Algebra Lineal y Geometría.

Unidad nº7: Transformaciones Lineales.

Contenidos.

- **Transformación lineal entre dos espacios vectoriales. Teorema fundamental de las transformaciones lineales. Núcleo e Imagen de una transformación lineal Dimensión del núcleo y de la imagen de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal.**

Definición

- Sea (V; +; K; .) y (W; +; K; .) dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K .
- **Definición.**

La función T: V→W es una transformación lineal u homomorfismo si y sólo si

a) $T(x + y) = T(x) + T (y)$

b) $T(\alpha X) = \alpha T(X)$

Ejemplos

- **Determinar cuales de las siguientes transformaciones son lineales y representar un vector genérico v (x , y) y su transformado T(v)**
  - $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (x+2, y+3)$
  - $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (x-3y, 2x+5y)$
  - $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (y-x, 0)$
  - $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (xy, x-y)$
  - $T: R^2 \rightarrow R^3 / T(x, y) = (x-y, 2x+y, 0)$

Ejercicio

- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$/

$T(x, y, z) = (x+2y+2z, x+2y-z, -x+y+4z)$

Determinar :

a) el vector $u \in R^3$ tal que $T(u)=(-1,8,-11)$

b) el vector $v \in R^3$ tal que $T(v)= v$

Propiedades.

Sea T: V→W una transformación lineal, θ_V y θ_W vectores nulos de los espacios vectoriales V y W.

- La imagen del vector nulo del primer espacio por toda transformación lineal es el vector nulo del segundo espacio.
- La imagen del opuesto de todo vector del primer espacio es igual al opuesto de la imagen.
- $T(x-y)=T(x)-T(y)$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i . v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i . T(v_i)$$

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

- Sean (V; +;R; .) y (W ; +; R; .) dos espacios vectoriales y

  $[V]= \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V.

  Si $w_1, w_2, ..., w_n$ son n vectores cualesquiera de W, entonces existe una única transformación lineal

  $T: V \to W \,/\, T(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1; 2; ...,n.$

Corolario

- Una transformación lineal $T: V \to W$ queda unívocamente determinada cuando se conocen las imágenes de una base de V

Ejercicio

- Sea $T: R^2 \to R^3$ una transformación lineal tal que $T(1, -1) = (3, 2, -2)$ y $T(-1, 2) = (1, -1, 3)$, determinar el $T(x, y)$.
- Determinar la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (-1, 0)$; $T(1,1,0)=(0,2)$ y $T(0,1,1)=(1,-1)$

Núcleo e Imagen de una transformación lineal.

- $N(T)=\{x\in V \;/\; T(X) = \theta_W\}$
- $Img(T)=\{\; T(X) \in W \;/\; x\in V \;\}$
- El núcleo de toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales es un subespacio del primero.
- La Imagen de toda transformación lineal entre dos espacios vectoriales es un subespacio del codominio.

Ejemplo

- Dadas las transformaciones lineales, determinar a)el núcleo de T, una base para ese subespacio y su dimensión.

  b)la imagen de T, una base para ese subespacio y su dimensión.
- $T_1: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$
- $T_2: R^2 \to R^3 / T(x, y) = (x + y, x, 2y)$
- $T_3: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (x - 2y, x + y)$
- $T_4: R^3 \to R_2 / T(x, y, z) = (x+2y - z, 2x - y + z)$
- $T_5: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = (x-y-2z, -x+2y+z, x-3z$

Teorema de la dimensión del núcleo y de la imagen.

- Si (V;+;R;.) es un espacio vectorial de dimensión finita y $T:V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen es igual a la dimensión del primer espacio.

- Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ la transformación lineal tal que
T ((1 , 1)) = (0 , 0) y T ((0 , 1)) = (1 , 1), demostrar que tanto el núcleo como la imagen de T son rectas en el plano *XY* que pasan por el origen. Encuentre las ecuaciones de esas rectas.
- Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ la transformación lineal tal que
T ((3 , 2)) = (0 , 0) y T ((1 , 3)) = v $\neq 0$, pruebe que el núcleo de T es una recta en el plano *xy*, que pasa por el origen. Encuentre su ecuación.
- Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ la transformación lineal cuyo núcleo es una recta en R^2 que pasa por el origen. Demuestre que la imagen de T es una recta de R3 que pasa por el origen.
- Sea T: $R^3 \rightarrow R^3$ la transformación lineal cuyo núcleo es una recta en R^2 que pasa por el origen. Demuestre que el núcleo de T es una recta de R^3 que pasa por el origen.

Matriz asociada a una transformación lineal.

- $A \in K^{m \times n}$ matriz de la transformación lineal respecto de una base en cada espacio.
- dim W= m. dim V= n.
- Se determinan las imágenes dadas por T de los vectores de la base del primer espacio.
- Se expresan estas imágenes como combinación lineal de los vectores de la base segunda base.
- La traspuesta de la matriz de los coeficientes es la matriz de la transformación lineal respecto de las bases dadas en ambos espacios.

Aplicación

- Si A es la matriz de la transformación lineal T, respecto de las bases [V] y [W]; X[V] matriz columna correspondiente al vector X $\in$ V, cuyos elementos son las coordenadas de éste respecto de la base de V, entonces la imagen de X expresada en términos de la base de W se obtiene premultiplicando por A al vector columna X[V].
- $T(X)=Y[\ W\ ]= A.\ X[\ V\ ]$

Hallar la matriz asociada y el T(x) respecto de las bases canónicas.

- $T_1: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$
- $T_2: R^2 \rightarrow R^3 / T(x, y) = (x + y, x, 2y)$
- $T_3: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (x - 2y, x + y)$
- $T_4: R^3 \rightarrow R_2 / T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$
- $T_5: R^3 \rightarrow R^3 / T(x, y, z) = (x - y - 2z, x + 2y + z, x - 3z)$

Observaciones.

- Una transformación lineal T: V $\rightarrow$W es inyectiva si y sólo si el único elemento del núcleo es el vector nulo del dominio.
- La imagen de cualquier conjunto linealmente dependiente, por toda transformación lineal es linealmente dependiente.

Ejercicio

- Sea la transformación lineal
  $T: R^3 \rightarrow R^2 /\ T(x,y,z)=(2x-y+z\ ;\ 2y+z)$
  Hallar:
- Nu(T) y su dimensión.
- Matriz asociada a la transformación lineal respecto a las bases canónicas de ambos espacios.
- T(1, -1, 2)
- $v \in R^3 /\ T(v) = (1; -3)$

Probar que:

- Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal y $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son vectores de V tales que sus imágenes constituyen un conjunto linealmente independiente en W, entonces $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son linealmente independientes.
- La imagen de todo conjunto linealmente independiente, dada por cualquier transformación inyectiva, es un conjunto linealmente independiente

- Si T: V $\rightarrow$W es una transformación lineal y $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es sistema generador de V, sus imágenes constituyen un conjunto de vectores generadores de la Imagen de T.
- Probar considerando:

- T_5: $R^3 \rightarrow R^3 / T(x,y,z) = (x-y-2z, -x+2y+z, x-3z$

Dadas las siguientes transformaciones lineales en el plano:

- $T_1: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (x, -y)$
- $T_2: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (-x, y)$
- $T_3: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (-x, -y)$
- $T_4: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (y, x)$
- $T_5: R^2 \to R^2 / T(x, y, z) = (-y, -x)$
- T_6: R2$\to$ R2/ $T(x, y) = \alpha(x, y)$, $\alpha \in$ R, considerar los siguientes casos $|\alpha|>1$, $|\alpha|<1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 0$

- T7: R2$\rightarrow$ R2/ T(x , y) = (α x , y), $\alpha \in$ R, considerar los siguientes casos α >1, 0 < α < 1
- T8: R2$\rightarrow$ R2/ T(x , y) = (x , α y), $\alpha \in$ R, considerar los siguientes casos α >1, 0 < α < 1, α = 0
- T9: R2$\rightarrow$ R2/ T(x , y) = (x, y)
- T10: R2$\rightarrow$ R2/ T(x , y) = (x , y + α x)
- T11: R2$\rightarrow$ R2/ T(x , y) = Para cada una de ellas:

- a) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica en R2, sus inversas y sus traspuestas. Enunciar conclusiones
- b) El determinante de cada una de ellas. Enunciar conclusiones
- c) Elegir dos vectores u y v de R2 y hallar sus transformados, las distancias entre T(v), d (v, u),
- d (T(v), T(u), u . v, T(u).T(v),
- d) Considerar la base ortonormal , elegir arbitrariamente cualquiera de la Ti ortogonal dadas y hallar el conjunto . El conjunto obtenido constituye una base ortonormal. Enunciar conclusiones.
- e) Seleccionar dos transformaciones ortogonales de las dadas y componerlas, hallar las matrices canónicas asociadas. Enunciar conclusiones.
- f) Interpretar geométricamente cada Ti (Sugerencia, utilizar representación gráfica de Ti)