Algebra Lineal y Geometría.

Unidad n°6: Subespacios Vectoriales.

Contenidos.

- *Subespacios Vectoriales. Operaciones con Subespacios: Intersección, unión, suma y suma directa. Subespacio Generado. Teorema de Extensión de una base. Teorema de la dimensión de la suma de dos subespacios. Complemento Ortogonal de un Subespacio.*

Subespacios Vectoriales.

- Sea (V ; +; R; .) Espacio Vectorial Real.
- $S \subset V$
- S es un subespacio de (V , +, R, .) si y sólo si (S , +, R, .) es un Espacio Vectorial con las operaciones suma y producto escalar-vector definidas en V.
- Subespacios Triviales: $\forall$ V espacio vectorial:

  $$V \text{ y } \{\theta_V\}$$

Condición Suficiente.

- **Sea (V , +, R, .) un espacio vectorial real, y S un subconjunto no vacío de V.**

  S es un subespacio de V si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

  $$\forall\, \mathbf{x}: \mathbf{x} \in \mathbf{S} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathbf{S}$$

  $$\forall\, \alpha \in \mathbf{R} \wedge \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{S} \Rightarrow (\alpha \,.\, \mathbf{x}) \in \mathbf{S}$$

Determinar si los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios.

- Sea $S = \{(x; y; z) /\ y = x + 2;\ z = 0\};\ S \subset R^3$

  a) Determinar si *S* es Subespacio Vectorial de R^3 con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar.

  b) Representar gráficamente *S.*

- a)Determinar si $S = \left\{ \begin{bmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{bmatrix};\ a, b \in R \right\}$

  es Subespacio Vectorial de R^{2x2} con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar en R^{2x2}.

  b)Las matrices ¿$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1/2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ son vectores de S?

- Sea $S=\{(x;y)/\ (x;y)\in R^2 \wedge x \geq y\ \}$

a) Determinar si *S* es Subespacio Vectorial de R^2 con las operaciones usuales de adición y multiplicación por un escalar.

b) Representar gráficamente *S*.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS.

- **INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS.**

- **Sea V espacio vectorial, S_1 y S_2 subespacios de V.**

  Entonces $S = S_1 \cap S_2$ es un subespacio de V.

  La intersección de toda familia de subespacios de V, es un subespacio de V

- **Unión de subespacios**: no es un subespacio.

SUMA DE SUBESPACIOS.

- **Sean S_1 y S_2 dos subespacios de (V , +, R, .)**
  $S = S_1 + S_2 = \{x \in V / \ x = x_1 + x_2 \wedge x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2\}$.
- **La suma de dos subespacios de V es un subespacio de V**
  - **Caso Particular: SUMA DIRECTA**
- **Sea V espacio vectorial, S_1 y S_2 subespacios de V.**
- **Si $S = S_1 + S_2$ y si $S_1 \cap S_2 = \{\theta_V\}$, entonces, $S = S_1 \oplus S_2$ se denomina** ***suma directa*****.**

SUBESPACIO GENERADO.

- **Sea A = { $v_1, v_2, \ldots, v_n$ } $\subset$ V,**
- **$\bar{A}$ = {** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con $\alpha_i \in R$ $v_i \in A$ **}**

PROPIEDADES:

- **Propiedad 1: $\bar{A}$ es un subespacio de V**
- **Propiedad 2: A $\subset$ $\bar{A}$**
- **Propiedad 3: A = $\bar{A}$ $\Leftrightarrow$ A es subespacio.**
- **Propiedad 4: El subespacio generado por un conjunto no vacío de un espacio vectorial es la intersección de todos los subespacios que contiene a dicha familia.**

Ejemplo

- Sean los subespacios S y W del Espacio Vectorial Real (R^3;+;R;.) tales que S es generado por los vectores u= (2;1;4) y
  v = (3; -1; 0); y W={(x;y;z)/x-3y-z=0}

a) Expresar S por comprensión.

b) Hallar una base de W.

c) Escribir un elemento de W, y hallar sus coordenadas en la base obtenida en b)

d) Representar gráficamente.

Ejemplo

- Sea S generado por los vectores u= (2 ; 1 ; 4) y v = (3 ; –1; 0),

  a) Expresar S por comprensión.

  b)Hallar una base de S y su dimensión.

  c) Determinar una terna que pertenezca S, y hallar sus coordenadas en la basa hallada en el ítem b.

- Sea W generado por el vector (4 ; –1 ; –1) .

  a) Expresar W por comprensión.

  b)Hallar: base de W y su dimensión

  Determinar una ternas v $\in$ W, y hallar las coordenadas de la terna "v" en la base obtenida en el ítem b)

TEOREMA DE EXTENSIÓN DE UNA BASE.

- **Si V= $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ es una base del espacio vectorial V, y**

  W=$\{ w_1, w_2,..., w_m\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero no de generadores de V , entonces existes vectores $w_{m+1}, w_{m+2},..., w_{m+p},$ tales que

  $\{ w_1, w_2,..., w_m ,w_{m+1}, w_{m+2},...,w_{m+p}\}$ es una base de V.

Ejemplo

- Modificar los siguientes conjuntos para que
  sean base de R^3:

a) $\{(2 ; 1 ; 4) , (3 ; -1; 0)\}$

b) $\{(4 ; -1 ; -1) \}$.

c) $\{(2;1; -3); (1; 2 \ \ -1); (0; 0; 0)\}$

d) $\{1;2;3);(4; -1;0);(2; 0; -1); (1; -1; 2)\}$

COROLARIOS.

- **Todo conjunto de *más de n vectores* de un espacio vectorial n-dimensional es *linealmente dependiente*.**
- **Todo subconjunto de V que contenga *menos de n* vectores *no es sistema generador de V*.**
- ***n vectores linealmente independientes* de un espacio vectorial de *dimensión n* constituye una *base* del mismo.**
- **Todo *sistema de generadores de n vectores* de un espacio vectorial n-dimensional es una *base* del mismo.**