Simultáneamente se tendrá también en cuenta la incidencia de factores personales y las condiciones en que se opera, en aquellos errores donde estos adquieren especial importancia. Además de la presencia de otros elementos en la medición que son accesorias al mismo o bien se analizan por separado como es el caso de las señales o jalones. Cabe acotar que las siguientes evaluaciones también tienen vigencia para las Estaciones Totales en su parte destinada a la medición de ángulos.

Por bien construido que sea un aparato, y aún admitiendo una utilización del mismo extremadamente cuidadosa, será inevitable la participación de toda una serie de errores de muy diverso origen y denominación.

Dichos errores serán sistemáticos y siempre existirán. No obstante, los modernos teodolitos (y Estaciones Totales), si son bien utilizados y conservados, tienden a ser despreciables los errores sistemáticos y localizar el problema exclusivamente en los accidentales.

En todo trabajo topográfico los resultados obtenidos podrán asegurar si puede o no garantizar, dentro de las tolerancias preestablecidas.

Si los resultados son desfavorables, habrá que reconsiderar el método aplicado, por otro más preciso, que también debe ser magnificado, e incluso sustituir los aparatos en principio programados por otros de mayor precisión.

- **Defectos operativos y del teodolito.** Las deficiencias propias, como en todo instrumento, provienen de sus inevitables defectos, que siempre tienen en mayor o menor medida sus componentes. Se trata de imperfecciones constructivas o por el uso, producto del desgaste o mal trato. Estas deficiencias adquieren el carácter de error, o se las identifica como tal, cuando resultan del incumplimiento de los requisitos técnicos señalados en la descripción del instrumento, tanto para las partes en forma individual, como en la posición relativa (ensamble, montaje) entre las mismas.

Las deficiencias influyen de distintas maneras en las determinaciones angulares y según sean su incidencia, podrán ser de carácter **sistemático o accidental**.

Sistemáticas: es el caso de las imperfecciones del instrumental, cuyos efectos son siempre similares de acuerdo a parámetros o leyes que los relacionan con las causas que los provocan, ajustándose a la característica de controlables que identifican a los errores sistemáticos.

Gran parte de los errores originados, para su evaluación por sus características permiten algunas de las siguientes posibilidades: conocer su origen e individualizarlo; saber su comportamiento y poder controlarlo; determinar su magnitud; realizar su

¹ M. Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

corrección mecánica, modificando la posición relativa entre las partes que provocan el error o disponer de accesorios que lo corrijan y compensar su influencia en las lecturas, mediante métodos o procedimientos de medición.

Accidentales²: si seguimos el proceso de una observación, cada operación elemental realizada da lugar a un posible error accidental, que debe ser tenido en cuenta, a saber:

- Al poner el instrumento en estación, no quedará matemáticamente vertical el eje principal, ello da lugar a un error de verticalidad.
- La plomada, bastón centrador, o colimación con plomada óptica, no incidirá exactamente sobre el punto de estación, ni el jalón, mira o señal se situará perfectamente sobre el punto a visar, ello genera un error de dirección.
- Será imposible aceptar que la mira, señal o jalón se bisectan sin error en punterías azimutales con el hilo vertical del retículo, así como admitir que pueda hacerse pasar el hilo exactamente por un punto en punterías cenitales. Ello genera un error de puntería.
- Por perfecta que sea la digitalización de la lectura del ángulo de que se trate, siempre queda una fracción final a estima cuyo error de lectura hay que tener en cuenta.

Los cuatro errores actúan independientemente y su conjunto origina el error total. Desconocidos, como siempre, dichos errores accidentales verdaderos, calcularemos en sus valores aparentes, siguiendo la notación y metodología más usuales.

6.2. ERRORES AXIALES DEL TEODOLITO (y Estaciones Totales)

✓ Error de Colimación (c): *El eje de colimación no es perpendicular al eje Secundario (SS').*

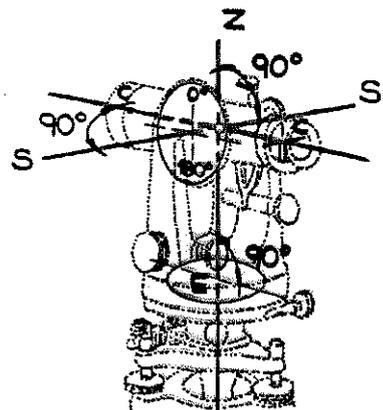
✓ Error de inclinación de eje secundario (i): *El eje Secundario (SS') no es perpendicular al eje principal (EZ).*

✓ Error de Verticalidad del eje principal (V): *El eje principal (EZ') no coincide con la vertical (EZ) teodolito)*

6.2.1. ERROR DE COLIMACIÓN (c) - BESSEL

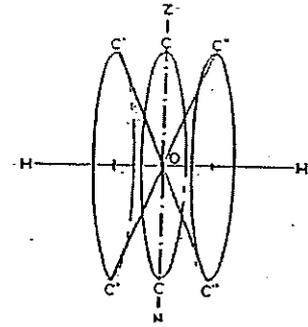
El eje de colimación C-C debe ser perpendicular al eje secundario (horizontal), es decir se habla de un error también llamado de **puntería c**, cuando la línea de puntería no es exactamente vertical al eje de basculamiento. Los fabricantes por lo general ajustan la línea de puntería lo más exactamente, pero no es posible eliminar todo el error. Un error restante (residual) es tan pequeño que las mediciones hechas con el teodolito o Estación Total, normalmente en una sola posición del círculo vertical, no son influenciadas. De no cumplirse esta condición, aparecerá un error instrumental denominado error de colimación, que afectará la medición de los ángulos horizontales, aunque esta condición viene garantizada por el fabricante.

Si giramos el anteojo de un instrumento sin error, su eje de colimación define un plano CC perpendicular al eje secundario HH, que contendrá, por otra parte, al eje principal



² M. Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

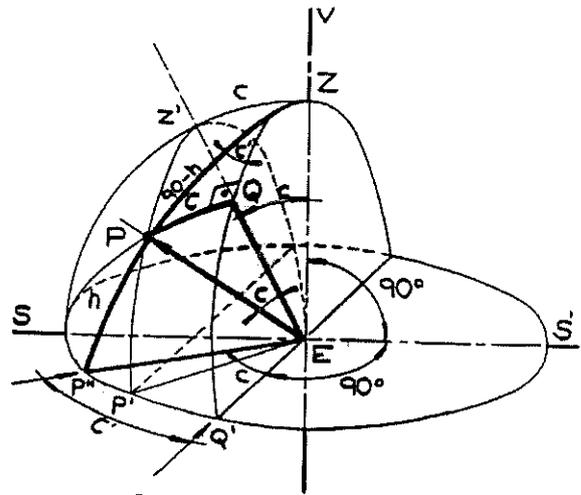
VV. En cambio, si el instrumento está afectado de este error, el giro citado generará las figuras cónicas C'OC' o C''OC'', actuando con círculo vertical a la izquierda (C.I.) y círculo vertical a la derecha (C.D.) Estas serán similares y simétricamente ubicadas respecto a la posición correcta, advirtiéndose que al desconocer el "sentido" del error, no se sabe cuál de esas posiciones corresponde a C.I. o C.D.



Si el instrumento tiene este error, para visar un punto, en lugar de hacerlo por el "meridiano" por CC lo podemos hacer solo con las posiciones definen los arcos C'C' o C''C'', y en consecuencia, la alidada deberá girarse a izquierda o derecha respecto a su posición correcta para lograr esa bisección, movimiento que alterará la lectura angular correspondiente.

Este giro variará en función de la magnitud del error "c" y el ángulo vertical "h" del punto observado, originando un error en la lectura del valor angular que denominaremos **influencia del error de colimación c'**. Para su estudio se considera en cada caso que el único error presente es el que se analiza.

• **Influencia del error de colimación:** Si no hubiera error, el eje de colimación describiría un plano vertical al rotar en torno al eje secundario, interceptando a una esfera de radio arbitrario con centro en E, según la circunferencia máxima ZQQ' (normal al plano del dibujo). En cambio, por efecto de "c", aquel genera una superficie cónica de vértice E que intercepta a dicha esfera según Z'PP' (circunferencia menor paralela a ZQQ'). En estas condiciones al bisectar un punto P, efectuamos una lectura sobre el limbo acimutal, que en rigor corresponde al punto Q. Si ahora suponemos ya corregido el error de colimación, sin



variar la posición de la alidada, el eje de colimación pasará por Q, y para bisectar nuevamente el punto P deberá girarse la alidada un ángulo c', que es precisamente la influencia que el error de colimación c tuvo en la lectura acimutal correspondiente a P, motivada por la incorrecta posición que ocupa la alidada para poder visar al punto. Ésta aumenta en la medida que lo hace el ángulo vertical **h** a partir de un valor mínimo **c** de arco cuando se visan puntos ubicados en el horizonte del instrumento. Para determinar la relación del error **c** y la influencia **c'**, con el paso por P de un arco de círculo máximo SPQ y de esta manera queda definido el triángulo esférico ZPQ rectángulo, cuya resolución aplicamos el teorema del seno:

$$\begin{aligned} \text{Sen } c' / \text{Sen } c &= \text{Sen } 90^\circ / \text{Sen } (90 - h) \\ \Rightarrow \text{Sen } c' &= \text{Sen } c / \text{Sen } (90 - h) = \text{Sen } c / \text{Cos } h \end{aligned}$$

Dada la pequeñez de los valores angulares c y c' reemplazamos los senos por los arcos, quedándonos finalmente:

$$c' \cong c \cdot \text{Sec } h$$

Analizando esta expresión, vemos que cuando se hacen observaciones en el horizonte donde el ángulo vertical

$$h=0^\circ \Rightarrow c' \cong c; \text{ si } h=45^\circ c' \cong c \times 1,41 \text{ y si } h=89^\circ c' \cong c \times 57$$

• **Verificación del error de colimación. Métodos**

Para saber si el teodolito o estación total tiene error de colimación se pueden aplicar distintos métodos, todos los cuales utilizan partes del instrumento para ese control y eventual cálculo o corrección del error.

Por lo tanto, los resultados en general no ponen de manifiesto solo el error de colimación, sino también los provenientes de otras componentes en juego.

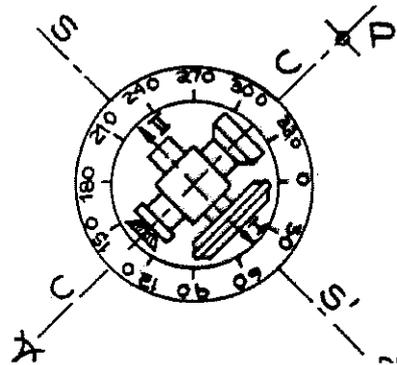
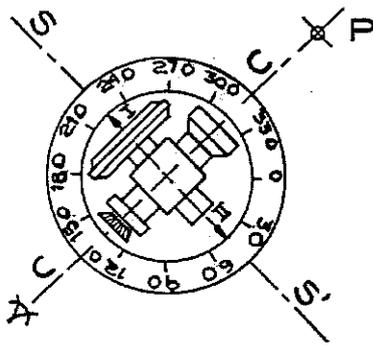
En primer lugar, para atenuar esos problemas las operaciones se hacen con visuales horizontales, en particular porque el error c es igual a la influencia c' . Los métodos a desarrollar son los siguientes:

1º Método. Visuales hacia un punto P y lecturas CI y CD sobre el círculo. Es el método más sencillo y consiste en visar cuidadosamente un punto bien definido P ubicado en "el horizonte".

Se opera con CI y CD obteniendo respectivamente L_i y L_d ; si estas son "iguales" (difieren en 180°) no habrá error de lo contrario del esquema de la figura de una vista "en planta" tendremos:

Círculo vertical izquierda

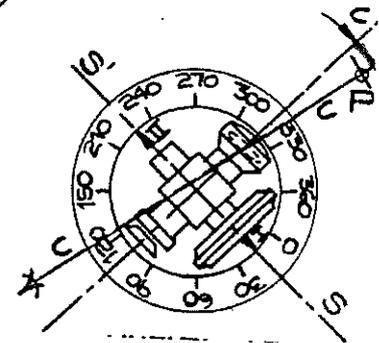
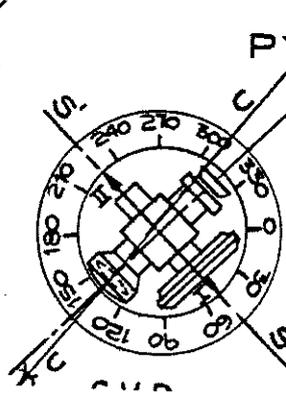
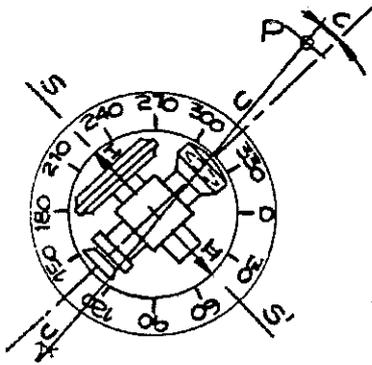
Círculo vertical derecha, giro de la alidada 180° y vuelta de campana del anteojo



$$\text{Lectura Circ. Izq.} - \text{Lectura Circ. Der.} = 180^\circ$$

$$225^\circ 00' 00'' - 45^\circ 00' 00'' = 180^\circ \Rightarrow \exists c$$

Eje colimación \perp al eje secundario $\therefore \exists c$ (eje colimación no perpendicular al secundario)



Lectura Círculo Vert. Izquierda
Lect CI = 226°00'00";

Giro de la alidada 180°
Círc. Vert. Der. giro Alidada 180°

Vuelta de campana antejo
Vuelta de campana del antejo, Lect. CD = 44°00'00"

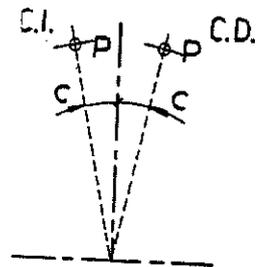
Círculo Vertical a la Izquierda
Círculo Vertical a la Derecha
Restando

$$\text{Lect.v} = L_{CI} + c$$

$$\text{Lect.v} = L_{CD} \pm 180^\circ - c$$

$$L_{CI} + c - (L_{CD} \pm 180^\circ - c) = 0$$

$$\Rightarrow 2c = 2c' = L_{CD} \pm 180^\circ - L_{CI}$$



$$\text{Lect CI} - \text{Lect. CD} = 226^\circ 00' 00'' - 44^\circ 00' 00'' = 182^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow \exists c$$

$$\therefore \text{Lect CI} - \text{Lect. CD} - 180^\circ = 2c = +2^\circ \Rightarrow c = +1^\circ \text{ (error)}$$

Sumando

$$\text{Lect. } \alpha_p = \frac{\text{Lect. CI} + \text{Lect. CD} \pm 180^\circ}{2} = L_v$$

$$\therefore \text{Lect. } \alpha_p = 225^\circ$$

El resultado de c estará afectado por errores menores producto de la visación y las lecturas sobre el círculo.

2º Método. Con lecturas CI y CD sobre el círculo y en una regla graduada. Consiste en tomar lecturas lineales sobre una regla graduada colocada horizontal, a la altura del instrumento y a una distancia d . El procedimiento consiste en visar la regla con C.I. tomando la lectura P' sobre la misma y L_{CI} sobre el círculo. Luego con CD se provoca sobre el círculo la lectura $L_{CD} = L_{CI} \pm 180^\circ$ tomando la lectura P'' sobre la regla. Si P' y P'' coinciden el instrumento carece de error, si no se lo puede calcular teniendo en cuenta:

$$\text{tg } c' = \text{tg } \frac{P'P''}{2} \times \frac{1}{d} \cong \frac{P'P''}{2d} \rho'' \cong c$$

Ejemplo: ubicamos a unos 50 m del teodolito una escala horizontal y a la misma altura del instrumento. Con CI hacemos lectura de ángulo ($1^{\circ}00'20''$) y sobre la escala con el hilo vertical P' (115 mm).

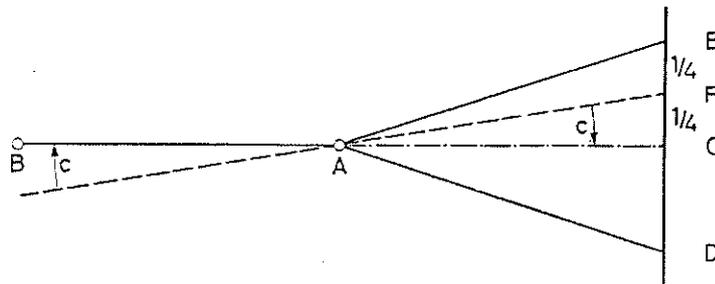
Luego pasamos a la posición CD a 180° de la anterior ($181^{\circ}00'20''$) colocando el índice exactamente en esa posición,

entonces el hilo vertical corta a la escala en la lectura P'' (145 mm). El punto medio P (130 mm) del segmento $P'P''$ es el lugar en que el eje de colimación sin error cortaría a la escala.

Este valor del error c incluye errores menores cometidos en las lecturas del círculo y sobre la regla.

3º Método. Bisectando a un punto B y lecturas a espalda sobre una regla graduada.³

Para la determinación del error de puntería se pone el trípode con el instrumento en un punto A; así se puede apuntar en puntería más o menos horizontal un punto B en una distancia de unos 60 m (ejemplo, una señal o jalón). En la prolongación trasera de esta línea en más o menos la misma distancia y altura como el instrumento, se pone una mira o escala, horizontal y perpendicular a la línea, en un punto C.



Con el anteojo en posición CI se apunta con el trazo vertical del retículo el punto B, basculando el anteojo (vuelta de campana) en la posición CD, se lee sobre la mira o escala (en C) el valor D. A continuación se gira la alidada en 180° y se repite lo anteriormente dicho, empezando en posición CD del anteojo y se lee sobre la mira o escala el valor E. El ángulo entre los valores D y E leídos sobre la escala es igual a cuatro veces el error de puntería.

$$\text{tg } c' = \text{tg } \frac{ED}{4} \times \frac{1}{d} \cong \frac{ED}{4d} \rho'' \cong c$$

³ Wild T1. Manual instrucciones para el empleo

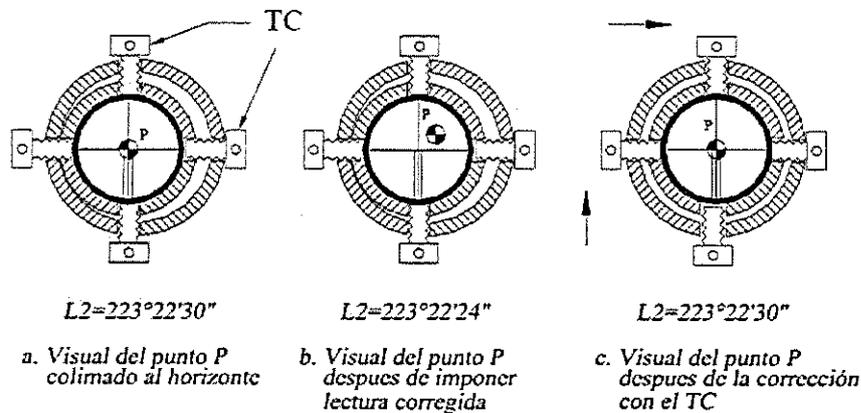
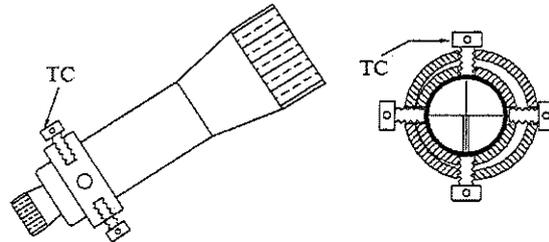
Si por ejemplo la sección entre los dos puntos leídos D y E fuera 3,6 cm y la distancia entre la mira y el instrumento 60 m, entonces «c» es igual a $34''=0,5'$ (o 1°). Para una medición de ángulo se puede tolerar un error de $0,5'$ (1°) sin preocuparse.

Este valor de c estará afectado por errores menores de bisección en P y producto de las lecturas sobre la regla

Corrección mecánica del error de colimación.

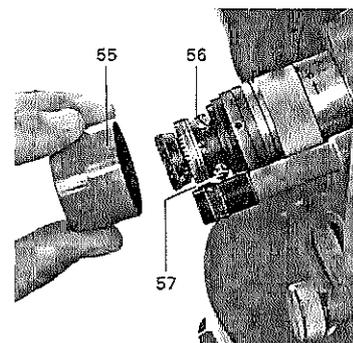
La corrección en todos los casos se realiza **desplazando la placa portaretículo horizontalmente** hasta obtener la lectura correcta.

En el 1º método se provoca L_v o Lect. α_p calculada, sobre el círculo y luego se bisecta P moviendo el retículo.



En los caso 2 y 3 desplazando la placa portaretículo horizontalmente hasta obtener la lectura correcta P y F respectivamente. Por lo tanto para corregir el error se deberá mover el hilo vertical del retículo, por medio de sus tornillos hasta bisectar P (130 mm).

Ajuste: Para ajustar el instrumento, quitar el anillo de protección (55) y llevar el trazo vertical del retículo en posición CI del anteojo del punto E a F ($EF=\frac{1}{4} DE$) accionando el tornillo del movimiento fino horizontal y bascular el anteojo a posición CD. Estando ahora el trazo vertical a la derecha del punto P se abre el tornillo de ajuste de la pantalla del retículo con una clavija de ajuste, a la izquierda del ocular del anteojo por pequeña cantidad y se cierra el tornillo a la derecha (57) inmediatamente por el mismo valor, controlando el resultado en el anteojo. Así se corrige paso a paso hasta que el trazo vertical se cubre con el punto P.



Ajuste del error de puntería
 55 Anillo de protección
 56 Tornillo de ajuste izquierdo
 57 Tornillo de ajuste derecho

Se recomienda con especial atención no cerrar demasiado estos tornillos de ajuste. A continuación se repite la medición para un control final y se atornilla el anillo de protección.

En resumen, si el instrumento tiene este error se lo puede corregir como se indicó precedentemente, sino las alternativas son:

- Fundamentalmente operar con lecturas C.I. y C.D. para que los efectos del error se compensen. Para compensar la influencia de error sistemático se utiliza el **método de BESSEL**, que consiste en efectuar las mediciones en dos posiciones del teodolito: "Círculo a la izquierda" (C.I.) y "Círculo a la derecha" (C.D.) (denominaciones que tienen en cuenta la posición del círculo vertical respecto al anteojo, para el operador). Midiendo los ángulos horizontales en las posiciones del anteojo C.I. y C.D. y tomando la media, se elimina este error por completo. Por esta razón se disuade al usuario, de querer eliminar este error de puntería por ajuste. Por un lado, no es necesario ni posible y por otro sufre la estabilidad de ajuste cuando se giran los tornillos de ajuste falsos, a saber, se cierran demasiado o no suficientemente.

- Atenuar sus efectos con las visuales horizontales o cercanas a esa posición.

En algunos teodolitos o estaciones totales modernas se puede "ingresar el error" en el instrumento de manera que su influencia sea compensada automáticamente en la lectura de cada dirección.

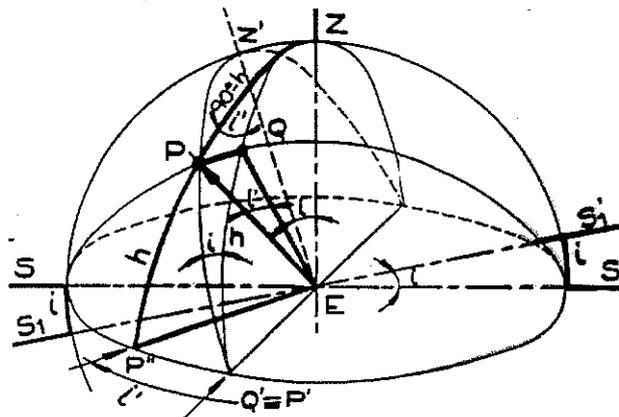
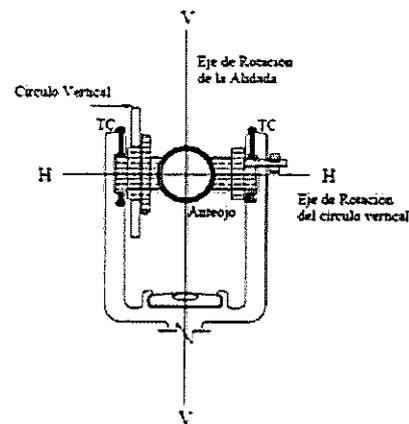
6.2.2. ERROR DE INCLINACIÓN DEL EJE SECUNDARIO (i)

Es el error por la falta de perpendicularidad entre el eje secundario (de basculamiento del anteojo) y el eje principal de giro de la alidada. Instrumentalmente se lo define como el ángulo existente entre el eje secundario, afectado de error, y la perpendicular al eje principal. Esta deficiente posición del eje secundario, puede ser corregida mecánicamente modificando su posición o bien su influencia compensada mediante la adecuada utilización de lecturas de valores angulares obtenidas con C.I. y C.D.

Los efectos del error podemos verlos en la figura,

donde se observa que al girar el anteojo alrededor del eje secundario SS' define un plano vertical por ZQQ' , si el instrumento no está afectado de error. En cambio, cuando existe error, también define un plano, el que estará inclinado un ángulo "i" debido a la ubicación del eje S_1S_1' respecto a la horizontal, como indica la figura.

La existencia del error de inclinación



i del eje secundario hace que el eje de colimación se mueva sobre un plano inclinado $Z'PP'$ en vez de hacerlo sobre el eje vertical ZQQ' .

Para el análisis de este error se supone corregidos los errores de verticalidad del eje principal "v" y de colimación "c". Por lo tanto al girar el eje de colimación alrededor de S_1S_1' su trayectoria será incorrecta, lo que tendrá consecuencias en las lecturas acimutales, en la denominada influencia del error de inclinación "i".

- **Influencia del error de inclinación del eje secundario.**

La existencia del error de inclinación i del eje secundario hace que el eje de colimación se mueva sobre un plano inclinado $Z'PP'$ en vez de hacerlo sobre el eje vertical ZQQ' .

En la figura utilizamos como referencia una esfera con centro en E, punto de intersección de los tres ejes principales. Al círculo graduado horizontal, lo suponemos llevado a coincidir con el eje S_1S_1' . Bisectando un punto la visual intercepta la esfera en P y la lectura P'' será la que resulta de su proyección desde Z, sobre el círculo graduado.

Advertimos que si el instrumento no tuviese error, tanto la visual al girar el anteojo como la proyección, se harían con el meridiano que define el plano por ZQQ' , coincidiendo su traza, y la lectura $Q \cong P''$. Por lo tanto la influencia angular i está dada por el arco $P''P'$, que varía en función del error "i" y el ángulo vertical "h" del punto observado.

Análogamente al caso anterior, al bisectar P efectuamos la lectura acimutal correspondiente a Q, concluyendo que la influencia del error i es i' .

Comparando los triángulos esféricos ZPQ y Q'PQ, por teorema del seno:

$$\text{Sen } i' / \text{Sen } PQ = \text{Sen } 90^\circ / \text{Sen } (90-h)$$

$$\therefore \text{Sen } i' = \text{Sen } PQ / \text{Sen } (90-h) =$$

$$\text{Sen } i' = \text{Sen } PQ / \text{Cos } h \text{ o sea } \text{Sen } PQ = \text{Sen } i' \cdot \text{Cos } h \quad (1)$$

$$\text{Y } \text{Sen } i / \text{Sen } PQ = \text{sen } 90^\circ / \text{Sen } h$$

$$\text{Sen } i = \text{Sen } PQ / \text{Sen } h \text{ o sea } \text{Sen } PQ = \text{Sen } i \cdot \text{Sen } h \quad (2)$$

$$\therefore \text{ de (1) y (2) } \text{Sen } PQ = \text{Sen } i' \cdot \text{Cos } h = \text{Sen } i \cdot \text{Sen } h$$

$$\therefore \text{Sen } i' = \text{Sen } i \cdot \text{Tg } h$$

y teniendo presente la pequeñez de i' e i :

$$i' \cong i \cdot \text{Tg } h$$

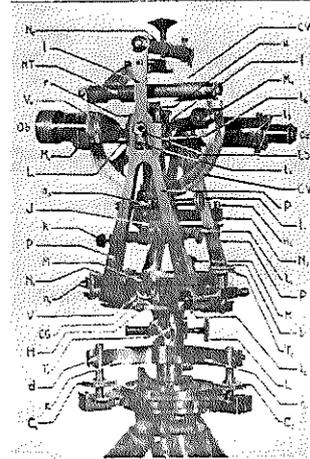
$$\text{si } h=0^\circ \Rightarrow i' \cong 0 ; \text{ si } h=45^\circ i' \cong i \text{ y si } h=89^\circ i' \cong i \times 57$$

Se deduce de esa expresión que cuando se observan puntos en el horizonte, $h = 0^\circ$ y $\text{tg } h = 0^\circ$, por lo tanto no influirá en las lecturas angulares un eventual error i , como se puntualizó en el error de colimación.

- **Verificación del error de inclinación del eje secundario. Métodos**

El control de la inclinación del eje secundario, antiguamente se realizaba con un "nivel de caballete" si eran necesarios ángulos precisos de orden topográfico o bien los geodésicos.

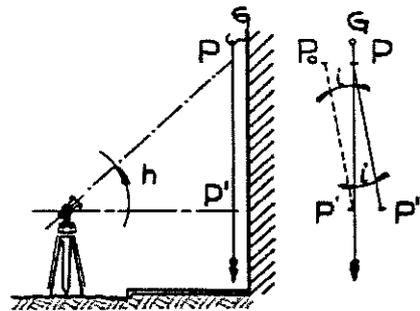
Para ello se montaba ese accesorio sobre el eje secundario, lo que permitía una verificación fácil y constante en la dirección del mismo. La precisión de esa operación está en función de la del nivel.



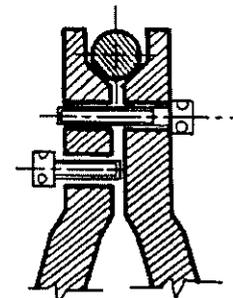
Para verificar y eliminar este error existen varios métodos, de los cuales los más conocidos son tres: de la plomada, de la regla horizontal, bisectado un punto elevado.

1º Método. De la plomada.

La verificación en los teodolitos topográficos se puede hacer de manera sencilla, luego de puesto en estación, mediante el giro del anteojo, siguiendo con la "cruz filar" la arista vertical de un edificio o mejor aún el hilo de una plomada, tratando de que el ángulo de altura h que bascula el anteojo sea el máximo posible (recordar que $i' = i \cdot \text{tg } h$).



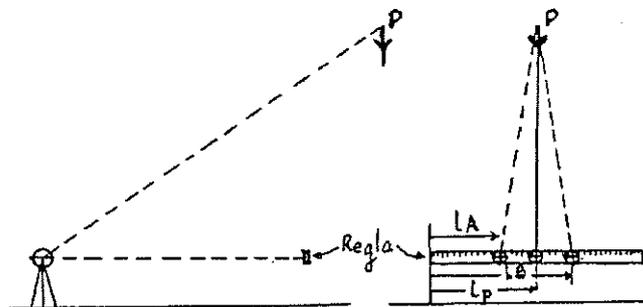
Si el retículo se aparta de la vertical materializada por el hilo o la arista, ello evidencia la existencia del error i . Para corregirlo, se restablece la bisectriz accionando los tornillos que actúan sobre el montaje del eje secundario, haciendo que el extremo de éste se desplace verticalmente.



PP'' traza de la visual bajada formando el ángulo i con la vertical PP' .

$P'P_0$ traza de la visual levantada. Se supone en el ejemplo un teodolito con extremo izq. del eje más bajo que la horizontal.

2º Método. De la regla horizontal: se coloca una regla graduada horizontal. A cierta distancia d no menor de 10 m, se hace estación con el teodolito, y en posición C.I., se bisecta un punto P bien definido y elevado arriba de la regla, con un ángulo h mayor de 20° , como se aprecia en la figura, para resaltar la influencia de un eventual error. A continuación, se gira el anteojo alrededor del eje secundario hasta bisectar la regla, efectuando la lectura en la misma, con el hilo vertical el retículo, (LA). Luego en posición inversa, con C.D., se



bisecta el mismo punto P elevado, y se gira el anteojo en su eje hasta bisectar la regla, obteniendo una lectura (LB). Si las lecturas $LB=LA$ coinciden, o bien su discrepancia es chica, se considera que el teodolito no tiene error de inclinación. Si $LB \neq LA$ significa que existe error de inclinación y se pueden determinar su valor a partir de la influencia del mismo, manifestada por la distancia $LB-LA$. La influencia del error de inclinación será:

$$\operatorname{tg} i'' = \operatorname{tg} (LB-LA)/2d \cong LB-LA / 2d \rightarrow i'' = LB-LA / 2d \rho''$$

a partir de la influencia i'' se puede calcular el error $i' = i \cdot \operatorname{tgh}$

Se observa que si el ángulo vertical $h = 0^\circ$, o sea operando en el horizonte, no influye el error de inclinación pues: $i' = i \cdot \operatorname{tgh}$

La **corrección del error**, se la hace bisectando el punto calculado $L_p = \frac{1}{2} (LA + LB)$. Se accionan entonces los tornillos ya citados hasta provocar la lectura promedio, y luego se gira el anteojo en dirección a P; como este no aparecerá sobre el hilo vertical del retículo por efectos del error, se provoca la visación moviendo un extremo del eje secundario con tornillos ubicados sobre un montante.

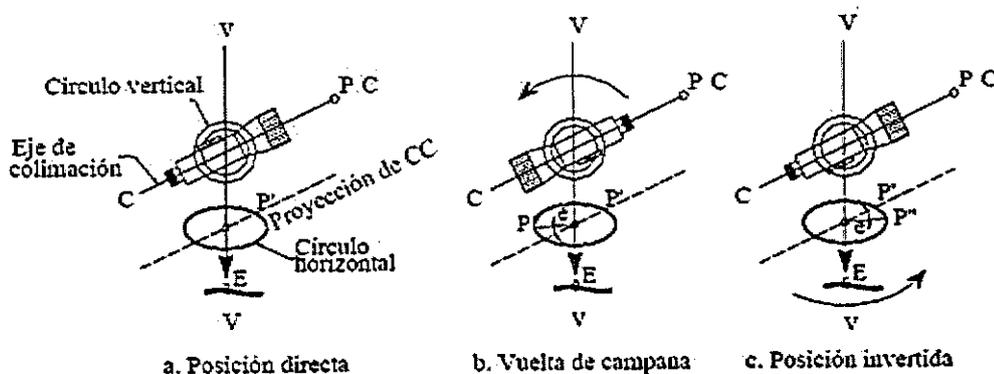
3º Método. Bisectando un punto elevado en las dos posiciones del anteojo: Habiendo hecho estación y el calaje del teodolito, en posición directa se bisecta un punto P elevado o de fuerte depresión, y se efectúan lecturas acimutales por el método de Bessel.

$$\text{Lect. CI} = \alpha + i'$$

$$\text{Lect. CD}' = \alpha - i' \quad \text{siendo } CD' = CD \pm 180^\circ$$

$$\text{La semisuma } \alpha = \frac{1}{2} (CI + CD')$$

$$\text{La semidiferencia } i' = \frac{1}{2} (CD' - CI) / 2$$



Luego se produce la lectura promedio α accionando los tornillos de pequeños movimientos de la alidada, lo cual da lugar al corrimiento de la imagen de P. Se restablece la bisección accionando los tornillos del montante del eje secundario de igual modo que en el caso anterior

Se observa que la verificación y corrección del error de inclinación por este método se parecen a los explicados para el error de colimación, con la diferencia de que para corregirlo se accionan distintos tornillos, y es distinta la inclinación de la visual

Ejemplo: Se anotaron las siguientes lecturas:

$$C.I. = 2^{\circ}22'35''$$

$$C.D. = 182^{\circ}23'08''$$

Aplicando a semidiferencia

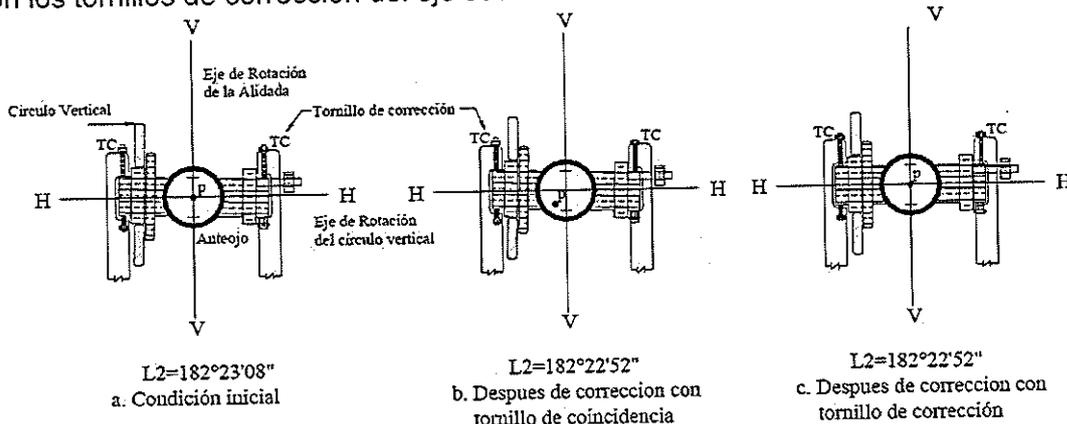
$$i' = \frac{1}{2} (CD' - CI) / 2 \text{ donde } CD' = CD \pm 180^{\circ} = 182^{\circ}23'08'' \pm 180^{\circ} =$$

$$i' = \frac{1}{2} (182^{\circ}23'08'' - 2^{\circ}22'35'' - 180^{\circ}) = 16''$$

La corrección de la lectura será $c = -16''$ y

la lectura con C.D. debe ser $182^{\circ}23'08'' - 0^{\circ}00'16'' = 182^{\circ}22'52''$

Actuando sobre el tornillo del círculo horizontal se provoca la lectura corregida $182^{\circ}22'52''$, con lo cual el retículo vertical se habrá desplazado de la señal. Finalmente con los tornillos de corrección del eje secundario bisectamos nuevamente el punto P



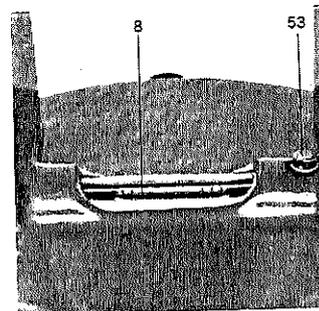
Si el error no se corrige, y aún cuando se lo haga, conviene tener en cuenta:

- ✓ Básicamente tomar lecturas con C.I. y C.D., con lo que se compensa la influencia.
- ✓ Siempre que sea posible operar con visuales horizontales ya que en esa posición no influye el error. Algunos teodolitos o estaciones totales electrónicas corrigen automáticamente la influencia conjunta con la del error de verticalización.

6.2.3. ERROR DE VERTICALIDAD DEL EJE PRINCIPAL (V)

Existe cuando el eje principal no se encuentra perfectamente vertical, es decir, cuando no se hizo un calaje perfecto. Al realizar la puesta en estación explicamos la forma práctica para corregir este error, su definición y origen y consecuentemente el error residual, que varía permanentemente influyendo en las lecturas de valores angulares obtenidos. Recordemos que habiendo detectado que si la burbuja se desplaza más de un intervalo, eliminar la mitad de la desviación con el tornillo nivelante y el otro con el tornillo de corrección (53) del nivel. Repetir estas operaciones hasta que la burbuja permanezca en el centro, en cualquier posición de la alidada

Analizaremos la influencia y su relación con el



Ajuste del nivel de la alidada

- 8 Nivel de la alidada
- 53 Tornillo de ajuste

error, debido a que no está dentro de los defectos del instrumento sino que se debe a los problemas operativos, causados por las condiciones y en menor medida operador e instrumento.

Se ha explicado que, como no podemos apreciar al eje principal, su evaluación la hacemos observando el comportamiento de la alidada a través de su nivel.

- **Influencia del error de verticalidad del eje principal.**

Así es que en la figura, el eje de rotación, en lugar de estar en su posición correcta ZE, coincidente con la vertical, se ha inclinado y está en Z'E. El ángulo "v" entre ambas posiciones lo identificamos como error de verticalización, observándose que la inclinación producida involucra a todos los componentes de la alidada.

Esto afecta la exactitud de las lecturas en el limbo, α es la lectura en el limbo cuando el eje principal está estrictamente vertical (lectura verdadera). α' es la lectura obtenida con el eje principal inclinado un ángulo v con respecto a la vertical.

La existencia del error de verticalidad v hace que el eje secundario varíe su inclinación entre los valores extremos **cero** (posición S_0 y S'_0) y **v** (posición S_v y S'_v), según sea el ángulo horizontal que forma la visual a un punto P con el plano vertical que contiene al eje principal inclinado (Plano EZZ' o del dibujo).

Es por ello que el análisis de la influencia $v' = \alpha - \alpha'$ se realiza como si fuese la de una inclinación variable del eje secundario.

Es decir $v' = i_\alpha \cdot \text{tg } h$ (1)

Si:

$\alpha = 0 \Rightarrow i_\alpha = 0$ (eje secundario horizontal)

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow i_\alpha = v$ (inclinación máxima del eje secundario)

Llegándose, luego de varias consideraciones,

$$\text{sen } i_\alpha / \text{sen } v = \text{sen } \alpha / \text{sen } 90^\circ$$

i_α y v pequeños

$$i_\alpha \approx v \text{ sen } \alpha \quad (2)$$

de (1) y (2) $v' = v \cdot \text{Sen } \alpha \cdot \text{tg } h$

Donde:

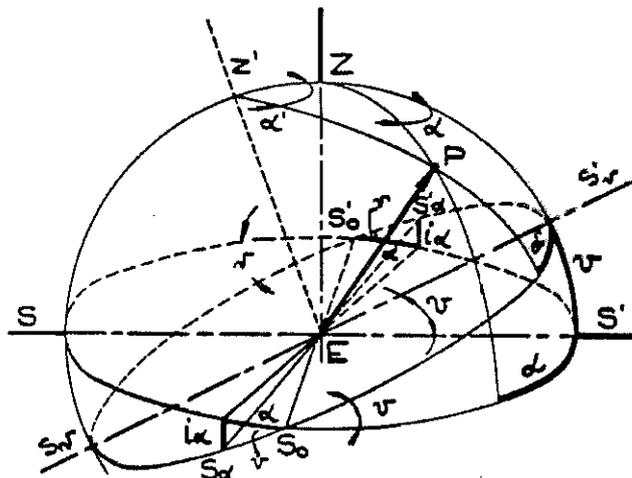
h: ángulo vertical que forma la visual al punto bisectado (P) con respecto a la horizontal

La fórmula nos dice que cuando bisectamos un punto con visual horizontal, la influencia del error es nula pues:

$$\text{para } h = 0^\circ \text{ tg } h = 0 \quad v'_{\text{min}} = 0$$

Mientras que cuando se bisecta un punto elevado:

$$\text{para } h \rightarrow 90^\circ \text{ tg } h \rightarrow \infty \quad v'_{\text{máx}} \rightarrow \infty$$



Por lo tanto, a medida que **se bisecta un punto más elevado, debe ser más prolijo el calaje del teodolito** a fin de que la medición no se vea afectada por este error.

En cuanto a **la influencia v'** , ésta **no puede compensarse con el método de Bessel**. De allí **la importancia del calaje del teodolito**.

De la figura y el análisis anterior se advierte que al cambiar de posición el anteojo, o sea operando con C.I. o C.D. no se produce una compensación del error, pues el mismo está asociado a todo el instrumento el que seguirá inclinado el mismo ángulo v incluido el eje secundario, defecto del cual proviene la influencia más notoria. Esta variará solo cuando se modifique el error o bien lo hace en la medida que giramos la alidada, donde el error pasa de un máximo v hasta anularse, variación que se ajusta a la función $\text{sen } \alpha$ conforme resulta de la deducción anterior.

Es de destacar que en la práctica, la inclinación del eje secundario producto de la desverticalización aparece integrada con el error de inclinación, por lo que las formas de corrección que veremos a continuación, común y automática, actúan sobre ese efecto conjunto.

- **Determinación práctica de la influencia del error de verticalización. Corrección de las lecturas.**

Dicha influencia puede determinarse prácticamente con buena aproximación basándose en la medida de la inclinación del eje de rotación de la alidada, obtenida mediante la lectura del número de divisiones del nivel de alidada que se ha desplazado la burbuja respecto a su posición correcta.

El nivel de alidada podrá estar corregido o descorregido; en el primer caso, más fácil de visualizar, y con la burbuja centrada, el "eje de nivel" estará perpendicular al eje de rotación. Podemos tener entonces una medida de la **inclinación del eje lv** para una posición cualquiera de la alidada en base a:

$$lv_i = v \cdot \text{sen } \alpha_1 \quad (A)$$

Donde:

v = error de verticalidad.

α_1 = ángulo acimutal respecto a una dirección de referencia

Esto podrá ser utilizado en la fórmula final del punto anterior donde la influencia está dada por:

$$v' = v \cdot \text{Sen } \alpha \cdot \text{tg } h$$

Para un caso puntual $v'_i = v \cdot \text{Sen } \alpha_i \cdot \text{tg } h_i$

Donde conocida la inclinación lv según la expresión A y reemplazando:

La influencia sobre el ángulo $v'_i = lv \cdot \text{tg } h_i$ para una posición de la alidada

Por lo tanto la corrección a aplicar será: $C_i = -v'_i$

Determinando en cada posición de la alidada el desplazamiento de la burbuja respecto a la ubicación correcta al medir un ángulo horizontal, podemos calcular la inclinación lv_i y con ella la corrección, para lo cual también podemos valernos de uno o sus dos extremos.

Por ejemplo, si al visar P el borde izquierdo de la burbuja está en la división I y el borde derecho en la D, lv puede ser calculada por la expresión:

$$lv = \frac{1}{2} (I-D) \times S \quad \text{donde } S \text{ es la sensibilidad del nivel}$$

En la figura $I=1$ y $D=4$ si $S=20''$

$$lv = \frac{1}{2} (1-4) \times 20'' = \frac{1}{2} (-3) \times 20'' = -30''$$

Si el ángulo vertical es $h=20^\circ$

$$v_i' = lv \cdot \operatorname{tg} h_i = -30'' \times \operatorname{tg} 20^\circ \cong -11'' \Rightarrow C_i = -v_i \cong 11''$$



Este valor pone de manifiesto la importancia del error teniendo en cuenta que el mismo proviene de la desviación de una sola división, de acuerdo a la medida de la sensibilidad.

Si se realizan varias lecturas angulares de P tomamos el promedio de las posiciones de la burbuja y se corrige el ángulo obtenido mediante:

$$C'' = \frac{(\sum I - \sum D)}{2n} S'' \operatorname{tg} h \quad \text{donde } n = n^\circ \text{ de lecturas hechas.}$$

Donde $(\sum I - \sum D)$ son las sumas de todas las lecturas de las divisiones del nivel hechas con los extremos izquierdo y derecho de la burbuja respectivamente. En cuanto a la sensibilidad S se obtiene de los folletos o está indicada en el instrumento, sino se la determina.

Esta corrección aumenta en la medida que lo hace el ángulo vertical, y ésta forma es aplicada en los teodolitos optomecánicos y en general en operaciones topográficas precisas o geodésicas y cuando el instrumento carece de un compensador automático de esa influencia que veremos a continuación.

- **Corrección automática de la influencia del error de verticalización.**

Es un recurso electrónico con el que se logra corregir automáticamente las medidas angulares de los **efectos de la inclinación residual del eje de rotación de la alidada** en teodolitos y estaciones totales.

Los principios se corresponden con la forma de corrección del punto anterior. El sistema mide electrónicamente el ángulo residual de desverticalización en cada posición de la alidada. Con esa medida y la del ángulo vertical h , un microprocesador calcula la influencia con la fórmula vista, su valor aparece en el display del instrumento o si no se ve la medida angular corregida.

La importancia de esta corrección se puede advertir en el cuadro siguiente donde se indican algunos valores de la

influencia en función del ángulo residual de desverticalización para una dirección dada y el ángulo vertical h respectivo.

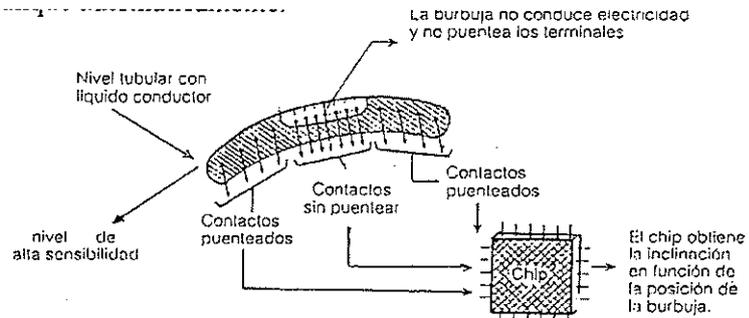
Los valores han sido calculados en base a la fórmula del punto anterior y una idea de su

h	0°	1°	5°	10°	30°	45°
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
5°	0°	$0.00''$	$0.44''$	$0.88''$	$2.80''$	$5''$
10°	0°	$0.17''$	$0.87''$	$1.76''$	$5.77''$	$10''$
15°	0°	$0.20''$	$1.31''$	$2.04''$	$8.00''$	$15''$
30°	0°	$0.52''$	$2.62''$	$5.29''$	$17.32''$	$30''$
$1'$	0°	$1.05''$	$5.25''$	$10.50''$	$34.04''$	$1'$

magnitud se tiene viendo que para una **inclinación de $30''$** , que equivale al corrimiento de **una división de la burbuja**, y un ángulo vertical $h=30^\circ$ es de **$17,32''$** . También se aprecia que esa inclinación no influye notoriamente hasta ángulos de $h = 10^\circ$; situación común de la mayoría de las tareas.

El conjunto que realiza la corrección se lo denomina compensador y está compuesto por uno o dos sensores según se mida la inclinación residual del eje de rotación, en una o dos direcciones, a semejanza de lo visto en el punto anterior aunque automáticamente.

El sensor básicamente consiste en un nivel tubular preciso, como el de alidada, en el lugar de las divisiones hay contactos eléctricos (terminales) cuya función es determinar la ubicación de la burbuja, o sea medir los desplazamientos a izquierda y derecha de su posición de calado.



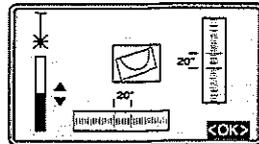
Una fuente eléctrica actúa sobre el líquido "conductor" y según la posición de la burbuja variará la conductividad, circunstancia que es detectada por las terminales. Estas están conectados a un circuito donde un microprocesador, en base a ese dato, determina la magnitud de la inclinación y luego con el ángulo vertical calcula la influencia sobre el ángulo horizontal.

Los instrumentos que cuentan con sistema, teodolito o estación total, tienen la posibilidad de activar o no el **compensador**, para lo cual cuentan con opciones específicas en el programa de medición. Las alternativas varían de acuerdo a las marcas y modelos, pudiendo obtenerse el ángulo residual de desverticalización, la magnitud de la corrección a aplicar a la lectura o sino directamente el valor de esta corregida de la influencia.

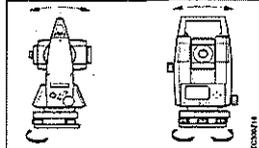
Si se cuenta con dos (2) sensores estos actúan en dos direcciones dispuestas a 90°, longitudinalmente y transversalmente al anteojo, pudiendo obtenerse las respectivas medidas de la inclinación en el display. En este ejemplo se dispone de la opción de horizontalización con el identificado como "nivel electrónico" donde accionando los tornillos calantes, se provocan en la pantalla desplazamientos de longitudinal y transversal.



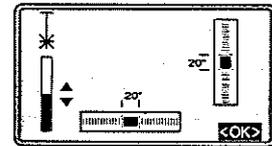
1. Conectar con el nivel electrónico. Si el instrumento no está en una posición aproximadamente horizontal, aparece el símbolo de un nivel inclinado.



2. Centrar el nivel electrónico girando los tornillos nivelantes.



Cuando el nivel electrónico esté ajustado, estará nivelado el instrumento.



3. Comprobar el centrado con la plomada láser y corregir si fuera necesario.

4. Desconectar con el nivel electrónico y la plomada láser.

Se advierte que este sistema compensador no debe confundirse con el que cuentan algunos teodolitos optomecánicos denominado de "índice vertical automático" o índice automático utilizado para corregir las lecturas de ángulos verticales.

- Hasta aquí analizamos los errores axiales, es decir los errores entre los 3 ejes principales. Ahora analizaremos otros errores que intervienen los ejes:

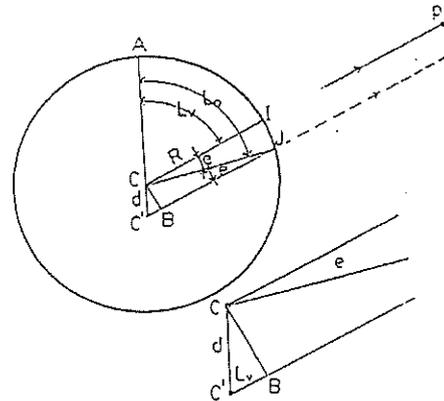
6.2.4. ERROR DE EXCENTRICIDAD DE LA ALIDADA

Se presenta cuando por uso intenso u otra causa, el centro de giro de la alidada no coincide exactamente con el centro geométrico del limbo. Aún con valores muy pequeños de esta excentricidad, su influencia en las lecturas, en el limbo pueden ser importantes. El centro de graduación del círculo horizontal debe coincidir con la prolongación del eje de rotación de la alidada. Este defecto, en la figura es la distancia $CC' = d$ que los separa, llamada excentricidad de la alidada, que influye en los valores angulares según sea su magnitud y posición respecto a las visuales

En el caso común de un teodolito topográfico con un índice, vemos en la figura el círculo graduado de radio R con centro en C y sobre el mismo gira la alidada cuyo eje de giro se proyecta en C' , no coincidente con C ya que suponemos al teodolito afectado de este error, donde la distancia CC' es la excentricidad " d ".

Supongamos para el análisis que el índice es coincidente con el eje de colimación y tomamos como referencia el punto A , origen de la graduación.

Si el instrumento carece de error, la alidada gira alrededor de C , la visual será CP y la lectura sobre el círculo I me determina el ángulo correcto L_v . En cambio, por efectos del error, la alidada gira con eje en C' , la visual será $C'P$ y la lectura J define el ángulo L_o . Se advierte que el valor " d " es muy pequeño, del orden de los **micrones** por lo que para una distancia normal hasta P podemos considerar **paralelas CP y $C'P$** .



El error angular cometido por la excentricidad d es: $e = L_o - L_v$

Para deducir su valor se recurre a la figura donde: $\text{sen } e = CB / R$

Además del triángulo $CC'B$ $CB = d \cdot \text{sen } L_v$

Por lo tanto $\text{sen } e = d/R \cdot \text{sen } L_v$

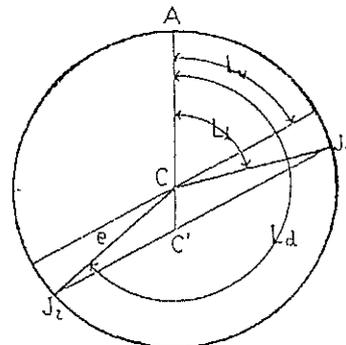
y considerando que se trata de un ángulo pequeño:

$\text{sen } e \approx e = d/R \cdot \text{sen } L_v$ por lo que $e'' = d/R \text{ sen } L_v$

es una función senoidal donde

e'' es máximo para $L_v = 90^\circ$ o 270° y e'' es mínimo para $L_v = 0^\circ$ o 180° .

Una excentricidad de pocos micrones, en teodolitos con un índice, puede incidir significativamente en los valores angulares, influencia que depende de la ubicación de la visual respecto a la posición de " d " de



acuerdo al análisis precedente.

De todas formas al **desconocerse la magnitud y ubicación** de la eventual excentricidad, tampoco se sabe cuándo y cómo una visual está afectada. No obstante, operando con lecturas en ambas posiciones del círculo CI y CD, vemos en la figura que:

- Con Círculo Izquierda (CI) tendremos en J_1 lectura del ángulo L_i
- Con Círculo Derecha (CD) la lectura obtenida en J_2 es L_d .

El valor angular correcto " L_v " en ambos casos será:

$$\text{Con C.I.} \Rightarrow L_v = L_i - e \quad \text{y} \quad \text{Con C.D.} \Rightarrow L_v = L_d + e \pm 180^\circ$$

$$\text{Sumando y promediando } L_v = \frac{1}{2} (L_i + L_d \pm 180^\circ)$$

Se observa que se ha "compensado" la influencia "e" de la excentricidad "d" al realizar la suma de las lecturas para luego promediarlas.

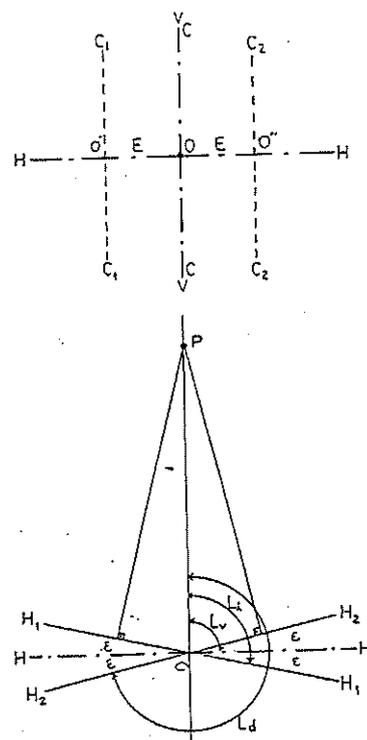
Este esquema es similar para el caso de un teodolito con dos (2) índices en donde para una sola posición del círculo corresponderán dos lecturas L_1 y L_2 con los índices J_1 y J_2 .

6.2.5. ERROR DE EXCENTRICIDAD DEL EJE DE COLIMACIÓN

Es un error que afecta a los teodolitos topográficos comunes, cuando los 3 ejes principales no se interceptan en un punto, por estar el eje de colimación desplazado de su posición correcta. Está definido por la **distancia E** que media entre el punto O en que el eje secundario HH se intercepta con el eje principal VV, y el eje de colimación mal ubicado que pasa por O' u O". Podemos observar que, como consecuencia de esa excentricidad E, el eje de colimación CC en lugar de coincidir en su proyección con el eje principal VV pasa a ocupar las posiciones C_1C_1 o C_2C_2 según se opere con una u otra posición del círculo.

Se hace notar que esta excentricidad tiene características de error en un teodolito céntrico, mientras que en un teodolito excéntrico (por ejemplo "de minas") es una característica constructiva propia pues el anteojo está ubicado a un costado de la alidada.

En la segunda figura tenemos una vista en planta donde se advierte lo que ocurriría con la alidada por efecto de este error, al tratar de visar el punto P. Si el mismo no existiera, la posición del eje secundario sería HH y la visual coincidiría con la dirección OP. En cambio con el error para bisectar el punto habrá que imprimir un movimiento de rotación I; a la alidada, de forma tal que el eje secundario, que nos sirve de referencia para ver el comportamiento de este error, pasará a ocupar las posiciones H_1H_1 y H_2H_2 para ambas posiciones de círculo.



Para este análisis hemos considerado el aparato exento de error de colimación, obviamente con el instrumento puesto en estación y el valor de ε corresponde a la influencia del error E sobre el ángulo horizontal medido.

Se observa que la simetría del error ε respecto a la posición correcta del eje de colimación al operar con CI y CD, genera influencias ε similares y también simétricas para ambas posiciones.

Por lo tanto suponiendo al índice coincidente con uno de los lados de HH los valores angulares serán

$$\text{C.I.} \Rightarrow L_v = L_i - \varepsilon$$

$$\text{C.D.} \Rightarrow L_v = L_d + \varepsilon \pm 180^\circ$$

Sumando y promediando $\Rightarrow L_v = \frac{1}{2}(L_i + L_d \pm 180^\circ)$

Vemos que, al operar con las lecturas de CI y CD, específicamente al sumar esos valores, se habrá compensado la influencia del error.

6.2.6. ERRORES DE GRADUACIÓN DE LOS LIMBOS.

Se trata de defectos en la **equidistancia entre las divisiones** de los círculos graduados; por el limitado grado de precisión con que se pueden ejecutar las divisiones del limbo, pudiendo resultar que los intervalos de las graduaciones no sean todos iguales entre sí. Son deficiencias puntuales y fijas aunque su ubicación y magnitud no es posible detectarlas prácticamente, así es que su influencia es impredecible y por lo tanto su influencia debe interpretársela como accidental.

Se advierte que, en esencia, el error en los círculos es de tipo sistemático, puesto que los defectos en la escalas son fijos y por lo tanto constante es su ubicación y magnitud, no obstante, lo que hay que considerar es su influencia en los ángulos medidos, aunque es prácticamente impredecible.

Dada las características expuestas no hay formas de corrección y/o compensación total, y solo se podrá tratar de reducir eventuales influencias con métodos adecuados de medición angular. Se derivan entonces errores en la medida de los ángulos que, si no pueden ser completamente eliminados llegan a atenuarse haciendo la media de varias lecturas en posiciones diversas del limbo graduado. A tal objeto se utilizan métodos especiales de medidas de ángulos, como el de repetición y el de reiteración.

Este error afecta ambos círculos, por lo tanto incide en las lecturas angulares horizontales y verticales.

6.2.7. ERROR DE ARRASTRE DEL LIMBO

Puede ocurrir en un teodolito repetidor, que el tornillo de ajuste del limbo a la base nivelante no solidarice perfectamente a ambos y, cuando gira la alidada para barrer el ángulo, gire un pequeño ángulo, produciendo un corrimiento del 0° del limbo. Como veremos más adelante, este error puede ser eliminado aplicando el método Bessel.

6.2.8. ERROR DEL NIVEL ESFÉRICO.

Primeramente, ponemos el instrumento en horizontal refiriéndose al nivel de la alidada. Si la burbuja del nivel esférico no se encuentra en el interior de su círculo de referencia, llevarla a él manipulando con el destornillador en los tornillos de la base de su montura. Apretando un tornillo de corrección, la burbuja se desplaza en dirección de este tornillo; aflojándolo, la burbuja se separa. Girar primero un tornillo hasta que la burbuja se encuentre en el centro, o hasta que con otro tornillo sea posible llevarla a dicho centro.

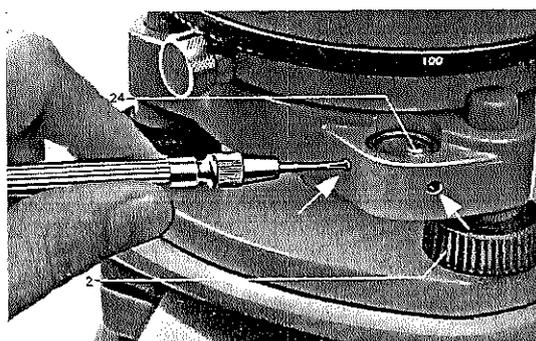
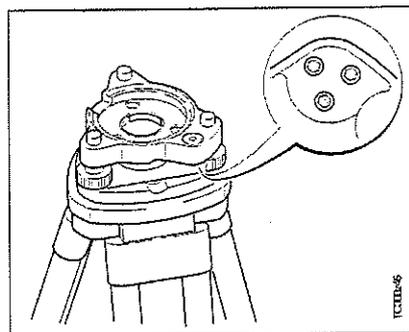
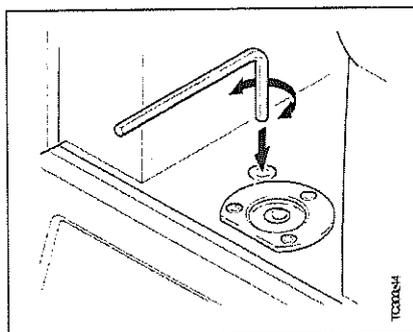
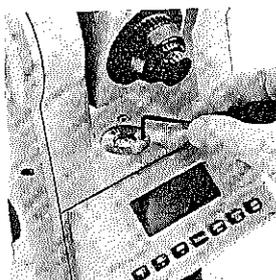


Fig. 31 Nivel esférico en la base nivelante

2 Tornillo nivelante
24 Nivel esférico
Flechas: tornillos para ajustar el nivel esférico

- **Nivel esférico en la alidada (teodolitos electrónicos y estaciones totales)**

Una vez nivelado el instrumento (nivel electrónico), la burbuja debe estar en el círculo de centrado. Si el punto de juego se sitúa por encima del borde de marca o fuera de la misma, reajustarla corrigiendo con los tornillos de ajuste mediante la llave Allen o con la clavija. Una vez hecho el ajuste no debe quedar ningún tornillo flojo.



- **Nivel esférico en la base nivelante (teodolitos electrónicos, estaciones totales)**

Nivelar el instrumento y posteriormente retirarlo de la base nivelante. Si la burbuja no está dentro del círculo de ajuste, se corrige en los dos tornillos de agujeros cruzados utilizando el pasador de ajuste.

Giro de los tornillos de ajuste:

- hacia la izquierda: la burbuja del nivel se desplaza hacia el tornillo.
- hacia la derecha: la burbuja del nivel se aleja del tornillo.

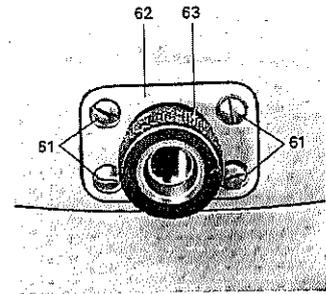
Una vez hecho el ajuste no debe quedar ningún tornillo flojo.

6.2.9. ERROR DE PLOMADA OPTICA.

Recomendamos controlar regularmente la plomada óptica de la base nivelante, pues cualquier desviación de su línea de puntería respecto al eje vertical del teodolito conduce a errores de centrado.

Montar el instrumento sobre el trípode y poner por debajo, en el piso, un cartón blanco, con un punto A bien definido. Girando el ocular de la plomada óptica se enfoca bien la

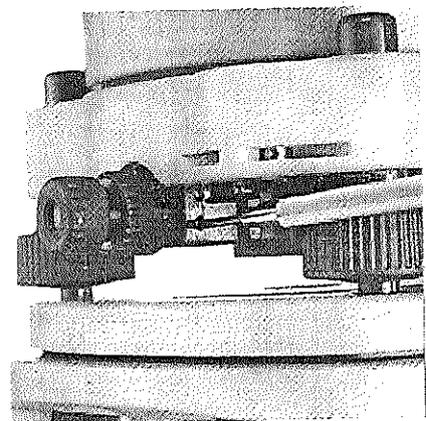
retícula y tirando el ocular hacia afuera se enfoca el ocular sobre el punto marcado A. Girando los tornillos nivelantes centrar la retícula en el punto marcado A sobre el cartón. La posición de la burbuja de la alidada no influye en este procedimiento. Después de controlar y corregir un eventual paralaje, la alidada se gira en 180°. Si la retícula está desplazada del punto A marcado sobre el cartón blanco en una porción más de lo que sea admisible para el trabajo, se marca sobre el cartón la nueva posición B de la retícula. A continuación se marca la mitad entre los dos puntos A y B como punto C. Seguidamente se aflojan los cuatro tornillos (61) de la brida del ocular (62) de la plomada óptica hasta que ésta se pueda desplazar, y la cruz de la retícula se encuentre sobre el punto C. Apretar los cuatro tornillos (61) y repetir todo el procedimiento.



Plomada óptica
 61 Tornillos para fijación de la brida 62
 62 Brida del ocular
 63 Ocular

- **Control con la plomada de cordón:** con instrumento en el trípode y calado, en un lugar sin viento; colgamos el casquillo de centraje en diversas posiciones para determinar su excentricidad. Marcamos a continuación en el suelo el punto de plomada. Al retirar la plomada de cordón, el retículo de la plomada óptica debe coincidir con el punto marcado. Se puede alcanzar una precisión de aproximadamente 1mm.

- **En teodolitos electrónicos y estaciones totales, control por giro de la base nivelante:** nivelamos el instrumento con el nivel electrónico y marcamos en el suelo el punto de plomada. Trazamos la línea de contorno (dibujamos) de la base nivelante en el plato del trípode (plataforma), con un lápiz afilado, giramos la base en 120°, la encajamos en la línea de contorno, nivelamos el instrumento y marcamos el punto de plomada. Repetimos el procedimiento en la tercera posición de la base nivelante. Si no coinciden los tres puntos, ajustamos el retículo al baricentro del triángulo que forman.

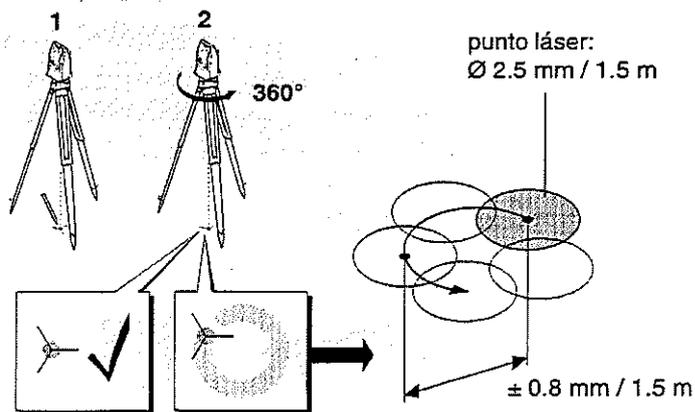


Ajuste: girando conjuntamente los dos tornillos con el destornillador, ajustamos paso a paso el retículo sobre el punto marcado en el suelo

- **Plomada Láser en teodolitos electrónicos y estaciones totales.** La plomada láser está ubicada en el eje vertical. En condiciones de trabajo normales no es necesario llevar a cabo trabajos de ajuste en la plomada láser. No obstante, si por razones imprevistas, fuera necesario ajustar la plomada láser, deberá ser el servicio técnico de la agencia el que lleve a cabo ese trabajo.

Control mediante un giro de 360° del instrumento: Colocar el instrumento sobre el trípode y nivelarlo; activar la plomada láser y marcar el centro del punto rojo. Girar el instrumento 360° lentamente y observar mientras tanto el punto láser rojo.

El control de la plomada láser debe efectuarse sobre una superficie clara, plana y horizontal (p.ej. una hoja de papel). Si el centro del punto láser describe un círculo mientras se mueve o si éste se desplaza más de 1 mm del primer punto marcado, póngase en contacto con el servicio técnico de la agencia, para que lleve a cabo un ajuste de la plomada. El tamaño del punto láser puede variar según la luz y el tipo de superficie. A una distancia de 1,5 m, el diámetro del rayo láser será, por lo general, de unos 2,5 mm. A una distancia de 1,5 m, el diámetro de rotación máximo del centro del punto láser no debería exceder 1 mm.



6.2.10. CONCLUSIONES DE LOS ERRORES SISTEMÁTICOS QUE AFECTAN AL TEODOLITO PARA LA MEDICIÓN DE ÁNGULOS HORIZONTALES

Recordemos que son los que proceden del mismo instrumento y actúan con la misma magnitud. Los **errores sistemáticos** pueden ser de construcción o de ajuste.

Errores de construcción:

- Error de colimación.
- Error de inclinación del eje secundario
- Excentricidad de la alidada (falta de coincidencia entre el eje de rotación con el de limbo).
- Excentricidad del eje de colimación
- Errores de graduación de los limbos.
- Error de arrastre del limbo.
- Torcedura del eje vertical o sea la falta de perpendicularidad del eje principal con el círculo horizontal (o también la falta de coincidencia entre los dos ejes de giro de los teodolitos repetidores). Constituye un defecto grave que pudo haber sido causado por mal trato o golpes.

Errores de Ajuste: Son los residuos inevitables de las correcciones realizadas.

Influencia de los errores de colimación (c') e inclinación (i')

Recordando que:

$$c' \cong c \cdot \text{Sec } h$$

$$h=0^\circ \Rightarrow c' \cong c ; \text{ si } h=45^\circ c' \cong c \times 1,41 \text{ y si } h=89^\circ c' \cong c \times 57$$

$$i' \cong i \cdot \text{Tg } h$$

$$\text{si } h=0^\circ \Rightarrow i' \cong 0 ; \text{ si } h=45^\circ i' \cong i \text{ y si } h=89^\circ i' \cong i \times 57$$

Ángulo de altura h	Error colimación $c' \cong c \cdot \text{Sec } h$	Error inclinación eje secund $i' \cong i \cdot \text{Tg } h$
0°	c	0
10°	1,01 x c	0,18 x i
20°	1,06 x c	0,36 x i
30°	1,15 x c	0,58 x i
45°	1,41 x c	i

El error de verticalidad del eje principal, considerado como **error axial**, no resulta ser sistemático como los anteriores, pues al motivarse a un incorrecto calado, no sabemos su magnitud ni su ubicación.

6.3. ERRORES ACCIDENTALES

Si seguimos el proceso de una observación, cada operación elemental realizada, da lugar a un posible error accidental, que debe ser tenido en cuenta, a saber:

6.3.1. Error de verticalidad de eje principal

Su efecto se manifiesta produciendo una inclinación variable del eje secundario y su influencia en las lecturas responde a la expresión de lo detallado

$$v' = v \cdot \text{Sen } \alpha \cdot \text{tg } h$$

h: ángulo vertical que forma la visual al punto bisectado (P) con respecto a la horizontal

$$\text{para } h = 0^\circ \text{ tg } h = 0 \quad v'_{\text{min}} = 0$$

cuando bisectamos un punto con visual horizontal, la influencia del error es nula

Mientras que cuando se bisecta un punto elevado:

$$\text{para } h \rightarrow 90^\circ \text{ tg } h \rightarrow \infty \quad v'_{\text{máx}} \rightarrow \infty$$

Se trata de un "error operativo" al que identificamos como de verticalización, por ser la acción afectada. Es producto del accionar del operador, limitaciones y/o defectos instrumentales (nivel de alidada) y las "condiciones de trabajo" (inestabilidad del terreno, viento, sol, vibraciones), factores que regularmente inciden en forma conjunta aunque el que más preocupa es el operador quien decide sobre los otros motivos.

La corrección, como hemos visto, se realiza por medio del "nivel tubular de alidada", al horizontalizar el instrumento. Dada su permanente alteración al operar, debe hacerse un riguroso y constante control del mismo y del **inevitable error residual que subsiste**, ya que no es posible compensar su influencia mediante métodos de medición. No obstante, cabe destacar se puede corregir las lecturas de su influencia mediante el cálculo de la misma y en los instrumentales electrónicos modernos, las lecturas son compensadas automáticamente de sus efectos, como vimos.

Si llamamos como e''_{va} al error producido por la falta de verticalidad del eje en las lecturas acimutales, admitiendo que es posible centrar la burbuja con una indeterminación igual a la tercera parte de una división, y que la máxima distancia

cenital 75° , difícilmente superable en trabajos usuales, aún en casos extremos, tendremos⁴: $e''_{va} < \frac{1}{3} S \cdot \cotg 75^\circ \cong \frac{1}{3} S \cdot \frac{1}{4}$

$$e''_{va} < S''/12 \quad \text{Siendo } S'' \text{ la sensibilidad del nivel tubular}$$

Consecuentemente, en trabajos de planimetría, con $h \cong 0^\circ$, el error de verticalidad será poco importante. Podrá nivelarse el aparato ligeramente, sin mengua de precisión y con buen ahorro de tiempo. Sin embargo, en trabajos de altimetría el error se transmite casi íntegramente a las visuales. Por ello es preciso en ese caso nivelar el aparato muy cuidadosamente, como veremos en lectura de ángulos verticales.

6.3.2. Error de dirección ⁵

Consideramos como tal el efecto combinado de los errores de centración sobre el vértice y la correcta ubicación del Jalón o señal sobre el punto.

Sea E el punto de estación y P el que se pretende levantar. Respectivamente, los círculos de radios e_e y e_s representarán los de error en el posicionamiento de la plomada y la mira o banderola. La tangente común interior a ambas circunferencias es evidentemente la posición de máximo error y éste valdrá:

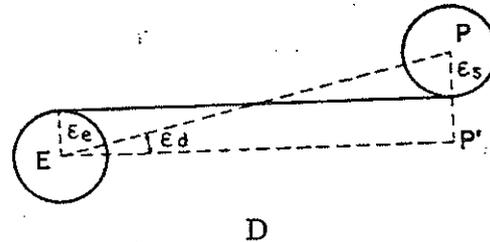
$$\text{Sen } e_d = (e_e + e_s) / D$$

e_d es muy pequeño

$$e_d = (e_e + e_s) / D$$

Considerando el caso graficado más desfavorable:

$$e_d < (e_e + e_s) / D \rho''$$



Vemos que para distancias cortas alcanza valores alarmantes, debiéndose tomar las máximas precauciones para la centración del instrumento, y la señalización del punto

En observaciones cenitales, por la propia situación geométrica del diedro a medir, no deberá ser tenido en cuenta. En contrapartida, en observaciones azimutales, será el error más importante a temer, y ello tanto más cuanto menor sea la distancia.

De ahí la trascendencia del correcto posicionamiento de la plomada en planimetría, y el importante avance que supone la utilización de bastón centrador o plomada óptica, junto con el centrado forzoso en poligonaciones de precisión.

Utilizando plomada normal y estadia vertical, puede tomarse

$$e_e + e_s = 5 \text{ cm en cota o valor máximo}$$

y con plomada óptica o bastón centrador

$$e_e + e_s = 2,5 \text{ cm en cota máxima.}$$

6.3.3. Error de puntería:

También se lo llama de **error de bisección** o de **error de visación** y se trata de la falta de coincidencia entre la cruz filar y el punto observado.

Este error se lo caracteriza como personal, pues básicamente es imputable al operador, aunque hay limitaciones instrumental es que en cierta forma lo inducen y

⁴ M. Capítulo 12. Epigraf e3.2. Pag303. Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

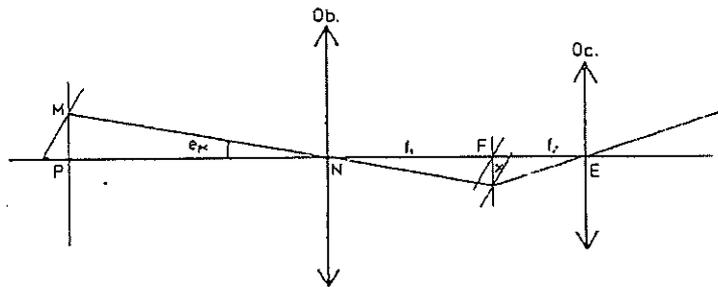
⁵ Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

condiciones ambientales, principalmente atmosféricas (viento, sol, humedad), que lo alternan al afectar al operador e instrumento.

Se trata de un error básicamente **accidental**, aunque suelen existir defectos físicos o costumbres del operador que le dan un matiz sistemático. Hay que tener en cuenta que el operador interviene fundamentalmente en la operación de visado con los sentidos de la vista y el tacto; el primero para verificar la coincidencia del hilo respectivo con el punto y el segundo, en forma indirecta, para lograr ese objetivo, al accionar los tornillos que mueven el anteojo en sentido horizontal o vertical.

Observaciones cenitales ⁶

El error de puntería valdrá e_{pc} y estará medido por el ángulo formado por la visual exacta EP y la aproximada, que suponemos NM, recta que une el centro óptico, del objetivo y el punto M, intersección de la vertical de P (punto donde se ha situado la mira) y la traza horizontal de ésta sobre la que se ha hecho puntería. Según sabemos, el límite de la percepción visual se sitúa en $30''$, y por tanto, el error a temer, dos tercios de la apreciación, valdrá $20''$.



En consecuencia, y supuesto el anteojo en posición telescópica, y representando por x y en milímetros el error de puntería en la imagen, se tendrá:

$$x/f_2 < 20'' \quad f_2 \text{ distancia focal del ocular,}$$

$$\text{y como } e_{pc} = x / f_1$$

$$\text{se deduce } e_{pc} \leq 20'' \cdot f_2 / f_1 = 20'' / (f_1 / f_2) = 20'' / A \quad A: \text{ aumento del anteojo}$$

Todo ello suponiendo una claridad unidad. Pero como ésta disminuye al crecer el aumento, acostumbra a adoptarse un coeficiente empírico que podemos suponer igual a $(1+4A/100)$, con lo que, para uso práctico, adoptamos la expresión final:

$$e_{pc} = 20'' \times (1+4A/100) / A \quad \text{en cota o valor máximo}$$

y si la puntería se realiza sobre un punto menos definido que el supuesto (coincidencia del hilo horizontal del retículo con una raya de la mira), conviene incrementar el error hasta un máximo de:

$$e''_{pe} = 50'' \times (1+4A/100) / A$$

Observaciones azimutales

Al bisecar con el hilo vertical un jalón o una mira, entenderemos la puntería como bien hecha cuando la diferencia entre los ángulos bajo los que vemos ambas mitades no exceda de $30''$. Ello sucede, evidentemente, cuando la bisección alcanza un error de $15''$. Y con un razonamiento exactamente igual al anterior, deducimos el error en cota máxima como:

$$e''_{pa} < 10'' \times (1+4A/100) / A$$

⁶ Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

Este error está condicionado por la percepción visual y el aumento del antejo, siendo el máximo error visual de puntería de 10", se establece, como máximo error acimutal de puntería

El error de puntería en las observaciones azimutales suele ser el menos importante de los que concurren en ellas.

6.3.4. Error de Lectura.

Se trata de un error personal, aunque también tiene su componente instrumental a partir de las limitaciones del respectivo sistema de lectura, mientras las condiciones no afectan notoriamente. Se lo considera accidental por su comportamiento, ya que para el operador su presencia es desconocida y por lo tanto también lo son su magnitud y signo. Según el sistema de lectura, variarán los motivos que lo generan, pudiendo citarse la interpretación, interpolación, coincidencia, etc., en lo que respecta al operador. Por ejemplo en un sistema a nonio hay una importante intervención personal ya que debe interpretar la lectura gruesa, luego buscar una coincidencia, para terminar con la lectura fina que se calcula. En cuanto al sistema con micrómetro óptico primero hay que provocar una coincidencia o calado y luego en la lectura fina se interpola y calcula. En el sistema electrónico no hay prácticamente intervención personal, pero sí, como en todos los sistemas, la parte instrumental por las limitaciones de las componentes intervinientes.

En cuanto a la parte instrumental por las limitaciones del sistema pasan por las reducidas dimensiones de la menor división de la escala principal, deficiencias en la equidistancia intertrazos, trazos irregulares e indefinidos, problemas que se extienden a las escalas accesorias.

Valdrá, según sabemos, los dos tercios de la apreciación, ($\frac{2}{3} a$) y en cota máxima, supondremos los dos tercios de la mínima división del aparato de que se disponga.⁷

Con una sola lectura o sea única lectura:

$$e_l = \frac{2}{3} a \quad \text{siendo } a \text{ la apreciación}$$

Con la aplicación de la regla de Bessel (observación doble, con giro y vuelta de campana) se incrementa la precisión disminuyendo el error de cada observación en $1/\sqrt{2}$ al adoptar el valor promedio de las dos lecturas.

$$e_l = \frac{2}{3} (1/\sqrt{2}) a \cong a/2$$

y si el teodolito es de nonius, en cada puntería se leerán los dos nonius, con lo que en una sola puntería la expresión a aplicar será la (8), y con regla de Bessel:

$$e_l = \frac{2}{3} (1/\sqrt{4}) a \cong a/3$$

6.3.5. Error total

Dado que no todos los errores se cometen al máximo y con el mismo signo, se desecha el criterio de la suma algebraica de sus valores máximos y se recurre a la expresión

$$E_A = \sqrt{e_{va}^2 + e_d^2 + e_{pa}^2 + e_1^2}$$

En visuales acimutales:

⁷ Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

En visuales cenitales:

$$E_C = \sqrt{e_{vc}^2 + e_{pe}^2 + e_1^2}$$

Si aplicamos lo expuesto a algún teodolito tipo se obtendrán los resultados que siguen:

Datos:

Teodolito: Wild T-2. Aumento: 30 x . Sensibilidad nivel: 20". Precisión índice eclímetro: 0" 3. Apreciación: 1". Regla de Bessel:

$$e_{va} = \frac{20''}{12} = 1'' 7$$

$$e_d = \frac{2,5}{150.000} = 0,0000166 \text{ rd} < > 3'' 42$$

$$e_{pa} = \frac{10''}{30} \left(1 + \frac{120}{100} \right) = 0'' 7$$

$$e_1 = \frac{1''}{2} = 0'' 5$$

$$E_A = \sqrt{1,7^2 + 3,42^2 + 0,7^2 + 0,5^2}$$

$$E_A = 10'' 8 \text{ en cota máxima}$$

$$e_{vc} = \frac{20''}{3} = 6'' 7$$

$$e_{pe} = \frac{20''}{30} \left(1 + \frac{120}{100} \right) = 1'' 5$$

$$E_C = \sqrt{6,7^2 + 1,5^2 + 0,5^2}$$

$$E_C = 6'' 9 \text{ en cota máxima}$$

6.3.6. Error de Paralaje

Esta deficiencia óptica fue indicada al describir el sistema óptico del teodolito.

Tiene como origen defectos en las componentes ópticas del anteojo y de la posición relativa entre ellas. Tiene instrumentalmente carácter sistemático, aunque, si tenemos en cuenta que su incidencia varía según la distancia al punto observado y la posición del ojo del observador al visarlo, su presencia y valor es totalmente incierto y la influencia impredecible.

Por lo tanto se lo inscribe dentro de los errores accidentales, no existiendo métodos de medición que lo compensen ni tampoco formas de corrección mecánica.

7. MEDICIÓN DE ÁNGULOS HORIZONTALES CON TEODOLITO

Habíamos afirmado que cualquier trabajo topográfico de alguna **precisión** requiere la presencia y utilización de instrumentos capaces de **medir ángulos** correspondientes a las dos direcciones que lo definen. El Teodolito y la Estación Total son los instrumentos naturales capaces de medir el ángulo formado por dos visuales. Dicho ángulo es el resultado de la proyección en un plano horizontal de las direcciones -visuales-, su medida se determina mediante la diferencia de las lecturas angulares y se denominará **ángulo acimutal o azimutal** (α_{AB}).

Los **métodos** de medición constituyen la forma más simple para el control de las medidas angulares y esenciales para aumentar la precisión de la medida de ángulo.

Al dirigir las visuales sucesivamente a los puntos A y B, las respectivas posiciones del índice i e i' sobre dicho limbo acimutal proporcionan lecturas en limbo horizontal y por diferencia resulta el valor del **ángulo horizontal**.

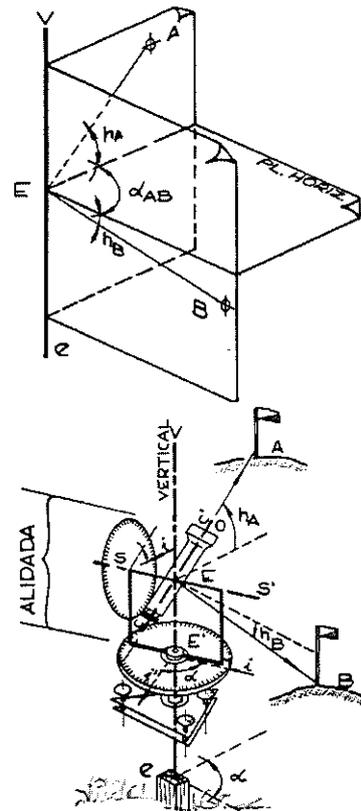
$$\alpha_{AB} = L_B - L_A$$

Donde L_A y L_B son las lecturas sobre el círculo horizontal de dichas proyecciones, medidas a partir de la graduación de 0° del mismo y en sentido horario.

El teodolito y la estación total son instrumentos perfeccionados a través del tiempo para mejorar la calidad (precisión) de los ángulos determinados y realizar el autocontrol de las lecturas obtenidas, de manera simple recurriendo a posibilidades mecánicas:

- Repetir las observaciones, permite aumentar la precisión y además útil para detectar equivocaciones.
- Operar en posiciones axialmente opuestas, conocidas como **C.I.** (círculo vertical a la izquierda) o **C.D.** (círculo vertical a la derecha), característica principal con que se compensan gran parte de los errores en especial los de origen sistemático y se reducen otros.
- Mover el círculo girándolo sobre su base, lo que permite medir ángulos en distintos sectores del mismo con lo que se aumenta la precisión.

Las posiciones clásicas C.I. y C.D. se logran moviendo la alidada sobre la base, a mano para giros importantes, fijar la alidada a la base con un tornillo de fijación horizontal y luego el ajuste final con el tornillo de movimientos pequeños o finos horizontales. Luego, para afinar la puntería, hay que fijar el anteojo con un tornillo de fijación vertical y después accionar otro tornillo de pequeños movimientos verticales.



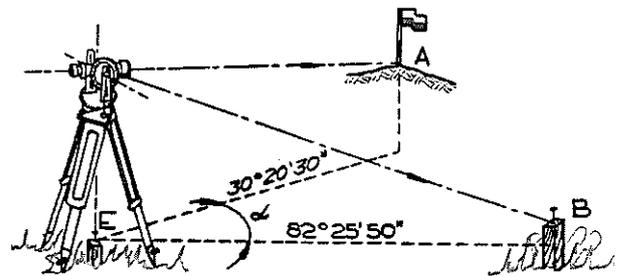
El cambio de posición de la alidada de CI a CD, para poder visar un punto, obliga a girar el anteojo alrededor del eje secundario, operación denominada **vuelta de campana**; girar la alidada 180° , característica que permite el control de las lecturas obtenidas con CI y CD, pues con ella se detectan equivocaciones y además se realiza un autocontrol mediante ambas lecturas. Si existen diferencias importantes y se repiten en las sucesivas observaciones habrá que detectar su origen y buscar solución al problema.

El giro del círculo sobre su base presenta distintos grados de movilidad, con lo cual se pueden medir los ángulos en distintos sectores del mismo, procedimiento esencial para posibilitar la reducción de errores de graduación. Para ello los teodolitos cuentan con distintos accesorios y tornillos de fijación, para movimientos finos o limitados. Según se trate de **teodolitos reiteradores o repetidores**. En los primeros se lo puede girar sobre la base en forma limitada y sin mayor justeza, en cambio los repetidores admiten giros ilimitados y controlados, de manera que se puedan provocar lecturas con exactitud.

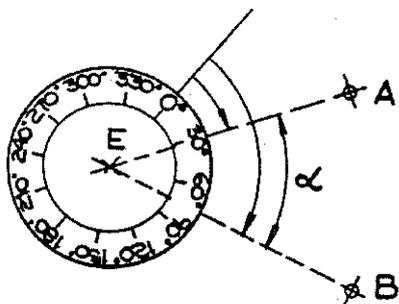
Mediante el giro del círculo graduado de los teodolitos tradicionales u ópticos se pueden provocar lecturas específicas para determinadas visuales. Según el tipo de instrumento será más o menos dificultoso y preciso, pudiendo citarse el recurso de provocar $0^\circ 00' 00''$ a la primera visual para facilitar el cálculo del ángulo, alternativa no recomendable en esos teodolitos pues complica la operación y no se mejora la precisión. En los teodolitos electrónicos o estaciones totales, es distinto pues la lectura de 0° se logra normalmente con solo accionar de un mando y sin mover el círculo.

7.1. MEDICIÓN ANGULAR SIMPLE

Es la operación básica para determinar un ángulo horizontal y consiste en tomar las lecturas L_A y L_B sobre el círculo, correspondiente a las visuales hacia los puntos A y B proyectadas; luego haciendo la diferencia entre ambas se obtiene su valor. La visual hacia A es el lado izquierdo y la visual a B el lado derecho



$$\alpha = 82^\circ 25' 50'' (b) - 30^\circ 20' 30'' (a) = 52^\circ 05' 20''$$



Por convención regularmente se ordena el procedimiento de la siguiente manera:

1. Estación con el teodolito en el vértice O.
2. Calaje del teodolito: consiste en colocar perfectamente vertical el eje principal, a través de los niveles de burbuja
3. Se gira la alidada en posición directa (C.I.), hasta bisectar A, ubicado a la izquierda del operador, y se efectúa la lectura en el limbo acimutal LA.
4. Siempre en posición directa, se gira la alidada hasta bisectar B ubicado a la derecha, y se lee LB.
5. Se determina el valor del ángulo α_{AB} restando a la lectura LB del punto a la derecha, la del punto a la izquierda LA, esto es:

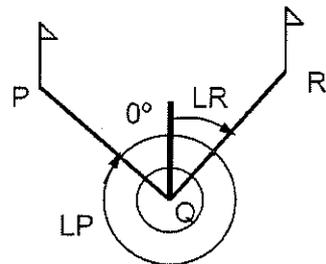
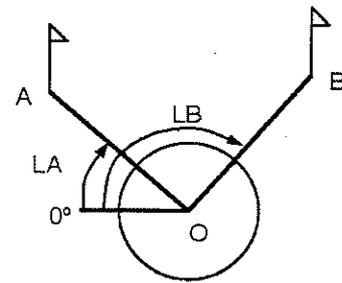
$$\alpha_{AB} = L_B - L_A$$

Supongamos ahora que el 0° del limbo esté ubicado entre las visuales a P y R desde Q. Se deduce de la figura que la medida del ángulo será:

$$\alpha_{PR} = L_R - L_P + 360^\circ$$

Ej: $52^\circ 28' 30'' + (360^\circ - 339^\circ 11' 10'') = 73^\circ 17' 20''$

Para ordenar los datos y cálculos se utiliza una planilla como la que sigue, donde se indican dos ejemplos numéricos. Los valores indicados en los ejemplos corresponden a un teodolito de dos índices (dos nonios).



Est	Lectura C. I.			ANGULO
	Nonio I	Nonio II	Media	
E	a ₁	a ₂	$\frac{a_1+a_2}{2} = a$	b-a = α
	b ₁	b ₂	$\frac{b_1+b_2}{2} = b$	

Ejemplos:

Vértice	Punto Visado	Lecturas			Ángulo
		I	II	$\frac{1}{2}(I + II \pm 180^\circ)$	
O	A	42° 26' 10"	222° 24' 10"	42° 25' 10"	61° 50' 50"
	B	104° 15' 40"	284° 16' 20"	104° 16' 00"	
Q	P	339° 11' 20"	159° 11' 00"	339° 11' 10"	73° 17' 20"
	R	52° 28' 00"	232° 29' 00"	52° 28' 30"	

Este método tiene la ventaja de ser rápido. Pero sus desventajas, no elimina ni reduce los eventuales errores de colimación, verticalidad, inclinación del eje secundario, arrastre del limbo, defectuosa graduación del limbo, defectuosa lectura, defectuosa puntería y, en teodolitos de un solo índice, de excentricidad de la alidada.

Esta medición se puede hacer indistintamente con el C.I. o C.D., aunque la primera, por convención, se la considera como la principal y se dice que es el "círculo director"; en cuanto a la posición se la llama "círculo a la izquierda", "círculo izquierda", "normal" o "directa".

7.2. MÉTODO O REGLA DE BESSEL

También llamado método de Gauss, o de las observaciones **conjugadas** o **cruzadas**, medición angular **con compensación o completa**.

Simplemente consiste en realizar 2 mediciones simples del ángulo, una con CI y otra con CD, resultan así promediadas las direcciones que concurren al vértice y por diferencia de ellas se obtiene el ángulo.

Sirve para detectar equivocaciones, aumenta la precisión de las determinaciones simples. Compensa o reduce la influencia de la mayoría de los desajustes entre sus partes y defectos. Se eliminan los efectos axiales de colimación y de eje secundario, así como de excentricidad de la alidada.

Según hemos visto, reduce el error de lectura en $1/\sqrt{2}$, sin embargo, el error de dirección y el de verticalidad de eje, independientes de la observación, no disminuyen.

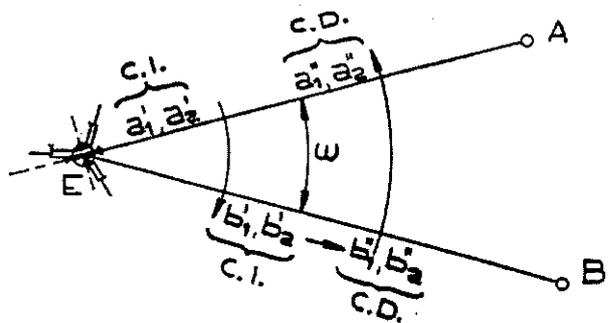
En cuanto al de puntería, dependiente del poder separador del ojo, teóricamente también disminuye en $1/\sqrt{2}$. En la práctica no se corrobora exactamente la teoría, debido posiblemente a una cierta inercia mental del observador que, por razones de tipo fisiológico, le inducen a sistematizar su propio error. No obstante, la pequeña entidad del mismo hace que carezca de importancia práctica sustanciar exactamente la cuestión.

Tanto al bisectar A como al hacerlo con B, se han efectuado dos lecturas del limbo en cada nonio (SI LOS TIENE), es decir leyendo para cada una en los dos nonius del teodolito y para ambas posiciones del anteojo, promediándose ambas, con lo que se ha eliminado el error de excentricidad.

1. Con C.I. se bisecta el punto A a la izquierda del observador.

2. Se toma la lectura L_{Ai} correspondiente a la visual hacia A con C.I.

3. Se gira la alidada en sentido horario y se bisecta con C.I. el punto B, se toma la lectura L_{Bi} correspondiente a la visual hacia B con C.I.



Terminada esta etapa con C.I. (en B)

se completa el proceso operando con CD, se gira la alidada 180° y vuelta de campana el anteojo.

5. Con C.D. se bisecta el punto B. y se toma la lectura L_{Bd} correspondiente a la visual hacia B (con CD).

6. Se gira alidada y se bisecta con CD el punto A, se toma la lectura L_{Ad} correspondiente a la visual hacia A (con CD).

Dicha secuencia se complementa con la correspondiente notación la cual, si es manual, se realiza con una planilla como vemos a continuación.

Se realiza el promedio de las lecturas obtenidas con C.I. y C.D. para cada dirección:

$$\frac{1}{2} (L_{Ai} + L_{Ad} - 180^\circ) = L_A \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} (L_{Bi} + L_{Bd} - 180^\circ) = L_B \Rightarrow \alpha_{AB} = L_B - L_A$$

Como regla práctica se advierte que el valor en grados no se promedia sino que se utiliza la del C.I., círculo director, promediando sólo minutos y segundos, salvo casos especiales.

Estación	Pto. visado	C.I.	C.D.	Promedios	Ángulo
E	A	L _{Ai}	L _{Ad}	L _A	$\alpha_{AB} = L_B - L_A$
	B	L _{Bi}	L _{Bd}	L _B	

Para el caso de los teodolitos antiguos donde se hacen lecturas a los nonios, planilla para medición angular por el Método de Bessel es

Estación	Punto Visado	LECTURAS ANGULOS						Promedio general	ANGULO
		C. I.			C. D.				
		Nonio I	Nonio II	Media	Nonio I	Nonio II	Media		
E	A	a'1	a'2	$a'1+a'2/2=a'$	a"1	a"2	$a"1+a"2/2=a''$	$a'+a''/2=a$	$\alpha_{AB} = b - a$
	B	b'1	b'2	$b'1+b'2/2=b'$	b"1	b"2	$b"1+b"2/2=b''$	$b'+b''/2=b$	

Ejemplo:

P.E.	P.V.	Posición de Círculo		Promedio de Direcciones	Ángulo Deducido
		Izquierda	Derecha		
A	B	0° 28' 36"	180° 28' 12"	0° 28' 24"	63° 33' 45"
	C	64° 02' 18"	244° 02' 00"	64° 02' 09"	

POSIBILIDADES DE COMPENSACIÓN O REDUCCIÓN DE LAS INFLUENCIAS DE LOS ERRORES del teodolito, -instrumentales, de posición y operativos-, que afectan a las medidas angulares:

- **Centrado**, este error de posición del instrumento influye en la lectura angular de las direcciones en su función de su magnitud, ubicación y distancia de la visual, por lo que no se ve alterada por el uso de los recursos mecánicos instrumentales del caso.

- **Verticalización**. Este error, también de posición, es accidental y sumamente cambiante, se manifiesta a través de dos defectos, la inclinación del círculo y la del eje secundario. El primero no tiene una influencia relevante en las medidas angulares topográficas para una desverticalización "normal". En cuanto a la inclinación del eje secundario influye en forma similar al error de inclinación, aunque en función de la posición acimutal de la visual. Así es que la influencia $v' = v \operatorname{tg} h \cdot \operatorname{sen} \alpha$, subsiste aún cuando se aplique la regla de Bessel.

- **Error de colimación**. Hemos visto que afecta todas las direcciones y su influencia varía según su ángulo vertical, $c' \cong c \cdot \operatorname{Sec} h$. Por lo tanto, al operar con C.I. y C.D. las influencias sobre las lecturas de cada dirección, tendrá igual valor y distinto signo, por

lo que al sumar para determinar el promedio, se compensa en consecuencia **no afectará el ángulo.**

- **Error de inclinación.** Este error también afecta todas las direcciones y su influencia varía según el ángulo vertical de las mismas $i = i \operatorname{tg} h$. O sea que al tomar lecturas con CI y CD hacia un mismo punto influirá sobre cada una de ellas con la misma magnitud, aunque con distinto signo, **compensándose** al sumar ambas lecturas para calcular el promedio.

- **Error de excentricidad de la alidada.** Afecta todas las direcciones y su influencia tiene igual magnitud pero distinto signo según se opere con CI o CD, por lo tanto se **compensará** al sumar las respectivas lecturas hacia un punto.

- **Error de graduación.** Son defectos constantes de la equidistancia entre las divisiones del círculo cuya magnitud y ubicación son prácticamente impredecibles. Por lo tanto, la posibilidad de compensación de su influencia es imprevisible y solo se puede esperar un aumento de la probabilidad de que ello ocurra midiendo el ángulo varias veces, en distintos lugares del círculo tratando de ocuparlo totalmente.

- **Error de índice.** Afecta las lecturas angulares cuando se opera con instrumentos con doble visión del círculo para cada dirección; en los teodolitos antiguos son dos las lecturas, que al ser promediadas reducen a la mitad los efectos del error. Esa reducción es automática en los escasos teodolitos ópticos de orden topográfico con doble visión del círculo.

- **Error de visación.** Este error de puntería es básicamente accidental, aunque puede tener su componente sistemática a partir de defectos físicos (vista) del operador. La parte accidental de este error tiende a compensarse en la medida que se realizan más observaciones.

PRECISIÓN EN LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS.

Para aumentar la precisión se debe realizar mayor cantidad de observaciones con iguales condiciones que incluyen: instrumental, operador, condiciones climáticas, de lugar y el método. En cuanto a este último factor tomaremos como referente el de Bessel, ya que todos los métodos topográficos que, veremos seguidamente son variantes del mismo y de su forma de repetición.

Conforme la Teoría de Errores, el valor más probable es la media aritmética, es el resultado del promedio de los **n observaciones** de una serie, una vez desechadas las equivocaciones y eliminados o compensados los errores sistemáticos, por lo que:

$$\alpha = \sum \alpha_i / n \text{ donde los errores aparentes son } v_i = \alpha_i - \alpha ;$$

Al incrementar la cantidad de medidas para aumentar la precisión queda demostrado a través del **error medio cuadrático de una observación**

$$m = \sqrt{([vv]/n-1)}$$

Vemos que aumentando el número n de observaciones disminuye el valor de m, lo que implica un aumento de la precisión. De toda forma el aumento del número de observaciones tiene sus límites, fundamentalmente porque los errores aparentes no incluyen solo errores accidentales, sino que es normal que subsista un importante contenido de errores sistemáticos, pues en Topografía es común que no sean corregidos con rigurosidad. No obstante, la mayoría de los errores sistemáticos son

compensados al medir con la regla de Bessel, posibilidad que se acentúa en mayor o menor medida con los métodos que veremos seguidamente.

El número de observaciones en la práctica regular topográfica se llega a cuatro (4) determinaciones, siendo la observación duplicada de Bessel la que prevalece. Esto se debe a por ejemplo:

- Aplicado al control de movimientos de grandes estructuras e instalaciones industriales.

- El instrumental ha evolucionado notoriamente, por lo que es fácil que se alcance sin mayores dificultades las exigencias topográficas. Por ejemplo, los teodolitos o estaciones totales electrónicas con lecturas mínimas directas por debajo de 10", circunstancia de excepción en el instrumental anterior con sistema óptico y en mayor medida el tradicional.

- El número de veces que hay que medir un ángulo es un tema que merece ser analizado minuciosamente en cada caso. No obstante, en términos generales, considerando dos aspectos esenciales, la precisión exigida o deseada y la del instrumento disponible, se suele utilizar para calcular el número de determinaciones de un ángulo la siguiente expresión.

Sabemos que error medio cuadrático del Promedio de n observaciones es

$$M = m / \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow m = M \cdot \sqrt{n}$$

donde m es la apreciación

M la precisión exigida (medida de precisión)

O sea que si se exige la precisión M y la del instrumento disponible m , la cantidad de observaciones n a realizar será:

$$n = (m / M)^2$$

El valor que resulta de n es válido siempre que la discrepancia entre apreciación m y la precisión M no sea muy grande, de manera que resulte razonable conforme lo expuesto al respecto.

- Ejemplo:

Si se opera con un teodolito de apreciación 20" y el trabajo a realizar exigiera obtener valores angulares con seguridad del orden de los 5", será necesario realizar una serie de mediciones tal que se cumpla:

$$20" = 5" \sqrt{n}$$

donde n es el número de veces que debe medirse el ángulo.

Resulta así:

$$(20/5)^2 = n = 16$$

Para el caso de valores angulares dentro de una precisión de 1" y medidos con teodolito de apreciación de 20", tendremos que hacer $n = 400$, lo que es incompatible frente al predominio que adquirirían los errores sistemáticos sobre los accidentales.

- Dado lo poco práctico del procedimiento, por el gran número de operaciones a realizar, debe apelarse a instrumental moderno que asegure una mayor precisión en las lecturas.

- Realizado un gran número de mediciones para un mismo ángulo, estaremos en el caso conocido de la "medición repetida de una línea" y en general de cualquier serie de observaciones, donde el valor más plausible será la media aritmética, en base a la cual determinaremos el **error medio m_α de una observación aislada y el error medio del promedio de las observaciones $M_\alpha = m_\alpha / \sqrt{n}$** que usaremos en nuestros cálculos.

7.3. MÉTODO DE REPETICIÓN.

Como sabemos existen teodolitos que disponen de tornillo de coincidencia (movimiento lento) en el movimiento general y se denominan **repetidores**. Ello permite apuntar a un punto con una lectura prefijada y define y posibilita el presente método.

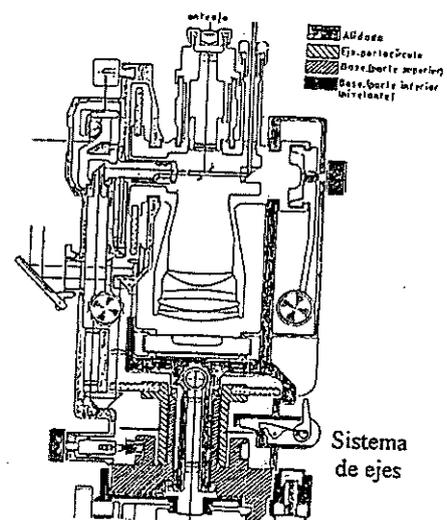
Es decir, se dispone de un conjunto portacírculo que puede girar en forma independiente a la base con alidada. Esa independencia hace que durante la medición se pueda:

- **Fijar el portacírculo a la base** mediante un tornillo específico, por lo que la alidada podrá girar sobre el conjunto limbo-alidada operando convencionalmente.

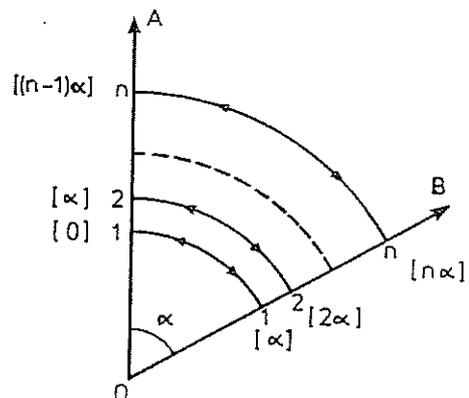
- **Liberar el portacírculo de la base** y girarlo sobre la misma **en forma independiente conjuntamente con la alidada**. Esta posibilidad permite por un lado ubicar el círculo en distintas posiciones y por otro provocar en una dirección cualquiera la lectura que se desee.

Estos instrumentos tienen doble juego de tornillos de fijación, el común para controlar los movimientos de la alidada respecto al conjunto portacírculo y el descrito precedentemente entre la base y el portacírculo fijándolo a la alidada.

El método consiste en realizar la coincidencia de ceros de limbo e índice (es decir, conseguir la lectura cero en el apartado) y manteniendo apretado el tornillo de presión de la alidada (es decir, manteniendo la lectura), aflojar el tornillo del movimiento general y por medio de él y el de coincidencia, apuntar al primer punto en el sentido de la graduación (O1A). Así se leerá **cero en la dirección OA**. Fijando el movimiento general ahora, se suelta la alidada y se apunta a B (O1B). No se realiza ninguna lectura, solamente lectura sólo en grados y minutos, para tener concepto de la abertura del ángulo cuyo valor pretendemos conocer. De nuevo se fija el limbo y se suelta el movimiento general (el círculo queda fijo a la



Corte de Teodolito repetidor.



alidada y no a la base) apuntándose de nuevo en A, con lo que la lectura α aparecería en la dirección A(02A). De nuevo se suelta la alidada, (el círculo queda fijo a la base y no a la alidada) fijando el movimiento general y se apunta a B(02B). Si ahora se leyese en la posición 02B, evidentemente la lectura sería 2α .

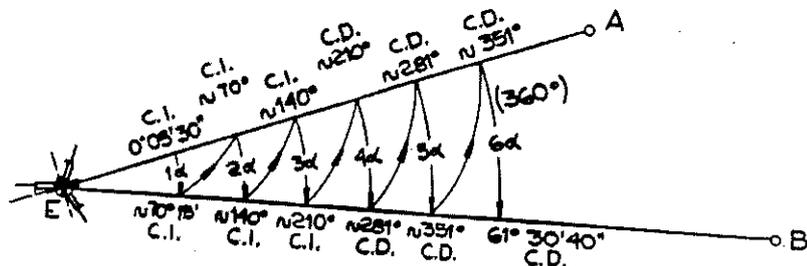
Así, si se sigue aplicando el procedimiento indicado, podrá llegar a conocerse, con una sola lectura, después de n repeticiones, un ángulo de valor $n\alpha$, siendo α el ángulo buscado. El valor de la lectura final, dividido por el número n de repeticiones efectuadas, dará el valor α buscado con mayor precisión que con una sola lectura.⁸

Insistimos con el método operatorio: colocar el índice director en las proximidades del cero del limbo con C.I., dirigimos nuestra visual hasta enfocar con el anteojo la señal en el vértice A, bisectándolo correctamente y anotando debidamente el valor de esa dirección leída en el limbo; luego aflojando el tornillo de freno de la alidada se dirige la visual hacia B y cuando la señal está dentro del campo del anteojo, con el tornillo de aproximaciones acimutales correspondiente, se bisecta debidamente el vértice B, procediendo a realizar la lectura sólo en grados y minutos -para tener concepto de la abertura del ángulo cuyo valor pretendemos conocer-. Para integrar en el limbo un segundo valor del ángulo, se procede a aflojar el tornillo de freno del limbo a la base y fijarlo a la alidada haciéndolo girar junto con el anteojo de derecha a izquierda, hasta encontrar el vértice A, bisectándolo debidamente actuando sobre el tornillo de aproximaciones del limbo. Realizado esto, se afloja el freno de alidada dirigiendo la visual hacia B, bisectado el cual, se ajusta el freno de alidada y con el tornillo de aproximaciones se bisecta correctamente la señal. Con esta operación, hemos integrado un nuevo valor en el limbo.

La operación descrita, se repite todas las veces que sea necesario, teniendo precaución de efectuarla igual número de veces tanto en círculo izquierda como en círculo derecha, a los efectos de eliminar la influencia de errores axiales, debiéndose anotar el último valor registrado en el limbo con círculo derecha bisectando el vértice B. La precaución indicada más arriba de efectuar una lectura aproximada y anotarla, cuando se bisecta el vértice B en la primera parte de la operación, es debido a que puede acontecer que al quedar integrada por un número de n veces el valor del ángulo, se exceda del valor de todo el círculo graduado, igual a 360° en cuyo caso al dividir el

valor de la última lectura por el número de veces que se ha repetido el ángulo, obtengamos valores que no sean reales.

Sea dado el caso de un ángulo de valor aproximado a los 75° ;



⁸ Chueca Pazos, J. Herráez Boquera, J. Berné Vaiero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

si repetimos 6 veces, el último valor que se anotará será un número de alrededor a los 90°. Es evidente, que si no se ha tenido la precaución de entrar en conocimiento del valor aproximado del ángulo al dividir por 6, nos encontraremos con un valor angular muy distinto del real. Pero si al valor 90° le sumamos una vuelta completa de limbo, 360° ó si fuera necesario dos veces el mismo, tendremos en tal caso: $(360° + 90°) / 6 = 75°$ valor correcto de la observación. El método descrito tiene la ventaja de ahorrar tiempo, haciendo bisecciones y aprovechando mejores lecturas, inicial y final, en el limbo.

Ejemplo: con 2 nonios

PLANILLA DE OBSERVACIONES

Estación	Punto Visado	LECTURAS ANGULOS				VECES REPETIDAS	Promedio de nonios
		C. I.		C. D.			
		Nonio I	Nonio II	Nonio I	Nonio II		
E	A	0°05'20"	180°05'40"	-----	-----		0°05'30"
	B	(70°05'--")	x x x	-----	-----	1	
	B	x x x	x x x	-----	-----	2	
	B	x x x	x x x	-----	-----	3	
	Vuelta de campana anteojo y giro de la alidada P.V.:A						
	B	-----	-----	x x x	x x x	4	
	B	-----	-----	x x x	x x x	5	
	B	-----	-----	61°30'20"	241°31'00"	6	61°30'40"
$6 \alpha = 421° 30' 40'' - 0° 05' 30'' = 421° 25' 10'' \Rightarrow \alpha_m = 421° 25' 10'' / 6 = 70° 14' 11''$							+ 360°
							421°30'40"

$\alpha_m = \alpha_n / n = \text{Promedio de nonios} / n^\circ \text{ repeticiones}$

En efecto, en la primera repetición, siendo α , la lectura que se obtuviera, se tendría:

$$\alpha = \alpha_1 + l_1 + l_0 + p_1 + p_2 + v + d$$

de donde

$l_0 = \text{error de lectura en } 01A$

$l_1 = \text{error de lectura en } 01B$

$p_1 = \text{error de puntería en } 01A$

$p_2 = \text{error de puntería en } 01B$

$v = \text{error de verticalidad}$

$d = \text{error de dirección}$

~~$\alpha_1 = \text{lectura en } 01B.$~~

Con dos repeticiones, se tendrá, con análoga notación:

$$2\alpha = \alpha_2 + l_0 + l_2 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 2v + 2d$$

Y en n repeticiones:

$$n\alpha = \alpha_n + l_0 + l_n + \sum_{i=1}^{2n} p_i + nv + nd$$

De donde:

$$\alpha = \frac{\alpha_n}{n} + \frac{l_0 + l_n}{n} + \frac{\sum_1^{2n} p_i}{n} + v + d$$

Y el error cometido valdrá

$$\alpha - \frac{\alpha_n}{n} = \text{error total}$$

Evidentemente, si llamamos, según antes hicimos e_l , e_d , e_{va} , e_{pa} a las cotas máximas de error de cada determinación, se tendrá, para n repeticiones

Error de lectura

$$E_l = \frac{e_l \sqrt{2}}{n}$$

$$E_d = e_d$$

$$E_v = e_{va}$$

$$E_{pa} = \frac{e_{pa} \sqrt{2n}}{n}$$

Todos en cota o valor máximo y el error cometido valdrá

$$E_T = \sqrt{E_l^2 + E_d^2 + E_v^2 + E_{pa}^2}$$

$$E_T = \sqrt{\frac{2e_l^2}{n^2} + \frac{2e_{pa}^2}{n} + e_{va}^2 + e_d^2}$$

El error de lectura queda sensiblemente reducido en el método de repetición. También, aunque en menor cuantía, el de puntería, y permanecen invariables los de verticalidad y dirección. Cabe señalar que, aumentando el número de repeticiones, disminuye el error, pero cada vez más lentamente. A partir de un cierto número de repeticiones no merece la pena el incremento de precisión obtenido comparativamente al trabajo adicional que se requiere n .⁹

El procedimiento descrito (coincide con el **aditivo multiplicativo**) tiene 3 **distintas variantes** según se proceda luego terminar la etapa con C.I., así tendremos los métodos:

Repetición general:

1. Con C.I. se bisecta A y se toma la lectura L_{Ai}
2. Se pasa a bisectar B girando la alidada, (tomar una lectura L_{Bi} como valor de referencia). Con este paso se acumula el 1^{er} valor de α .
3. Se bisecta nuevamente A girando el conjunto limbo-alidada por lo que no se modifica la lectura.
4. Se vuelve a bisectar B moviendo solo la alidada con lo que se suma el 2^{do} valor de α .

Así sucesivamente se repite n veces el procedimiento con C.I. culminando con la

⁹ Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

última bisección de B y la lectura L_{Bi} .

En esta primera etapa con CI se termina determinando α de la siguiente manera con un promedio parcial: $\alpha_i = (L_{Bi} - L_{Ai})/n$

Luego se pasa a operar de igual forma con CD en donde el proceso es el siguiente:

a.- Se bisecta el punto A con C.D. y se toma la lectura L_{Ad}

b.- Se gira la alidada hasta bisectar B

c.- Se vuelve a bisectar A girando el conjunto limbo-alidada

También aquí se repite el procedimiento hasta realizar las n mediciones previstas del ángulo, en el último paso consiste en bisectar B y tomar la lectura final L_{Bd} .

El cálculo del ángulo de esta etapa con CD se logra: $\alpha_d = (L_{Bd} - L_{Ad})/n$

Finalmente el cálculo del ángulo definitivo resulta de: $\alpha = (\alpha_i + \alpha_d)/2$

La planilla a realizar que se recomienda es del siguiente tipo

Est.	P.V.	N° Ref.	Lecturas		Ángulos	
			CI	CD	Prom. parcial	Prom. gral.
O	A	-			$\alpha_i = \frac{l_{bi} - l_{ai}}{n}$	$\alpha = \frac{\alpha_i + \alpha_d}{2}$
	B	1	l_{ai}			
	.	2	.			
	.	.	.			
	B	n	l_{bi}			
	A.	-		l_{ad}	$\alpha_d = \frac{l_{bd} - l_{ad}}{n}$	
	.	1		.		
	.	.		.		
	.	.		.		
	B	n		l_{bd}		

Se recomienda que los giros, tanto de la alidada sola como del conjunto círculo-alidada, sean realizados siempre en sentido horario.

Repetición aditivo multiplicativo. La primera parte del procedimiento se opera con CI en forma idéntica al método anterior, salvo el último paso. O sea, se empieza bisectando A y tomando la lectura L_{Ai} y luego de n repeticiones con CI, al bisectar B, no se toma la lectura sino que se pasa a bisectar A con CD manteniendo fijo limbo-alidada, con lo que no se altera la lectura. Luego con CD se sigue el mismo procedimiento, esto es girando solo la alidada cuando se pasa de A a B y el conjunto limbo-alidada si se gira desde B a A. Se termina al bisectar B luego de n repeticiones con CD y se toma la lectura L_{Bd} . El ángulo toma la lectura $\alpha = (L_{Bd} - L_{Ai})/n$

La planilla a realizar que se recomienda es del siguiente tipo

Est.	P.V.	N° Ref.	Lecturas		Ángulos	
			CI	CD		
O	A	-			$\alpha = \frac{l_{bd} - l_{ai}}{2n}$	
	B	1	l_{ai}	.		
		
		
	B	n		.		
	A	-		.		.
	B	1		.		.

	B	2n		l_{bd}		.

Repetición aditivo-sustractivo. Se empieza bisectando A y toda esta primera parte con CI es similar a los otros métodos de repetición detallados, terminando el proceso con CI al bisectar el punto B y tomar la lectura L_{Bi} , después de n observaciones en donde se fue acumulando el ángulo.

A partir de este punto cambia el procedimiento ya que se pasa a operar con CD bisectando el punto B para lo cual se mueve el conjunto limbo-alidada por lo que no se altera la lectura L_{Ai} ($=L_{Bd}$), aunque conviene verificarla dada la serie de movimientos realizados.

Acá estamos en condiciones de determinar un primer valor de $\alpha_i = (L_{Bi} - L_{Ai})/n$

Ahora operando con CD se bisecta A girando solo la alidada, lo que se repite n veces al girar desde B hacia A, mientras que para pasar desde A hasta bisectar B se hacen girando el conjunto limbo-alidada. De esta manera se va restando el ángulo α y luego de las n repeticiones termina la operación bisectando A y tomando la lectura L_{Ad} , la cual, si se ha trabajado correctamente, es semejante L_{Ai} del comienzo.

En estas instancias se calcula el valor de α con CD $\alpha_d = (L_{Bd} - L_{Bi})/n$

Finalmente α resulta de $\alpha = (\alpha_i + \alpha_d)/2$

La planilla a realizar que se recomienda es del siguiente tipo

Est.	P.V.	N° Ref.	Lecturas		Ángulos	
			CI	CD	Prom. parcial	Prom. gral.
O	A	-	l_{ai}		$\alpha_i = \frac{l_{bi} - l_{ai}}{n}$	$\alpha = \frac{\alpha_i + \alpha_d}{2}$
	B	1				
	.	2	.			
	.	.	.			
	B	n	l_{bi}			
	A.	-		$l_{bd} = l_{bi}$	$\alpha_d = \frac{l_{bd} - l_{ad}}{n}$	
	.	1				
	.	.				
	.	.				
	B	n		l_{ad}		

7.4. METODO DE REITERACIÓN

Si en razón de ser necesaria o conveniente una **mayor precisión** que la que nos puede brindar el instrumento en uso, fuera necesario medir más de una vez un ángulo, podemos "**Reiterar**" las operaciones las veces que sea necesario, iniciando cada una de las observaciones en las proximidades del número que resulte de dividir: $180^\circ/n'$, siendo n' el número de reiteraciones a efectuar en cada círculo.

Se trata de distribuir las n determinaciones en distintos sectores del círculo tendiendo a reducir los efectos de los errores de graduación. Con ese fin es indispensable que el instrumento permita girar el círculo respecto a su base, posibilidad mecánica con que cuentan la mayoría de los teodolitos topográficos, sean reiteradores o repetidores.

En cuanto al número n de determinaciones hay que tener en cuenta por un lado la precisión exigida y por otro la que proporciona el instrumento. Si esta última supera la exigida obviamente bastará con una sola determinación mediante el método de Bessel, posibilidad sumamente probable en la actualidad y en la mayoría de las labores topográficas, pues es común contar con instrumentos electrónicos de alta precisión topográfica. La cantidad n de determinaciones tiene sus límites pues obviamente no

puede suponerse que con cualquier teodolito, por baja que sea su calidad, se pueda alcanzar cualquier precisión con el simple recurso de aumentar n.

La citada reducción de la influencia de los errores de graduación de los círculos mediante este método, no es más que un aumento de las posibilidades de atenuar sus efectos, pues, como se ha dicho, estos errores existen a lo largo de todas las divisiones o códigos de los círculos, desconociéndose su magnitud y ubicación, no pudiéndose eliminar ni corregir instrumentalmente.

El método operativo para la medición del ángulo, es una **repetición del método de Bessel**. El mismo elimina errores axiales, con la ventaja de una mayor precisión. Consiste, en líneas generales, en medir n veces el ángulo deseado tomando el promedio como valor más probable final. No necesita la utilización de movimiento lento en el general. Los teodolitos que carecen de dicho tornillo se llaman **reiteradores**. No obstante, para conseguir una precisión adicional, se combina cada reiteración con la regla de Bessel, y se mide cada ángulo en una zona del limbo, a efectos de atenuar posibles errores de graduación de limbos. O sea:

$$n' = n/2$$

n = n° de reiteraciones

n' = veces con C.I. y veces con C.D.

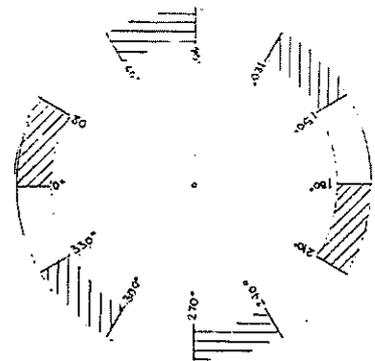
Para conocer los sectores de círculo a utilizar en cada determinación por Bessel, se divide el semicírculo, 180°, por el número n de ellos, por ejemplo si son tres (3) las reiteraciones: $180^\circ/n = 180^\circ/3 = 60^\circ$

Este valor se lo utiliza para definir el origen de cada reiteración, por lo que es de práctica que la primera se empiece con una lectura de 0° con C.I., la segunda con 60° y la tercera 120°. Todas estas lecturas pueden ser aproximadas pues no tiene sentido un origen exacto, particularmente en los teodolitos reiteradores donde es difícil provocar valores exactos.

Al comenzar con cada reiteración con C.I. y para el punto puesto a la izquierda del operador, en la figura se observa los espacios que ocupa cada reiteración considerando que el ángulo medido es de aproximadamente 30°.

Se observa que al empezar con 0° con C.I. se cubrirá los 30° mientras que al operar con C.D. el espacio de círculo utilizado será de 180° a 210°. Lo mismo ocurre en la segunda reiteración aunque en este caso se ocupará desde 60° a 90° con C.I. y con C.D. desde 240° a 270°.

Analizando el cubrimiento del círculo se ven, espacios sin cubrir por lo que la intención de ocupar todo el círculo con las lecturas, no depende solo de la cantidad de reiteraciones en la medición del ángulo con Bessel, sino también de la medida de dicho ángulo. Por ejemplo, si en este mismo caso fuera de más de 60° en lugar de 30° habría un cubrimiento total y además espacios ocupados por las lecturas superpuestas.



Todo esto pone de manifiesto la variedad de situaciones que se pueden presentar con esta alternativa tendiente a reducir los efectos de las deficiencias en la división del círculo.

Ahora, supongamos que queremos realizar 4 reiteraciones. Se operará como sigue:

- 1) Se dirige la puntería al primer punto en el sentido de la graduación. Se toma lectura.
- 2) Puntería al segundo punto. Se anota lectura.
- 3) Giro de 180° y vuelta de campana.
- 4) Puntería al segundo punto. Lectura.
- 5) Puntería al primer punto. Lectura.
- 6) Nuevo giro de 180° y vuelta de campana.
- 7) Con el movimiento general se gira el limbo 90° aproximadamente.
- 8) Se actúa de nuevo como en 1, 2, 3, 4, 5.

Así se ha medido el ángulo cuatro veces, una en cada cuadrante del limbo, según se deseaba por el motivo antes indicado. Según el método explicado y con la notación conocida, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + l_1 + l_2 + p_1 + p_2 + v + d && (1.ª \text{ reiteración}) \\ \alpha &= \alpha_2 + l_3 + l_4 + p_3 + p_4 + v + d && (1.ª \text{ reiteración}) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha &= \alpha_n + l_{2n-1} + l_{2n} + p_{2n-1} + p_{2n} + v + d && (n.ª \text{ reiteración}) \end{aligned}$$

De donde

$$\alpha = \frac{\sum_1^n \alpha_i}{n} + \frac{\sum_1^{2n} l_i}{n} + \frac{\sum_1^{2n} p_i}{n} + v + d$$

El error definitivo valdrá

$$\alpha = \frac{\sum_1^n \alpha_i}{n} = \text{error total}$$

Y se seguirá asimismo

$$E_l = \frac{e_l \sqrt{2n}}{n}$$

$$E_{pa} = \frac{e_{pa} \sqrt{2n}}{n}$$

$$E_d = e_d$$

$$E_v = e_{va}$$

todos en máximo valor. Con lo que el error total valdrá

$$E_l = \sqrt{\frac{2e_l^2}{n} + \frac{2e_{pa}^2}{n} + e_{va}^2 + e_d^2}$$

Análogamente al método de repetición permanecen invariables los errores de verticalidad y dirección pero disminuyen con n los de lectura y puntería, en este caso, en la misma proporción.¹⁰

Lo mismo que para el método de Bessel, es conveniente realizar las anotaciones en un formulario de las siguientes características:

Ej.: n=6 reiteraciones ∴ n'=n/2=3 con cada círculo: C.I:0°,60°,120°; C.D: 180°,240°,300°(180°/3)

Estacion	Punto	Visado	LECTURAS ANGULOS						ANGULO	
			C. I.			C. D.				Promedio general
			Nonio I	Nonio II	Media	Nonio I	Nonio II	Media		
E	A	0°13'15"	13'30"	13'22"	180°13'30'	13'15"	13'22"	0°13'22"	46°41'42"	
	B	46°54'45"	55'15"	55'00"	226°55'15'	55'00"	55'08"	46°55'04"		
E	A	60°07'45"	08'15"	08'00"	240°08'15'	08'00"	08'08"	60°08'04"	46°41'49"	
	B	106°49'30'	49'45"	49'38"	286°50'15'	50'00"	50'08"	106°49'53"		
E	A	120°08'30"	08'30"	08'30"	300°08'30"	08'45"	08'38"	120°08'34"	46°41'41'	
	B	166°50'15"	50'00"	50'08"	346°50'30"	50'15"	50'22"	166°50'15"		

$$\alpha_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i / 3 = 46^\circ 41' 44''$$

Siendo el valor del ángulo: $\alpha_m = \alpha_i / n'$

Este método es menos preciso que el anterior pues son numerosas las veces que debemos leer y además es mucho más lento.

- **Finalmente debemos aclarar que analizando los métodos de repetición y reiteración se puede deducir que un teodolito reiterador no puede ser repetidor, pero si es repetidor se puede utilizar como reiterador.**

7.5. Comparación entre los métodos de repetición y reiteración.

El método de **repetición** presenta la ventaja previa de que el error final de lectura es inferior al correspondiente en el de **reiteración**.

Por otra parte, su mecánica de aplicación es más simple y los registros de campo más sencillos. No obstante, presenta el riesgo de descansar en dos lecturas simplemente toda la operación, con lo que un error importante en una de ellas puede ser temible.

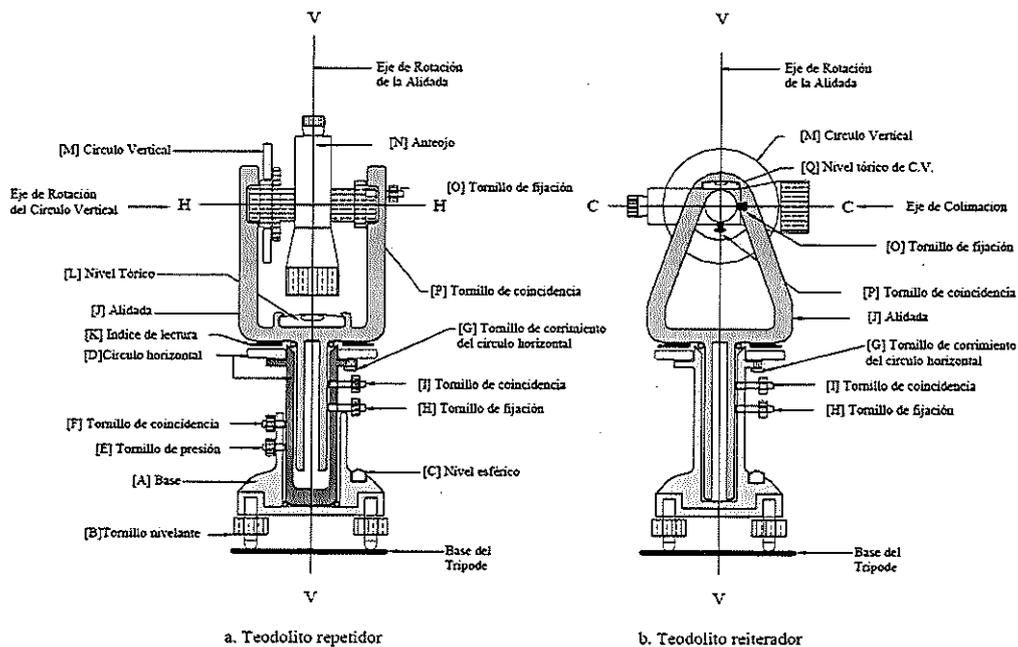
Por otra parte, es preciso cerciorarse de que el aparato esté en muy buenas condiciones en lo que respecta al limbo azimutal, ya que, si se produjeran **arrastres de limbo al realizar las repeticiones**, se produciría un error sistemático de envergadura.

Su más serio inconveniente se deriva de la dificultad de aplicación, comparativamente con el de reiteración, cuando es preciso observar más de un ángulo en cada vértice, circunstancia que siempre, ocurre en triangulaciones y es muy común en cualquier trabajo topográfico. Por ello, el **método de reiteración**, cuya aplicación en el caso antes indicado se conoce con el nombre de **vueltas de horizonte** es mucho más aplicado cuando el número de ángulos en cada vértice es superior o igual a dos, presentando además las ventajas de compensar los errores de graduación y no ser

¹⁰ Chueca Pazos, J.Herráez Boquera, J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

afectado por arrastres de limbo, con la seguridad adicional de repartir en muchas lecturas un posible error de mayor cuantía en una de ellas.¹¹

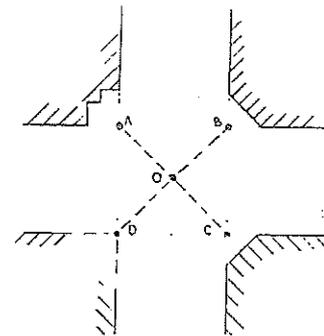
Por otro lado, usando un teodolito reiterador, (con el método de reiteración) es el aconsejado para mediciones **topográficas de precisión** y también en operaciones de Geodésicas, teniendo en cuenta la estabilidad mecánica que presenta el sistema base-portacírculo-círculo. Esto se acentúa si lo comparamos con un repetidor en donde hay una mayor cantidad de piezas en juego que incluye todo ese conjunto que funciona con un eje independiente con tomillo de fijación y pequeños movimientos propios, lo que genera un aumento de los errores en relación con la mayor cantidad de piezas en juego y de sus grados de movilidad.



7.6. MÉTODO DE LAS SERIES.

Es utilizado cuando en una estación es necesario tomar más de un ángulo o sea que hacia la misma concurren más de 2 direcciones. Se lo denomina también método de las direcciones o giros horizontales y los ángulos se calculan haciendo la diferencia de los valores angulares de las direcciones.

Cuando se opera en una sola posición del círculo, CI o CD, se dice que se trata de una **semiserie**, mientras que la obtenida con ambas se llama **serie completa**. Si se desea más precisión se toman varias series completas en cuyo caso se recomienda comenzar cada una en distintas posiciones del círculo para atenuar los efectos de errores de graduación, de manera similar a lo que ocurre con el método de reiteración.



¹¹ Chueca Pazos. J.Herráez Boquera. J.Berné Valero. Tratado de Topografía 1. Teoría de Errores e Instrumentación

Ejemplo: en la planilla usada regularmente en esta operación se observa una medición con este método, con estación en O y los ángulos entre tres direcciones hacia los puntos A, B y C. En el ejemplo se realizan tres series, cuyo origen con CI se provoca con lecturas de aproximadamente 0°, 60° y 120° para la visual hacia A o cualquier otro de los restantes puntos.

P.E.	P.V.	Índice	Posición de Círculo		Promedio de Direcciones	Promedio Reducido	Promedio General
			Izquierda	Derecha			
E	A	0°	0° 13' 22"	180° 13' 30"	0° 13' 26"	0° 00' 00"	0° 00' 00"
	B		155° 59' 53"	336° 00' 05"	155° 59' 59"	155° 46' 33"	155° 46' 32"
	C		250° 45' 10"	70° 45' 21"	250° 45' 16"	250° 31' 50"	250° 31' 48"
	A	60°	60° 37' 04"	240° 37' 12"	60° 37' 08"	0° 00' 00"	
	B		216° 23' 32"	36° 23' 45"	216° 23' 38"	155° 46' 30"	
	C		311° 08' 47"	131° 09' 00"	311° 08' 54"	250° 31' 46"	
	A	120°	121° 02' 14"	301° 02' 23"	121° 02' 18"	0° 00' 00"	
	B		276° 48' 48"	96° 48' 57"	276° 48' 52"	155° 46' 34"	
	C		11° 34' 00"	191° 34' 14"	11° 34' 07"	250° 31' 48"	

Terminando la tarea de campaña se pasa a gabinete donde sucesivamente se van calculando:

1. Los promedios de las lecturas CI y CD de cada dirección, tal como hemos visto en los sucesivos métodos.
2. Los promedios reducidos de cada dirección que consista en asignar el valor de 0°00'00" al origen de cada dirección. Para ello hay que restar a todas las lecturas de la serie el valor correspondiente a la dirección origen. Por ejemplo en la 2^{da} serie habrá que restar el valor de 60°37'08" correspondiente al punto A.
3. El promedio general de cada dirección para lo cual se suman los promedios reducidos de las tres series y se lo divide por tres.
4. El ángulo entre dirección y dirección, restando sucesivamente el valor de cada una al de la anterior.

ERRORES TOTALES EN LA MEDICIÓN ANGULAR¹²

MEDICIÓN SIMPLE	CENITALES: $e_c < \sqrt{\varepsilon_{vc}^2 + \varepsilon_{pv}^2 + \varepsilon_l^2}$
MÉTODO DE BESSEL	ACIMUTALES: $e_a < \sqrt{\varepsilon_{va}^2 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_{pa}^2 + \varepsilon_l^2}$
MÉTODO DE REPETICIÓN	ACIMUTALES: $e_a < \sqrt{\varepsilon_{va}^2 + \varepsilon_d^2 + (2\varepsilon_{pa}^2/n) + (2\varepsilon_l^2/n^2)}$
MÉTODO DE REITERACIÓN	ACIMUTALES: $e_a < \sqrt{\varepsilon_{va}^2 + \varepsilon_d^2 + (\varepsilon_{pa}^2 + \varepsilon_l^2)2/n}$

¹² Dominguez García Tejero - Cuadro preparado por el Agrím. L.O. Tonin- Catedra de Topografía Aplicada

ERRORES EN LA MEDICIÓN ANGULAR¹³

SISTEMÁTICOS	CONSTRUCTIVOS	ERROR DE GRADUACIÓN	REITERACIÓN Y REPETICIÓN
		ERROR DE EJE DE COLIMACIÓN Y ERROR DE EJE SECUNDARIO	
	ERROR DE EXCENTRICIDAD Y DESVIACIÓN DE LOS NONIOS		
DE AJUSTE	ERRORES RESIDUALES (POR IMPERFECCIÓN DE LOS SENTIDOS). FALTA DE EXACTITUD AL CORRREGIR EL INSTRUMENTO. SE DESPRECIA CUANDO LA SUMA DE RESIDUOS ES MENOR QUE LA APRECIACIÓN.		REITERACIÓN
ACCIDENTALES	VERTICALIDAD	OBSERVACIONES CENITALES $\epsilon''_{vc} = v'' \cos \alpha$	$\epsilon''_{vc} < 1/3 s''$
		OBSERVACIONES ACIMUTALES $\epsilon''_{va} = v'' \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ctg} \Delta$	$\epsilon''_{va} < 1/12 s''$ Para $\alpha = 90^\circ$ y visual muy inclinada $\Delta = 75^\circ$
	DIRECCIÓN		$\epsilon''_d = (\epsilon_e + \epsilon_s) \rho'' / D$ Cuando D es pequeña se produce el más grave de los errores en la medición angular
	PUNTERÍA	OBSERVACIONES CENITALES	$\epsilon''_{pc} < (20'' / A) (1 + 4A/100)$ $\epsilon''_{pc} < (50'' / A) (1 + 4A/100)$
		OBSERVACIONES ACIMUTALES	$\epsilon''_{pa} < (10'' / A) (1 + 4A/100)$ Suele ser el menor de los errores accidentales. $e_p < \epsilon''_{pa} \sqrt{2n}^{(1/2)} / n$ Repetición y Reiteración.
LECTURA		$\epsilon''_l < 2 a/3$ Med. Simple $\epsilon''_l < a/2$ Dos direcciones $\epsilon''_l < a/3$ Bessel $\epsilon''_l < \epsilon''_l \sqrt{2n}^{(1/2)} / n$ Repetición $\epsilon''_l < \epsilon''_l \sqrt{2n}^{(1/2)} / n$ Reiteración	

¹³ Dominguez García Tejero- Cuadro preparado por el Agrim. L.O. Tonin- Catedra de Topografía Aplicada

MEDICIONES ANGULARES – INCIDENCIA DEL ERROR DE DIRECCIÓN TOTAL¹⁴

D	VALORES MÁXIMOS DE ($\epsilon_e + \epsilon_s$)											
	$\epsilon_d < 0",5$	$\epsilon_d < 1"$	$\epsilon_d < 2"$	$\epsilon_d < 3"$	$\epsilon_d < 6"$	$\epsilon_d < 12"$	$\epsilon_d < 20"$	$\epsilon_d < 30"$	$\epsilon_d < 60"$			
20000	0,048	0,097	0,194	0,292	0,582	1,164	1,939	2,909	5,818			
10000	0,024	0,048	0,097	0,145	0,291	0,582	0,970	1,454	2,909			
5000	0,012	0,024	0,048	0,073	0,145	0,291	0,485	0,727	1,454			
4000	0,010	0,019	0,039	0,058	0,116	0,233	0,388	0,582	1,164			
3000	0,007	0,015	0,029	0,044	0,087	0,175	0,291	0,436	0,873			
2000	0,005	0,010	0,019	0,029	0,058	0,116	0,194	0,291	0,582			
1000	0,002	0,005	0,010	0,015	0,029	0,058	0,097	0,145	0,291			
500	0,001	0,002	0,005	0,007	0,015	0,029	0,048	0,073	0,145			
200	0,000	0,001	0,002	0,003	0,006	0,012	0,019	0,029	0,058			
100	0,000	0,000	0,001	0,001	0,003	0,006	0,010	0,015	0,029			
50	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007	0,015			
25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,004	0,007			
TIPO DE TEODOLITO	T3	T2			T1		T1A			T0		
APRECIA CIÓN	a = 0,5"	a = 1"			a = 6"		a = 20"			a = 60"		
AUMEN TOS	A = 40	A = 30			A = 28		A = 28			A = 20		
SENSIBILI DAD	s = 6,5"	s = 20"			s = 30"		s = 30"			s = 60"		
ϵ_i (Bessel)	0,0666.	0",333..			2"		6",666..			20"		
ϵ_{pa}	0",65	0",733..			0",757		0",757			0",9		
ϵ_{va}	0",54	1",666..			2",5		2",5			5"		
ϵ_d	0",5	1"	2"	3"	3"	6"	12"	12"	20"	30"	30"	60"
ϵ_a total Bessel	0",98	2",1	2",7	3",5	4",5	6",8	12",4	14",0	21",2	30",8	36",4	63",4

¹⁴ Cuadro preparado por el Agrím. L.O. Tonin- Cátedra de Topografía Aplicada

7.7. MEDICIÓN DE ÁNGULOS CON ESTACIÓN EXCÉNTRICA

Cuando no se lo puede hacer directamente o no es conveniente la determinación de ángulos se realizan procedimientos indirectos.

Con relativa frecuencia no es posible estacionar el teodolito o estación total en el vértice real de un ángulo horizontal, ya sea porque el vértice es inaccesible o bien está materializado por hechos existentes (físicos), que dificultan la medición directa como ocurre con ángulos de edificaciones o bien de espacios delimitados por muros, vegetación, alambrados, etc.

En cuanto a la no conveniencia, se presenta cuando la obtención del ángulo, forma parte de una operación topográfica que incluye otros objetivos, por ejemplo como ocurre al relevar espacios con el método de coordenadas polares.

Surge entonces el problema de cómo medir estos ángulos, contándose para solucionar este problema con los siguientes métodos:

7.7.1. Estación por paralelas

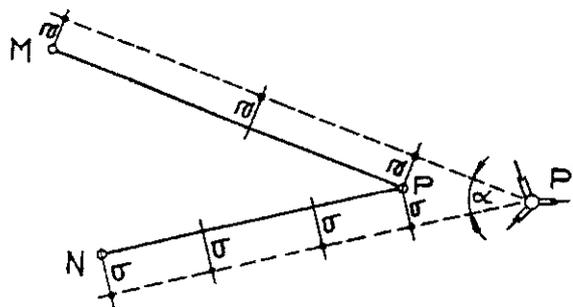
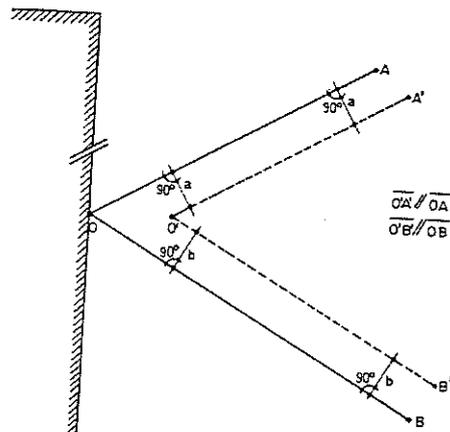
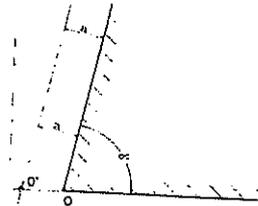
Es el más utilizado y con él se mide un **ángulo semejante** materializado por medio de paralelas a los lados que definen el verdadero ángulo.

Un caso se observa el ángulo α del vértice de una edificación, la cual impide medirlo directamente, por lo cual se recurre a una medición excéntrica en O' . Para ello se prolonga la alineación de uno de los lados y se traza una paralela al otro.

El replanteo de una paralela se hace sobre perpendiculares al lado de la dirección, a una distancia a del mismo, magnitud que variará según las dificultades que se presentan en el lugar. El mínimo de puntos será de dos (2), los que se incrementarán en la medida que aumenten, la longitud del lado y las irregularidades que presente.

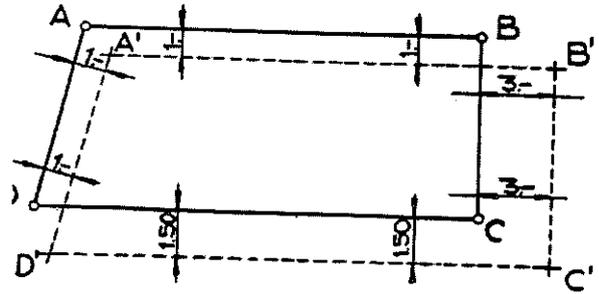
Otros ejemplos clásicos se observan en las figuras que consisten en la medición de una serie de ángulos de un polígono cuyos límites están materializados por alambrados y cercos vivos.

Se desplazan normalmente a MP jalones a una misma distancia, convenientemente corta, haciendo otro tanto con respecto a NP que puede ser o no la misma distancia usada para desplazar MP. La prolongación de los lados así obtenidos da, en su intersección, el punto P' de estación.



Aquí es común operar con dos paralelas y que las mismas se las defina a través de más de dos (2) puntos en cuyo caso se visualizarán desde P' (o A', o B', o C', o D') paralelas que resultan de "promediar" los puntos que la materializan salvo que técnicamente convenga limitarse a usar solo el par más representativo.

Las paralelas se las ubica según convenga, sea por dentro o fuera del polígono, quedando regularmente conformado un polígono semejante al relevado. Podemos hacer el traslado paralelamente hacia afuera, hacia adentro o dentro y fuera del polígono. Esta tarea merece atención especial para que no se vean entorpecidas las visuales.

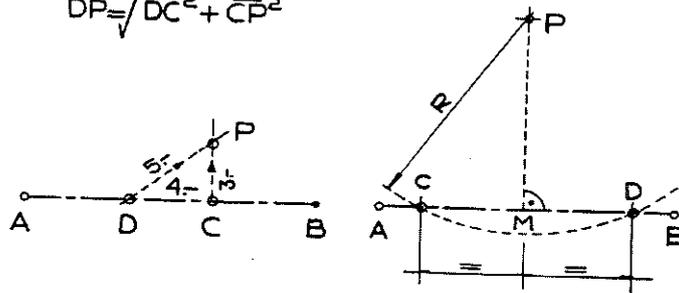


Este método es más rápido que el de estación excéntrica (como veremos a continuación), especialmente por permitir hallar ángulos que son los mismos del polígono, operación que ofrece el inmediato control de cierre angular.

- Hablamos, que en los desplazamientos paralelos, los jalones debían colocarse a una distancia tomada normalmente a los lados. No por conocida dejaremos de recordar la regla para levantar perpendiculares.

a) Supongamos que sobre la línea AB tomamos un punto C, alineado en ella, desde el que necesitamos levantar una perpendicular. Ubicamos, alineado con AC, el punto D situado a 4 metros de C. Luego, desde C medimos 3 metros y desde D tomamos 5 metros y el punto de cruce de ambas medidas dará el punto P sobre la perpendicular PC a la línea AB. Igualmente podemos tomar tres valores que sean múltiplos de los usados 3, 4 y 5; como ser 6, 8 y 10; 15, 20 y 25; 30, 40 y 50 pues todos obedecen al teorema de Pitágoras.

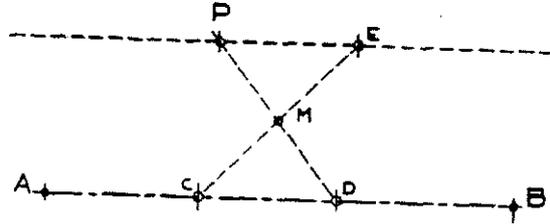
$$\overline{DP} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{CP}^2}$$



b) Si en vez de levantar nos proponemos bajar una perpendicular desde un punto a un lado del polígono, teniendo solamente una cinta o un hilo podemos hallar la solución de la siguiente manera. Con centro en P y con la cinta o el hilo bien tenso (haciendo las veces de radio) se corta AB en C y D. Midiendo la distancia CD se alinea su punto medio M que será el pie de la perpendicular.

Es obvio que el radio habrá que elegirlo mayor que la distancia que separa al punto de la recta. Si utilizamos un hilo, fijados los puntos C y D, bastará con tender el mismo entre ellos y luego con la mitad hallada por doblez del cordel se ubica M.

c) Si por el punto P, necesitamos trazar una paralela a AB podemos valernos del siguiente recurso: Elegimos dos puntos del lado AB tales como C y D. Se mide PD y se determina el punto medio M: $PM = MD$. Luego, desde C se establece en una alineación la relación $CM = ME$. Los puntos P y E determinan una recta paralela a CD y, por lo tanto, lo que deseábamos: $PE \parallel AB$.



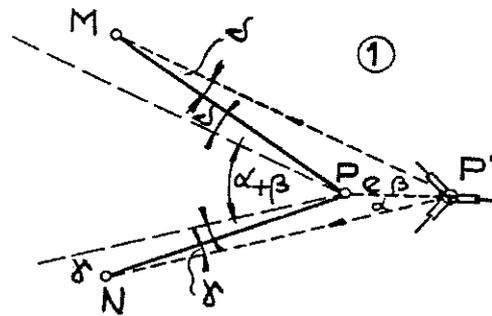
7.7.2. Estación en un vértice auxiliar excéntrico.

La ubicación del vértice auxiliar es arbitraria y depende de las dificultades que presente el lugar y la precisión deseada. Así es que el vértice se lo podrá ubicar por dentro o fuera del ángulo a medir y en distintas posiciones conforme se observa en los ejemplos que se detallan a continuación:

Con vértice auxiliar por afuera del ángulo P a medir. Consiste en ubicar un punto P' de manera que se pueda hacer estación sobre el mismo y un punto sobre cada uno de los lados, M y N, que definen el ángulo P, por lo que el valor de este estará dado por:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Los valores de α y β se miden directamente, con teodolito por método de Bessel. Quedando la alternativa de obtenerlos resolviendo los triángulos $PP'M$ y $PP'B$ mediante la medición lineal de los lados. Los ángulos paraláticos γ y δ , iguales por alternos internos a los de los triángulos citados. Se calculan en base a principios trigonométricos, teorema del seno:



Del triángulo $P'PN$

$$\text{sen } \gamma = e \cdot \text{sen } \alpha / NP \quad \text{y}$$

Del triángulo $P'PM$

$$\text{sen } \delta = e \cdot \text{Sen } \beta / MP$$

completar los datos necesarios en estas expresiones hay que medir linealmente e, PM y PN

Como se dijo, también la solución se puede lograr solo con las medidas lineales de todos los lados de los triángulos citados, en cuyo caso habrá que empezar con el teorema del coseno, por ejemplo:

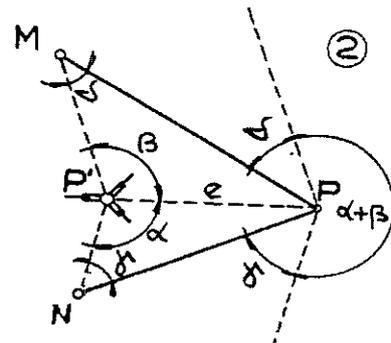
$$\cos \alpha = (PN^2 - e^2 - P'N^2) / 2 \cdot e \cdot PN$$

$$\cos \beta = (PM^2 - e^2 - P'M^2) / 2 \cdot e \cdot PM$$

Con vértice auxiliar por dentro del ángulo P a medir
 Observando la figura vemos que el ángulo P queda definido por:

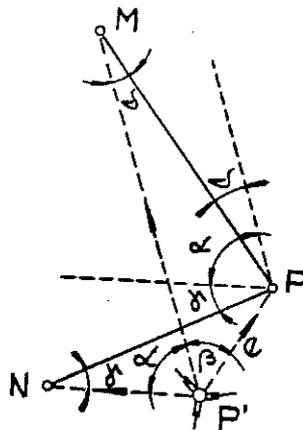
$$P = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

Como en los casos anteriores α y β se miden directamente mientras que γ y δ se obtienen del cálculo de los triángulos $P'PN$ y $P'PM$, para lo cual habrá que medir los lados necesarios de los mismos. También cabe la solución midiendo todos los lados de los dos triángulos y así calcular los ángulos necesarios, sin necesidad de medidas angulares directas.



Con vértice auxiliar exterior lateral del ángulo P a medir

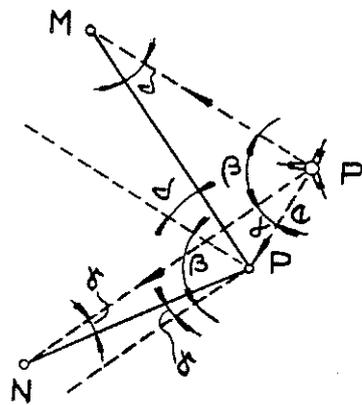
Suele ocurrir que el vértice excéntrico P' solo se lo puede ubicar lateralmente como vemos en la figura, alternativa poco recomendable pues se ven limitadas las posibilidades en cuanto a visuales y medición lineal. En definitiva el ángulo P resultará de:



$$P = \gamma + \alpha - \delta$$

$$\text{sen } \gamma = e \cdot \text{sen } (\alpha + \beta) / NP$$

$$\text{sen } \delta = e \cdot \text{sen } \beta / MP$$



$$P = \beta - \gamma + \delta$$

$$\text{sen } \gamma = e \cdot \text{sen } \alpha / NP$$

$$\text{sen } \delta = e \cdot \text{sen } (\alpha + \beta) / MP$$

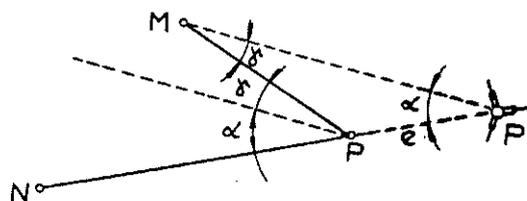
Donde α y β se mide con estación en P' directamente y γ y δ resultan del cálculo de los triángulos $PP'N$ y $PP'M$, para lo cual se miden linealmente los datos faltantes. Como en el caso anterior cabe la alternativa, si es posible, de medir todos los lados de los triángulos de manera que no se utilicen medidas angulares, El cálculo de los ángulos necesarios se realizará también empezando con el teorema del coseno.

Con vértice auxiliar en la prolongación de uno de los lados del ángulo P a medir

$$\text{sen } \gamma = e \cdot \text{sen } \alpha / MP$$

obteniéndose

$$P = \alpha + \gamma$$



- Vemos que estas soluciones, donde por el vértice P se han trazado las paralelas a las visuales dirigidas desde P' a los puntos M y N, traen aparejados cálculos que, si queremos realizarlos para comprobar el cierre angular de nuestro polígono, nos insumirá considerable tiempo y, en caso contrario, corremos el riesgo de que al realizarlo en gabinete, encontremos diferencias de cierre que excedan las tolerancias, obligándonos a retornar al terreno. Por tal causa es que prácticamente, no se aconsejan, salvo en casos de única solución, estas estaciones fuera de centro. Es preferible el método descrito de **Estación por paralelas**.

- Además, los ángulos del método anterior son funciones de la longitud de los lados poligonales y de la excentricidad, valor éste muy pequeño con respecto a aquellos y obliga a trabajar con los ángulos γ y δ muy agudos, y, por ello, sumamente peligrosos.

- A pesar de la relativa frecuencia de obstáculos en el vértice, debe pensarse que la estación excéntrica es un método al que se recurre en forma **excepcional**, cuando la estación centrada es muy incómoda o de empleo difícil.

- En general en todos los casos la solución hay que buscarla en función de la calidad de los datos y las posibilidades de obtenerlos, esto es en razón de que una determinación indirecta de este tipo se realiza cuando hay dificultades en el lugar.

- En cuanto a la **precisión obtenida** en estas determinaciones depende de:

- 1°. La precisión de la medida de los ángulos y distancias utilizadas en el cálculo.

- 2°. La definición de los puntos utilizados en las mediciones angulares y lineales.

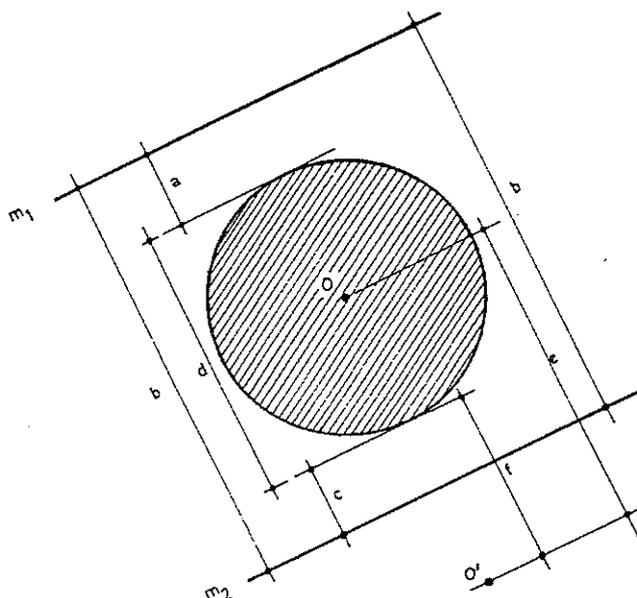
- 3°. La representatividad de los lados que tienen los puntos que son ubicados sobre los (M y N).

- 4°. La conformación de los triángulos calculados, teniendo en cuenta que la propagación de los errores se acentúa en la medida que se apartan de la forma equilátera.

- La estación excéntrica P' debe tomarse con el criterio de que los ángulos α y β no pertenezcan a un entorno de 0° o de 180° , en otras palabras no debe ubicarse en las direcciones PM y PN.

- Como la excentricidad e es mucho menor que los lado PM y PN, la precisión con que deben medirse los lados o distancias, entre el vértice P y los puntos M o N, es mucho menor que la precisión exigida para medir la excentricidad e.

La excentricidad e debe medirse cuidadosamente. Cuando el vértice está ocupado por algún obstáculo se buscarán recursos o



procedimientos auxiliares adecuados para conocerla.
 Un ejemplo es con el trazado de dos alineaciones paralelas m_1 y m_2 , separadas entre sí por la distancia b .

$$a + c + d = b \Rightarrow d = b - a - c$$

$$e = f + \frac{1}{2} d$$

- Las distancias PM y PN se pueden obtener previamente por medición una carta o un plano, o por cálculo, ya que no requieren mucha precisión.
- Si la excentricidad e es muy pequeña y no puede enfocarse la estación centrada P, por ser menor que la distancia mínima de enfoque, será suficiente apuntar con el guion y la mira que aparecen colocados exteriormente en el anteojo astronómico del teodolito.
- Los **errores accidentales** que se producen en la medición de las magnitudes físicas e , PM, PN; y α y β influyen de distinta manera sobre los ángulos paralácticos γ y δ , como se deduce de la ecuación que se obtiene por medio de la ley de reproducción de los errores

El error medio cuadrático del ángulo en P calculado -medido indirectamente- se obtiene por medio de la ley de reproducción de los errores accidentales en una función lineal.

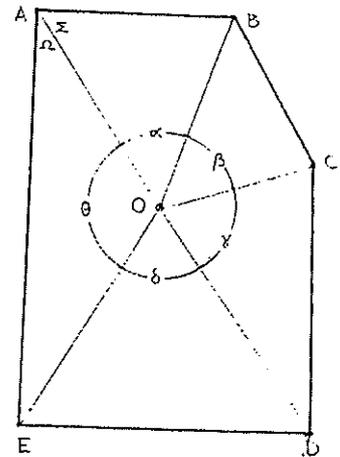
$$P = \beta - \gamma + \delta$$

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_{\alpha\beta})^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Donde $\sigma_{\alpha\beta}$ es el error en la medición de un ángulo por método de Bessel.
 σ_1 y σ_2 los errores medios cuadráticos de los ángulos paralácticos γ y δ respectivamente.¹⁵

Con vértice auxiliar para radiación

Como se dijo al inicio, a veces no es conveniente la medición directa del ángulo ya que la determinación del mismo forma parte de una operación integral que no incluye esa alternativa. Es el caso del relevamiento por coordenadas polares desde una estación O, de un polígono delimitado por los vértices A, B, C, D, E. Allí se miden las distancias OA, OB, OC, OD y OE y los ángulos α, β, γ y θ , mientras que el resto de los datos de los triángulos conformados se los calcula en base al teorema del coseno. Si se opera con una Estación Total los mismos, total o parcialmente, son "provistos" automáticamente.



Los ángulos internos en A, B, C, D, E quedan definidos por la suma de los ángulos de los triángulos que concurren a cada vértice, por ejemplo en A la de los triángulos ABO y EAO, donde el ángulo del vértice A = $\Omega + \Sigma$

¹⁵ A. berli. Topografía. Tomo I

Otro caso: cuando los vértices son inaccesibles (bajos con aguas, dificultades de acceso) o no visibles (por vegetación, relieve, etc.), o bien por razones prácticas se puede determinar indirectamente un ángulo mediante el posicionamiento de los lados que lo definen.

Por ejemplo para el vértice M se colocan dos puntos sobre cada lado, A, B, C y D, procurando que sean representativos de los mismos y visibles desde la estación O. Los datos necesarios a relevar son:

Ángulos α, β, γ

Distancias AO, BO, CO y DO

En gabinete se calcula los triángulos AOB y COD, aplicando el teorema del coseno por ejemplo

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$$

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2 CO \cdot DO \cdot \cos \gamma$$

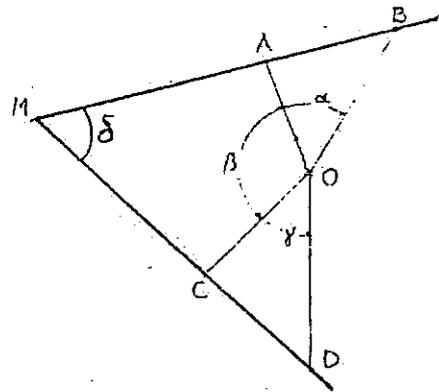
El principal dato a obtener en cada triángulo, es el ángulo en A y C respectivamente, por lo que:

$$\sin A / OB = \sin \alpha / AB \Rightarrow \sin A = (OB \cdot \sin \alpha) / AB$$

$$\sin C = (OD \sin \gamma) / CD$$

Luego se calcula el ángulo buscado M resolviendo angularmente el polígono AMCO de manera que:

$$M = 360^\circ - \beta - (180^\circ - A) - (180^\circ - C)$$



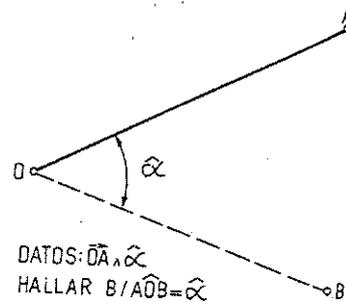
7.8. REPLANTEO DE ÁNGULOS HORIZONTALES CON TEODOLITO

Habitualmente en nuestro desarrollo profesional debemos realizar el replanteo de un punto determinado, que puede ser el vértice de una poligonal de trabajo, vértice de una parcela a amojonar o de una subdivisión de un plano de mensura, la dirección de un eje de montaje mecánico, o el eje de obra civil correspondiente a un proyecto un edificio, o de la traza de un camino o de una línea de alta tensión, etc. Este replanteo se debe hacer a partir de una dirección dada o existente, un punto preestablecido y un ángulo resultante de cálculo o información técnica.

El replanteo es la tarea inversa al relevamiento y básicamente consiste en marcar sobre el terreno una dirección con un **ángulo α** (en O) respecto a otra dirección dada OA.

7.8.1. Replanteo de un ángulo α simple

- 1°) Se estaciona el teodolito en el vértice O.
- 2°) Se visa en la dirección OA y se toma la lectura I_a .
- 3°) Se calcula la lectura $I_b = I_a + \alpha$, correspondiente a la dirección a replantear.
- 4°) Se gira la alidada hasta provocar la lectura I_b . Primeramente, provocamos mediante el tomillo de coincidencias del micrómetro los segundos y la unidad de minuto. A continuación, se gira el aparato en el sentido



de las agujas del reloj hasta encontrar aproximadamente los ángulos buscados y mediante los tornillos de pequeños movimientos se afinará hasta encontrar la lectura deseada.

5°) Visando con el anteojo se coloca el punto B correspondiente a la dirección definida en el punto 4°. Para ello se deberá colocar una señal (jalón, estaca de madera, mojón de hierro, etc.) lo suficientemente lejos para permitir un posicionamiento de la misma lo más preciso posible, habiendo instruido a nuestro ayudante las indicaciones correspondientes. Debemos medir nuevamente, para el cierre, a nuestro punto de origen para verificar la inexistencia de errores de arrastre.

7.8.2. Replanteo de un ángulo α compensado

Si se desea más precisión, se reitera el procedimiento en ambas posiciones del anteojo CI y CD, promediando las posiciones de los puntos replanteados en cada uno de ellas.

1° Se estaciona el teodolito en el vértice O.

Con CI:

2° Se visa en la dirección OA y se toma la lectura I_{ai} .

3° Se calcula la lectura $I_{bi} = I_{ai} + \alpha$, correspondiente a la dirección a replantear.

4° Se gira la alidada hasta provocar la lectura I_{bi}

5° Visando con el anteojo se coloca el punto B_1 correspondiente a la dirección definida en el punto 4°

Con CD:

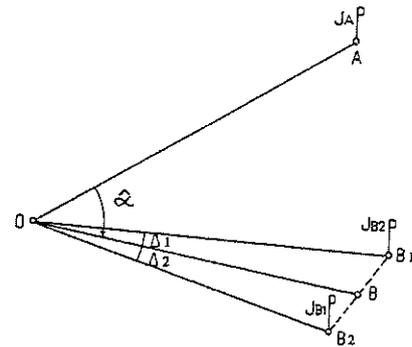
6° Se visa en la dirección OA y se toma la lectura I_{ad} .

7° Se calcula la lectura $I_{bd} = I_{ad} + \alpha$, correspondiente a la dirección a replantear.

8° Se gira la alidada hasta provocar la lectura I_{bd}

9° Visando con el anteojo se coloca el punto B_2 correspondiente a la dirección definida en el punto 8°.

Si ambos puntos, B_1 y B_2 , coinciden esa será la posición de B, situación ésta que rara vez ocurre, de lo contrario se lo ubica en la mitad de la distancia B_1B_2 como vemos en la figura. Como las dos señales



se colocaron a la misma distancia con respecto al teodolito, medimos la distancia que las separa, calculamos la semi-distancia y esta será la distancia, de ambas señales, que colocamos una señal correspondiente a B, que sí ésta será nuestra señal buscada. Por supuesto, debemos ahora retirar las dos primeras señales colocadas.

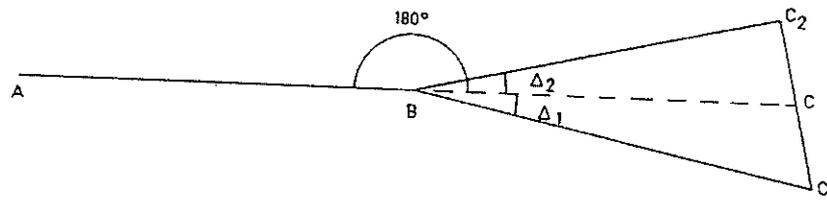
- Si las exigencias son mayores, y con la operación duplicada descrita no es suficiente, se podrá aplicar el método de reiteración -no ya para medir sino para el replanteo-, esto es reiterando esa determinación utilizando distintos sectores del círculo para cada reiteración.

- Cabe recordar que la mayor precisión del replanteo a lograr, por medio del aumento de determinaciones, debe ir asociado con actitudes concordantes en toda la operación, empezando por la definición de los puntos utilizados y la puesta en estación. Si con todo ello no es posible alcanzar determinada precisión habrá que utilizar otro instrumento.

- El procedimiento descrito elimina la influencia de los errores de colimación e inclinación; además de la influencia de los errores sistemáticos de excentricidad y de índices. Quedan afectados de la influencia del error de verticalidad del eje principal y de los accidentales de lectura, de apuntamiento o bisección de jalones, de estacionamiento y de las señales J_i y del correspondiente error de división del limbo. Para que la influencia de los errores accidentales quede acotada por valores aceptables se debe operar con mucha prolijidad.

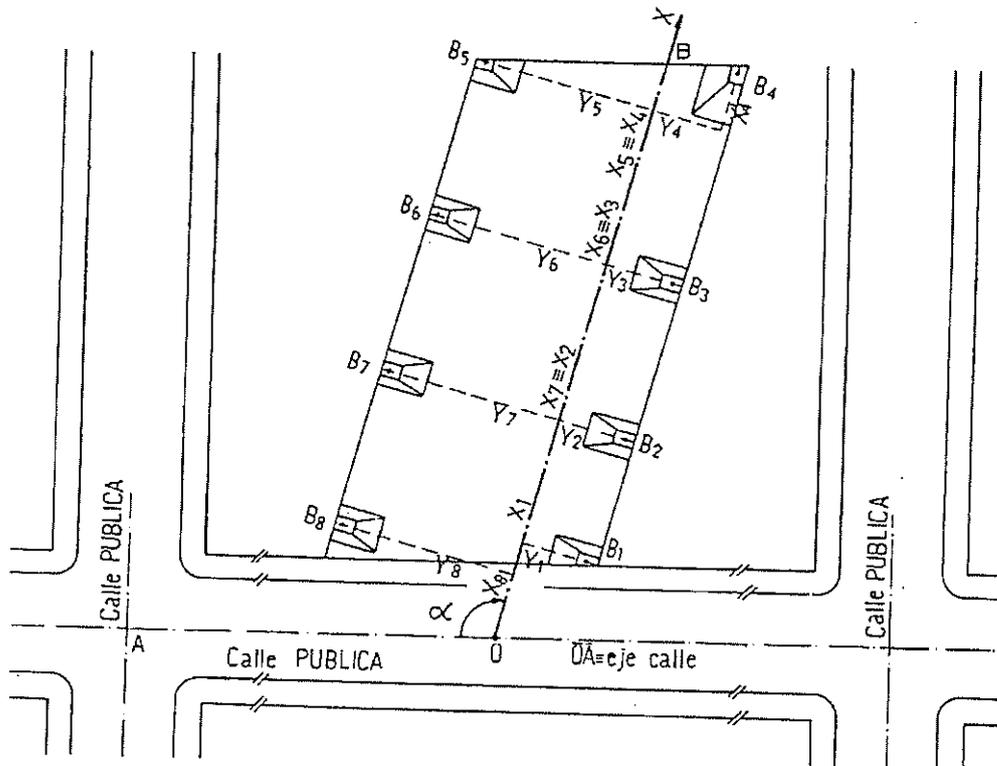
7.8.3. Prolongación de una alineación

El método anterior es el que se aplica cuando tenemos que prolongar una alineación como vemos es la figura. Recordemos que siempre la dirección origen AB, debe ser mayor o igual que la dirección a replantear BC

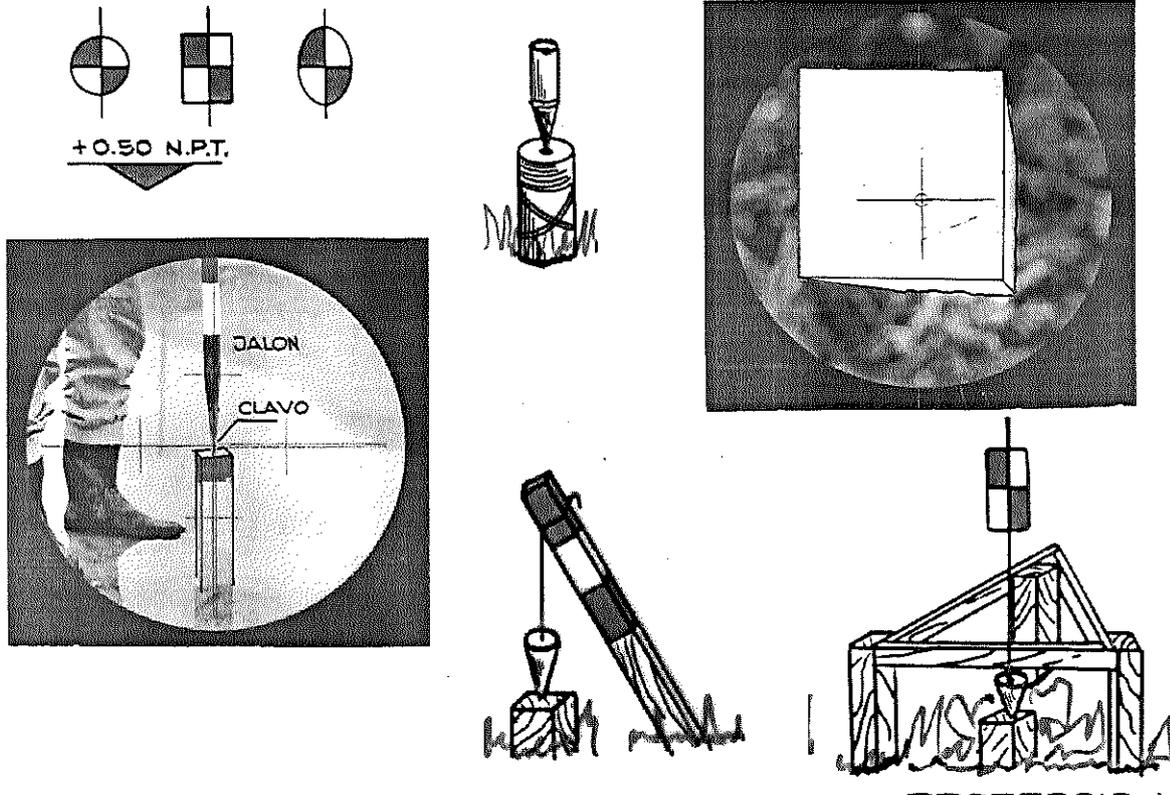


7.8.4. Replanteo del eje de obra civil correspondiente a un proyecto un edificio.

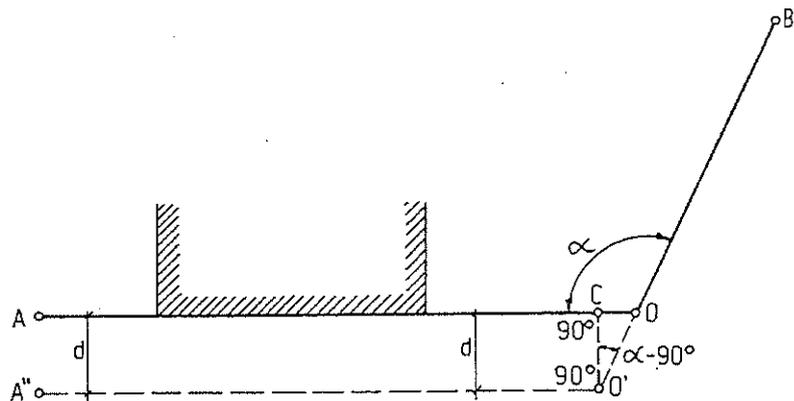
Terminados los proyectos, es necesario llevar o reproducir en el terreno algunos de los elementos que en ellos figuran mediante el replanteo de ángulos. En el caso de un edificio deberán replantearse sus fundaciones, en otras palabras deberán materializarse en el lugar puntos que identifiquen los ejes de las bases.



Es de suma importancia, para reposición de puntos, inspección y posteriores replanteos de la obra, dejar "testigos" de ejes de replanteo fuera de la zona de obra. Ellos pueden ser estacas o mojonos de madera o barra de hierro hincados y bien marcados los ejes con alguna protección. Además se pueden dejar como "testigos" marcas en paredes cercanas y visibles y bien pintadas



• También es frecuente que se encuentren **obstáculos** sobre la dirección OA, como en el ejemplo ya mencionado, en la línea de edificación. En esos casos se trazará una dirección auxiliar O'A" paralelo a OA y se buscará el nuevo vértice O' e OB. Sobre OA se mide OC=d.tg ($\alpha- 90^\circ$) y a partir de C se mide la distancia d, sobre la normal a OA, para hallar la posición de vértice O'.¹⁷



¹⁷ A. Berli. Topografía. Tomo I

7.8.5. Otros casos de replanteo de ángulos en obra civil y montaje mecánico.
(explicado en clase teóricas)

