Ing. Enrique D'Onofrio
Lic. Mónica Fiore

INICIO

CÁLCULO DE LA FUERZA GENERADORA DE MAREA

La fuerza de marea (f_m) es la resultante de la suma de la fuerza de atracción del astro (f_a) y de la fuerza centrífuga (f_c) debida a la rotación de la Tierra alrededor del centro de masa del sistema Tierra – Astro. Como se demosrará posteriormente los únicos astros generadores de marea son la Luna y el Sol, por lo que se determinará una f_m para cada uno de ellos. La deducción de la fórmula se realizará para la Luna, para luego reemplazar algunos parámetros y deducir la correspondiente al Sol.

Para efectuar el cálculo de f_m en un punto (P) de la superficie de la Tierra se la descompone en dos componentes f_v y f_h, según un eje normal a la superficie de la Tierra (v) y otro tangente a la misma (h), respectivamente (Figura 1). Se trabajará con fuerzas por unidad de masa, por lo que no figura la masa de la Tierra (M_T) en ninguna de las expresiones.

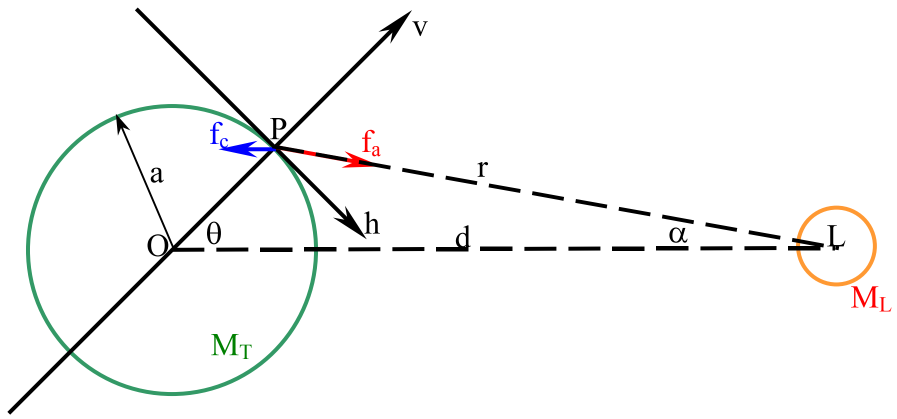

Figura 1

A continuación se escriben las expresiones de la fuerza de atracción de la Luna (f_a) y de la fuerza centrífuga (f_c), ambas por unidad de masa, aplicadas en el punto P de la superficie de la Tierra.

$$f_a = \frac{G \cdot M_L}{r^2} \qquad\qquad f_c = \frac{G \cdot M_L}{d^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal ($6{,}6726 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2), M_L la masa de la Luna ($7{,}352 \cdot 10^{22}$ kg), r la distancia del punto P al centro de la Luna y d la distancia entre en centro de la Tierra y el de la Luna (Figura 1).

Luego

$$f_v = f_a \cdot \cos(\theta + \alpha) - f_c \cdot \cos\theta \qquad\qquad f_h = f_a \cdot \mathrm{sen}(\theta + \alpha) - f_c \cdot \mathrm{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo determinado por el punto P, el centro de la Tierra (O) y el centro de la Luna (L) y α es el ángulo paraláctico determinado por el punto P, el centro de la Luna y el centro de la Tierra.

Reemplazando f_a y f_c en f_v y f_h se tiene:

$$f_v = G \cdot M_L \cdot \left(\frac{\cos(\theta + \alpha)}{r^2} - \frac{\cos\theta}{d^2} \right) \quad [1] \qquad f_h = G \cdot M_L \cdot \left(\frac{\mathrm{sen}(\theta + \alpha)}{r^2} - \frac{\mathrm{sen}\theta}{d^2} \right) \quad [2]$$

Los ángulos θ y α no varían uniformemente con el tiempo. En principio se buscará escribir las expresiones anteriores de forma tal que no figure el ángulo α. La presencia de variables no uniformes con el tiempo dificulta el algoritmo de programación de estas fórmulas.

Si se aplica el teorema del coseno al lado r del triángulo OPL se tiene:

$$r^2 = a^2 + d^2 - 2 \, . \, a \, . \, d \, . \cos\theta \qquad [3]$$

donde a es el radio medio de la Tierra.

Utilizando el teorema del seno en el triángulo OPL se obtiene:

$$\mathrm{sen}\,OPL = d \cdot \frac{\mathrm{sen}\theta}{r}$$

$$\mathrm{sen}\ OPL = \mathrm{sen}\ (180° - (\theta + \alpha)) = \mathrm{sen}\ (\theta + \alpha)$$

$$\mathrm{sen}(\theta + \alpha) = d \cdot \frac{\mathrm{sen}\theta}{r} \qquad [4]$$

Se escribe nuevamente la ecuación [3] sacando como factor común a r^2, pues resultará conveniente para un desarrollo en serie de potencias que se efectuará posteriormente, donde la variable es a/d (aproximadamente 1/60).

$$r^2 = d^2 \left(\frac{a^2}{d^2} + 1 - 2 \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos\ \theta \right) \qquad [5]$$

Reemplazando [5] en [4] se tiene:

$$\mathrm{sen}(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{sen}\theta}{\left(\frac{a^2}{d^2} + 1 - 2 \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos\theta \right)^{1/2}} \qquad [6]$$

Por otra parte

$$\cos(\theta + \alpha) = \left(1 - \mathrm{sen}^2(\theta + \alpha)\right)^{1/2}$$

Reemplazando [6] en la ecuación anterior:

$$\cos(\theta + \alpha) = \left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\frac{a^2}{d^2} + 1 - 2 \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos\theta} \right)^{1/2}$$

Operando:

$$\cos(\theta+\alpha)=\left(\frac{\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta}\right)^{1/2}$$

Luego

$$\cos(\theta+\alpha)=\left(\frac{\dfrac{a^2}{d^2}-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta+\cos^2\theta}{\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta}\right)^{1/2}$$

$$\cos(\theta+\alpha)=\frac{\cos\theta-\dfrac{a}{d}}{\left(\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta\right)^{1/2}}\qquad[7]$$

Reemplazando [6], [7] y [5] en [1] y [2] se obtiene:

$$f_V=G\cdot M_L\left[\frac{\cos\theta-\dfrac{a}{d}}{\left(\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta\right)^{1/2}\cdot r^2}-\frac{\cos\theta}{d^2}\right]$$

$$f_h=G\cdot M_L\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\left(\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta\right)^{1/2}\cdot r^2}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{d^2}\right]$$

$$f_v=\frac{G\cdot M_L}{d^2}\left[\frac{\cos\theta-\dfrac{a}{d}}{\left(\dfrac{a^2}{d^2}+1-2\cdot\dfrac{a}{d}\cdot\cos\theta\right)^{3/2}}-\cos\theta\right]\qquad[8]$$

$$f_h = \frac{G \cdot M_L}{d^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\left(\frac{a^2}{d^2} + 1 - 2 \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos\theta\right)^{3/2}} - \operatorname{sen}\theta\right] \quad [9]$$

Se desarrolla en serie de Mac Laurin [8] y [9] tomando como variable a/d.

$$\frac{1}{\left(\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \frac{a}{d} \cdot \cos\theta\right)^{3/2}} \cong 1 + 3 \cdot \cos\theta \cdot \frac{a}{d} + \frac{3}{2} \cdot \left(5 \cdot \cos^2\theta - 1\right) \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \ldots\ldots$$

Reemplazando en [8] y [9] y considerando solamente la potencia 1 de a/d se tiene:

$$f_v = \frac{G \cdot M_L}{d^2} \cdot \left[\left(\cos\theta - \frac{a}{d}\right) \cdot \left(1 + 3 \cdot \cos\theta \cdot \frac{a}{d}\right) - \cos\theta\right]$$

$$f_h = \frac{G \cdot M_L}{d^2} \cdot \left[\operatorname{sen}\theta \cdot \left(1 + 3 \cdot \cos\theta \cdot \frac{a}{d}\right) - \operatorname{sen}\theta\right]$$

$$f_v = \frac{G \cdot M_L}{d^2} \cdot \left[-\frac{a}{d} \cdot -3\frac{a^2}{d^2} \cdot \cos\theta + 3 \cdot \cos^2\theta \cdot \frac{a}{d}\right] \quad [10]$$

$$f_h = \frac{G \cdot M_L}{d^2} \cdot \left[3 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{a}{d}\right] \quad [11]$$

Se desprecia en [10] el término donde figura $(a/d)^2$ y [11] se escribe nuevamente:

$$f_v = \frac{G \cdot M_L \cdot a}{d^3} \cdot \left[3 \cdot \cos^2\theta \cdot -1\right] \quad [12]$$

$$f_h = \frac{G \cdot M_L \cdot a}{d^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta \quad [13]$$

Si se analiza a las expresiones de las componentes horizontal y vertical de la fuerza de marea ([12] y [13]) debidas a la Luna, obtenidas considerando solamente el primer término del desarrollo en serie de Mac Laurin en potencias de (a/d) se puede observar que la fuerza de marea es directamente proporcional a $(M_L/d)^3$.

Para calcular las expresiones de la fuerza de marea debidas al Sol (o a cualquier otro astro), por analogía, se reemplazan en [12] y [13] los siguientes elementos:

M_L por la masa del Sol M_S (o la de cualquier astro)
θ por θ_S (o el correspondiente a cualquier astro)
d por d_S (o la correspondiente a cualquier astro)

Luego para un mismo valor del ángulo θ se pueden comparar las magnitudes de las fuerzas generadoras de marea debidas a diferentes astros, evaluando los valores que adopta la relación $(M/d)^3$. En la siguiente tabla, además de la Luna y el Sol se considera a Venus por ser el planeta más cercano a la Tierra y a Júpiter por resultar el de mayor masa.

Astro	Masa [masa de la Luna]	Distancia [distancia Tierra - Luna]	$(M_L/d)^3$
Luna	1	1	1
Sol	$27{,}1 \cdot 10^6$	389	0,46
Venus	66	108	$5 \cdot 10^{-5}$
Júpiter	$27 \cdot 10^3$	1360	$6 \cdot 10^{-6}$

Estas cifras justifican la razón por la cual solamente se considera a la Luna y al Sol como los únicos astros generadores de marea. Además se deduce que la fuerza generadora de marea debida a la Luna es 2,2 veces mayor que la debida al Sol.

Considerando que para un punto de la superficie de la Tierra se cumple que la aceleración de la gravedad (g) es:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad G = \frac{g \cdot a^2}{M_T}$$

Luego reemplazando G en [12] y [13] se tiene:

$$f_{h3}/g = \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

$$f_{v3}/g = \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^3 \cdot \left[3 \cdot \cos^2\theta - 1\right]$$

A f_v se la denota como f_{v3} y a f_h como f_{h3}, siguiendo la notación de Shureman (1988), debido a que el paralaje del astro (a/d) se encuentra elevado al cubo. Para el caso de la Luna f_{v3} y f_{h3} representan el 98% de la correspondiente fuerza de marea, y para el Sol un porcentaje aún mayor.

Si se considera el segundo término del desarrollo en serie de Mac Laurin en potencias de (a/d) se obtienen las ecuaciones [14] y [15] que conjuntamente con las [12] y [13] representan con muy buena aproximación la totalidad de la fuerza de marea (Shureman, 1988).

$$f_{v4}/g = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^4 \cdot \left[5 \cdot \cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta\right] \qquad [14]$$

$$f_{h4}/g = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{M_L}{M_T} \right) \cdot \left(\frac{a}{d} \right)^4 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot [5 \cdot \cos^2\theta - 1] \qquad [15]$$

La magnitud de la fuerza de marea, en todos los casos es mucho menor que la fuerza de gravedad terrestre. Luego la componente vertical de la fuerza de marea es anulada por la fuerza de gravedad, resultando ser la componente horizontal de la fuerza de marea la que provoca este fenómeno.

Teoría estática o de equilibrio de la marea y la teoría dinámica

Esta teoría se basa en simplificaciones que la hacen poco real pero que facilitan la comprensión del fenómeno de mareas y permite el cálculo de los períodos de las ondas componentes de la marea.

Las hipótesis de la teoría son:

1. La Tierra es irrotacional, es decir, que se desprecia el giro sobre su propio eje.

2. La Tierra se considera como una esfera sin continentes y cubierta por una capa de agua de espesor constante en estado no perturbado.

3. La inercia de las masas de agua se desprecia, con lo cual se obtiene una respuesta inmediata a la acción de las fuerzas generadoras de marea.

4. No se consideran la fricción.

5. Sobre las aguas actúan solamente las fuerzas generadoras de marea lunar y solar y la de la atracción de la gravedad terrestre.

6. Las aguas forman una superficie equipotencial donde las fuerzas anteriores están en equilibrio.

Estas hipótesis hacen que la marea resultante difiera bastante de la verdadera. el valor de esta teoría radica en que es un valioso auxiliar para estudiar el comportamiento de las fuerzas generadoras de marea, permitiendo visualizar su distribución sobre la superficie de la Tierra. Además transforma un problema dinámico en uno estático, donde las fuerzas de marea están en equilibrio con la de gravedad, asumiendo la superficie del océano como una superficie equipotencial.

Además a través del desarrollo de la fuerza de marea en función de longitudes astronómicas medias (que varían uniformemente con el tiempo) permite calcular los períodos de las ondas componentes de la marea. Estos valores se utilizan actualmente en el análisis armónico y la predicción de marea.

Sin embargo la teoría de equilibrio hasta este punto descripta, no representa verdaderamente el comportamiento de las mareas, ya que sus suposiciones no son las presentes en la realidad. Para corregir las simplificaciones de la teoría de equilibrio, se debe pensar en una teoría dinámica. Esta teoría considera el movimiento forzado de las aguas oceánicas bajo la acción de las fuerzas generadoras de marea, teniendo en cuenta los aspectos que fueron despreciados en la teoría de equilibrio. El marqués Pierre Simon de Laplace (1749-1827), fue uno de los pioneros un la aplicación de la teoría dinámica de la marea. A partir de él se sucedieron numerosos investigadores que continuaron con sus estudios hasta llegar a los modelos matemáticos actuales, que aplican las ecuaciones de la hidrodinámica.

❖ Referencias Bibliográficas

SCHUREMAN PAUL, (1988). Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides, Coast and Geodetic Survey, Special Publication No. 98, 317 p.