TEMA 6

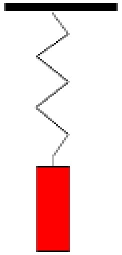
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

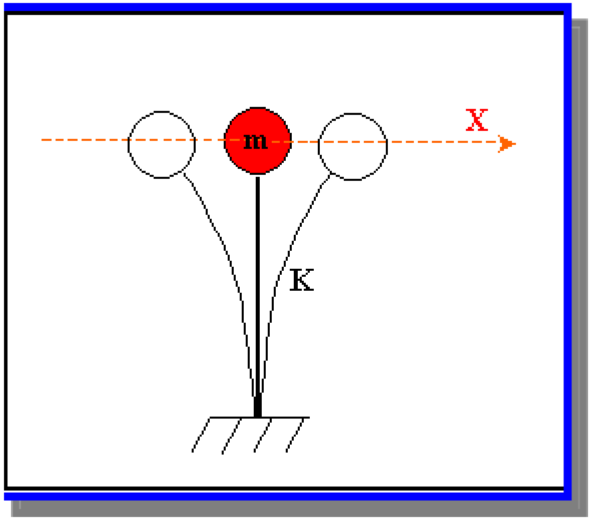
Objetivos específicos:

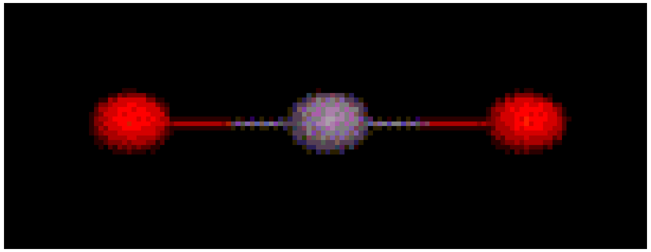
Que el alumno logre:

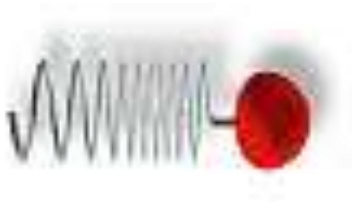
- Representar gráficamente las magnitudes intervinientes.
- Relacionar la fuerza actuante con la elongación.
- Interpretar correctamente gráficos de energías en función de la elongación
- Obtener experimentalmente la constante elástica de un resorte
- Comprobar el campo de aplicabilidad de la ley de Hooke
- Seleccionar las variables de mayor peso en la determinación de la gravedad en el lugar utilizando un péndulo.
- Relacionar el comportamiento de un péndulo físico con uno ideal.
- Demostrar bajo qué condiciones el movimiento pendular se asemeja a un MAS.

Movimiento Armónico Simple

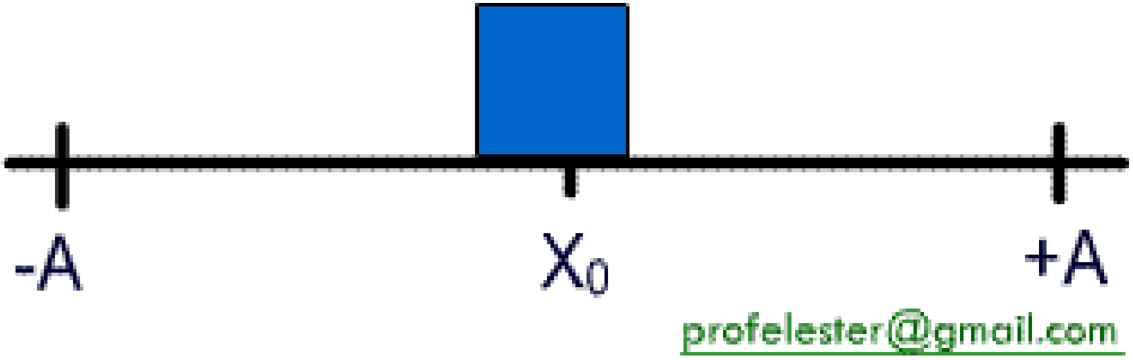








M.A.S.



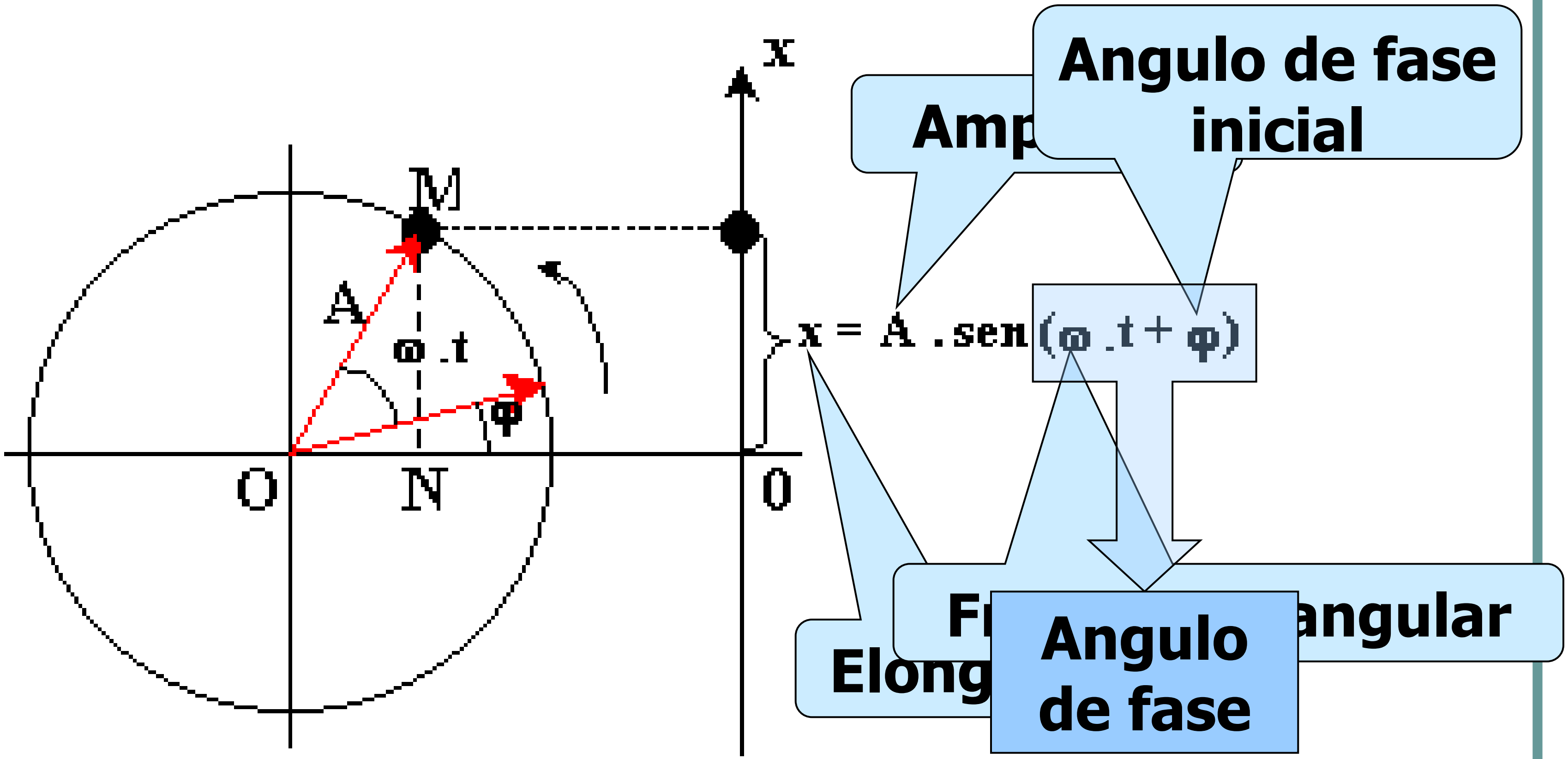
Movimiento Armónico Simple

- Es un movimiento periódico
- Es unidimensional
- La posición del cuerpo varía entre ±A
- El tiempo de una oscilación completa es el Período T
- La posición instantánea del punto se describe por una función armónica (seno o coseno)

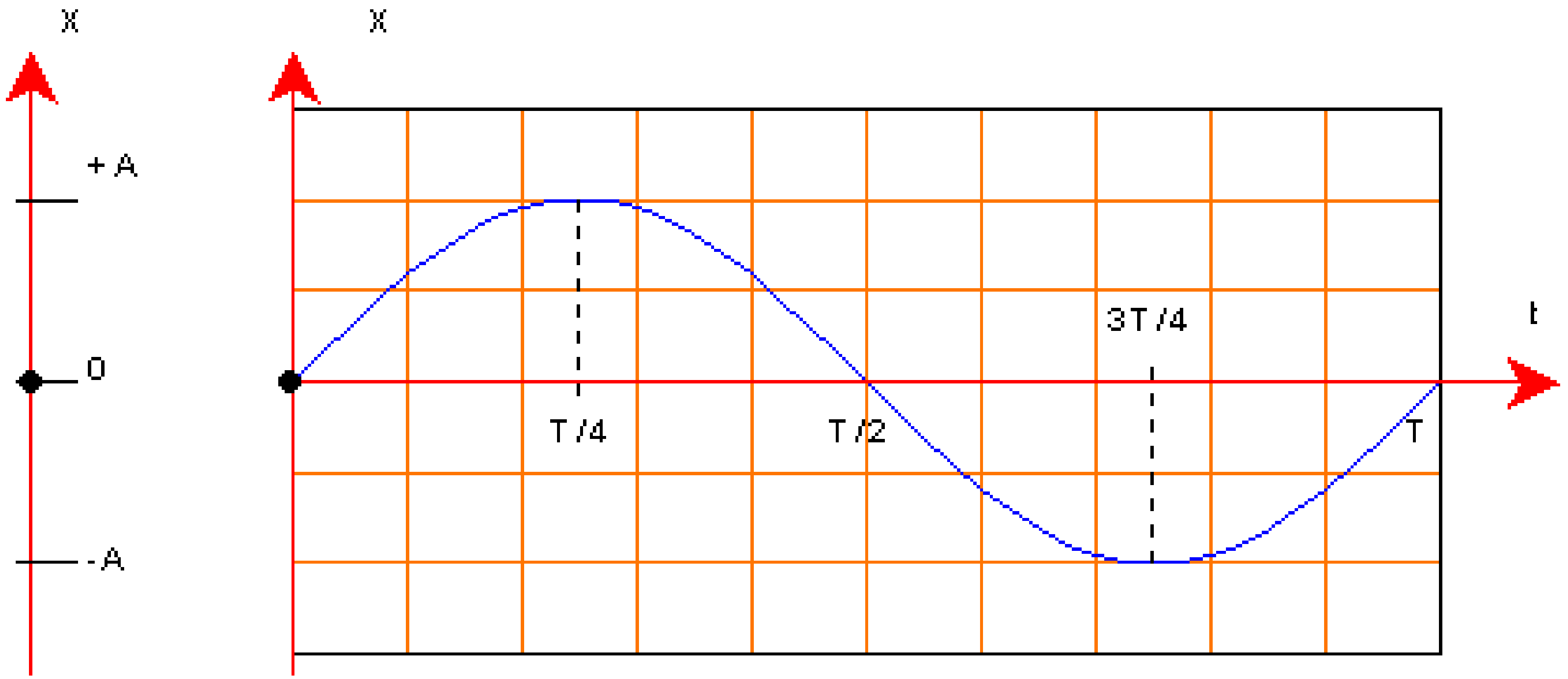
MOVIMIENTOS PERIÓDICOS

Generación de un MAS a partir de la proyección sobre un eje de un MCU

Posición en función del tiempo



Representación gráfica de la elongación en función del tiempo x=f(t)



$$x = A \text{ sen } (\omega\, t+\varphi)$$

Período y frecuencia

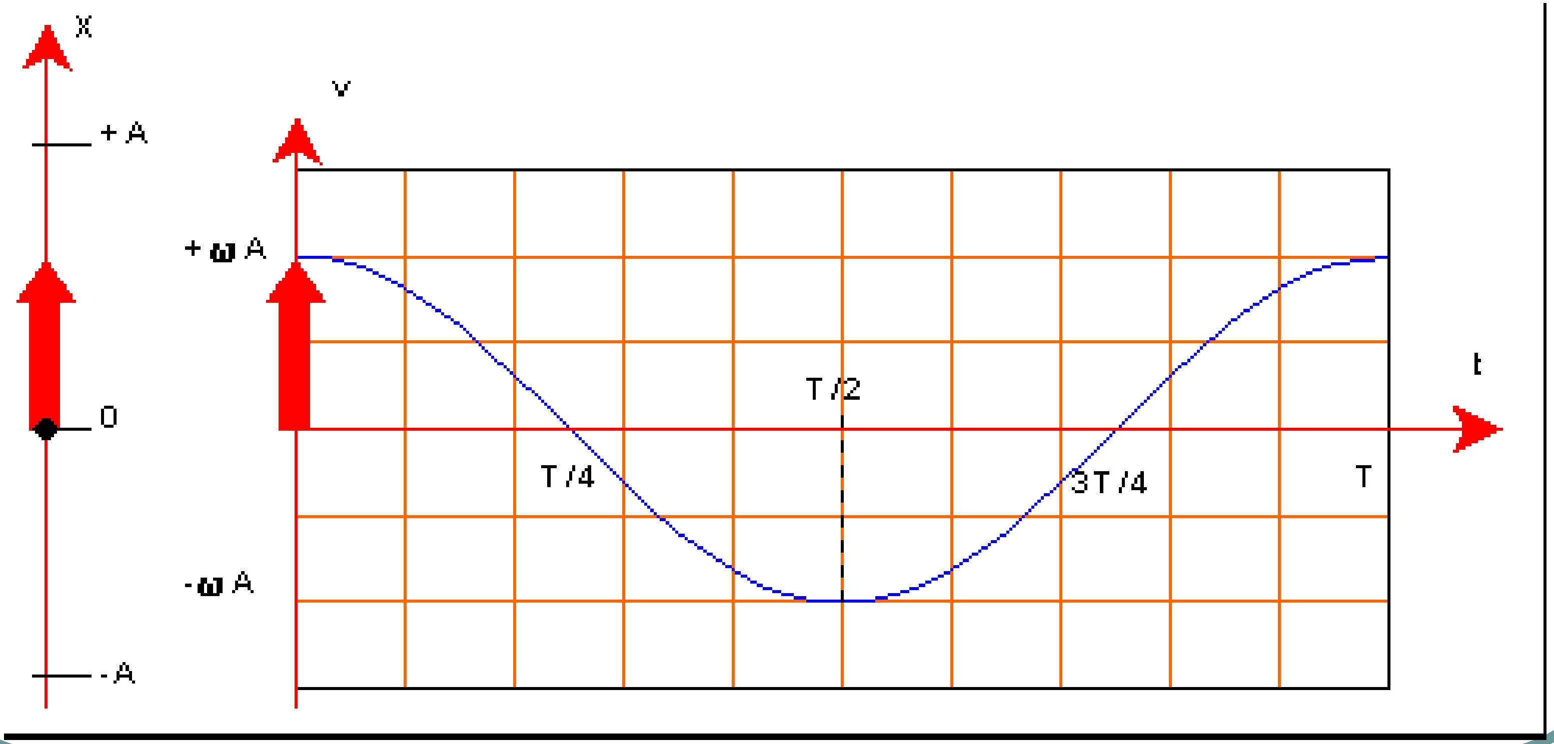
- **El tiempo de una oscilación completa es el Periodo T.**
- **La función seno (coseno) se repite cuando el ángulo aumenta 2π**

$$\omega . t = \theta \quad \Longrightarrow \quad \omega . T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi . f$$

Velocidad en función del tiempo

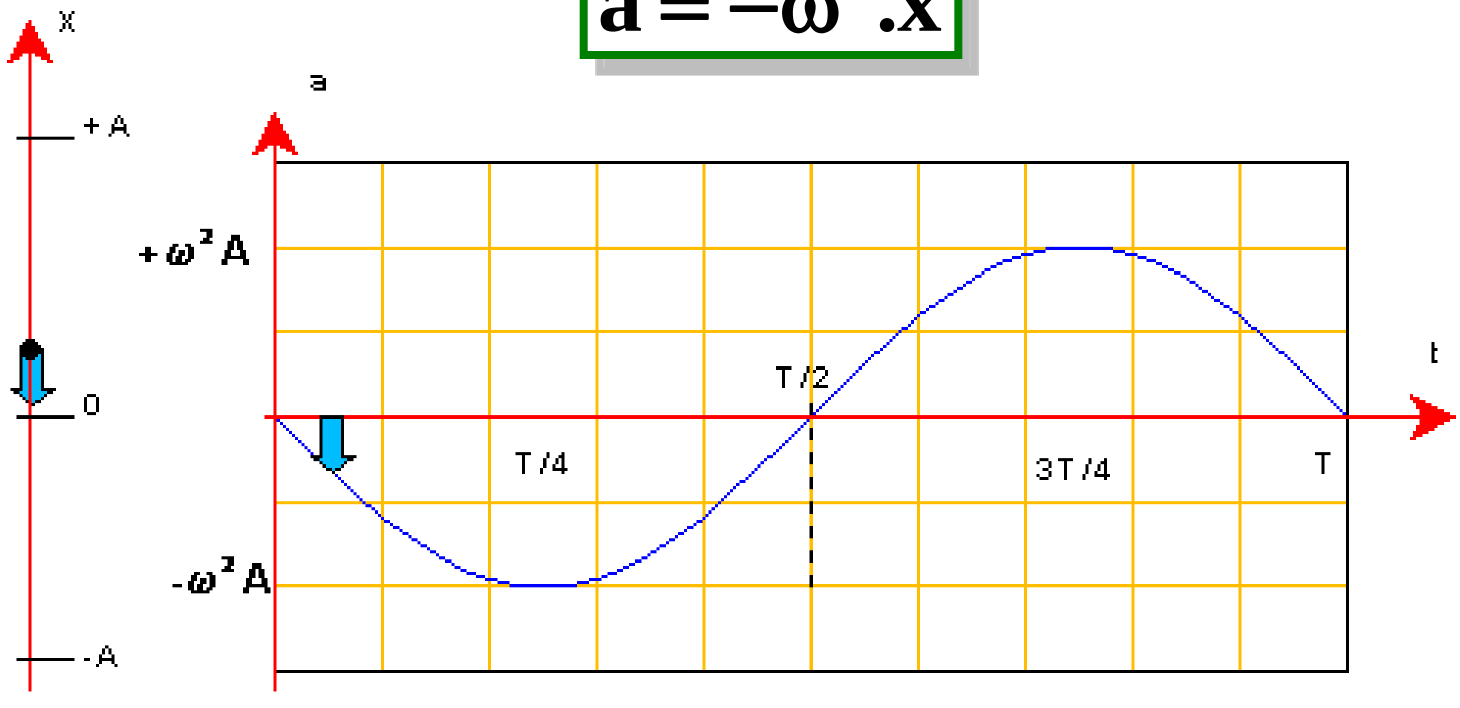
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A.sen(\omega t + \varphi)]}{dt} = \omega.A.\cos(\omega t + \varphi)$$



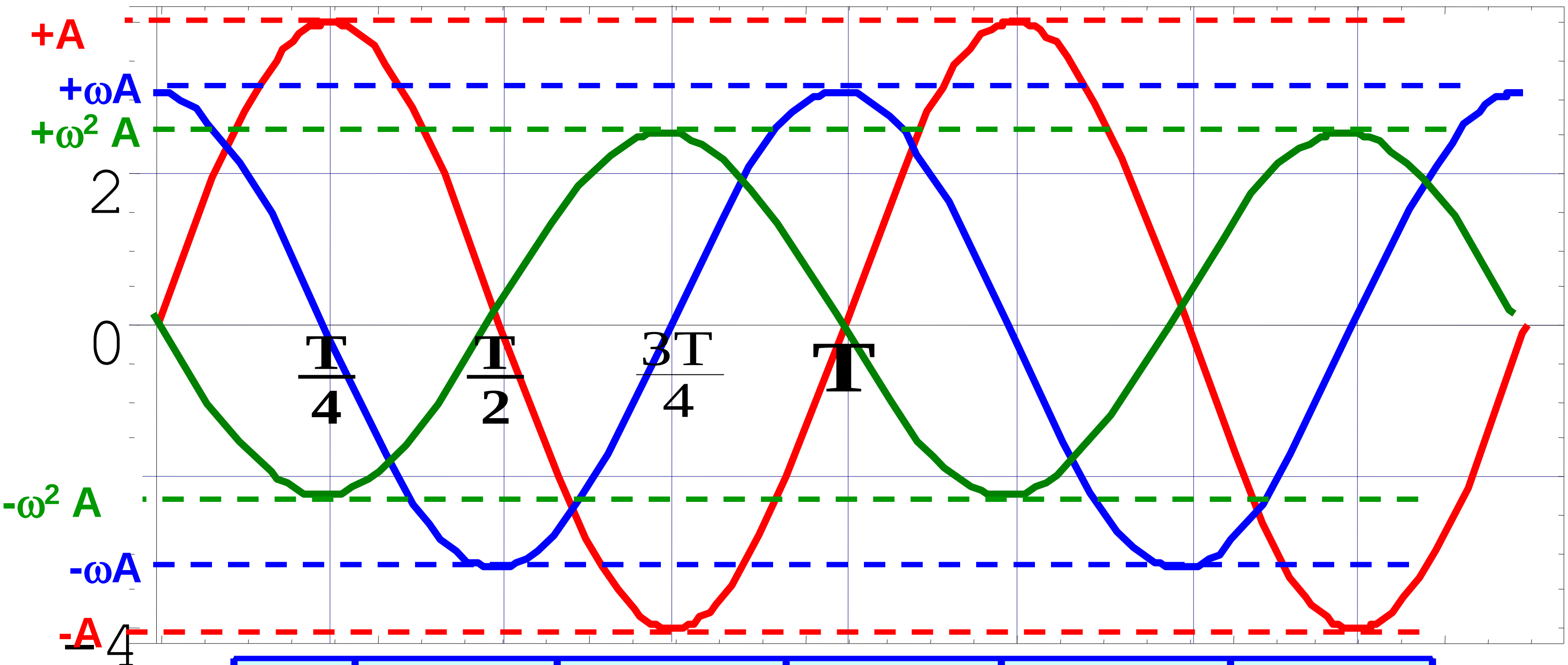
Aceleración en función del tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[A.\omega.\cos(\omega t + \varphi)]}{dt} = -\omega^2 .A.\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

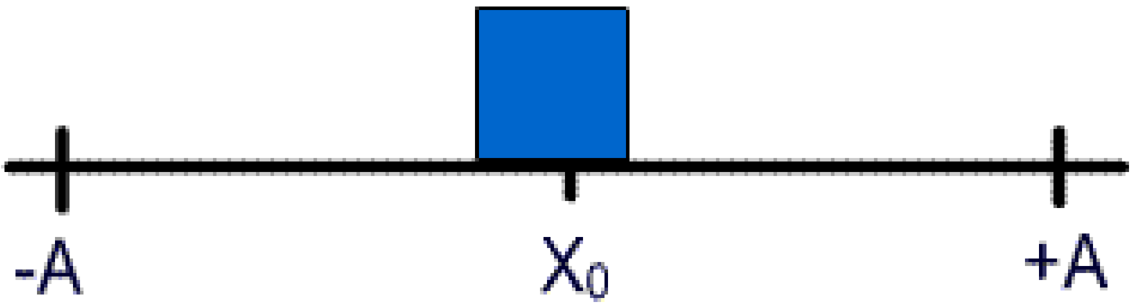
$$\boxed{a = -\omega^2 .x}$$



$x = A$ $a = -\omega^2 A \,\mathrm{sen}(\omega t)$ $s\,(\omega t)$



t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	$+A$	0	$-A$	0
v	$+\omega A$	0	$-\omega A$	0	$+\omega A$
a	0	$-\omega^2.A$	0	$+\omega^2 A$	0



$$x = -A \qquad v = 0 \qquad a = +\omega^2 A$$

$$x = 0 \qquad v = \pm\omega A \qquad a = 0$$

$$x = +A \qquad v = 0 \qquad a = -\omega^2 . A$$

Fuerza y aceleración

$$a = -\omega^2 .x$$

k (N/m)

$$F = m.a = -m.\omega^2 .x \ = -k.x$$

Ley de Hooke

$$\boxed{F = -k.x}$$

Fuerza recuperadora

La fuerza:

- **No es constante.**
- **Depende de la elongación**
- **Siempre es contraria a la dirección del movimiento**

$$k = m.\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Energía Cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2 \qquad v = \omega.A.\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m.\omega^2.A^2.\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \longrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{m.\omega^2}_{k}.\left[A^2 - \underbrace{A^2\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)}_{\boxed{x^2}}\right]$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}.k.\left[A^2 - x^2\right]}$$

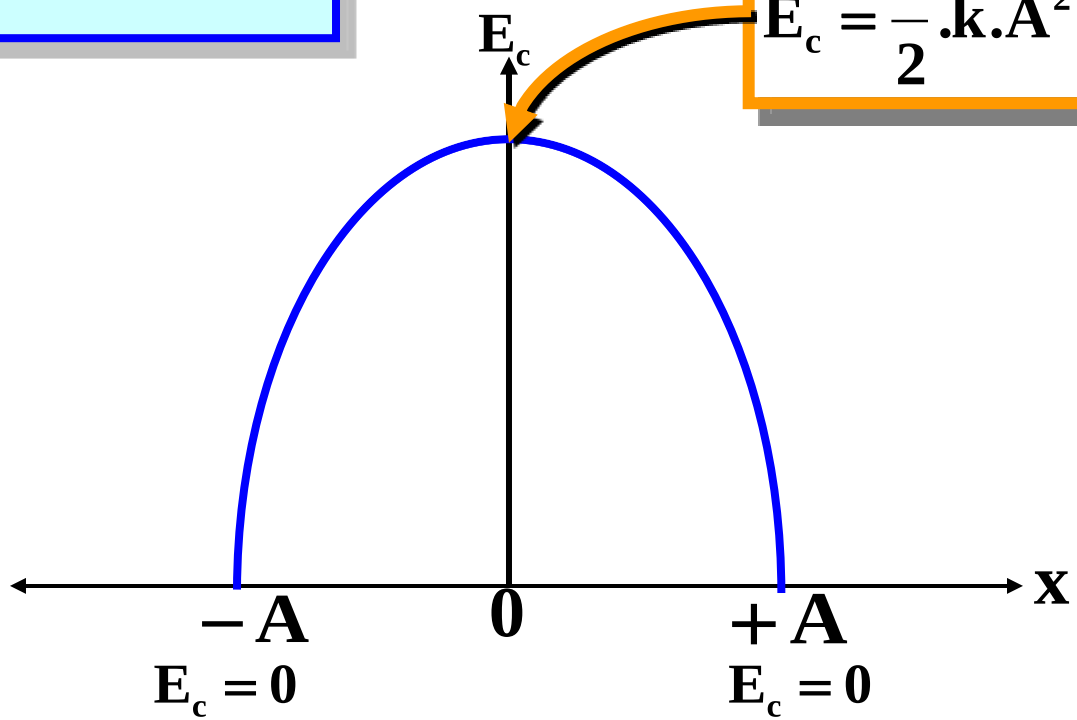
=0 Para x=±A

=½.k.A² Para x=0

Representación gráfica

$$E_c = \frac{1}{2}.k.\left[A^2 - x^2\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}.k.A^2$$



ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

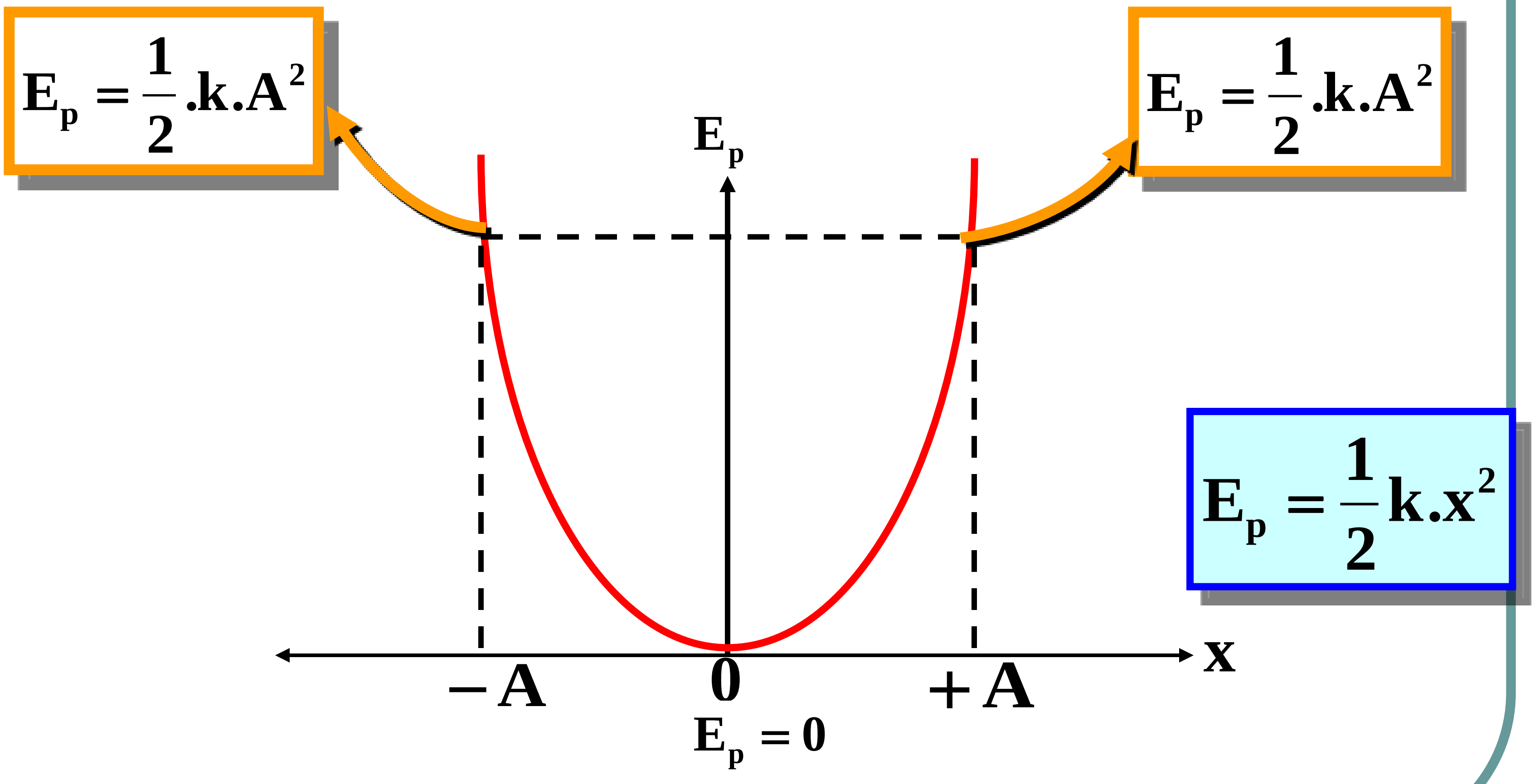
$$\left.\begin{aligned} dT &= F.dx \\ dT &= -dE_p \end{aligned}\right\} \quad F.dx = -dE_p$$

$$F = \cancel{-}\frac{dE_p}{dx} = \cancel{-}k.x \qquad dE_p = k.x.dx$$

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^{x} k.x.dx$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k.x^2} \qquad \boxed{E_p = \frac{1}{2}.m.\omega^2.x^2}$$

Representación Gráfica



ENERGIA TOTAL

$$E_c = \frac{1}{2}.k.\left[A^2 - x^2\right]$$

+

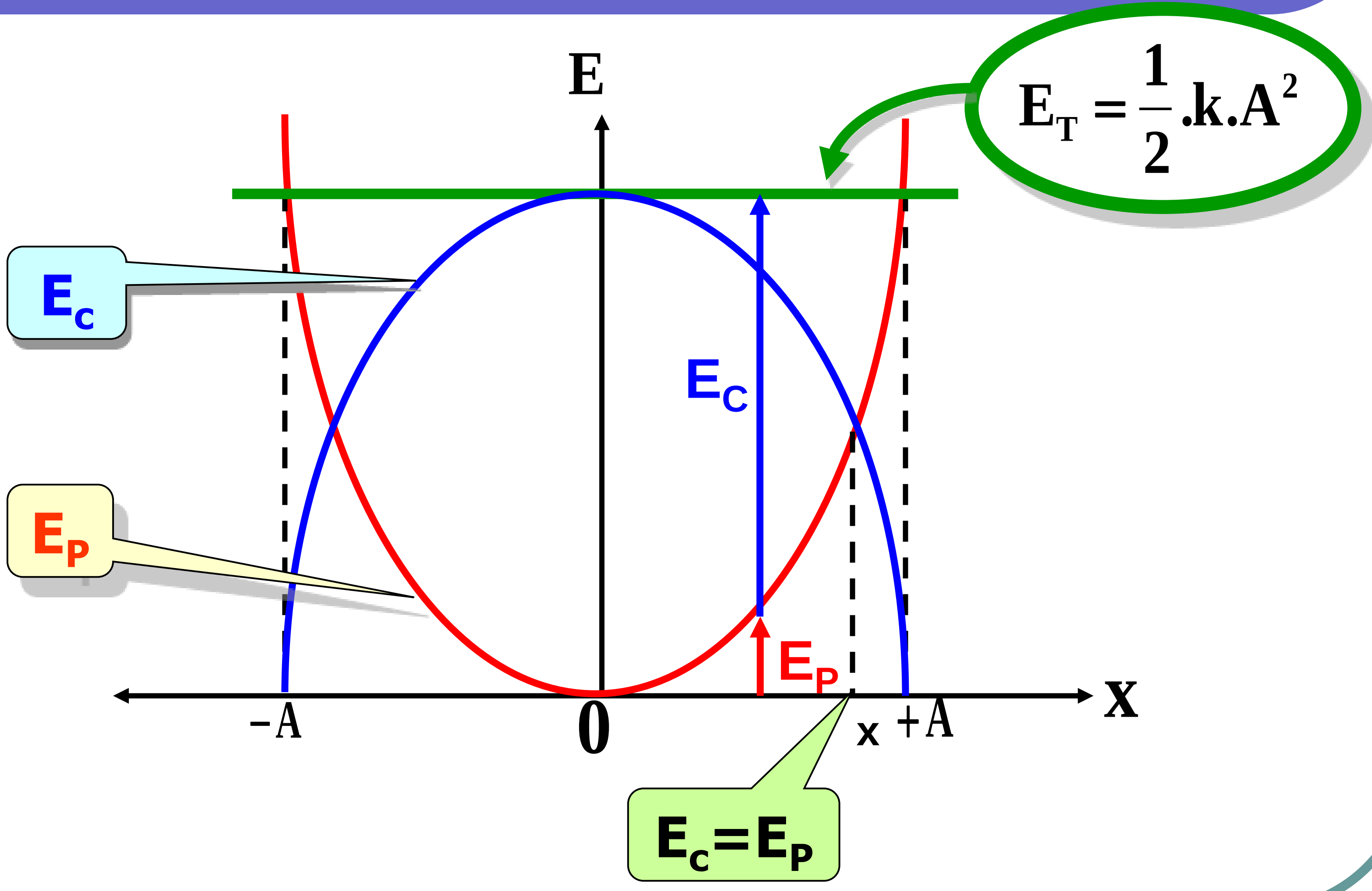
$$E_p = \frac{1}{2}k.x^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}.k.\left[A^2 - x^2\right] + \frac{1}{2}.k.x^2$$

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2}.k.A^2}$$

La energía mecánica se mantiene constante

Energía Total



DINÁMICA DEL M.A.S

$$F = m.a = -k.x$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = -k.x$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\cancel{m}.\omega^2}{\cancel{m}}.x = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0}$$

Cuya solución general es:

$$\boxed{x = A\ \text{sen}\ (\omega t + \alpha)}$$

e
2º orden

Donde α es una constante a determinar que depende de las condiciones iniciales del problema

Péndulo simple

Péndulo simple

$$\sum F_N = T - m.g.\cos\theta = 0$$

$$\mathbf{T = m.g.\cos\theta}$$

$$\sum F_T = -m.g.\mathrm{sen}\theta = m.a_T$$

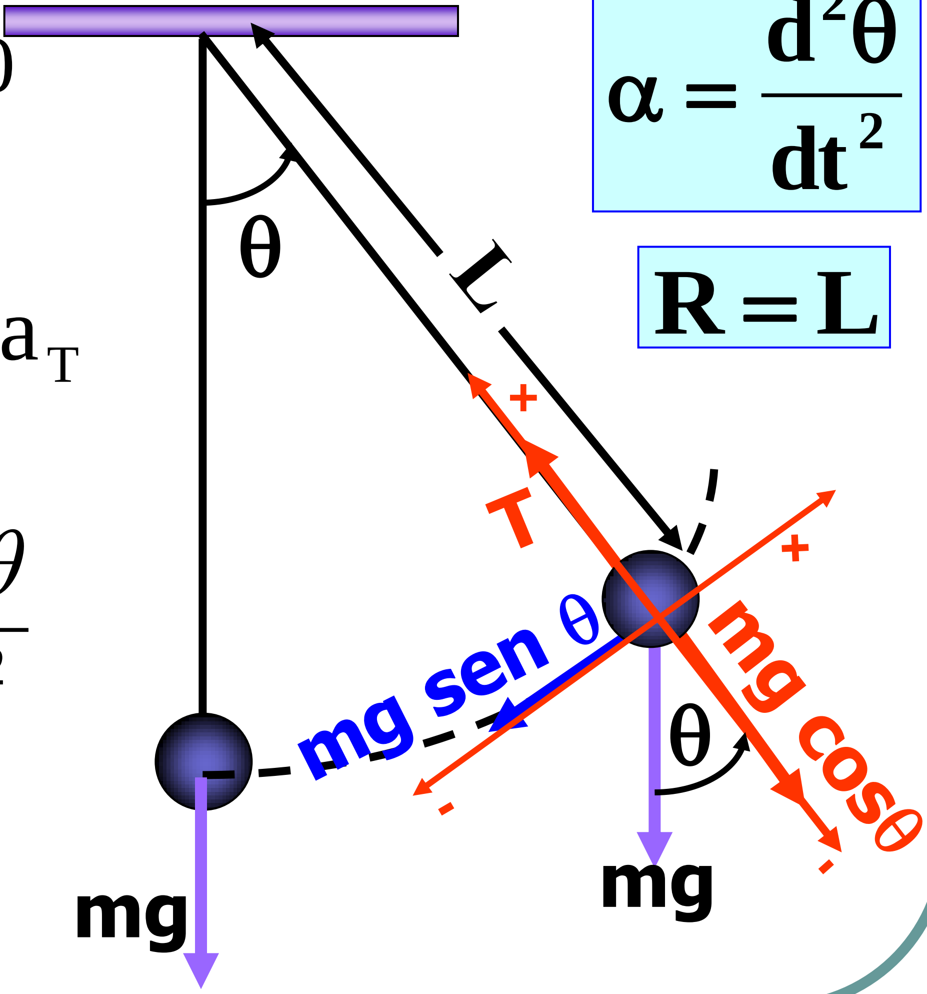
$$\mathbf{F_T = m.a_T = m.R.\alpha}$$

$$-\cancel{m}.g.sen\theta = \cancel{m}.L.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}.\mathrm{sen}\theta = 0}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\boxed{R = L}$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2.\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$$

$$\frac{g}{L} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0$$

Ecuación diferencial del péndulo simple

Ecuación diferencial del M.A.S.

El péndulo simple describe un Movimiento Armónico Simple únicamente para ángulos pequeños

$$\frac{g}{L} = \omega^2 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \;\Rightarrow\; \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

El período es independiente de la masa

Para θ mayores:

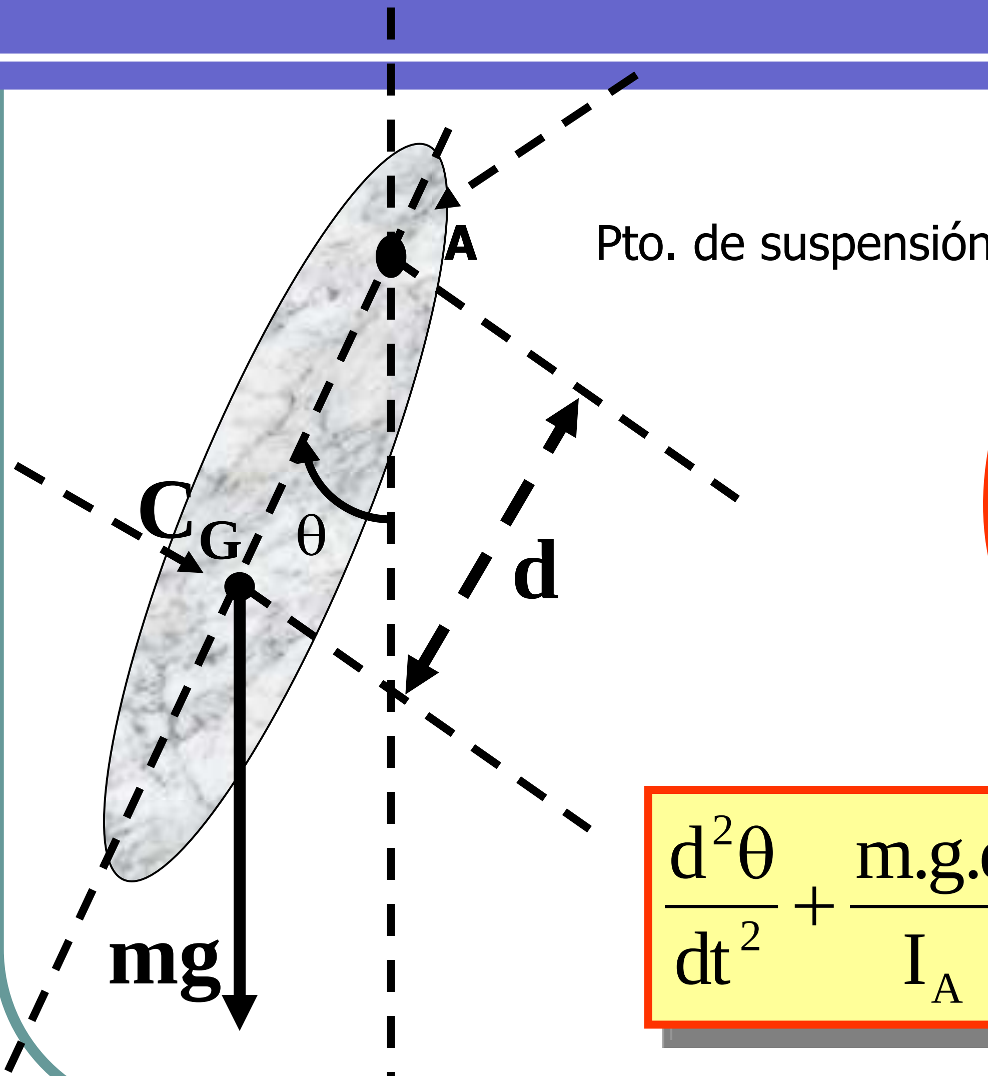
$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{L}{g}}.\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_o}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_o}{2} + \ldots\right)$$

Para pequeñas amplitudes se puede tomar:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.\left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right)$$

< 1% para amplitudes menores de 23º

Péndulo físico o compuesto



El momento actuante sobre el cuerpo es:

$$M = -m.g.d.\text{sen}\theta$$

Recordando que

$$M = I_A.\alpha_A = I_A \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m.g.d}{I_A}.\theta = \omega^2}$$

Ecuación diferencial del péndulo físico

Donde I_A es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje que pasa por el punto de suspensión A, que se puede calcular por el teorema de Steiner:

$$I_A = I_C + m.d^2$$

Resultando

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m.g.d}{I_C + m.g.d}.\theta = \omega^2}$$

Si el cuerpo es una esfera (péndulo de Borda)

$$I_C = \frac{2}{5}.m.R^2$$

Resultando que el periodo de oscilación para ángulos pequeños es:

$$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m.g.d}}}$$