TEMA 5 – POLIGONACIÓN, CÁLCULOS DE COORDENADAS Y SUPERFICIES

1. REDES DE UN LEVANTAMIENTO PLANIMÉTRICO – Generalidades

- **Levantamientos topográficos**

La realización de un levantamiento topográfico implica la ejecución de todas las tareas de campaña y gabinete, conducentes a representar en un plano topográfico una parte de la superficie terrestre. Para ello deberán combinarse adecuadamente los procedimientos a emplear para determinar la posición planialtimétrica de los puntos del terreno y, mediante la utilización de instrumental y métodos apropiados satisfacer las exigencias métricas impuestas por la Escala, la que a su vez dependerá de la finalidad técnica del documento a elaborar.

Establecida la zona a representar y fijada la escala, la primera etapa a cumplir es proveerse de toda la información disponible concerniente a la tarea a desarrollar. Para ello deberán recopilarse todos los antecedentes existentes, indagando en las reparticiones y empresas que presuntivamente pudieran disponer de los mismos.

El análisis de toda esa documentación permite al Ing. Agrimensor compenetrarse en primera instancia, de las características morfológicas del terreno y de los hechos naturales y artificiales que en el mismo se encuentran, lo que en frecuentes ocasiones permite reducir la tarea a realizar.

Cumplida esta primera etapa, y ya trasladado a la zona de trabajo, el Ing. Agrimensor debe consustanciarse con el terreno, para lo cual es imprescindible realizar un minucioso reconocimiento del mismo, recorriéndolo y tratando de croquizar y memorizar la ubicación de los accidentes notables que a su vez procurará identificar en la documentación de que dispone. La tarea del reconocimiento es sumamente importante, y no sólo permitirá economizar tiempo en las operaciones futuras, sino que muchas veces por no haberla cumplido cabalmente, se llega en el desarrollo del trabajo a situaciones insolucionables que obligan a rehacer parte de la tarea.

Por ello no es exagerado invertir en esta operación un 10% del tiempo total que demande la permanencia en el terreno.

Atendiendo a que el levantamiento se realiza por sectores de extensión limitada, es imprescindible contar con un marco rígido de apoyo al que se vinculan todos esos sectores de manera tal de constituir un conjunto en el que cada uno de ellos ocupe el lugar que le corresponde, tanto en forma absoluta como en relación a los demás.

Ese marco se materializa por medio de las redes básicas de apoyo, mediante las cuales se obtienen las coordenadas planialtimétricas de puntos cuyo error de ubicación es tal que, frente al que se pretende para los puntos a levantar, pueden considerarse exentos de error.

- Cualquiera que sea el método utilizado, todos los levantamientos deben incluir los siguientes pasos:

a) <u>Compilación de la información</u>, incluyendo consulta al Google Earth

b) <u>Diseño de la red</u> -primer borrador-. *Diseño preliminar, cartas, fotos, etc. Elección del método e instrumental. Acotación de errores*

c) <u>Reconocimiento y diseño formal de la red.</u> Confirmación *del método e instrumental. Acotación de errores*

d) Amojonamiento: Materialización de las estaciones de la poligonal, se seleccionan de acuerdo a los objetivos del trabajo. Los vértices de la poligonal servirán de estaciones de apoyo en el relleno. De acuerdo a los puntos que se desean relevar, se elegirán los vértices de la poligonal. Las estaciones adyacentes de la poligonal deben ser visibles entre sí. La distancia que separa las estaciones estará de acuerdo con el método y el instrumento que se utilice para medir la distancia. Las estaciones deben ubicarse en lugares que no estén expuestos a inundación, erosión, desplazamientos, o cualquier otro accidente que destruya la marca del punto. La marcación consiste en marcas permanentes o semi-permanentes de las estaciones, mediante estacas de madera o barras de hierro. Mediante la señalización se colocan jalones o banderolas en las estaciones para que sean visibles desde las estaciones adyacentes. Se realizan mediciones de ángulos y distancias a puntos cercanos permanentes, para replantear la posición de la estación en el caso de que se destruya, con la monografía y balizamiento.

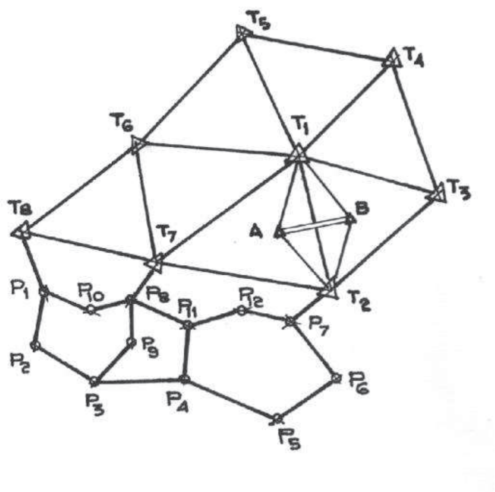
e) Dibujo, descripciones, itinerario, fotografía: *Monografías* y fotoidentificación de los hitos en algunos casos.

f) Observaciones y cálculo de campo

g) Cálculos y ajuste final

- **Métodos topográficos. Redes.** [1]

Consiste todo levantamiento topográfico en trasladar al plano, con su cota, puntos determinados del terreno, partiendo, en planimetría, de una recta medida y *orientada* que se denomina la *base,* y en altimetría, tomando como *origen* un punto cuya altitud sobre el nivel del mar sea conocida, o al que se le asigne una cota arbitraria, *arrastrando* ésta a los demás puntos previo cálculo, de los desniveles parciales de uno a otro. Las determinaciones, tanto altimétricas como planimétricas, han de apoyarse, por tanto, unas en otras, acumulándose sucesivamente los errores cometidos. Se admite en topografía que un punto ha de considerarse como tanto mejor determinado, a igualdad de las demás circunstancias, *cuanto menor sea el número de operaciones escalonadas que se hayan realizado en su determinación;* de aquí se deduce que todo trabajo, -lo mismo planimétrico que altimétrico, convendrá realizarlo por etapas formando *redes* apoyadas sucesivamente unas en otras.



En planimetría la primera red constituye la ***triangulación o red trigonométrica;*** sus puntos, muy espaciados, se denominan *vértices,* y es análoga, aunque con lados más cortos, a las triangulaciones geodésicas de que hemos hablado y en las cuales debe apoyarse si el trabajo lo requiere. El método seguido, por cálculo de los triángulos, es el más exacto de todos los conocidos y se denomina de

[1] F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

intersección. Consiste en elegir puntos del terreno, denominados vértices, de manera tal que configuren triángulos en lo posible aproximadamente equiláteros, ya que esa configuración es la óptima, a la que siempre debe tenderse aunque en la práctica muy pocas veces se alcanza. Los vértices deben ubicarse en puntos dominantes del terreno, que ofrezcan amplio horizonte para poder ser observados desde una extensa zona a la que servirán de apoyo, y desde los restantes vértices que concurran a formar los triángulos.

Se materializan en primera instancia en forma provisoria, y recién cuando se ha comprobado la intervisibilidad con los restantes y determinado en forma aproximada los valores angulares resultantes no presentan valores menores de 15°(ángulos excesivamente agudos), se procede a materializarlos en forma definitiva.

Para obtener las coordenadas de todos los vértices se deben resolver los triángulos, de los que se miden en cada vértice las direcciones a los restantes, con lo que se obtienen todos los valores angulares y de ser posible, se debería medir los lados con instrumentos MED (**M**edición **E**lectrónica de **D**istancias). Pero es necesario conocer la longitud de un lado como mínimo, para ello se mide uno elegido de tal modo que permita hacerlo en las mejores condiciones. Luego por aplicación del teorema del seno se van resolviendo todos los triángulos. Si no es posible medir algún lado de la triangulación que cumpla las mejores condiciones (terreno llano y despejado de obstáculos) se busca una zona apta, de menor longitud, donde se mide la base, lado AB, que luego se amplía al lado T_1T_2 mediante mediciones angulares. Atendiendo a que los lados de las triangulaciones topográficas tienen longitudes que pueden variar entre algunos centenares de metros a una decena de kilómetros, deberán dimensionarse adecuadamente las señales a colocar en los mismos para poder ser bisectadas desde los restantes.

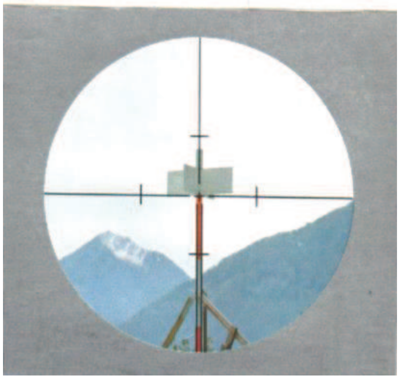
Por ejemplo para una distancia de 10 km se necesita una altura de 7 metros

$$\mathbf{H_{(cm)} = 7\ S^2_{(km)}}.$$

Tampoco resulta conveniente que la trayectoria del rayo luminoso pase cerca del terreno por la influencia perniciosa de la refracción en las capas más bajas de la atmósfera, así que en esos casos se procura elevar los vértices mediante la erección de torres.

No obstante este recurso, cuando la zona es llana o suavemente ondulada, es preferible utilizar la poligonación para establecer la red de apoyo (puntos P_i).

Balizamiento y torres:



Torre utilizada antiguamente para triangulaciones. El apoyo del teodolito es independiente del que se usa el operador

La segunda red, denominada ***topográfica o poligonación***, es interior a cada uno de los triángulos, distribuyendo en ellos puntos denominados *poligonometrícos,* y el método seguido para determinarlos es de ***itinerario***, que consiste en ir midiendo sucesivamente las rectas llamadas *ejes* que unen dos puntos y el ángulo que forman cada dos ejes consecutivos. Para el levantamiento de un itinerario se parte de un vértice, o punto poligonométrico, para llegar a otro vértice previamente establecido, formando en cada triangulo una malla de itinerarios que se entrecruzan.

La tercera red, llamada el ***relleno,*** se apoya en la anterior, estableciendo itinerarios cortos dentro de cada malla de la poligonación, pero levantando, en cada estación, todos los detalles del terreno circundante por el método que se conoce con el nombre de ***radiación***, midiendo las distancias de los diferentes puntos al centro y los ángulos que forman estos radios con una dirección fija.

Existen, en resumen, tres métodos planimétricos fundamentales, los de ***intersección, itinerario*** **y** ***radiación****,* que se utilizan, respectivamente, en las ***triangulaciones, poligonaciones*** **y** ***relleno*** de un levantamiento de cierta extensión.

A su vez, en altimetría se utilizan otros tres métodos para el cálculo de desniveles; o bien por visuales siempre horizontales, constituyendo la nivelación *geométrica,* o por *alturas,* propia de la red fundamental o de trabajos muy precisos, o con visuales inclinadas, que se denomina nivelación *trigonométrica,* o por *pendientes,* menos exacta que la anterior. Finalmente, en tanteos o trabajos expeditos podemos basarnos en las oscilaciones de un barómetro para deducir el desnivel entre dos puntos por la diferencia de la presión que se acusa, método muy impreciso que constituye la nivelación barométrica.

- **Distintas clases de redes de un levantamiento**

En todo trabajo de mediana importancia habrán de utilizarse entonces tres métodos fundamentales de topografía, *intersección, itinerario y radiación,* y aprenderemos a escalonarlos, apoyándolos unos en otros, de modo que se evite la acumulación de errores, siguiendo el criterio que el máximo error que puede cometerse al situar un punto en un plano sea inferior al límite de la percepción visual, que hemos evaluado en 0,2 milímetros.

Si el levantamiento fuera de gran extensión, habrá de apoyarse en la geodesia, compuesta, como sabemos, de tres redes, denominadas triangulaciones de primero, segundo y tercer orden. En estos trabajos topográficos se utilizaran como vértices todos los geodésicos enclavados en la zona, que de este modo quedara subdividida

A su vez, en topografía se utilizan las otras tres redes, denominadas *red trigonométrica, red topográfica* y *relleno* o *levantamiento de los detalles*

Para la primera, denominada también *triangulacón ,* se utiliza el método más preciso de intersección, -como veremos más adelante- que se apoyara o no en la geodesia según la índole del trabajo, y tiene por objeto situar en el plano una serie de puntos, denominados *vértices,* con la mayor exactitud posible, dividiendo el terreno en zonas mucho más reducidas que el triángulo geodésico de tercer orden. De este modo comienza la topografía donde termina la geodesia.

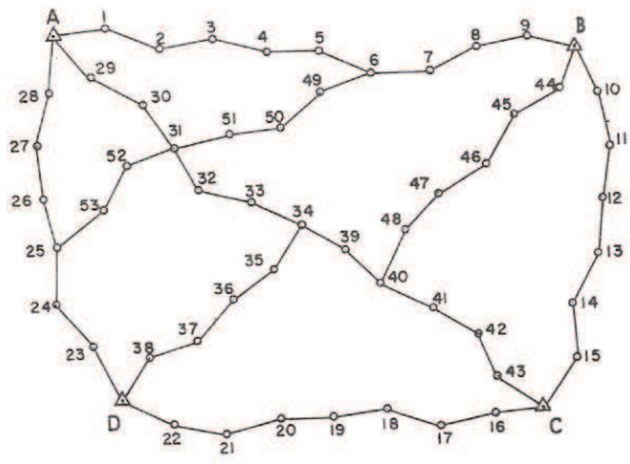
Los vértices de la red trigonométrica sirven de apoyo a la *red topográfica;* utiliza esta última preferentemente el método de itinerario, encuadrado entre dos vértices o entre puntos de otro itinerario; cuando la red es por itinerarios recibe también el nombre de ***poligonación***.

Con la red topográfica se distribuyen entre los vértices una serie de puntos a distancias muchos menores, denominados *puntos topográficos* Los puntos topográficos subdividirán aún más la zona, localizándose los errores.

La red de *relleno* utiliza preferentemente el método de radiación y también el de itinerario, pero para los últimos detalles puede hacerse uso, además, del método de abscisas y ordenadas o algún otro de los métodos elementales que se estudian en Agrimensura.

2. POLIGONACIÓN

Es el método itinerario el que casi siempre se utiliza para el levantamiento de la red topográfica. Los vértices adyacentes deben ser intervisibles. El levantamiento de la poligonal comprende la medición de los ángulos que forman las direcciones de los lados adyacentes (o los rumbos de estos lados) y las distancias entre los vértices Por este método se trazan en el campo una serie de itinerarios, que denominaremos ***primarios***, que unan entre si los puntos trigonométricos (vértices o puntos complementarios, indistintamente), mientras otros itinerarios ***secundarios*** apoyan en dos puntos de otro itinerario, o en uno de éstos y en un vértice, formando una malla que constituye la red topográfica, más frecuentemente conocida en este caso con el nombre de *poligonación.* En el caso de superficies pequeñas, en que pueda prescindirse de la triangulación, se levantara un **itinerario cerrado**, siguiendo el contorno, método denominado de *rodeo,* itinerario que servirá de apoyo para los secundarios, en igual forma que hemos expuesto.



En estos trabajos se utilizaran taquímetros de apreciación no inferior a 30 segundos sexagesimales. En poligonales de gran precisión, como en planos de población a escala de 1:1.000 o superiores, se utiliza hoy la medición de distancias electrónicas (MED), en sustitución de la cinta metálica que antes se usaba.

Para el levantamiento de un itinerario, por ejemplo el A B de la figura, se orientara el taquímetro en la estación A de partida, eligiendo preferentemente para este fin la visual al vértice B de llegada. Para medir los ángulos de la poligonal se procede en cada vértice, siguiendo un sentido de giro predeterminado: en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario. Se puede medir el rumbo o acimut del primer lado para que la poligonal quede orientada. Se procederá a medir los ángulos internos o externos. Los ángulos se miden aplicando la regla de Bessel (serie completa), bisectando siempre la señal lo más cerca posible de la superficie del terreno. Sólo en el caso de que B no sea visible desde A, o de que A B no sea lado de la triangulación y por eso no tuviésemos su acimut calculado, se orientara el taquímetro con relación a cualquier otro vértice.

Se procurara que cada itinerario se aproxime en lo posible a la línea recta y conducido en la forma ya explicada al hablar del método en general, se dejaran señalados los puntos de estación, con estacas numeradas, conviniendo una numeración única para toda la poligonación, tal como se señala en la figura, en la que el orden de los números indica el que se siguió en el trabajo.

En cada estación se comenzará por clavar la estaca antes de nivelar el instrumento; se dirigirá primero la visual de espalda para orientar, haciendo una segunda lectura en el prisma, continuando, si hubiese necesidad, por señalar algún punto por radiación, independiente del itinerario que seguimos, punto que recibe el nombre de *destacado o secundarios,* que tiene por objeto enlazar con el algún itinerario *secundario* posterior o de los de *último orden* del *relleno,* de cuyos itinerarios formará este punto el primer eje utilizándose como estación de partida, en el que se orientara el instrumento, utilizando como acimut de espalda el que ahora obtengamos corregido en 180º. El número de puntos secundarios (destacados), es en cambio muy reducido en la red topográfica, en la que se prescinde, de los detalles que habrán de ser objeto del levantamiento posterior, limitándose, en este caso, ya al arranque de nuevos itinerarios o a algún punto importante, si con ello puede evitarse volver a recorrer el terreno.

Todas las observaciones que se vayan haciendo en el campo se irán anotando en registros o en la memoria interna del taquímetro, al mismo tiempo ha de dibujarse un croquis, lo más claro posible, situando todos y cada uno de los puntos que se levanten, para conocer después en gabinete la situación relativa de los puntos entre sí.

Aunque la red topográfica no tenga otro objeto que el de servir de apoyo al relleno, no está sin embargo tan lejos de los detalles como para prescindir por completo de su situación, como se hacía en la red trigonométrica, en la que solo nos preocupaba la buena visibilidad de los vértices; por eso los itinerarios de la poligonación, aunque su emplazamiento no pueda sujetarse a reglas, convendrá llevarlos por los caminos, arroyos, vaguadas, lindes, etc., que constituyen ya detalles de puntos destacados para que queden totalmente representados, sin necesidad de repetirle en la red inferior, pero bien entendido que la elección de estaciones deberá supeditarse a las exigencias de la poligonación y no a los detalles.

Sera también obligada una poligonal de *rodeo,* de todo el levantamiento, enlazando vértice a vértice los del contorno, tomando por puntos secundarios (destacados) todos los de inflexión de la superficie y/o parcela y/o fraccionamiento.

También será recomendable, en el caso de itinerarios largos, como por ejemplo en el punto 34 de la figura, dirigir visuales a tres o cuatro vértices, para situarlos por un *Pothenot* (como veremos más adelante) y considerar como independientes los tres itinerarios que en él confluyen.

La longitud de los ejes se determinará previamente en el plan de trabajos que se establezca, encontrándonos con dos circunstancias contrapuestas; por un lado interesa la mayor longitud de las visuales, para evitar el temible *error de dirección*, que sabemos es el de mayor peligro en el cierre angular con taquímetro, y de otro, si las mediciones se hacen con la estadía o cintas, hemos de tender a la buena lectura de miras, lo que aconseja visuales cortas. Situación que se soluciona con la medición electrónica de distancias (MED). En general podremos aconsejar, como medio de armonizar las dos circunstancias, el alejar las señales (prismas) al máximo de distancia que consienta el anteojo y las condiciones de visibilidad, para apreciar con toda claridad la bisección.

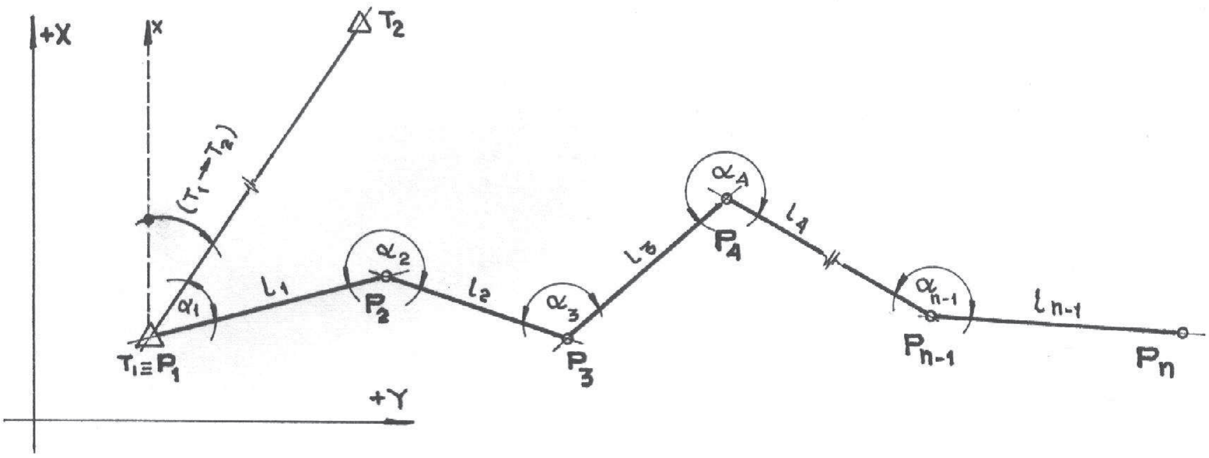
En itinerarios de gran precisión, o de mucha longitud, interesa evitar el *error de dirección*.

Altimetría. En la mayor parte de los casos habrán de utilizarse las mismas poligonales como red de apoyo, tanto planimétrico como altimétrico, por lo que habrán de tomarse

los datos necesarios para el cálculo del desnivel entre cada dos puntos, o sea por nivelación trigonométrica.
Sin embargo, en el gabinete, se calculan ambas redes, planimétrica y altimétrica, con entera independencia, por lo que el estudio altimétrico de la poligonación se hace en el capítulo de altimetría; no obstante, nos interesa ahora dejar constancia de que el trabajo de campo ha de ser simultaneo.

- **Metodologías**

La poligonación consiste esencialmente en la medición de ángulos y distancias



horizontales que vinculan entre sí una serie de puntos del terreno P_1, P_2, ..., P_n cuya situación planimétrica se desea determinar, refiriéndola a un par de ejes coordenadas X,Y.
Es frecuente que además se desee conocer la posición altimétrica de dichos vértices P_1, P_2, ..., P_n, en cuyo caso resulta cómodo e inmediato medir también los ángulos verticales en cada uno de ellos (en forma recíproca) a efectos de obtener sus desniveles mediante Nivelación Trigonométrica. Estas poligonales se denominan planialtimétricas.

En la figura los vértices trigonométricos T_1 y T_2 **son puntos de coordenadas conocidas,** las que en general se han determinado con un orden de precisión superior al que exigimos para los vértices de la poligonal. Pueden ser Puntos trigonométricos con su pilar de Acimut

Ellos constituyen el apoyo necesario para el "arranque" de la misma, pues permiten partir de un punto de coordenadas conocidas, y además, de una "orientación respecto del eje de las X" que se denomina acimut, que queda determinado en base a las coordenadas de T_1 y T_2.

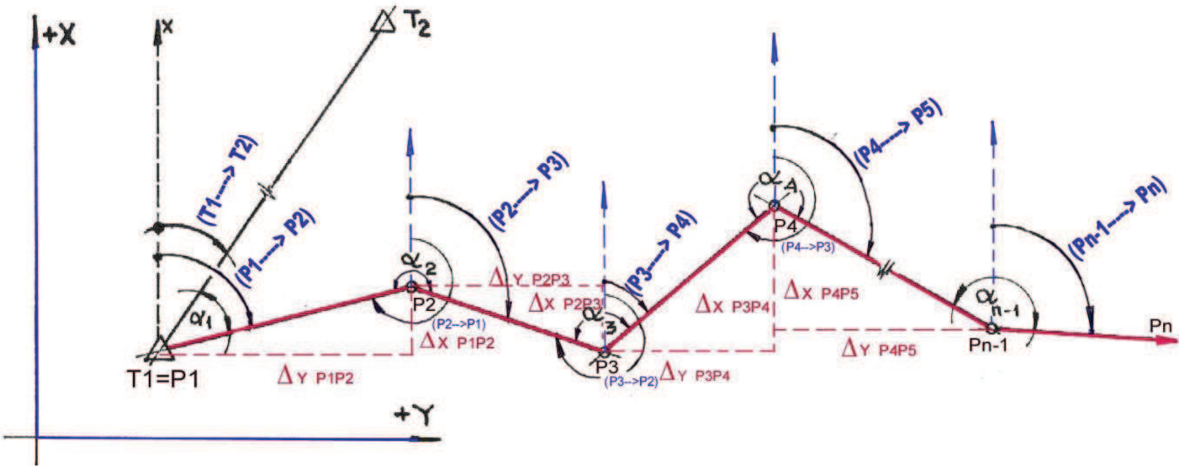
Los ejes de coordenadas, recordemos que se disponen con el semieje positivo de las X hacia arriba, generalmente coincidente con el Norte, y el semieje de de las Y hacia la derecha.

Recordemos (1) que se denomina ACIMUT de un lado $\overline{T_1T_2}$ ($T_1 \rightarrow T_2$) al ángulo que gira con vértice en T_1, una paralela semieje positivo de las X, hacia el semieje de la Y, hasta superponerse con dicho lado $\overline{T_1T_2}$.

Acimut del lado P_1P_2 o sea ($P_1 \rightarrow P_2$), es el Acimut $T_1 \rightarrow T_2$ más α_1. "este difiere de en 180° del Acimut del lado P_2P_1, es por ello que se estila escribir:

($P_1 \rightarrow P_2$) Acimut del lado P_1P_2; <u>acimut directo</u> del lado P_1P_2
($P_2 \rightarrow P_1$) Acimut del lado P_2P_1; <u>acimut recíproco</u> del lado P_1P_2

(1) Ver: Apunte TOPO.I.Agrim.Tema1.2de3.v1



De aquí surge que:

$$\Delta x_{P1P2} = P_1P_2 \cos (P_1 \rightarrow P_2)$$
$$\Delta y_{P1P2} = P_1P_2 \operatorname{sen} (P_1 \rightarrow P_2)$$

Los cálculos de los sucesivos acimutes de los lados de la poligonal se ejemplifican:

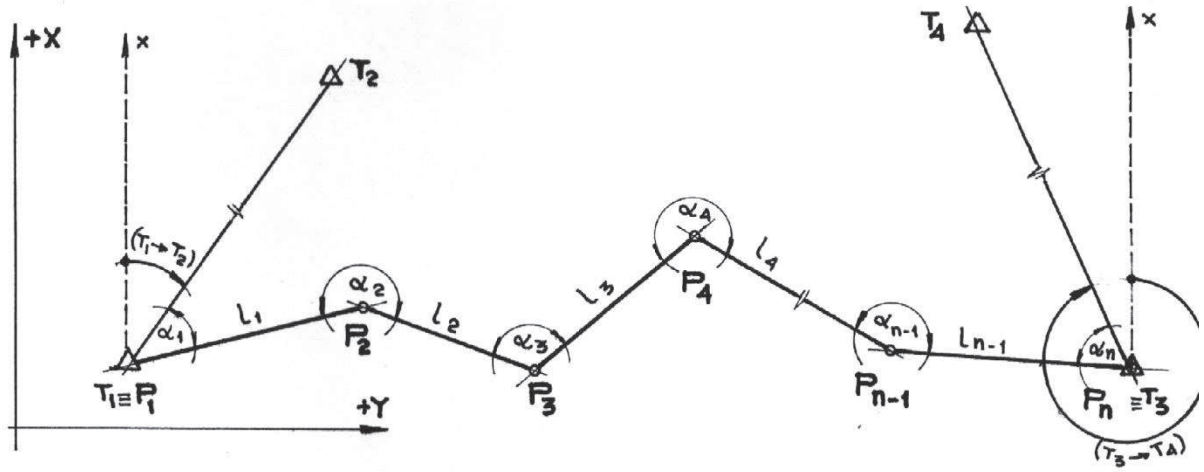
	X	Y	
T_2 =	5.439,91	1.686,51	
T_1 =	2.315.73	218,42	
Δx_{T1T2}	3.124,18	1.468,09	Δy_{T1T2}

$$\operatorname{tg} (T_1 \rightarrow T_2) = \Delta y_{T1T2} / \Delta x_{T1T2} = +0{,}4699121049 \Rightarrow \operatorname{arc\,tg} (+0{,}4699121049) =$$
$$(T_1 \rightarrow T_2) = \mathbf{25° \; 10' \; 10''}$$

	($T_1 \rightarrow T_2$)	25° 10' 10"
	α_1	48° 22' 20"
($T_1 \rightarrow P_2$)	($P_1 \rightarrow P_2$)	73° 32' 30"
	($P_2 \rightarrow P_1$)	253° 32' 30"
	α_2	208° 30' 00"
	($P_2 \rightarrow P_3$)	102° 02' 30"
	($P_3 \rightarrow P_2$)	282° 02' 30"
	α_3	118° 37' 30"
	($P_3 \rightarrow P_4$)	40° 40' 00"
	($P_4 \rightarrow P_3$)	220° 40' 00"
	α_4	261° 42' 10"
	($P_4 \rightarrow P_5$)	261° 42' 10"
	($P_5 \rightarrow P_4$)	122° 22' 10"
	α_5	....
		....

Así sucesivamente hasta el último lado de la poligonal. En los cálculos de los sucesivos Acimutes, se van sumando los ángulos α_i

- **<u>Poligonales "abiertas" y "cerradas".</u>**

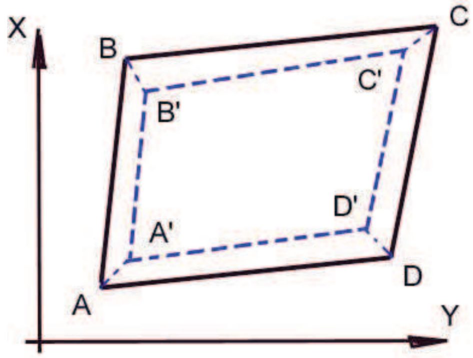


Es <u>importante insistir que las poligonales deben ser cerradas</u> en el mismo punto de arranque, o pueden estar intercalada entre dos vértices de una triangulación (trilateración), o bien proyectar una red de poligonales. Se deben descartar las poligonales abiertas

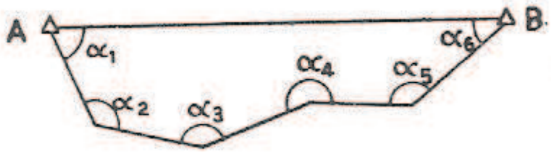
El polígono siguiente es un caso particular de la poligonal "cerrada", pues se parte de un punto A' y se cierra en el mismo punto. Existen pues controles de cierre angular y lineal.

POLIGONO DE MEDICION: A'-B'-C'-D'-A'.

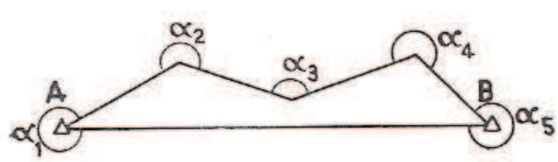
POLIGONO VERDADERO: A-B-C-D-A



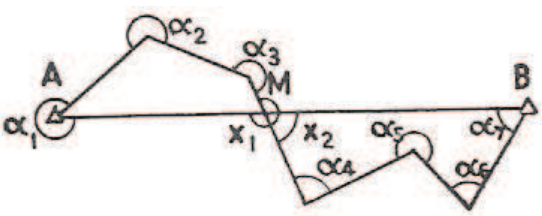
El **itinerario** podrá ocupar, con respecto al lado de la triangulación que une los vértices extremos, una de las tres posiciones señaladas en las figuras:



En la primera posición el segundo y el penúltimo punto se hallan del mismo lado de A B, en el sentido en que crecen los acimutes; en el segundo, en el sentido opuesto, y en el tercero, uno en un lado y el otro en el contrario.



En la primera posición los ángulos formados serán los interiores del polígono, en la segunda los exteriores, y en la tercera, que se forman dos polígonos, serán los interiores en uno y los exteriores en el otro.



En ninguno de los casos considerados importa que el itinerario corte al lado A B en más puntos que los señalados, porque de ser así prolongando el primero y el último eje, o algunos de los intermedios, obtendríamos una figura de ángulos iguales sin más que un punto de intersección en el último de los casos.

- **Ajuste de una poligonal**

Terminada la etapa de la MEDICIÓN de la Poligonal, se procede a efectuar el CÁLCULO de la misma.

El proceso de cálculo se iniciará con el AJUSTE de la Poligonal ya medida. El término AJUSTE es propio del Método de Obtención de Coordenadas y de otros que se utilizan en Topografía, ya que emplear el proceso de COMPENSACION implica la elaboración de ecuaciones de condición, ecuaciones normales, etc. y procedimientos mas rigurosos en donde se exige máxima precisión a las mediciones como las que se deben determinar en GEODESIA.

En toda poligonal, existen tolerancias angulares y lineales para sus "cierres"; teniendo en cuenta, el tipo de medición ejecutada y en qué zona. Al estar referidas a ejes de coordenadas X e Y, (por lo menos para el cálculo del cierre) se determinan las proyecciones (abscisas parciales y ordenadas parciales) Δx y Δy, con las cuales se calcula el cierre, errores ε_x y ε_y y las correcciones ν_y y ν_y.

El AJUSTE de la Poligonal consta de dos partes :

- Ajuste Angular.
- Ajuste Planimétrico.

El Ajuste Angular :

Partiendo del acimut conocido ($T_1 \rightarrow T_2$), y calculando en base a los ángulos medidos α_i, los sucesivos acimutes de los lados de la Poligonal, debería arribarse al valor de cierre ($T_3 \rightarrow T_4$)

Pero, en general esto no ocurre debido principalmente a la acumulación de los errores accidentales de la medición angular.

La diferencia entre el valor de ($T_3 \rightarrow T_4$) calculado, y el valor de ($T_3 \rightarrow T_4$) verdadero constituye el **Error de Cierre Angular** (ε_{ang}).

Antes de proceder al Ajuste Angular, debe compararse el Error ε_{ang} con la Tolerancia Angular T_{ang} que se ha establecido como exigencia técnica para esa Poligonal.

Tolerancias Angulares :

$T_{ang\ 1} = 20'' \sqrt{n}$ **Para poligonales de Gran precisión Topográfica.**
$T_{ang\ 1,2} = 30'' \sqrt{n}$ **Para poligonales Principales o de rodeo**
$T_{ang\ 2} = 40'' \sqrt{n}$ **Para poligonales de Precisión Topográfica Normal.**
$T_{ang\ 3} = 60'' \sqrt{n}$ **Para poligonales secundarias internas, de Escasa Precisión Topográfica,**

n = Número de vértices

Si resulta ε_{angb} menor o igual que $T_{ang\ i}$ se procede al Ajuste Angular.

Este consiste en repartir el error ε_{ang} por igual en todos los ángulos medidos, o sea aplicar la **corrección**:

$$\nu_{ang} = - \varepsilon_{ang} / n$$

n = Número de ángulos medidos

Fórmula a emplear y secuencia de cálculo :

$$(T_1 \rightarrow T_2) + \Sigma\alpha_i = (T3 \rightarrow T4) + 180° (n-1) + \varepsilon_{ang}$$

Donde: $(T_1 \rightarrow T_2) + \Sigma\alpha_i$ = Azimut calculado

$(T_3 \rightarrow T_4) + 180° (n-1)$ = Azimut verdadero

$$\varepsilon_{ang} = (T_3 \rightarrow T_4)_c - (T_3 \rightarrow T_4)_v = A_{zc} - A_{zv}$$

Comparar: ε_{ang} con $T_{ang\ i}$

si $\varepsilon_{ang} < T_{ang\ i}$; calcular $\nu_{ang} = -\varepsilon_{ang} / n$

Aplicar la corrección ν_{ang} a todos los ángulos medidos.

El Ajuste Planimétrico :

Realizado el ajuste angular debería cumplirse el lineal o sea :

$$X_{T1} + \Sigma\,\Delta x_i = X_{T3}$$
$$Y_{T1} + \Sigma\,\Delta y_i = Y_{T3}$$

Pero ello no ocurre debido a la acumulación de los errores lineales y angulares de la medición -estos últimos subsisten a pesar del ajuste angular efectuado-.

O sea que hemos arribado a valores distintos $X_{T3'}$; $Y_{T3'}$, correspondientes a un punto **T_3'**. La diferencia entre las coordenadas del punto al que hemos arribado **T_3'**, y el que tendríamos que haber obtenido **T_3**, constituyen lo que se llama el **Error de Cierre Planimétrico Total o Flecha de Error = $\vec{F}$**.

Este error tiene dos componentes ε_x y ε_y:

$$\varepsilon_x = X_{T3'} - X_{T3}$$
$$\varepsilon_y = Y_{T3'} - Y_{T3}$$

Luego, el Error de Cierre Planimétrico Total, o Flecha de Error será :

$$\overrightarrow{T_3T_3'} = \vec{F} = \varepsilon_L = \sqrt{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)}$$

Es necesario calcular también el acimut φ de la flecha, sobre todo cuando ésta supera la TOLERANCIA lineal prefijada, ya que el valor de φ proporciona un elemento de juicio para investigar en que lado de la poligonal pudo cometerse un error grosero al medir su longitud (la investigación comenzaría por revisar aquellos lados que tienen un acimut similar al de la flecha).

Luego, se calcula el acimut φ de la flecha :

$$\text{tg}\ \varphi = \text{tg}\ (T3 \rightarrow T3') = \varepsilon_y / \varepsilon_x \qquad \varphi = \text{arc tg}\ (\varepsilon_y / \varepsilon_x)$$

Una vez calculada la flecha F, se compara a ésta con la TOLERANCIA LINEAL T_L.

Esta TOLERANCIA será acorde con la finalidad del trabajo a realizar y con el instrumental empleado en la medición.

Corresponde a la TOLERANCIA LINEAL fijada por organismos nacionales.

Recordemos que una distancia lineal se puede medir con cintas de acero, ruleta, taquimétricamente, paralácticamente, con EDM, etc., luego, la TOLERANCIA LINEAL surge entonces de considerar la finalidad del trabajo y del instrumental empleado en la medición de ángulos y distancias.

Tolerancia (s/Instrucciones Generales para Agrimensores Art. 40º)

$T_{L1} = 0{,}015 \sqrt{0{,}3\,L + 0{,}0005\,L^2}$ Para poligonales principales o de rodeo en zonas urbanas o en límites de partido.

$T_{L2} = 0{,}020 \sqrt{0{,}3\,L + 0{,}0005\,L^2}$ Para poligonales principales o de rodeo en zonas de quintas y de chacras o interna en las de rodeo en zonas urbanas.

$T_{L3} = 0{,}010 \sqrt{1{,}5\,L + 0{,}0030\,L^2}$ Para poligonales rurales en condiciones normales.

$T_{L4} = 0{,}015 \sqrt{1{,}5\,L + 0{,}0030\,L^2}$ Para poligonales rurales en condiciones difíciles (costas, arroyos, lagunas, montes, bañados, sierras, etc.)

$T_{L5} = 0{,}010 \sqrt{0{,}3\,L + 0{,}0005\,L^2}$ Para las mediciones en los frentes de manzanas.

$T_{L6} = 0{,}030 \sqrt{0{,}3\,L + 0{,}0005\,L^2}$ Para las mediciones en el interior de manzanas.

L : perímetro, longitud horizontal en metros

Flecha $F = \varepsilon_L$ menor T_{Li}

Sintetizando, si la flecha $F=\varepsilon_L < T_{Li}$, se procede a efectuar el AJUSTE PLANIMETRICO de la poligonal del siguiente modo :

"Desplazaremos" a todos los vértices (V_2, V_3, ...,y T_3’) según direcciones paralelas a la dirección de flecha F.

Este desplazamiento se hace en cálculo y no realmente, ya que los mojones o estacas que materializan los vértices NO SE MUEVEN. De esta manera los lados de la poligonal experimentarán pequeños giros y modificaciones en su longitud.

A este proceso lo debemos entender así :

En el caso IDEAL de tener una poligonal de LADOS IGUALES, los desplazamientos de los vértices resultarían también iguales, o sea :

$$f_1 = f_2 = ...= f_6 = f$$

$$\text{siendo } f= - F/ 6 \quad ; \quad \text{para n lados } f_i = - F / n$$

Para el caso que tratamos (de lados desiguales):

$$\mathbf{f_i = - (F / \Sigma\, l_i)\, l_i} \qquad (1)$$

O sea, que los desplazamientos **f_i** serán proporcionales a las longitudes de los lados medidos.

Cálculo de los valores correctivos f_i y de sus proyecciones δ_{xi} y δ_{yi}:

$$\delta_{x1} = f_1 \,.\, \cos \varphi$$
$$\delta_{y1} = f_1 \,.\, \text{sen}\, \varphi$$

para cualquier lados será

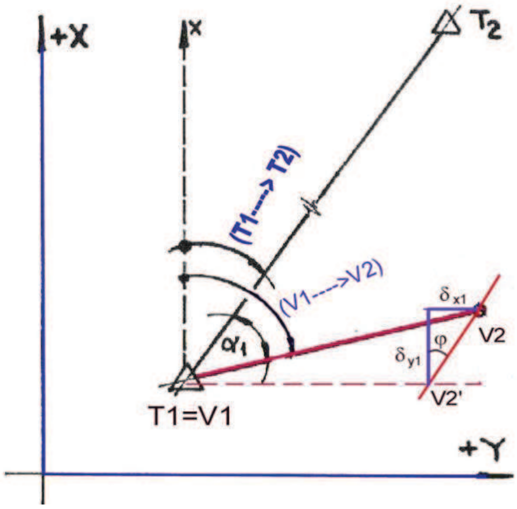
$$\delta_{xi} = f_i \,.\, \cos \varphi$$
$$\delta_{yi} = f_i \,.\, \text{sen}\, \varphi$$

Pero según la (1):

$$\delta_{xi} = - (F / \Sigma l_i) \,.\, l_i . \cos \varphi$$
$$\delta_{yi} = - (F / \Sigma l_i) \,.\, l_i . \operatorname{Sen} \varphi$$

y como :

$$\varepsilon_x = F \,.\, \cos \varphi$$
$$\varepsilon_y = F \,.\, \operatorname{sen} \varphi$$



Queda finalmente:

$$\boldsymbol{\delta_{xi} = - (\varepsilon_x / \Sigma l_i) \,.\, l_i}$$
$$\boldsymbol{\delta_{yi} = - (\varepsilon_y / \Sigma l_i) \,.\, l_i}$$

Notar que una vez medida la poligonal,

$(\varepsilon_x / \Sigma l_i)$ y $(\varepsilon_y / \Sigma l_i)$ son constantes.

Estas dos expresiones nos indican las correcciones (δ_{xi}, δ_{yi}) a aplicar a las proyecciones Δx_i y Δy_i y son proporcionales a las longitudes de los lados l_i.

Una vez calculadas las correcciones a los proyecciones Δx_i y Δy_i (tener precaución con el signo) se procede a completar el CALCULO, determinando de esta manera las COORDENADAS DEFINITIVAS de los vértices de la poligonal que ES LO QUE EN REALIDAD SE BUSCA.

<u>Fórmulas a emplear y secuencia de cálculo</u> :

Una vez efectuado el AJUSTE ANGULAR (en los ángulos medidos), se procede a realizar el CALCULO PROVISORIO de la poligonal. Se comienza por calcular los acimutes de los lados en forma consecutiva. Con estos acimutes y las longitudes de los lados se calculan los proyecciones Δx_i y Δy_i.

$$X_1 + \Sigma \Delta x = X_{T3'} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = X_{T3'} - X_{T3}$$

$$Y_1 + \Sigma \Delta y = Y_{T3'} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = Y_{T3'} - Y_{T3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (T_3 \rightarrow T_3') = \varepsilon_y / \varepsilon_x \quad \therefore \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} (\varepsilon_y / \varepsilon_x)$$

$$\vec{F} = \varepsilon_L = \sqrt{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)}$$

$$\vec{F} = \varepsilon_L = \sqrt{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)}$$

Comparar $\vec{F}$ con T_L; si flecha $\vec{F}_L \varepsilon_L < T_{Li}$, se procede a efectuar el AJUSTE PLANIMETRICO

Cálculo de las correcciones a las proyecciones Δx_i y Δy_i.

$$\boldsymbol{\delta_{xi} = - (\varepsilon_x / \Sigma l_i) \,.\, l_i}$$
$$\boldsymbol{\delta_{yi} = - (\varepsilon_y / \Sigma l_i) \,.\, l_i}$$

Aplicar las correcciones antes halladas a las proyecciones Δx_i y Δy_i (abscisas parciales y ordenadas parciales) y calcular las COORDENADAS DEFINITIVAS de los vértices de la poligonal, o sea efectuar el CALCULO DEFINITIVO de la poligonal. Ejemplo :

$$X_2 = X_1 + (\Delta x_{1\text{-}2} + \delta_{xi})$$

$$Y_2 = Y_1 + (\Delta y_{1\text{-}2} + \delta_{yi})$$

Una vez efectuado el AJUSTE de la poligonal se puede comprobar fácilmente que han cambiado los valores angulares y lineales MEDIDOS. Esto se debe a que se han introducido pequeñas correcciones (en los ángulos y distancias originales) necesarias y propias del proceso de AJUSTE. En la mayoría de los casos se procede a graficar la Poligonal que, además de dar una idea del conjunto del trabajo pone en evidencia si se han cometido errores groseros.

REGLA PRÁCTICA: La precisión angular $m\alpha$ con que se mide la poligonal, para que sea acorde con la precisión lineal ε_L, debe oscilar en el valor ε_L /2 es decir: $m\alpha \cong \varepsilon_L /2$ (elásticamente entre $m\alpha \cong \varepsilon L$ y $m\alpha \cong \varepsilon L/3$)

Ejemplo: medir poligonal de longitud = 5 km con una vacilación en el punto final de 0,50 m (ML).

La precisión con que se debe medir los ángulos acorde con dicha precisión lineal será:

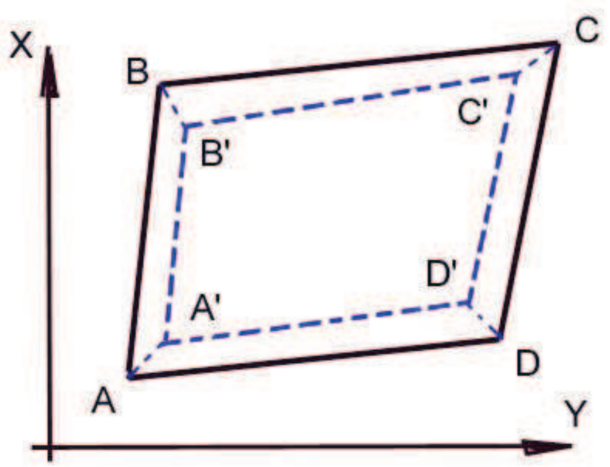
$$\varepsilon_L = ML / L = 0{,}50/ 5km = 1/10.000$$

$$m\alpha \cong \varepsilon_L /2 = 1/20.000 \cong \pm 10'' \text{ (multiplicado por } \rho'')$$

3. POLIGONO

Generalidades: El Polígono es un caso particular de la poligonal cerrada en donde se parte de un punto, normalmente de coordenadas conocidas, y se cierra sobre el mismo punto.

Tiene control de cierre angular y lineal, por lo tanto vale todo lo expresado para la poligonal vista.



La particularidad que debemos considerar para un polígono es que en la mayoría de los casos se tendrán dos figuras:

El ABCD que es el verdadero, y el A' B' C' D' es el auxiliar.

Del primero (ya materializado en el terreno) queremos evaluar sus magnitudes lineales y angulares, estas nos permitirán a su vez calcular las coordenadas de los vértices y en base a ellas calcular la superficie.

Es muy frecuente que la materialización de los vértices A, B, C y D sea tal que no podamos hacer estación con el instrumental (teodolitos, estaciones totales, EDM, etc.), como por ejemplo. poste de un predio rural, aristas de un edificio construido, obras de arte diversas, etc.

Lo que se hace en la práctica es demarcar (estaquear) un polígono auxiliar que será el que mediremos directamente y luego por el procedimiento de la Radiación vincularemos los vértices del polígono verdadero.

Procedimiento :

Se miden las direcciones angulares que corresponden a cada vértice y además bisectar y leer las direcciones A'A, B'B, C'C, D'D; también se deben medir las respectivas distancias.

Esta medición (lineal y angular) es de gran responsabilidad por cuanto cualquier error grosero no se evidenciará fácilmente en el proceso de Cálculo ya que no existe control. De allí que se hace necesario una cuidadosa reiteración (o repetición) de las mediciones.

Si el terreno lo permite, conviene escoger un polígono auxiliar de lados paralelos a los del verdadero, en cuyo caso, los ángulos medidos en aquel corresponden también a este.

Conviene también medir los lados del polígono verdadero, de esta manera se evitan errores de cálculo a la vez que abrevia el mismo.

Proceso de cálculo : Se calcula en primer término el polígono auxiliar. Si los errores están dentro de las Tolerancias preestablecidas se procede a efectuar los ajustes vistos para la poligonal cerrada. Al estar referidas a ejes de coordenadas X e Y, (por lo menos para el calculo del cierre) se determinan las proyecciones (abscisas parciales y ordenadas parciales) Δx y Δy, con las cuales se calcula el cierre, errores ε_x y ε_y y las correcciones ν_y y ν_y.

Ajuste angular:

$$\varepsilon_{ang} = 180° (n - 2) - \Sigma_{ang.\ internos}$$

$$\textbf{Corrección:} \quad \nu_{ang} = -\varepsilon_{ang} / n$$

Si en lugar de medir los ángulos internos se miden los ángulos externos, la suma debe ser igual a **180° x (n + 2).**

Este control se realiza en el campo, de tal manera que si el error es mayor que la tolerancia (error grosero) puede realizarse la medición nuevamente, hasta obtener un error de cierre menor que la tolerancia.

Ajuste lineal: $\varepsilon_x = \Sigma^+ \Delta x - \Sigma^- \Delta x$

$$\varepsilon_y = \Sigma^+ \Delta y - \Sigma^- \Delta y \qquad \varepsilon_L = \sqrt{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)} \qquad \varepsilon_L < T_i$$

Corrección:

$$\nu_x = - \frac{\Sigma^+ \Delta x - \Sigma^- \Delta x}{2\, \Sigma^{\pm} \Delta x} \Delta x_i$$

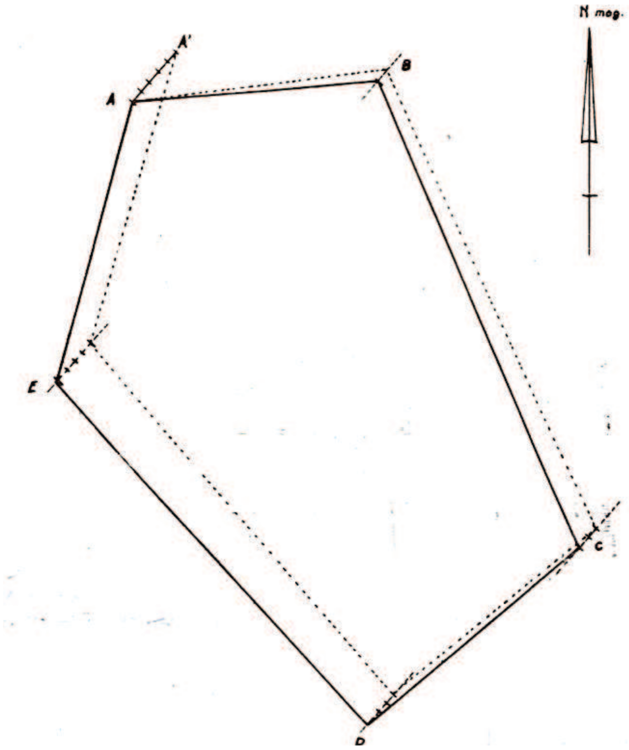
$$\nu_y = - \frac{\Sigma^+ \Delta y - \Sigma^- \Delta y}{2\, \Sigma^{\pm} \Delta y} \Delta y_i$$

En base a las coordenadas de los vértices del polígono auxiliar y a los acimutes de las direcciones que constan en la libreta de campo (A'A, B'B, C'C, D'D;) y a sus correspondientes distancias se calculan las COORDENADAS de los vértices del polígono verdadero.

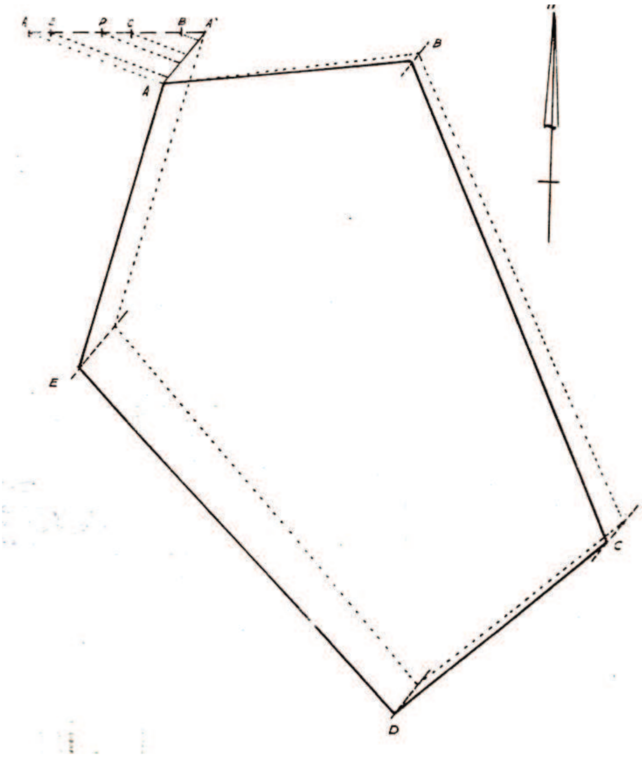
Finalmente, a partir de los vértices definitivos del polígono verdadero se de-terminan las longitudes y los acimutes de los lados y por diferencia de estos los ángulos interiores del polígono buscado.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Luego de compensar los ángulos y promediar las medidas de las distancia de los lados se puede representar la poligonal con la escala establecida de trabajo, se representa la primera estación y el primer lado, en forma arbitraria o marcando su acimut. Se utiliza un círculo graduado (transportador) y un escalímetro, también se lo puede dibujar en un PC con soporte AutoCad. Se representa estación por estación hasta llegar al último vértice que debería coincidir con el primero (si la poligonal es cerrada). Como en las mediciones siempre hay errores, esta coincidencia no se produce. Se llega a un punto A' cercano a A. El segmento AA' es el error de cierre de la poligonal. Si este segmento es menor que la tolerancia se procede a compensar la poligonal.



Si hay errores groseros en la medición se procede a remedir algunos lados o ángulos. Existen algunos métodos para detectar los errores groseros. En primer lugar se deben controlar los lados que sean paralelos al error de cierre (AA'). Para detectar errores groseros angulares, se revisan los ángulos cuyos arcos se puedan superponer con el error de cierre, es decir el segmento AA'. Primero se revisa el gráfico, luego los cálculos y finalmente, si el error no aparece, se repite la medición en el terreno.



4.1. Corrección gráfica.

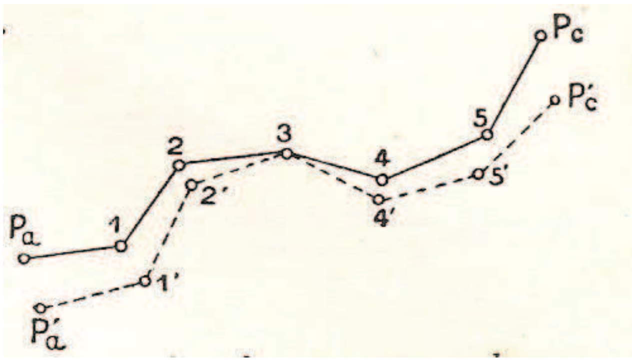
Si el error de cierre es menor que la tolerancia, se procede a compensar gráficamente la poligonal. Se divide el segmento AA' en el número de vértices. Se trazan paralelas al segmento AA’ en cada uno de los vértices. El vértice B se desplaza una división en el sentido de AA’. Luego el vértice C se desplaza dos divisiones en el mismo sentido y así sucesivamente hasta llegar al último vértice, el cual se desplaza n veces, hasta coincidir con el primero.

La representación gráfica se realiza cuando no se requiere precisión. El error que se produce al graficar la poligonal es mayor que el error de medición. Además los errores de representación se suman o arrastran de una estación a otra, de modo que no es compatible la precisión de los instrumentos y los métodos con la representación gráfica de las coordenadas polares. Para evitar los errores que resultan al graficar la poligonal utilizando el círculo graduado y el escalímetro, se realiza la transformación de las coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

4.2. Errores groseros en poligonales cerradas. Localización.[2]

Los errores groseros que se pueden haber cometido en poligonales de enlace o polígonos cerrados se ponen de manifiesto en los cierres angulares y lineales. Con el objeto de limitar los trabajos de remedición a los elementos mal determinados, es necesario localizar el error grosero antes de iniciar dichas operaciones de remedición.

4.2.1. <u>Buscando un error angular grosero</u>: suponemos en la figura que se ha cometido en el vértice 3 un error grosero, habiendo medido un ángulo demasiado grande. Calculando la poligonal, a partir del origen P_a, se obtendrán las coordenadas de los puntos 4, 5 y P_c equivocadas.



Repitiendo el cálculo de la poligonal en sentido opuesto, desde el punto final hacia el inicial, se obtendrán erróneas las coordenadas de los puntos 2, 1, P_a, debido al efecto del error grosero en 3. Dedúcese de los dos cálculos que sólo para el punto 3 se obtienen a las coordenadas concordantes. Es decir: en la poligonal P_a …. P_c sólo el trozo P_a ... 3 es libre de error, y en la poligonal P_c ... P_a sólo el trozo P_c ... 3, obteniéndose, por lo tanto, para el punto 3 por ambos conductos las mismas coordenadas dentro de la precisión inherente al trabajo.

Tratándose de un polígono cerrado, se podrá efectuar el doble cálculo a partir de punto de arranque, una vez en el sentido de las agujas del reloj y una 2º vez en el sentido opuesto. Se encontrará así siempre un punto cuyas coordenadas son concordantes en ambos cálculos. Es éste entonces el vértice, en el que está localizado el error. Es en este punto que será por tanto necesario repetir la medición del ángulo.

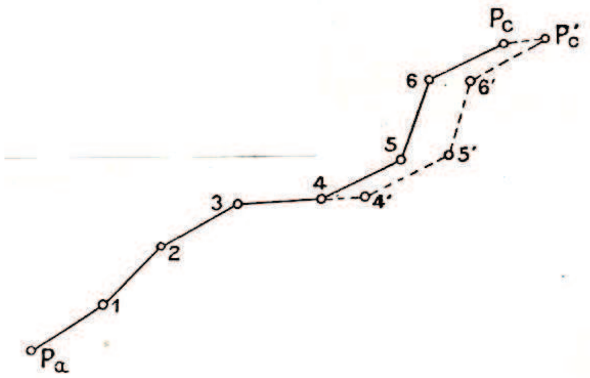
4.2.2. <u>Buscando un error lineal grosero</u>

Represéntase en la figura siguiente el efecto de un error lineal grosero cometido en el lado 3 - 4. Efectuando el cálculo de coordenadas con el lado 3 - 4 equivocado, se llegará a un punto terminal P'_c, cuyas coordenadas difieren considerablemente de las de P_c de antemano conocidas. El segmento $P_cP'_c$ expresa gráficamente por su longitud y dirección, la magnitud y el signo del error lineal cometido.

[2] Compendio de Topografía .Tomo II Roberto Mûller

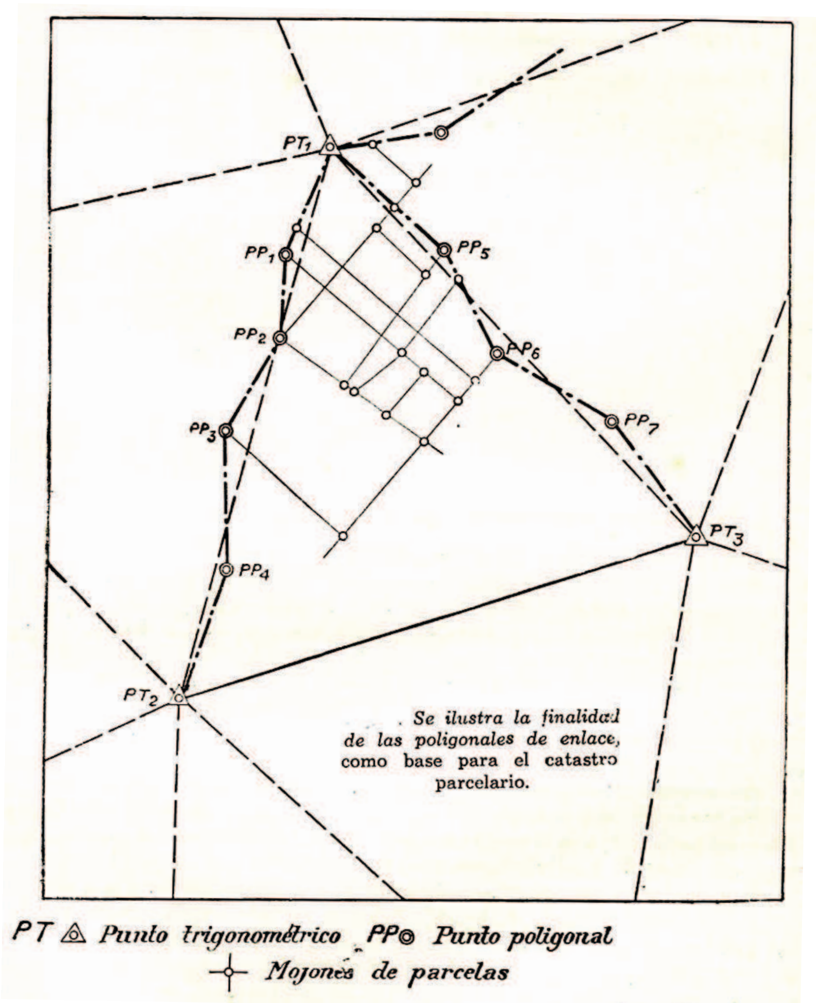
En base a las coordenadas de los puntos P_c' y P_c se calcularán, según las fórmulas vistas, el rumbo φ del lado erróneo y la magnitud F del error. Se averigua entonces cuál de los lados tiene ese rumbo y se lo remide.

En caso de que varios lados tuvieran aproximadamente el mismo rumbo, no sería posible localizar el error lineal, siendo entonces necesario repetir la medición de todos los lados de la poligonal.



4.3. Ejemplos de aplicaciones de poligonales.[3]

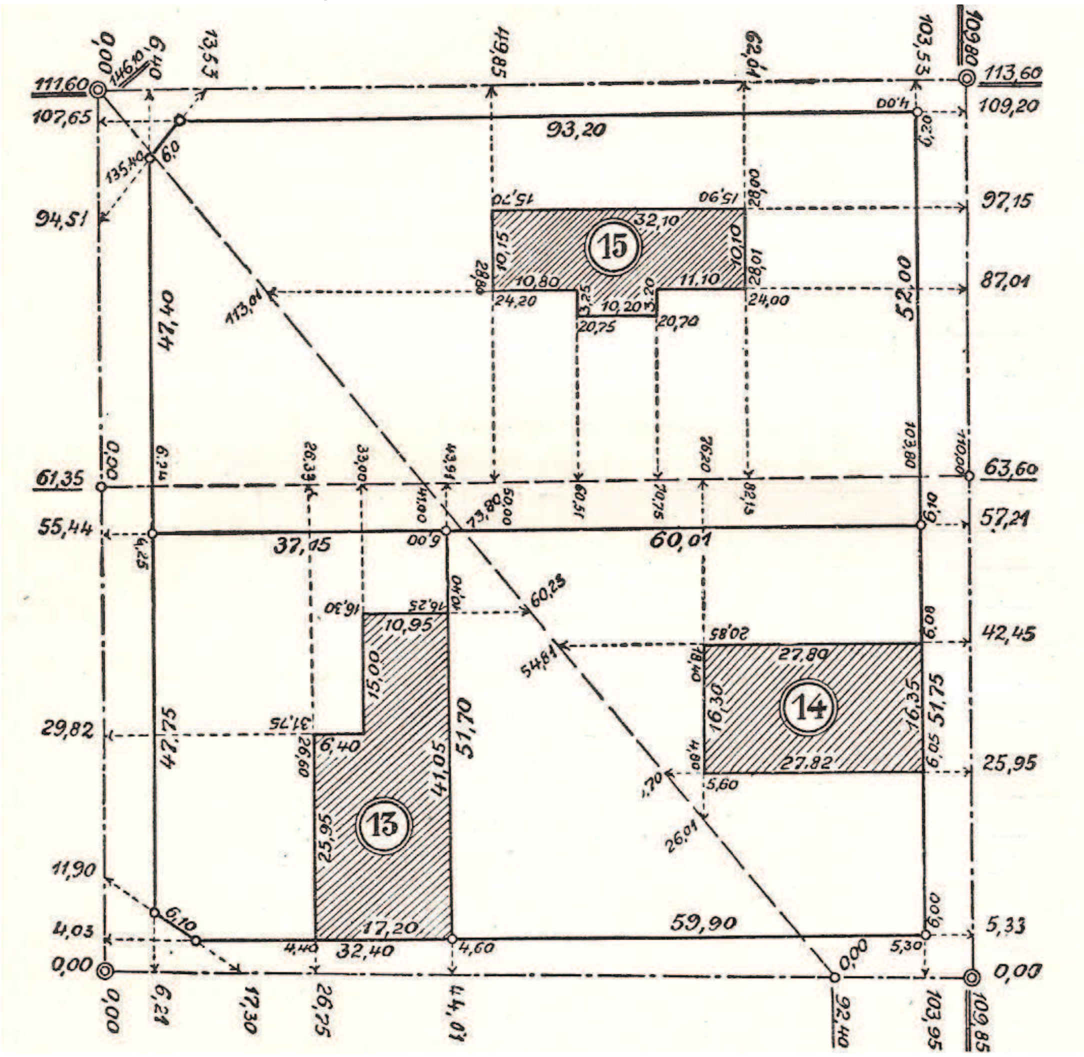
Entre los puntos trigonométricos existentes (PT_i) o vértices geodésicos de la red se intercalan tanto nuevos puntos fijos topográficos PP_i como sean necesarios para un racional levantamiento parcelario (mojones de parcelas). Esas poligonales intermedias establecen la unión entre la triangulación y el catastro parcelario.



Muchas veces se determinan los detalles por medio de **poligonales rectas (alineaciones)**, para relevamientos o replanteos. Desde ellas se pueden situar puntos

[3] Compendio de Topografía .Tomo II Roberto Mûller

de detalles sobre transversales o determinando los pie de las perpendiculares y su progresivas o abscisas y ordenadas
Ventajas e inconvenientes del método: El método de las alineaciones, muy en uso en el trazado de ferrocarriles, carreteras, etc., generalmente no es aplicable a extensas líneas de levantamiento catastral, por los múltiples obstáculos (pequeñas elevaciones en el trayecto, el intenso tránsito de las calles, etc.) que impiden la visual.
Pero, reduciendo la longitud de las alineaciones, por ejemplo, a 100 hasta a 150 metros, o sea las distancias de esquina a esquina de manzana, uniendo puntos poligonales como muestra la figura.



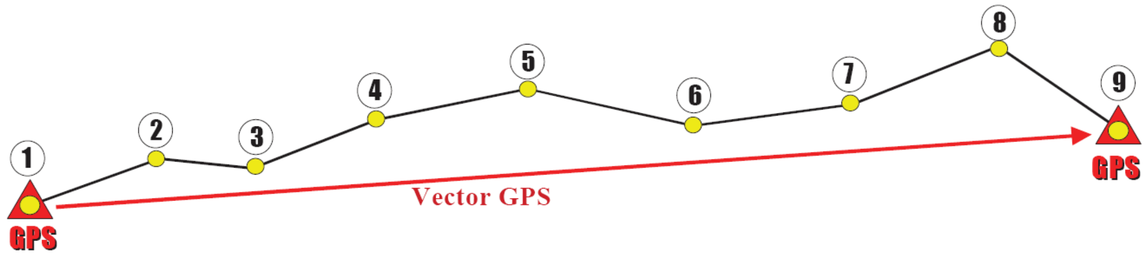
Este método extendido a grandes conjuntos de líneas formando red, adquiere toda su preponderante importancia en los levantamientos catastrales por las notables ventajas que ofrece: rapidez del trabajo de campo, simplicidad del cálculo de coordenadas de los puntos de detalle y buena precisión de los resultados obtenidos por la eliminación de las observaciones angulares.
En los trabajos de catastro rural, también, muchas veces el carácter irregular del terreno y el estado avanzado de los cultivos (maíz, trigo, etc.) dificultan el trazado de largas alineaciones para el establecimiento de la red básica.

5. POLIGONACIÓN COMBINADA CON GPS[4]

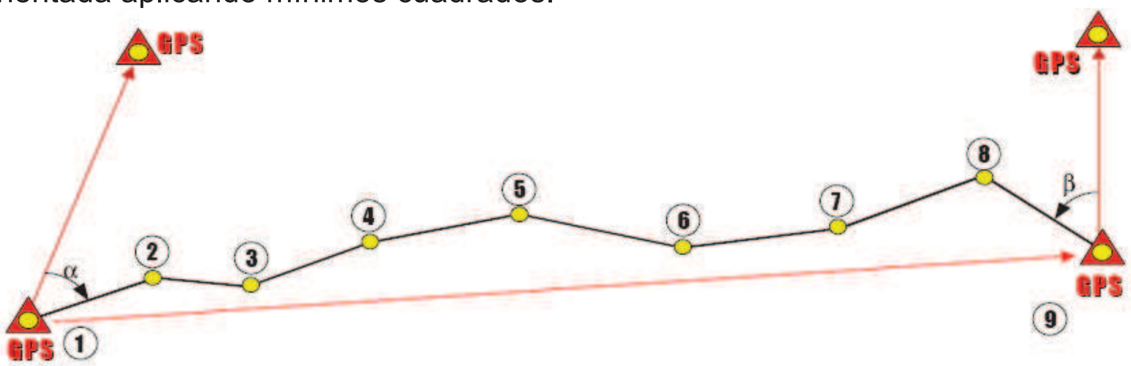
Se destacan tres formas de proceder:

5.1. El Sistema de apoyo se construye con una poligonación como método principal medida con estación total, y el GPS se emplea para el Control y compensación. (Método de captura: Estático ó Fast-estático).

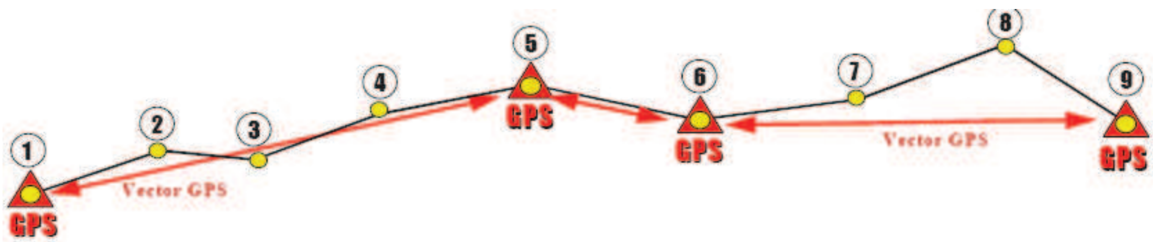
5.1.1. Se observa con GPS ambos extremos de la poligonal y se compensa como poligonal doblemente atada aplicando mínimos cuadrados. [5]



5.1.2, Se colocan dos puntos GPS en cada extremo de la poligonal asegurando la intervisibilidad entre cada par y se compensa como poligonal doblemente atada y orientada aplicando mínimos cuadrados.



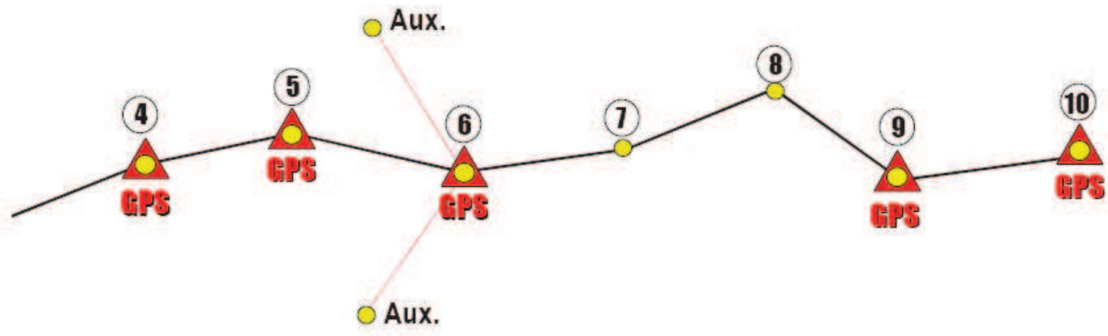
5.1.3. Se mide con GPS en ambos extremos y en algunos vértices intermedios, donde puede suponerse que es más débil la poligonal.



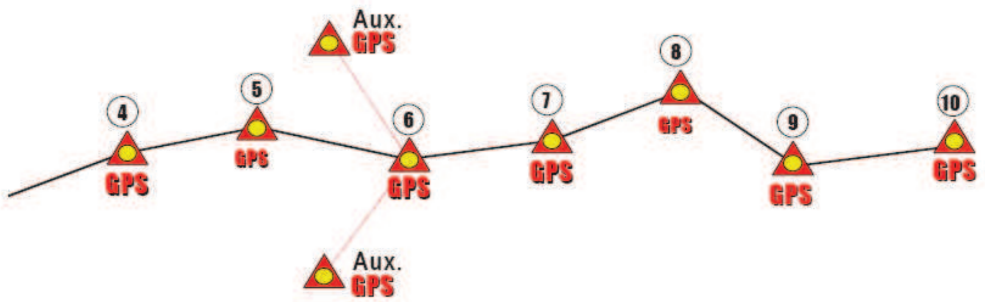
5.2. El Sistema de Apoyo principal se mide con GPS. Método de captura: Estático ó Fast-estático y se emplea estación total con el objeto de completar la poligonal del sistema principal y densificar la red. Esta manera de proceder, exige que exista visibilidad entre los puntos GPS consecutivos, a fin de tener orientación en todos los vértices. Esta forma de trabajo es la más recomendada, ya que permite determinar la posición de los vértices, evitando la acumulación de errores de las poligonales, y a su vez de forma ágil, permite la determinación de coordenadas de vértices que con GPS serían difíciles, imprecisos o imposibles de medir, por causa del multipath o por tener

[4] Topometría y Microgeodesia. Ing.Agrim. Armando Del Bianco. FCEFyN.UNC
[5] Levantamientos Combinaos. Agrim. Rubén Rodriguez

una ventana muy estrecha (zona urbana densamente poblada con alto edificios, zona de monte alto, quebradas estrechas y profundas)



5.3. El La red se mide totalmente con GPS. Método de captura: Estático ó Fast-estático). La densificación también se realiza con GPS (método de captura: Estático, Fast-estático y/ó Stop & Go) la poligonal es solo una figura geométrica



Esta manera de proceder, obliga a que exista horizonte GPS en absolutamente todos los vértices. Esto muy pocas veces es posible, salvo que se trate de un gasoducto en la patagonia, o un camino en la pampa húmeda (en general: proyectos de obras lineales en zona de llanura rural). Pero resulta muy difícil y a veces imposible, en los caminos de montaña como en la cordillera de los Andes, en zonas muy boscosas, monte alto o selva; como también en zonas urbanas densamente poblada con altos edificios. Aquellos vértices que no puedan ser resueltos deberán (como en el caso anterior) ser densificados mediante Estación Total.

6. DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES. PROCEDIMIENTOS.

6.1. MEDIDA DE LASUPERFICIE AGRARIA[6]

Las únicas superficies que interesan, no sólo desde el punto de vista topográfico, sino en su aspecto agrícola, son las que resultan de proyectar el relieve real del terreno sobre un plano horizontal de comparación, extensión que se conoce con el nombre de *superficie agraria.* Nace el concepto de considerar que lo mismo el tronco de los árboles que el tallo de las plantas herbáceas crecen verticalmente y no en sentido perpendicular a la superficie del terreno, por lo que la distancia árbol a árbol, o de planta a planta, será independiente de la inclinación del suelo del mismo modo que el valor de una parcela urbana al ser verticales los muros de los edificios, depende exclusivamente del tamaño que pueda darse a las habitaciones, cuyo piso horizontal tendrá una superficie independiente de la mayor del bien por la inclinación del terreno.

[6] F. Dominguez García-Tejero. Topografía General y Aplicada

Quede, por tanto, bien aclarado, que cuando se habla de hectáreas, área o centiáreas de una superficie, nos referimos siempre a su proyección horizontal y no a su superficie real, que no interesa en la generalidad de los casos

6.2. Métodos para la evaluación de áreas

Para la medida de superficies no necesario levantar el plano, aunque también puede determinarse utilizando medidas realizadas sobre éste; de aquí una primera clasificación de los métodos de de agrimensura, según se hagan las medidas directamente en el terreno, o se deduzca del plano la extensión que buscamos.

A su vez, el segundo caso admite dos modalidades, según que se utilicen métodos topográficos o se maneje el ***planímetro,*** ingenioso aparato. cuyo fundamento estudiaremos, que nos da directamente el área de una superficie limilada por un contorno.

De aquí que los métodos de agrimensura los agrupemos para su estudio en los siguientes:

1º **Métodos numéricos o analítico**, o por medidas directas sobre el terreno.

2º **Métodos gráficos y métodos semi-gráficos**, o por medidas indirectas sobre el plano.

3º **Métodos mecánicos**, o por el uso del planímetro.

4º **Computación.**

Algunos incluyen distintos métodos o bien variantes en función del procedimiento en sí, tipo de descripción usado y datos considerados de la misma.

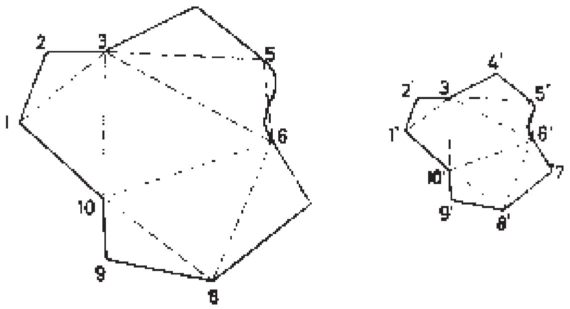
De todos los métodos de agrimensura son los numéricos los más exactos, ya que no influyen en ellos otros errores que los de medida directa terreno, mientras el uso del planímetro es más inexacto por sumarse, a los errores del plano, los del manejo de instrumento, no obstante hay que destacar la rapidez y comodidad de su empleo, de este último método.

6.2.1. <u>Métodos numéricos o analítico, o por medidas directas sobre el terreno</u>

<u>Métodos apropiados</u>. Para obtener sobre el terreno las medidas, que hayamos de utilizar en la determinación del área de una superficie, pueden estar indicados todos los métodos de la Topografía regular que conocemos. En parcelas pequeñas, pueden utilizarse estos métodos expeditos que no requieren más instrumentos que una colección de jalones, cintas, metroláser, pentaprismas, etc., estos métodos, por sí solos, bastan para levantar el plano en estos casos, a la escala que se desee.

Por el contrario, si se trata de grandes extensiones es forzoso recurrir a la Topografía regular, cuyos trabajos puede consistir en una triangulación con vértices próximos a la linde entre los que quede encuadrado un itinerario de rodeo, complementado, si es necesario, bien por radiaciones desde los puntos poligonométricos, para tomar todos los de inflexión de la linde, por MED (**M**edición **E**lectrónica de **D**istancias), o por alguno de los métodos de agrimensura que estudiamos.

<u>Método de medición.</u> Consiste en señalar alineaciones en el terreno por medio de jalones, de modo que descompongan la superficie en triángulos y en cada uno de ellos medir con la cinta o con cualquier otro procedimiento electrónico, la longitud de los lados. Al mismo tiempo se hará en el campo un croquis que nos indique la situación relativa de unos puntos respecto a otros.

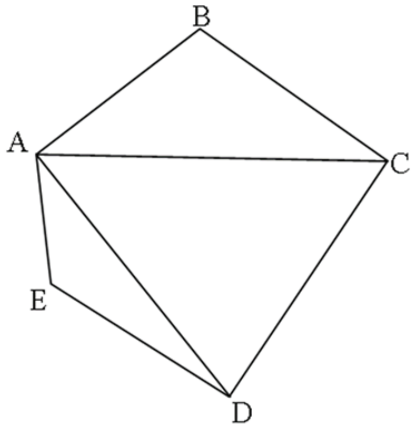


Si alguno de los lados, como el 5-6, fuese curvo o los puntos de inflexión estuviesen demediado próximos, conviene prescindir de ellos de momento *y* sustituir la línea por la recta 5-6 para evitar que se formen triángulos que tengan ángulos demasiados agudos por venir entonces mal determinados. El levantamiento de los últimos detalles deberá hacerse este caso, posteriormente, por el método de de las abscisas y ordenadas. Después, en el gabinete, si se desea obtener el plano, se dibujan triángulos semejantes a los del terreno igualmente dispuestos, tomando la escala como razón de semejanza.

Sin necesidad de construir un plano obtendremos al área de cada triángulo, por la fórmula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

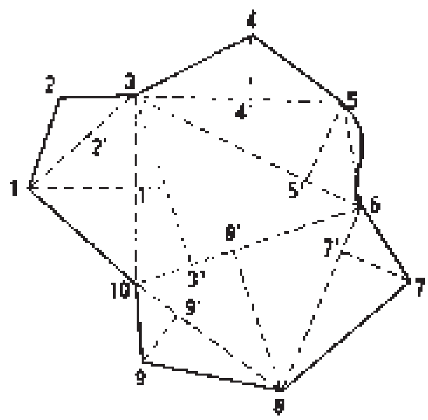
en la que *p* representa el semiperímetro, y *a, b.* y *c.* los lados.



La suma de las áreas de todos los triángulos será la de la parcela prescindiendo de las inflexiones del lado 5-6, que determinaremos independientemente por otro método.

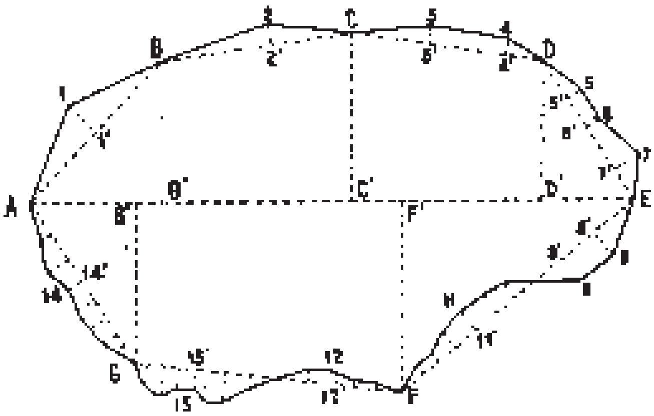
Método descomposición de triángulos. Herón

Suponiendo la misma parcela anteriormente utilizando la escuadra y similarmente, la descompondremos en triángulos y partiendo de un lado central, por ejemplo el 10-6, tomando como base, señalaremos en él los piés (3`y 8`) de las perpendiculares de los vértices de 3 y 8. A partir de 10, se mide sin levantar la cinta del suelo, - para tomar el mismo origen- las distancias 10-3`, 10-8` y 10-6, así como las perpendiculares 3-3`y 8-8`, con lo que queda determinados 10-6-3 y 10-6-8. Tomaremos como base después el lado 10-3 y se repite la marcha expuesta, apoyando unos triángulos, en otros escalonadamente, procurando reducir al mínimo las longitudes, el tiempo en idas y venidas y la acumulación de errores, dependiendo de la habilidad del operador. En gabinete se dibuja conociendo la base, la altura y el pié de ésta en cada triángulo. Sin hacer uso del plano obtendremos el área de cada triángulo.

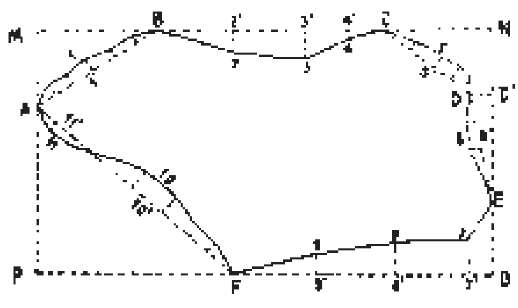


Método de abscisas y ordenadas. Si la parcela no es excesivamente grande, de modo que pueda trazarse una alineación que la atraviese, tal como la AE tomaremos ésta como base de todo el

levantamiento, una vez jalonada. A su vez inscribiremos en el perímetro una línea poligonal A, B,…… G, de modo que sus lados se amolden lo más posible al contorno, pero teniendo la mayor longitud la mayor longitud.
Desde los vértices A, B, ... ,G se bajarán las perpendiculares a la alineación base, dejando señalados en el terreno, por medio de la escuadra, los pies G', B', ...
A continuación, con la cinta, mediremos la alineación A E, tomando al mismo tiempo las distancias al origen de dichos pies sin levantar la cinta del suelo, haciendo la medición de una sola vez a partir de A; para mayor seguridad y precisión debe repetirse la medida en sentido contrario EA. También mediremos las perpendiculares BB', CC', GG', con lo que se poseen datos que, auxiliados por el croquis, permiten construir a escala en gabinete, el polígono A,B,... G.



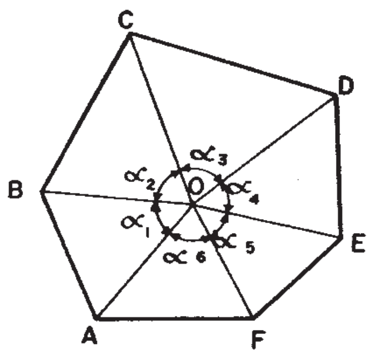
Cada uno de estos lados se tomará a su vez como base, bajando a ellos las perpendiculares desde los puntos de inflexión de la parcela construyéndose esta en igual forma. En el caso en que la parcela, o alguna parte de ella fuese curva, como la correspondiente a las alineaciones E F, F G, G A, se sustituyen por una línea poligonal, despreciando las flechas que queden entre ésta y a línea curva, siempre que cumplan con la condición de que su representación en el plano, a la escala que se utilice, sea inferior a 0,2 mm. límite de la percepción visual.
Las longitudes AB, DC, etc., nos servirán para comprobar el trabajo. El mismo sistema se utilizará para el levantamiento de detalles interiores como lindes de parcelas, camino, edificaciones, etc., refiriéndoles bien a la alineación principal o a otra trazada al efecto en sus inmediaciones.
Cuando en el interior de la finca haya algún detalle inaccesible para tomar mediciones, como una laguna, o un edificio, o bien cuando toda la finca, por su naturaleza, impida o dificulte el método, corno por ejemplo, si es un monte cuyo arbolado imposibilite el trazado de alineaciones, puede recurrirse al artificio de rodearla por alineaciones que formen en rectángulo circunscrito, procediendo ahora de fuera a dentro en igual forma que antes se hacía de dentro a fuera.



Para obtener el área no es necesario dibujar el plano; aquella se compone, por la del polígono inscrito y por la de los segmentos periféricos; el área del primero queda determinada por la, suma de los triángulos y trapecios de que esté compuesto, pero no ocurre lo mismo con las áreas periféricas en las que, para obtener el plano puede prescindirse de los segmentos que no tengan representación a la escala adoptada, lo que no siempre será aceptable al hallar el área; en este caso podrá obtenerse ésta con la aproximación que se desee, utilizando los métodos de Bezout, Simpson, etc. *Ver Apunte TOPO.I.Agrim.Tema1.2de3.v1 Inc. 1.1.6.3 área de superficies irregulares.*

Método de radiación; coordenadas polares.

El procedimiento analítico también se ajusta perfectamente a los relevamientos con coordenadas polares. En la figura se grafica un relevamiento realizado desde una estación O al polígono A……F, por lo que se cuenta con las distancias OA, OB, OC, OD, OE y OF. Quedando de este modo dividida la superficie en triángulos limitados por cada dos radios consecutivos.



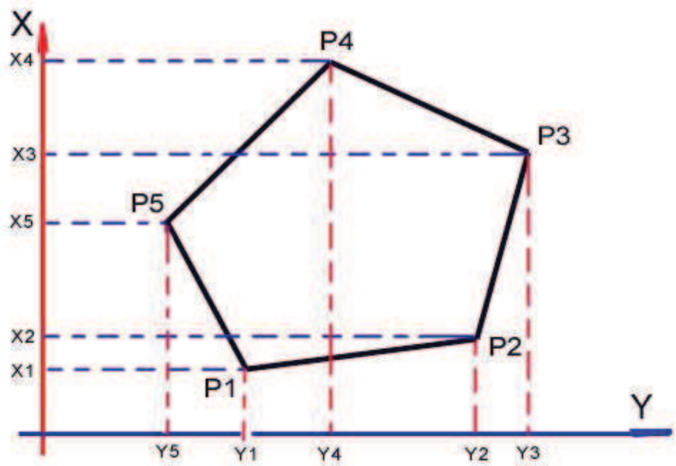
El área de un triángulo viene determinada por la mitad del producto de su lados por e! seno del ángulo que forman, *y* designando por α_i.

$$S= ½(OA \times OB \, sen\alpha_i.+ OB \times OC \, sen\, \alpha_i.+ ……)$$

Todos estos datos, distancias y ángulos, son directos, medidos "en campaña", y los cálculos se simplifican mediante el uso de programas, aun con simples calculadoras.

Metodo de las proyecciones[7]

Se tiene el polígono P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, del cual se han calculado las coordenadas de los vértices, y deseamos evaluar la superficie del mismo.



Para hallar la Superficie o Area "S", empleamos el **METODO DE LOS TRAPECIOS**, que consiste en proyectar TODOS los vértices del polígono sobre los ejes X e Y. De esta forma se definen cinco trapecios en cada eje, cuyas DOBLES superficies están dadas por las siguientes expresiones :

(por simplicidad se notan las que corresponden al eje X).

[Sup trapecio= (Base Mayor Base menor) /2 *h]

$$2\,S_1 = (Y_1 + Y_2) * (X_2 - X_1)$$
$$2\,S_2 = (Y_2 + Y_3) * (X_3 - X_2)$$
$$2\,S_3 = (Y_3 + Y_4) * (X_4 - X_3)$$
$$2\,S_4 = (Y_4 + Y_5) * (X_5 - X_4)$$
$$2\,S_5 = (Y_5 + Y_1) * (X_1 - X_5)$$

ecuaciones (1)

Observar que las diferencias **(X_5 - X_4)** y **(X_1 - X_5)** son de signo negativo, por tal razón resultan negativos los valores de las superficies S_4 y S_5.

[7]Ver Apunte TOPO.I.Agrim.Tema1.2de3.v1.Inc 1.1.6.2 ÁREA DE UN POLIGONO POR SUS COORDENADAS

Sumando miembro a miembro las expresiones desarrolladas se obtiene el DOBLE de la superficie total del polígono.
Idéntico procedimiento se efectúa proyectando TODOS los vértices sobre el eje Y.
Para el caso general de tener un polígono de n vértices será :

$$2\,S_{(X)} = \Sigma\ (Y_n + Y_{n+1}) * (X_{n+1} - X_n)$$
$$2\,S_{(y)} = \Sigma\ (X_n + X_{n+1}) * (Y_{n+1} - Y_n)$$

Estas fórmulas se conocen como Fórmulas Generalizadas de los Trapecios.
Como control de cálculo se debe cumplir rigurosamente esta condición :

$$2\,S_{(X)} = 2\,S_{(y)}$$

Fórmulas de GAUSS :
Se deducen a partir de las ecuaciones (1) desarrollando, simplificando, sacando factores comunes y ordenando.
Las expresiones generalizadas para n vértices son :

$$2\,S_{(X)} = \Sigma\, Y_n\,(X_{n+1} - X_{n-1})$$
$$2\,S_{(y)} = \Sigma\, X_n\,(Y_{n+1} - Y_{n-1})$$

Finalmente, como control de cálculo debe cumplirse que :

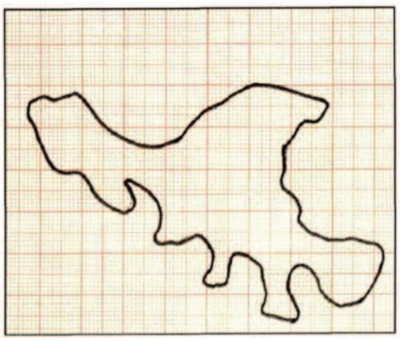
$$2\,S_{(X)} = 2\,S_{(y)}$$

6.2.2. Métodos gráficos y métodos semi-gráficos, o por medidas indirectas sobre el plano.

Para determinar la superficie se vale básicamente de una representaci6n grafica, fundamentalmente a escala, que carece de medidas lineales y angulares del espacio motivo de la determinación. Ejemplos clásicos del tipo de descripción usado para el calculo son:

- Cartas topográficas en general, de minería, náuticas, etc.
- Fotogramas de vuelos aerofotográficos.
- Planos catastrales, urbanísticos.
- Planos de áreas especiales.
- Planos de obras.

La precisión en general es escasa y está en relación por un lado con la escala y calidad de la descripción, y por otro con la "exactitud" de los datos que se tomen de la misma.
El método es utilizado preferentemente en el cálculo de áreas cuyos límites están poco definidos y/o presentan irregularidades. Es prescindir de las medidas directas sobre el terreno, deduciéndolas de medidas gráficas efectuadas sobre el mismo plano.



Según esto, cualquier; de los métodos de agrimensura anteriormente explicados será aplicable, bien descomponiendo un polígono en triángulos, midiendo los tres lados de cada, o preferentemente la base y altura por el de descomposición en triángulos.

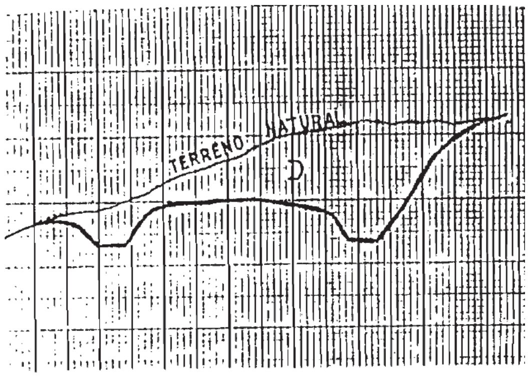
Más fácil será, en general, emplear el método de abscisas y ordenadas por descomposición de triángulos y trapecios, y si el contorno es curvilíneo, aplicando cualquiera de las fórmulas de Bezout, de Símpson o etc.

Cualquiera que sea el método elegido, habrá que multiplicar cada una de, las medidas efectuadas por el denominador de la escala del plano para deducir las de sus homólogas del terreno

Gráfico en una cuadrícula. Variante elemental del método consiste en recurrir a una cuadrícula auxiliar que se superpone con el espacio considerado. Esa cuadrícula podrá dibujarse sobre el espacio o sino, por separado, en una transparencia, por ejemplo papel milimetrado, que se ubica sobre el mismo.

Primero debe calcularse el "equivalente superficial" de cada unidad/es de la cuadrícula en función de la escala de la representación.

En la Figura se observa un perfil transversal del terreno escala 1:400 al que debe calcularse la superficie de desmonte D. Se coloca sobre la misma una cuadricula como vemos en la figura, en la cual las equivalencias son:



$1\ cm^2 = 16\ m^2$ y $1\ mm^2 = 0{,}16\ m^2$

Luego, contando las unidades de la cuadricula incluidas en D las multiplicamos por el equivalente superficial de la misma obteniendo el valor buscado.

$$S = 512 \times 0{,}16 = 82\ m^2$$

Esta manera de determinación es primaria pero práctica e imprecisa lo que se usa en casos puntuales.

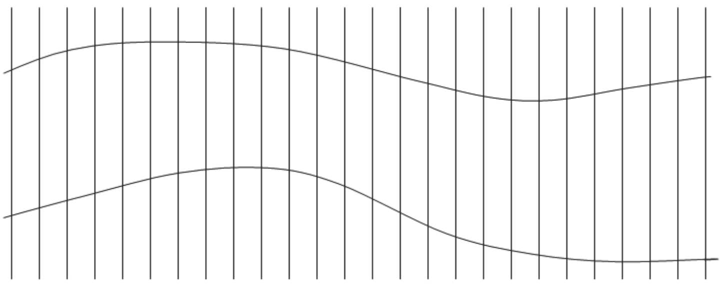
Procedimiento semi-gráfico.

Igual que en el procedimiento gráfico se necesita una descripción (representación) gráfica a escala en la cual en este método, el espacio evaluado cuenta con alguna/s medidas, en especial lineales, que se utilizan en el cálculo. También, como en el "gráfico", nos podemos valer de una cuadrícula que se superpone con dicho espacio a la que se le calcula la superficie de su/s equivalente/s superficial/es, aunque como se dijo, esto es poco práctico e impreciso.

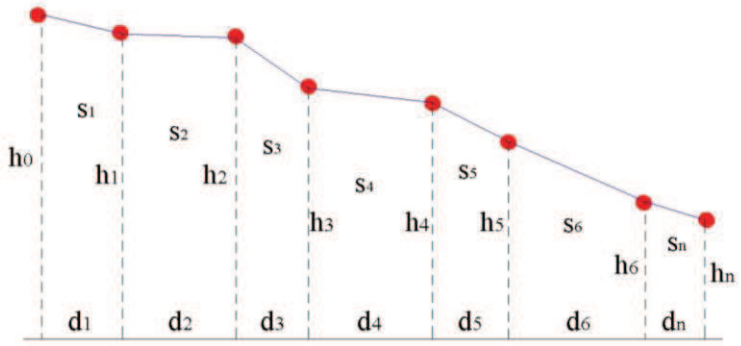
El planteo aplicado normalmente en este método para el respectivo cálculo, también consiste en dividir el área a calcular en polígonos simples. La única diferencia con el procedimiento grafico es que alguna/s medida/s del polígono constan en la representación o bien se la obtiene de una operación por' separado.

Método de las fajas paralelas.

El ancho de cada faja, es constante



Método de cálculo de área Gráfico Bezout



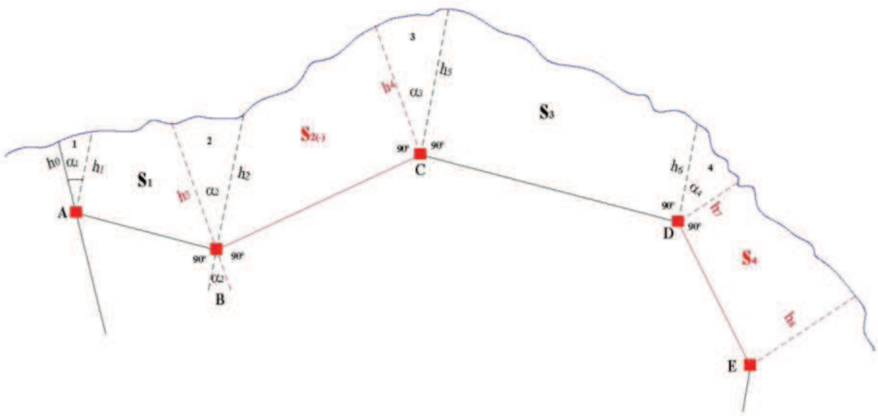
$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + \ldots\ldots + s_n$$

$$S = \frac{h_0 + h_1}{2} d_1 + \frac{h_1 + h_2}{2} d_2 + \frac{h_2 + h_3}{2} d_3 + \frac{h_3 + h_4}{2} d_4 + \frac{h_4 + h_5}{2} d_5 + \frac{h_5 + h_6}{2} d_6 + \ldots\ldots + \frac{h_{n-1} + h_n}{2} d_n$$

Si : d1 = d2 = d3 = …………………… dn

$$S = d.\left(\frac{h_0}{2} + \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} + \frac{h_3}{2} + \frac{h_4}{2} + \frac{h_4}{2} + \frac{h_5}{2} + \frac{h_5}{2} + \frac{h_6}{2} + \frac{h_6}{2} + \frac{h_n}{2}\right)$$

$$S = d.\left(\frac{h_0 + h_n}{2} + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6\right)$$



S = S1 + S2 + S3 + S4 + ▲1 - ▲2 + ▲3 + ▲4

$\alpha_1 = 180° - \hat{A} - 90°$ $\qquad$ $\alpha_2 = \hat{B} - 90° - 90°$

$\alpha_3 = 360° - (\hat{B} + 90° + 90°)$ $\qquad$ $\alpha_4 = 360° - (\hat{C} + 90° + 90°)$

Superficie **▲1 = ½ h0 . h1 . sen α1**

Superficie **▲2 = - ½ h2 . h3 . sen α2**

Superficie **▲3 = ½ h4 . h5 . sen α3**

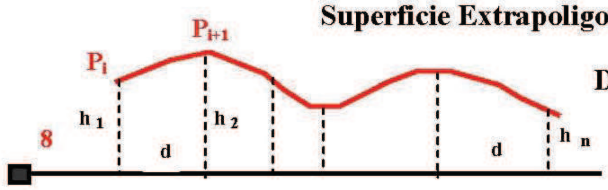
Superficie **▲4 = ½ h6 . h7 . sen α4**

S = ½ (h1 + h2).AB + ½ h0 . h1 . sen α1 + ½ (h3 + h4).BC - ½ h2 . h3 . sen α2 +

+ ½ h4 . h5 . sen α3 + ½ (h5 + h6).CD + ½ h6 . h7 . sen α4 + ½ (h7 + h8).DE

Ejemplo superficie extrapoligonal

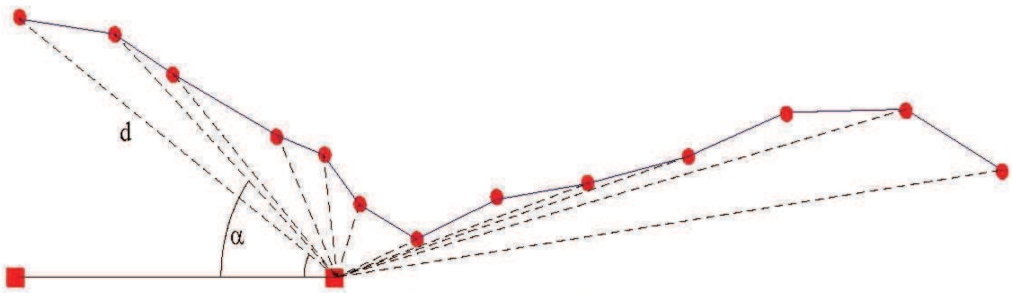
Superficie Extrapoligonal



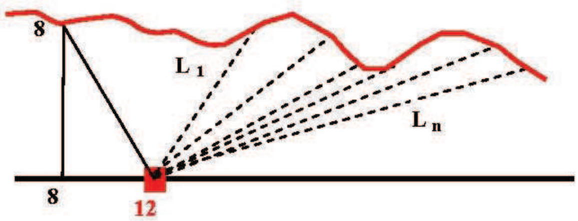
Distancia Pi_Pi+1 : **Raiz**$^2((h_1 - h_2)^2 + d_i^2)$

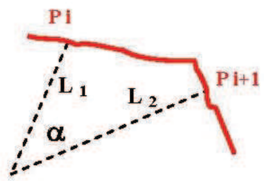
Área Trapecio: $1/2\ (h_1 + h_2) \cdot d_1$

Punto	Altura	Progresiva	Distancia	1780,826985 Superficies	72,016 Distancias	Observaciones
	m	m	di	m2	Pi_Pi+1	
1'	39,000	68,004	*************	*******************	*********	
2'	41,000	62,621	5,383	215,320000	5,743	
3'	37,750	57,395	5,226	205,773750	6,154	
4'	40,500	52,707	4,688	183,418000	5,435	
5'	30,140	41,976	10,731	379,018920	14,916	
6'	22,850	23,153	18,823	498,715385	20,185	
7'	16,120	11,690	11,463	223,356555	13,293	
8'	12,630	6,457	5,233	75,224375	6,290	



Superficie Extrapoligonal
E





Área Triángulo: $1/2 \cdot L_1 \cdot L_2$.

Distancia Pi_Pi+1 : **Raiz**$^2((L_1^2 + L_2^2) - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cos a)$

Punto Esta-	12	Dirección Básica:	12-8':	0°00'00''

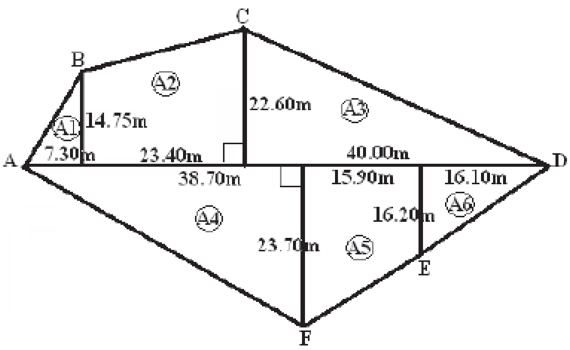
Punto	Lado	Lectura			α			Superficies	Distancias	Observaciones
	m	°	'	''	°	'	''	m2	Pi - P i+1	
								2482,518382	162,305	
8'	6,457	0	0	0						
8	14,182	62	49	45	62	49	45	40,733989	12,617	
9	16,259	85	40	30	22	50	45	44,762674	6,363	
10	16,056	111	26	47	25	46	17	56,750830	7,209	
11	16,178	128	7	29	16	40	42	37,274473	4,677	
12	27,538	140	37	29	12	30	0	48,212981	12,254	
13	37,350	146	48	7	6	10	38	55,337805	10,403	
14	46,079	156	52	24	10	4	17	150,484439	11,368	
15	50,078	159	46	45	2	54	21	58,490038	4,683	
16	54,753	160	25	51	0	39	6	15,592595	4,713	
17	79,726	169	22	30	8	56	39	339,335926	27,015	
18	97,797	170	20	0	0	57	30	65,203247	18,131	
19	102,370	173	42	22	3	22	22	294,498092	7,456	
20	107,698	175	20	26	1	38	4	157,231289	6,112	
21	112,716	177	5	33	1	45	7	185,563789	6,044	
22	119,727	179	7	8	2	1	35	238,592778	8,126	
23	121,967	180	31	5	1	23	57	178,282247	3,705	
24	120,978	183	35	34	3	4	29	395,725040	6,592	
25	116,587	184	34	17	0	58	43	120,446151	4,837	

Ejemplo: calcular el área del siguiente polígono.

$$AT = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6$$

El **A1, A3, A4** y **A6** se determina aplicando la fórmula del triángulo rectángulo.

El **A2** y **A5** se determina aplicando la fórmula de los trapecios.



$$A1 = \frac{b*h}{2};\ A1 = \frac{7.30*14.70}{2} = 53.66m^2$$

$$A2 = \frac{B+b}{2}*h;\ A2 = \frac{22.60+14.70}{2}*23.40 = 436.41m^2$$

$$A3 = \frac{b*h}{2};\ A3 = \frac{40.00*22.60}{2} = 452.00m^2$$

$$A4 = \frac{b*h}{2},\ A4 = \frac{38.70*23.70}{2} = 458.60m^2$$

$$A5 = \frac{B+b}{2}*h;\ A5 = \frac{23.70+16.20}{2}*15.90 = 317.21m^2$$

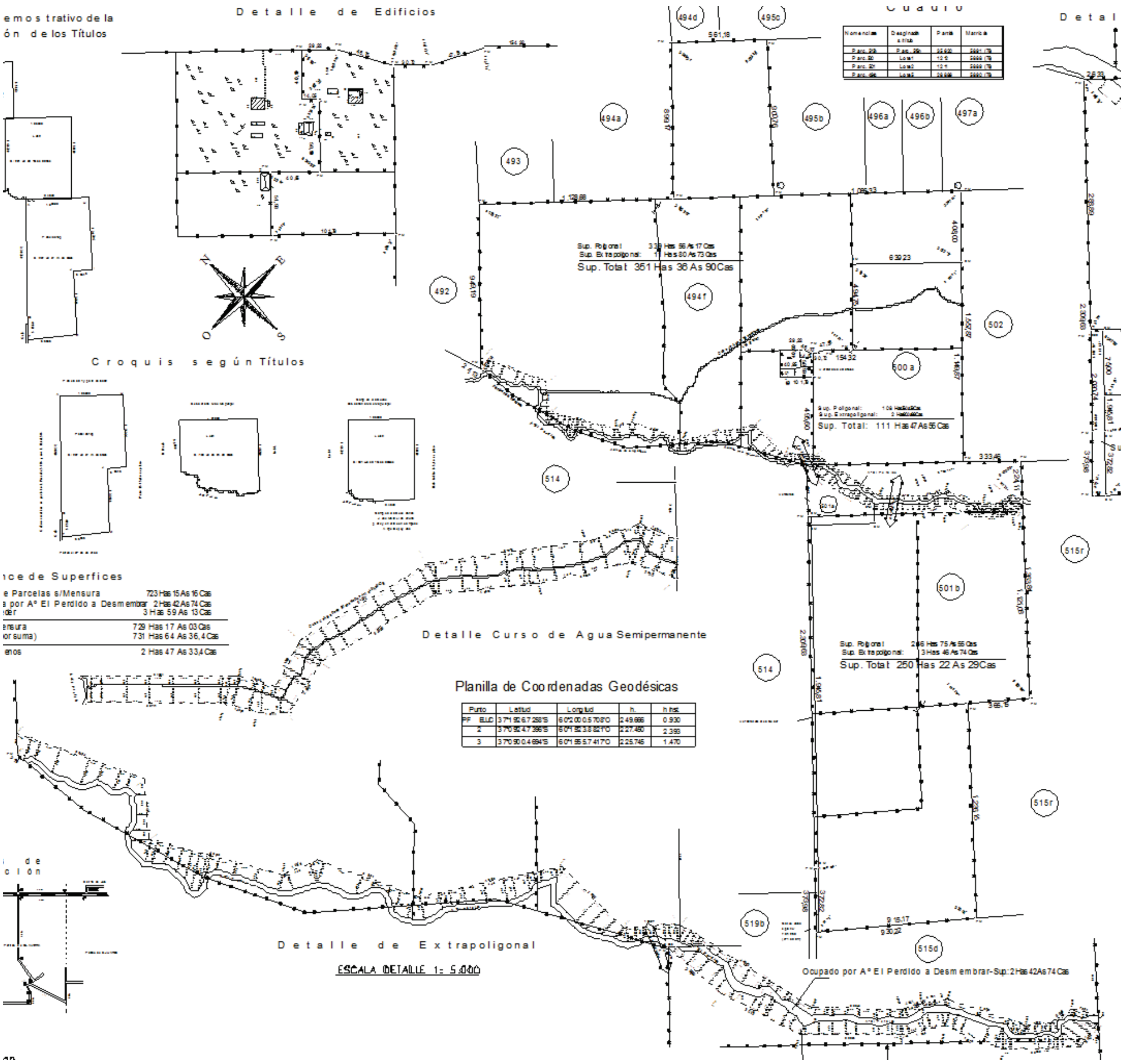
$$A6 = \frac{b*h}{2};\ A6 = \frac{16.20*16.10}{2} = 130.41m^2$$

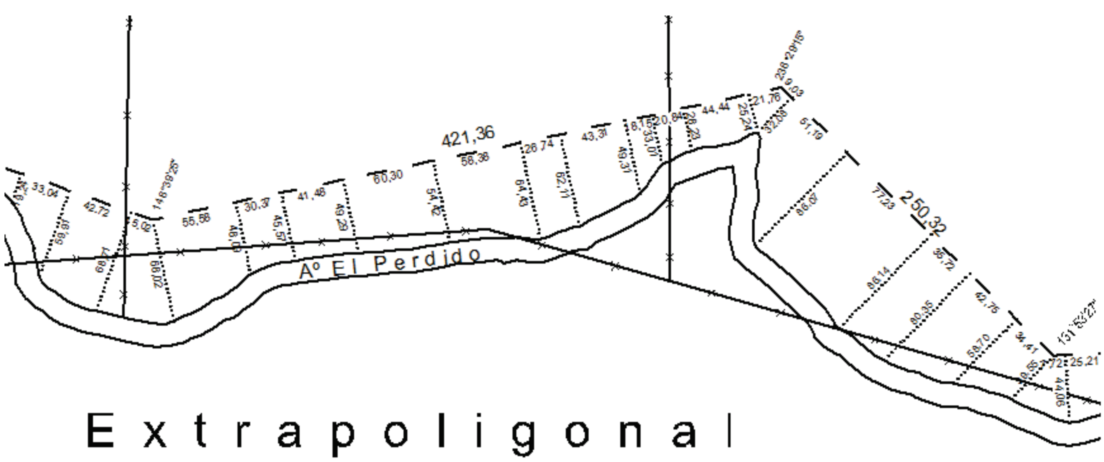
Área Total = A1 + A2 + A3 + A4+ A5 + A6

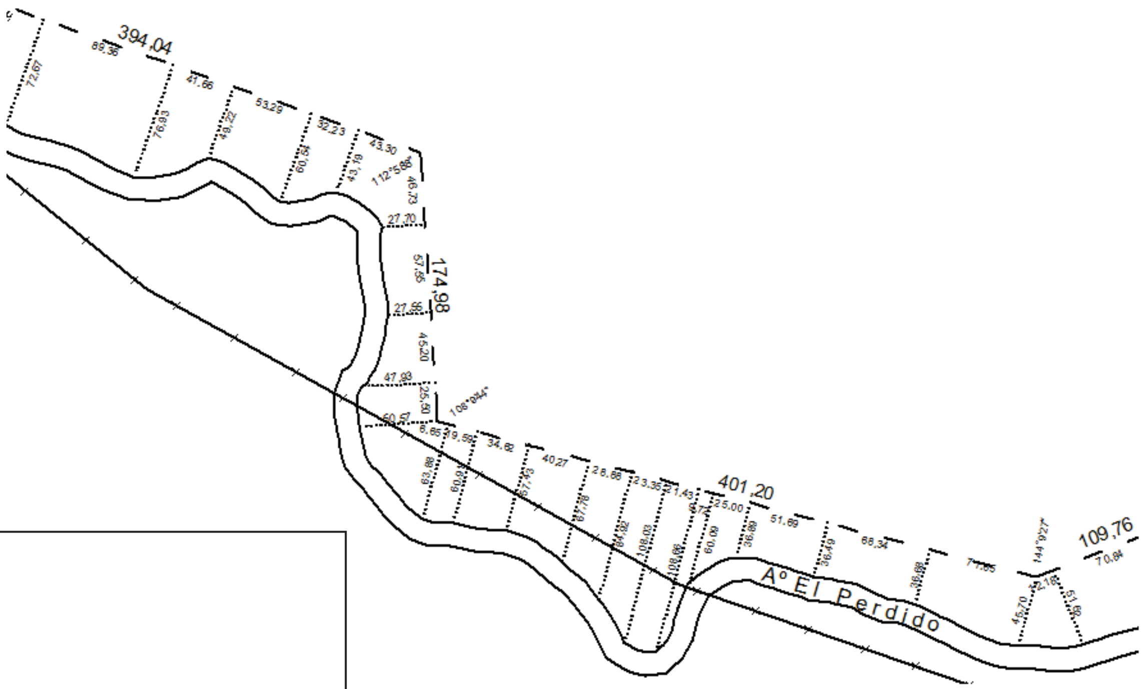
Área Total = 53.66m^2 + 436.41m^2 + 452.00m^2 + 458.60m^2 + 317.21m^2 + 130.41m^2

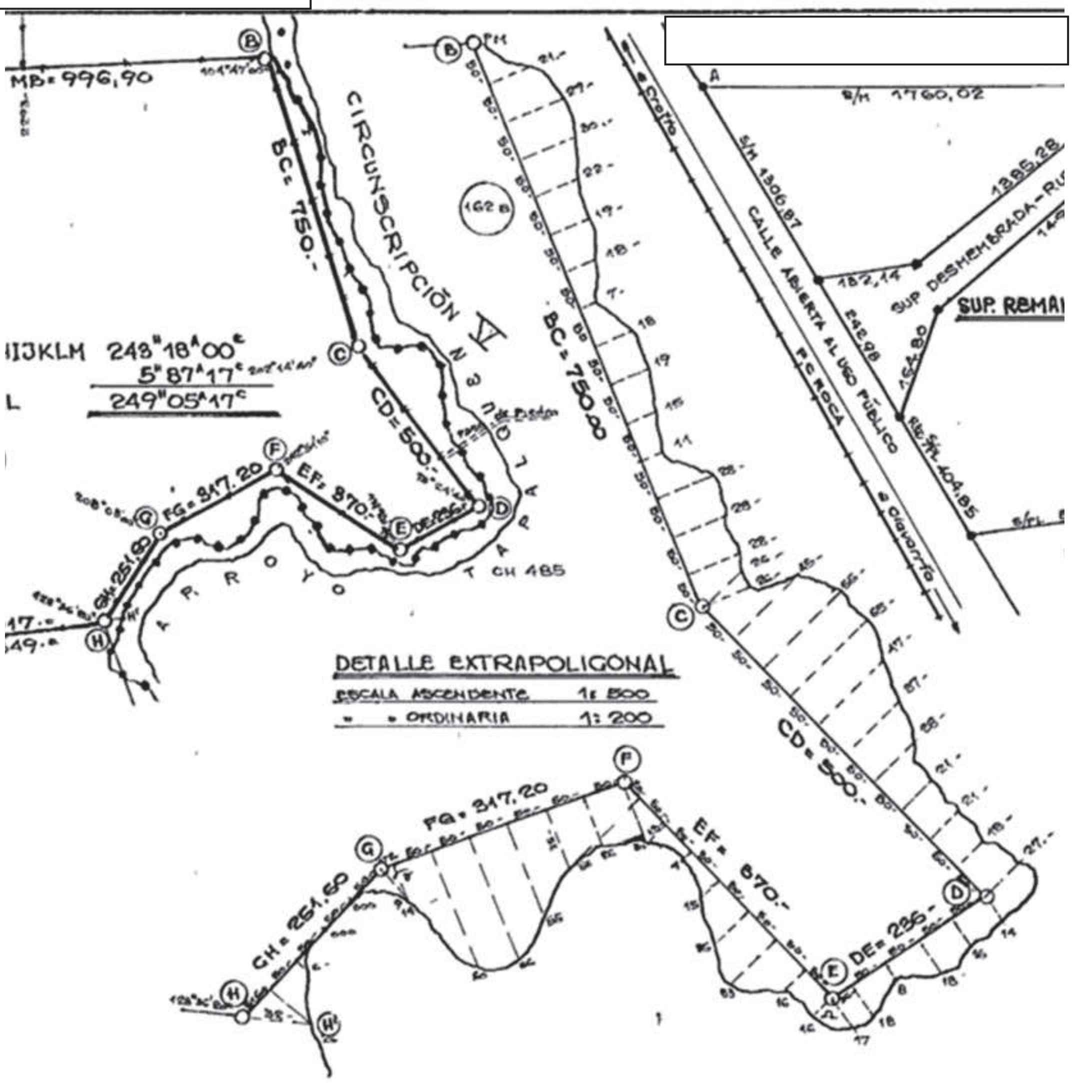
Área Total = 1848.29m^2

Ejemplo de poligonales de planos de mensuras






394,04
174,98
401,20
109,76
Aº El Perdido


MB= 996,90
CIRCUNSCRIPCIÓN VI
BC= 750.-
CD= 500.-
FG= 317.20
EF= 870.-
GH= 251.60
ARROYO
DETALLE EXTRAPOLIGONAL
ESCALA ASCENDENTE 1: 500
" ORDINARIA 1: 200
BC= 750.00
CALLE ABIERTA AL USO PUBLICO
F.C. ROCA
SUP. REMAI

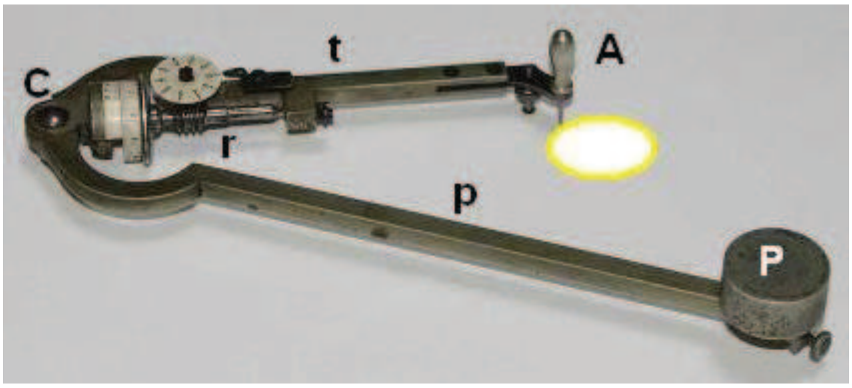
6.2.3. Métodos mecánicos, o por el uso del planímetro.

Planímetro. Es el planímetro un ingeniosísimo instrumento que permite, deslizando un punzón por el contorno de una figura, obtener directamente el área por diferencia de lecturas en un tambor. Se trata de un procedimiento práctico utilizado con frecuencia en superficies cuyos límites son irregulares como islas, lagunas, perfiles de terreno, ríos, cuencas, o bien trabajar con áreas generales de planos catastrales o cartas.

Al parecer, la primera idea del planímetro se debe a Hermann, matemático de Baviera que le concibió en 1813, si bien el invento cayó en el olvido. El primer planímetro conocido se debe al ingeniero suizo Oppikofer, que lo ideo en 1827 y fue construido, unos años más tarde, por el mecánico Ernst en París. Tampoco este planímetro se extendió mucho, siendo el primero, realmente práctico, el del ingeniero Wetli, de Zurich, fundado también en la teoría de Hermann.

Todos estos planímetros utilizaban coordenadas rectangulares, siendo **Amsler**, en 1854, el inventor del planímetro polar de su nombre, que aún sigue usándose y cuya idea es la utilizada por todos los planímetros que hoy se fabrican.

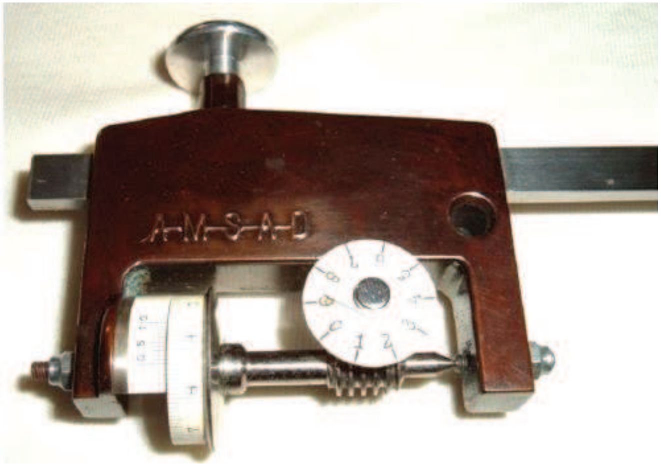
Planímetro polar tipo Amsler. - El planímetro Amsler, representado en la figura siguiente se compone de dos varillas prismáticas ***p*** y ***t*** articuladas en un punto C. El extremo de la varilla ***p*** se fija en el papel en el punto **P**, que constituye el polo del instrumento, con lo cual se obliga al punto **C** a describir una circunferencia de radio ***p*** denominada *circunferencia directriz.* La varilla ***p*** recibe el nombre de *brazo polar,* y a la varilla t se la denomina *brazo trazador;* termina ésta en su extremo en un punzón **A** con el que se recorre el contorno cuya área pretendemos hallar y por el otro se desliza, a rozamiento suave, en el interior de una caja, a la que se articula el brazo polar, lo que permite aumentar o disminuir la longitud CA que separa el punto de articulación, del punzón trazador, longitud que hemos designado por t, que permanece fija mientras no se actúe sobre los tornillos de corrección. Esta longitud, debe regularse según la escala de dibujo, por lo que el brazo trazador suele llevar grabada una escala en medios milímetros (0,5 mm).

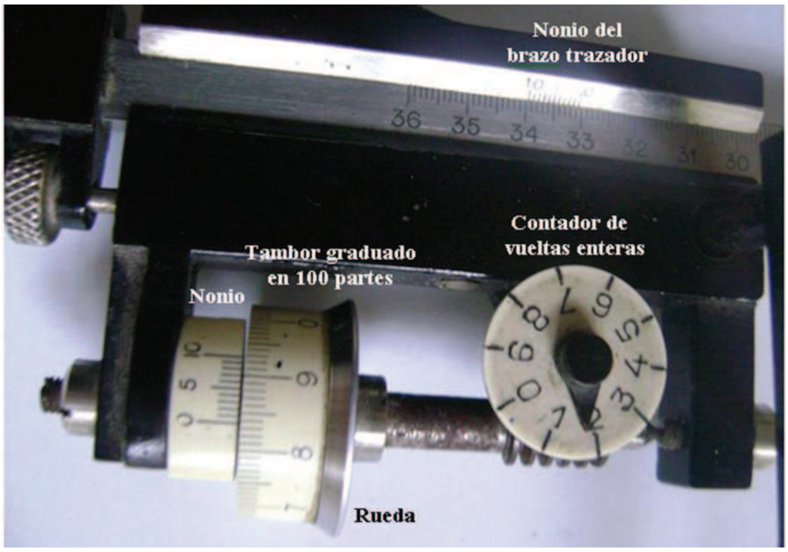


Va unida a la caja por su parte interior, una roldana **r** giratoria alrededor de un eje, contenido exactamente en el plano vertical que pasa por los puntos C y A. Esta roldana apoya sobre el papel y forma un pequeño resalte con un tambor de menor diámetro a ella unido, divido en 100 partes, un pequeño nonio que permite leer décimas de división, o sea milésimas de una vuelta completa de la roldana.

Un tonillo sin fin transmite el movimiento de la roldana a un disco contador del número completo de vueltas.

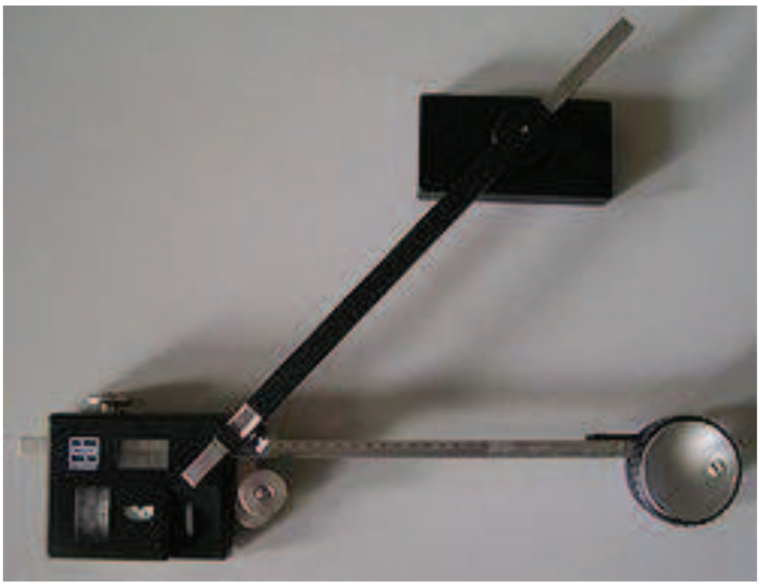
Colocado el instrumento como se indica en la figura, apoya en el papel por 3 puntos: el polo P, el extremo del punzón A y el punto de tangencia de la roldana. Para manejarle haremos que el punzón coincida con el punto A del contorno de la figura cuya área tratamos de hallar, se leerá la numeración señalada en el disco contador y por el nonio de la roldana, recorriendo a continuación el contorno con el punzón, sin variar el punto P, dejando que la roldana ruede libremente sobre el papel hasta volver al punto de partida, obteniendo un nueva lectura, la diferencia entre ésta y la primera nos da el número de vueltas y milésimas de vuelta que ha dado la roldana y este número, teniendo en cuenta ciertas constantes, nos da la expresión del área que buscamos.

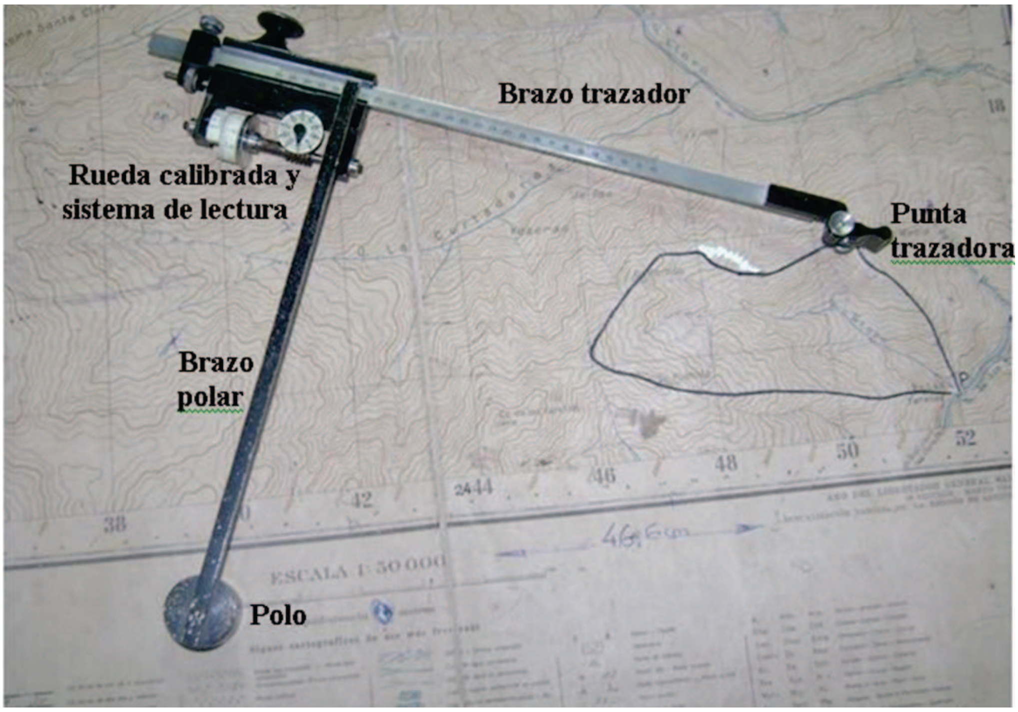




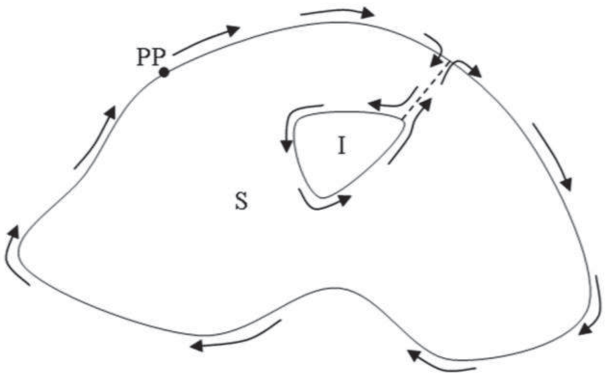
Dicho registro puede ser mecánico o, como ocurre en los instrumentos modernos en forma digital (ver figura).

El área a determinar debe estar graficada a escala, dependiendo de ésta y la calidad del dibujo la precisión del valor resultante, además de las precauciones operativas.





Recorrido desde PP
Descuenta sup. I
Sup.: S



FORMA DE UTILIZACIÓN DEL PLANIMETRO POLAR

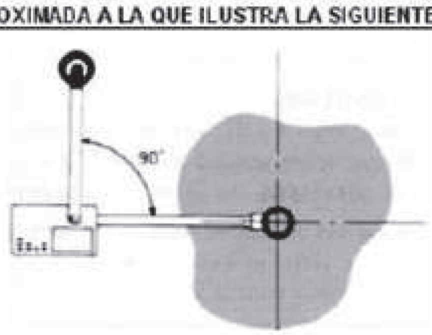
1.-Preparación del instrumento para la medición (es válido tanto para planímetros polares como digitales):

DETERMINACIÓN DE SUPERFICIES

PLANÍMETRO DIGITAL

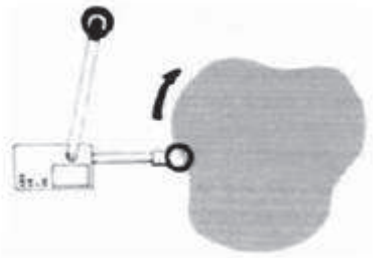
PREPARACIÓN DEL INSTRUMENTO PARA LA MEDICIÓN

PARA EVITAR QUE LOS BRAZOS DEL PLANIMETRO DIGITAL FORMEN ÁNGULOS COMPROMETIDOS (PRÓXIMOS A 0° O A 180°) ANTES DE CIRCUNVALAR LA FIGURA DEBE COLOCARSE AL INSTRUMENTO EN POSICIÓN APROXIMADA A LA QUE ILUSTRA LA SIGUIENTE FIGURA:



RECORRIDO DEL PERÍMETRO DE LA FIGURA

EL RECORRIDO – SIEMPRE EN EL SENTIDO DEXTRÓGIRO - SE INICIARÁ Y CONCLUIRÁ EN UN MISMO PUNTO DEL PERÍMETRO DE LA FIGURA, CUIDANDO DE NO SEPARARSE DE LA LINEA LIMITE QUE LA DEFINE. PARA EL CASO DE UN APARTAMIENTO INVOLUNTARIO DEBERÁ VOLVERSE AL PERÍMETRO POR EL MISMO CAMINO, DE MODO DE CERRAR UNA SUPERFICIE DE VALOR NULO.



2.-Se debe verificar rápidamente que el brazo podrá recorrer todo el perímetro, en caso de que esto no sea posible se deberá dividir el área total en pequeñas áreas donde sea posible medir sus áreas de forma separada, y el área total será igual a la suma de todas esta áreas.
3.-Como ya se indicó se debe marcar un punto del perímetro y se debe ubicar el trazador en ese punto.
4.-Realizar la primera lectura (L1).
5.-Recorrer el perímetro de la figura en sentido horario hasta llegar al punto de partida.
6.-Realizar la segunda lectura (L2). El primer área leída del planímetro será: A_{P1}=L2-L1.
7.-Repetir el paso 5.
8.-Realizar la tercera lectura (L3). La segunda área leída del planímetro será: A_{P2}=L3-L2
9.-Obtener al menos 3 áreas del planimetro.
Ejemplo de lectura.:
-Primera lectura sobre el disco:
-Segunda lectura sobre el tambor (escala grande):
-Tercera lectura sobre el tambor (escala pequeña):
-Cuarta lectura sobre la escala de los nonius:

Teoría planímetro polar de Amsler.

Copia facsímil Tratado General de Topografia. Tomo I . Planimetría. W. Jordan.

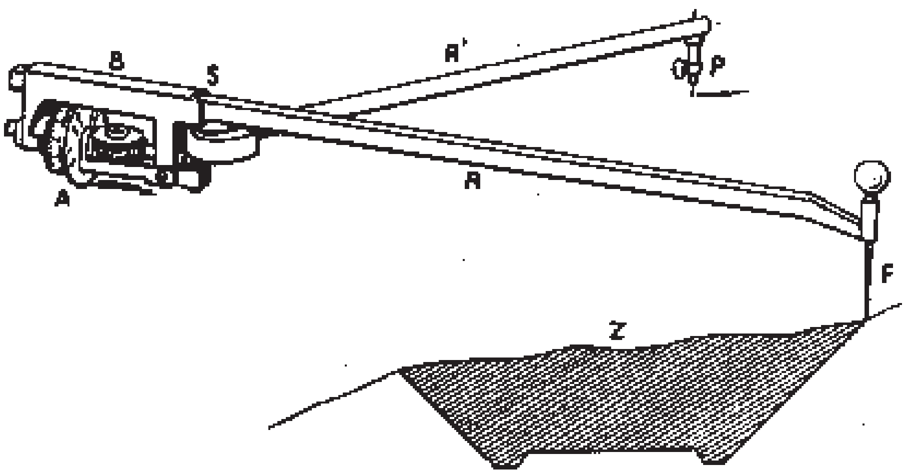


Fig. 168. — Planímetro polar de Amsler

En la exposición de la teoría de este planímetro nos referiremos a las acotaciones de las figuras 168 y 169, donde las letras R, R', r, r' indican las longitudes marcadas en el grabado; P es el *polo* del instrumento, que se fija sobre el papel, girando a su alrededor el brazo $PS = R'$, que se llama brazo polar. El otro extremo S de este brazo describe, por consiguiente, un círculo de radio R' alrededor del polo P.

(pag.166)

Un segundo brazo $SF = R$, llamado brazo trazador, va articulado con el brazo polar en S, de modo que el punzón F puede, a su vez, describir un círculo de radio R alrededor del punto S.

Debajo del brazo libre FS va una rueda loca o tambor A, llamada rueda integrante o contadora, cuyas vueltas se leen en un disco graduado; por medio de un nonio puede apreciarse hasta la milésima de vuelta. Del número de vueltas del tambor o ruedecilla A se deduce la superficie de la figura cuyo contorno recorre el punzón F.

La rueda A se encuentra a una distancia r del punto de articulación S; en la figura 169 esta distancia se cuenta en la prolongación del brazo trazador, hacia la izquierda. Hay planímetros en que la rueda A está debajo del brazo mismo, es decir, entre S y F; en este

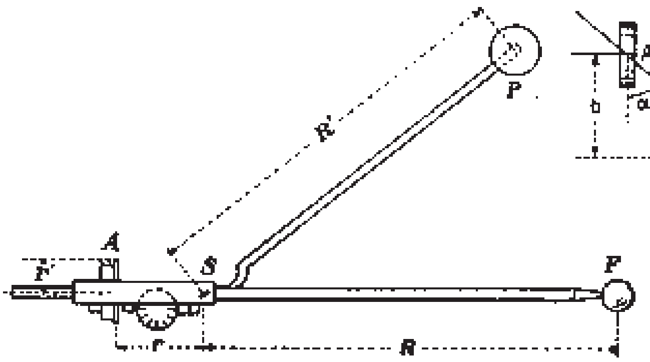


Fig. 169

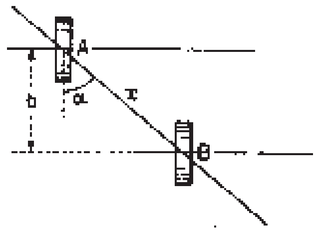


Fig. 170
Camino oblicuo x

caso, para explicar la teoría del instrumento sirven las mismas fórmulas siguientes, con sólo cambiar el signo de r, es decir, haciendo ésta negativa.

Paso del punzón a lo largo de una línea oblicua x *y sobre una circunferencia* (figura 170). Si la rueda A recorre un cierto camino b en su propia dirección, su borde describe un arco b.

Si la rueda se traslada en sentido de su eje, es decir, normalmente a su propia dirección, cualquiera que sea el camino recorrido, su borde no desarrolla o describe arco alguno.

Finalmente, si el centro de la rueda se mueve a lo largo de una línea recta x que forme un ángulo α con su propia dirección (o un ángulo $90° - \alpha$ con el eje de la rueda), su borde desarrolla un arco dado por la siguiente ecuación:

$$b = x \cos \alpha. \tag{1}$$

Esta ecuación sirve también para el caso en que la rueda A se mueva sobre una circunferencia alrededor del polo P, siendo entonces x un arco de esta circunferencia y α el ángulo comprendido entre el eje de la rueda y el radio del círculo. Este es el caso considerado en la figura 171, del cual vamos ahora a ocuparnos.

Cuando el punzón F (fig. 171) describe un arco de círculo FF' de radio f y con un ángulo en el centro $FPF' = \varphi$, el centro de la rueda A describe también un arco de círculo alrededor de P con el mismo ángulo en el centro φ.

Si $AP = f'$ es el radio de este arco de círculo descrito por A, la longitud del mismo (no representado en la figura) será:

$$x = f'\varphi,$$

donde φ está expresado en valor analítico o trigonométrico.

(pag.167)

Este arco x corresponde al camino x recorrido por la rueda A en la figura 170, teniéndose por lo tanto la siguiente igualdad, deducida de (1):

$$b = x \cos \alpha = f' \varphi \cos \alpha. \tag{2}$$

El valor de $f' \cos \alpha$ se halla en función de las dimensiones del instrumento y del radio f del camino recorrido por el punzón F: para ello se proyectan f' y R' sobre el brazo

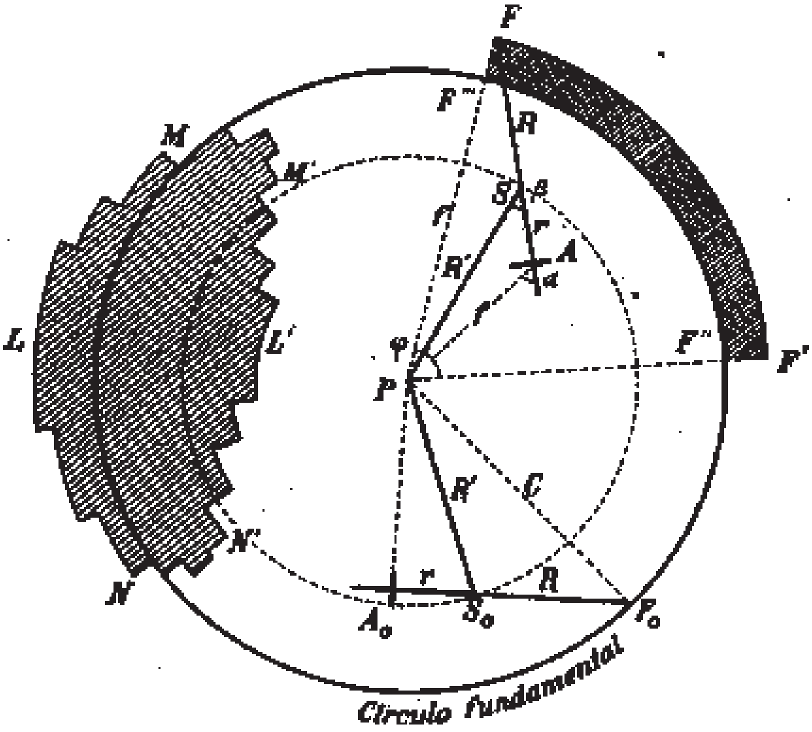


Fig. 171

trazador FA, suponiendo que R' forme un ángulo β con R (fig. 171), con lo cual resulta:

$$f' \cos \alpha = R' \cos \beta - r.$$

Además, en el triángulo PFS se tiene:

$$f^2 = R^2 + R'^2 + 2\,R\,R' \cos \beta$$

y despejando aquí el valor de $R' \cos \beta$ para sustituirlo en el de $f' \cos \alpha$, se obtiene, partiendo de la ecuación (2):

$$b = \varphi\,(R' \cos \beta - r) = \varphi \left(\frac{f^2 - R^2 - R'^2}{2\,R} - r \right)$$

de donde:

$$R\,b = \frac{\varphi}{2}\,(f^2 - R^2 - R'^2 - 2\,R\,r). \tag{3}$$

Para simplificar, se reúnen todos los términos constantes del modo siguiente:

$$R^2 + R'^2 + 2\,R\,r = C^2 \tag{4}$$

pudiéndose poner la fórmula (3) de este otro modo:

$$R\,b = \frac{1}{2}\,\varphi\,(f^2 - C^2). \tag{5}$$

(pag.168)

La constante C (4) tiene una interpretación geométrica bien sencilla; a saber, es el valor del radio de giro f del punzón para el cual la dirección del radio f' es perpendicular al brazo trazador FA, es decir, que en el caso de la figura 171, $PF_0 = C$, siendo PA_0 perpendicular a A_0F_0.

Esta conclusión puede deducirse también directamente de la fórmula (4), puesto que r es la proyección de R (parte inferior de la figura 171), así como también de la fórmula (5) con referencia a la figura 170, ya que como se ve en dicha parte inferior de la figura 171, el ángulo α es de 90°, y sustituyendo este valor en la fórmula (1) referente a la figura 170, resulta $b = 0$, lo cual sucede en la fórmula (5) para $f = C$.

El círculo cuyo radio es C se llama *círculo fundamental*. Cuando el punzón se mueve sobre este círculo, la rueda A no gira alrededor de su eje.

También los valores $\frac{1}{2} f^2 \varphi$ y $\frac{1}{2} C^2\varphi$ (5) tienen su interpretación geométrica: son las áreas de los sectores de los círculos de radios f y C respectivamente y ángulo en el centro φ, y la diferencia entre ambos, o sea, su igual, Rb, representa la superficie rayada en forma de corona circular $FF'F''F'''$ (fig. 171).

De aquí resulta la ley siguiente: cuando el punzón F recorre un arco de círculo FF' (pero no una curva cerrada) alrededor del polo P, la rueda o tambor A describe un arco b, que multiplicado por R, da el área de una corona circular limitada por el arco recorrido FF', por el círculo fundamental $F''F'''$, y por los radios $F'F''$ y $F'''F$ correspondientes a los extremos del arco primero. De este modo se comprende que la operación de medir superficies con planímetro no es realmente un cálculo, sino un sistema mecánico y casi intuitivo de hallar aquéllas.

Claro está que hay necesidad de establecer un sentido de rotación para la ruedecilla A y un signo para la superficie. Si el ángulo φ se describe de izquierda a derecha, yendo el punzón por fuera del círculo fundamental, se toma como positiva la superficie anular $FF'F''F'''$, y en este caso las lecturas de la ruedecilla son crecientes, es decir, que la final debe ser mayor que la inicial. Se supone también aquí que la rueda contadora A siempre se ve, desde el polo P, a la derecha, es decir, que nunca pasa al otro lado del brazo polar.

Movimiento del punzón sobre una línea cualquiera. Consideremos ahora el caso de recorrer con el punzón F una línea quebrada NLM o $M'L'N'$ (fig. 171). Se ve, en primer lugar, que al recorrer los trozos radiales, dirigidos hacia el centro, se compensan o anulan los correspondientes arcos desarrollados por la ruedecilla, por lo cual no hay que tenerlos en cuenta. Esto sentado, podemos sustituir una línea cualquiera entre M y N o entre M' y N', por otra quebrada de intervalos infinitamente pequeños, y la superficie correspondiente quedará así descompuesta en zonas circulares elementales, cuyas líneas de separación, si fueran recorridas por el punzón en uno y otro sentido, no ejercerían efecto alguno sobre el área total; por esta razón puede enunciarse la ley anterior de los dos modos siguientes, según el caso:

1. Cuando el punzón del planímetro recorre una línea cerrada, con el polo fuera del recinto limitado por la misma, la ruedecilla desarrolla un arco b, que multiplicado por R da el área S de dicho recinto. Es decir, que:

$$S = bR \text{ (polo exterior).} \tag{6}$$

2. Cuando se recorre una línea cerrada, con el polo P dentro del recinto limitado por aquélla, el producto bR da la superficie comprendida entre dicha línea y el círculo funda-

(pag.169)

mental, es decir, que no representa el área S del espacio comprendido por el perímetro recorrido, para obtener la cual hay que agregar al producto bR, el área $C^2\pi$ del círculo fundamental, o sea:

$$S = bR + C^2\pi \text{ (polo interior).} \tag{7}$$

En vez del arco b desarrollado por la ruedecilla, se puede tomar el número n de vueltas dado por ésta; en efecto, siendo r' el radio de la ruedecilla (fig. 169), una vuelta completa de ésta equivale a un arco u desarrollado por su borde y cuya longitud viene dada por la expresión $u = 2\,r'\pi$. El arco total b correspondiente a n vueltas será:

$$b = n\,u. \tag{8}$$

Sustituyendo este valor en (6) y (7) se tiene:

$$S = R\,n\,u \quad \text{(polo exterior)} \tag{9}$$
$$S = R\,n\,u + C^2\pi \text{ (polo interior).} \tag{10}$$

El producto Ru representa el valor del área correspondiente a una vuelta de la ruedecilla, como se ve haciendo $n = 1$.

Es evidente la ventaja que supone el hacer el producto Ru igual a la unidad, a 10 ó una potencia cualquiera de 10, ya que la multiplicación de n por Ru se hace instantáneamente sin la menor dificultad. Para lograr esta condición, se puede correr el brazo R dentro de su caja, y una vez conocido el valor de u, se calcula la longitud que hay que dar a R para que Ru sea igual a 1; para un planímetro en que $r' = 1$ cm, o sea, en que $u = 2\pi = 6{,}283$ cm, habrá que tomar

$$R = \frac{1}{u} = 0{,}159 \text{ cm}, \qquad \text{o también} \qquad R = \frac{100}{u} = 15{,}9 \text{ cm}.$$

Esta determinación de R es muy poco precisa, pero sirve de punto de partida para hallar más exactamente su valor, planimetrando una superficie ya conocida. Para ello se toma $R = 15{,}9$ cm y se hace una señal en el brazo trazador, y se recorre entonces con el punzón el perímetro de una superficie de comprobación, igual por ejemplo, a 100 cm². Supongamos que con el planímetro se obtiene un área de 97,6 cm², que como se ve es errónea por defecto. Según la fórmula (9), para dos pruebas o determinaciones sucesivas de la misma superficie S, con longitudes del brazo trazador iguales a R_1 y R_2 respectivamente y las correspondientes lecturas n_1 y n_2, se tiene:

$$S = 2\,R_1 r'\pi n_1 = 2\,R_2 r'\pi n_2$$

de donde:

$$R_2 : R_1 = n_1 : n_2.$$

De aquí se deduce la siguiente ley para regular la longitud R del brazo trazador: cuando al hacer una comprobación resulta un valor más pequeño de lo que debiera resultar, se acorta el brazo trazador R, y cuando la prueba da un valor excesivo, se debe alargar dicho brazo.

En el caso del ejemplo anterior, el brazo $R = 15{,}9$ debe hacerse igual a $15{,}9 \times \frac{97{,}6}{100}$, es decir, que ha de acortarse en una cantidad ΔR dada por la siguiente igualdad:

$$\Delta R = 15{,}9 \times \frac{97{,}6}{100} - 15{,}9 = -15{,}9\left(\frac{100 - 97{,}6}{100}\right)$$

o sea

$$\Delta R = -\frac{2{,}4}{100} \times 15{,}9 \text{ cm} = -0{,}38 \text{ cm}.$$

(pag.170)

En resumen: el brazo trazador R debe acortarse en un tanto por ciento de su longitud igual al tanto por ciento de disminución de la superficie respecto a su verdadero valor, y al contrario cuando la superficie resulte errónea por exceso.

Cuando no se consigue la regulación precisa en la primera vez, se repite cuantas veces sean necesarias.

Para señalar de modo permanente la longitud del brazo determinada por estos tanteos se hace una raya en el mismo, si ya no está marcada ésta por el constructor.

Lo que antecede se refiere únicamente a la determinación de superficies con el polo exterior; para el polo interior hay que determinar, además, la constante $C^2\pi$, cuyo valor puede calcularse de antemano por la ecuación (4): $C^2 = R^2 + R'^2 + 2\,Rr$. En el ejemplo anterior se tiene: $R' = 15{,}9$ cm, $R = 15{,}7$ cm y $r = 3{,}4$ cm, resultando para $C^2\pi$ el valor 1908 cm². También puede hallarse directamente el valor de C poniendo el planímetro sobre el tablero de dibujo de modo que PA_0 sea perpendicular a A_0F_0, como se ve en la figura 171, y en estas condiciones PF_0 es igual a C, evitándose así el tener que hacer el cálculo indicado en la fórmula (4).

La corrección de la constante $C^2\pi$ determinada de este modo previo o aproximado, se hace recorriendo el perímetro de una superficie conocida, con el polo dentro de la misma, y comparando el resultado con el valor exacto de esta última. Por ejemplo, si al planimetrar un cuadrado de 1600 cm², el número de vueltas que da la rueda contadora es $n = -295{,}0$, se tiene: $1600 = n + C^2\pi$, o sea: $1600 = -295{,}0 + C^2\pi$, de donde $C^2\pi = 1895{,}0$.

Siempre conviene conocer con mucha aproximación el valor de la constante $C^2\pi$, *antes* de determinarlo exactamente, pues el disco graduado que registra las vueltas de la rueda contadora no indica más de 100 vueltas de esta última, equivalentes en nuestro ejemplo a 1000 cm² de superficie medida. Si la constante es mayor que la superficie planimetrada, n ha de ser negativo, como se ve en las lecturas del contador. En el caso anterior, la primera lectura sería, por ejemplo de 1149,1 y la segunda o final, de 854,1 cm², de donde $n = 854{,}1 - 1149{,}1 = -295{,}0$ y teniendo en cuenta el valor aproximado de $C^2\pi$, resulta: $S = -295 + 1895 = +1600$, como así debe ser.

Siempre que es posible, se evita el empleo del planímetro con el polo interior, y cuando se trata de superficies grandes se dividen en otras más pequeñas que se planimetran por separado con el polo exterior.

Los planímetros antiguos llevan el brazo trazador grabado con distintas señales acotadas, que indican el valor de Ru correspondiente a cada una de ellas.

Valor de la unidad del nonio. Los planímetros modernos llevan el brazo trazador dividido en medios milímetros, y en la caja o puente dd por donde corre o se desliza este brazo va un nonio n (fig. 172). Si el cero del nonio está colocado exactamente en el punto debido, la posición e del mismo dará la longitud del brazo libre $R = \frac{1}{2}\,e$. Ordinariamente no se cumple esta condición, por lo cual hay que introducir una pequeña corrección e_0, teniéndose:

$$R = \frac{1}{2}(e - e_0), \tag{11}$$

y el valor de la superficie planimetrada será:

$$S = \frac{1}{2}(e - e_0)\,u\,n. \tag{12}$$

Con el nonio de la rueda contadora se leen milésimas de vuelta, expresándose así

(pag.171)

el arco total recorrido por aquélla, es decir, que llamando n' a esta lectura, se tiene: $n = \frac{n'}{1000}$, y sustituyendo en (12):

$$S = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000} u\, n'. \qquad (13)$$

Si u está dado en milímetros, la superficie resulta expresada en milímetros cuadrados. Ahora bien, si la superficie se halla en un plano levantado a escala $1 : m$, para expresarla en metros cuadrados se tendrá:

$$S' = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000}\frac{m^2}{1000^2} u\, n'. \qquad (14)$$

El valor

$$w = \frac{1}{2}\frac{(e - e_0)}{1000}\frac{m^2}{1000^2} u \qquad (15)$$

por el cual hay que multiplicar el número n' de vueltas, representa el área correspondiente a un recorrido de la rueda contadora igual a la milésima parte de una vuelta. A este factor u se le llama *valor de la unidad del nonio.*

Ordinariamente el constructor acompaña con cada planímetro una pequeña tabla que da la longitud e del brazo trazador correspondiente a distintas escalas de los planos y a diferentes valores de la unidad del nonio. Por ejemplo, el planímetro n.° 1248 de Dennert y Pape, lleva la siguiente tabla:

Escala $1 : m$	Posición del cero del nonio en el brazo libre e	Valor de la unidad del nonio w
1 : 1000	336,0	10 m^2
1 : 1250	269,2	12,5 »
1 : 2000	169,2	20 »
1 : 500	336,0	2,5 »
1 : 250	136,2	0,25 »

Estos datos pueden también aprovecharse para calcular por la fórmula (15), las constantes e_0 y u, de modo que según la siguiente ecuación, deducida de la (15),

$$e = e_0 + \frac{2000\, w}{u}\left(\frac{1000}{m}\right)^2 \qquad (16)$$

puede hallarse la posición e del cero del nonio sobre el brazo trazador, para cualquier valor de w y m.

Para el planímetro antes citado, resulta:

$$e = 3{,}0 + 33{,}3\left(\frac{1000}{m}\right)^2 w \qquad (17)$$

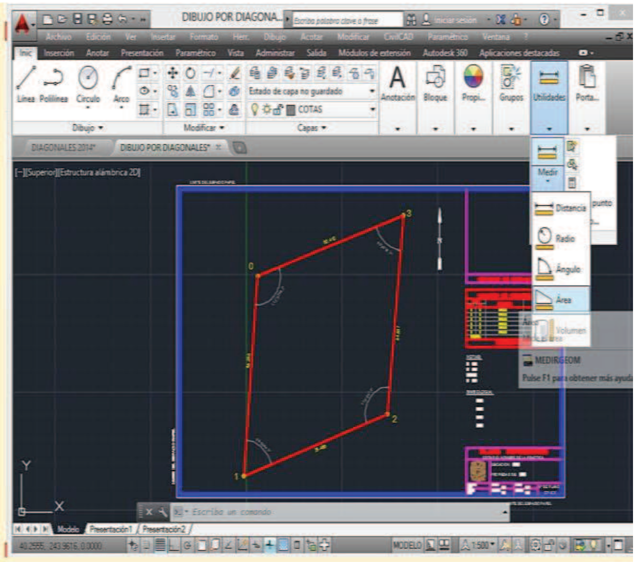
siendo $e_0 = 3{,}0$ y $u = 60{,}06$ mm.

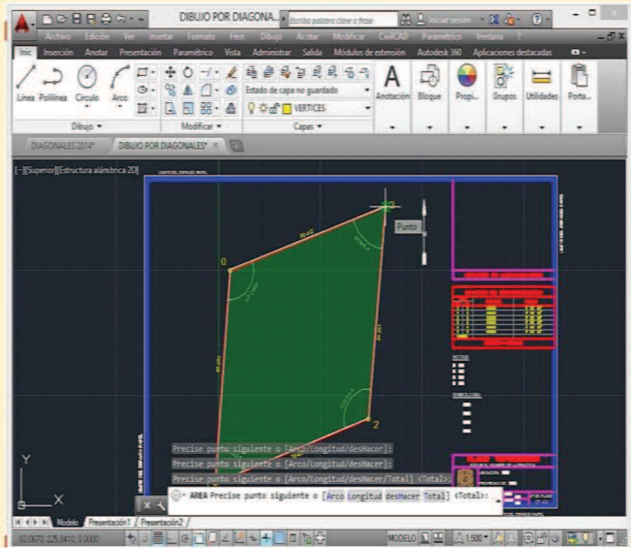
7.2.4. Computación.

Actualmente es común valerse de este recurso, el que puede contribuir de distintas maneras para determinar la superficie de espacios, las cuales se estudian en las asignaturas computación -programas- de computación. En ese sentido se pueden citar:

a. La más elemental consiste en utilizar estos equipos en los cálculos vistos en los distintos métodos, con lo que se logra mayor rapidez y precisión en los mismos, además de "memorizar" los datos.

b. Lo más relevante proviene de los variados programas de cálculo para usar en computadoras, Estos a veces son desarrollos individuales o bien forman parte de un software topográfico, En todos los casos la "programación" se ajusta al esquema de la "planilla de cálculo de coordenadas y superficies" vista "Poligonales" la primera parte y en el presente lo referente al cálculo analítico de superficies.

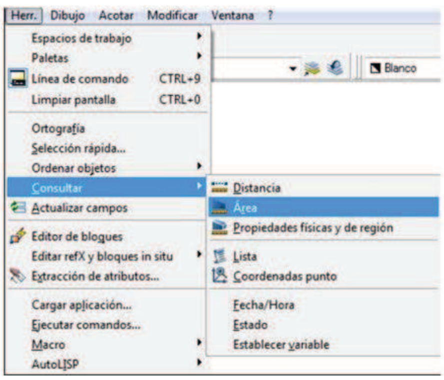




En esta alternativa puede incluirse instrumental de medición como las "estaciones totales", que a veces llevan incorporados "programas" de este tipo o sino funcionan en una "colectora de datos inteligente" que normalmente los poseen.

c. Una alternativa con fundamentos similares al caso anterior resulta de utilizar un programa de dibujo asistido por computadora (CAD), la mayoría de los cuales se sustentan geométricamente en un sistema de referencia "plano ortogonal", ajustándose así a los principios topográficos. Esta forma también es de aplicación, preferentemente, a "figuras poligonales cerradas", en las que los datos deben provenir de un relevamiento con métodos como constructivos, coordenadas polares, poligonales o triangulación.

- *Pulsando Utilidades-Medir-Área (triangulo invertido)*
- *Teniendo activo el modo de referencia a objetos (F3), recorrer los vértices de la poligonal, dar intro.*

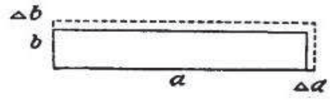


d. Si no se tienen las medidas lineales y angulares para aplicar las alternativas b y c, se puede hacer algo similar si se cuenta con una representación a escala. Para ello se transfiere al equipo la posición planimétrica de los puntos que definen la superficie a determinar, mediante su "vectorización" o "digitalización" con un accesorio llamado tableta digltalilzadora.

7.4. Errores superficiales y tolerancias. [8]

Cuando se tiene un rectángulo de lados *a* y *b,* su área es S = a x b (1)

Si los lados *a* y *b* están afectados respectivamente de los errores ±Δa y ±Δb, el área S resultará también afectada de un error ± Δ*s,* es decir:

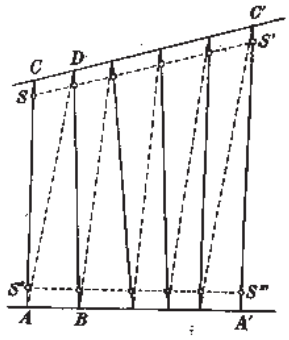


S ± Δs = (a± Δa) x (b ± Δb) = ab ± aΔb ± bΔa ± ΔaΔb.

Restando de esta igualdad la (1), y despreciando el valor muy pequeño ΔaΔb, resulta:

$$\pm\Delta S=\pm a\Delta b\pm b\Delta a \quad (2)$$

Si Δa = Δb



y en cambio a es bastante más grande que b, el error parcial aΔb resulta también mucho mayor bΔa.

Si se trata de parcelas estrechas y largas, los lados cortos deben medirse relativamente con mucha más precisión que los largos.

Los lados cortos AB, CD, etc. caso de una parcela como la figura, los lados corLos *AB, CD,* etc.,deben medirse directamente en el campo con 1 cm de precisión, y los *AC, BD,* etc., basta medirlos en el plano, hasta con 0,1 m de precisión solamente.

Volvamos a la fórmula (2) y supongamos Δa y Δb, no son errores observados sino errores medios

$$\Delta S = \sqrt{(\boldsymbol{a}.\Delta\mathbf{b})^2 + (\boldsymbol{b}\Delta\mathbf{a})^2} \quad \mathbf{(3)}$$

1º Caso

Supongamos que en la fórmula (3) se tenga que Δa = Δb = c (4) es decir, que el error lineal sea constante, o sea independiente de las longitudes medidas, como ocurre en el trazado dibujo de los planos; sustituyendo el valor de Δa y Δb (4) en (3) y extrayendo la ctte. fuera del radical, se tiene:

$$\Delta S = c\ \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} \quad (4)$$

Esta fórmula nos dice que el error superficial es proporcional a la diagonal del rectángulo.

En vez de los lados *a* y *b,* vamos a referir ahora la superficie a la relación entre sus lados, es decir, vamos a partir de estas dos ecuaciones:

$$Ab=S, \quad a/b = n$$

en las cuates, eliminando sucesivamente *a* y *b.* lendremos:

$$b= \sqrt{S/n}\ , \quad a= \sqrt{S.n}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (4) resulta:

$$\Delta S = c\,\sqrt{\boldsymbol{S}}\,\sqrt{(\boldsymbol{n}^2+1)/\boldsymbol{n}}$$

De aquí se deduce la regla práctica, que dice que para mediciones directas sobre un plano, el error

Area S	$\sqrt{S}$	$n=1$	$n=2$	$n=5$	$n=10$
cm²	cm	cm²	cm²	cm²	cm²
1	1	$\Delta S = 0{,}01$	$\Delta S = 0{,}02$	$\Delta S = 0{,}02$	$\Delta S = 0{,}03$
25	5	0,07	0,08	0,11	0,16
100	10	0,14	0,16	0,23	0,32
225	15	0,21	0,24	0,34	0,46
400	20	0,28	0,32	0,46	0,64
900	30	0,42	0,47	0,68	0,95

(10)

8 Tratado General de Topografia. Tomo I . Planimetría. W. Jordan.

surerficial **ΔS** es proporcional a la raíz cuadrada del área S, para un valor dado de n. Como ejemplo numérico podemos suponer que el error de medida sea c = ± 0,1 mm;la aplicación de la fórmula anterior nos dará esta tabla, para distintos valores de S y n

2.º caso. Supongamos que en la fórmula (3) se verifique que

$$\Delta a = C a \quad \text{y} \quad \Delta b = C b \tag{11}$$

es decir, que los errores lineales sean proporcionales a las longitudes medidas; sustituyendo estos valores en (3) resulta:

$$\Delta S = C\sqrt{(a\,b)^2 + (a\,b)^2} = C \cdot S \cdot \sqrt{2}. \tag{12}$$

En este caso, el error superficial es también proporcional a la superficie misma, y es independiente de la relación n entre sus lados.

3.er caso. Si en la fórmula (3) se tiene

$$\Delta a = k\sqrt{a} \quad \text{y} \quad \Delta b = k\sqrt{b} \tag{13}$$

es decir, que los errores lineales sean proporcionales a las raíces cuadradas de las longitudes (como sucede para los errores accidentales), sustituyendo estos valores en (3), resultará:

$$\Delta S = k\sqrt{a^2 b + b^2 a} = k\sqrt{a\,b\,(a+b)}. \tag{14}$$

Introduciendo en esta fórmula la relación n entre a y b (6) y sustituyendo en la misma los valores de a y b (7) queda:

$$\Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\sqrt{1+n} = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt[4]{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Según sea n, así será el rectángulo más o menos estrecho.

$$n = 1 \text{ da } \quad \Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt{2} = 1{,}414\,k\sqrt[4]{S^3} \quad \Big| \quad n = 10 \text{ ó } n = 0{,}1 \text{ da } \quad \Delta S = k\sqrt[4]{S^3}\sqrt[4]{12{,}1} = 1{,}865\,k\sqrt[4]{S^3} \tag{16}$$

El error medio accidental de las mediciones con regla o cinta, se ha tomado (§ 21, pág. 72) igual a 5 cm por 100 m, o sea, 0,005 m por 1 m; es decir, que:

$$\Delta a = 0{,}005\sqrt{a}, \quad \text{o sea} \quad k = 0{,}005\text{ m}. \tag{17}$$

Sustituyendo este valor de k en (16) resulta:

$$\text{para} \quad n = 1, \quad \Delta S = 0{,}00707\sqrt[4]{S^3}; \qquad \text{para} \quad n = 10, \quad \Delta S = 0{,}00932\sqrt[4]{S^3}. \tag{18}$$

Con esta fórmula se calcula la siguiente tabla de errores superficiales teóricos para las mediciones de parcelas:

Superficie S		Cuadrado	Rectángulo 1 × 10
1 centiárea =	1 m²	ΔS = 0,01 m²	ΔS = 0,01 m²
10 centiáreas =	10 »	0,04	0,05
1 área =	100 »	0,2	0,3
10 áreas =	1 000 »	1,3	1,7
1 hectárea =	10 000 »	7,1	9,3
10 hectáreas =	100 000 »	39,8	52,4

(19)

Estos son los valores puramente teóricos de los errores; en la práctica estos valores son siempre más grandes, porque además de los errores considerados **Δ *a*** y **Δ *b***, se cometen siempre otros.

En la práctica, estas consideraciones teóricas sólo son aplicables a la ***forma*** de la ecuación del error, no utilizándose, desde luego, la fórmula (12); lo más corriente es dar el error superficial en tanto por ciento. Para trabajos de Agrimensura puede tomarse una fórmula que sea como promedio de las (8), (12) y (15).